INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Leis de Conservação e Soluções Tipo Soliton da Equação Generalizada de Korteweg-de Vries

Nemuel Rocha Lima

Maceió-AL
20 de Março de 2020

Leis de Conservação e Soluções Tipo Soliton da Equação Generalizada de Korteweg-de Vries

Autor: Nemuel Rocha Lima
Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa

Maceió-AL
20 de Março de 2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

L732l Lima, Nemuel Rocha.
Leis de conservação e soluções tipo soliton da equação generalizada de Korteweg-de Vries / Nemuel Rocha Lima. – 2020.
47 f.

Orientador: Isnaldo Issac Barbosa.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 45-47.

1.Leis de conservação (Matemática). 2. Solitons. 3. Equação de Korteweg-de Vries. I. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DEMATEMÁTICA LICENCIATURA
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.matl@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Informamos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Licenciatura que Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **NEMUEL ROCHA LIMA**, matrícula nº **17110042**, do curso de **MATEMÁTICA LICENCIATURA**, intitulado: "**Leis de Conservação e Soluções Tipo Soliton da Equação Generalizada de Korteweg-de Vries**", recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: ______ ( ), média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Isnaldo Isaac Barbosa (Orientador): _________
Prof. Márcio Cavalcante de Melo: ___9,5_______
Prof. José Eduardo Milton de Santana:____9,5______

Maceió, 19 de junho de 2020.

Isnaldo Isaac Barbosa
Prof. Isnaldo Isaac Barbosa

Márcio Cavalcante de Melo
Prof. Márcio Cavalcante de Melo

José Eduardo Milton de Santana
Prof. José Eduardo Milton de Santana

Este trabalho, é dedicado aos meus pais, minha tia, irmã, noiva e meus avós em especial ao meu avô.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, minha maior força nos momentos de dificuldades, por me guardar com o seu infinito amor. Sem Ele, nada disso seria possível. Agradeço ao Senhor por colocar esperança, amor e fé no meu coração, abençoando o meu caminho durante a construção deste trabalho. Dedico esta TCC ao meu Deus, todo poderoso, o maior orientador da minha vida, pois nunca me abandonou nos momentos de necessidade. Porque Dele, e por Ele, e para Ele são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém!

- Agradeço a minha família, especialmente aos meus pais, Elias da Rocha Lima e Amara Maria da Conceição Rocha, pelo amor e dedicação, fundamentais nesta caminhada. Também agradeço a minha tia Leni da Rocha Lima, a minha irmã Jully Graciely da Rocha Lima, a minha noiva Rosebeth Silva dos Santos e aos meus avós, Maria do Carmo Lima e, de uma forma mais especial, ao meu querido avô, Clóvis da Rocha Lima, que, embora não esteja mais presente, todavia eu o levo sempre em meu coração.

- Ao meu amigo e orientador Prof Dr.Isnaldo Isaac Barbosa, aos meus amigos Prof Dr. José Eduardo Milton de Santana, Prof Dr. Márcio Cavalcante de Melo, Deivid Santos, Ediclaudio Lima, Diego Ramon e Marcones Oliveira. A todos os professores do IM-UFAL, pelos ensinamentos e receptividade.

*"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é
perfeito."*

(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

Resumo

Neste trabalho, provaremos as leis de conservação, além disso, encontraremos soluções especiais, chamadas solitons, com respeito ao problema de Cauchy associado à equação não-linear de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV), para $p = 2, 3$ e 4, definida por

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \ x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Palavras-chave: Leis de Conservação, Solitons, Korteweg-de Vries

Abstract

In this work, we will prove laws of conservation and find special solutions, called solitons, with respect to the flow of the Cauchy problem associated to the generalized Korteweg-de Vries equation (gKdV), for $p = 2, 3$ and 4, given by

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \ \ x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Keywords: Laws of Conservation, Solitons, Korteweg-de Vries

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O sentido de um professor saber mais do que aquilo que ele vai ensinar é, dentre outras coisas, para que o mesmo possa ter um domínio amplo sobre o que vai passar para os alunos. Com isso, ele amplia as formas de como vai abordar um mesmo assunto para seus alunos, levando-os a compreender determinado tema de outro ponto de vista, a procurar por outros caminhos para resolver problemas propostos em sala de aula. Infelizmente, vemos que os docentes enfrentam dificuldades de ensinar a aprender, isto é, desconhecem, muitas vezes, como os alunos podem aprender e quais os processos que devem realizar para que seus alunos adquiram, desenvolvam e processem as informações ensinadas e aprendidas em sala de aula. Isso se deve, muitas vezes, ao fato de ter um conhecimento limitado sobre o que está ensinando.

No mundo em que vivemos é preciso que um professor sempre se atualize, seja ele de qualquer área do conhecimento humano, pois nossa sociedade está em constante evolução, não ficar parado no tempo em termos de conhecimento, para levar tais conhecimentos para as salas de aula, com ênfase para a educação básica.

Como dito anteriormente, a evolução científica e tecnológica vem crescendo em grande escala, por isso nada melhor que levar aos alunos um pouco desse conhecimento cientifico de uma maneira que eles possam entender e, com isso, desenvolver mais seus conhecimentos, elevando assim a sua capacidade de investigar diferentes soluções para situações problemas passadas em sala de aula ou mesmo no dia-a-dia. Para que isso possa acontecer, o professor deve saber além do que os conhecimentos básicos sobre o assunto que ele irá ministrar para seus alunos. Todavia, para que isso possa acontecer, tal professor deve buscar conhecimentos extras, além da realidade da sala de aula.

