

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Física  
Programa de Pós-graduação em Física

Fabiana Carvalho dos Anjos

Maceió  
Novembro/2020

Fabiana Carvalho dos Anjos

# Análise do comportamento crítico de modelos de não-equilíbrio na presença de voos de Lévy

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Doutora em Física.

Orientador: Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria

Maceió

Novembro/2020

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

A599a Anjos, Fabiana Carvalho dos.

Análise do comportamento crítico de modelos de não-equilíbrio na presença de voos de Lévy / Fabiana Carvalho dos Anjos. – 2020.  
85, [17] f. : il., figs. e tabs. color.

Orientador: Iram Marcelo Gléria.

Coorientador: Marcelo Lyra.

Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 74-84.

Inclui anexos.

1. Transições de fase. 2. Expoentes críticos. 3. Voos de Lévy. I. Título.

CDU: 53

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**

**TESE DE DOUTORADO**

**“Análise do comportamento crítico de modelos de não-equilíbrio  
na presença de voos de Lévy”**

**por**

**Fabiana Carvalho dos Anjos**

A Banca Examinadora composta pelos professores Iram Marcelo Gléria (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Marcelo Leite Lyra, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Vinícius Manzoni Vieira, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Adauto José Ferreira de Souza, da Universidade Federal Rural de Pernambuco e Umberto Laino Fulco, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, consideram a candidata **aprovada com grau “A”**.

Maceió, 20 de novembro de 2020.



Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria



Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra



Prof. Dr. Vinícius Manzoni Vieira



Prof. Dr. Adauto José Ferreira de Souza



Prof. Dr. Umberto Laino Fulco

## DEDICATÓRIA

“Dedico este trabalho aos meus pais, Luísa e Estevão, pelo amor incondicional, incentivo na busca pelo conhecimento e por ensinarem os valores mais nobres de um ser humano (honestidade, respeito, responsabilidade, tolerância e humildade)”.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais (Luisa e Estevão) pelo amor e suporte na busca pelos meus objetivos. Aos meus queridos irmãos (Adriana, Atyca, Luciete, Berto e Cleonilson) pelo carinho, paciência e apoio nesta jornada. Meus amados sobrinhos (Guilherme, Mariana, Victor e Rodrigo) pelo carinho, por proporcionarem tantos momentos felizes e marcantes na nossa família. Aos demais membros da família (Karla, Leonardo e Pedro) pelas palavras de incentivo e cuidado com todos da família.

Ao meu orientador, professor Dr. Iram Marcelo Gléria pelos ensinamentos, compreensão e paciência ao longo desta jornada (mestrado e doutorado).

Ao meu coorientador, professor Dr. Marcelo Leite Lyra, pelos conhecimentos compartilhados, paciência, confiança e dedicação ao longo desta jornada. Um exemplo de profissional e ser humano, por compartilhar sua genialidade de forma humilde e responsável.

Aos professores Dr. Alex Emanuel e Dr. Frederico Passos, sempre prestativos e acolhedores comigo no IFAL.

Ao professor Dr. Carlos Argolo pelos ensinamentos e colaborações.

Aos amigos, Júlio e Ícaro, por estarem ao meu lado diariamente no decorrer do doutorado. Amigos cuidadosos, estudiosos e dedicados, adoro vocês! Aos amigos (Giva, Jamerson, Elenilda e Tainã) pelo carinho e amizade ao longo da minha estadia em Maceió. Levarei todos vocês para minha vida!

Aos meus queridos amigos e colegas do covento 10 (Carol, Cibeli, Luan, João Pedro e Fabiana) pela convivência harmoniosa, a alegria, o carinho e os favores (pessoais e acadêmicos). Em especial, Carol e Cibeli, pelas conversas na sala, as viagens e as festas.

Aos meus amigos (Renan, Ana Cristina, Artur, Acácio, Camila, Amanda, Tiago, Lizandra, Géssica, entre outros) do Piauí mesmo distantes estavam sempre mandando mensagens de apoio e carinho.

Aos professores, coordenadores, secretários e demais funcionários do IF-UFAL. Em especial, o professor Dr. Wandearley por disponibilizar o cluster durante toda minha estadia na UFAL. Ao Victor pelo suporte prestado na secretaria do IF, sempre de forma eficiente e respeitosa.

Ao Instituto Federal de Alagoas-IFAL, pelo suporte na realização deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A Deus, por ter colocado tantas pessoas especiais no meu caminho.

## RESUMO

Nesta tese, usamos simulações de Monte Carlo nas nossas pesquisas para investigarmos as transições de fase contínuas de não-equilíbrio em modelos com processos de difusão, ramificação e aniquilação. Inicialmente, consideramos um modelo de ramificação e aniquilação de caminhantes aleatórios, com conservação da paridade de difusão de longo alcance. Obtivemos o conjunto de expoentes críticos dinâmicos associados ao crescimento do número de partículas e suas flutuações, bem como a relação do momento. Os parâmetros de controle são a probabilidade de difusão  $p$  e o expoente de Lévy  $\alpha$ , esse parâmetro controla o alcance do voo de Lévy. Os resultados mostraram três regimes, em função de  $\alpha$ : em  $\alpha \leq 5/2$ , a ramificação infinitesimal leva a um crescimento explosivo do número de partículas (uma transição de fase dinâmica ocorre para  $\alpha > 5/2$ ); para  $\alpha > 7/2$  o regime de curto alcance é atingido; no regime intermediário ( $3/2 < \alpha < 7/2$ ) os expoentes variam continuamente. Além disso, estudamos a dinâmica de processos de ramificação e aniquilação com interações de longo alcance. Neste caso, partículas estáticas geram um descendente e se aniquilam após o contato. A distância de ramificação deve seguir uma distribuição de lei de potência tipo Lévy. Analisamos o comportamento do número médio de partículas e suas flutuações em função do parâmetro que controla o alcance do processo de ramificação. Nossos resultados mostram que o expoente associado com a flutuação do número de partículas varia continuamente se  $\alpha < 4$ . Enquanto o expoente associado com o número de partículas passa a variar para  $\alpha < 3$ . Relatamos distribuições de valores extremos, Frechet (em  $\alpha = 3$ ) e Gumbell (para  $2 < \alpha < 3$ ). Em  $\alpha > 3$ , distribuições gaussianas foram observadas.

**Palavras-chave:** Transição de fase; expoentes críticos; voos de Lévy.

## ABSTRACT

In the present in the present work we investigate continuous phase transitions of non-equilibrium in models with diffusion, branching and annihilation processes. Initially, we consider a parity conserving model of branching and annihilating random walkers with long-range diffusion. We obtained the set of critical exponents associated to the growth in the number particles and its fluctuations, as well as the second- order moment ratio. Diffusion and branching processes are controlled by a diffusion probability  $p$  and the flight distance follows a Lévy distribution with exponent  $\alpha$ . Three regimes were identified, in function of the Lévy exponent  $\alpha$ : for  $\alpha \leq 5/2$  infinitesimal branching is relevant and leads to an explosive growth of the particle number (a phase transition takes place for  $\alpha > 5/2$ ); short-range power-law scaling occurs for  $\alpha > 7/2$ ; in the intermediate regime ( $3/2 < \alpha < 7/2$ ), continuously varying exponents. In another contribution, we study the dynamics of the branching and annihilating process with long-range interactions. Static particles generate an offspring and annihilate upon contact. The branching distance is supposed to follow a Lévy-like power law distribution. We analyze the long term behavior of the mean particles number and its fluctuations as a function of the parameter  $\alpha$  that controls the range of the branching process. We show that the dynamic exponent associated with the particle number fluctuations varies continuously for  $\alpha < 4$ , while the particle number exponent only changes for  $\alpha < 3$ . We report extreme value distributions, Frechet ( for  $\alpha = 3$ ) e Gumbell (for  $2 < \alpha < 3$ ). For  $\alpha > 3$ , Gaussian distributions were observed. We use Monte Carlo simulations.

**Keywords:** Phase transition; critical exponents; Lévy flights.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama de fases em termos da pressão contra a temperatura, de um fluido simples. . . . .	15
2.2	Gráfico de $\frac{T}{T_c}$ versus $\frac{\rho}{\rho_c}$ para diferentes fluidos. Curva de coexistência para distintos fluidos. . . . .	20
2.3	Percolação Isotrópica de uma rede retangular. As ligações ativas entre os sítos são representadas por linhas sólidas. As ligações inativas entre os sítos são representadas por linhas pontilhadas. . . . .	22
2.4	Percolação Direcionada as linhas sólidas representam as ligações ativas e as ligações inativas estão representadas por linhas pontilhadas. . . . .	23
2.5	Ilustração de um processo estocástico em um modelo do processo de contato (PC). Os círculos em negrito representam os sítios ativos (indivíduos infectados) e os círculos vazios representam os sítios inativos (indivíduos saudáveis). Os indivíduos são infectados de acordo com uma taxa $\lambda$ e do estado em que se encontra seus vizinhos. Os indivíduos tornam saudáveis espontaneamente com taxa unitária. Em uma rede unidimensional, $S_i$ representa o sítio examinado, $S_{i+1}$ o vizinho da direita e $S_{i-1}$ o sítio vizinho da esquerda. . . . .	25
2.6	Ilustração dos comprimentos de correlação $\xi_{\perp}$ e $\xi_{\parallel}$ , em um modelo da PD na região crítica ( $p < p_c$ e $p > p_c$ ). Em $A$ e $B$ , o espalhamento ocorre a partir de uma única semente. Em $C$ e $D$ , o espalhamento ocorre a partir de uma rede completamente ocupada. . . . .	28
3.1	A figura mostra a trajetória de uma partícula executando movimento browniano. . . . .	39
3.2	Ilustração da distribuição de Lévy (saltos de longo alcance) as linhas representam os saltos das partículas. . . . .	40

- 4.1 Distribuição espaço-tempo do número de partículas, partindo da mesma configuração inicial de uma partícula no centro da rede em um modelo BARW . Em 1(a) a amostra foi executada para  $\alpha = 3$  e com a probabilidade crítica  $p_c = 0.814$ . Em 1(b) a amostra foi executada para  $\alpha = 5$  e com a probabilidade crítica  $p_c = 0.525$ . Observe que a distribuição espaço-tempo se torna menos conectado à medida que o processo de difusão se torna mais longo. . . . . 47
- 4.2 As simulações foram realizadas numa rede de  $9 \times 10^5$  sítios com valores da difusão  $p$  abrangendo a região abaixo da transição de fase, a região da criticalidade e acima da transição de fase. Observamos o crescimento temporal do número médio de partículas em (a) e (b). A flutuação do do parâmetro de ordem em função do tempo em (c) e (d). Ambas as medidas para  $\alpha = 3$  e  $\alpha = 5$ , respectivamente. . . . . 48
- 4.3 Simulações para o expoente de Lévy  $\alpha = 3$  e  $\alpha = 5$  numa rede de  $9 \times 10^5$  sítios, com  $10^6$  etapas de tempo. As curvas correspondem a valores para  $p < p_c$ ,  $p = p_c$  e  $p > p_c$ . Em (a) e (b) temos a medida do expoente  $\phi$  em função de  $1/\log(t)$ . Em (c) e (d) temos a medida do expoente  $\theta$  em função de  $1/\log(t)$ . No regime de tempo longo a probabilidade crítica  $p_c$  é sinalizada por uma curva com comportamento constante. . . . . 49
- 4.4 A representação gráfica da evolução temporal  $U$ . Em (a) temos curvas para  $\alpha = 3$  e em (b) temos curvas de  $\alpha = 5$ , em ambos os casos com distintos valores de  $p$ . . . . . 50
- 4.5 Em (a) temos os resultados da probabilidade crítica  $p_c$  em função dos valores do expoente de Lévy  $\alpha$ . Para o modelo com difusão de longo alcance e o modelo com ramificação de longo alcance publicado em [82]. Em (b) gráfico dos os expoentes críticos dinâmicos  $\theta$ ,  $\phi$  e a razão do momento  $U$  em função da probabilidade de difusão crítica. . . . . 51

- 5.1 Distribuição de partículas no espaço-tempo para distintas valores de  $\alpha$ . Em (a)  $\alpha = 2,5$ , (b)  $\alpha = 3,0$ , (c)  $\alpha = 3,5$  e em (d)  $\alpha = 4,5$ . Observe que para  $\alpha$  pequeno, existem ramificações de longo alcance para regiões desocupadas da cadeia, o que favorece uma rápida ocupação da rede. Para  $\alpha$  grande, a ramificação de curto alcance predomina e o crescimento populacional é mais lento. . . . . 58
- 5.2 Em (a), apresentamos a evolução temporal da média número de partículas e (b) suas flutuações quadráticas para valores distintos de  $\alpha$ . A inclinação destas curvas fornecem expoentes dinâmicos. Observe que, enquanto o expoente dinâmico de  $N(t)$  começa a mudar para  $\alpha < 3$ , seu expoente de flutuação já se desvia do comportamento de curto alcance para  $\alpha < 4$ . . . . . 59
- 5.3 Expoentes dinâmicos associados ao número médio de partículas  $\theta$  e suas flutuações quadráticas  $\phi$  para valores distintos de  $\alpha$ . Para  $\alpha \geq 4$  os valores de curto alcance configuram  $\theta = \phi = 1$ . Em  $2 < \alpha \leq 3$ , encontramos  $\phi = 2\theta = 2/(\alpha - 2)$ . Se  $3 \leq \alpha \leq 4$  encontram-se regimes intermediários com  $\theta = 1$  e  $\phi = 5 - \alpha$ . . . . . 60
- 5.4 Histogramas do número de partículas para  $\alpha > 3$ . Em (a) temos  $\alpha = 3,5$ . Observamos uma lenta convergência para uma distribuição gaussiana. Em (b) temos  $\alpha = 4$  para o qual a convergência para gaussiano é mais rápido. . . . . 62
- 5.5 Em 5.5(a), apresentamos o histograma para o número de partículas  $N$  normalizadas sobre o número médio  $N/\bar{N}$  para  $\alpha = 2,3$  e  $\alpha = 2,7$ . Estes são ajustados por uma distribuição Gumbell com  $\sigma = 0,24$ ,  $\xi = 0$  e  $\mu = 0,88$  (linha sólida). Em 5.5(b), apresentamos  $P(N/\bar{N})$  para  $\alpha = 3,0$  em três instantes diferentes. O ajuste (linha sólida) representa uma distribuição de Frechet com  $\sigma = 0,12$ ,  $\xi = 0,17$  e  $\mu = 0,92$ . . . . . 62
- 5.6 Evolução temporal da frente de espalhamento  $x_{max}$  medida como a partícula com maior distância da posição da semente no tempo  $t$ . Se  $\alpha < 3$  observamos saltos resultantes de eventos raros de ramificações de longo alcance. . . . . 65

- 5.7 A distribuição média do número de ocupação  $\bar{n}(x)$  em função da distância normalizada à posição da semente  $x/x^*$ , onde  $\bar{n}(x^*) = n_0/2$ . Os dados são para  $\alpha = 4$  (círculos),  $\alpha = 3$  (quadrados) e  $\alpha = 2, 3$  (losangos). Em  $\alpha = 4$  a linha sólida é adequada à distribuição Fermi-Dirac dada na equação 5.11. Para  $\alpha = 2, 3$ , no gráfico inserido, a linha sólida é adequada à distribuição de Fermi-Dirac no contexto de estatísticas não extensivas fornecidas na equação 5.12. Esses resultados foram obtidos em  $t = 100$  de  $10^4$  realizações distintas. . . . . 66

# Lista de Tabelas

3.1	Probabilidade crítica $p_c$ e o expoente $\beta$ para $n = 1 - 5$ . . . . .	35
3.2	Estimativas da localização do ponto crítico $p_d^c$ e dos expoentes críticos $\delta$ , $\eta$ e $z$ . Obtidos a partir de simulações dependentes de tempo para distintos valores da aniquilação espontânea $p_a$ . . . . .	36
3.3	Resultados de simulações para o modelo criando $n = 4$ descendentes em uma rede unidimensional. . . . .	37
3.4	Pontos críticos e expoentes críticos dos modelos do PC generalizado submetido a trocas de Lévy (do inglês CP with Lévy exchanges-CPLF), o PC com interações de longo alcance (CP with long-range interactions-CPLRI), a Ramificação e Aniquilação com voos de Lévy (Branching annihilating Lévy flights-BALF), Ramificação e Aniquilação de Caminhantes Aleatórios (Branching and Annihilating random walk-BARW) e da classe de universalidade PD. . . . .	42
3.5	Medida do ponto crítico e expoentes para vários valores de <i>sigma</i> . O número entre parênteses é uma estimativa de erro da medida. . . . .	43
4.1	Estimativa da probabilidade crítica de difusão $p_c$ , expoente associado a flutuação do parâmetro ordem $\phi$ , o expoente de espalhamento $\theta$ e razão do momento $U$ . Todas as quantidades são calculadas para vários valores do expoente de Lévy. . . . .	52

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
1.1	Estrutura da Tese . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Transição de Fase e Fenômenos Críticos</b>	<b>14</b>
2.1	Introdução . . . . .	14
2.2	Sistemas de não-equilíbrio . . . . .	20
2.3	Percolação Direcionada - (PD) . . . . .	21
2.3.1	Processo de Contato - (PC) . . . . .	23
2.4	Exponentes críticos das transições para estados absorventes . . . . .	25
2.4.1	Exponentes Críticos de natureza universal $\beta, \beta', \nu_{\parallel}$ e $\nu_{\perp}$ . . . . .	26
2.4.2	Os expoentes dinâmicos $\theta, \delta$ e $z$ . . . . .	28
2.4.3	Efeito tamanho finito . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Transição de fase de não-equilíbrio em sistemas estocásticos de partículas interagentes</b>	<b>31</b>
3.1	Introdução . . . . .	31
3.2	Ramificação e Aniquilação de Caminhantes Aleatórios-Branching Annihilating Random Walks(BARW) . . . . .	32
3.2.1	Ramificação com número ímpar de descendentes . . . . .	34
3.2.2	Ramificação com número par de descendentes . . . . .	36
3.3	Difusão Normal - Movimento Browniano versus Difusão Anômala - Vôo de Lévy . . . . .	38
3.4	Ramificação e Aniquilação com Vôos de Lévy - Branching and annihilating Lévy flights (BALF) . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Sistema com conservação da paridade, Ramificação e Aniquilação de caminhantes aleatórios com difusão de longo alcance</b>	<b>44</b>

---

4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	O modelo . . . . .	45
4.3	Simulações e Resultados . . . . .	47
4.4	Considerações Finais . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Modelo com ramificação pura com voos de Levy e aniquilação</b>	<b>54</b>
5.1	Introdução . . . . .	54
5.2	O modelo . . . . .	55
5.3	Simulações e Resultados . . . . .	57
5.4	Considerações Finais . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>69</b>
6.1	Conclusão . . . . .	69
6.2	Perspectivas para futuros trabalhos . . . . .	71
	<b>Referências</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>ANEXO A: Artigos aceitos para publicação</b>	<b>85</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A difusão é um processo natural que ocorre em diversas situações cotidianas. Como exemplo, podemos citar os gases emitidos em processos industriais ou escapamentos dos carros. Após a emissão, estes gases se espalham pelo ar atmosférico e depois de um tempo não se pode mais distingui-los, visto que ocorreu a difusão pelo ar [1]. Difusão pode ser entendida como o movimento aleatório de algo (moléculas, íons, ideias, entre outros) de uma região de maior concentração para uma região de menor concentração [2]. Trata-se de um conceito amplo podendo ser aplicado em áreas como física, biologia, química, entre outras.

Esse fenômeno, acompanhado de outros processos, influenciam na organização de determinadas substâncias ou espécies, podendo ocorrer em reações químicas ou outras interações em sistemas com mais de uma substância ou espécie. São denominados processos com reação-difusão aqueles que contemplam a difusão e a interação entre os reagentes que compõem o sistema [1]. Em outras palavras, um sistema de reação-difusão consiste em uma coleção de partículas (de uma ou várias espécies) movendo-se e interagindo umas com as outras com probabilidades ou taxas específicas [3].

Particularmente, no contexto de sistemas de não-equilíbrio, isto é, que não obedecem a condição do balanço detalhado <sup>1</sup> e evoluem para estados irreversíveis, as transições de fase contínuas entre um estado ativo e um estado absorvente é uma área de grande interesse da física estatística. Esse tipo de transição pode ser encontrada em alguns mode-

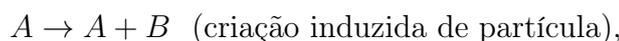
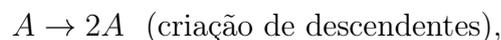
---

<sup>1</sup>Para todo par de estados  $c$  e  $c'$ , a probabilidade de transição  $P_{c \rightarrow c'}(t) = P_{c' \rightarrow c}(t)$ , isto é, a probabilidade de transição do estado  $c$  para  $c'$  é a mesma do seu inverso.

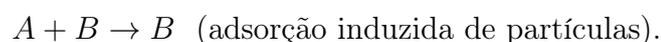
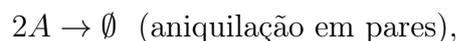
los de dinâmica de populações, processos químicos, a propagação de uma epidemia, entre outros, e os processos de reação e difusão podem auxiliar no conhecimento e descrição destes sistemas. Isso levou ao interesse dos estudos de sistemas de reação-difusão, analisados mediante alguns métodos: como técnicas analíticas ou métodos de aproximação e simulação computacional, esse último de particular interesse nesta tese.

Modelos teóricos foram desenvolvidos com o intuito de descrever sistemas com processos de reação e difusão. De modo geral, os átomos, moléculas ou espécies envolvidas são interpretadas como partículas de várias espécies representadas por  $A, B, C$ , etc. O modelo é especificado pelas posições das partículas, podendo expressar como  $s_i = s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ , representando o vácuo e as partículas, respectivamente. As principais reações possíveis de ocorrer nestes processos são:

- As reações unitárias - são transições espontâneas de partículas individuais, sendo os exemplos mais importantes:



- As reações binárias - são as transições entre duas partículas que se encontram no mesmo local ou em locais vizinhos. Os exemplos mais importantes, são:



Além disso, as partículas podem difundir com certas taxas da mesma maneira que nos processos mencionados anteriormente. Ressaltamos que podem existir dois tipos de processos: processos com *reação-limitada* são aqueles com as reações dominantes em relação a difusão e os processos com *difusão-limitada* aqueles em que a difusão é bem mais frequente que as reações [4]. Os modelos que tratam da disseminação de uma doença infecciosa, por exemplo, os locais da rede são considerados indivíduos que podem ser saudáveis ou infectados. Os indivíduos infectados podem se recuperar (aniquilação espontânea de partícula) sozinhos ou infectar (a criação espontânea de partícula) os vizinhos mais próximos. Dependendo da taxa de infecção, o processo de disseminação pode sobreviver ou evoluir para um estado inativo em que a infecção é completamente eliminada [5]. No limite de tamanhos grandes do sistema, os dois regimes de sobrevivência e extinção são separados por uma transição de fase contínua, caracterizada por um comportamento universal e descrita por um conjunto de expoentes críticos. Esses expoentes permitem que transições de fase em diferentes modelos sejam categorizadas em classes de universalidade. A classe de universalidade mais importante que exhibe esse tipo de transição é a Percolação Direcionada-PD (no inglês *Directed Percolation-DP*). Modelos que exibem esse comportamento são o Processo de Contato-PC (no inglês *Contact Process-CP*) e o Processo de Contato em Pares (no inglês *Pair Contact Process-PCP*) [6], por exemplo. Contudo, temos outras classes de universalidade em modelos de não-equilíbrio, por exemplo, a Conservação Paridade-CP (no inglês *Parity Conserving (PC)*) e o Processo de Contato em Pares com Difusão-PCPD (no inglês *pair-contact process with diffusion - PCPD*).

O processo de contato em pares com difusão é um processo clássico de reação-difusão que descreve partículas de uma única espécie que difundem e reagem entre si após o contato [7]. A versão mais simples do modelo envolve os processos:  $2A \rightarrow 3A$  (fissão),  $2A \rightarrow \emptyset$  (aniquilação) e difusão. O modelo possui uma transição de fase contínua de não-equilíbrio, caracterizada por dois estados: um estado ativo (descrito por uma densidade de partículas) ou um estado absorvente (descrito por uma rede vazia ou ocupado por uma única partícula difundindo). A fase ativa e a fase absorvente são separadas por uma transição de fase contínua com um comportamento crítico não-trivial [2, 6]. A difusão é um processo relevante no modelo, pois na sua ausência o modelo pertence a classe de universalidade PD [8, 9]. O modelo apresenta uma nova classe de universalidade e possui

---

um comportamento crítico instável [10]. Apesar disso não é afetado pela paridade, mas perturbações que impedem a difusão de partículas individuais faz com que o sistema apresente o comportamento da PD [10].

Na linguagem de sistemas de reação-difusão, a Ramificação e Aniquilação de Caminhantes Aleatórios (no inglês *Branching and Annihilating Random Walks-BARW*) descreve a dinâmica estocástica de partículas de uma única espécie que difundem em uma rede, ramificam  $n$  descendentes e aniquilam após o contato. Em geral, existe um estado ativo para uma probabilidade de difusão pequena e a densidade vai desaparecendo continuamente quando o sistema vai se aproximando da transição [11, 12]. O número de descendentes desempenha um papel crucial na classe de universalidade do modelo, se o número de descendentes gerados for ímpar o comportamento é da PD e se o número de descendentes gerados for par o comportamento é da CP [13].

De acordo com a conjectura de Janssen e Grassberger [14], uma das condições para as transições de fase contínuas para um estado absorvedor em sistemas de reação-difusão pertencer a classe de universalidade PD é que as interações sejam locais. Porém, em muitos processos de propagação realistas, as interações de curto alcance não descrevem adequadamente o mecanismo de transporte [15]. Essa situação surge, por exemplo, se uma doença infecciosa é transportada por insetos, onde observa-se voos por longas distâncias antes que a próxima infecção ocorra. Em nível teórico, originalmente foi proposto por Mollison [16, 17] que o agente de espalhamento é transportado por voos de Lévy, e a adição de interações de longo alcance foi introduzida a fim de descrever de maneira mais real esse processo. Dessa forma, as interações de longo alcance foram incorporadas aos modelos teóricos de não-equilíbrio, por exemplo, em sistemas de Ramificação e Aniquilação com voos de Lévy (no inglês *Branching and annihilating Levy flights*) apontando que as interações de longo alcance afetam o comportamento crítico do sistema [18, 19]. Em capítulos posteriores, serão apresentadas uma análise mais detalhada destes sistemas.

O estudo das transições de fase de não-equilíbrio é um campo que ainda requer intensa atividade de pesquisa, pois não se encontra bem estabelecido os elementos relevantes (a dimensão do sistema e o alcance das interações, por exemplo) que determinam o comportamento crítico e a classe de universalidade. Desse modo, nesta tese, estudamos sistemas de não-equilíbrio entre uma fase ativa e uma fase absorvedora que apresentam uma transição de fase contínua. Especificamente, revisitamos o modelo Ramificação e

Aniquilação de Caminhantes Aleatórios e um sistema puramente de ramificação e aniquilação de longo alcance. Estudamos como as interações de longo alcance e a conservação da paridade afetam a dinâmica dos sistemas, caracterizamos os distintos regimes apresentados quando mudanças nas interações são alteradas. Essas pesquisas foram realizadas numericamente, via simulações de Monte Carlo.

## 1.1 Estrutura da Tese

No presente trabalho, buscamos investigar como a conservação da paridade e as interações de longo alcance podem afetar a dinâmica de modelos de não-equilíbrio. Realizamos simulações em modelos unidimensionais em que estudamos a evolução temporal do parâmetro de ordem e suas flutuações para os regimes com interações locais e interações de longo alcance. A tese está organizada da seguinte maneira:

No capítulo 2, trazemos uma breve discussão sobre transição de fase e alguns conceitos básicos como parâmetro de ordem, expoentes críticos, classe de universalidade, entre outros. Em seguida, descrevemos a classe de universalidade Percolação Direcionada e o modelo de Processo de Contato.

A seguir, no capítulo 3, descrevemos o modelo de Ramificação e Aniquilação de Caminhantes Aleatórios e trazemos alguns resultados de pesquisas do modelo. Abordamos como o processo de ramificação é crucial na determinação da classe de universalidade do modelo. E mostramos resultados da literatura que revelam os efeitos que as interações de longo alcance podem ocasionar nas propriedades críticas do sistema.

No capítulo 4, trazemos nossos resultados para o modelo unidimensional com conservação da paridade na ramificação e a aniquilação de caminhantes aleatórios com difusão de longo alcance. Estudamos o crescimento médio do número de partículas, as suas flutuações do parâmetro de ordem e a razão do momento. Obtivemos o conjunto de expoentes críticos associados com as grandezas estudadas e caracterizamos os regimes de curto alcance e longo alcance.

No capítulo 5, abordaremos a dinâmica do processo de ramificação e aniquilação com interações de longo alcance. Mostramos o comportamento de longo prazo do número médio de partículas e suas flutuações em função do alcance das interações no processo de ramificação e obtivemos o conjunto de expoentes críticos associados. Mostramos as

funções de distribuições associadas, explorando os regimes de flutuações gaussianas e não-gaussianas, em que a distribuição do número de partículas exibem um cruzamento do regime Gaussiano para distribuições de valores extremos (Frechet e Gumbell).

Finalmente, no capítulo 6, mostramos uma síntese dos nossos principais resultados, apresentamos brevemente algumas ideias de possíveis de extensões dos trabalhos aqui apresentados, como também perspectivas para novos trabalhos. Os artigos publicados, resultados desta tese, se encontram nos anexos.

# Capítulo 2

## Transição de Fase e Fenômenos Críticos

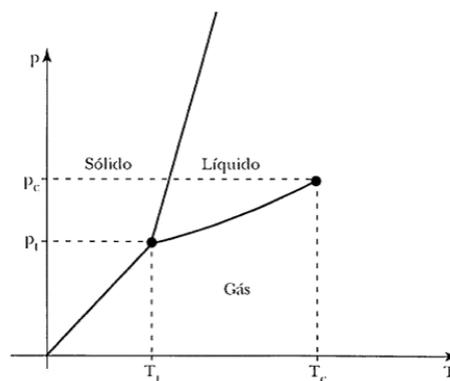
### 2.1 Introdução

Na natureza, a matéria composta por átomos e moléculas pode apresentar distintos níveis de organização. E essa diversidade é responsável pelas diferentes propriedades físicas apresentadas pelos materiais nas fases gasosa, líquida e sólida, por exemplo. Uma fase termodinâmica é um estado da matéria em que as propriedades físicas macroscópicas da substância são uniformes numa escala de comprimento macroscópico, ou seja, consiste em um estado de equilíbrio de um sistema composto por muitas partículas [20]. No estado de equilíbrio, o sistema possui uma simetria bem definida e podemos dizer que uma transição de fase é uma passagem do sistema com uma determinada simetria para outra fase com uma simetria diferente.

A primeira classificação dos tipos de transição de fase da matéria foi introduzida por Paul Ehrenfest, em 1933 [21]. Essa classificação se baseia no comportamento da energia livre em função de outras quantidades termodinâmicas. De acordo com essa classificação, a transição de fase é de primeira ordem quando existe uma descontinuidade na primeira derivada da energia livre com relação a alguma variável termodinâmica. E a transição é dita contínua ou de segunda ordem caso a primeira derivada da energia livre em função de alguma quantidade termodinâmica for contínua e apresente descontinuidade em uma segunda derivada da energia livre.

Por outro modo, podemos classificar as transições de fase seguindo uma descrição mais moderna. Essa descrição pode ser feita observando o comportamento da grandeza chamada parâmetro de ordem, que assume um valor nulo em uma fase e na outra fase um valor não nulo. Quando o parâmetro de ordem se anula descontinuamente temos uma transição de primeira ordem. Por outro lado, se o parâmetro de ordem se anula de forma contínua temos a transição de fase dita de segunda ordem [22] e o ponto em que ocorre essa transição é o chamado ponto crítico. Os fenômenos que ocorrem nas proximidades de um ponto crítico são denominados fenômenos críticos.

Figura 2.1: Diagrama de fases em termos da pressão contra a temperatura, de um fluido simples.



Fonte: Referência [23]

As transições ocorrem devido a mudanças nas propriedades termodinâmicas do sistema causadas por variações de alguma condição externa, como temperatura, pressão ou campo magnético, dentre outros. A água, por exemplo, quando aquecida a uma pressão constante vai entrar em ebulição numa temperatura bem definida, chamada de temperatura crítica  $T_c$ . Em um diagrama a transição líquido-vapor é representado por uma linha que possui uma inclinação positiva uma vez que a temperatura de transição cresce com o aumento da pressão. À medida que a temperatura aumenta, a diferença entre as densidades do líquido e do vapor diminui até chegar em um ponto em que se anula, esse é o chamado ponto crítico. E neste caso, o parâmetro de ordem é representado pela diferença entre as densidades do líquido e do vapor. Outro importante exemplo de transição de fase ocorre numa substância ferromagnética que, quando aquecida, perde sua magnetização espontânea a uma temperatura bem definida, chamada temperatura de Curie.

Na figura 2.1 temos um diagrama de fases de um fluido simples em que observamos regiões sob domínio de fases sólida, líquida e gasosa. As linhas cheias separam as regiões e mostram a coexistências de fases. No ponto triplo,  $(T_t, P_t)$ , temos a coexistência das três fases: sólida, líquida e gasosa. Notamos que a curva de coexistência entre as fases líquida e gasosa não se estende indefinidamente e termina no ponto crítico  $(T_c, P_c)$ , onde as duas fases coexistem. Desta maneira, o ponto crítico é o local que determina o término da linha de coexistência e equivale ao estado em que as fases tornam-se idênticas.

Os estudos referentes às transições de fases receberam inúmeras contribuições com o objetivo de explicar tais fenômenos que estão presentes em uma grande variedade de sistemas, como: fluidos simples, materiais magnéticos, ligas metálicas, entre outros. Assim, ao longo dos anos, vários trabalhos foram desenvolvidos para entender esses fenômenos. Primeiramente, foi realizado por Andrews, em 1869, um estudo da transição de fase de maneira experimental [24], com o intuito de observar a partir do comportamento crítico do dióxido de carbono, o espalhamento da luz nas proximidades da transição.