Nesse sentido, o presente trabalho pretende explorar essa ideia. Pensando em um modo de abordar funções exponenciais em sala de aula, vamos ilustrar a importância de um professor de matemática ter conhecimentos de assuntos superiores sobre coisas atuais, que são modeladas por equações que estão muito além do conhecimento dos alunos, mas que se o professor se atualizar e buscar tais conhecimentos ele pode trazer para os alunos de ensino básico de uma forma mais acessível para o nível em que os mesmos estão. Pensando em tal fato, nosso trabalho de conclusão de curso visou falar sobre a famosa equação da KdV, equação essa que em sua essência tem por solução particular uma equação composta por funções conhecidas para alunos do ensino médio, que são funções exponencias. Tais equações, de um ponto de visto mais aprofundado, pode ser de difícil compreensão até mesmo para especialistas. Porém, podemos tirar da mesma fatos interessantes e básicos para ser levado para os alunos do ensino básico (visando aqui o ensino médio). Usando um software como o Geogebra, pode-se construir graficamente a solução particular, despertando assim a curiosidade e ampliando os conhecimentos dos alunos sobre tais assuntos, e mostrando a ele as aplicações de tais conhecimentos na realidade.

Diariamente convivemos intensivamente com movimentos de ondas, como no tráfego de veículos, marés, propagação da luz e som. Casualmente podemos nos deparar com notícias de tsunamis e danos causados por ondas sônicas. De fato, o assunto é intensivamente estudado em quase todos os ramos da ciência, devido à grande gama de aspectos naturais na qual se encontra e pelos fenômenos que o envolvem, como difração, refração, reflexão e ressonância. As ondas podem significar grandes catástrofes e, ao mesmo tempo, contribuir para a tecnologia de forma grandiosa.

Não sendo diferente, na matemática, há um rico desenvolvimento dos conceito e técnicas sobre o estudo das ondas. Nosso objetivo, é fazer um estudo teórico da equação de Korteweg-De Vries (ou simplesmente KdV), na sua forma generalizada, sendo essa equação uma maneira de descrever ondas em um canal de águas rasas. A origem desse modelo foi por volta de 1834 com John Scott Russel, mais tarde também estudada por George Airy, George Stokes e Joseph Boussinesq. Baseados nos trabalhos de Boussinesq, no final do século XIX, os matemáticos holandeses Diederik Korteweg e Gustav de Vries apresentaram a equação que hoje chamamos de KdV e nos dias atuais tem sido objetivo de muitas pesquisas na área de análise e equações diferenciais.

1.1 Conceitos Básicos sobre Ondas

Não é uma tarefa fácil determinar uma definição simples para "onda". Diremos apenas que uma onda é uma perturbação que se propaga através do tempo e do espaço. Dessa forma, fica mais simples englobar fenômenos como sendo uma onda. Um fato muito interessante e motivador é que uma onda pode se propagar transportando energia de um ponto até outro sem deslocar as partículas do meio, ou seja, sem nenhum ou baixo transporte de massa.

Agora veremos alguns conceitos físicos básicos sobre ondas

- **Amplitude** (A) de uma onda é a medida de um distúrbio em um meio durante um ciclo de onda. Por exemplo, em uma corda, a amplitude seria a distância que a corda se desloca de sua posição de repouso. A amplitude pode ser constante ou pode variar com o tempo.

- **Período** (T) é chamado o tempo (em segundos) de um ciclo completo de uma oscilação da onda.

- **Frequência** (F) expressa quantas vezes (em hertz) por um segundo a onda completou um ciclo ou especificamente
$$F = \frac{1}{T}.$$

- A **frequência angular** (ω) é uma medida (em radianos) relacionada à frequência, ou ao período, dada por
$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}.$$

- O **comprimento de onda** (λ) é a distância (em metros) que uma forma inteira da onda leva pra completar um ciclo. Sendo v a velocidade com que a onda viaja, o comprimento é dado por
$$\lambda = \frac{v}{F}.$$

1.2 Conceitos Matemáticos

Em Whitham [32], as ondas são distinguidas em duas classes principais. A primeira é descrita por equações diferenciais parciais hiperbólicas, diremos **ondas hiperbólicas**. A segunda não pode ser caracterizada com a mesma simplicidade e, por ser motivada pelos casos mais simples de ondas dispersivas em problemas lineares, iremos chamar essa classe de **ondas dispersivas**. Vale citar que alguns movimentos ondulatórios podem ser caracterizados pelas duas classes e em raras exceções por nenhuma delas.

O mais simples protótipo para ondas hiperbólicas é dado pela equação do transporte

$$u_t + au_x = 0,$$

um bom modelo (unidimensional) para ondas hiperbólicas pode ser dado pela equação da onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

No entanto, quando falamos em ondas dispersivas, nos baseamos no tipo de solução ao invés de um tipo de equação. Chamamos de sistema oscilatório um sistema que admita soluções da forma

$$u = a\cos(kx - \omega t), \tag{1.1}$$

onde a frequência ω é uma função real (determinada pelo sistema) da constante k chamada **número de onda**. A **velocidade de fase** é dada por $\omega(k)/k$. Diremos que uma onda é dispersiva se a velocidade de fase for real e não é constante com respeito a k. Chamaremos assim, pois uma solução geral seria composta da superposição de várias ondas dessa forma com diferentes valores de k. Se a velocidade de fase $\omega(k)/k$ não for a mesma para cada k, ou seja, $\omega \neq c_0 k$ (onde c_0 é alguma constante), as ondas com números k diferentes se propagarão a velocidades diferentes e vão se dispersar. É conveniente modificar a definição e dizer que um sistema linear oscilatório é dispersivo se $\omega'(k)$ não é constante, isto é , $\omega''(k) \neq 0$.

Note que (1.1) é tanto uma solução da equação do transporte com $\omega(k) = ak$ quanto da equação da onda com $\omega(k) = ck$. Mas esses casos são excluídos da classificação dispersiva já que $\omega''(k) = 0$

1.3 A Descoberta das Ondas Solitárias

A mais antiga citação documentada sobre ondas solitárias foi feita em 1834 pelo cientista e engenheiro escocês John Scott Russel, acerca de sua observação do movimento de uma balsa no canal de Edinburgh, em Glasgow. A balsa era puxada por dois cavalos, um em cada margem do estreito canal, quando parou bruscamente. Segundo suas próprias palavras, "*a massa de água que se acumulava na frente da balsa em movimento, em um estado de violenta agitação, seguiu em alta velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, uma montanha de água, lisa e bem definida, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua velocidade*"([28]). Russell a seguiu a cavalo, por mais de 3km, correndo a uma velocidade de aproximadamente 15km/h.

Russell teve a oportunidade de observar a onda que, no início chamou de onda de translação "e, posteriormente, onda solitária". E não foi por acaso, Russel trabalhava em um estudo sobre desenho de cascos para barcaças e, a essa altura, já havia realizado experimentos em outros canais, lagos e rios.

O curioso é que essa onda não se deformava por uma boa distância, assim Russell realizou uma série de experimentos e descobriu como reproduzi-la; construindo um canal raso contendo um anteparo em uma de suas extremidades permitindo acumular água. Retirando o anteparo bruscamente, a massa de água era liberada, fazendo com que uma onda solitária se deslocasse na direção da extremidade oposta. A partir de experimentos dessa forma, foi possível deduzir uma primeira fórmula: $c^2 = g(h_0 + a)$ onde c é a velocidade da onda, a é sua altura em relação ao nível da água em repouso, h_0 a profundidade e g é a constante gravitacional. Mas a fórmula provocou polêmica, pois entrava em contradição com a equação de Airy, que era dada puramente por argumentos teóricos. Russel tentou de diversas formas modelar matematicamente a onda solitária. Desenvolveu teoria para ondas solitárias formadas por ar e éter e utilizou para calcular a espessura da atmosfera, obtendo sucesso para tal fato, mas sem sucesso, tentou calcular o tamanho do universo.

Russel faleceu em 1882 sem ter obtido uma fórmula matemática que descrevesse a onda solitária. Mas, em 1895, os matemáticos holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, deduziram a equação para a propagação de ondas em águas rasas. A partir dessa equação, hoje conhecida como equação KdV, é possível determinar a fórmula para o perfil das ondas solitárias.

Com efeito, seja um referencial que se move em um canal de profundidade h, a equação da KdV na sua forma original , presente no artigo de Korteweg-de Vries [20], é

$$\eta_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left[\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx}\right]_x,$$

onde $\eta(x,t)$ representa a elevação da água com relação ao nível de equilíbrio no momento $t > 0$ da posição espacial $x \in \mathbb{R}$ do canal. O coeficiente $\alpha > 0$ é a constante de propulsão linear, $g > 0$ é a constante gravitacional e $\beta = \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{Th}{g\rho}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor T com densidade $\rho > 0$.

Do ponto de vista da análise matemática, os coeficientes na KdV não representam um papel fundamental. Dessa forma, podemos escolhê-los, de modo conveniente, por meio de mudanças de variáveis, para facilitar o cálculo ou as demonstrações.

Note que, eliminando as constantes físicas por meio das mudanças de variáveis

$$u \longrightarrow -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha,\ x \longrightarrow -\frac{x}{\beta} \quad \text{e} \quad t \longrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\beta}}t,$$

obtemos

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Essa equação, acima obtida, é dita equação KdV padrão, onde a variável redimensionada "u", está relacionada à amplitude e comprimento de onda. Resumindo a equação KdV é um modelo matemático que descreve a propagação de ondas ao longo de um canal de seção transversal retangular de águas rasas com pequena amplitude, ou seja, pouca profundidade.

Muitas definições rigorosas podem ser formuladas, no entanto definiremos uma solução do tipo onda solitária como uma solução particular da equação não linear $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, chamada de KdV, isto é, uma solução satisfazendo as seguintes condições:

- Representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $u(x,t) = Q_c(x - x_0 - ct)$, onde $c > 0$ é uma constante real, que representa a velocidade e x_0 um parâmetro;
- $Q_c(s) \longrightarrow 0$, assim como todas suas derivadas, quando $s \longrightarrow \pm\infty$, com $s = x - x_0 - ct$;
- Mantém sua identidade mesmo após interação com outros solitons (e, neste sentido tem um comportamento de partícula, como sugere seu nome).

1.3.1 Solitons

A palavra "soliton"surgiu em 1965 a partir dos trabalhos de Zabuski e Kruskal. Eles observaram uma propriedade notável: o fato de que ondas solitárias da KdV de diferentes amplitudes (e, portanto, de diferentes velocidades), ao se encontrarem, não se destroem e também não se dispersam, como seria de se esperar. Ao contrário, eles constataram que uma passa pela outra sem mudar de forma e com somente uma pequena alteração em suas fases. Esta é uma propriedade importante, porque mostra que a energia pode se propagar em pacotes localizados sem se dispersar. Como a KdV é uma equação não linear, estas soluções são excepcionais e, por isso, decidiram chamá-las de solitons. O sufixo "on" (que em grego significa partícula), ilustra, neste caso, o comportamento tipo partícula dessas ondas.

Este fenômeno não é uma exclusividade da KdV. Além das ondas de águas rasas em um canal, muitos outros solitons podem ser observados na natureza (como a Pororoca no Amazonas), ou produzidos em laboratório. Cita-se aqui algumas áreas nas quais eles ocorrem (em equações diferentes da KdV): na teoria da supercondutividade (equação de Ginzburg-Landau), na física de partículas (equação de Yang-Mills), na física de plasmas e na ótica não linear (equação de Schrödinger não-linear). Esta última, em particular, tem aplicações relevantes nas comunicações por laser via fibras óticas.