Alguns anos depois van der Waals publicou a primeira teoria bem sucedida sobre as transições de fase em sistemas fluidos. Trata-se de um modelo analítico que foi desenvolvido com o intuito de encontrar uma equação de estado que incorporasse os efeitos das interações moleculares e com isso obter a descrição de sistemas próximos à temperatura crítica ou abaixo da mesma [23]. Diante disso, partindo da equação dos gases reais  $PV = nRT$ , onde  $R$  é a constante universal dos gases e  $n$  o número de moles, a equação de Van der Waals é dada por:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \quad (2.1)$$

em que  $a$  é o parâmetro que fornece a intensidade das interações e  $b$  corresponde ao volume ocupado por cada molécula. No ponto crítico, tomando  $T = T_c$ ,  $P = P_c$  e  $n = 1$ , a equação de van der Waals pode ser escrita na forma:

$$V^3 - \left(b - \frac{RT_c}{P_c}\right)V^2 + \frac{a}{P_c}V - \frac{ab}{P_c} = 0, \quad (2.2)$$

uma equação de terceiro grau em  $V$ , de onde obtemos os valores de  $P_c$ ,  $V_c$  e  $T_c$ :

$$V_c = 3b, \quad (2.3)$$

$$T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad (2.4)$$

$$P_c = \frac{a}{27b^2}, \quad (2.5)$$

utilizando  $p = \frac{P}{P_c}$ ,  $v = \frac{V}{V_c}$  e  $t = \frac{T}{T_c}$ , pode-se mostrar que a equação Van der Waals pode ser escrita na forma:

$$\left(p + \frac{3}{v^2}\right) \left(v - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}t. \quad (2.6)$$

É importante notar que a equação, escrita nessa forma, independe de  $a$  e  $b$ . A equação 2.6 mede pressão, volume e temperatura em termos da distância do ponto crítico e independe de qualquer constante que caracteriza o sistema em questão [22]. Diante disso, o resultado de van der Waals parece indicar a existência de um comportamento universal no ponto crítico.

Estudar como os sistemas se comportam no ponto crítico tornou-se de grande interesse, pois nesta região grandezas termodinâmicas (o calor específico, a compressibilidade, a suscetibilidade magnética, entre outras) apresentam comportamento peculiar, com divergências assintóticas caracterizadas por leis de potências e descritas por um conjunto de expoentes, chamados expoentes críticos.

Para definir um expoente crítico é conveniente introduzir um parâmetro de expansão, como segue:

$$\varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (2.7)$$

em que  $T_c$  corresponde a temperatura crítica e  $\varepsilon$  uma variável adimensional que mede o desvio da temperatura em relação à temperatura crítica. De modo geral, no ponto crítico todas as funções termodinâmicas podem ser escritas na forma [22]:

$$f(\varepsilon) = A\varepsilon^\lambda(1 + B\varepsilon^y + \dots), \quad (2.8)$$

em que  $y > 0$ ,  $A$  e  $B$  são constantes. Nas proximidades do ponto crítico o termo  $\varepsilon^\lambda$  é dominante e leva ao aparecimento de retas nos gráficos log-log, cuja inclinação fornece o valor do expoente  $\lambda$ . Sendo  $f(\varepsilon)$  uma função positiva e contínua para  $\varepsilon \ll 1$ , o expoente associado a  $f(\varepsilon)$ , por exemplo,  $\lambda$  é definido:

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (2.9)$$

ou usualmente como:

$$f(\varepsilon) \sim |f(\varepsilon)|^\gamma \quad (2.10)$$

onde assumimos que este limite exista, ou seja, a cada grandeza física teremos um expoente crítico associado. A equação anterior é uma maneira geral de definir expoente crítico para contemplar diferentes tipos de comportamentos, inclusive os que não sejam leis de potência.

Vejamos, a seguir, alguns expoentes críticos que descrevem o comportamento singular de grandezas físicas de interesse em uma transição contínua. Por exemplo, em uma transição líquido-gás (ver figura 2.1), as singularidades são bem representadas habitualmente por leis de potência e para isso as grandezas devem usadas como funções de desvios, como  $\frac{T - T_c}{T_c}$  e  $\frac{p - p_c}{p_c}$ , a temperatura e da pressão, respectivamente.

As densidades do líquido e do gás tornam-se iguais, ficando indistinguíveis uma da outra no ponto crítico. A diferença entre as densidades se anula no ponto crítico  $p_c$  de acordo com a lei de potência:

$$\rho_L - \rho_G \sim \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^\beta, \quad (2.11)$$

onde  $\rho_L$  corresponde a densidade do líquido,  $\rho_G$  corresponde a densidade do gás e  $\beta$  é o expoente que caracteriza o comportamento crítico das densidades do líquido e do gás, ou seja, este é o expoente associado ao parâmetro de ordem. Experimentalmente o expoente da transição líquido-gás de diversos fluidos possui o valor  $\beta \approx 0,34$  [22].

A maneira como a densidade e a pressão se aproximam dos seus valores no ponto crítico é da seguinte forma:

$$|p - p_c| \sim |\rho - \rho_c|^\delta, \quad (2.12)$$

em que  $\delta$  corresponde ao expoente crítico associado. Esse comportamento acontece ao longo da isoterma crítica, ou seja, em  $T = T_c$ . Experimentalmente este expoente tem valor  $6 > \delta \gtrsim 4$  [22].

A compressibilidade isotérmica é outra importante grandeza que caracteriza um fluido na criticalidade. Ao longo da isocórica crítica, em  $v = v_c$  e  $\rho = \rho_c$ , e em  $T > T_c$ , logo ela se comporta como:

$$\kappa_T \sim \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\gamma}, \quad (2.13)$$

em que  $\gamma$  representa o expoente associado, cujo seu valor experimental é  $\gamma \sim 1,3$  [22].

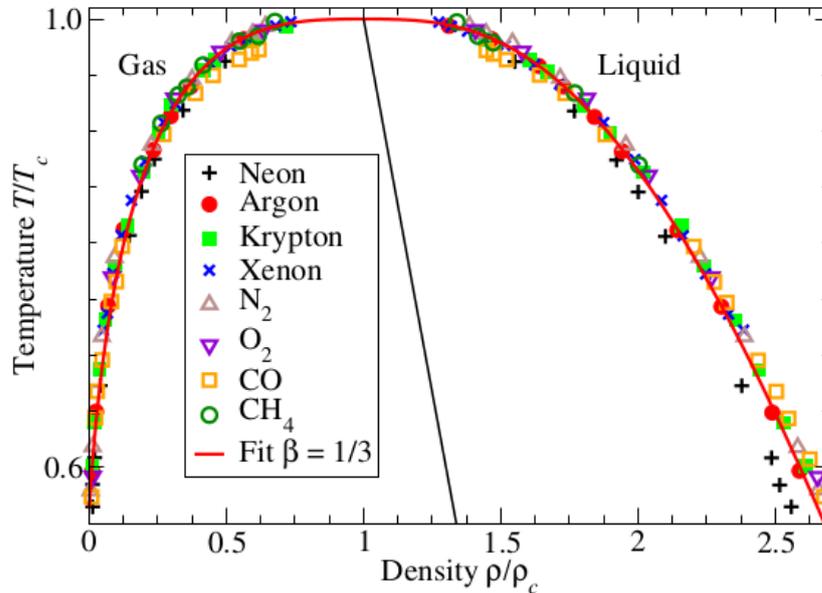
Estas leis de potências trazem os expoentes críticos  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\gamma$ , que caracterizam de forma concisa o comportamento das substâncias estudadas. Os resultados dos valores destes expoentes obtidos a partir da equação de van der Waals, são:  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = 1$  e  $\delta = 3$ , distintos dos valores experimentais. Isso mostra que os resultados obtidos a partir da equação (2.6) fornecem valores distintos dos resultados experimentais, evidenciando que a equação de van der Waals não descreve precisamente o comportamento crítico de um fluido. Por outro lado, a teoria aponta o caráter universal do comportamento crítico e isso é mostrado na equação (2.6), onde não temos dependência dos parâmetros  $a$  e  $b$  que caracterizam cada sistema.

Com os intensos estudos referentes ao comportamento crítico das transições de fase contínuas, foi observado que sistemas distintos exibem comportamentos de universalidade, ou seja, apresentam um mesmo conjunto de expoentes críticos. Na década de 50 e 60 foi reconhecido, experimentalmente, que quantidades como  $T_c$  dependem sensivelmente dos detalhes das interações, enquanto os expoentes críticos são universais, ou seja, eles dependem apenas em um pequeno número de características gerais [25]. Por volta de 1945, o físico inglês Edward Guggenheim fez um gráfico de  $\frac{T}{T_c}$  versus  $\frac{\rho}{\rho_c}$  com alguns fluidos distintos, na região do ponto crítico [26]. Foi observado que as linhas de coexistência dos fluidos se interceptam na região analisada, mostrando que os fluidos distintos apresentam o mesmo valor de expoentes críticos. A figura 2.2 apresenta o gráfico destes resultados, mostrando que os dados colapsam numa única curva, evidenciando a existência de um comportamento universal.

A hipótese da universalidade reduz a grande variedade de fenômenos para um pequeno número de classes, as chamadas classes de universalidade, que dependem apenas de poucos parâmetros fundamentais como a dimensão do sistema, a dimensão do parâmetro de ordem, o alcance das interações e das leis de conservação [25, 26]. Todos os sistemas pertencentes a uma dada classe de universalidade têm os mesmos expoentes críticos.

A transição líquido-vapor, por exemplo, pertence a classe de universalidade do modelo de Ising em três dimensões. Por outro lado, o modelo de Ising em duas dimensões apresenta expoentes distintos e forma uma nova classe de universalidade. Estes são alguns modelos e classes de universalidade de sistemas em equilíbrio, no entanto, de particular interesse nesta tese são os sistemas de não-equilíbrio, discutidos posteriormente.

Figura 2.2: Gráfico de  $\frac{T}{T_c}$  versus  $\frac{\rho}{\rho_c}$  para diferentes fluidos. Curva de coexistência para distintos fluidos.



Fonte: Referência [26]

## 2.2 Sistemas de não-equilíbrio

O estudo do comportamento crítico em sistemas de não-equilíbrio tem sido um tópico muito ativo em mecânica estatística, com aplicações em vários outros campos, como química, biologia e ciências sociais [27]. Mas os conceitos e técnicas que foram desenvolvidos para fenômenos críticos de equilíbrio também podem ser aplicados a transições de fase de não-equilíbrio. Em particular, as análises de conceito de parâmetros de ordem, universalidade e renormalização de grupos [25].

Aqui, estamos interessados em investigar modelos de não-equilíbrio que exibem uma transição contínua entre um estado ativo (estado com uma densidade de partículas) e um estado absorvedor (um estado em que a rede está vazia). Estas transições surgem de uma competição de processos concorrentes, geralmente processos de criação e aniquilação. A transição de qualquer estado para o estado absorvedor é permitida, no entanto, uma vez no estado absorvedor o sistema não evolui para outro estado. Essas transições são vistas em uma grande variedade de fenômenos encontrados em muitas situações na natureza, como propagação de epidemias, incêndios florestais, transporte em meios aleatórios, entre outros [26].

Como nos fenômenos críticos de equilíbrio, o principal objetivo em estudar estes sistemas se concentra na determinação dos expoentes críticos e a caracterização das propriedades universais. A classe de universalidade mais importante das transições de fase para um estado absorvente, que desempenha um papel paradigmático como o modelo de Ising na mecânica estatística de equilíbrio, é percolação direcionada (PD). Na literatura, existe uma variedade de classes de modelos de não-equilíbrio e discutiremos algumas posteriormente.

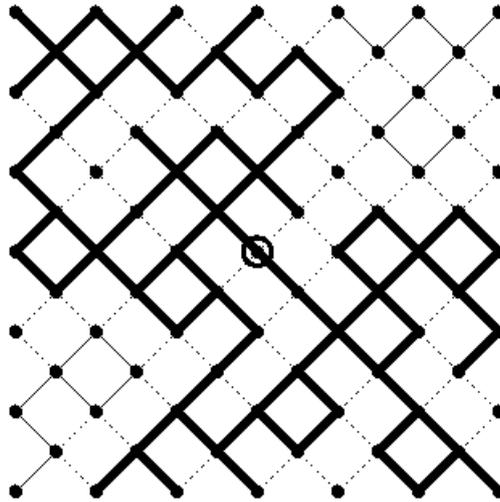
## 2.3 Percolação Direcionada - (PD)

Como mencionado anteriormente, a universalidade dos sistemas é caracterizada por singularidades na região da transição de fase e definida por um conjunto de expoentes críticos, estes agrupados em classes de universalidade. No que diz respeito aos fenômenos críticos de sistemas em equilíbrio estas ideias são bem estabelecidas, no entanto, isso não ocorre em sistemas de não-equilíbrio, embora seu conceito se aplique. A classe de universalidade Percolação Direcionada é a principal classe dos sistemas de não-equilíbrio.

O termo percolação (do latim *percolare* = filtrar) significa fazer um líquido passar por interstícios finos [28], frequentemente usado no contexto de filtragem. O filtro é constituído por uma substância porosa, como tecido, carvão ou papel. Alguns modelos foram introduzidos para estudar percolação, onde os poros do filtro são representados pelos sítios de uma rede. Os poros vizinhos são conectados por pequenos canais e representados pelas ligações da rede que conecta os sítios adjacentes. Na rede cada sítio pode estar ligado ao seu vizinho com uma probabilidade  $p$ , independentemente das demais. E cada sítio é desligado do seu vizinho com probabilidade  $1 - p$ .

Para uma probabilidade de ligação  $p$  pequena, implica dizer que existe poucas regiões com sítios conectados, ou seja, um líquido não percola em um meio poroso. No entanto, para uma probabilidade de ligação  $p$  grande existe um agrupamento infinito de sítios conectados. No caso de um líquido que percola sobre uma rede de canais conectados, a figura 2.3 mostra que o líquido percola no meio de forma arbitrária, chamada de percolação isotrópica. Acontece que em um sistema suficientemente grande há uma transição de fase de uma fase macroscopicamente permeável para outra fase não-permeável, essa transição é contínua e ocorre em um limite crítico bem definido  $p_c$ .

Figura 2.3: Percolação Isotrópica de uma rede retangular. As ligações ativas entre os sítos são representadas por linhas sólidas. As ligações inativas entre os sítos são representadas por linhas pontilhadas.



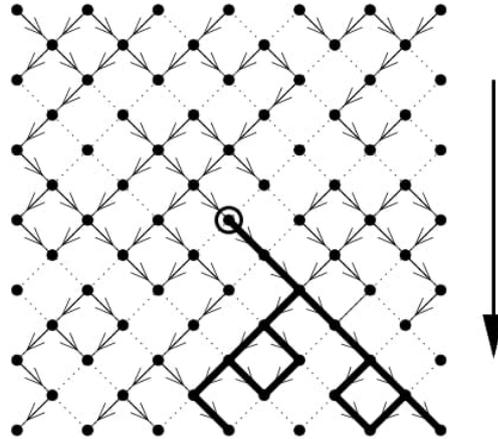
Fonte: Referência [4]

A Percolação Direcionada, introduzida em 1957 por Broadbent e Hammersley [29], é uma variante da percolação isotrópica. Neste modelo, cada sítio da rede pode possuir apenas dois estados, são eles: ativo (por exemplo, indivíduo infectado) ou inativo (por exemplo, indivíduo saudável), a medida que o parâmetro de controle é modificado o sistema pode atingir o estado ativo ou o estado inativo. Sendo este último o chamado estado absorvente do modelo em que o sistema fica aprisionado, isto é, uma transição do estado absorvente para qualquer outro estado é proibido. A PD é um modelo de não-equilíbrio que exibe uma transição de fase contínua entre a fase ativa e a fase inativa caracterizada por um comportamento crítico descrito por um conjunto universal de expoentes críticos [4].

Na figura 2.4 temos uma representação da PD, as linhas sólidas representam as ligações ativas e sendo que as ligações inativas estão caracterizadas por linhas pontilhadas. É importante observar que a PD consiste numa variação da percolação isotrópica, isto é, possui as mesmas características da percolação isotrópica acrescentado que o sistema percola em uma direção preferencial. Isto é, a PD foi originalmente definido como um modelo geométrico para conectividade de canais aleatórios que consiste numa generalização da percolação isotrópica.

Transições da percolação direcionada ocorrem, por exemplo, em sistemas que des-

Figura 2.4: Percolação Direcionada as linhas sólidas representam as ligações ativas e as ligações inativas estão representadas por linhas pontilhadas.



Fonte: Referência [4]

crevem a propagação de epidemias como o processo de contato, reações catalíticas, o autômato celular, entre outros. A característica comum de todos esses modelos é a existência de um estado de absorção, isto é, uma configuração que o modelo pode alcançar, mas de onde não pode escapar. Na maioria dos casos, o estado de absorção é apenas a rede vazia. A existência de um estado absorvente implica que certos processos microscópicos são proibidos, por exemplo, criação espontânea de partículas  $\emptyset \rightarrow A$  [25].

A variedade de modelos pertencentes a classe PD levou Janssen e Grassberger [5] à conjecturar que um modelo deve pertencer a esta classe de universalidade se as seguintes condições se mantiverem: o modelo exibe uma transição de fase contínua de uma fase ativa para um estado absorvente, a transição é caracterizada por um parâmetro de ordem positivo de um componente, as regras dinâmicas envolvem apenas processos de curto alcance e se sistema não possui atributos especiais, como simetrias adicionais [26]. Essa conjectura é altamente apoiada por evidências numéricas.

### 2.3.1 Processo de Contato - (PC)

O modelo de rede mais simples que exibe o mesmo comportamento da PD é o Processo de Contato-PC. Esse modelo foi introduzido inicialmente por Harris, em 1974, para modelar o espalhamento de uma epidemia sem imunização [30, 31]. No modelo PC original, cada local de uma rede representa um organismo que existe em dois estados:

saudável ou infectado. Nesta terminologia sítios infectados são considerados ocupados e sites saudáveis vago. E a infecção se espalha através do contato vizinho mais próximo.

O processo de contato consiste em um sistema de partículas interagentes distribuídas em sítios de uma rede e evoluem segundo regras locais e markovianas. No contexto de propagação de uma epidemia, dependendo das taxas relativas de infecção e recuperação, a doença epidêmica pode se espalhar por toda a população ou desaparecer após algum tempo. Em um sistema  $d$ -dimensional os sítios da rede serão ocupados por indivíduos saudáveis ( $S_i = 0$ ) ou por indivíduos infectados ( $S_i = 1$ ). Um sítio  $S_i$  escolhido aleatoriamente pode alterar seu estado de acordo com as regras:

$$S_i = 0 \rightarrow S_i = 1, \quad (2.14)$$

um indivíduo saudável torna-se infectado, mas isso vai depender do número de vizinhos infectados  $n$ . A taxa de transição será  $\lambda n/2d$  em que  $d$  é a dimensão da rede e  $\lambda$  o parâmetro controla a taxa de infecção e desempenha o papel da probabilidade de percolação. Esse processo corresponde ao proceso de criação autocatalítica de processos. Se o sítio escolhido estiver ocupado com um indivíduo infectado, temos:

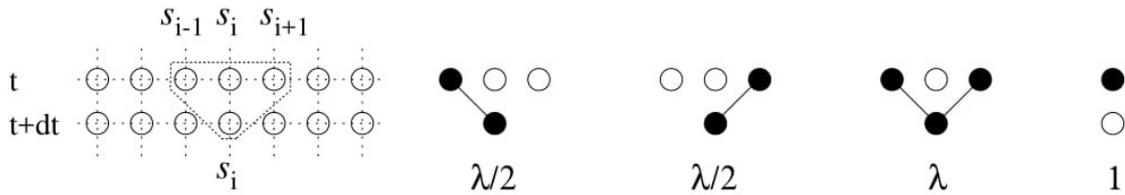
$$S_i = 1 \rightarrow S_i = 0, \quad (2.15)$$

se o sítio escolhido possuir um indivíduo infectado ele fica saudável com uma taxa unitária, independentemente do estado dos seus vizinhos. É importante salientar que neste modelo que a recuperação não torna os indivíduos imunes. A figura 2.5 mostra os processos descritos pelas equações 2.19 e 2.20, nela temos que o sítio  $S_i$  é o sítio sorteado em aleatório,  $S_{i-1}$  seu vizinho antecessor e  $S_{i+1}$  seu vizinho sucessor.

Variando o parâmetro de controle  $\lambda$ , o sistema atinge seu valor crítico  $\lambda_c$ . Em se tratando da propagação de uma epidemia temos um processo dinâmico em que indivíduos são infectados e se recuperam continuamente. Na sua evolução temporal, o sistema pode atingir estados onde temos:

- todos indivíduos na rede estão saudáveis e não existe indivíduos infectados. Assim, a doença não possui meios para se propagar. Este é o chamado estado absorvente.
- o sistema pode evoluir para o estado ativo em que a epidemia nunca desaparece

Figura 2.5: Ilustração de um processo estocástico em um modelo do processo de contato (PC). Os círculos em negrito representam os sítios ativos (indivíduos infectados) e os círculos vazios representam os sítios inativos (indivíduos saudáveis). Os indivíduos são infectados de acordo com uma taxa  $\lambda$  e do estado em que se encontra seus vizinhos. Os indivíduos tornam saudáveis espontaneamente com taxa unitária. Em uma rede unidimensional,  $S_i$  representa o sítio examinado,  $S_{i+1}$  o vizinho da direita e  $S_{i-1}$  o sítio vizinho da esquerda.



Fonte: Referência [4]

completamente. No entanto, não contamina a totalidade de indivíduos uma vez que se recuperam continuamente.

O PC comentado aqui consiste na sua forma original. No entanto, existem algumas variações do modelo na literatura, por exemplo, o Processo de Contato em Pares-PCP introduzido por Jensen [6]. Trata-se de um modelo com infinitos estados absorventes mostrando uma transição de fase contínua, cujos processos de reação-difusão só ocorrem em pares de partículas. Por possuir infinitos estados de absorção, a conjectura DP de Janssen e Grassberger não pode ser aplicada. Porém, intensamente investigado por simulações (incluindo [32]-[36]) foi mostrado que o modelo possui o mesmo comportamento universal da PD, apesar da estrutura diferente da fase absorvedora.

## 2.4 Expoentes críticos das transições para estados absorventes

Como na mecânica estatística de equilíbrio, verifica-se que as transições de fase contínuas em sistemas de não-equilíbrio podem ser agrupadas em classe de universalidade associadas a certos expoentes críticos. Na percolação direcionada e em outras transições de fase de não-equilíbrio para estados absorventes, a situação é muito semelhante com o caso de sistemas de equilíbrio [28, 37]. No entanto, como o sistema de não-equilíbrio envolve

tempo e espaço, conseqüentemente, existem dois comprimentos de correlação diferentes: um comprimento de correlação espacial e o comprimento de correlação temporal. E com isso, nestes sistemas os expoentes são classificados em estáticos e dinâmicos.

A fim de estudar quantitativamente esses problemas técnicas numéricas como simulações de Monte Carlo se tornaram uma ferramenta importante. Por causa da crescente capacidade computacional, os expoentes críticos podem ser estimados com considerável precisão. Em geral, nas simulações de um sistema exibindo uma transição de fase absorvente, é necessário especificar o tipo de rede e as condições de contorno.

### 2.4.1 Expoentes Críticos de natureza universal $\beta$ , $\beta'$ , $\nu_{\parallel}$ e $\nu_{\perp}$ .

Em geral, transições de fase para estados absorventes são caracterizadas por um conjunto expoentes críticos, sendo que outros expoentes geralmente estão relacionados a esses por relações de escala. Nestas transições, a escolha do parâmetro de controle depende da configuração inicial. Se tratando de uma rede completamente ocupada, o parâmetro de ordem apropriado é a densidade dos locais ativos  $\sigma_i(t)$  na rede:

$$\rho(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^d} \sum_i \sigma_i(t), \quad (2.16)$$

onde  $\rho$  é a densidade média do número de sítios ativos no limite termodinâmico  $L \rightarrow \infty$ , em que  $L$  é o tamanho da rede,  $d$  a dimensão do sistema e  $t$  o tempo. Aqui, a densidade é definida como uma média espacial no limite de tamanhos grandes de sistema  $L \rightarrow \infty$ . Alternativamente, para um sistema finito e com condições de contorno periódicas podemos expressar a densidade como:

$$\rho(t) = \langle \sigma_i(t) \rangle, \quad (2.17)$$

em que  $\langle \dots \rangle$  correspondem a média do conjunto ao longo de muitas realizações aleatórias. Na fase ativa  $\rho(t)$  decai e eventualmente satura em algum valor estacionário. A densidade estacionária varia continuamente com  $p - p_c$  e desaparece no ponto crítico. Perto da transição, o parâmetro de ordem varia de acordo com uma lei potência

$$\rho(\infty) \propto |p - p_c|^\beta, \quad (2.18)$$

onde  $\rho(t)$  é o parâmetro de ordem,  $p$  o parâmetro de controle e  $\beta$  o expoente que descreve a densidade na fase estacionária. Uma quantidade muito semelhante é a probabilidade final de sobrevivência  $P_\infty$  de que um local escolhido, aleatoriamente, pertencer a um grupo infinito de partículas. Na fase ativa, essa probabilidade é finita e escala conforme:

$$P(\infty) \propto |p - p_c|^{\beta'}, \quad (2.19)$$

$\beta'$  corresponde a probabilidade de sobrevivência.

Em contraste com os modelos de equilíbrio em que não existe nenhum aspecto dinâmico, os fenômenos críticos de não-equilíbrio envolvem o tempo como uma dimensão adicional [22]. Como “tempo” e “espaço” são diferentes, temos que distinguir propriedades espaciais e temporais, denotando pelos índices  $\perp$  e  $\parallel$ , respectivamente. Isto é, essas transições de fase são caracterizadas por dois comprimentos de correlação independentes, uma escala de comprimento espacial  $\xi_\perp$  e uma escala de comprimento temporal  $\xi_\parallel$ . Perto da transição, o comprimento de correlação  $\xi$  diverge de acordo com a lei de potência

$$\xi_\perp \propto |p - p_c|^{-\nu_\perp}, \quad (2.20)$$

$$\xi_\parallel \propto |p - p_c|^{-\nu_\parallel}, \quad (2.21)$$

com  $\nu_\perp$  e  $\nu_\parallel$  sendo distintos expoentes críticos. Dessa forma, podemos correlacionar os expoentes com o tempo de relaxação,  $\tau$ , da seguinte forma:

$$\xi_\perp \propto \tau^{-\nu_\perp}, \quad \xi_\parallel \propto \tau^{-\nu_\parallel}, \quad (2.22)$$

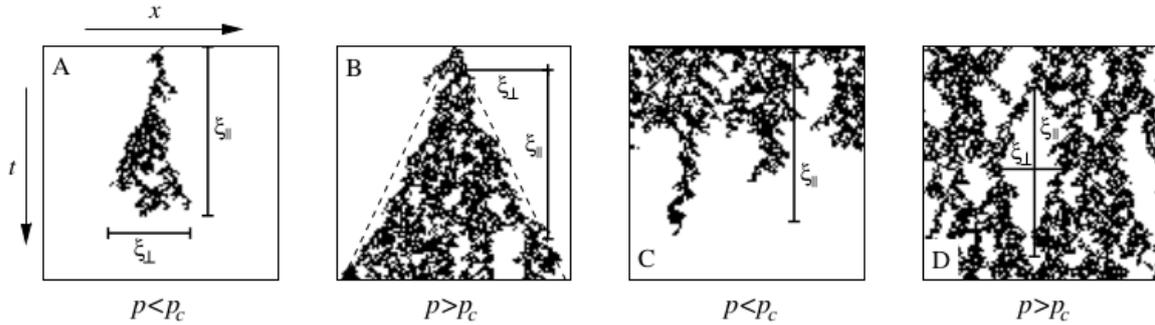
Assim, no regime de escala, os dois comprimentos de correlação estão relacionados:

$$\xi_\parallel \propto \xi_\perp^z, \quad (2.23)$$

onde o expoente dinâmico  $z = \nu_\parallel/\nu_\perp$ . A figura 2.6 ilustra o significado físico dos comprimentos de correlação. Inicialmente, partindo de uma única semente na rede. Na fase ativa (em  $A$ ), notamos que o espalhamento vertical e horizontal é proporcional a  $\xi_\perp$  e  $\xi_\parallel$ , respectivamente. Acima do ponto crítico  $p_c$  (em  $B$ ), o espalhamento das partículas cresce de acordo com a razão  $\xi_\perp/\xi_\parallel$ . Em contrapartida, começando com condições iniciais

homogêneas. Na fase inativa (em  $C$ ), o comprimento de escala  $\xi_{\parallel}$  corresponde ao decaimento temporal. No estado estacionário da fase ativa (em  $D$ ), ambos os comprimentos de correlação parecem do tamanho médio das regiões inativas [4].

Figura 2.6: Ilustração dos comprimentos de correlação  $\xi_{\perp}$  e  $\xi_{\parallel}$ , em um modelo da PD na região crítica ( $p < p_c$  e  $p > p_c$ ). Em  $A$  e  $B$ , o espalhamento ocorre a partir de uma única semente. Em  $C$  e  $D$ , o espalhamento ocorre a partir de uma rede completamente ocupada.



Fonte: Referência [4]

Embora  $\beta$  e  $\beta'$  coincidam no caso da DP, eles podem ser diferentes em contextos mais gerais, por exemplo, em modelos com muitos estados de absorção. Portanto, transições de fase para estados absorventes são geralmente descritas por quatro expoentes  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\nu_{\parallel}$  e  $\nu_{\perp}$  [38].

## 2.4.2 Os expoentes dinâmicos $\theta$ , $\delta$ e $z$ .

A formação de um agrupamentos de sítios ativos, geradas a partir de um único sítio ativo inicialmente no sistemas é uma técnica numérica importante para o estudo de transições de fase de absorção e a estimativa dos expoentes críticos. Esta técnica foi introduzida pela primeira vez por Grassberger e de la Torre [39]. Neste caso, temos algumas quantidades da dinâmica temporal que são medidas:

$$N(t) = \left\langle \sum_i \sigma_i(t) \right\rangle, \quad (2.24)$$

$N$  corresponde ao número de partículas,

$$P(t) = \left\langle 1 - \prod_i (1 - \sigma_i(t)) \right\rangle, \quad (2.25)$$

a probabilidade de sobrevivência,

$$R^2(t) = \frac{1}{N(t)} \left\langle \sum_i x_i^2(t) \right\rangle, \quad (2.26)$$

No regime subcrítico,  $p < p_c$ , qualquer agrupamento de sítios ativos gerado a partir de uma única semente possui um valor finito de tempo de vida. Por outro lado, no regime supercrítico,  $p > p_c$ , existe uma probabilidade finita de gerar um agrupamento infinito. Para caracterizar o crescimento nas duas fases, geralmente se mede:

$$N(t) \propto t^\theta, \quad (2.27)$$

$$P(t) \propto t^{-\delta}, \quad (2.28)$$

$$R^2(t) \propto t^z, \quad (2.29)$$

em  $\theta$  sendo o expoente associado ao número de partículas na rede, a probabilidade de sobrevivência  $P(t)$  que implica na probabilidade do sistema, no instante  $t$ , não atingir o estado absorvente e  $R^2(t)$  consiste na soma do quadrado da distância de cada partícula até a origem. Os expoentes de espalhamento,  $\theta$ ,  $\delta$  e  $z$ , em geral estão relacionados pela realação de hiperescala:

$$2 \left( 1 + \frac{\beta}{\beta'} \right) \delta + 2\theta = dz, \quad (2.30)$$

em que  $d$  é a dimensão do sistema, esta relação só é válida abaixo de uma dimensão crítica  $d_c$ , tendo em vista que acima desta dimensão todos os expoentes independem da dimensionalidade do sistema

### 2.4.3 Efeito tamanho finito

Do ponto de vista dos sistemas finitos não existe a necessidade de se falar de comprimento de correlação  $\xi$ , uma vez que este não diverge e fica limitado ao tamanho do sistema. As propriedades e singularidades que caracterizam a vizinhança do ponto crítico aparecem apenas quando temos que  $L \rightarrow \infty$  [39]. Neste caso, a técnica de efeito tamanho finito pode extrair valores para os expoentes críticos, partindo do estudo da variação de determinadas quantidades que são modificadas conforme o tamanho  $L$  do sistema. Diante disso, torna-se necessário o estudo das variações destas propriedades em

sistemas com distintos tamanhos de  $L$  e estimar os expoentes críticos através das relações de escala de tamanho finito.

Como o comprimento de correlação  $\xi$  se comporta como  $\xi \sim L$ , a escala de comprimento relevante é  $\xi \propto \Delta^{-\nu_{\perp}}$ , onde  $\Delta$  é a distância do ponto crítico. A dependência das propriedades do sistema com o tamanho  $L$  acontece através da razão  $L/\xi$ , que é proporcional a  $\Delta L^{1/\nu_{\perp}}$ . Por exemplo, supondo que a densidade seja o parâmetro de ordem, teremos:

$$\rho(\Delta, L) \propto L^{\frac{-\beta}{\nu_{\perp}}} f(\Delta, L), \quad (2.31)$$

observe que o parâmetro de ordem escrito como uma função do tamanho do sistema e da distância do ponto crítico. No ponto crítico, teremos:

$$\rho(p_c, L) \propto L^{\frac{-\beta}{\nu_{\perp}}}, \quad (2.32)$$

desta relação calculamos o expoente  $\frac{\beta}{\nu_{\perp}}$ . A partir da flutuação do parâmetro de ordem outro expoente é calculado:

$$\Delta\rho \propto |\rho - \rho_c|^{-\gamma'} \quad (2.33)$$

$$\Delta\rho \propto L^{\frac{\gamma'}{\nu_{\perp}}} g(\Delta L^{\frac{1}{\nu_{\perp}}}) \quad (2.34)$$

no ponto crítico

$$\Delta\rho \propto L^{\frac{\gamma'}{\nu_{\perp}}}. \quad (2.35)$$

Ambos os expoentes mencionados anteriormente mostram a dependência do parâmetro de ordem e a flutuação do parâmetro de ordem com o tamanho do sistema  $L$  na região da criticalidade. Estes são alguns expoentes críticos de sistemas de não-equilíbrio que caracterizam o comportamento universal nas vizinhanças de uma transição de fase de segunda ordem. Numericamente, estes expoentes podem ser medidos com boas estimativas através de simulações computacionais.

## Capítulo 3

# Transição de fase de não-equilíbrio em sistemas estocásticos de partículas interagentes

### 3.1 Introdução

Como dito nos capítulos anteriores, uma das realizações da física estatística é a compreensão das propriedades universais e sistemas próximos a uma transição de fase de segunda ordem. Porém, as pesquisas mostram que ainda há muito o que fazer para um entendimento satisfatório sobre quais elementos são relevantes para caracterizar uma classe de universalidade [40].

Nesse contexto, os estudos passaram a incorporar uma subclasse de modelos com estados absorventes que, em certos casos, figuram como exceções à regra geral de que os modelos que exibem uma transição de fase contínua para um estado absorvente pertencem a tradicional classe de universalidade PD. Nesta subclasse de modelos temos, por exemplo, o autômato celular probabilístico [41, 42] e alguns modelos de Ising Cinéticos [43, 44]. O modelo de Ramificação e Aniquilação de Caminhaes Aleatórios (BARW-do inglês, Branching and Annihilating Random Walks) em uma dimensão possui, em sua dinâmica, o equivalente aos exemplos mencionados anteriormente, podendo dessa forma apresentar

um comportamento crítico distinto daquele apresentado pela PD [43].

Neste capítulo, introduzimos o modelo de BARW e uma breve explanação sobre as principais pesquisas feitas com essa temática; um breve relato sobre estudos que mostram a presença de voos de Lévy em ambientes naturais; apresentamos a generalização do BARW com voos de Léve e alguns resultados deste sistema.

## 3.2 Ramificação e Aniquilação de Caminhantes Aleatórios-Branching Annihilating Random Walks(BARW)

Uma característica comum desses sistemas é que eles evoluem de acordo com um processo de Markov governado por regras de transição locais intrinsecamente irreversíveis. Esses modelos são conhecidos coletivamente como sistemas de partículas em interação [45, 46].

Um modelo que pode ser considerado com uma generalização da PD foi proposta por Bramson e Gray [5, 49], em 1985. Trata-se da Ramificação e Aniquilação de Caminhahtes Aleatórios. Consiste em um processo de Markov com taxas de transição que são determinados por um parâmetro. Dependendo do seu valor, são possíveis dois tipos diferentes de comportamento em longo prazo, chamados de extinção e sobrevivência.

Referindo ao modelo em uma linguagem de reação-difusão, temos uma dinâmica estocástica de partículas de uma única espécie  $A$ . Em uma rede  $d$ -dimensional as partículas de uma única espécie  $A$  sofrem os processos:



A equação 3.1 representa o processo de ramificação das partículas, em que  $n$  é o número de descendentes gerados a cada passo de ramificação. A equação 3.2 consiste no processo de aniquilação de partículas. E a equação 3.3 consiste no processo de difusão de partículas.

Em uma rede d-dimensional cada sítio pode ser ocupado por partículas  $A$  ou está

vazio  $\emptyset$ ; uma partícula é escolhida aleatoriamente. Temos que:

- com uma probabilidade  $p$  a partícula escolhida difunde para sítios vizinhos, com igual probabilidade de difundir em qualquer direção. Caso o sítio esteja ocupado ambas as partículas serão aniquiladas.
- com uma probabilidade  $1 - p$  as partículas geram  $n$  descendentes que serão distribuídos nos sítios vizinhos. Se o descendente é movido para um sítio já ocupado ambas as partículas são aniquiladas.

Essas regras levam o sistema para dois estados possíveis, dependendo do valor de  $p$ , em que as partículas podem eventualmente desaparecer (extinção) ou uma concentração diferente de zero de partículas pode existir indefinidamente (sobrevivência) [50]. Estudos realizados por Bramson e Gray [5], mostraram que no modelo em uma dimensão com  $n = 1$  descendentes existirão partículas apenas para  $p$  suficientemente pequeno, caso contrário, as partículas serão todas aniquiladas.

A construção de uma teoria de campo médio para este modelo em uma rede com número de coordenação  $q$  possui uma equação para sítios de campo médio, onde os sítios de campo médio representam a média do estado de todos os sítios analisados. Escolhendo um local e considerando seus vizinhos como sítios de campo médio, com uma probabilidade  $1 - \psi$  o sítio escolhido está vazio. Ressaltando que  $\psi$  é definida como a concentração de partículas. A difusão e a ramificação são os eventos considerados [50]. É importante considerar que um sítio pode ser esvaziado devido a três acontecimentos, são eles: quando a difusão ocorre para um sítio já ocupado, se a ramificação for realizada em sítios ocupados ou se a partícula difunde para um sítio vizinho. Por outro lado, um sítio pode ser ocupado devido a ramificação ou se o sítio recebe uma partícula que difundiu. Considerando estes eventos, a equação traz a concentração de partículas  $\psi$  variando com o tempo  $t$ :

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{1}{q+1} [(1-\psi)\{\psi p + n\psi(1-p)\} - \psi\{\psi p + n\psi(1-p) + p\}], \quad (3.4)$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{1}{q+1} \psi\{(1-p)n - 2\psi(n+p-np)\}, \quad (3.5)$$

em que temos a concentração de partículas  $\psi$ , a probabilidade do sítio escolhido ser vazio  $1 - \psi$ , a probabilidade de ramificar  $1 - p$ , a probabilidade de difundir  $p$ , o número de

descendentes  $n$  e o número de coordenadas  $q$ .

As equações 3.3 e 3.4 descrevem como a concentração de partículas na rede varia com o tempo. A concentração de partículas  $\psi$  varia com o tempo  $t$ , crescendo quando o processo de ramificação ocorrer em locais vazios e decrescendo se ocorrer a aniquilação, devido o encontro de duas partículas no mesmo local por difusão ou ramificação. Assim, teremos sobrevivência em qualquer  $p$ , exceto no caso de não existir ramificação ( $p = 1$ )[50].

### 3.2.1 Ramificação com número ímpar de descendentes

O trabalho pioneiro relevante nesse contexto foi desenvolvido por Takayasu e Tretyakov [50], que estudaram numericamente e através de campo médio (mencionado na seção anterior) a ramificação e aniquilação de caminhantes aleatórios com o número de descendentes variando entre  $n = 1$  a  $n = 5$ .

Os resultados apontam que, partindo de uma rede completamente cheia, gerando  $n = 1$  descendentes, o sistema mantém o estado estacionário ativo com uma certa concentração de partículas. Porém, o mesmo não acontece quando  $n = 2$  descendentes são gerados simetricamente no modelo unidimensional, pois inicialmente o sistema forma uma pequena densidade de partículas que diminui rapidamente com o aumento do tempo. Isto leva a conclusão de que não há sobrevivência em nenhum valor de  $p > 0$  [50], corroborando com as previsões feita por Sudbury [11].

Na tabela 3.1, temos os resultados numéricos demonstrando a existência de um ponto crítico, em concordância com as previsões feitas por Bramson e Gray [5] para  $n = 1$ . Esta análise foi feita baseada na estimativa da probabilidade crítica  $p$  e no expoente  $\beta$ . Seus resultados apontaram alguns pontos interessantes, como por exemplo uma aparente influência da ramificação no valor do expoente crítico medido no modelo unidimensional. Isto é, o modelo unidimensional apresenta valores distintos do expoente  $\beta$  quando no processo de ramificação a paridade do número de partículas é conservada. Além disso, estes resultados já apontavam o modelo como candidato a apresentar expoentes distintos da PD.

Estes primeiros estudos mostram uma mudança no valor do expoente crítico para ramificação par e ramificação ímpar, isto é, a conservação da paridade parece desempenhar um papel central na definição da classe de universalidade. O modelo recebeu intensas análises a respeito do seu comportamento crítico que, exhibe uma transição de fase contínua,

Tabela 3.1: Probabilidade crítica  $p_c$  e o expoente  $\beta$  para  $n = 1 - 5$ .

$n$	1D		2D	
	$p_c$	$\beta$	$p_c$	$\beta$
1	$0,108 \pm 0,001$	$0,320 \pm 0,001$	$0,850 \pm 0,010$	$1,000 \pm 0,100$
2	0	...	$1,000 \pm 0,010$	$1,250 \pm 0,020$
3	$0,461 \pm 0,002$	$0,330 \pm 0,001$	$1,000 \pm 0,010$	$1,260 \pm 0,020$
4	$0,720 \pm 0,001$	$0,700 \pm 0,100$	$1,000 \pm 0,010$	$1,250 \pm 0,020$
5	$0,718 \pm 0,001$	$0,330 \pm 0,001$	...	...

Fonte: Tabela adaptada de referência [50]

a partir de um estado estacionário ativo para o absorvedor.

Determinar o comportamento crítico a partir de simulações em estado estacionário é, frequentemente, muito difícil devido a efeitos de tamanho finito e dificuldades de localizar o ponto crítico. Com isso um estudo mais detalhado do modelo foi realizado para  $n = 1$  e  $n = 3$  usando simulações de Monte Carlo dependente do tempo [51]. A ideia geral das simulações dependentes do tempo consiste em começar com uma configuração inicial muito próxima do estado absorvedor e, posteriormente, estudar a evolução temporal do sistema simulando uma conjunto grande de realizações independentes.

Simulações realizadas em uma dimensão [51], para  $n = 1$  e  $n = 3$  foram executadas sempre iniciando, em  $t = 0$ , com duas partículas colocadas nos vizinhos próximos no centro da rede. Os expoentes medidos foram  $\delta$ ,  $\eta$  e  $z$  associados, respectivamente, a probabilidade de sobrevivência, número médio de sítios ocupados e a distância quadrática média. A partir da evolução temporal do número médio de partículas  $\bar{n}(t)$  foi estimado:  $p_c = 0,1070(5)$  para  $n = 1$  e  $p_c = 0,590(1)$  para  $n = 3$ . E os resultados para os expoentes dinâmicos foram:  $\delta = 0,160(5)$ ,  $\eta = 0,31(1)$  e  $z = 1,26(1)$  para  $n = 1$ ;  $\delta = 0,165(5)$ ,  $\eta = 0,305(01)$  e  $z = 1,26(1)$  para  $n = 3$  [51]. Estes resultados produziram estimativas para três expoentes críticos em boa concordância com os da percolação direcionada, apoiando assim a noção de que o BARW com um número ímpar de descendentes pertence à classe de universalidade PD [51]. Esta conclusão foi confirmada por um estudo analítico [52] do BARW com  $n = 1$ , foi encontrado  $\beta$  consistente com a PD.

### 3.2.2 Ramificação com número par de descendentes

Takayasu e Tretyakov [50], mostraram que a Ramificação e Aniquilação de Caminhantes Aleatórios gerando  $n$  descendentes par apresenta o expoente  $\beta$  não pertencente a PD, isto é, quando o número de partículas é conservado. Partindo da ideia que a adição de uma lei de conservação acarretar uma violação na conjectura da PD, isto justificaria a mudança nos valores dos expoentes quando o número de partículas é conservado.

Sendo a conservação da paridade do número de partículas o fato responsável pelo comportamento não pertencente a PD, quebrar essa lei de conservação deve produzir expoentes da DP. A maneira de obter isso é adicionando aniquilação espontânea de partículas. Assim, uma versão do modelo gerando  $n = 4$  descendentes com aniquilação espontânea foi proposto por Jensen [53, 54]. O estudo foi feito via simulações dependentes do tempo e também foi usado o efeito tamanho finito (finite-size scaling) para calcular os expoentes em uma rede unidimensional. As estimativas obtidas estão em excelente concordância com os valores obtidos para a classe de universalidade PD (ver tabela 3.2).

Tabela 3.2: Estimativas da localização do ponto crítico  $p_d^c$  e dos expoentes críticos  $\delta$ ,  $\eta$  e  $z$ . Obtidos a partir de simulações dependentes de tempo para distintos valores da aniquilação espontânea  $p_a$ .

$p_a$	$p_d^c$	$\delta$	$\eta$	$z$
0,1	0,49105(5)	0,161(2)	0,312(5)	1,26(1)
0,01	0,6455(5)	0,162(4)	0,318(8)	1,265(15)
0,001	0,6830(5)	0,155(10)	0,31(1)	1,25(2)
0,0001	0,700(5)	0,15(1)	0,305(15)	1,23(3)

Fonte: Referência [54]

No entanto, para o caso  $n = 4$ , com os descendentes dispostos simetricamente nos sítios vizinhos da partícula original e com aniquilação infinita, o sistema apresenta um comportamento que difere daquele apresentado pela classe de universalidade PD [55]. O conjunto de expoentes críticos estáticos e dinâmicos, ver tabela 3.3, apontam claramente que o modelo não possui o comportamento da classe de universalidade PD.

Como mencionado anteriormente, no modelo original se a cada passo de ramificação for gerada  $n = 2$  e sendo as partículas colocadas simetricamente nos sítios vizinhos em relação à partícula original, o modelo não apresenta um estado estacionário ativo para qualquer valor de  $p > 0$  [11, 50]. Contudo, uma transição de fase foi observada após a

Tabela 3.3: Resultados de simulações para o modelo criando  $n = 4$  descendentes em uma rede unidimensional.

Expoentes	BAW	Conjectura	IMD	Classe DP
$\beta$	0,92(3)	13/14	0,88(2)	0,2767(4)
$\gamma$	0,000(5)	0	N.A.	0,5438(13)
$\nu_{\parallel}$	3,25(10)	13/4	3,17(5)	1,7334(10)
$\nu_{\perp}$	1,84(6)	13/7	1,83(3)	1,0972(6)
$\beta/\nu_{\perp}$	0,500(5)	1/5	0,48(2)	0,2522(6)
$\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}$	1,750(5)	7/4	1,734(3)	1,5798(18)
$\delta$	0,285(2)	2/7	0,292(7)	0,1596(4)
$\eta$	0,000(1)	0	0,01(2)	0,3137(10)
$\eta_r$	0,282(4)	2/7	0,28(2)	...
$z$	1,141(2)	8/7	1,3(2)	1,2660(14)
$1/\delta_h$	0,222(2)	2/9	N.A.	0,111(3)

Fonte: Referência [55]

introdução de uma taxa de reação finita [53].

Nesta situação, uma partícula é escolhida aleatoriamente. Pode sofrer difusão para sítios vizinhos mais próximos com probabilidade  $1-p$  ou pode ramificar com probabilidade  $p$ . Na difusão, uma direção aleatória (esquerda ou direita) é escolhida e a partícula se move para o local de destino, se estiver desocupada. Se o local de destino estiver ocupado, a aniquilação de ambas as partículas ocorre com probabilidade  $k$ . Caso contrário, a partícula escolhida para difundir permanece em sua posição original. A ramificação ocorre para os dois sítios vizinhos mais próximos com probabilidade 1, se os dois vizinhos estiverem vazios. Se um ou ambos os vizinhos estiverem ocupados, a ramificação para os dois vizinhos ocorrerá com probabilidade  $k$ . Nesse caso, se uma nova partícula for colocada em um local ocupado anteriormente, as duas serão removidas. A probabilidade  $k$  controla a taxa de aniquilação ( $k = 1$  corresponde ao modelo original da taxa de reação infinita). O ponto crítico estimado foi  $p_c = 0,4946(2)$  e os expoentes  $\beta = 0,922(5)$ ,  $\delta = 0,286(2)$ ,  $\eta = 0,000(1)$  e  $z = 1,47(4)$  [53]. Neste caso, os expoentes são os mesmos daquele com ramificação infinita gerando  $n = 4$ , sugerindo que ambos os modelos pertencem a classe de universalidade Conservação da Paridade-CP (do inglês Parity Conserving-PC). É comprovando que a conservação do número de partículas é responsável pela mudança na classe de universalidade.

Em resumo, o BARW com conservação da paridade apresenta expoentes críticos pertencentes a classe de universalidade CP. Porém, com ramificação ímpar (não viola a

conjectura) apresenta expoentes críticos pertencentes a classe de universalidade PD.

### 3.3 Difusão Normal - Movimento Browniano versus Difusão Anômala - Vôo de Lévy

Como vimos anteriormente, estudar as mudanças ocorridas entre uma transição de uma fase ativa para uma configuração de absorção tem sido um campo muito ativo, cujo principal objetivo é classificar as transições contínuas a partir de propriedades universais. Assim como o modelo de Ising desempenha um papel paradigmático na mecânica estatística de equilíbrio, a percolação direcionada é um importante modelo da mecânica estatística de não-equilíbrio. Janssen e Grassberger chegaram à chamada conjectura da PD, afirmando que qualquer modelo que atenda a um certo conjunto de as condições devem pertencer à classe PD [41, 42]. Uma dessas condições é que as interações devem ser locais.

Um processo comum encontrado na natureza é o fenômeno de difusão, por exemplo, podemos imaginar como sendo um sistema com um número macroscópico de partículas que caminham espontaneamente para seu estado de equilíbrio. Em se tratando de um conjunto de elementos que se movem - átomos, moléculas, animais, entre outros- cada elemento descreve uma trajetória randômica [44, 56]. O resultado desse deslocamento individual dos elementos é que o conjunto como um todo difunde. Na descrição de fenômenos naturais, diz-se que a difusão governada pela função densidade de probabilidade gaussiana cuja dispersão que varia linearmente no tempo é conhecida como difusão normal.

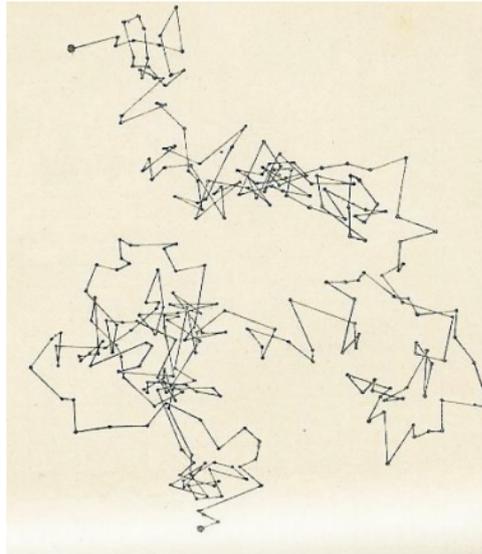
Alguns estudiosos contribuíram para elaborar um formalismo que tratasse a difusão normal, tal como Einstein em 1905, Langevin, Fokker, Planck, Burger, Further, entre outros, resultando no movimento Browniano que consiste em um modelo matemático que traz um formalismo para tratar da difusão normal. A equação básica que representa a dinâmica do movimento Browniano é a equação da difusão normal representada na forma da equação:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (3.6)$$

em que  $n = n(x, t)$ , ou seja, o número de partículas por unidade de volume em um instante  $t$  e  $x$  corresponde a posição. O nome movimento Browniano relata ao que foi

originalmente observado pelo botânico britânico Robert Brown ao estudar o movimento de pólen suspenso em um fluido, em meados do século XIX.

**Figura 3.1: A figura mostra a trajetória de uma partícula executando movimento browniano.**



Fonte: Referência [57]

A figura 4.1 traz uma trajetória executada por uma partícula com movimento browniano, ou seja, trata-se de um movimento completamente irregular. O movimento browniano é um importante exemplo de um processo estocástico e uma ferramenta importante no estudo de sistemas físicos de não-equilíbrio.

As transições de fase em modelos de partículas interagentes e com interações de curto alcance pertencem genericamente à classe de universalidade PD. Se tratando de processos realistas de propagação, no entanto, as interações de curto alcance não descrevem apropriadamente o mecanismo de transporte. Esta situação pode surgir, por exemplo, no transporte de doenças infecciosas transmitidas por insetos onde, normalmente, no movimento ocorrem voos em longas distâncias antes da próxima infecção [58].

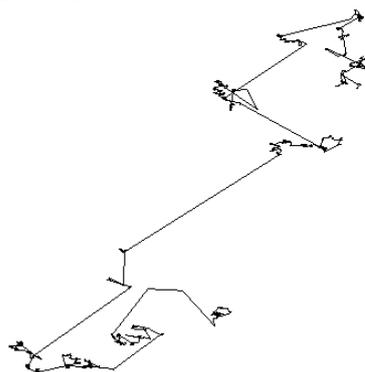
Nessa temática, algumas pesquisas foram realizadas no contexto biológico. Estudos mostraram que os animais na busca por alimentos apresentam um certo padrão de movimentação, cujo tamanho do deslocamento em cada direção e sentido pode ser representado por uma distribuição do tipo lei de potência [59]. Pesquisas realizadas com albatrozes mostraram que estes animais e eventualmente percorrem longas distâncias em busca de recursos alimentares, isto é, executam trajetórias curtas e longas caracterizadas pelos chamados voos de Lévy.

A teoria do forrageamento prevê que os animais realizam difusão de curto alcance e difusão de longo alcance de acordo com os recursos alimentares. Em ambientes com recursos distribuídos escassamente, onde o conhecimento sobre a localização dos recursos é incompleto os movimentos de voo Lévy otimizam o sucesso da busca por alimentos. No entanto, também foi observado os movimentos aleatórios em curtas distâncias, mostrando que em ambientes onde existe recursos alimentares abundantes este tipo de movimentação é eficiente [35].

Além disso, podemos citar estudos experimentais e computacionais realizados com laser aleatório. Foi mostrado em resultados de simulações numéricas e dados experimentais a presença distribuição de Lévy e da distribuição gaussiana, neste caso, os dois regimes eram definidos de acordo com um parâmetro de controle próprio do modelo [60].

Como dito anteriormente, partículas que difundem e possuem trajetórias com deslocamento quadrático médio linear com o tempo efetuam uma difusão normal. Em contrapartida, se as partículas difundem e efetuarem deslocamento quadrático médio não linear com o tempo é chamada difusão anômala, dentro dos padrões deste tipo de difusão temos os voos de Lévy. Na figura 3.2 temos a trajetória de uma partícula que realiza voos de Lévy, isto é, podemos observar que a partícula intercala saltos de curto alcance e saltos de longo alcance. Estes saltos longos é o que caracteriza uma trajetória com voos de Lévy.

**Figura 3.2: Ilustração da distribuição de Lévy (saltos de longo alcance) as linhas representam os saltos das partículas.**



Fonte: Referência [61]

O termo voo de Lévy (do inglês-Lévy Flight) foi dado por Mandelbrot em seu livro que fala sobre geometria fractal. Os voos de Lévy consistem em passeios aleatórios com comprimento de passos dos quais estão presentes distribuições de probabilidade que seguem uma lei de potência [62]. Dessa forma, os processos de difusão de curto alcance

e de longo alcance estão presentes na natureza e, portanto, é justificado o interesse em sistemas físicos e biológicos, por exemplo.

### 3.4 Ramificação e Aniquilação com Vôos de Lévy - Branching and annihilating Lévy flights (BALF)

Com o propósito de analisar sistemas mais próximos da realidade, foi proposto que nos modelos estudados fosse permitido a ocorrência de interações de longo alcance. Com isso veio a primeira generalização da PD, com um mecanismo de transporte não local, proposta por Mollison no contexto da disseminação de epidemias [63]. Quando o processo de trocas aleatórias via voos de Lévy for permitido podem ocorrer correlações adicionais de longo alcance nos modelos e, conseqüentemente, alterações significativas nas propriedades críticas do sistema.

A Ramificação e Aniquilação com voos de Lévy é uma generalização do modelo descrito anteriormente ( ver seção 3.3), onde as partículas e seus descendentes (ou ambos) realizam voos de Lévy. O comprimento de vôo  $r$  é uma variável aleatória com uma probabilidade de distribuição dada por:

$$P(r) \propto r^{-d-\sigma}, \quad (3.7)$$

onde  $d$  corresponde a dimensão do sistema e  $\sigma > 0$  o parâmetro livre que controla as características da distribuição das partículas.

Enquanto no modelo original os processos de difusão, aniquilação e ramificação ocorriam nos sítios vizinhos mais próximos, no modelo com voos de Lévy estudado por Albano (1996) [64] foi investigado um sistema unidimensional ramificando  $n = 1$  descendentes nos sítos vizinhos. Porém, no processo de difusão as partículas passam por voos de Lévy. E o comprimento dos voos serão determinados pelo  $\sigma$ , chamado expoente de Lévy.

Os resultados mostram que, para  $\sigma = 11$ , os expoentes críticos concordam perfeitamente com o conjunto de expoentes da PD. Isso significa que neste valor de  $\sigma$  as interações são exclusivamente de curto alcance. A diminuição de  $\sigma$  leva a um incremento do ponto crítico, mas os expoentes permanecem inalterados para  $\sigma \geq 1$  [64]. No entanto, para  $\sigma < 1$  o sistema apresenta um comportamento superdifusivo e, conseqüentemente,

apresenta novos valores para o expoentes críticos (ver tabela 3.4). No regime superdifusivo, para pequenos valores de  $\sigma$ , o mecanismo de Lévy cria efetivamente correlações adicionais de longo alcance sendo os expoentes críticos do modelo funções ajustáveis de  $\sigma$  e para valores maiores de  $\sigma$  os voos de Lévy ficam restritos aos vizinhos mais próximos mostrando o comportamento crítico da PD [64, 65].

Tabela 3.4: Pontos críticos e expoentes críticos dos modelos do PC generalizado submetido a trocas de Lévy (do inglês CP with Lévy exchanges-CPLF), o PC com interações de longo alcance (CP with long-range interactions-CPLRI), a Ramificação e Aniquilação com voos de Lévy (Branching annihilating Lévy flights-BALF), Ramificação e Aniquilação de Caminhantes Aleatórios (Branching and Annihilating random walk-BARW) e da classe de universalidade PD.

Modelo	$\sigma$	$p_c$	$\eta$	$\delta$	$z$	$dz - 2\eta - 4\delta$
PD	–	–	0,308	0,160	1,265	0,009
BARW	–	0,1070	0,31	0,160	1,26	0,0
CPLF	11	0,4235(5)	0,305(5)	0,161(3)	1,257(5)	0,003
CPLF	2	0,4380(5)	0,304(5)	0,166(3)	1,261(5)	-0,011
CPLF	1,50	0,4490(5)	0,306(5)	0,161(3)	1,260(5)	-0,016
CPLF	1	0,4710(5)	0,306(5)	0,165(3)	1,260(5)	-0,012
CPLF	0,75	0,4890(5)	0,328(5)	0,159(3)	1,262(5)	-0,030
CPLF	0,50	0,5137(3)	0,352(5)	0,145(3)	1,265(5)	-0,019
CPLF	0,25	0,5463(3)	0,367(5)	0,14(1)	1,28(2)	-0,014
CPLF	0,0	0,5868(3)	0,403(8)	0,12(1)	1,30(2)	0,014
CPLRI	0,0	0,400(5)	0,31(1)	0,16(1)	1,26(2)	0,00
CPLRI	1,0	0,593(3)	0,31(1)	0,16(1)	1,27(2)	0,01
BALF	11	0,1017(5)	0,308(5)	0,156(3)	1,251(5)	0,011
BALF	2	0,1205(5)	0,303(5)	0,158(3)	1,258(5)	0,02
BALF	1,50	0,1306(3)	0,305(5)	0,164(3)	1,262(5)	-0,004
BALF	1	0,1563(3)	0,309(5)	0,163(3)	1,263(5)	-0,007
BALF	0,75	0,1861(3)	0,324(5)	0,164(3)	1,265(5)	-0,039
BALF	0,50	0,2475(5)	0,351(5)	0,150(3)	1,270(5)	-0,032
BALF	0,25	0,3853(3)	0,366(5)	0,13(1)	1,28(2)	0,005
BALF	0,0	0,6598(3)	0,405(8)	–	–	–

Fonte: Referência [64, 65]

Na tabela 3.4, se encontra resultados de simulações de alguns modelos com voos de Lévy. Nela consta abreviações do nome dos modelos, são eles: PC generalizado submetido a trocas de Lévy (do inglês CP with Lévy exchanges-CPLF), PC com interações de longo alcance (CP with long-range interactions-CPLRI), Ramificação e Aniquilação com voos de Lévy (Branching annihilating Lévy flights-BALF) e ramificação e aniquilação de caminhantes aleatórios (Branching and Annihilating random walk-BARW).

Em [18], foi realizado um estudo no modelo com conservação da paridade e voos de Lévy. Foi considerando um modelo unidimensional de ramificação e aniquilação com voos de Lévy com número par de descendentes. A tabela (3.5) mostra os resultados obtidos pelos autores por meio de simulações computacionais, onde se pode verificar a variação dos valores dos expoentes críticos para cada valor de  $\sigma$ .

Tabela 3.5: Medida do ponto crítico e expoentes para vários valores de  $\sigma$ . O número entre parênteses é uma estimativa de erro da medida.

$\sigma$	$p_c$	$\delta$	$\theta$	$z$
1,525	0,997(2)	0,32(1)	-0,30(1)	1,53(2)
1,55	0,992(4)	0,32(2)	-0,30(2)	1,53(2)
1,6	0,990(2)	0,33(2)	-0,30(2)	1,56(2)
1,65	0,974(2)	0,32(2)	-0,26(2)	1,55(2)
1,7	0,955(2)	0,32(2)	-0,24(2)	1,59(2)
1,8	0,918(2)	0,32(2)	-0,18(2)	1,59(2)
1,9	0,863(2)	0,32(2)	-0,14(1)	1,63(2)
2,0	0,804(1)	0,305(5)	-0,085(5)	1,68(2)
2,5	0,6185(2)	0,285(5)	-0,005(5)	1,72(1)
$\infty$	0,5104(2)	0,287(3)	0,001(3)	1,74(1)

Fonte: Referência [18]

Esses resultados estão de acordo com conceitos bem estabelecidos de comportamento universal: como os vôos são restritos a distâncias finitas, o comprimento de correlação divergente permanece como a única escala de comprimento relevante. No entanto, para valores  $\sigma$  menores, quando o comportamento superdifuso se mantém, os vôos não são mais restritos distâncias finitas e correlações adicionais de longo alcance podem ser efetivamente estabelecidas. Então, neste caso, observa-se desvios do comportamento de percolação direcionada padrão e os expoentes críticos dependem de  $\sigma$  [64, 65]. Motivados por estes resultados, realizamos estudos numéricos em modelos de não-equilíbrio na presença de interações de longo alcance, apresentados nos capítulos seguintes.

## Capítulo 4

# Sistema com conservação da paridade, Ramificação e Aniquilação de caminhantes aleatórios com difusão de longo alcance

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, tratamos de um modelo com conservação da paridade e difusão de longo alcance. Em estudos anteriores do BARW com difusão de longo alcance foi abordado as propriedades críticas do estado estatisticamente estacionário, alcançado após o sistema evoluir de um estado com alta densidade de partículas. Com essa condição inicial a densidade de partículas vai diminuindo seguindo uma lei de potência no tempo, no ponto crítico [66]-[78]. Por outro lado, é sabido que a densidade representa um espalhamento crítico inicial da lei de potência quando o sistema começa no estado oposto, isto é, com um número muito pequeno de partículas [66]-[79]. Essa propagação crítica também pode ser explorada para localizar o ponto crítico e extrair alguns expoentes críticos relevantes. Esse procedimento também permite simular sistemas muito grandes, reduzindo assim as correções de escala de tamanho finito nas estimativas dos índices críticos.

No presente trabalho, aprofundamos o estudo referente a transição de fase exibida por um modelo de ramificação e aniquilação de caminhantes aleatórios com difusão de longo alcance que obedece a distribuição de Lévy. Em particular, estudamos o caso do processo conservando a paridade do número de partículas. Devido as regras dinâmicas que conservam a paridade, o estado de vácuo nunca é alcançado, pois o número de partículas na rede é ímpar. Portanto, a probabilidade de sobrevivência é 1, em contraste com as previsões estudadas com número de partículas par [18]. Realizamos novos estudos numéricos no modelo referentes a dinâmica de propagação crítica de tempo curto, onde relatamos o conjunto de expoentes críticos do processo de espalhamento associados ao crescimento do número de partículas, o comportamento crítico da flutuação do parâmetro de ordem e a relação do momento.

## 4.2 O modelo

Estudamos um modelo que consiste na ramificação e aniquilação de caminhantes aleatórios com conservação da paridade, definido em uma rede unidimensional. Estes processos são representados pelas reações:



que correspondem aos processos de ramificação e aniquilação, respectivamente. Os processos de difusão e ramificação são controlados por um único parâmetro  $p$  correspondente a probabilidade de difusão.

A cada passo uma partícula é escolhida aleatoriamente. Consideramos que com uma probabilidade  $p$  a partícula vai difundir para uma nova localização a uma distância  $r$ . Com igual probabilidade de difundir para a direita ou para a esquerda do sítio escolhido aleatoriamente. A distância de salto  $r$  é escolhida para seguir uma distribuição de Lévy com a probabilidade de realizar o salto de tamanho  $r$  que decai com  $P(r) \propto 1/r^{-\alpha}$ , onde  $\alpha$  é o expoente que governa a distância do salto, considerando que  $\alpha = d + \sigma$  sendo  $d$  a dimensão da rede.

A ramificação ocorre com a probabilidade complementar  $1 - p$  e gera  $n = 2$  descendentes que ocupam os dois locais vizinhos a direita ou esquerda do sítio da partícula

original, com o lado escolhido aleatoriamente. O número de partículas em cada sítio da rede foi restrito a zero ou uma, quando uma partícula se mover para um sítio já ocupado ambas as partículas são aniquiladas em pares, independente do encontro das duas partículas ser resultado do processo de difusão ou ramificação. É importante salientar que a partícula escolhida para ramificar seus descendentes não será aniquilada.

Nossas pesquisas foram realizadas usando simulações via método de Monte Carlo, partindo da condição inicial de uma partícula no centro da rede e utilizamos um algoritmo que apenas as posições das partículas eram armazenadas. Diante disso, o tamanho da rede  $L$  era limitado ao maior inteiro que a máquina suportava, e isso tornou os efeitos de tamanho finito insignificantes. De acordo com as regras da dinâmica que conservam a paridade do número de partículas o estado de vácuo propriamente dito nunca é alcançado. Assim, a probabilidade de sobrevivência do sistema é 1. Em nossa abordagem, mostramos que partindo de uma configuração muito próxima do estado absorvente, o sistema apresenta uma dinâmica de transição de fase com uma densidade finita de partículas em pequenos valores da probabilidade de difusão e uma fase com uma densidade cada vez menor.

Mensuramos o crescimento médio do número de partículas no tempo  $\langle N(t) \rangle$  sendo que a média foi realizada em várias cópias do sistema, partindo da mesma configuração inicial. Examinamos o comportamento crítico da flutuação do parâmetro de ordem  $\Delta^2 N(t) = \frac{\langle N(t)^2 \rangle - \langle N(t) \rangle^2}{L}$  e a razão do momento  $U = \langle N(t)^2 \rangle / \langle N(t) \rangle^2 - 1$ . No limite da ramificação é crítica,  $p \rightarrow p_c$ , essas quantidades são regidas pelas leis de potência no limite de longo prazo:

$$\langle N(t) \rangle \sim t^\theta, \quad (4.3)$$

$$\langle \Delta^2 N(t) \rangle \sim t^\phi, \quad (4.4)$$

obtemos o expoente crítico associado ao crescimento do número de partículas e o expoente associado a flutuação do parâmetro de ordem, respectivamente, respectivamente.