1.4 A Importância dos Solitons

Nesta seção, iremos descrever brevemente o problema a ser tratado neste TCC. Nosso principal foco é o estudo da dinâmica das soluções do seguinte problema de Cauchy, associado à equação não-linear de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV), para $p = 2, 3$ e 4, definida por

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \ x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.2}$$

no clássico espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$.

É bem conhecido na literatura que tal problema é bem colocado globalmente nos espaços $H^1(\mathbb{R})$ (ver Seção 4.2), isto é, há existência de solução para todo o tempo, unicidade e continuidade do fluxo, que toma dado inicial em $H^1(\mathbb{R})$ e leva na solução em $C(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R}))$.

Além disso, a equação de gKdV admite uma família de soluções especiais do tipo solitons (Ver Seção 4.4), isto é, soluções regulares da forma $Q_c(x - ct)$, tal que Q_c é uma função real, de modo que $Q_c(s)$ e todas as suas derivadas $Q_c^{(n)}(s)$ tendem para zero quando $s \longrightarrow \pm\infty$. Mais precisamente, tem-se a fórmula explícita para $Q_c = c^{1/(p-1)} Q(\sqrt{c}s)$, onde

$$Q(s)\,(= Q_{c=1}) := \left(\frac{p+1}{2\cosh^2\left(\frac{(p-1)}{2}s\right)} \right)^{1/(p-1)}. \tag{1.3}$$

Apesar de ser uma solução bem particular, os solitons são de fundamental importância para descrever rigorosamente o comportamento de soluções do problema de Cauchy com dados iniciais mais gerais. A seguir, vamos comentar a importância dos solitons em três importantes resultados bem clássicos no ramo das equações diferenciais parciais do tipo dispersivas.

(i) **Estabilidade Orbital de Solitons** (Benjamin [4], Bona [5] e Weinstein [31]): Para todo $\epsilon > 0$, exite $\delta > 0$, tal que se $\|u_0 - Q_c\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \delta$, então para todo $t \in \mathbb{R}$, existe um $\rho(t) \in \mathbb{R}$, tal que a solução $u(x, t)$ do problema de Cauchy (1.2) satisfaz

$$\|u(\cdot, t) - Q_c(\cdot - \rho(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \epsilon.$$

(ii) **Estabilidade Assintótica de Solitons** (Martel e Merle [25]): Seja $c_0 > 0$. Existe $K_0 > 0$ e dado $\beta > 0$, existe $\alpha_0 = \alpha_0(\beta) > 0$ tal que a seguinte afirmação é verdadeira. Seja $u(x, t)$ a solução global $C(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R}))$ de (1.2) satisfazendo $\|u_0 - Q_{c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant \alpha_0$. Então, existe $c^+ > 0$ com $|c^+ - c_0| \leqslant K_0\alpha_0$ e uma função $\rho : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe

C^1 tal que $v(x,t) = u(x,t) - Q_{c^+}(x - \rho(t))$ satisfaz

$$\lim_{t \to +\infty} \|v(t)\|_{H^1(x > \beta t)} = 0,$$

além disso, $\lim_{t \to +\infty} (\mathrm{d}\rho / \mathrm{d}t)(t) = c^+$

(iii) O Método do **espalhamento inverso** foi usado por Eckauss e Schuur [9] para provar o seguinte resultado: qualquer solução suave e com decaimento do problema de Cauchy (1.2) se decompõe em duas partes quando $t \longrightarrow +\infty, u(x,t) = u_d(x,t) + u_c(x,t)$, onde u_d é uma solução do tipo N-soliton e $u_c(x,t) \longrightarrow 0$ uniformemente, para $x > 0$ com $t \longrightarrow \infty$.

Numa linguagem simplificada, a estabilidade orbital descreve a proximidade de uma solução a um soliton, sempre que o dado inicial estiver próximo de tal soliton. Enquanto a estabilidade assintótica, descreve a convergência forte de uma solução para um soliton, em uma porção à direita da semirreta positiva quando $t \to +\infty$. Enfim, o terceiro resultado descrito acima descreve o comportamento de uma solução regular e com decaimento para grandes valores de t. Esses três resultados acima descrevem a importância prática dos solitons, cuja prova de tais resultados exigem um certo aprofundamento matemático. Enfatizamos que o resultado de estabilidade orbital para a equação de KdV foi obtido pela primeira vez por Benjamin [4], em seguida apareceram na literatura diferentes provas de estabilidade associadas à equação de KdV e suas generalizações.

Por fim, neste trabalho, daremos uma prova rigorosa das leis de conservação com respeito a equação não-linear generalizada da gKdV, além disso, encontraremos um solução particular para a mesma. Enfatizamos que o princiapal objetivo desse trabalho, é tratar do assunto em questão da forma mais detalhada possível.

1.5 Objetivo do Trabalho

- Nos capítulo 2, fazemos um estudo de preliminares, como forma de relembrar e aprimorar conhecimentos necessários, para a elaboração deste TCC.

- Nos capítulo 3, abordamos os resultados principais, desse TCC, sobre leis de conservação e a solução particular (Soliton) Q_c da equação não-linear de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV), dada por

$$u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \;\; x, t \in \mathbb{R} \;\; \text{com } p = 2, 3 \text{ e } 4. \tag{1.4}$$

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados básicos de Análise Funcional que serão utilizados no decorrer do trabalho.