A princípio estimamos o expoente de espalhamento  $\theta$  e o expoente  $\phi$ , associados ao crescimento do número de partículas no tempo e o comportamento crítico da flutuação do parâmetro de ordem, respectivamente. Numericamente, calculamos o expoente  $\theta$  traçando curvas de  $\theta(t) = \frac{d \log \langle N(t) \rangle}{d \log t}$  versus  $1/\log t$  e calculamos o expoente  $\phi(t)$  traçando curvas de  $\phi = \frac{d \log \langle \Delta^2 N(t) \rangle}{d \log t}$  versus  $1/\log t$ . No limite  $1/\log t \rightarrow 0$  estas quantidades convergem

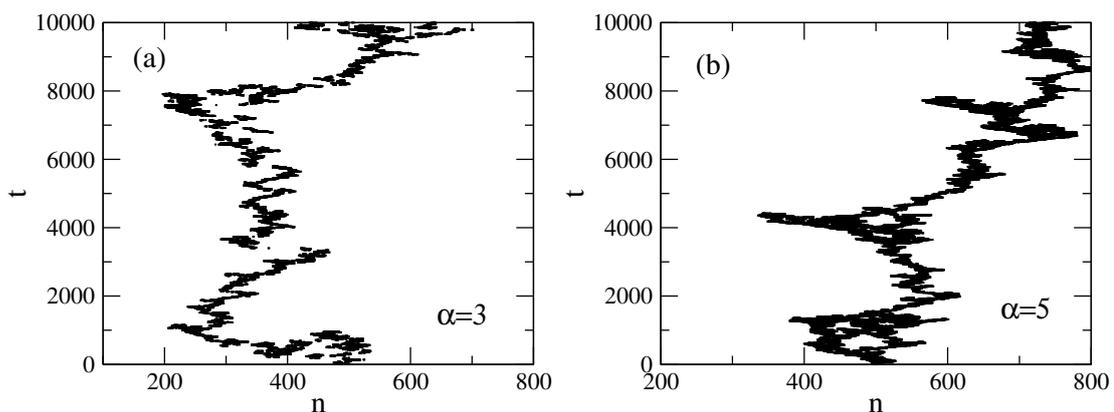
para seus respectivos expoentes críticos  $\theta$  e  $\phi$ . Também estimamos  $U_c(\alpha)$  para fornecer mais dados sobre o regime de expoentes de Lévy  $\alpha$  para os quais o processo BARW tem expoentes críticos continuamente variáveis.

### 4.3 Simulações e Resultados

As simulações numéricas foram realizadas no modelo que mencionamos anteriormente para vários valores do expoente de Lévy  $\alpha$ , como será mostrado adiante. Ressaltamos, no processo de difusão as partículas difundem para os sítios vizinhos ou podem sofrer saltos de longo alcance de acordo com os valores do expoente de Lévy. Em contrapartida, o processo de ramificação ocorre somente em sítios vizinhos e não depende do expoente de longo alcance.

Inicialmente, relatamos a evolução espaço-tempo o crescimento do número de partículas na rede após várias etapas de tempo. Essa evolução temporal foi analisada para diferentes valores do expoentes  $\alpha$ .

Figura 4.1: **Distribuição espaço-tempo do número de partículas, partindo da mesma configuração inicial de uma partícula no centro da rede em um modelo BARW . Em 1(a) a amostra foi executada para  $\alpha = 3$  e com a probabilidade crítica  $p_c = 0.814$ . Em 1(b) a amostra foi executada para  $\alpha = 5$  e com a probabilidade crítica  $p_c = 0.525$ . Observe que a distribuição espaço-tempo se torna menos conectada à medida que o processo de difusão se torna mais longo.**



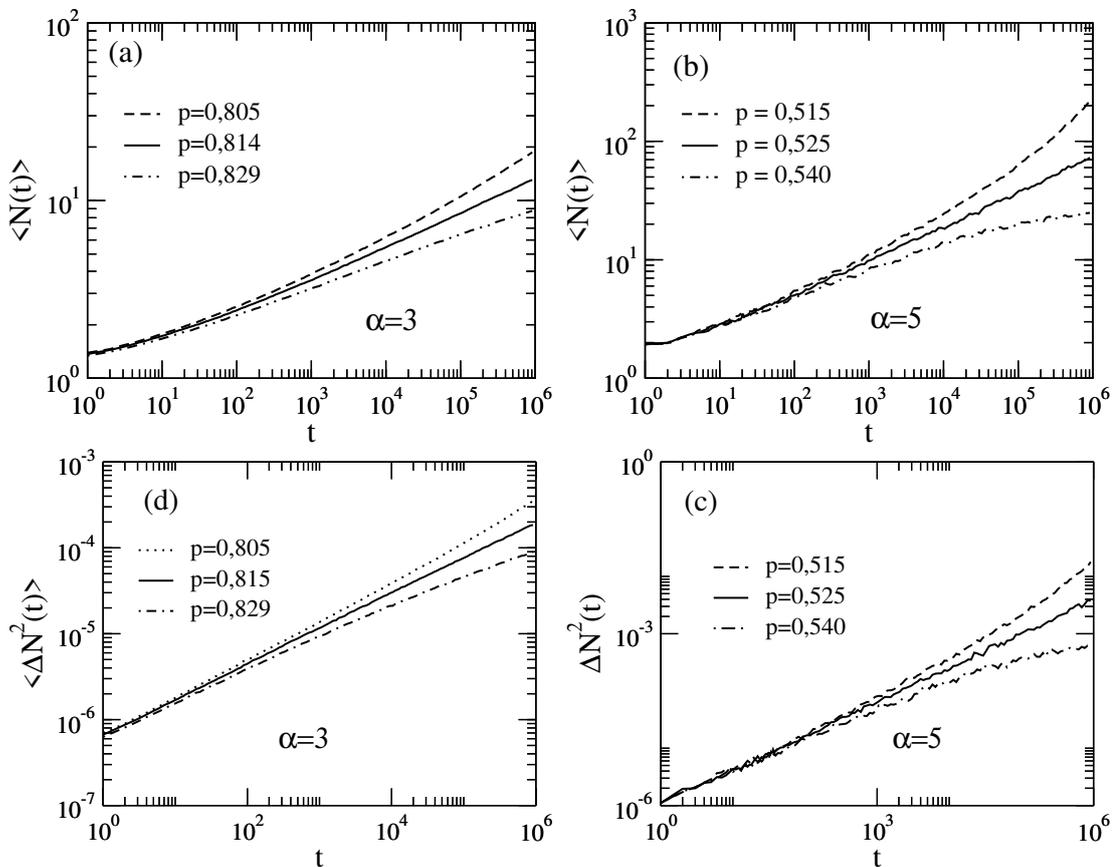
Fonte: Referência [80]

A Figura 4.1 ilustra a evolução espaço-tempo do processo para dois valores representativos do expoente Lévy. A probabilidade de difusão foi escolhida na região da transição de fase, ou seja, no ponto crítico (veja abaixo o procedimento usado para estimar

$p_c$ ). As amostras foram realizadas com  $10^4$  etapas de tempo. Observe que, quando o processo de difusão é mais longo (Figura 4.1a), o aspecto fractal da distribuição de partículas espaço-tempo fica desconectado. Uma difusão a distância mais curta (Figura 4.1b) leva a uma distribuição fractal de espaço-tempo mais densa (compacta) de partículas.

Diante da existência de uma transição entre o estado com uma abundante densidade de partículas e um estado com uma densidade cada vez menor, buscamos estudar a evolução temporal do número médio de partículas e a flutuação do parâmetro de ordem. Na figura 4.2, temos uma amostra dos resultados para a evolução temporal do número médio de partículas, atuando como parâmetro de ordem da transição de fase no estado de absorção, e suas flutuações, para  $\alpha = 3$  e  $\alpha = 5$ . Os valores de probabilidade de difusão  $p_c$  foram escolhidos nas proximidades do ponto crítico.

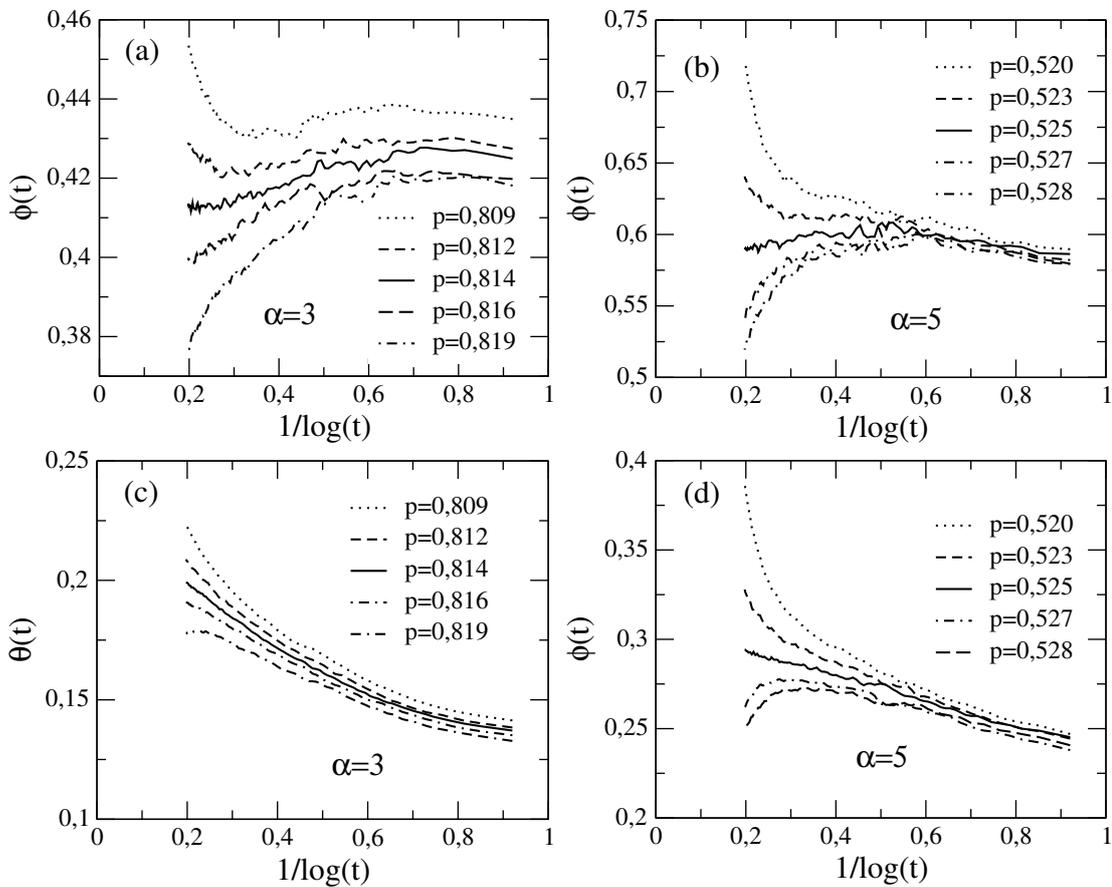
Figura 4.2: As simulações foram realizadas numa rede de  $9 \times 10^5$  sítios com valores da difusão  $p$  abrangendo a região abaixo da transição de fase, a região da criticalidade e acima da transição de fase. Observamos o crescimento temporal do número médio de partículas em (a) e (b). A flutuação do do parâmetro de ordem em função do tempo em (c) e (d). Ambas as medidas para  $\alpha = 3$  e  $\alpha = 5$ , respectivamente.



Fonte: Referência [80]

No ponto crítico, ambas as quantidades desenvolvem crescimento em lei de potência. Acima de  $p_c$ , o processo de ramificação é superado pela aniquilação e essas quantidades começam a saturar em um valor finito. E abaixo do  $p_c$ , a ramificação é o processo dominante e existe um crescimento rápido da população, bem como suas flutuações. O

Figura 4.3: **Simulações para o expoente de Lévy  $\alpha = 3$  e  $\alpha = 5$  numa rede de  $9 \times 10^5$  sítios, com  $10^6$  etapas de tempo. As curvas correspondem a valores para  $p < p_c$ ,  $p = p_c$  e  $p > p_c$ . Em (a) e (b) temos a medida do expoente  $\phi$  em função de  $1/\log(t)$ . Em (c) e (d) temos a medida do expoente  $\theta$  em função de  $1/\log(t)$ . No regime de tempo longo a probabilidade crítica  $p_c$  é sinalizada por uma curva com comportamento constante.**



Fonte: Referência [80]

ponto crítico pode ser estimado a partir do desenvolvimento de uma lei de potência (asintoticamente linear na escala  $\log \times \log$ ).

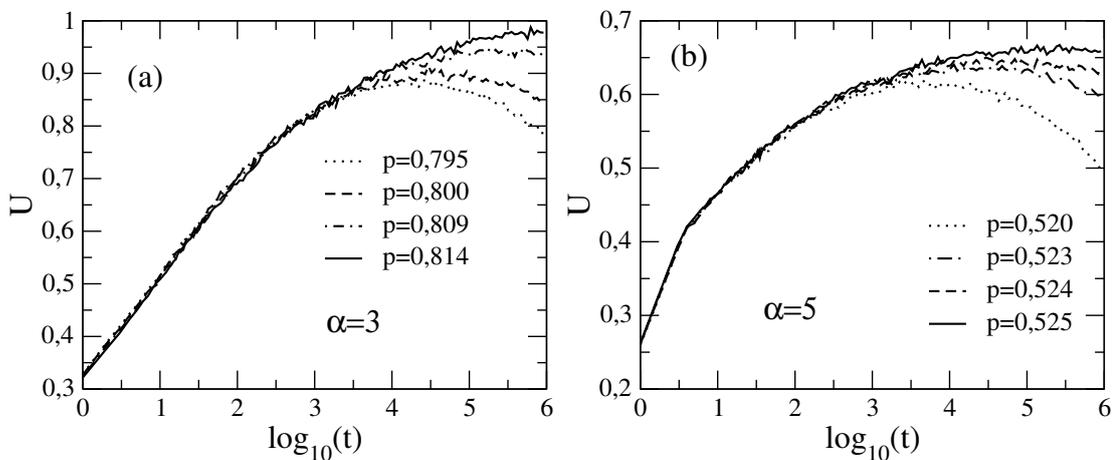
Realizamos as estimativas exatas dos expoentes críticos dinâmicos  $\theta$  e  $\phi$ , obtidos explorando a escala de tempo finito. O gráfico das quantidade  $\theta$  e  $\phi$  em função  $1/\log(t)$ , essas funções convergem para o valor do expoente associado para  $1/\log(t) \rightarrow 0$ . Uma amostra do procedimento usado na análise destas quantidades é ilustrado na figura 4.3,

em que temos uma medida dos expoentes críticos  $\phi$  e  $\theta$  para  $\alpha = 3$  e  $\alpha = 5$ . Na fase de absorção, essas as curvas devem dobrar para baixo apontando para  $\theta = \phi = 0$ . E na fase ativa, as curvas dobram para cima.

Observe que o expoente dinâmico  $\phi$  associado às flutuações do parâmetro de ordem converge para seu valor assintótico com uma inclinação menor que o expoente do parâmetro de ordem  $\theta$ . Isso indica que as correções na escala são mais significativas em  $\langle N(t) \rangle$  do que em suas flutuações. Conseqüentemente, a probabilidade crítica  $p_c$  é localizada com mais precisão usando dados de flutuações.

Interessados em caracterizar com mais detalhes o comportamento do sistema, buscamos medir a razão dos momentos para distintos valores de  $\alpha$ . Na figura 4.4, temos uma amostra destas medidas. As curvas apresentam um crescimento inicial para valores distintos de  $p_c$ , com  $U \rightarrow 0$  para  $p < p_c$ .

Figura 4.4: A representação gráfica da evolução temporal  $U$ . Em (a) temos curvas para  $\alpha = 3$  e em (b) temos curvas de  $\alpha = 5$ , em ambos os casos com distintos valores de  $p$ .

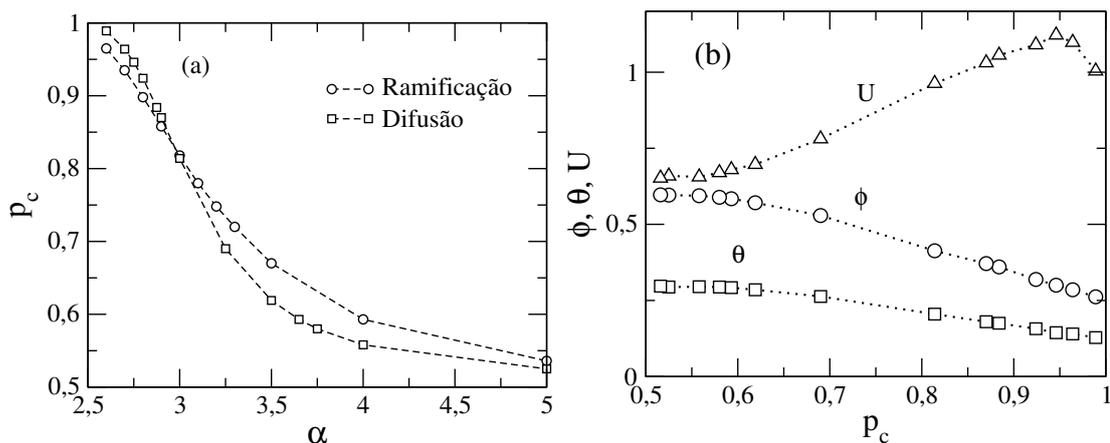


Fonte: Referência [80]

Seguimos o procedimento numérico descrito acima para estimar o parâmetro crítico para um conjunto de valores do expoente de Lévy  $\alpha$ . Na figura 4.5(a), temos nossas estimativas da probabilidade crítica de difusão representadas graficamente. Como esperado,  $p_c = 1$  para  $\alpha < 5/2$ . Nesse regime, qualquer probabilidade de ramificação afasta o sistema do estado de absorção e produz uma densidade finita de partículas. Conforme  $\alpha$  aumenta, uma transição ocorre com uma probabilidade de ramificação finita. E  $p_c$  decai continuamente até atingir o valor correspondente ao limite de ramificação assimétrica

[81]. Na figura 4.5(a), também incluímos a probabilidade crítica de difusão para o modelo BARW com ramificação do tipo Lévy [82]. Ressaltamos que nesse modelo a difusão é apenas para os locais vizinhos, por outro lado, a ramificação é de longo alcance. Essa confrontação entre os dois modelos em  $\alpha = 3$  separa dois regimes distintos. Para  $\alpha > 3$  a probabilidade crítica de difusão é maior para a ramificação de Lévy do que para a difusão de Lévy. Essa tendência é revertida para  $\alpha < 3$ . Esses dados revelam que a medida que os voos de Lévy tornam-se mais curtos, a fase ativa é favorecida no modelo com difusão de longo alcance. E caso contrário, a ramificação do tipo Lévy é mais eficaz em favorecer a fase ativa.

Figura 4.5: Em (a) temos os resultados da probabilidade crítica  $p_c$  em função dos valores do expoente de Lévy  $\alpha$ . Para o modelo com difusão de longo alcance e o modelo com ramificação de longo alcance publicado em [82]. Em (b) gráfico dos os expoentes críticos dinâmicos  $\theta$ ,  $\phi$  e a razão do momento  $U$  em função da probabilidade de difusão crítica.



Fonte: Referência [80]

Na figura 4.5(b), representamos graficamente nossas melhores estimativas para os expoentes críticos dinâmicos  $\theta$  e  $\phi$  em função da probabilidade de difusão crítica  $p_c$ , juntamente com nossas estimativas para a razão de momento crítico  $U$ . E a tabela 1 resume nossos resultados. Observe que a relação  $\phi = 2\theta$  é satisfeita dentro da nossa precisão numérica para todos os expoentes de Levy.

Os nossos resultados mostram que a probabilidade crítica  $p_c$  varia continuamente com  $\alpha$ , apontando uma tendência de  $p_c \rightarrow 1$  quando o expoente  $\alpha \rightarrow 5/2$ . Esse aspecto evidencia o desenvolvimento de um comportamento singular quando o expoente de Levy se aproxima do limite inferior  $\alpha = 5/2$ . Para  $\alpha \leq 5/2$ , ocorre uma transição dinâmica

descontínua do estado do vácuo em  $p = 1$  para o estado ativo em  $p < 1$ . Exatamente em  $p_c = 1$ , não há ramificação e o número de partículas permanece pequeno implicando, portanto, em  $\theta = \phi = 0$ . Quando  $\alpha$  está ligeiramente abaixo desse limite inferior, a transição se torna contínua e ocorre a uma taxa de ramificação finita (embora pequena) com leis de potências características que governam a dinâmica crítica.

Tabela 4.1: Estimativa da probabilidade crítica de difusão  $p_c$ , expoente associado a flutuação do parâmetro ordem  $\phi$ , o expoente de espalhamento  $\theta$  e razão do momento  $U$ . Todas as quantidades são calculadas para vários valores do expoente de Lévy.

$\alpha$	$p_c$	$\phi$	$\theta$	$U$
2.6	0.988(2)	0.276(16)	0.128(23)	1.004(27)
2.7	0.964(2)	0.285(10)	0.140(12)	1.098(10)
2.75	0.946(2)	0.300(11)	0.144(14)	1.122(18)
2.8	0.924(2)	0.319(12)	0.157(19)	1.090(10)
2.875	0.884(2)	0.360(10)	0.175(12)	1.056(16)
2.9	0.870(1)	0.371(10)	0.180(10)	1.031(12)
3.0	0.812(2)	0.424(16)	0.210(10)	0.963(10)
3.250	0.690(1)	0.529(12)	0.263(12)	0.781(27)
3.5	0.619(2)	0.571(10)	0.285(10)	0.697(19)
3.65	0.593(1)	0.584(11)	0.292(10)	0.680(12)
3.75	0.580(1)	0.589(10)	0.294(10)	0.670(15)
4.0	0.558(1)	0.594(10)	0.295(10)	0.656(28)
5.0	0.525(1)	0.596(11)	0.294(11)	0.659(21)
6.0	0.516(1)	0.597(10)	0.297(12)	0.652(13)

Fonte: Referência [80]

Além disso, os expoentes críticos dinâmicos e a razão de momento variam continuamente com  $p_c$  até atingir um valor da ordem de  $p_c = 0,6$  [ver Figura 4.5(b)]. Isso significa que mudanças nos expoentes críticos são desenvolvidas para os expoentes de Levy  $\alpha < 7/2$ . É interessante lembrar que, para o modelo bidimensional de Ising com interações decadentes da lei da potência, o valor crítico do expoente da decadência da lei da potência abaixo do qual os expoentes críticos continuamente variáveis aparecem é  $\alpha = 3.75$  [83]. Nossos dados são consistentes com uma conjectura de escala de  $\alpha_c \simeq 3,5$  para o cruzamento do comportamento de curto para o longo alcance da transição BARW que preserva a paridade [84]. Finalmente, descobrimos que a razão do momento varia não monotonicamente, atingindo um valor extremo em  $p_c \simeq 0,95$ . Portanto, as flutuações críticas são máximas para  $\alpha \sim 2,75$ .

## 4.4 Considerações Finais

Neste capítulo, estudamos a dinâmica crítica em um modelo de ramificação e aniquilação de caminhantes aleatórios, com conservação da paridade e difusão de longo alcance tipo Levy. Este modelo apresenta uma transição de fase entre uma fase ativa com uma densidade finita estatisticamente estacionária de partículas e uma fase de inativa com uma densidade pequena de partículas. E com uma probabilidade de difusão  $p$  atuando como um único parâmetro de controle.

Partindo de uma configuração inicial contendo um único caminhante, obtivemos numericamente os expoentes críticos dinâmicos associados ao crescimento do número médio de partículas, suas flutuações e a razão do segundo momento crítico em função do expoente Lévy  $\alpha$ , este que governa o comprimento do salto das partículas no processo de difusão. Identificamos três regimes. Se  $\alpha \leq 5/2$  o estado de vácuo é totalmente instável em relação a uma taxa de ramificação infinitesimal. Um regime intermediário com expoentes de variação contínua é estabelecido. Acima de um valor característico do expoente de Lévy, os expoentes tornam-se equivalentes aos do BARW com difusão de curto alcance.

Nossa análise de escala nos permitiu estimar que a classe de universalidade de curto alcance é atingida para  $\alpha > 3,5$ , o que está de acordo com uma conjectura prevista anteriormente [84]. Além disso, revelamos que os expoentes críticos dinâmicos permanecem finitos quando se aproxima o limite inferior  $\alpha = 5/2$ , evidenciando o comportamento singular nesse limiar. Também vimos que a relação do momento de segunda ordem passa por um máximo em função do expoente Lévy  $\alpha$ . Em particular, contrastamos o ponto crítico do BARW com difusão de Lévy e ramificação de Lévy. Descobrimos que a difusão de Lévy é mais eficaz na manutenção da fase ativa no regime de  $5/2 < \alpha < 3$ , enquanto a ramificação de Lévy se torna mais eficaz para  $\alpha > 3$ .

Seria interessante ter um cenário mais completo do comportamento crítico de BARWs com difusão e ramificação sendo controladas por seu próprio processo Lévy de longo alcance. Isso esclareceria a interação de processos de longo alcance em transições de fase de não equilíbrio com potencial aplicações em estudos gerais da dinâmica populacional.

# Capítulo 5

## Modelo com ramificação pura com voos de Levy e aniquilação

### 5.1 Introdução

Os processos de ramificação e aniquilação representam uma classe importante de sistemas dinâmicos de não-equilíbrio, encontrando aplicações em vários ramos da ciência, incluindo matéria condensada, física estatística, físico-química, biologia, ecologia e sociologia [7, 47, 54, 53, 64],[85]-[90]. No capítulo anterior, desmostrou-se a influência da difusão de longo alcance com uma distribuição de comprimento de voo tipo Lévy,  $P(r) \propto 1/r^{-\alpha}$ , nas propriedades críticas dos sistemas, com os expoentes críticos variando continuamente quando o expoente  $\alpha$  se torna abaixo de um valor característico.

Por outro lado, no processo de ramificação pura e aniquilação, não é permitido que as partículas se difundam [11],[91]-[94], embora a ramificação e a aniquilação sejam processos concorrentes. Com o sistema iniciando a partir de uma única partícula, o número médio de partículas cresce no tempo. No caso de um único descendente, esse crescimento é linear, enquanto um comportamento difusivo mais lento ocorre quando dois descendentes são colocados simetricamente nos locais vizinhos de uma rede unidimensional [89]. Apesar destes estudos, a influência de interações de longo alcance na dinâmica do processo puro de ramificação e aniquilação ainda é uma questão em aberto, sendo relevante

uma caracterização da dinâmica destes sistemas em função de  $\alpha$ .

Dessa forma, neste capítulo abordaremos a dinâmica de um processo de ramificação pura e aniquilação de Lévy em uma rede unidimensional. Em particular, estaremos interessados em analisar a evolução temporal do número de partículas e suas flutuações. Geralmente, esses modelos desenvolvem um crescimento tipo lei de potência quando o sistema inicia com uma única partícula na rede. Os expoentes dinâmicos característicos dessas duas quantidades relevantes, serão estimados a partir de simulações numéricas em um intervalo de valores para o expoente Lévy  $\alpha$ . Além disso, revelaremos as funções de distribuição associadas, explorando os regimes de flutuações gaussianas e não gaussianas, bem como o surgimento de distribuições de valores extremos. Mostraremos um cruzamento das distribuições de valores extremos, Frechet e Gumbell.

## 5.2 O modelo

Nesse trabalho, consideramos a ramificação e aniquilação de partículas estáticas  $A$  que geram um único descendente  $A \rightarrow 2A$  para a esquerda ou para a direita com igual probabilidade. As partículas se aniquilam com o contato  $A + A \rightarrow \emptyset$ , ou seja, quando o processo de ramificação tenta gerar um descendente em um sítio já ocupado por outra partícula. Esses processos podem ser representados pelas equações:

$$A \rightarrow (nA + A), \quad (5.1)$$

$$A + A \rightarrow \emptyset. \quad (5.2)$$

Em que  $n = 1$  corresponde ao número de descendentes gerados na ramificação. A partícula ramificada será deslocada uma distância  $r$  que segue uma distribuição de lei de potência de Levy. Isso é efetivamente contabilizado ao escolher a distância de ramificação como segue:

$$r = (1 - x)^{-1/(\alpha-1)}, \quad (5.3)$$

em que  $x$  é um número aleatório distribuído no intervalo de  $0 \leq x < 1$ , ressaltamos que apenas a partir inteira de  $r$  é considerada. O voo de Lévy equivale a um caminhante aleatório em que cada passo de comprimento  $r$  é uma variável aleatória com uma distribuição

de probabilidade dada por:

$$P(r) \propto \frac{1}{r^\alpha}, \quad (5.4)$$

com o expoente  $\alpha$  controlando a variação do processo de ramificação. Os grandes valores de  $\alpha$  correspondem a interações de curto alcance, implicando que os descendentes são gerados nas proximidades da partícula original. Por outro lado, pequenos valores de  $\alpha$  permitem grandes distâncias  $r$  no processo de ramificação, ou seja, o descendente é gerado distante da partícula que o originou.

O modelo foi simulado em uma rede unidimensional de tamanho  $L = 5 \times 10^6$ . O tamanho da rede foi escolhido para evitar efeito tamanho finito,  $L$  fica limitado ao maior número inteiro suportado pela máquina. Em todas as execuções, o tempo total de evolução foi escolhido para evitar efeitos de tamanho finito, evitando o processo de alcançar as fronteiras da cadeia.

Em cada etapa uma partícula do sistema é escolhida aleatoriamente para gerar um descendente. O tempo é aumentado em  $1/N(t)$  em cada etapa, em que  $N(t)$  é o número de partículas no tempo  $t$ . As médias são tomadas sobre um grande número de execuções independentes. Conforme o tempo passa, o número médio de partículas na rede cresce sem limite. Devido à ausência de difusão, um estado absorvente onde a população desaparece não pode ser alcançado, mesmo sem conservação de paridade.

Aqui, estudamos o comportamento de longo prazo da média do número de partículas  $\bar{N}(t)$ . Começamos a partir da condição inicial com uma única partícula no centro de uma rede unidimensional. Também seguimos a evolução temporal das flutuações quadráticas no número de partículas, definida como:

$$\Delta N^2(t) = \overline{[N(t) - \bar{N}(t)]^2}. \quad (5.5)$$

Em nossas simulações, o número médio  $N(t)$  e suas flutuações são calculados sobre um grande número de amostras, especificado na próxima seção. Os comportamentos da lei do potência são esperados em períodos suficientemente grandes, como segue:

$$\bar{N}(t) \sim t^\theta \quad (5.6)$$

$$\Delta^2 N(t) \sim t^\phi. \quad (5.7)$$

Sendo  $\theta$  e  $\phi$  os expoentes dinâmicos associados ao número médio de partículas e suas flutuações, respectivamente. Quando a ramificação é de curto alcance, é sabido que o número médio de partículas cresce linearmente no tempo ( $\theta = 1$ ) apresentando flutuações gaussianas ( $\phi = 1$ ) [94].

Em resumo, nosso objetivo é analisar como as quantidades variam no tempo para distintos valores  $\alpha$ , ou seja, caracterizar os regimes apresentados para um conjunto de valores do expoente de Lévy. Em particular, buscamos analisar  $\alpha$  fora do regime  $0 < \alpha < 2$ . Pois nesse intervalo os saltos muito grandes são frequentemente observados. Consequentemente, a aniquilação mútua se torna raro, fazendo o número médio de partículas divergir exponencialmente no tempo.

### 5.3 Simulações e Resultados

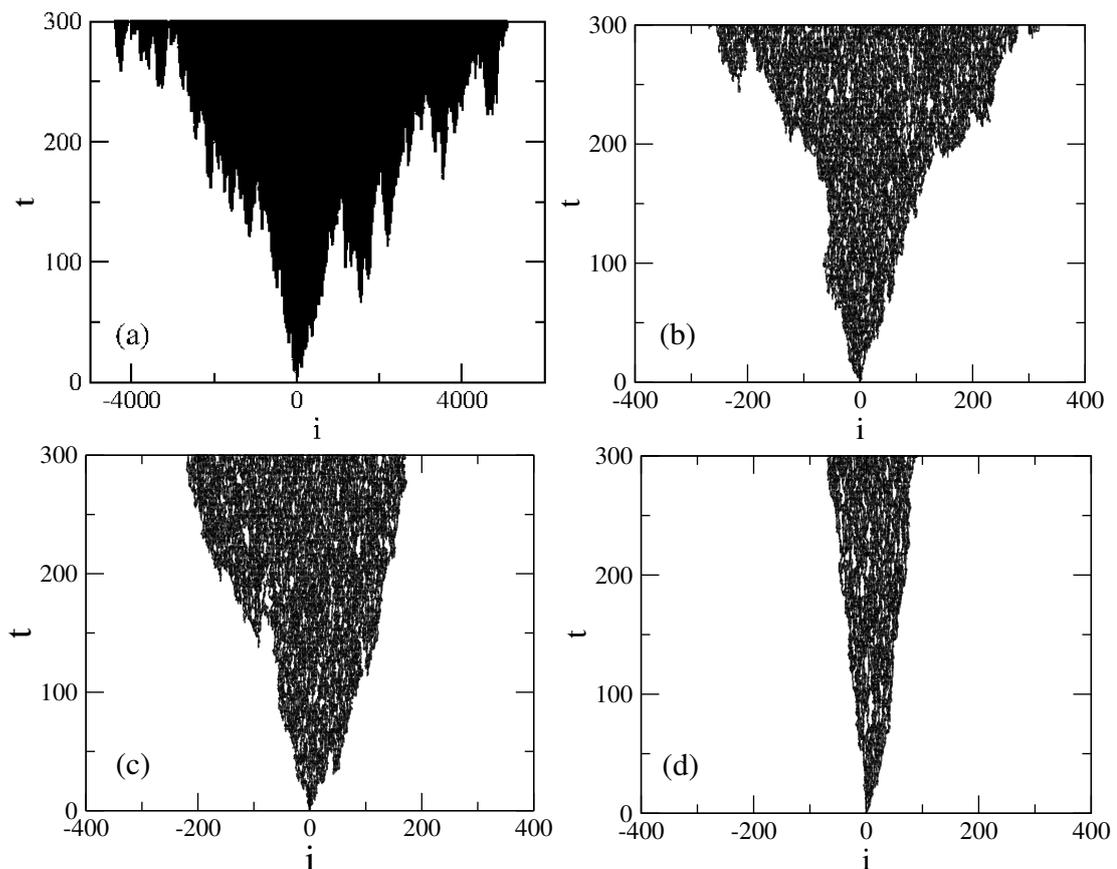
Inicialmente nosso objetivo foi verificar como as partículas iriam se distribuir na rede de acordo com a evolução do tempo. Começamos nossa análise mostrando um gráfico da distribuição espaço-tempo em regimes de ramificações distintas. Na figura 5.1, mostramos a distribuição espacial das partículas, ao longo do tempo, para alguns valores representativos do expoente de lévy  $\alpha$ . As simulações foram realizadas em uma rede unidimensional. Estas amostras foram simuladas para o tempo total  $t = 300$ . E em todos os casos, partem da configuração inicial de uma partícula no centro da rede. Destas medidas, vale destacar alguns resultados:

- Para o valor do expoente  $\alpha = 2,5$ , ver figura 5.1(a). As partículas se espalham por uma ampla região da rede, isso ocorre devido ao fato que em pequenos valores de  $\alpha$  existe uma ramificação eficaz de longo alcance. Novas sementes aparecem em toda a estrutura, resultado de uma ramificação para região vazia. A baixa densidade populacional em torno da nova partícula gerada leva a poucos encontros e, portanto, poucas extinções. Dessa maneira, as partículas se espalham rapidamente pela rede.
- A Figura 5.1(b) mostra os resultados para  $\alpha = 3$ . Neste caso, as partículas não se espalham por grandes distâncias e se concentram em torno de uma pequena região ao redor do centro da rede. A ramificação a curta distância faz com que o descendente seja normalmente gerado em um local já ocupado, levando à extinção de ambas as

partículas. Observe que, para grandes valores de  $t$ , alguns descendentes podem ser gerados em locais distantes da posição central original, como esperado.

- Na figura 5.1(c) consideramos  $\alpha = 3,5$ . As partículas são agregadas em uma região ainda menor ao redor da origem, pois as ramificações distantes são menos. As ramificações ocorrem em sítios já ocupados, levando a aniquilação de ambas as partículas. Uma situação semelhante ocorre para  $\alpha = 4,5$  (ver figura 5.1(d)). Para esses valores de  $\alpha$ , a maioria dos descendentes são gerados em torno da posição inicial central e o mecanismo de aniquilação proíbe uma alta taxa de ocupação da rede.

Figura 5.1: Distribuição de partículas no espaço-tempo para distintos valores de  $\alpha$ . Em (a)  $\alpha = 2,5$ , (b)  $\alpha = 3,0$ , (c)  $\alpha = 3,5$  e em (d)  $\alpha = 4,5$ . Observe que para  $\alpha$  pequeno, existem ramificações de longo alcance para regiões desocupadas da cadeia, o que favorece uma rápida ocupação da rede. Para  $\alpha$  grande, a ramificação de curto alcance predomina e o crescimento populacional é mais lento.



Fonte: Referência [95]

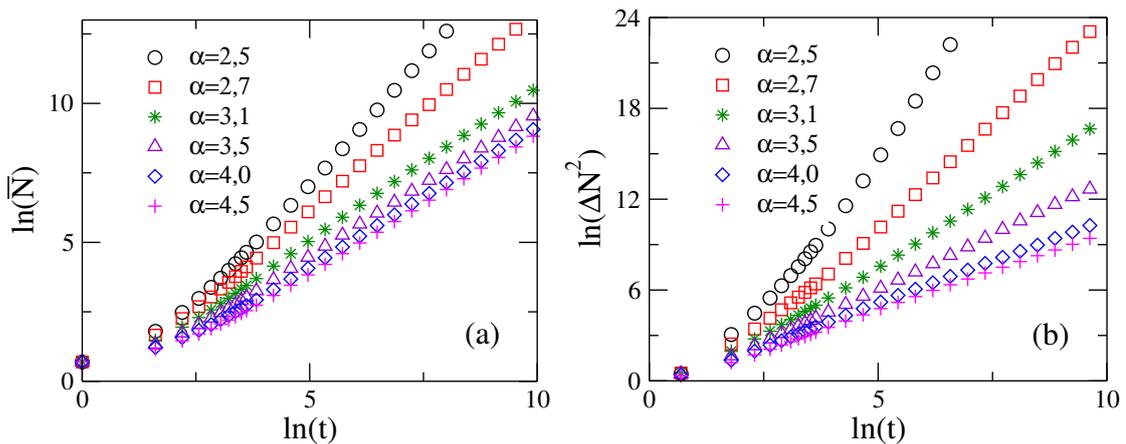
A distribuição espacial das partículas ao longo do tempo está, portanto, conectada

ao valor de  $\alpha$  que fornece o tamanho típico  $r$  (a distância de ramificação). Os valores de  $\alpha$  pequeno vai favorecer a ramificação para regiões vazias, levando a um crescimento populacional mais rápido. Porém, para grandes valores de  $\alpha$ , quase não existe nenhuma ocorrência de grandes saltos e é provável que um descendente seja criado em um local já ocupado, levando a um aumento mais lento da população.

Verificamos que o valor de  $\alpha$  efetivamente controla a distância que novas partículas serão geradas. Diante disso, nos concentramos em calcular os expoentes dinâmicos relacionados ao número médio de partículas e suas flutuações. Estudamos como o número médio de partículas e suas flutuações variam com o alcance das interações, esses resultados serão apresentados posteriormente.

Na figura 5.2, temos a evolução temporal destas quantidades para uma variedade de valores de  $\alpha$ . É importante ressaltar, verificamos que nenhuma tentativa de ramificação fora dos limites da cadeia ocorreu durante a execução de qualquer período. Dessa forma, nossos resultados são livres de correções de efeito tamanho finito.

Figura 5.2: Em (a), apresentamos a evolução temporal da média número de partículas e (b) suas flutuações quadráticas para valores distintos de  $\alpha$ . A inclinação destas curvas fornecem expoentes dinâmicos. Observe que, enquanto o expoente dinâmico de  $N(t)$  começa a mudar para  $\alpha < 3$ , seu expoente de flutuação já se desvia do comportamento de curto alcance para  $\alpha < 4$ .



Fonte: Referência [95]

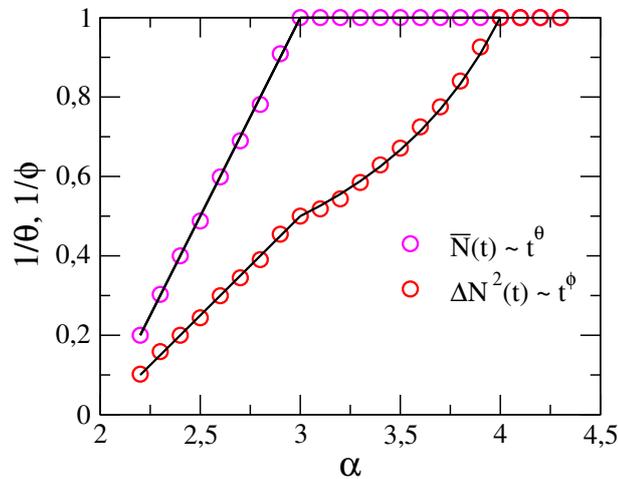
Em nossas medidas, variamos o número de amostras de  $10^4$  para o menor  $\alpha$  a  $10^5$  para os maiores. Para  $\alpha = 3$ , as simulações foram realizadas até o tempo  $t = 5000$ , caso contrário, os efeitos de tamanho finito afetariam as simulações. E para  $\alpha > 3$ , as medidas foram feitas até  $t = 50000$  sem efeitos de tamanho finito. Isso ocorre devido ao caráter

de menor alcance do processo de ramificação.

A Figura 5.2(a) mostra as curvas da evolução no tempo do número médio de partículas. Os resultados mostram que, para  $\alpha < 3$ , o número médio de partículas cresce mais rapidamente à medida que o valor do expoente de Lévy é reduzido. Por outro lado, a população tende a se agrupar próximo à origem se  $\alpha > 3$ , levando ao mesmo expoente  $\theta = 1$ . A Figura 5.2(b) apresenta a evolução temporal das flutuações do número de partículas. Observe que, para os valores de  $\alpha = 4$  e  $\alpha = 4,5$  as curvas apresentam a mesma inclinação. E este resultado é consistente com  $\phi = 1$  para ramificação de curto alcance. No entanto, o expoente dinâmico  $\phi$  já começa a se desviar desse valor para  $\alpha < 4$ .

As inclinação destas curvas, apresentadas na figura 5.2, forneceram os expoentes críticos dinâmicos  $\theta$  e  $\phi$  associados para cada valor do expoente de Lévy. E na figura 5.3, mostramos graficamente o conjunto de expoentes em função de  $\alpha$ .

Figura 5.3: **Expoentes dinâmicos associados ao número médio de partículas  $\theta$  e suas flutuações quadráticas  $\phi$  para valores distintos de  $\alpha$ . Para  $\alpha \geq 4$  os valores de curto alcance configuram  $\theta = \phi = 1$ . Em  $2 < \alpha \leq 3$ , encontramos  $\phi = 2\theta = 2/(\alpha - 2)$ . Se  $3 \leq \alpha \leq 4$  encontram-se regimes intermediários com  $\theta = 1$  e  $\phi = 5 - \alpha$ .**



Fonte: Referência [95]

Esses resultados exibem pontos significativos, vamos ressaltar alguns. Primeiramente, sobre o número médio de partículas:

- Em  $\alpha < 3$ , observe que o expoente  $\theta$  cresce monotonicamente e converge para o valor de curto alcance  $\theta = 1$  em  $\alpha = 3$ . Esse efeito é explicado pelo processo de ramificação que tende a agrupar as partículas em uma vizinhança da origem acima

desse valor de  $\alpha$ . Nesse caso, os processos de criação e aniquilação são equilibrados com a densidade de partículas flutuando em torno de um valor constante.

- Para  $\alpha < 3$ , nossos dados se ajustam à lei empírica  $1/\theta = \alpha - 2$ . A divergência de  $\theta$  em  $\alpha = 2$  sinaliza a instalação de crescimento explosivo exponencial da população, porque a aniquilação se torna irrelevante neste regime extremo de longo alcance, onde a distância média de ramificação diverge.

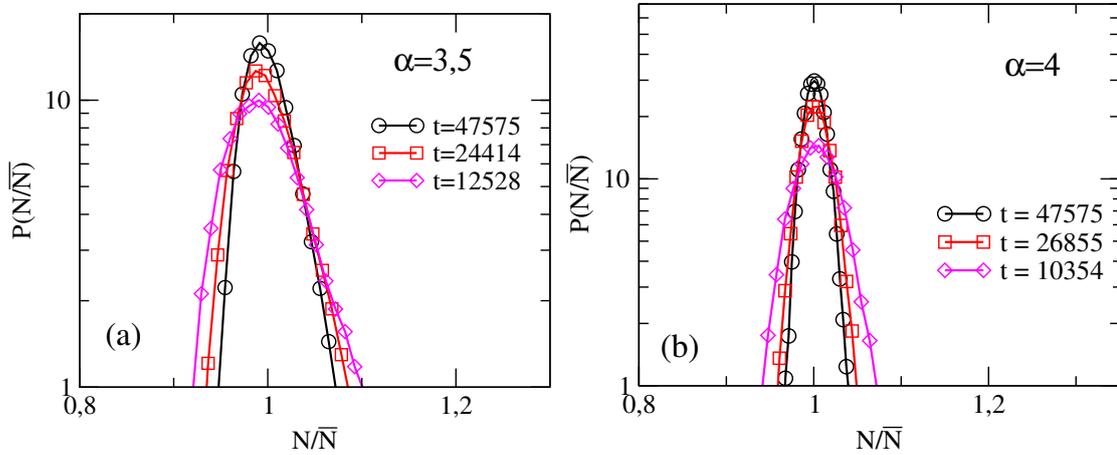
Segundo, no expoente dinâmico  $\phi$  associado às flutuações do número de partículas, observamos um comportamento semelhante. No entanto, temos a existência de três regimes distintos, são eles:

- O valor de curto alcance é atingido em  $\alpha = 4$ . Isso acontece devido à própria natureza dos processos subjacentes da lei de potência, que permitem a ocorrência de eventuais saltos de longa distância.
- No intervalo de  $2 < \alpha \leq 3$  nossos dados são consistentes com o expoente de flutuação  $\phi = 2\theta$ . Isso significa que a largura da distribuição do número de partículas se torna da mesma ordem do número médio. Portanto, as flutuações são relevantes nesse regime, mesmo no longo prazo.
- Por outro lado,  $1 \leq \phi \leq 2$  para  $3 \leq \alpha \leq 4$ . Portanto, a largura da distribuição do número de partículas cresce mais lentamente que sua média neste regime, embora seja mais rápido que difusivamente. Isso aponta para uma fraca violação do teorema do limite central neste regime. Nesse regime intermediário, nossos dados numéricos são bem ajustados por  $\phi = 5 - \alpha$ .

Para uma compreensão mais profunda da dinâmica desses regimes distintos, estudamos histogramas do número de partículas para diferentes valores de  $\alpha$ , isto é, para diferentes valores do alcance das interações. Na figura 5.4, apresentamos os casos para  $\alpha = 3, 5$  e  $\alpha = 4$ . Nestes casos, os histogramas foram obtidos a partir  $4 \times 10^4$  amostras. Na figura 5.4(a), observamos que, à medida que o tempo passa, a função densidade de probabilidade (FDP) converge lentamente para uma distribuição normal.

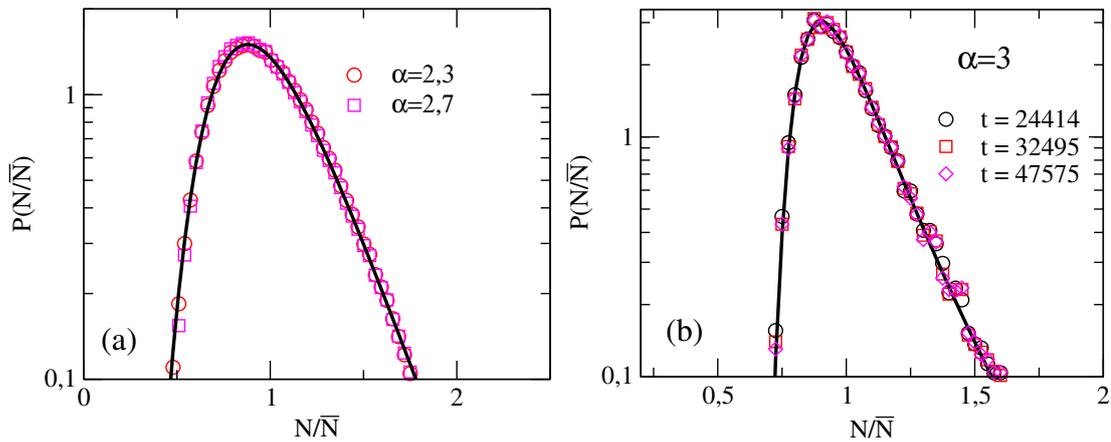
Por outro lado, para  $\alpha = 4$ , a FDP é gaussiana para todos os instantes considerados, como mostra a figura 5.4(b). O curto alcance das interações não permite grandes

Figura 5.4: Histogramas do número de partículas para  $\alpha > 3$ . Em (a) temos  $\alpha = 3, 5$ . Observamos uma lenta convergência para uma distribuição gaussiana. Em (b) temos  $\alpha = 4$  para o qual a convergência para gaussiano é mais rápido.



Fonte: Referência [95]

Figura 5.5: Em 5.5(a), apresentamos o histograma para o número de partículas  $N$  normalizadas sobre o número médio  $N/\bar{N}$  para  $\alpha = 2, 3$  e  $\alpha = 2, 7$ . Estes são ajustados por uma distribuição Gumbell com  $\sigma = 0, 24$ ,  $\xi = 0$  e  $\mu = 0, 88$  (linha sólida). Em 5.5(b), apresentamos  $P(N/\bar{N})$  para  $\alpha = 3, 0$  em três instantes diferentes. O ajuste (linha sólida) representa uma distribuição de Frechet com  $\sigma = 0, 12$ ,  $\xi = 0, 17$  e  $\mu = 0, 92$ .



Fonte: Referência [95]

ramificações. A aniquilação acontece e a convergência para uma distribuição normal ocorre, conforme esperado pelo Teorema Central do Limite.

Posteriormente, fizemos os histogramas para  $\alpha \leq 3$ . Na figura 5.5(a), apresentamos nossos resultados para  $\alpha = 2, 3$  e  $\alpha = 2, 7$ . Representamos a probabilidade  $P(N/\bar{N})$  versus  $N/\bar{N}$ . A população  $N$  é medida em  $t = 446$  e  $\bar{N}$  é calculada a média para  $5 \times 10^5$  amostras.

Os histogramas são os mesmos para outros tempos e valores de  $\alpha < 3$ , isto é, representa a distribuição estacionária do número de partículas neste regime.

Na Figura (5b), usamos  $\alpha = 3$  e consideramos três instantes distintos. Aqui,  $\bar{N}$  é calculado sobre a média de  $10^4$  amostras. Estes resultados mostram que a distribuição também é estacionária neste regime, mas apresenta um perfil distinto do relatado na figura 5.5(a). Nos dois casos, as distribuições têm um caráter fortemente não-gaussiano.

Estes resultados mostram que no regime de  $\alpha \leq 3$  (o regime com expoente  $\theta$  variando), os dados são ajustados pelas distribuições estáveis de valores extremos de Fréchet e Gumbell. As distribuições de Gumbell e Fréchet são casos particulares da distribuição generalizada de valores extremos (GVE), que também inclui a distribuição Weibull [96]. O teorema do valor extremo afirma que essas distribuições estáveis descrevem o comportamento assintótico de valores extremos normalizados de uma amostra independente univariada (análise de cada variável separadamente). As distribuições Fréchet e Gumbell são obtidos quando consideramos os valores máximos da variável. Por outro lado, uma distribuição Weibull é desenvolvida sempre que se considera o mínimo. As funções de distribuição de probabilidade (FDP) para estes casos, são fornecidas por:

$$P(x) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) t(x)^{\xi+1} e^{-t(x)}, \quad (5.8)$$

com

$$t(x) = e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}, \quad (5.9)$$

para  $\xi = 0$ . E caso contrário, teremos:

$$t(x) = \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (5.10)$$

se  $\xi \neq 0$ . O parâmetro  $\xi$  define qual das três distribuições estamos nos referindo. A distribuição Gumbell é obtida quando  $\xi = 0$ , enquanto para  $\xi > 0$  representa Fréchet e se  $\xi < 0$  para Weibull.

Os nossos resultados mostram que uma distribuição de Gumbell ajustada nas curvas para  $\alpha < 3$  com alta precisão, cujos parâmetros são  $\sigma = 0,24$ ,  $\xi = 0$  e  $\mu = 0,88$  (ver figura 5.5(a)). Em contrapartida, nossos dados mostram a propriedade estacionária da distribuição de Fréchet no limiar  $\alpha = 3$  com  $\sigma = 0,12$ ,  $\xi = 0,17$  e  $\mu = 0,92$  (ver figura 5.5(b)). Esses resultados indicam que a dinâmica é realmente governada pelos raros

eventos de ramificação para locais distantes da semente original.

Existem alguns trabalhos no qual os autores obtiveram estas distribuições, mencionamos a seguir alguns destes estudos. Por exemplo, é importante mencionar que as distribuições de Gumbell também são encontradas na ramificação de caminhantes brownianos em que, após um tempo aleatório exponencial, a partícula se divide em  $n$  partículas com uma probabilidade determinada. Em [97] foi provado que a função de densidade de probabilidade do máximo do movimento browniano de ramificação converge para uma distribuição de Gumbell, uma conjectura previamente declarada em [98]. Os maiores extremos de passeios aleatórios independentes e distribuídos de forma idêntica também provaram convergir para as distribuições Gumbell ou Frechet [99]. As distribuições de Gumbell foram relatadas em passeios aleatórios em redes totalmente conectadas. Em [100], os autores analisaram a evolução do tempo no número de sítios visitados em um determinado subconjunto do número total de sítios. Sempre que o caminhante visita qualquer sítio desse subconjunto, um valor é registrado. Quando esse valor registrado é igual ao número de sítios no subconjunto, o valor do tempo é denominado tempo total de cobertura e as flutuações dessa variável são distribuídas de acordo com a distribuição Gumbell [100]. Trabalhos experimentais recentes mostraram um cruzamento da estatísticas de valor extremo (Frechet para Gumbell) nas intensidades de um laser [101].

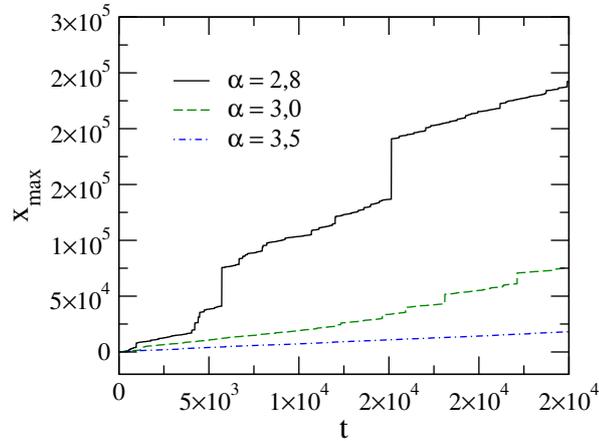
Mostramos alguns dados adicionais para apoiar a importância de eventos extremos de ramificação de longa distância para a dinâmica dos sistemas. Para isso relatamos a evolução no tempo da frente de espalhamento  $x_{max}$ , ou seja, mensuramos a distância da partícula mais distante em um determinado instante de tempo.

Na figura 6 mostramos os resultados para alguns valores representativos do expoente de ramificação, são  $\alpha = 2,8$ ,  $\alpha = 3,0$  e  $\alpha = 3,5$ . Estes dados mostram no regime para  $\alpha > 3$  o sistema evolui balisticamente sem descontinuidades marcantes. Porém, se  $\alpha < 3,0$  observamos descontinuidades que representam os saltos abruptos, isso é resultado da relevância das ramificações de longa distância existentes neste regime.

Finalmente, para mostrar como a distribuição espacial das partículas em um determinado período de tempo pode revelar aspectos importantes que distinguem os regimes de curto e longo alcance, averiguamos a distribuição do números médios de ocupação  $\bar{n}(x)$  para distintos valores do expoente de ramificação.

As medidas foram executadas para distintos valores de  $\alpha$  no tempo  $t = 100$  com  $10^4$

Figura 5.6: Evolução temporal da frente de espalhamento  $x_{max}$  medida como a partícula com maior distância da posição da semente no tempo  $t$ . Se  $\alpha < 3$  observamos saltos resultantes de eventos raros de ramificações de longo alcance.



Fonte: Referência [95]

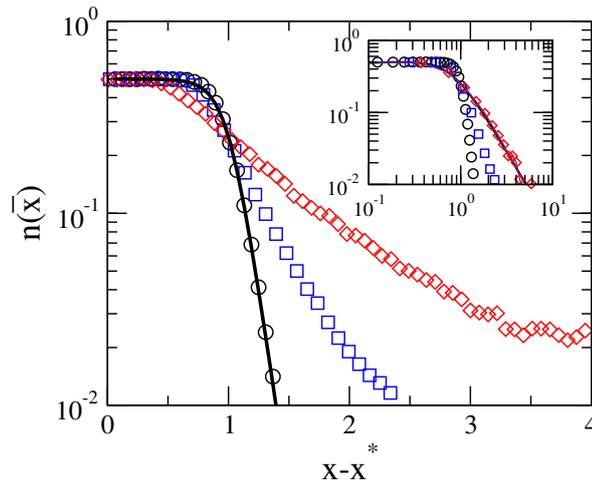
realizações e estão apresentadas para alguns valores na figura 7. Os resultados mostram que longe da frente de expansão, o equilíbrio entre os processos de ramificação e aniquilação resulta em uma distribuição de partículas estatisticamente uniforme com o número médio de ocupação de um determinado local sendo  $\bar{n} = 1/2$ , independentemente da faixa de ramificação. Flutuações da frente de expansão sobre realizações distintas produzem um cruzamento suave da região ativa com  $\bar{n} = 1/2$  para a região inativa com  $\bar{n} = 0$ . Dependendo do regime de ramificação, distribuições médias de número de ocupação bastante distintas  $\bar{n}(x)$  são configuradas, conforme ilustrado na figura 7.

No regime de curto alcance, esse cruzamento entre a fase ativa e inativa é exponencial. Na verdade, a distribuição média do número de ocupação tem uma forma Fermi-Dirac:

$$\bar{n}(x) = \frac{n_0}{e^{\beta(x-x^*)} + 1}, \quad (5.11)$$

onde  $n_0 = 1/2$ ,  $x^*$  é a distância até a origem na qual o número médio de ocupação decai para  $n_0/2$  e  $\beta$  controla a largura da região de cruzamento. A distribuição Fermi-Dirac acima se ajusta com precisão aos dados da simulação para  $\alpha = 4$  (ver linha sólida na estrutura principal da Figura 7). Medimos a distância em unidades de  $x^*$  sendo deixado com um único parâmetro de ajuste  $\beta x^*$ . Nesse regime, o parâmetro de ajuste se torna maior quando a distribuição é medida em períodos mais longos, conforme o esperado, porque as flutuações relativas se tornam pequenas no regime gaussiano. O surgimento da

Figura 5.7: A distribuição média do número de ocupação  $\bar{n}(x)$  em função da distância normalizada à posição da semente  $x/x^*$ , onde  $\bar{n}(x^*) = n_0/2$ . Os dados são para  $\alpha = 4$  (círculos),  $\alpha = 3$  (quadrados) e  $\alpha = 2,3$  (losangos). Em  $\alpha = 4$  a linha sólida é adequada à distribuição Fermi-Dirac dada na equação 5.11. Para  $\alpha = 2,3$ , no gráfico inserido, a linha sólida é adequada à distribuição de Fermi-Dirac no contexto de estatísticas não extensivas fornecidas na equação 5.12. Esses resultados foram obtidos em  $t = 100$  de  $10^4$  realizações distintas.



Fonte: Referência [95]

distribuição de Fermi-Dirac possui uma estreita analogia entre problemas de não-equilíbrio com reação-difusão e sistemas férmicos quânticos [102, 103], e pode abrir uma nova direção para futuras derivações analíticas das distribuições numéricas relatadas.

Por outro lado, os resultados mostram um cruzamento muito longo que se desenvolve no regime de ramificações de longo alcance. O número médio de ocupação decai lentamente para  $x/x^* \gg 1$ , como uma lei de potência, conforme mostrado na figura 7. Esse efeito está diretamente associado aos eventos raros de ramificações de longa distância que podem preencher regiões a distâncias muito maiores que o tamanho médio da região ativa. Uma generalização da distribuição de Fermi-Dirac foi dada na literatura no contexto de estatísticas não extensivas [104]-[106], que encontrou aplicações em vários sistemas físicos apresentando multifractalidade, memória de longo prazo e interações de longo alcance [115]-[116]. Embora a forma exata da distribuição de Fermi resultante seja bastante complicada e difícil de calcular, ela assume uma forma simples e intuitiva dentro da chamada aproximação de fatoração [117], sendo dada por:

$$\bar{n}(x) = \frac{n_0}{\{\exp_q[-\beta(x - x^*)]\}^{-1} + 1}, \quad (5.12)$$

onde

$$\exp_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (5.13)$$

para  $1 + (1 - q)x > 0$ , sendo zero caso contrário. A expressão acima foi usada para ajustar os dados para a distribuição média do número de ocupação em  $\alpha = 2, 3$ , mostrada como a linha sólida na inserção da Fig. 7. Os parâmetros de ajuste utilizados foram  $\beta x^*$  e  $q$ .  $\beta x^*$  é independente do tempo neste regime porque a dispersão do número de partículas é da mesma ordem que sua média. Para  $x/x^*$  large grande, a distribuição decai como  $1/(x/x^*)^{1/(q-1)}$ . Nosso melhor ajuste para a distribuição  $\alpha = 2, 3$  forneceu  $q \simeq 1,46$ . A expressão simples acima não se ajusta a toda a distribuição do número de partículas no regime intermediário dos valores  $\alpha$ , um sinal de que as correções relevantes à aproximação da fatoração estão em ordem.

## 5.4 Considerações Finais

Estudamos neste capítulo a dinâmica de um modelo com ramificação e processos de aniquilação de partículas estáticas que geram um único descendente e se aniquilam após contato. Lembrando que a ramificação das partículas ocorre a uma distância  $r$  seguindo uma distribuição de Lévy, sendo que a distância das interações (da ramificação) é efetivamente governada pelo parâmetro  $\alpha$ .

Nossos resultados mostraram que, para  $\alpha > 4$  o sistema está em regime de ramificação muito curta, isto é, as ramificações ocorrem apenas em sítios próximos. Com isso, foi mostrado que o número médio de partículas  $\bar{N}(t)$  e suas flutuações quadráticas crescem linearmente com o tempo, como esperado para ramificação local. E nesse regime, a distribuição do número de partículas  $N$  em um determinado instante de tempo, determinado a partir de um grande número de execuções independentes, converge rapidamente para uma distribuição gaussiana.

No regime intermediário para  $3 < \alpha < 4$ , o número médio de partículas ainda cresce linearmente com o tempo. Porém, as flutuações quadráticas do número de partículas se comportam como  $\Delta N^2(t) \propto t^\phi$ , com o expoente variando de  $1 < \phi < 2$ . Isso implica num aumento superdifusivo da distribuição do número de partículas. Os nossos dados nos permitiu propor a relação  $\phi = 5 - \alpha$ . Conforme o tempo  $t$  evolui, a distribuição  $P(N/\bar{N})$  vai convergir para uma distribuições gaussianas.

No intervalo  $2 < \alpha < 3$ , as medidas exibem para  $\overline{N}(t)$  e  $\Delta N^2(t)$  os expoentes associados variando com o alcance das interações. E os dados consistentes com a relação  $\phi = 2\theta = 2/(\alpha - 2)$ . Nesse regime, a largura da distribuição do número de partículas se torna da mesma ordem que o próprio número médio de partículas, sinalizando flutuações assintóticas não gaussianas. A função densidade de probabilidade  $P(N/\overline{N})$  é bem representada por uma distribuição de valor extremo, chamada de distribuição Gumbell . E em  $\alpha = 3$  o sistema apresenta uma distribuição de Frechet. Estes efeitos possuem uma estreita analogia com experimentos com lasers aleatórios [101].

Em  $\alpha \leq 2$  os expoentes dinâmicos divergem, isso mostra que sistema apresenta um crescimento exponencial explosivo da população. Isso ocorre devido os processos de ramificação de longo alcance serem dominantes e, conseqüentemente, os processos de aniquilação são eventos raros. Por fim, os dados mostram que a distribuição do número médio de ocupação apresenta um aspecto de Fermi-Dirac para ramificações de curto alcance, evoluindo para o correspondente no contexto de estatísticas não extensivas no regime de longo alcance.

Com este trabalho, aprofundamos nas pesquisas relacionadas com sistemas dinâmicos na presença de voos de Lévy em seus processos. E contribuímos com a literatura atual com o estudo de modelos dinâmicos que apresentam um possível surgimento de districuições generalizadas de valores extremos. Devido à ocorrência de distribuições de Lévy na natureza [118]-[114], seria valioso ter investigações futuras com o objetivo de explorar o possível surgimento de distribuições de valores extremos em modelos de dinâmica populacional geral e sistemas ópticos com interações de longo alcance.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

### 6.1 Conclusão

Nesta tese nos propomos a investigar as propriedades críticas associadas à transição de fase de sistemas de não equilíbrio. Para isso, nós utilizamos a técnica de simulações Monte Carlo para estudar as propriedades críticas dinâmicas de modelos em redes unidimensionais. Em especial, nos interessamos por sistemas estocásticos clássicos modelados por regras dinâmicas em que o sistema passa por uma transição de fase contínua.

Existe um interesse em modelos teóricos que retratam a transição de fase contínua emergente entre sobrevivência e extinção. O sistema que melhor representa esse comportamento é a Percolação Direcionada-PD, onde os sítios em uma rede podem ser ativos (infectado) ou inativos (saudável). Dependendo de um parâmetro que controla o equilíbrio entre a infecção e recuperação, o sistema pode ter dois estados: a atividade pode se espalhar por todo o sistema ou desaparecer após algum tempo. Este último caso é o chamado estado absorvente do modelo. Isso leva a PD ser um processo de não equilíbrio que apresenta uma transição contínua entre a fase ativa e a inativa, caracterizada por comportamento crítico universal. Na literatura, existe uma vasta variedade de modelos da PD e todos exibem o mesmo tipo de comportamento na transição. Por esta razão, tornou-se a principal classe de universalidade de modelos de não equilíbrio.

Motivados pelo largo interesse existente na literatura em estudar o comportamento crítico de sistemas e classificar suas transições de fase por propriedades universais, estu-

damos modelos que apresentam transições de fase de segunda ordem e seus conjunto de expoentes críticos. Em particular, nós revisitamos modelos de partículas de uma única espécie que difundem em uma rede e sofrem processos de difusão, ramificação e aniquilação. Nosso maior empenho foi estudar como o comportamento crítico dos modelos podem ser afetados quando interações de longo alcance, do tipo voos de Lévy, são permitidas.

Inicialmente, realizamos um estudo numérico no modelo de ramificação e aniquilação de caminhantes aleatórios (BARW-Branching and Annihilating random walk) com conservação da paridade e difusão de longo alcance, definido em uma rede unidimensional. Trata-se de um sistema que já foi estudado por outros autores, no entanto, visitar o modelo é interessante porque existe algumas questões em aberto na literatura sobre o comportamento da dinâmica na presença de voos de Lévy. Realizamos um estudo do comportamento dependente do tempo do sistema, partindo de uma condição inicial específica de uma partícula na origem. E, em particular, determinamos os expoentes associados ao número médio de partículas e suas flutuações, e confrontamos os resultados com resultados anteriores com ramificação de longo alcance.

Nossos resultados revelam que a probabilidade crítica  $p_c$  cresce continuamente a medida que as partículas no processo de difusão sofrem "saltos" mais distantes do seu sítio original, ou seja, a probabilidade crítica aumenta com a diminuição do expoente de Lévy, apontando uma tendência de  $p_c \rightarrow 1$  quando o expoente  $\alpha \rightarrow 5/2$ . Em  $\alpha \leq 5/2$  o estado de vácuo alcançado é totalmente instável em relação a uma taxa de ramificação infinitesimal. Nossas medidas mostraram que em  $\alpha > 3,5$  a classe de universalidade de curto alcance é atingida. Aqui, a difusão e a ramificação foram restritas aos sítios próximos. Contrastando a difusão de Lévy com o modelo de ramificação de Lévy estudado em [82], constatamos que no intervalo  $5/2 < \alpha < 3$  a difusão de Lévy é mais eficaz na manutenção da fase ativa. Enquanto em  $\alpha > 3$  a ramificação de Lévy se torna mais eficaz.