2.1 Definição e Propriedades dos Espaços L^p

Definição 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável no sentido de Lebesgue. Seja $1 \leqslant p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das funções p -integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^p dx < \infty\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p},$$

para $p = \infty$, denotaremos o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ é mensurável e } \exists\, C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega\}.$$

Seja $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por q o expoente conjugado de p, isto é, q é o número real

que satisfaz a seguinte equação
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Lema 1. *(Desigualdade de Young). Sejam p e q conjugados, logo para todo número real não-negativo a e b, com $1 \leq p \leq \infty$, então vale que $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, valendo a igualdade se $a^p = b^q$*

Demonstração. Se $ab = 0$, a desigualdade é evidente. Sejam $a, b > 0$, então

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} \\ &= e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} \\ &\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

onde, na penúltima desigualdade, estamos utilizando a convexidade da função exponencial. Se caso tivermos $a^p = b^q$, usando que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, segue que
$$ab = a(b^q)^{1/q} = aa^{p/q} = a^{p/p}a^{p/q} = a^{p(1/p+1/q)} = a^p = a^p \cdot 1 = a^p \cdot \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \quad \square$$

O Lema 1 é de grande importância na demostração dos Lemas 2, dado a seguir, e do **??**, usado na demonstração do teorema principal.

Lema 2. *Considere $p, q \geq 1$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

(i) **Desigualdade de Hölder:** Sejam $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$. Então $fg \in L^1(\mathbb{R})$ e
$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}. \tag{2.1}$$

(ii) **Desigualdade de Minkowski:** Sejam $f, g \in L^p(\mathbb{R})$. Então $f + g \in L^p(\mathbb{R})$ e
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.2}$$

Demonstração. Consultar [7]. $\square$

Proposição 1. *Seja (X, μ) um espaço de medida finito e $p_0 \leq p_1$. Então*
$$L^{p_1}(X) \subset L^{p_0}(X).$$

Além disso, para toda $f \in L^{p_1}(X)$

$$\|f\|_{L^{p_0}} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}},$$

ou seja, a inclusão de $L^{p_1}(X)$ em $L^{p_0}(X)$ é um operador limitado.

Demonstração. Podemos assumir que $p_1 > p_0$. Suponhamos então que $f \in L^{p_1}(X)$ e definamos $F := |f|^{p_0} \in L^{p_1/p_0}(X)$. Seja $p = p_1/p_0 > 1$ e seu expoente conjugado, isto é,

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{p_0}{p_1}, \quad q = \frac{p_1}{p_1 - p_0}.$$

Aplicamos a Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
\int_X F.1dx &\leq \left(\int_X 1dx\right)^{1/q} \left(\int_X F^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \mu(X)^{1-\frac{p_0}{P_1}} \left(\int_X |f|^{p_1} dx\right)^{p_0/p_1} \\
&= \mu(X)^{1-\frac{p_0}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}}^{p_0},
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\int_X F dx = \int_X |f|^{p_0} dx = \|f\|_{L^{p_0}}^{p_0},$$

ou seja,

$$\|f\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq \mu(X)^{1-\frac{p_0}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}}^{p_0}.$$

O resultado segue ao elevarmos ambos os lados dessa desigualdade a $1/p_0$. □

Definição 2. ***(Notação de Multi-índice)*** *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotamos o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuas definidas em Ω por*

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid \textit{contínua em } \Omega\}.$$

Seja n um número natural qualquer. Denota-se por $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ as n-uplas constituídas por números inteiros não negativos. Estas n-uplas são denominadas multi-índices.

Dados o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!, \quad 0! = 1.$$

onde $\alpha_i, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O número $|\alpha|$ acima é chamado ordem do multi-índice α. Se $|\alpha| \geq 1$ e $u \in C(\Omega)$, denotamos por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, ou seja,

$$D^\alpha u = \partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Quando a derivada mista do lado direito acima existe. A fim de facilitar a notação, defini-se $D^\alpha u = u$ quando $|\alpha| = 0$, para toda função u. Por D_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$, representa-se a derivação parcial $\partial/\partial x_i$. Observe que $D^\alpha u$ é uma função definida em Ω que toma valores em $\mathbb{C}$. Quando possui todas as derivadas mistas de ordem k, escrevemos

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : \alpha \text{ é um multi-índice de ordem } k\}.$$

Estabelecendo algum tipo de ordem para as derivadas mistas acima, $D^k u(x)$ pode ser visto como um vetor de $\mathbb{R}^{n^k}$.

Se α, β forem multi-índices, escreve-se $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_i \leq \alpha_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Quando u e v forem funções numéricas suficientemente deriváveis, tem-se a regra de Leibniz dada por

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\left(D^\beta u\right)\left(D^{\alpha-\beta} v\right).$$

Exemplo 1. *Seja $n = 3$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$, temos que*

$$\partial^{(0,3,0)}u = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \quad \partial^{(1,0,1)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \mathrm{x}^{(2,1,5)} = x^2 y z^5.$$

Exemplo 2. *Casos particulares importantes são aqueles em que $k = 1$, quando podemos identificar a derivada com o vetor gradiente*

$$D^1 u(x) \cong \nabla u(x) := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right),$$

bem como o caso $k = 2$, quando identificamos a derivada com a matriz Hessiana

$$D^2 u(x) \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Com relação à derivadas de ordem superior, vamos definir, para $k \in \mathbb{N}$, os seguintes conjuntos

$$C^k(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \begin{array}{c} D^\alpha u \text{ existe e é contínua para todo} \\ \text{multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k \end{array} \right\}$$

e

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C^k(\Omega).$$

escrevemos ainda $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Note que uma função $u \in C(\Omega)$ *pode ser ilimitada. No entanto, se ela for limitada e uniformemente contínua em* Ω, *podemos estendê-la continuamente e de maneira única até o fecho de* Ω. *Desse modo, podemos falar dos valores da função* u *na fronteira do conjunto* Ω. *Definimos, então, para* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *o conjunto*

$$C^k(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\Omega) : \begin{array}{c} D^\alpha u \textit{ é limitada e uniformemente contínua} \\ \textit{para todo multi-índice } \alpha \textit{ tal que } |\alpha| \leq k \end{array} \right\}.$$

Não é difícil mostrar que, com as definições usuais de soma entre funções e multiplicação de uma função por um número real, os conjuntos $C^k(\Omega), C^\infty(\Omega)$ *e* $C^k(\bar{\Omega})$ *são espaços vetoriais.*

Definição 3. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Denota-se por* $L^p_{loc}(\Omega)$ *o espaço das funções localmente integráveis, ou seja,*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \textit{ mensuráveis } \mid f \in L^p(\widetilde{\Omega}) \quad \forall\, \widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega\},$$

onde $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ *significa que existe* K *compacto tal que* $\tilde{\Omega} \subset K \subset \Omega$. *Dizemos então que* $\widetilde{\Omega}$ *está compactamente contido em* Ω.