Para enriquecer nossos estudos, procuramos analisar a dinâmica do processo de ramificação e aniquilação com interações de longo alcance. Em que as partículas estáticas geram um descendente e se aniquilam ao entrar em contato. E neste caso, a ramificação e aniquilação são controladas por seu próprio processo Lévy de longo alcance. Assim, analisamos o comportamento a longo prazo do número médio de partículas e suas flutuações em função do parâmetro de Lévy. O expoente dinâmico associado às flutuações do número de partículas varia continuamente para  $\alpha < 4$ , enquanto o expoente do número

de partículas muda apenas para  $\alpha < 3$ . Pontualmente, em  $\alpha \geq 4$  o sistema se encontra no regime de ramificações de curto alcance. Com o número de partículas e suas flutuações crescendo linearmente com o tempo. E a distribuição do número de partículas converge para uma distribuição gaussiana em qualquer instante de tempo. Para  $3 < \alpha < 4$ , o número médio de partículas cresce linearmente com  $t$ , no entanto, suas flutuações quadráticas crescem em lei de potência, com o expoente associado  $1 < \phi < 2$ . E nesse intervalo, o sistema converge lentamente para uma distribuição gaussiana a medida que o tempo evolui. Em  $2 < \alpha \leq 3$ , os expoentes associados variam continuamente com  $\alpha$ . E exibem distribuições não gaussianas, em  $\alpha = 3$  a distribuição é Frechet e  $3 < \alpha < 3$  é Gumbell. Para  $\alpha \leq 2$  a população aumenta rapidamente devido as ramificações de longo alcance serem dominantes e as aniquilações eventualmente ocorrem. Finalmente,

A distribuição do número médio de ocupação mostrou ter um aspecto de Fermi-Dirac para ramificações de curto alcance, evoluindo para o correspondente no contexto de estatísticas não extensivas no regime de longo alcance.

Com estes estudos avançamos nas pesquisas referentes as transições de fase em sistemas de não equilíbrio. Investigamos modelos que fogem da classe de universalidade PD, principal classe para as transições de não equilíbrio. Em particular, estudamos as consequências que os processos de longo alcance (voos de lévy) podem ocasionar nas propriedades críticas dos sistemas. Esperamos que os resultados motivem futuras investigações que contribuam para a elaboração de um cenário mais completo relacionado às classes de universalidade das transições de fase de não equilíbrio.

## 6.2 Perspectivas para futuros trabalhos

Como perspectivas para futuros trabalhos, pretendemos ampliar nossos estudos referentes ao modelo BARW. Exploraremos o modelo com voos de Lévy nos processos de difusão e ramificação, ou seja, as partículas difundentes e ramificadas serão colocadas em sítos cuja distância será controlada pelo parâmetro de lévy. Além disso, permitir a coexistência de duas partículas no mesmo local da rede, isto é, uma probabilidade de ramificação finita. Visto que já foi sugerido por outros autores que isso pode afetar o comportamento inicial do sistema [115]. E com isso esperamos retratar um cenário mais completo do comportamento crítico desta classe de modelo.

Uma outra proposta é investigar o de processo de contato em pares com difusão (do inglês pair contact process with diffusion-PCPD). Trata-se um processo clássico de reação-difusão para descrever partículas de interação estocástica, com uma única espécie e que reagem espontaneamente sempre que dois deles entrarem em contato [116]-[121]. Nestes sistemas, a produção de partículas por pares compete com a aniquilação de pares e a difusão de partículas únicas. A classe de universalidade do PCPD é bastante instável embora não seja afetado pela paridade, mas perturbações que impedem a difusão de caminhantes únicos provoca uma mudança do comportamento para a PD [116, 117]. Em contraste com a DP que é robusta e permanece inalterada por perturbações, que alteram a dinâmica da difusão desde que a simetria da paridade permaneça inalterada.

O modelo foi introduzido em [116], a dinâmica é controlada por dois parâmetros, a probabilidade de aniquilação de pares  $p$  e a probabilidade de difusão de partículas  $D$ . Na sua versão fermiônica do modelo cada sítio é ocupado por uma única partícula ( $A$ ) ou vazio ( $0$ ). As reações são:



um par de partículas localizadas em sítios vizinhos podem gerar um descendente com uma probabilidade  $\frac{(1-p)(1-d)}{2}$ . As partículas serão aniquiladas:



com uma probabilidade  $p(1-d)$ . E uma partícula pode difundir:



com uma probabilidade  $d$ , em que  $1 < p < 0$  e  $1 < d < 0$ . Investigaremos a dinâmica do PCPD na presença de voos de Lévy. Caracterizaremos o comportamento da transição de fase de um processo de espalhamento binário em uma dimensão, cuja difusão será controlada pelo expoente de Lévy  $\alpha$ . O interesse em estudar este modelo, consiste no fato de se tratar de um comportamento crítico bastante instável. Isto já foi mostrado (em estudos anteriores) que perturbações na dinâmica de difusão alteram a classe de

universalidade [10, 119, 120]. Porém, a possibilidade das interações dos processos não serem puramente locais, é algo relevante, mas que não foi analisado na literatura.

Enfim, outra perspectiva é analisar um sistema para modelar a dinâmica de populações. Deste modo, temos interesse em estudar um sistema de competição entre duas espécies  $A$  e  $B$ . Em uma rede unidimensional, os sítios da rede podem ser ocupados por partículas da espécie  $A$  da espécie  $B$ . Cada sítio  $\sigma_i$  da rede pode apresentar um dos quatro estados, são eles:  $\sigma_i = 0$ ,  $\sigma_i = A$ ,  $\sigma_i = B$  ou  $\sigma_i = 1A + 1B$ . Cada passo inicia-se escolhendo um sítio aleatoriamente. A partir disto, pode ocorrer um dos processos com suas respectivas probabilidades atribuídas:

- Com uma probabilidade  $p$  uma nova partícula é gerada, se o sítio selecionado estiver ocupado por uma partícula da espécie  $A$  e uma partícula da espécie  $B$ . O descendente será gerado no sítio vizinho da direita ou esquerda com igual probabilidade. E o descendente gerado será do tipo  $A$  ou  $B$ , isso será escolhido aleatoriamente.
- E com uma probabilidade  $d$  as partículas difundem, a distância do salto neste processo segue a distribuição de Lévy, na forma da equação:  $r = (1 - x)^{-1/(\alpha-1)}$ . Em que  $r$  é o comprimento do passo e varia com  $x$  que é um número aleatório  $0 \leq x \leq 1$  e  $\alpha$  o parâmetro que controla o alcance do salto.

A competição ocorre entre as partículas de uma mesma espécie ao ocuparem o mesmo sítio da rede, seja esse encontro devido o processo de ramificação ou difusão. Partindo de uma configuração inicial com uma partícula de cada espécie em um único sítio. Prevemos a existência de uma transição de fase contínua entre um estado com uma densidade finita de partículas composta por ambas as espécies e um estado absorvedor. O estado absorvedor pode ser o estado de vácuo (a rede vazia) ou uma única partícula difundindo aleatoriamente na rede.

Acredita-se que as transições de fase para estados absorventes possam ser categorizadas em um número finito de classes de universalidade, a PD e a CP são classes bem estabelecidas. No entanto, além destas classes existe o PCPD que ainda não se encontra bem estabelecida. Em resumo, nestes trabalhos esperamos intensificar os estudos referentes aos efeitos originados por perturbações que alteram a dinâmica dos processos de difusão, o modelo com difusão e a ramificação sendo controladas pelo processo Lévy e o PCP com difusão de longo alcance.

# Referências Bibliográficas

- [1] KIRKWOOD, John G. et al. Flow equations and frames of reference for isothermal diffusion in liquids. *The Journal of Chemical Physics*, v. 33, n. 5, p. 1505-1513, 1960.
- [2] PAPON, P.; LEBLOND, J.; MEIJER, P. H. E. *The Physics of Phase Transitions: Concepts and Applications*, 2006.
- [3] KHORRAMI, Mohammad; AGHAMOHAMMADI, Amir. Static-and dynamical-phase transition in one-dimensional reaction-diffusion systems with boundaries. *Brazilian journal of physics*, v. 33, n. 3, p. 421-430, 2003.
- [4] HINRICHSEN, Haye. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Advances in physics*, v. 49, n. 7, p. 815-958, 2000.
- [5] BRAMSON, Maury; GRAY, Lawrence. The survival of branching annihilating random walk. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, v. 68, n. 4, p. 447-460, 1985.
- [6] JENSEN, Iwan. Critical behavior of the pair contact process. *Physical review letters*, v. 70, n. 10, p. 1465, 1993.
- [7] HENKEL, Malte; HINRICHSEN, Haye. The non-equilibrium phase transition of the pair-contact process with diffusion. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 37, n. 28, p. R117, 2004.
- [8] JENSEN, Iwan. Critical behavior of the pair contact process. *Physical review letters*, v. 70, n. 10, p. 1465, 1993.
- [9] DICKMAN, Ronald; DA SILVA, Jafferson Kamphorst Leal. Moment ratios for absorbing-state phase transitions. *Physical Review E*, v. 58, n. 4, p. 4266, 1998.

- [10] DAGA, Bijoy; RAY, Purusattam. Universality classes of absorbing phase transitions in generic branching-annihilating particle systems with nearest-neighbor bias. *Physical Review E*, v. 99, n. 3, p. 032104, 2019.
- [11] SUDBURY, Aidan et al. The branching annihilating process: an interacting particle system. *The Annals of Probability*, v. 18, n. 2, p. 581-601, 1990.
- [12] TAKAYASU, H.; INUI, N. Reaction limited catalytic reaction in one dimension. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 25, n. 9, p. L585, 1992.
- [13] PRIVMAN, Vladimir (Ed.). *Nonequilibrium statistical mechanics in one dimension*. Cambridge University Press, 2005.
- [14] JANSSEN, Hans-Karl. On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, v. 42, n. 2, p. 151-154, 1981.
- [15] HENKEL, Malte et al. *Non-equilibrium phase transitions*. Dordrecht: Springer, 2008.
- [16] BOUCHAUD, Jean-Philippe; GEORGES, Antoine. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications. *Physics reports*, v. 195, n. 4-5, p. 127-293, 1990.
- [17] MOLLISON, Denis. Spatial contact models for ecological and epidemic spread. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 39, n. 3, p. 283-313, 1977.
- [18] VERNON, Daniel; HOWARD, Martin. Branching and annihilating Lévy flights. *Physical Review E*, v. 63, n. 4, p. 041116, 2001.
- [19] ALBANO, E. V. Branching annihilating Levy flights: Irreversible phase transitions with long-range exchanges. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 34, n. 2, p. 97, 1996.
- [20] STANLEY, H. Eugene. *Phase transitions and critical phenomena*. Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [21] JAEGER, Gregg. The Ehrenfest classification of phase transitions: introduction and evolution. *Archive for history of exact sciences*, v. 53, n. 1, p. 51-81, 1998.

- [22] REICHL, L. E. A modern course in statistical physics. 2Ed. [S.l.]: John Wiley e Sons, (1997).
- [23] SALINAS, S. R. A. Introdução Física Estatística (Editora Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013) 3a reimp; SR Dahmen. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, p. 271, 2005.
- [24] ANDREWS, Thomas. XVIII. the bakerian lecture -on the continuity of the gaseous and liquid states of matter. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, n. 159, p. 575-590, 1869.
- [25] LUBECK, Sven. Universal scaling behavior of non-equilibrium phase transitions. International Journal of Modern Physics B, v. 18, n. 31n32, p. 3977-4118, 2004.
- [26] BROADBENT, Simon R.; HAMMERSLEY, John M. Percolation processes: I. Crystals and mazes. In: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press, 1957. p. 629-641.
- [27] ÓDOR, G.; MARQUES, M. C.; SANTOS, M. A. Phase transition of a two-dimensional binary spreading model. Physical Review E, v. 65, n. 5, p. 056113, 2002.
- [28] HENKEL, Malte et al. Non-equilibrium phase transitions. Dordrecht: Springer, 2008.
- [29] GRASSBERGER, Peter. On phase transitions in Schlögl's second model. In: Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. p. 262-262.
- [30] HARRIS, Theodore E. Contact interactions on a lattice. The Annals of Probability, p. 969-988, 1974.
- [31] HINRICHSSEN, Haye. Pair contact process with diffusion: A new type of nonequilibrium critical behavior?. Physical Review E, v. 63, n. 3, p. 036102, 2001.
- [32] DE OLIVEIRA, Marcelo M.; DICKMAN, Ronald. Moment ratios for the pair-contact process with diffusion. Physical Review E, v. 74, n. 1, p. 011124, 2006.
- [33] DICKMAN, Ronald. Nonuniversality and critical point shift in systems with infinitely many absorbing configurations. arXiv preprint cond-mat/9909347, 1999.

- [34] DICKMAN, Ronald; RABÊLO, Wilson RM; ODOR, Géza. Pair contact process with a particle source. *Physical Review E*, v. 65, n. 1, p. 016118, 2001.
- [35] JENSEN, Iwan. Low-density series expansions for directed percolation on square and triangular lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 29, n. 22, p. 7013, 1996.
- [36] JENSEN, Iwan; DICKMAN, Ronald. Nonequilibrium phase transitions in systems with infinitely many absorbing states. *Physical Review E*, v. 48, n. 3, p. 1710, 1993.
- [37] BINNEY, James J. et al. *The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group*. Oxford University Press, 1992.
- [38] HINRICHSSEN, Haye. Non-equilibrium phase transitions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 369, n. 1, p. 1-28, 2006.
- [39] BINDER, Kurt et al. *Monte Carlo methods in statistical physics*. Springer Science e Business Media, 2012; GRASSBERGER, Peter; DE LA TORRE, A. Reggeon field theory (Schlögl's first model) on a lattice: Monte Carlo calculations of critical behaviour. *Annals of Physics*, v. 122, n. 2, p. 373-396, 1979.
- [40] BLATH, Jochen et al. Survival and extinction of caring double-branching annihilating random walk. *Electronic Communications in Probability*, v. 16, p. 271-282, 2011.
- [41] GRASSBERGER, Peter; KRAUSE, Friedrich; VON DER TWER, Tassilo. A new type of kinetic critical phenomenon. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 17, n. 3, p. L105, 1984.
- [42] GRASSBERGER, Peter. Some further results on a kinetic critical phenomenon. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 22, n. 23, p. L1103, 1989.
- [43] DROZ, M.; RÁCZ, Z.; SCHMIDT, J. One-dimensional kinetic Ising model with competing dynamics: Steady-state correlations and relaxation times. *Physical Review A*, v. 39, n. 4, p. 2141, 1989.
- [44] HUMPHRIES, Nicolas E. et al. Foraging success of biological Lévy flights recorded in situ. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 109, n. 19, p. 7169-7174, 2012.

- [45] MENYHÁRD, Nora. One-dimensional non-equilibrium kinetic Ising models with branching annihilating random walk. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 27, n. 18, p. 6139, 1994.
- [46] MENYHÁRD, N.; ÓDOR, G. Non-equilibrium phase transitions in one-dimensional kinetic Ising models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 28, n. 16, p. 4505, 1995.
- [47] CARDY, John L.; TÄUBER, Uwe C. Field theory of branching and annihilating random walks. *Journal of statistical physics*, v. 90, n. 1-2, p. 1-56, 1998.
- [48] KOCKELKOREN, Julien; CHATÉ, Hugues. Absorbing phase transitions of branching-annihilating random walks. *Physical review letters*, v. 90, n. 12, p. 125701, 2003.
- [49] GRASSBERGER, Peter. Are damage spreading transitions generically in the universality class of directed percolation?. *Journal of statistical physics*, v. 79, n. 1-2, p. 13-23, 1995.
- [50] TAKAYASU, H.; TRETYAKOV, A. Yu. Extinction, survival, and dynamical phase transition of branching annihilating random walk. *Physical review letters*, v. 68, n. 20, p. 3060, 1992.
- [51] JENSEN, Iwan. Critical behavior of branching annihilating random walks with an odd number of offsprings. *Physical Review E*, v. 47, n. 1, p. R1, 1993.
- [52] INUI, N. Application of the coherent anomaly method to the branching annihilation random walk. *Physics Letters A*, v. 184, n. 1, p. 79-82, 1993.
- [53] ZHONG, Dexin; BEN-AVRAHAM, Daniel. Universality class of two-offspring branching annihilating random walks. *Physics Letters A*, 1995, 209.5-6: 333-337.
- [54] JENSEN, I. Conservation laws and universality in branching annihilating random walks. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993, 26.16: 3921
- [55] JENSEN, Iwan. Critical exponents for branching annihilating random walks with an even number of offspring. *Physical Review E*, v. 50, n. 5, p. 3623, 1994.

- [56] PEDRON, Isabel Tamara; MENDES, Renio dos Santos. Anomalous diffusion and generalized diffusion equations. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 251-258, 2005.
- [57] PERRIN, Jean. Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Annales de Chimie et de Physique* v.18, p. 5-104 (1909)
- [58] JANSSEN, H. K. et al. Lévy-flight spreading of epidemic processes leading to percolating clusters. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, v. 7, n. 1, p. 137-145, 1999.
- [59] EDWARDS, Andrew M. et al. Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer. *Nature*, v. 449, n. 7165, p. 1044, 2007.
- [60] IGNESTI, Emilio et al. Experimental and theoretical investigation of statistical regimes in random laser emission. *Physical Review A*, v. 88, n. 3, p. 033820, 2013.
- [61] BARTHELEMY, Pierre, BERTOLOTTI, Jacopo and WIERSMA, Diederik S. A Levy flight for light. *Nature* v.453, p. 495-498 (2008).
- [62] MANDELBROT, Benoit B. Is nature fractal?. *Science*, v. 279, n. 5352, p. 783-783, 1998.
- [63] MOLLISON, Denis. Spatial contact models for ecological and epidemic spread. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, v. 39, n. 3, p. 283-313, 1977.
- [64] ALBANO, E. V. Branching annihilating Lévy flights: Irreversible phase transitions with long-range exchanges. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 34, n. 2, p. 97, 1996.
- [65] ALBANO, Ezequiel V. Irreversible phase transitions in contact processes with Lévy exchanges and long-range interactions. *Physical Review E*, v. 54, n. 4, p. 3436, 1996.
- [66] JANSSEN, H. K.; SCHAUB, B.; SCHMITTMANN, B. New universal short-time scaling behaviour of critical relaxation processes. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, v. 73, n. 4, p. 539-549, 1989.
- [67] ZHENG, B. Monte Carlo simulations of short-time critical dynamics. *International Journal of Modern Physics B*, v. 12, n. 14, p. 1419-1484, 1998.

- [68] SCHÜLKE, L.; ZHENG, B. The short-time dynamics of the critical Potts model. *Physics Letters A*, v. 204, n. 3-4, p. 295-298, 1995.
- [69] TOMÉ, Tânia; DE OLIVEIRA, Mário J. Short-time dynamics of critical nonequilibrium spin models. *Physical Review E*, v. 58, n. 4, p. 4242, 1998.
- [70] DA SILVA, Roberto; ALVES, Nelson A.; DE FELÍCIO, JR Drugowich. Universality and scaling study of the critical behavior of the two-dimensional Blume-Capel model in short-time dynamics. *Physical Review E*, v. 66, n. 2, p. 026130, 2002.
- [71] SCHÜLKE, L.; ZHENG, B. Determination of the critical point and exponents from short-time dynamics. *Physics Letters A*, v. 215, n. 1-2, p. 81-85, 1996.
- [72] RITSCHER, U.; CZERNER, P. Universal short-time behavior in critical dynamics near surfaces. *Physical review letters*, v. 75, n. 21, p. 3882, 1995.
- [73] LEI, X. W.; ZHENG, B. Short-time critical dynamics and aging phenomena in the two-dimensional X Y model. *Physical Review E*, v. 75, n. 4, p. 040104, 2007.
- [74] HOROWITZ, C. M. et al. Phase transitions and critical phenomena in the two-dimensional Ising model with dipole interactions: A short-time dynamics study. *Physical Review E*, v. 92, n. 4, p. 042127, 2015.
- [75] SHU, Yu-Rong; YIN, Shuai; YAO, Dao-Xin. Universal short-time quantum critical dynamics of finite-size systems. *Physical Review B*, v. 96, n. 9, p. 094304, 2017.
- [76] ALBANO, E. V. et al. Study of phase transitions from short-time non-equilibrium behaviour. *Reports on Progress in Physics*, v. 74, n. 2, p. 026501, 2011.
- [77] HOTTA, Yoshihito. Tensor-network algorithm for nonequilibrium relaxation in the thermodynamic limit. *Physical Review E*, v. 93, n. 6, p. 062136, 2016.
- [78] BASU, Urna et al. Short-Time Behavior and Criticality of Driven Lattice Gases. *Physical review letters*, v. 118, n. 5, p. 050602, 2017.
- [79] VOLPATI, Valerio et al. Universal Gaussian behavior of driven lattice gases at short times. *Physical Review E*, v. 96, n. 5, p. 052136, 2017.

- [80] DOS ANJOS, F. C. et al. Non-universal critical initial slip of parity conserving branching and annihilating random walkers with long-range diffusion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, p. 124325, 2020.
- [81] KWON, Sungchul; PARK, Hyunggyu. Reentrant phase diagram of branching annihilating random walks with one and two offspring. *Physical Review E*, v. 52, n. 6, p. 5955, 1995.
- [82] LAISE, T. et al. Critical spreading dynamics of parity conserving annihilating random walks with power-law branching. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 505, p. 648-654, 2018.
- [83] ANGELINI, Maria Chiara; PARISI, Giorgio; RICCI-TERSENGHI, Federico. Relations between short-range and long-range Ising models. *Physical Review E*, v. 89, n. 6, p. 062120, 2014.
- [84] HINRICHSEN, Haye. Non-equilibrium phase transitions with long-range interactions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2007, n. 07, p. P07006, 2007.
- [85] TANG, Lei-Han; TIAN, Guang-Shan. Reaction - diffusion - branching models of stock price fluctuations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 264, n. 3-4, p. 543-550, 1999.
- [86] MUSSAWISADE, K.; SANTOS, J. E.; SCHUTZ, G. M. Branching-annihilating random walks in one dimension: some exact results. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 31, n. 19, p. 4381, 1998.
- [87] SZABÓ, Gyorgy. Branching annihilating random walk on random regular graphs. *Physical Review E*, v. 62, n. 5, p. 7474, 2000.
- [88] ÓDOR, Géza. Role of diffusion in branching and annihilation random walk models. *Physical Review E*, v. 70, n. 6, p. 066122, 2004.
- [89] BENITEZ, Federico; WSCHEBOR, Nicolas. Branching-rate expansion around annihilating random walks. *Physical Review E*, v. 86, n. 1, p. 010104, 2012.

- [90] ALBANO, Ezequiel V.; HOYUELOS, Miguel; MARTIN, Héctor O. One-dimensional generalized branching annihilating random walker process with stochastic generation of offsprings. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 239, n. 4, p. 531-541, 1997
- [91] ERICKSON, K. Bruce. Self annihilating branching processes. *The Annals of Probability*, p. 926-946, 1973.
- [92] NEUHAUSER, Claudia; SUDBURY, Aidan. The biased annihilating branching process. *Advances in applied probability*, v. 25, n. 1, p. 24-38, 1993.
- [93] BRAMSON, Maury; WAN-DING, Ding; DURRETT, Rick. Annihilating branching processes. *Stochastic processes and their applications*, v. 37, n. 1, p. 1-17, 1991.
- [94] BEN-AVRAHAM, Daniel; LEYVRAZ, Francois; REDNER, Sid. Propagation and extinction in branching annihilating random walks. *Physical Review E*, v. 50, n. 3, p. 1843, 1994.
- [95] DOS ANJOS, F. C. et al. Emerging extreme value and Fermi-Dirac distributions in the Lévy branching and annihilating process. *Physical Review E*, v. 101, n. 5, p. 052136, 2020.
- [96] COLES, Stuart et al. *An introduction to statistical modeling of extreme values*. London: Springer, 2001.
- [97] ARGUIN, Louis-Pierre et al. An ergodic theorem for the frontier of branching Brownian motion. *Electronic Journal of Probability*, v. 18, 2013.
- [98] LALLEY, Steven P.; SELLKE, Thomas. A conditional limit theorem for the frontier of a branching Brownian motion. *The Annals of Probability*, p. 1052-1061, 1987.
- [99] MIKOSCH, Thomas; YSLAS, Jorge. Gumbel and F chet convergence of the maxima of independent random walks. arXiv preprint arXiv:1904.04607, 2019.
- [100] TURBAN, Lo c. Records for the number of distinct sites visited by a random walk on the fully connected lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 48, n. 44, p. 445001, 2015.

- [101] LIMA, Bismarck C., et al. Extreme-value statistics of intensities in a cw-pumped random fiber laser. *Physical Review A*, 2017, 96.1: 013834.
- [102] ALCARAZ, Francisco C. et al. *Reaction-diffusion processes, critical dynamics and quantum chains*, 1993.
- [103] HENKEL, Malte; ORLANDINI, Enzo; SANTOS, Jaime. Reaction-diffusion processes from equivalent integrable quantum chains. *annals of physics*, v. 259, n. 2, p. 163-231, 1997.
- [104] RAJAGOPAL, A. K.; MENDES, R. S.; LENZI, E. K. Quantum statistical mechanics for nonextensive systems: Prediction for possible experimental tests. *Physical review letters*, v. 80, n. 18, p. 3907, 1998.
- [105] LENZI, E. K.; MENDES, R. S.; RAJAGOPAL, A. K. Quantum statistical mechanics for nonextensive systems. *Physical Review E*, v. 59, n. 2, p. 1398, 1999.
- [106] HASEGAWA, Hideo. Bose-Einstein and Fermi-Dirac distributions in nonextensive quantum statistics: Exact and interpolation approaches. *Physical Review E*, v. 80, n. 1, p. 011126, 2009.
- [107] Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of statistical physics*, 52(1-2), 479-487.
- [108] TSALLIS, Constantino; BRIGATTI, Edgardo. Nonextensive statistical mechanics: A brief introduction. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, v. 16, n. 3, p. 223-235, 2004.
- [109] Buyukilic, F., Demirhan, D., Gulec, A. (1995). A statistical mechanical approach to generalized statistics of quantum and classical gases. *Physics Letters A*, 197(3), 209-220.
- [110] TSALLIS, Constantino et al. Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 20, p. 3589, 1995.
- [111] SHLESINGER, Michael F.; KLAFTER, Joseph; ZUMOFEN, Gert. Above, below and beyond Brownian motion. *American Journal of Physics*, v. 67, n. 12, p. 1253-1259, 1999.

- [112] VISWANATHAN, G. M. et al. Lévy flight random searches in biological phenomena. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, v. 314, n. 1-4, p. 208-213, 2002.
- [113] VISWANATHAN, G. M. et al. The origin of fat-tailed distributions in financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 329, n. 1-2, p. 273-280, 2003.
- [114] BARTUMEUS, Frederic et al. Animal search strategies: a quantitative random-walk analysis. *Ecology*, v. 86, n. 11, p. 3078-3087, 2005.
- [115] BENITEZ, Federico; WSCHEBOR, Nicolás. Branching and annihilating random walks: Exact results at low branching rate. *Physical Review E*, v. 87, n. 5, p. 052132, 2013.
- [116] CARLON, Enrico; HENKEL, Malte; SCHOLLWOCK, Ulrich. Critical properties of the reaction-diffusion model  $2A \rightarrow 3A$ ,  $2A \rightarrow 0$ . *Physical Review E*, v. 63, n. 3, p. 036101, 2001.
- [117] BARKEMA, G. T.; CARLON, E. Universality in the pair contact process with diffusion. *Physical Review E*, v. 68, n. 3, p. 036113, 2003.
- [118] PARK, Kwangho; HINRICHSEN, Haye; KIM, In-mook. Binary spreading process with parity conservation. *Physical Review E*, v. 63, n. 6, p. 065103, 2001.
- [119] ÓDOR, Géza. Critical behavior in reaction-diffusion systems exhibiting absorbing phase transitions. *Brazilian journal of physics*, v. 33, n. 3, p. 431-436, 2003.
- [120] ÓDOR, Géza. Multicomponent binary spreading process. *Physical Review E*, v. 65, n. 2, p. 026121, 2002.
- [121] HINRICHSEN, Haye. Cyclically coupled spreading and pair annihilation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 291, n. 1-4, p. 275-286, 2001.

# ANEXO A

## Artigos aceitos para publicação



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/physa](http://www.elsevier.com/locate/physa)

# Non-universal critical initial slip of parity conserving branching and annihilating random walkers with long-range diffusion

F.C. dos Anjos<sup>a</sup>, Iram Gléria<sup>a</sup>, M.L. Lyra<sup>a,\*</sup>, C. Argolo<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup> Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970 Maceió-AL, Brazil

<sup>b</sup> Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado de Alagoas, 57020-510 Maceió-AL, Brazil

<sup>c</sup> Núcleo de Ciências Exatas - NCEX, Universidade Federal de Alagoas, 57309-005 Arapiraca-AL, Brazil

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 6 November 2019

Received in revised form 10 January 2020

Available online xxx

### Keywords:

Non-equilibrium transition

Parity-Conserving

Lévy-flight

Critical dynamics

## ABSTRACT

We consider a parity conserving model of branching and annihilating random walkers with long-range diffusion. We follow the short-time dynamics at the critical region to obtain the set of critical exponents associated to the growth in the number particles and its fluctuations, as well as the critical second-order moment ratio. Diffusion and branching processes are controlled by a diffusion probability  $p$  and the flight distance follows a Lévy distribution with exponent  $\alpha$ . Three short-time scaling regimes are identified as a function of the Lévy exponent. For  $\alpha \leq 5/2$  infinitesimal branching is relevant and leads to a finite density of walkers. An absorbing-state dynamic phase transition takes place at a finite branching probability for  $\alpha > 5/2$ . Short-range power-law scaling occurs for  $\alpha \geq 7/2$ . In the intermediate regime, continuously varying exponents are obtained with the second-order cumulant depicting a non-monotonous behavior. The relative influence of Lévy diffusion and branching on the critical diffusion probability is also discussed.

© 2020 Published by Elsevier B.V.

## 1. Introduction

The multi-agent process of branching and annihilating random walkers (BARW) diffusing in a lattice presents a dynamic transition between the vacuum state, on which the walkers annihilates themselves upon contact, and an active state with a finite density of walkers [1–3]. In the simplest modeling of BARW, the main control parameter is a diffusion probability  $p$ . Particles diffuse with probability  $p$  or branch otherwise. A second parameter is associated with the number  $n$  of offsprings generated on each branching process. Annihilation takes place whenever the above dynamical processes tries to place a particle in an already occupied site. In this case, both particles are removed from the system. For small diffusion probabilities, the branching process predominates and the system evolves to the statistically stationary state with a fluctuating density of walkers. Above a critical probability  $p_c$ , annihilation overcomes the branching process and the system evolves towards the vacuum state.

The parity of the number of offsprings  $n$  dictates the universality class of the above non-equilibrium dynamical phase transition to the vacuum absorbing state. An odd number of offspring leads to the standard directed percolation (DP) universality class [1,4–6] with the main set of critical exponents for BARW distributed in a linear ( $d = 1$ ) chain being  $\beta = 0.276486(8)$  (order parameter),  $\nu_{\perp} = 1.096854(4)$  (correlation length), and  $\nu_{\parallel} = 1.733847(6)$  (correlation time) [7].

\* Corresponding author.

E-mail address: [marcelo@fis.ufal.br](mailto:marcelo@fis.ufal.br) (M.L. Lyra).

A new universality class emerges for  $n$  even due to the intrinsic conservation of the parity of the number of particles [1,8–10]. An exception is for BARW with  $n = 2$  offsprings placed symmetrically on the two nearest neighbor sites for which the vacuum state is the dynamical attractor, irrespective to the diffusion probability  $p$  [11]. An active state is only stable for parity conserving BARW with  $n \geq 4$  or for  $n = 2$  with asymmetric branching [12]. In this case, the critical exponents deviate substantially from those of DP, with  $\beta = 0.92(3)$ ,  $\nu_{\perp} = 1.84(6)$ , and  $\nu_{\parallel} = 3.25(10)$  in  $d = 1$  [8].

The above set of critical exponents for the parity-conserving DP universality class holds when the dynamical processes of diffusion and branching are local, namely short-ranged. Particles are assumed to diffuse or branching only to a close vicinity of the original site. Distinct critical exponents characterize the transition in the presence of long-ranged processes. One common form to introduce long-ranged processes is to assume that particles diffuse according to a Lévy-flight distribution. Upon diffusion, particles may flight directly to a site at a distance  $r$  according to a power-law distribution  $P(r) \propto 1/r^{\alpha}$ . There were several efforts aiming at formulating a theory for anomalous diffusion processes through the memory function, the mixing condition and ergodicity, as recently reviewed in [13]. It has been shown that for  $\alpha < 5/2$  the branching process is always relevant, with the system remaining in the active state for any  $p \neq 1$  [14]. An absorbing state transition occurs at  $p_c(\alpha)$  for Lévy exponents  $\alpha > 5/2$ . The critical exponents were reported to vary continuously with  $\alpha$  until a characteristic value  $\alpha_c$  above which the exponents are similar to those of short-ranged diffusion. Numerical simulations have indicated that  $3 < \alpha_c < 4$  [14,15] but were not accurate enough to precisely locate this bound.

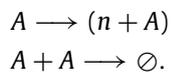
Most of the previous studies of the BARW with Lévy-flight diffusion addressed the critical properties of the statistically stationary state reached after the system evolved from a state with a high density of particles. Under such initial condition, the density of particles develops an initial power-law decay in time at the critical point [16–28]. On the other hand, it is well known that the density depicts an initial power-law critical slip when the system starts from the opposite state with a very small number of particles [16,29]. Such critical spreading can also be explored to locate the critical point and to extract some relevant critical exponents. Such procedure also allows to simulate very large systems, thus reducing finite-size scaling corrections in the estimates of the critical indices.

In the present work, we explore the critical initial slip of the BARW process with long-range Lévy-flight diffusion. We will follow the dynamical process starting from an initial configuration having a single walker. The time evolution of the average number of walkers as well as its fluctuations will be used to provide accurate estimates for the critical diffusion probability and the relevant dynamical critical exponents associated to these quantities. Further, we will compute the second moment ratio of the order parameter to give an additional critical index characterizing the absorbing-state phase transition. We will give particular attention to the critical behavior in the vicinity of  $\alpha = 5/2$  above which an infinitesimal branching probability becomes irrelevant as well as to the upper critical value of the Lévy-exponent. Above the critical behavior it becomes equivalent to that of the short-ranged BARW process. A comparative study of the interplay between Lévy-like diffusion and branching will also be provided.

The manuscript is organized as follows: in Section 2 we present the model system and describe the main aspects of the numerical simulations performed. Section 3 is devoted to present our results regarding the critical short-time initial slip dynamics and the corresponding critical exponents of the order parameter and its fluctuations. A discussion on the Lévy exponent dependence of the critical diffusion probability, moment ratio and exponents will be provided. Finally Section 4 will contain a summary of our main results, conclusions and perspectives of future developments.

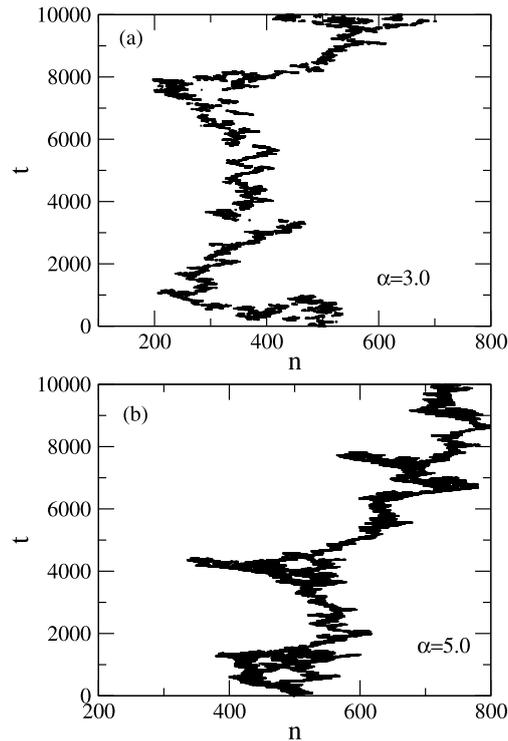
## 2. Model

We consider a model of parity conserving branching and annihilation random walkers and perform simulations in a one dimensional lattice. More specifically, a walker  $A$  can evolve according the following dynamical processes:



Diffusion and branching processes are controlled by a single parameter  $p$ , which corresponds to the diffusion probability. At each step a randomly chosen particle jumps with probability  $p$  to a new site located at distance  $r$  from the original position. The jump is either to the right or to the left with equal probability. The flight distance  $r$  follows a Lévy distribution according  $P(r) \propto 1/r^{\alpha}$ , where the parameter  $\alpha$  controls the effective range of the flights. Branching occurs with the complementary probability  $1 - p$  and generates  $n = 2$  offspring situated either at the two right sites or the two left sites of the original particle with equal probability. We allow at most one particle in each site. Thus, if the particle diffuses or branches to an already occupied site, the particles trying to occupy the same site are mutually annihilated.

Our Monte Carlo simulations considered an initial configuration containing a single particle located at the central position. The size  $L$  of the chain was limited to the largest integer number supported by our hardware, thus making finite size effects negligible. In all runs, we checked that the activity never reached the chain borders. As such, specific boundary conditions (open or periodic) give identical results. As the number of particles is considered to be parity conserving, the vacuum state is never reached and the survival probability is equal to unity. We show that, starting with a configuration that is close to the absorbing state, the system undergoes a dynamical phase transition from a state with a finite density of particles at small values of the diffusion probability  $p$  to a phase with a dwindling density as  $p$  surpass a critical value  $p_c(\alpha)$ .



**Fig. 1.** Space-time distribution of particles in our BARW model for representative values of the Lévy-exponent  $\alpha$ . In (a) we used  $\alpha = 3$  and the critical probability is  $p_c = 0.814$ . In (b) we have  $\alpha = 5$  and the critical probability is  $p_c = 0.525$ . Notice that the fractal like space-time distribution becomes less connected as the diffusion process becomes longer ranged. In both cases, the process start from a single walker at site  $n = 500$ .

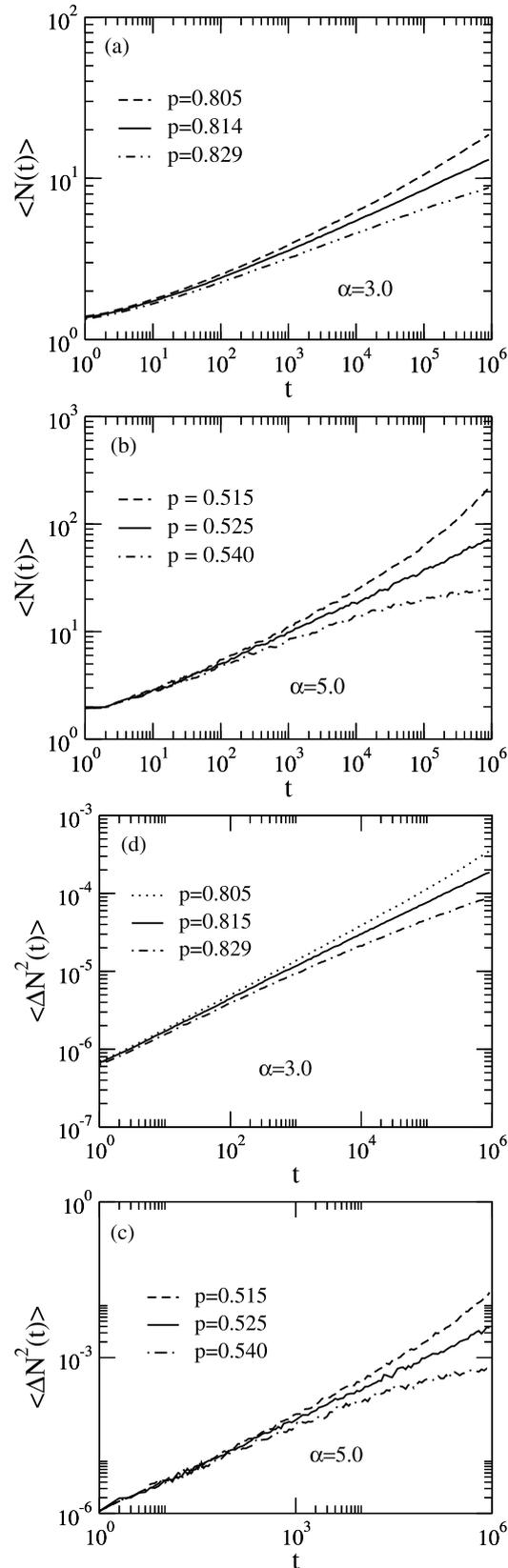
We analyze the growth of the average particle number of walkers in time  $\langle N(t) \rangle$ , where the average is taken over several copies of the system. We used typically  $10^4$  distinct runs for the smaller values of  $\alpha$  and  $10^5$  runs for the largest values to perform the configurational averages. Each copy starts from the same initial configuration. We also compute the critical behavior of the fluctuations of the order parameter  $\langle \Delta N^2(t) \rangle = (\langle N^2(t) \rangle - \langle N(t) \rangle^2)/L$  and the moment ratio  $U = \langle N^2(t) \rangle / \langle N(t) \rangle^2 - 1$ . At the critical point the order-parameter and its fluctuations displays initial power-law slips in the form  $\langle N(t) \rangle \sim t^\theta$  and  $\langle \Delta N^2(t) \rangle \sim t^\phi$ . The dynamical exponents are numerically obtained from the curves  $\phi(t) = \frac{d \log \langle \Delta N^2 \rangle}{d \log t}$  and  $\theta(t) = \frac{d \log \langle N(t) \rangle}{d \log t}$  versus  $1/\log t$ . When  $1/\log t \rightarrow 0$  these quantities converge to their respective asymptotic scaling critical exponents. The second moment ratio  $U$  probes the relative fluctuations of the order parameter. Its critical value is also a universal quantity characterizing equilibrium and non-equilibrium phase transitions [30–42]. We will also estimate  $U_c(\alpha)$  to give further data concerning the regime of Lévy-exponents  $\alpha$  for which the BARW process has continuously varying critical exponents.

### 3. Results

Numerical simulations were performed for different values of the Lévy parameter  $\alpha$ . We consider the initial condition of a single particle at the center site of the lattice. In a single time step, all walkers at time  $t$  are visited once in average in a random fashion. Fig. 1 illustrates the initial stage of the space-time evolution of the process for two representative values of the Lévy-exponent  $\alpha$ . The diffusion probabilities were chosen to be at the critical point (see below the procedure used to estimate  $p_c$ ). Notice that, when the diffusion process is longer ranged (Fig. 1a), the fractal aspect of the space-time particle distribution becomes disconnected. Shorter ranged diffusion (Fig. 1b) leads to a more compact (dense) space-time fractal distribution of particles.

Fig. 2 presents results for the temporal evolution of the average number of particles, acting as the order-parameter of the absorbing-state phase transition, and its fluctuations for the same cases  $\alpha = 3$  and  $\alpha = 5$  illustrated above. Diffusion probability values  $p$  were chosen to be in the vicinity of the critical point. At the critical point both quantities develop longstanding power-law growths. Above  $p_c$  the branching process is overcome by annihilation and these quantities start to saturate at a finite value. Below  $p_c$  branching is the dominant process and fast growth of the population as well as its fluctuations set up. The critical point can be estimated from the development of a sustainable power-law (asymptotically linear in  $\log \times \log$  scale) slip.

Accurate estimates of the dynamical critical exponents  $\phi$  and  $\theta$  can be obtained exploring the finite-time scaling behavior. By plotting  $\phi(t)$  and  $\theta(t)$  versus  $1/\log t$  these functions shall converge to the asymptotic scaling exponent as  $1/\log t \rightarrow 0$ . Within the absorbing phase, these curves shall bend downwards pointing to  $\phi = \theta = 0$ . In the active



**Fig. 2.** Time evolution of the average number of particles and its fluctuations for representative values of  $\alpha$  and diffusion probabilities in the vicinity of the critical point. Both quantities develop sustainable power-law growths at  $p_c$ .

1 phase an upwards bending is developed. In Fig. 3 we illustrate this scaling procedure for the same Lévy-exponents  $\alpha = 3$   
 2 and  $\alpha = 5$  as before. Notice that the dynamic exponent  $\phi$  associated with the order-parameter fluctuations converges to

**Table 1**

Our best estimates of the critical diffusion probability  $p_c$ , dynamic critical exponent  $\phi$  for the fluctuations in the order parameter, order-parameter slip exponent  $\theta$  and the critical moment ratio  $U_c$  for different Lévy diffusion exponents  $\alpha$ .

$\alpha$	$p_c$	$\phi$	$\theta$	$U_c$
2.6	0.988(2)	0.276(16)	0.128(23)	1.004(27)
2.7	0.964(2)	0.285(10)	0.140(12)	1.098(10)
2.75	0.946(2)	0.300(11)	0.144(14)	1.122(18)
2.8	0.924(2)	0.319(12)	0.157(13)	1.090(10)
2.875	0.884(2)	0.360(10)	0.175(12)	1.056(16)
2.9	0.870(1)	0.371(10)	0.180(10)	1.031(12)
3.0	0.814(2)	0.413(10)	0.205(10)	0.963(10)
3.250	0.690(1)	0.529(12)	0.263(12)	0.781(10)
3.5	0.619(2)	0.571(10)	0.285(10)	0.697(19)
3.65	0.593(1)	0.584(11)	0.292(10)	0.680(12)
3.75	0.580(1)	0.589(10)	0.294(10)	0.670(15)
4.0	0.558(1)	0.594(10)	0.295(10)	0.656(12)
5.0	0.525(1)	0.596(11)	0.294(11)	0.659(19)
6.0	0.516(1)	0.597(10)	0.297(12)	0.652(13)

its asymptotic value with a smaller slope than the own order-parameter exponent  $\theta$ . This indicates that corrections to finite-time scaling are more significant in  $\langle N \rangle$  than in its fluctuations. As a consequence, the critical probability  $p_c$  is more precisely located using data from fluctuations.

In Fig. 4 we report measures for the time-evolution of the moment ratio  $U = \frac{\langle N^2(t) \rangle}{\langle N(t) \rangle^2} - 1$ . Curves present an initial growth for distinct values of  $p$ , with  $U \rightarrow 0$  when  $p < p_c$ . As we approach the critical point  $p = p_c$ , we observe an ultimate convergence to the critical value of the second-order moment ratio  $U_c$ . The asymptotic time invariance of  $U$  at  $p_c$  means that the dynamic critical exponents satisfy  $\phi = 2\theta$ , a relation that will be numerically probed by performing independent estimates of  $\phi$  and  $\theta$ .

We followed the above numerical procedure to estimate the critical parameter for several values of the Lévy-exponent  $\alpha$ . Our estimates for the critical diffusion probability are plotted in Fig. 5(a). As expected,  $p_c(\alpha \leq 5/2) = 1$ . In this regime, any branching probability drives the system away from the absorbing state and produces a finite density of particles. As  $\alpha$  increases, a transition takes place at a finite branching probability.  $p_c$  decays continuously until it reaches the value corresponding to the asymmetric lateral branching limit [12]. In Fig. 5(a) we also include the critical diffusion probability for the BARW model with Lévy-like branching [43]. In this model, diffusion is just to the neighboring sites while branching in long-ranged. Notice two distinct regimes. For  $\alpha > 3$  the critical diffusion probability is larger for Lévy branching than for Lévy diffusion. This trend is reversed for  $\alpha < 3$ . These data unveil that, if the second moment of the flight distribution becomes unbounded ( $\alpha < 3$ ), the active phase becomes more robust when diffusion is the long-range process. Conversely, Lévy-like branching is more effective in favoring the active phase when the second moment of the flight distribution is finite.

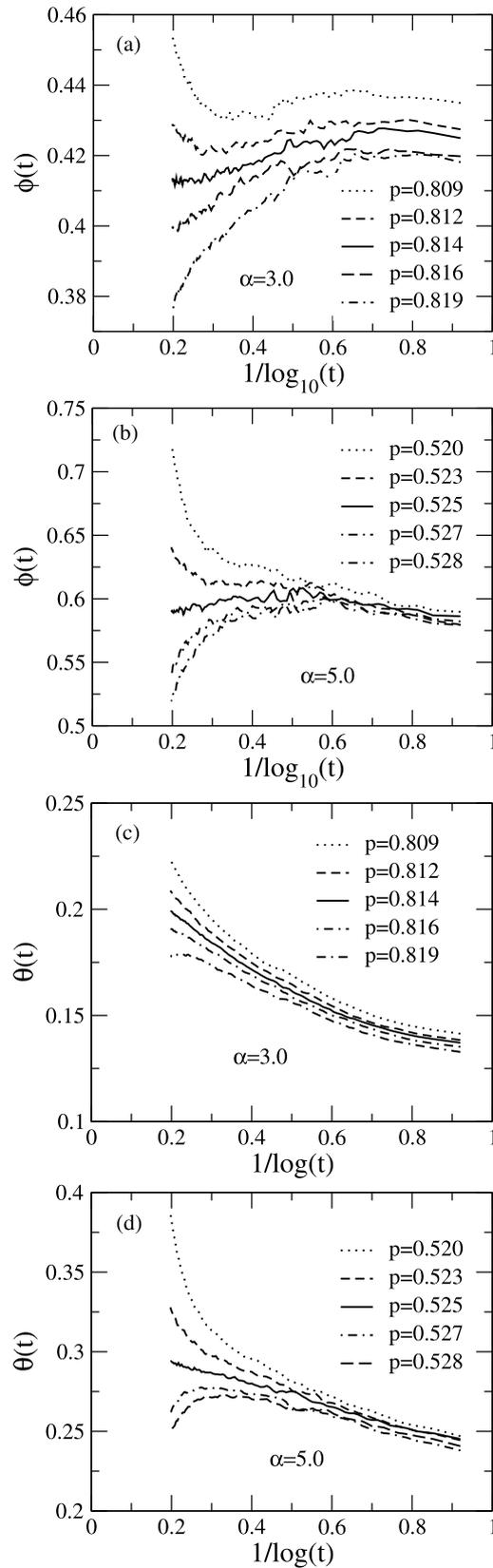
In Fig. 5(b) we plot our best estimates for the dynamic critical exponents  $\theta$  and  $\phi$  as parametric functions of the critical diffusion probability  $p_c$ , together with our estimates for the critical momentum ratio  $U$ . Table 1 summarizes our results. Notice that the relation  $\phi = 2\theta$  is satisfied within our numerical accuracy in the entire range of Lévy-exponents.

A few features are valuable to be stressed. First, the dynamic critical exponents remain finite in the limit  $p_c \rightarrow 1$ . This aspect evidences the development of a singular behavior when the Lévy-exponent approaches the lower bound  $\alpha = 5/2$ . For  $\alpha \leq 5/2$  a discontinuous dynamic transition occurs from the vacuum state at  $p = 1$  to the active state at  $p < 1$ . Exactly at  $p_c = 1$  there is no branching and the number of particles remains unit, thus implying in  $\phi = \theta = 0$ . When  $\alpha$  is slightly above this lower-bound, the transition becomes continuous and occurs at a finite (although small) branching rate with characteristic power-laws governing the critical dynamics.

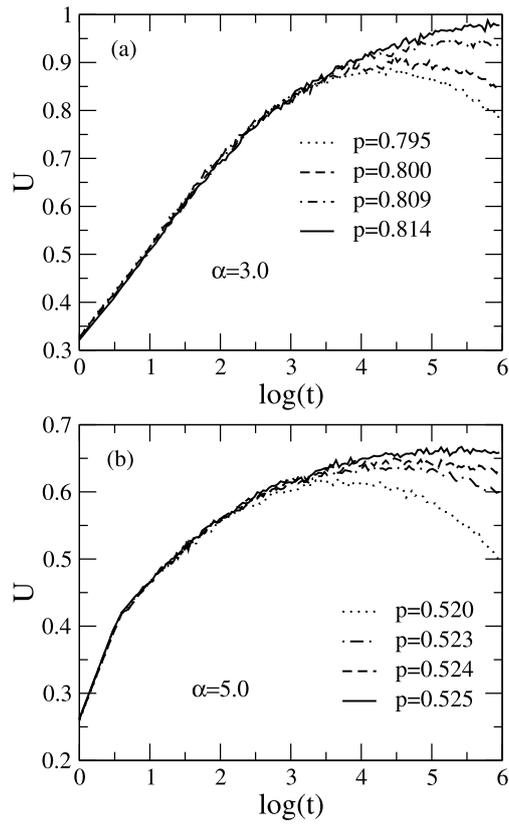
Second, the dynamic critical exponents and moment ratio vary continuously with  $p_c$  until it reaches a threshold value  $p^*$  below which these indices assume constant values corresponding to the short-range critical behavior. By assuming a linear dependence of the critical exponents on  $p$ , we could estimate the threshold value  $p^* = 0.62(1)$ . This means that changes in the critical exponents are developed for Lévy exponents  $\alpha < 7/2$  [see Fig. 5(a) and Table 1]. It is interesting to recall that for the two-dimensional Ising model with power-law decaying interactions, the threshold value of the power-law decay exponent below which continuously varying critical exponents do appear is  $\alpha^* = 3.75$  [44]. Our data is consistent with a scaling conjecture of  $\alpha^* \simeq 3.5$  for the crossover from short-range to long-range behavior of the parity-conserving BARW transition [45]. Finally, we found that the moment ratio varies non-monotonically, reaching an extreme value at  $p_c \simeq 0.95$ . Therefore, critical fluctuations are maximal for  $\alpha \simeq 2.75$ .

#### 4. Summary and concluding remarks

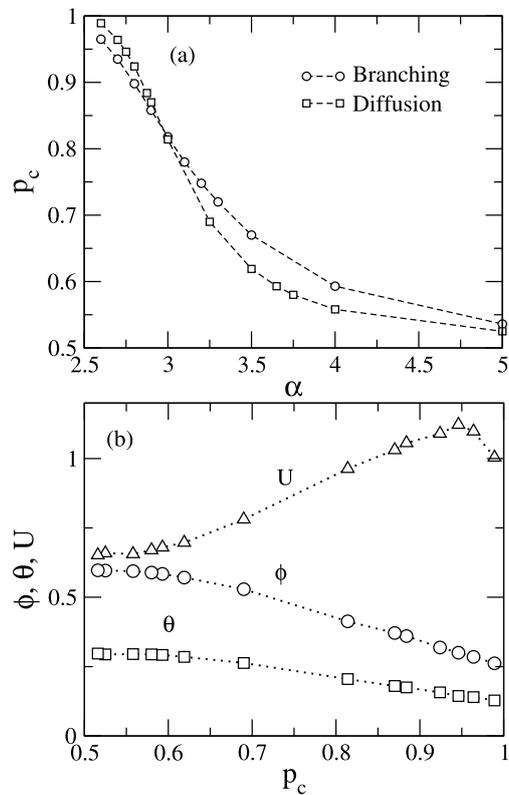
In summary, we studied the critical initial slip dynamics of the parity conserving model with branching and annihilating random walkers presenting long-range Lévy-like diffusion. This model presents a phase transition between an active



**Fig. 3.**  $\phi(t)$  and  $\theta(t)$  as functions of  $1/\log t$  for  $\alpha = 3$  and  $\alpha = 5$ . Diffusion probabilities are close to the critical point. The curves bend upwards (downward) below (above)  $p_c$ . Corrections to finite-time scaling (signaled by a finite slope at  $p_c$  in the large time regime) are stronger in  $\theta(t)$  specially when the diffusion becomes longer-ranged (smaller  $\alpha$ ).



**Fig. 4.** Temporal evolution of  $U$ . In (a) we have  $\alpha = 3$  while in (b) we have  $\alpha = 5$ . Diffusion probabilities approach the critical point from below. At  $p_c$  the second moment  $U$  converges to its critical value.



**Fig. 5.** In (a) we plot the critical probability  $p_c$  as a function of the Lévy exponent  $\alpha$ . Results are for the models with long-range diffusion (present work) and long-range branching [43]. In (b) the dynamic critical exponents  $\theta$ ,  $\phi$  and the critical second-order moment ratio  $U_c$  are plotted versus the critical diffusion probability  $p_c$ .

phase with a statistically stationary finite density of particles and a vacuum phase with a vanishing density, with a diffusion probability  $p$  acting as a single control parameter. Starting from an initial configuration containing a single walker, we numerically obtained the dynamic critical exponents associated to the growth in the average number particles, its fluctuations, as well as the critical second-order moment ratio as a function of the Lévy-exponent  $\alpha$  governing the reach of the particle flights upon diffusion. Three regimes were identified. For  $\alpha \leq 5/2$  the vacuum state is fully unstable with regard to an infinitesimal branching rate. An intermediate regime with continuously varying exponents sets up. Above a characteristic value of the Lévy-exponent, the exponents become equivalent to those of the BARW with short-range diffusion. Our scaling analysis allowed us to estimate that the short-range universality class is reached for  $\alpha > 3.5$ , which is in agreement with a previous scaling conjecture [45]. Further, we unveiled that the dynamic critical exponents remain finite as one approaches the lower-bound  $\alpha = 5/2$  from above, evidencing the singular behavior at this threshold. Also, the second-order moment ratio passes through a maximum as a function of the Lévy-exponent  $\alpha$ . In particular, we contrasted the critical point of the BARW with either Lévy diffusion or Lévy branching. We found that Lévy diffusion is more effective in sustaining the active phase in the regime of  $5/2 < \alpha < 3$  while Lévy branching becomes more effective for  $\alpha > 3$ . It would be interesting to have a more complete scenario of the critical behavior of BARWs with both diffusion and branching being controlled by their own long-ranged Lévy process. It would shed additional light in the interplay of long-range processes in non-equilibrium phase transitions with potential applications in general studies of population dynamics and diffusion-limited reactions [46].

### Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

### Acknowledgments

This work was partially supported by CNPq, CAPES, and FINEP (Federal Brazilian Agencies), and FAPEAL (Alagoas State Agency). C. Argolo would like to thank for the hospitality of NCEX/UFAL-Arapiraca where part of this work was developed under the financial support of the project DCR/FAPEAL/CNPq.

### References

- [1] H. Takayasu, A.Yu. Tretyakov, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 3060.
- [2] J. Cardy, U.C. Tauber, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 4780.
- [3] J.L. Cardy, U.C. Tauber, J. Stat. Phys. 90 (1998) 1.
- [4] I. Jensen, R. Dickman, J. Stat. Phys. 71 (1993) 89.
- [5] I. Jensen, Phys. Rev. E 47 (1993) R1.
- [6] N. Inui, Phys. Lett. A 184 (1993) 79.
- [7] H. Hinrichsen, Adv. Phys. 49 (2000) 815.
- [8] I. Jensen, Phys. Rev. E 50 (1994) 3623.
- [9] B. Daga, P. Ray, Phys. Rev. E 99 (2019) 032104.
- [10] F. Benitez, Federico, N. Wschebor, Phys. Rev. E 87 (2013) 052132.
- [11] H. Takayasu, N. Inui, J. Phys. A 25 (1992) L585.
- [12] S. Kwon, H. Park, Phys. Rev. E 52 (1995) 5955.
- [13] F.A. Oliveira, R.M.S. Ferreira, L.C. Lapas, M.H. Vainstein, Frontiers in Physics 7 (2019) 18.
- [14] D. Vernon, M. Howard, Phys. Rev. E 63 (2001) 041116.
- [15] T. Laise, P. Barros, C. Argolo, M.L. Lyra, J. Stat. Phys. (2016) P113205.
- [16] H.K. Janssen, B. Schaub, B. Schmittmann, Z. Phys. B 74 (1989) 539.
- [17] B. Zheng, Internat. J. Modern Phys. B 12 (1998) 1419.
- [18] L. Schulke, B. Zheng, Phys. Lett. A 204 (1995) 295.
- [19] T. Tomé, M.J. de Oliveira, Phys. Rev. E 58 (1998) 4242.
- [20] R. da Silva, N.A. Alves, J.R. Drugowich de Felício, Phys. Rev. E 66 (2002) 026130.
- [21] L. Schulke, B. Zheng, Phys. Lett. A 215 (1996) 81.
- [22] U. Ritschel, P. Czerner, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 3882.
- [23] X.W. Lei, B. Zheng, Phys. Rev. E 75 (2007) 040104(R).
- [24] C.M. Horowitz, M.A. Bab, M. Mazzini, M.L. Rubio Puzzo, G.P. Saracco, Phys. Rev. E 92 (2015) 042127.
- [25] Y.-R. Shu, S. Yin, D.-X. Yao, Phys. Rev. B 96 (2017) 094304.
- [26] E.V. Albano, M.A. Bab, G. Baglietto, R.A. Borzi, T.S. Grigera, E.S. Loscar, D.E. Rodriguez, M.L. Rubio Puzzo, G.P. Saracco, Rep. Progr. Phys. 74 (2011) 026501.
- [27] Y. Hotta, Phys. Rev. E 93 (2016) 062136.
- [28] U. Basu, V. Volpati, S. Caracciolo, A. Gambassi, Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 050602.
- [29] V. Volpati, U. Basu, S. Caracciolo, A. Gambassi, Phys. Rev. E 96 (2017) 052136.
- [30] R. Dickman, J.K. da Silva, Phys. Rev. E 58 (1998) 4266.
- [31] M.M. de Oliveira, R. Dickman, Phys. Rev. E 74 (2006) 011124.
- [32] R. Dickman, M.A.F. de Menezes, Phys. Rev. E 66 (2002) 045101(R).
- [33] R. da Silva, R. Dickman, J.R.D. de Felício, Phys. Rev. E 70 (2004) 067701.
- [34] V.S. Leite, G.L. Hoenicke, W. Figueiredo, Phys. Rev. E 64 (2001) 036104.
- [35] R.S. Ferreira, S.C. Ferreira, Eur. Phys. J. B 86 (2013) 462.
- [36] T.B. Pedro, M.M. Szortyka, W. Figueiredo, J. Stat. Mech. (2014) P05016.

- [37] A.D. Bruce, *J. Phys. C: Solid State Phys.* 14 (1981) 3667.
- [38] K. Binder, *Z. Phys. B* 43 (1981) 119.
- [39] X.S. Chen, V. Dohm, N. Schultka, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 3641.
- [40] M.M. Tsypin, H.W.J. Blöte, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 73.
- [41] J.A. Plascak, P.H.L. Martins, *Comput. Phys. Comm.* 184 (2013) 259.
- [42] A. Malakis, N.G. Fytas, G. Gülpinar, *Phys. Rev. E* 89 (2014) 042103.
- [43] T. Laise, F.C. dos Anjos, C. Argolo, M.L. Lyra, *Physica A* 505 (2018) 648.
- [44] M.C. Angelini, G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi, *Phys. Rev. E* 89 (2014) 062120.
- [45] H. Hinrichsen, *J. Stat. Mech.* 1 (2007) P07006.
- [46] N. Levernier, O. Bénichou, T. Guérin, R. Voituriez, *Phys. Rev. E* 98 (2018) 022125.

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10

# Emerging extreme value and Fermi-Dirac distributions in the Lévy branching and annihilating process

F.C. dos Anjos, M.L. Lyra, Iram Gléria

*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-970 Maceió-AL, Brazil*

C. Argolo

*Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado de Alagoas, 57020-510 Maceió-AL, Brazil*  
*Núcleo de Ciências Exatas - NCEX, Universidade Federal de Alagoas, 57309-005 Arapiraca-AL, Brazil*

Adauto J.F. de Souza

*Departamento de Física, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 52171-900, Recife-PE, Brazil*

We study the dynamics of the branching and annihilating process with long-range interactions. Static particles generate an offspring and annihilate upon contact. The branching distance is supposed to follow a Lévy-like power law distribution with  $P(r) \propto 1/r^\alpha$ . We analyze the long term behavior of the mean particles number and its fluctuations as a function of the parameter  $\alpha$  that controls the range of the branching process. We show that the dynamic exponent associated with the particle number fluctuations varies continuously for  $\alpha < 4$  while the particle number exponent only changes for  $\alpha < 3$ . A crossover from extreme value Frechet (at  $\alpha = 3$ ) and Gumbell (for  $2 < \alpha < 3$ ) distributions are developed, similar to the one reported in recent experiments with cw-pumped random fiber lasers presenting underlying gain and Lévy processes. We report the dependence of the relevant dynamical power-law exponents on  $\alpha$  showing that explosive growth takes place for  $\alpha \leq 2$ . Further, the average occupation number distribution is shown to evolve from the standard Fermi-Dirac form to the generalized one predicted within the context of nonextensive statistics.

## I. INTRODUCTION

Branching and annihilating processes represent an important class of non-equilibrium dynamical systems finding applications in several branches of science, including condensed matter, statistical physics, physical chemistry, biology, ecology, and sociology [1–12]. In these processes, particles can generate offsprings while annihilating upon contact. When the particles execute a random walk in a lattice, the competition between particle generation through branching and particle destruction through annihilation may lead to the extinction of the population depending on the relative strength of these competing processes. When branching predominates, the system evolves to a statistically stationary state with a finite density of particles. On the other hand, extinction is the dynamical attractor at low branching rates.

The above phenomenology is usually termed as an absorbing state non-equilibrium phase transition between an active and a vacuum state [13, 14]. This transition has a close analogy with the standard second-order phase transition associated with a spontaneous breaking of symmetry in condensed matter systems at thermal equilibrium with a heat-bath. Critical exponents characterize the universality class of these non-equilibrium phase transitions. The most common is the directed percolation universality class [13–16]. This is actually the case of the absorbing state phase transition of branching and annihilation random walkers with an odd number of offspring [17–21]. However, a new universality class is in order when the branching process conserves the parity of the particle number (even number of offsprings)

[17, 22–25].

Long-range processes are also able to change the universality class of non-equilibrium phase transitions [6, 26–30]. These processes can be introduced in the dynamical rules by considering the particle diffusion to be anomalous with the distance  $r$  of individual jumps on the lattice following a Lévy-like distribution  $P(r) \propto 1/r^\alpha$ . Here  $\alpha$  governs the effective range of the long-ranged process. It has been demonstrated that the critical exponents of the absorbing state phase transition changes continuously as a function of  $\alpha$  below a threshold value. The long-range process can be also introduced in the own branching process while keeping normal diffusion, also leading to continuously varying exponents [6, 30].

In the pure branching and annihilation process, particles are not allowed to diffuse [31–34]. In this case, although branching and annihilation are competing processes, the average number of particles grows in time when the system starts from a single particle seed. For the case of a single offspring such growth is linear, while a slower diffusive behavior takes place when two offsprings are placed symmetrically on the neighboring sites of a one-dimensional lattice [5]. However, the influence of long-range interactions in the dynamics of the pure branching and annihilation process is still an open issue.

In this work we will address the above question by studying the dynamics of the pure Lévy branching and annihilation process in a one dimensional lattice. In particular, we will be interested in determine the time evolution of the particle number and its fluctuations. These usually develop power-law growth when the system starts from a single seed particle. The characteristic dynamic exponents of these two relevant quantities will be esti-

mated from numerical simulations in the entire range of values for the Lévy exponent  $\alpha$ . We will unveil the associated distribution functions, exploring the regimes of Gaussian and non-Gaussian fluctuations as well as the emergence of extreme value distributions. A crossover from Frechet (at threshold) to Gumbell extreme values distributions will be reported. This result closely resembles recent experimental findings on cw-pumped random fiber laser [35]. Further, the average occupation number distribution functions in distinct branching regimes will be explored.

## II. THE PURE LEVY BRANCHING AND ANNIHILATION PROCESS

Here we consider the branching and annihilating of *static* particles  $A$  that generate a single offspring  $A \rightarrow 2A$  to the left or to the right with equal probability. The particles annihilate upon contact  $A + A \rightarrow \emptyset$ , i.e., when the branching process tries to generate an offspring in an already occupied site. These processes can be represented by the reaction equations



Here  $n = 1$  is the number of offsprings. The branching distance  $r$  is assumed to follow a Lévy power-law distribution. This is effectively accounted by choosing the branching distance as

$$r = (1 - x)^{-1/(\alpha-1)}. \quad (3)$$

Here  $x$  is a uniformly distributed random number in the interval  $0 \leq x < 1$ . Only the integer part of  $r$  is considered. It follows a Lévy power-law distribution in the form:

$$P(r) \propto \frac{1}{r^\alpha}, \quad (4)$$

with  $\alpha$  controlling the ranging of the branching process. Large values of  $\alpha$  correspond to short range interactions (offspring generated in the close vicinity of the parental particle). Conversely, small values of  $\alpha$  allows for large branching distances  $r$ .

The model is simulated in a one dimensional lattice of size  $L$ . The lattice size  $L$  was chosen to be close to the largest integer supported by our hardware. In all runs, the total time evolution was chosen to avoid finite size effects, avoiding the process to reach the chain borders. At each elementary step, one particle of the system is chosen at random to generate an offspring. Time is increased by  $1/N(t)$  at each step, where  $N(t)$  is the number of particles at time  $t$ . Configurational averages are taken over a large number of independent runs. As the time elapses, the mean number of particles in the lattice grows without

limit. Due to the absence of diffusion, an absorbing state in which the population vanishes cannot be reached, even with no parity conservation.