Proposição 2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto. Para todo* $1 \leq p \leq +\infty$ *vale a inclusão* $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$

Demonstração. Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\|u\|_{L^1(\widetilde{\Omega})} \leq (\mu(\widetilde{\Omega}))^{1/q} \|u\|_p = C\|u\|_p,$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\mu(\widetilde{\Omega}) < \infty$, ou seja, tem medida finita. □

Definição 4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto, o espaço das funções testes, denotado por* $C^\infty_c(\Omega)$, *é o espaço das funções* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *infinitamente diferenciáveis com suporte compacto tal que*

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}},$$

ou seja,

$$C^\infty_c(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ é compacto em } \Omega,\ \text{com } f(x) = 0\, \forall x \notin \text{supp} f\}.$$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Considere o seguinte espaço

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \,|\, f(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Note que, se Ω é ilimitado, por exemplo $\Omega = \mathbb{R}^n$, então as funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ são $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim\limits_{|x|\to\infty} f = 0$.

Exemplo 3. *Seja $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/\left(1 - \|x\|^2\right)\right) & se\ \|x\| < 1, \\ 0 & se\ \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

sendo $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, então ϕ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e supp $\phi = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$.

2.2 Resultados Básicos de Teoria da Medida

A seguir enunciamos resultados clássicos de teoria da medida. Para a prova, consultar [3].

Teorema 3. ***(Teorema da Convergência Dominada)****. Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *q.t.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então

$$f \in L^1(\Omega) \ e \ \int_\Omega f_n d\mu \longrightarrow \int_\Omega f d\mu.$$

Corolário 4. *Se a função $t \longrightarrow f(x,t)$ é contínua em $[a,b]$ para cada $x \in \Omega$, e existe uma função integrável g em Ω tal que $|f(x,t)| \leqslant g(x)$, então a função F definida por*

$$F(t) = \int_\Omega f(x,t) d\mu(x), \tag{2.3}$$

é contínua $\forall t \in [a,b]$.

Corolário 5. *Suponha que para algum $t_0 \in [a,b]$, a função $x \longrightarrow f(x,t_0)$ é integrável em Ω, de modo que $\partial f/\partial t$ existe em $\Omega \times [a,b]$, e também existe uma função integrável g em Ω tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x),$$

então a função F definida em (2.3) é diferenciável em $[a,b]$ e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega f(x,t)d\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

2.3 Espaços de Sobolev

O primeiro passo para a construção do espaço de Sobolev será introduzir um novo conceito que é o de derivada fraca. A fim de motivar esse novo conceito, considere $u \in C^k(\Omega)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, uma função teste. O Teorema da Divergência nos permite então integrar por partes para obter:

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i}dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x)\eta^i \mathrm{dS}_x dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi dx \quad (i = 1, ..., n),$$

em que usamos, na última igualdade, o fato de que $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$. De uma maneira mais geral, se α é um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, podemos escrever

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \varphi D^\alpha u dx.$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade acima faz sentido, mesmo que u não seja regular. De fato, basta supor que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, pois, nesse caso, se denotarmos por $K_\varphi \subset\subset \Omega$ o suporte da função φ, temos que

$$\left|\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx\right| \leq \int_{K_\varphi} |u(x)|\,|D^\alpha\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|D^\alpha\varphi\|_\infty \int_{K_\varphi} |u(x)|\mathrm{d}x < \infty.$$

As considerações acima motivam a seguinte definição.

Definição 5. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se este for o caso, denotamos $v = D^\alpha u$

Essencialmente, a definição acima diz que a derivada fraca de uma função é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes. O lema abaixo estabelece, em um certo sentido, a unicidade da derivada fraca.

Exemplo 4. *Seja* $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$ *e*

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Observe que $u \in L^1_{loc}(0,2)$ *e que não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe a derivada (clássica) no ponto* $x = 1$.

Vamos mostrar que u *possui como derivada fraca a função* v *dada por*

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

com $u'(x) = v(x)$.

De fato, claramente temos que $v \in L^1_{loc}(0,2)$. *Além disso, dada* $\varphi \in C_c^\infty((0,2))$, *temos*

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 \varphi'(x)\mathrm{d}x \\ &= x\varphi(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x + (\varphi(2) - \varphi(1)) \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x - \varphi(1) \\ &= -\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_\Omega v\varphi. \end{aligned}$$

Exemplo 5. *Seja* $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$ *e*

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leqslant 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

analogamente ao caso anterior, segue que $u \in L^1_{1\text{oc}}(0,2)$, *mas* u *não possui uma derivada fraca. De fato, suponha por absurdo que exista uma função* $v \in L^1_{1\text{oc}}(0,2)$ *satisfazendo*

$$\int_0^2 u\varphi' dx = -\int_0^2 v\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(0,2)$. *Então*

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\varphi = \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi' &= \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi + 0 - 2\varphi(1) \\ &= -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi + \int_0^2 v\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty((0,2))$. *Escolhendo uma sequência de funções-teste* $(\varphi_m) \subset C_0^\infty((0,2))$ *satisfazendo* $\varphi_m(1) = 1$, $0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1$ *e* $\varphi_m(x) \to 0$ *para todo* $x \neq 1$, *obtemos através do teorema da convergência dominada de Lebesgue que*

$$1 = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to\infty} \left[-\int_0^1 \varphi_m + \int_0^2 v\varphi_m \right] = 0,$$

o que é uma contradição.

Proposição 3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ *q.t.p. em* Ω.

Demonstração. Consultar [7]. □

Lema 6. *A* α*-ésima derivada fraca de uma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Demonstração. Suponha que $v, \tilde{v}$ são α-ésimas derivas fracas de u. Então

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi = \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v}\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

portanto

$$\int_\Omega (v - \tilde{v})\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Segue então de (3) que $v - \tilde{v} = 0$ q.t.p. em Ω. Logo $v = \tilde{v}$ q.t.p. em Ω. □

Lembrando que a notação usada acima, não é de derivada no sentido clássico, ou seja, quando escrevermos $D^\alpha u$ anteriormente, estamos nos referindo à α-ésima derivada no sentido fraco.

Definição 6. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \le p \le \infty$ *e* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Definimos o espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \le k\}.$$

Observe que se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}(\Omega)$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$. Nunca é demais lembrar que, na definição acima, $D^\alpha u$ denota a derivada no sentido fraco. Finalmente, como $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, estamos assumindo que todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a k existem. Uma outra observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega),$$

quando $p = 2$, denotamos $W^{k,p}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$, isto é, $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Em particular se $k = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n. \right\}.$$

Definição 7. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, nós definimos sua norma como*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u| & (p = \infty), \end{cases}$$

ou de modo equivalente

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & (p = \infty). \end{cases}$$

Definição 8. *Para o espaço $W^{k,p}(\Omega)$, temos as seguintes definições :*

(i) Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty, u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que u_m converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, escrevendo $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$ quando $\lim_{x \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$;

(ii) dizemos que $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, quando $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(V)$ para cada $V \subset\subset \Omega$.

Definição 9. *Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Portanto $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$. Interpretamos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tal que*

$$D^\alpha u = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad \forall\, |\alpha| \leq k - 1.$$

Teorema 7. *Dado o espaço $W^{k,p}(\Omega)$, temos que:*

(i) O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{k,p}$ é um espaço de Banach;

(ii) O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$;

(iii) $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

Demonstração. Consultar [7]. □

2.4 O Espaço de Schwartz

Definição 10. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (reais ou complexos). Uma seminorma num espaço vetorial V é uma função $p : V \longrightarrow [0, +\infty)$ tal que*

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in V$;

2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$;

3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in V$.

Também é claro da definição que $p(\mathbf{0}) = p(0 \cdot \mathbf{0}) = 0.p(\mathbf{0}) = 0$, para uma seminorma p, ser uma norma falta $p(v) = 0 \Longrightarrow v = 0$

Definição 11. *O espaço de Schwartz ou das funções rapidamente decrescentes, que denotaremos por $S(\mathbb{R}^n)$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty,$$

para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

A definição acima diz que uma função está neste espaço se ela for suave e, além disso, a função e todas as suas derivadas decaem mais rápido que o inverso de qualquer polinômio, quando $|x| \to \infty$.

O conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, além disso, fixado um par α e β, temos que $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ definido acima é uma seminorma. A topologia em $S(\mathbb{R}^n)$ é dada pela família de seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$, onde $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}_+)^{2n}$.

Exemplo 6. *Um exemplo de função pertencente ao espaço de Schwartz para o caso unidimensional é $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}$.*

Temos que $\|f\|_{\alpha,\beta}$ são seminormas no espaço de Schwartz. Note que não são normas, pois $\exists f \neq 0$, com $x^{\beta}\partial^{\alpha} f = 0$. De fato, basta tomar, $f(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$ com $g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_j \neq 0$

Agora seja $d : S(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f-g)}{1+\rho_{\alpha,\beta}(f-g)}, \quad f, g \in S(\mathbb{R}^n),$$

defina

$$P(f) := \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f)}{1+\rho_{\alpha,\beta}(f)}.$$

Vemos que P é uma norma. De fato, é claro que a soma de seminormas é seminorma. Logo, P é seminorma. Agora, se $P(f) = 0$, então $f = 0$, pois

$$P(f) := \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f)}{1+\rho_{\alpha,\beta}(f)} \geq \|f\|_{(0,\cdots,0)(0,\cdots,0)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{(0,\cdots,0)}\partial^{(0,\cdots,0)} f| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f|.$$

Logo, P é uma norma, mas como toda norma define uma métrica, portanto P é uma métrica em $S(\mathbb{R}^n)$, onde $P := d$.

Definição 12. *Dizemos que uma sequência $(\varphi_j) \subset S(\mathbb{R}^n)$ converge para a função $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ se para todo $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$, tivermos*

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_j - \varphi) \longrightarrow 0, \text{ quando } j \longrightarrow \infty. \tag{2.4}$$

Teorema 8. *Seja $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Então $f \in S(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

$$\lim_{|x| \to \infty} x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{2.5}$$

Demonstração. Seja $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\left(1+|x|^2\right) x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)\right| \leq \left|x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|x^{\tilde{\alpha}_j}\partial^{\beta} f(x)\right| \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\widetilde{\alpha}_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 2+\alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$. Consequentemente, temos

$$\left|x^{\alpha}\partial^{\beta} f(x)\right| \leq \frac{C}{1+|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

seguindo, daí (2.5). Por outro lado, se $f \in \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz a condição (2.5), então dados