Here we study the long term behavior of the mean number of particles  $\overline{N}(t)$ . We start from the initial condition with a single particle in the center of a one dimensional lattice. We also followed the time evolution of the quadratic fluctuations in the particle number defined as

$$\Delta N^2(t) = \overline{[N(t) - \overline{N}(t)]^2}. \quad (5)$$

In our simulations the mean number  $\overline{N}(t)$  and its fluctuations are calculated over a large number of samples, specified in the next section. Power-law behaviors are expected at sufficiently large times:

$$\overline{N}(t) \sim t^\theta, \quad (6)$$

$$\Delta N^2(t) \sim t^\phi, \quad (7)$$

with  $\theta$  being the dynamic exponent associated with the growth of the average particle number and  $\phi$  the corresponding one associated with its fluctuations. For short range branching, it is well known that the average number of particles grows linearly in time ( $\theta = 1$ ) presenting Gaussian fluctuations ( $\phi = 1$ ) [5]. Our goal is to analyze how the above quantities vary in time for distinct  $\alpha$  values, i.e., how long-range branching affects the dynamic exponents. We are mainly interested in  $\alpha$  outside the regime  $0 < \alpha < 2$ . In fact, in those cases very large jumps are often observed. Mutual annihilation becomes rare thus rendering the mean number of particles to diverge exponentially in time.

## III. RESULTS

We start our analysis by showing a space-time plot in distinct branching regimes. Figure 1 shows the spatial distribution of particles, over time, for some representative  $\alpha$  values. The simulations were performed in a 1D lattice. Data are shown up to  $t = 300$ . In all cases, the initial condition is one single particle in the center of the lattice. In figure 1a we have  $\alpha = 2.5$ . The particles spreads over a wide region of the lattice because a small  $\alpha$  corresponds to an effective long-range branching. New seeds appear throughout the lattice due to branching to an empty region. The low population density around the neighborhood of the new generated particle leads to few encounters and therefore few extinctions. In this way, particles quickly spread over the lattice. Figure 1b shows the results for  $\alpha = 3$ . The particles do not spread over very large distances and kept concentrated around a small region surrounding the center of the lattice. Short-ranged branching makes the offspring to be usually generated in an already occupied site, leading to extinction of both particles. Note that, for large values of  $t$ , some offsprings may be generated in sites far from the

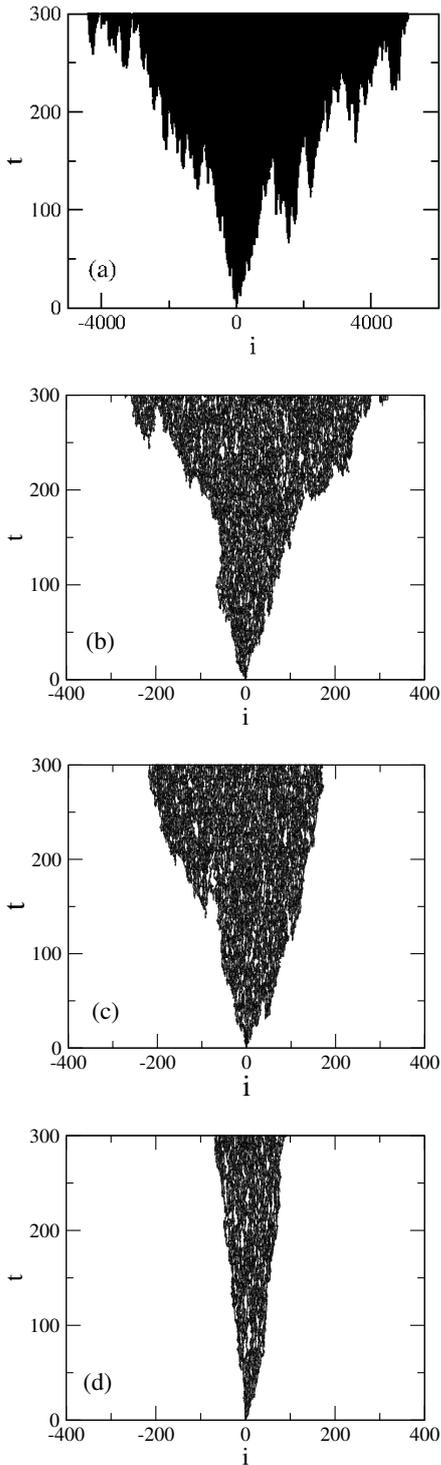


FIG. 1: Space-time distribution of particles for distinct  $\alpha$  values. In (a)  $\alpha = 2.5$ , (b)  $\alpha = 3.0$ , (c)  $\alpha = 3.5$  and in (d)  $\alpha = 4.5$ . For small  $\alpha$ , there are long-range branchings to unoccupied regions of the chain which favors a fast occupation of the lattice. For large  $\alpha$ , short-range branching predominates and the population growth is slower. Notice the distinct spatial scale in (a) which hides the small gaps of unoccupied sites evident in (b-d).

original central position, as expected since the distance  $r$  follows a power law distribution whose fat tails guarantee the occurrence of outlier events. Figure 1c considers  $\alpha = 3.5$ . The particles are aggregated in a even smaller region around the origin since faraway branching are less likely, a similar situation presented in figure 1d, which considers  $\alpha = 4$ . For these values of  $\alpha$  most of the offsprings are generated around the central initial position and the annihilation mechanism forbids a high occupation rate. The spacial distribution of particles over time is thus connected to the value of  $\alpha$  that furnishes the typical size  $r$  of the branching distance. Small  $\alpha$  favors branching to empty regions, leading to a faster population growth. For large values of  $\alpha$ , there is (almost) no occurrence of large jumps and it is likely for an offspring to be created in an already occupied site, leading to a slower population increase.

Since the value of  $\alpha$ , which controls the branching distance, governs the range of the interactions, we now focus on the dynamical exponents related to the average number of particles and its fluctuations. In figure 2 we have the time evolution of the mean number of particles and its fluctuations for a wide range of  $\alpha$  values. We checked that no attempt to branch outside the chain borders occurred during any time run. As such, our results are free from finite-size corrections. The number of samples varied from  $10^4$  for the smallest  $\alpha$  to  $10^5$  for the largest ones. For  $\alpha < 3$  we stopped the simulations after  $t = 5000$  (otherwise finite-size effects would affect the simulations). For  $\alpha > 3$  we run up to  $t = 50000$  with no finite-size effect due to the shorter-range character of the branching process.

Figure 2a shows the log-log time evolution of the mean number of particles. The results show that, for  $\alpha < 3$ , the mean number of particles grows faster as the  $\alpha$  value is lowered. Conversely, the population tends to cluster near the origin if  $\alpha > 3$ , leading to the same short-range  $\theta = 1$  exponent. Figure 2b presents the log-log evolution in the fluctuations of the particle number. Note the same slope for  $\alpha = 4$  and  $\alpha = 4.5$ . It is consistent with  $\phi = 1$  for short-ranged branching. However, the dynamic exponent  $\phi$  already starts to deviate from this value for  $\alpha < 4$ .

From the asymptotic slopes of the curves presented in figure 2, we obtained the dynamical critical exponents  $\theta$  and  $\phi$  for each  $\alpha$ , as shown in figure 3. Note that the exponent  $1/\theta$  monotonically grows for  $\alpha < 3$  and converges to the short-range value  $\theta = 1$  at  $\alpha = 3$ . This is so because the branching process tends to cluster the particles in a vicinity of the origin above this value of  $\alpha$ , with the cluster front spreading ballistically. Creation and annihilation processes are balanced within the main cluster with the density of particles on it fluctuating around a constant value. As a consequence, the growth of the mean number of particles ends up being controlled by the ballistic evolution of the cluster front. For  $\alpha < 3$ , our data fits the empirical law  $1/\theta = \alpha - 2$ . The divergence of  $\theta$  at  $\alpha = 2$  signals the set up of exponential explosive growth of the population because annihilation becomes

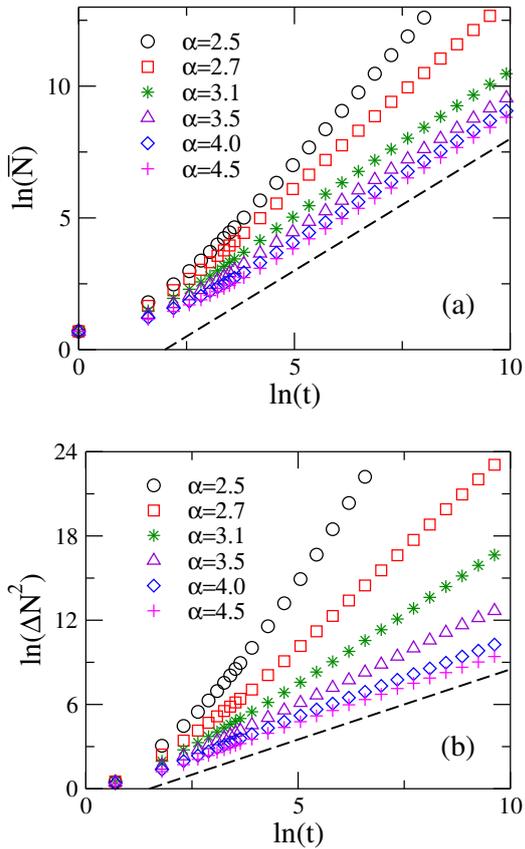


FIG. 2: In (a) we present the time evolution of the mean number of particles, and in (b) its quadratic fluctuations for distinct values of  $\alpha$ . The long-time slopes give the respective dynamic exponents. Notice that, while the dynamic exponent of  $\bar{N}(t)$  starts to change for  $\alpha < 3$ , its fluctuation exponent already deviates from the short-range behavior for  $\alpha < 4$ . Dashed lines have unitary slope corresponding to the expected short-range behavior.

irrelevant at this extreme long-range regime where the average branching distance diverges.

For the dynamic exponent  $\phi$  associated with the particle number fluctuations, we observe a similar behavior. However the short-range value is reached only at  $\alpha = 4$ . This happens due the very nature of the underlying power-law processes, that allows for eventual long-distance jumps to occur, thus making second and higher moments larger than usual. Note also the occurrence of two distinct regimes  $2 < \alpha \leq 3$  and  $3 < \alpha \leq 4$ . For  $2 < \alpha < 3$ , our data is consistent with the fluctuation exponent  $\phi = 2\theta$ . This means that the width of the particle number distribution becomes of the same order of the average number. Therefore, fluctuations are relevant in this regime, even in the long-time limit. On the other hand,  $1 \leq \phi \leq 2$  for  $3 \leq \alpha \leq 4$ . Therefore, the width of the particle number distribution grows slower than its average in this regime, although faster than diffusively. This points to a weak violation of the Central Limit Theorem in this regime. In this intermediate regime, our numerical data

is well fitted by  $\phi = 5 - \alpha$ .

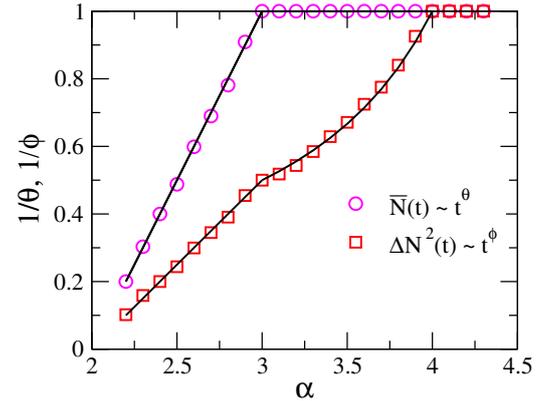


FIG. 3: Dynamic exponents associated with the average particle number  $\theta$  and its quadratic fluctuations  $\phi$  for distinct values of  $\alpha$ . For  $\alpha \geq 4$  the short-range values set up  $\theta = \phi = 1$ . For  $2 < \alpha \leq 3$  one finds  $\phi = 2\theta = 2/(\alpha-2)$ . For  $3 \leq \alpha < 4$  one identifies an intermediate regime with  $\theta = 1$  and  $\phi = 5 - \alpha$ .

In order to have a deeper understanding of the dynamics in these distinct regimes, we present results concerning the histograms of the number of particles for different values of the range of the interaction, parameterized by  $\alpha$ . In figure 4 we consider the cases  $\alpha = 3.5$  and  $\alpha = 4$ . Here the histograms were obtained from typically  $4 \times 10^4$  samples. In figure 4a we observe that, as the time elapses, the probability distribution function (PDF) converges slowly to a normal distribution. For  $\alpha = 4$  the PDF is Gaussian for all instants considered, as shown in figure 4b. The short range of the interactions does not allow for large branching. Annihilation takes place and the convergence to a normal distribution occurs, as expected by the Central Limit Theorem.

In figure 5a we present results for  $\alpha = 2.3$  and  $\alpha = 2.7$ . We represent the probability  $P(N/\bar{N})$  versus  $N/\bar{N}$ . Population  $N$  is calculated at  $t = 446$  and  $\bar{N}$  is averaged for  $5 \times 10^5$  samples. The histograms are the same for other times and  $\alpha < 3$  values, i.e., it represents the stationary distribution of the particle number in this regime. In Fig. 5b we use  $\alpha = 3$  and consider three distinct instants  $t$ . Here  $\bar{N}$  is averaged over  $10^4$  samples. Notice that the distribution is also stationary in this regime, but presenting a profile distinct from that reported in Fig. 5a. In both cases the distributions have a strongly non-Gaussian character.

The above data were fitted by the extreme value stable Fréchet and Gumbell distributions in the case of long range interaction  $\alpha \leq 3$  (the regime with varying exponent  $\theta$ ). Gumbell and Fréchet distributions are particular cases of the generalized extreme value (GED) distribution, which also includes the Weibull distribution [36]. The extreme value theorem states that these stable distributions describe the asymptotic behavior of normalized extreme values of an univariate independent sample. Fréchet and Gumbell are obtained when we consider the

maximum values of the variable. Conversely, a Weibull distribution is developed whenever one considers their minimum. The PDFs for these are given by:

$$P(x) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)t(x)^{\xi+1}e^{-t(x)} \quad (8)$$

with

$$t(x) = e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}, \quad \xi = 0 \quad (9)$$

$$t(x) = \left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}, \quad \xi \neq 0 \quad (10)$$

The parameter  $\xi$  defines which one of the three distribution we are refereeing. The Gumbell distribution is obtained if  $\xi = 0$ , while  $\xi > 0$  is for Frechet and  $\xi < 0$  for Weibull. A Gumbell distribution fits the curves for  $\alpha < 3$  with high accuracy with parameters  $\sigma = 0.24$ ,  $\xi = 0$  and  $\mu = 0.88$ . On the other hand, our data show the stationary property of the Frechet distribution in the threshold  $\alpha = 3$  with  $\sigma = 0.12$ ,  $\xi = 0.17$  and  $\mu = 0.92$ . These results indicate that the dynamics is actually governed by the rare events of branching to sites far from the original seed.

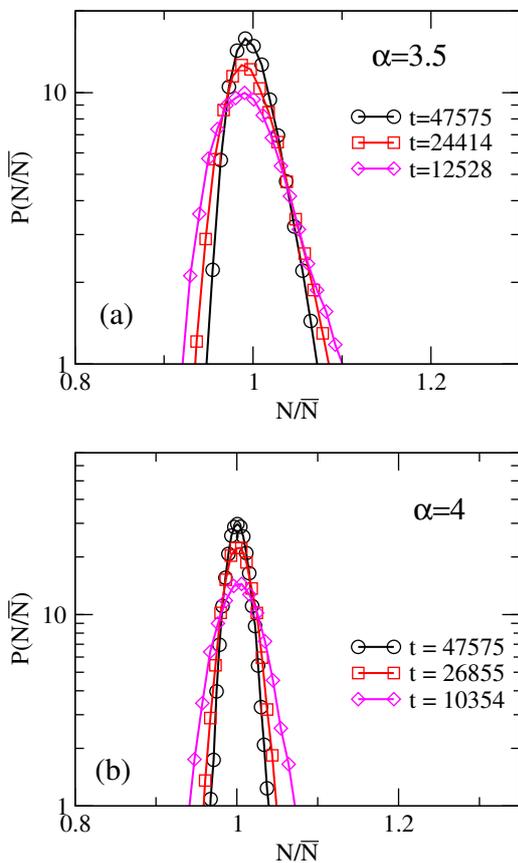


FIG. 4: Histograms for the particle number for  $\alpha > 3$ . In (a) we have  $\alpha = 3.5$ . There is a slow convergence to a Gaussian distribution. In (b) we have  $\alpha = 4$  for which the convergence to Gaussian is faster.

It is important to mention that Gumbell distributions were also found to fit branching Brownian walkers, in

which, after an exponential random time, the particle splits into  $n$  particles with a given probability. In [37] it was proved that the PDF of the maximum of branching Brownian motion converges to a Gumbell distribution, a conjecture previously stated in [38]. The largest extremes of independent and identically distributed random walks were also proved to converge to the Gumbell or the Frechet distributions [39]. Gumbell distributions were reported in random walks on fully connected lattices. In [40] the authors analyzed the time evolution in the number of sites visited within a given subset of the total number of sites. Whenever the walker visits any given site of this subset a value is recorded. When this recorded value equals the number of sites in the subset, the time value is dubbed total covering time and the fluctuations of this variable are distributed according a Gumbell distribution [40]. A recent experiment showed also a crossover from Frechet (at threshold) to Gumbell extreme value statistics in the intensities of a cw-pumped random fiber laser presenting underlying gain and Lévy processes [35]. The stimulated emission process responsible for the gain in lasers has a close analogy with the branching process while the Lévy trajectories of photons in random lasers gives the long-range character of the interactions. A loss process can be associated with the emission of photons when they reach the random laser borders. Our results indicate that extreme value distributions can emerge in distinct physical scenarios from the balance between gain and loss processes in systems with long-range interactions.

Before finishing, we will provide additional data in order to support the importance of long-distance branching extreme events to the systems dynamics. We start by reporting the time evolution of the spreading front  $x_{max}$ , i.e., the distance from the seed position of the most distant particle at a given time. Data for some representative values of the branching exponent are shown in Fig. 6. While the spreading front evolves ballistically for  $\alpha > 3$  with no mayor discontinuities, abrupt jumps resulting from long-distance branchings play a relevant role for  $\alpha < 3$ . In the time intervals between mayor jump events, the spreading front is mainly ballistic. However, these rare large events give rise to an overall superballistic spreading and amplified fluctuations.

Whenever the walker visits any given site of this subset a value is recorded. When this recorded value equals the number of sites in the subset, the time value is dubbed total covering time and the fluctuations of this variable are distributed according a Gumbell distribution [40]. A recent experiment showed also a crossover from Frechet (at threshold) to Gumbell extreme value statistics in the intensities of a cw-pumped random fiber laser presenting underlying gain and Lévy processes [35]. The stimulated emission process responsible for the gain in lasers has a close analogy with the branching process while the Lévy trajectories of photons in random lasers gives the long-range character of the interactions. A loss process can be associated with the emission of photons when they reach

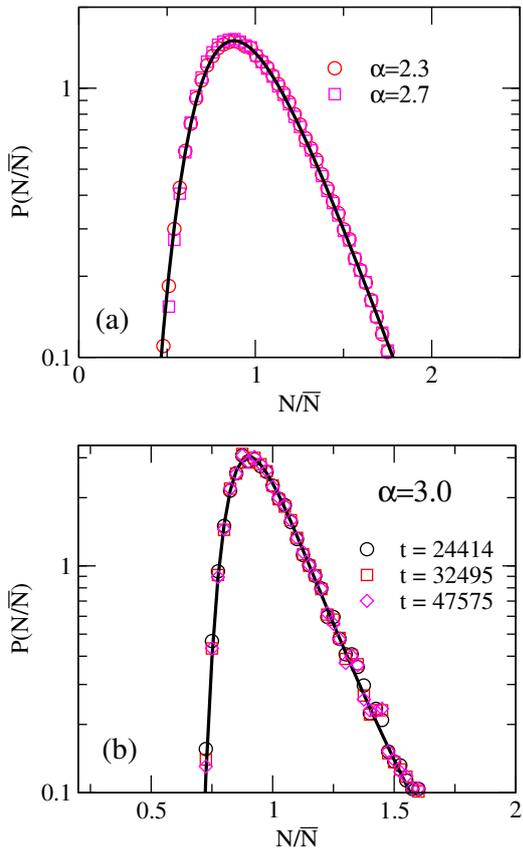


FIG. 5: In (a) we present the histogram for the number of particles  $N$  normalized over the mean number  $N/\bar{N}$  for  $\alpha = 2.3$  and  $\alpha = 2.7$ . These are fitted by a Gumbell distribution with  $\sigma = 0.24$ ,  $\xi = 0$  and  $\mu = 0.88$  (solid line). In (b) we present  $P(N/\bar{N})$  for  $\alpha = 3.0$  at three different instants. The fit (solid line) represents a Frchet distribution with  $\sigma = 0.12$ ,  $\xi = 0.17$  and  $\mu = 0.92$ .

the random laser borders. Our results indicate that extreme value distributions can emerge in distinct physical scenarios from the balance between gain and loss processes in systems with long-range interactions.

The spacial distribution of the particles at a given large time also unveils important aspects distinguishing the short and long-range regimes. Far from the spreading front, the balance between branching and annihilation processes results in a statistically uniform particle distribution with the average occupation number of a given site being  $\bar{n} = 1/2$ , irrespective to the branching range. Fluctuations of the spreading front over distinct realizations produce a smooth crossover from the active region with  $\bar{n} = 1/2$  to the inactive region with  $\bar{n} = 0$ . Depending on the branching regime, quite distinct average occupation number distributions  $\bar{n}(x)$  set up, as illustrated in Fig. 7. In the short-range regime, such crossover is exponential. Actually, the average occupation number distribution has a Fermi-Dirac form

$$\bar{n}(x) = \frac{n_0}{e^{\beta(x-x^*)} + 1}, \quad (11)$$

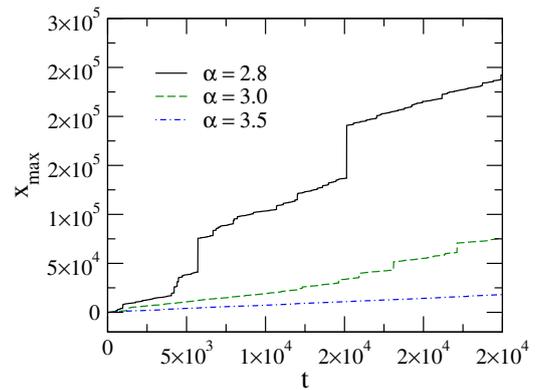


FIG. 6: Time evolution of the spreading front  $x_{max}$  measured as the distance from the seed position of the most distance particle at time  $t$ . Large jumps resulting from rare events of long-distance branchings become relevant for  $\alpha < 3$ , giving rise to a superballistic spreading and enhanced fluctuations.

where  $n_0 = 1/2$ ,  $x^*$  is the distance to the origin on which the average occupation number decays to  $n_0/2$ , and  $\beta$  controls the width of the crossover region. The above Fermi-Dirac distribution fits accurately the simulation data for  $\alpha = 4$  (solid line on the main frame of Fig. 7). We measured the distance in units of  $x^*$  being left with a single fitting parameter  $\beta x^*$ . In this regime, the fitting parameter becomes larger when the distribution is measured at longer times, as expected because the relative fluctuations become vanishing small in the Gaussian regime. The emergence of the Fermi-Dirac distribution is in line with the close analogy between reaction diffusion nonequilibrium problems and quantum fermionic systems [46, 47]. and can open a new direction towards future analytical derivations of the reported numerical distributions.

A very long crossover develops in the regime of long-range branchings. The average occupation number decays slowly for  $x/x^* \gg 1$ , typically as a power-law, as shown in the inset of Fig. 7 where the same data are plotted in double logarithmic scale. This feature is directly associated with the rare events of long-distance branchings that can populate regions at distances much larger than the average size of the active region. A generalization of the Fermi-Dirac distribution has been given in the literature in the context of nonextensive statistics[48–50] which has found applications in several physical systems presenting multifractality, long-time memory and long-range interactions[52, 53]. Although the exact form of the resulting Fermi-distribution is quite cumbersome and difficult to calculate, it assumes a simple and intuitive form within the so-called factorization approximation[51], being given by

$$\bar{n}(x) = \frac{n_0}{\{\exp_q[-\beta(x-x^*)]\}^{-1} + 1}, \quad (12)$$

where

$$\exp_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (13)$$

for  $1 + (1 - q)x > 0$ , being zero otherwise. The above expression was used to fit the data for the average occupation number distribution at  $\alpha = 2.3$ , shown as the solid line in the inset of Fig. 7. Fitting parameters used were  $\beta x^*$  and  $q$ .  $\beta x^*$  is time independent in this regime because the particle number dispersion is of the same order as its average. For large  $x/x^*$  the distribution decays as  $1/(x/x^*)^{1/(q-1)}$ . Our best fit for the  $\alpha = 2.3$  distribution provided  $q \simeq 1.46$ . The above simple expression does not fit the entire particle number distribution in the intermediate regime of  $\alpha$  values, a signal that relevant corrections to the factorization approximation are in order.

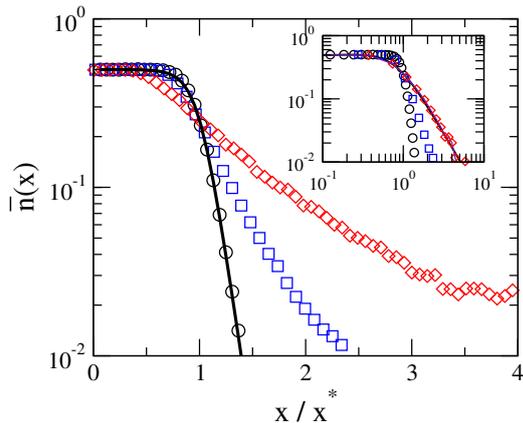


FIG. 7: Average occupation number distribution  $\bar{n}(x)$  as a function of the normalized distance to the seed position  $x/x^*$ , where  $\bar{n}(x^*) = n_0/2$ . Data are for  $\alpha = 4$  (circles),  $\alpha = 3$  (squares) and  $\alpha = 2.3$  (diamonds). Solid line is a fit to the Fermi-Dirac distribution given in Eq. 11. Inset: Double logarithmic plot of the same data. Solid line is a fit to the Fermi-Dirac distribution in the context of nonextensive statistics given in Eq. 12. Data were taken at  $t = 100$  from  $10^4$  distinct realizations.

#### IV. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In summary, we studied the dynamics of a branching and annihilating process of static particles that generate a single offspring and annihilate upon contact. The branching distance  $r$  was supposed to follow a Lévy power-law distribution, parameterized by the exponent  $\alpha$  that governs the effective range of the branching process.

For  $\alpha \geq 4$  the system is in the regime of very short ranged branching. The mean number of particles  $\bar{N}(t)$  and its quadratic fluctuations grow linearly with time, as expected for branching to the close vicinity of the parental particle. The distribution of the number of particles  $N$  at a given time, determined from a large number of independent runs, quickly converge to a Gaussian.

For the intermediate regime of  $3 < \alpha < 4$ , the system still presents a linear growth in  $\bar{N}(t)$  but the particle number quadratic fluctuations behave like  $\Delta N^2(t) \propto t^\phi$  with  $1 < \phi < 2$ , which implies in a superdiffusive widening of the particle number distribution. Our data allowed us to propose the empirical relation  $\phi = 5 - \alpha$ . As the time evolves the distribution  $P(N/\bar{N})$  slowly converges to a Gaussian.

For  $2 < \alpha \leq 3$ , both  $\bar{N}$  and  $\Delta N^2(t)$  obey power-law growths with dynamical exponents varying continuously with  $\alpha$ . Our data is consistent with  $\phi = 2\theta = 2/(\alpha - 2)$ . In this regime, the width of the particle number distribution becomes of the same order as the own average particle number, thus signaling non-Gaussian asymptotic fluctuations. The PDFs  $P(N/\bar{N})$  are best fitted by extreme value distributions, namely a Fréchet distribution for the threshold value  $\alpha = 3$  and a Gumbell distribution for  $2 < \alpha < 3$ , in close analogy with experimental findings in cw-pumped random fiber lasers experiments [35]. This result unveils the relevant role played by the events of extreme branching distances in this regime. Finally the dynamic exponents diverge for  $\alpha \leq 2$ , signaling the explosive exponential population growth dominated by very long-ranged branching on which annihilation becomes irrelevant. The average occupation number distribution was shown to have a Fermi-Dirac aspect for short-range branchings, evolving to the corresponding one in the context of nonextensive statistics in the long-range regime.

The present work adds to the current literature supporting the emergence of extreme value statistic in dynamical systems with underlying Lévy processes. Due to the ubiquitous occurrence of Lévy distributions in nature [41–45], it would be valuable to have future investigations aiming to explore the possible emergence of extreme value distributions in general population dynamics models and optical systems with long-range interactions. It would also be interesting to have future analytical efforts aiming to derive the reported distributions exploring field theoretical and master equation approaches as well as the analogy between diffusion reaction problems and quantum fermionic model systems.

#### V. ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), FAPEAL (Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Alagoas) and FACEPE (Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco). M.L.L. acknowledges the hospitality of the Physics Department of Federal University of Pernambuco where this work has been partially developed with financial support from a partnership program CAPES/FACEPE (grant number APQ-0325-1.05/18).

- 
- [1] J.L. Cardy and U.C. Tauber, *J. Stat. Phys.* **90**, 1, (1998).
- [2] M. Henkel and H. Hinrichsen, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, R117 (2004).
- [3] I. Jensen, *J. Phys. A: Math Gen.* **26**, 3921 (1993).
- [4] D. Zhong and D. benAvraham, *Phys. Lett. A* **209**, 333 (1995).
- [5] D. ben-Avraham, F. Leyvraz, and S. Redner, *Phys. Rev. E* **50**, 1843 (1994).
- [6] E.V. Albano, *Europhys. Lett.* **34**, 97 (1996).
- [7] L.H. Tang and G.S. Tian, *Physica A* **264**, 543 (1999).
- [8] K. Mussawisade, J.E. Santos, and G.M. Schutz, *J. Phys. A: Math Gen* **31**, 4381 (1998).
- [9] G. Szabo, *Phys. Rev. E* **62**, 7474 (2000).
- [10] G. Odor, *Phys. Rev. E* **70**, 066122 (2004).
- [11] F. Benitez and N. Wschebor, *Phys. Rev. E* **86**, 010104(R) (2012).
- [12] E.V. Albano, M. Hoyuelos, and H.O. Martin, *Physica A* **239**, 531 (1997).
- [13] J. Marro and R. Dickman, *Non-equilibrium Phase Transitions in Lattice Models*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [14] H. Hinrichsen, *Adv. Phys.* **49**, 815 (2000).
- [15] F. Bagnoli, B. Chopard, M. Droz, L. Frachebourg, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 1085 (1992).
- [16] E.C. da Costa, F.R. Rusch, *Physica A* **451**, 565 (2016).
- [17] H. Takayasu and A.Yu. Tretyakov, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3060 (1992).
- [18] J. Cardy and U.C. Tauber, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4780 (1996).
- [19] I. Jensen and R. Dickman, *J. Stat. Phys.* **71**, 89 (1993).
- [20] I. Jensen, *Phys. Rev. E* **47**, R1 (1993).
- [21] N. Inui, *Phys. Lett. A* **184**, 79 (1993).
- [22] I. Jensen, *Phys. Rev. E* **50**, 3623 (1994).
- [23] H. Taksyssu and N. Inui, *J. Phys. A* **25**, L585 (1992).
- [24] S. Kwon and H. Park, *Phys. Rev. E* **52**, 5955 (1995).
- [25] C. Argolo, *Physica A* **537**, 122731 (2020).
- [26] H. Hinrichsen, *J. Stat. Mech.* P07006 (2007).
- [27] H.K. Janssen, K. Oerding, F. van Wijland, H.J. Hilhorst, *Eur. Phys. J. B* **7**, 137 (1999).
- [28] D. Vernon and M. Howard, *Phys. Rev. E* **63**, 041116 (2001).
- [29] T. Laise, P. Barros, C. Argolo, and M.L. Lyra, *J. Stat. Mech.* P113205 (2016).
- [30] T. Laise, F.C. dos Anjos, C. Argolo, and M.L. Lyra, *Physica A* **505**, 648 (2018).
- [31] K.B. Erickson, *Ann. Prob.* **1**, 926 (1973).
- [32] A. Sudbury, *Ann. Prob.* **18**, 581 (1990).
- [33] C. Neuhauser and A. Sudbury, *Adv. Appl. Prob.* **25**, 24 (1993).
- [34] M. Bransom, W.D. Ding, and R. Durrett, *Stoch. Proc. Appl.* **37**, 1 (1991).
- [35] B.C. Lima, P.I.R. Pincheira, E.P. Raposo, L.S. Menezes, C.B. de Araújo, A.S.L. Gomes, and R. Kashyap, *Phys. Rev. A* **96**, 013834 (2017).
- [36] S. Coles, *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, (Springer-Verlag, London, 2001).
- [37] L.P. Arguin, A. Bovier, and N. Kistler, *Electron. J. Probab.* **18**, 53 (2013).
- [38] S.P. Lalley and T. Sellke, *Ann. Probab.* **15**, 1052 (1987).
- [39] T. Mikosch and J. Yslas, arXiv:1904.04607.
- [40] L. Turban, *J. Phys. A: Math. Gen.* **48** 445001 (2015).
- [41] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza, and R. Maynard, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3589 (1995).
- [42] M.F. Shlesinger, J. Klafter, and G. Zumofen, *Am. J. Phys.* **67**, 1253 (1999).
- [43] G.M. Viswanathan, F. Bartumeus, S.V. Buldyrev, J. Catalan, U.L. Fulco, S. Havlin, M.G.E. da Luz, M.L. Lyra, E.P. Raposo, and H.E. Stanley, *Physica A* **314**, 208 (2002).
- [44] G.M. Viswanathan, U.L. Fulco, M.L. Lyra, and M. Serva, *Physica A* **32**, 273 (2003).
- [45] F. Bartumeus, M.G.E. da Luz, G.M. Viswanathan, and J. Catalan, *Ecology* **86**, 3078 (2005).
- [46] F.C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel, and V. Rittenberg, *Ann. Phys.* **230**, 250 (1994).
- [47] M. Henkel, E. Orlandini, J. Santos, *Ann. Phys.* **259**, 163 (1997).
- [48] A. K. Rajagopal, R. S. Mendes, and E. K. Lenzi, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3907 (1998).
- [49] E. K. Lenzi, R. S. Mendes, and A. K. Rajagopal, *Phys. Rev. E* **59**, 1398 (1999).
- [50] H. Hasegawa, *Phys. Rev. E* **80**, 011126 (2009)
- [51] F. Büyükkilic, D. Demirhan, and A. Gülec, *Phys. Lett. A* **197**, 209 (1995).
- [52] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [53] C. Tsallis, *Physica D* **193**, 3 (2004).