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $M > 0$ tal que $\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| \leq 1$ para $|x| > M$. Além disso, sendo a função $g(x) = x^\alpha \partial^\beta f(x)$ contínua na bola $B(0, M)$, existe $C > 0$ tal que $\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| \leq C$ para $|x| \leq M$, logo

$$p_{\alpha,\beta}(f) \leq \max\{1, C\}.$$

$\square$

Teorema 9. *O espaço $S(\mathbb{R}^n)$ é completo com a métrica d.*

Demonstração. Consultar [8]. $\square$

Proposição 4. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\forall \alpha$ multi-índice,*

$$\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. $\forall \beta, \alpha'$ multi-índices,

$$x^\beta \partial^{\alpha'} \partial^\alpha f = x^\beta \partial^{\alpha+\alpha'} f.$$

mas, $x^\beta \partial^{\alpha+\alpha'} f$ é limitada, já que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, portanto temos que

$$\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Proposição 5. *Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então para todo multi-índice α e todo polinômio $p(x)$, tem-se $p(x)\partial^\alpha f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com supp $(p(x)\partial^\alpha f) \subseteq$ supp f. Além disso, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Sejam $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, supp $f = K$ e G o complementar de K. Logo, $f|_G \equiv 0$. Como $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então K é compacto em $\mathbb{R}^n$, mas isto implica que K é fechado, logo G é aberto. Além disso, a derivada é algo local. Assim tomando $x \in G$ como G é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset G$, assim tomando $|h| < \epsilon$, teremos que $x + h \in B(x, \epsilon)$, então pela definição de derivada temos que

$$\partial^\alpha f|_G \equiv 0. \tag{2.6}$$

Para todo polinômio $p(x)$ temos

$$p(x)\partial^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Logo, se $p(x)\left(\partial^{\alpha} f\right)(x) \neq 0$, então, por (2.6) $x \in K$. Assim o $supp\left(p(x)\partial^{\alpha} f\right) \subseteq K$ é compacto (já que o suporte de uma função é fechado). Portanto $p(x)\partial^{\alpha} f$ é limitada, ou seja, $\|p(x)\partial^{\alpha} f|_{K}\|_{\alpha,\beta} < \infty$, logo $f \in S\left(\mathbb{R}^{n}\right)$. □

Lema 10. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Se $s > n/2$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{1}{\left(1+|x|^{2}\right)^{s}} dx < \infty,$$

ou seja, $\left[\left(1+|x|^{2}\right)^{\frac{s}{2}}\right]^{-1} \in L^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

Demonstração. Introduzindo coordenadas polares, temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{1}{\left(1+|x|^{2}\right)^{s}} dx = \int_{0}^{\infty} \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{\left(1+|x|^{2}\right)^{s}} dS dr.$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $x = ry$, segue que

$$\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{\left(1+|x|^{2}\right)^{s}} dS = \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1}}{\left(1+|ry|^{2}\right)^{s}} dS(y) = \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{2}\right)^{s}} dS(y),$$

onde $y \in S^{n-1} = \partial B(0,1)$. Assim temos que

$$\int_{0}^{\infty} \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{\left(1+|x|^{2}\right)^{s}} dS dr = \omega_{n} \int_{0}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{2}\right)^{s}} dr,$$

onde ω_{n}, é a área de S^{n-1}. A última integral acima no intervalo $[0,1]$ é finita, pois o integrando é o quociente de dois polinômios em que o denominador não se anula, ou seja, a integral de uma função contínua e limitada. Por fim, a estimativa a seguir conclui o lema

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^{2}\right)^{s}} dr \leq \int_{1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{2s}} dr &= \int_{1}^{\infty} r^{n-1-2s} dr \\
&= \left[\frac{r^{n-2s}}{n-2s}\right]_{1}^{\infty} = \frac{1}{2s-n}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 11. *O conjunto $C_{c}^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ é denso em $L^{p}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Consultar [7] □

Teorema 12. *Seja $p \in [1,\infty)$. Então o espaço de Schwartz $\mathrm{S}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ é denso em $\left(L^{p}\left(\mathbb{R}^{n}\right), \|\cdot\|_{L^{p}}\right)$, ou seja, para todo $f \in L^{p}$, existe uma sequência $\{f_{n}\}_{n=1}^{\infty}$ em $S\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ tal que $f_{n} \xrightarrow{L^{p}} f$.*

Demonstração. Sejam $\varphi \in \mathrm{S}(\mathbb{R}^n)$ e $r > n/2$, então

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^r |\varphi(x)|^p \frac{1}{(1+|x|^2)^r} dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^r |\varphi(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^r} dx < \infty.\end{aligned}$$

Isto implica que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, usando o teorema (11), observamos que

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \overline{\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p}\right)} \subset \overline{\left(S(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p}\right)} \subset \overline{L^p(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n),$$

logo $\overline{\left(S(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p}\right)} = L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 13. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f_k \xrightarrow{S} f$. Então $f_k \xrightarrow{L^p} f$*

Demonstração. Consultar [14] □

2.5 Transformada de Fourier

2.5.1 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definição 13. *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f como a função $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}$ dada por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\xi \cdot x = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

A transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ está bem definida, pois

$$\left|f(x)e^{-i\xi\cdot x}\right| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 14. *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que:*

(1) $f \longmapsto \hat{f}$ *define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja,*

$$\widehat{af+g} = a\hat{f} + \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

(2) $\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1}$ *e $\hat{f}$ é contínua.*

Demonstração. Da definição de $\hat{f}$, temos que

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)e^{-i\xi\cdot x}\right|dx\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|dx\\ &= (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1} < \infty.\end{aligned}$$

Logo

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1}.$$

Consequentemente, $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A linearidade de $f \longmapsto \hat{f}$ decorre diretamente da definição da integral, ou seja, como a integral é linear, então $f \longmapsto \hat{f}$ define uma transformação linear.

Agora considere uma sequência (ξ_k) em $\mathbb{R}^n$, convergindo para $\xi \in \mathbb{R}^n$. Como, para cada natural k, temos que:

$$\left|f(x)e^{-ix.\xi_k}\right| = |f(x)| \text{ e } f(x)e^{-ix\cdot\xi_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)e^{-ix\cdot\xi}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

O Teorema 3 (Convergência Dominada) nos fornece

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\hat{f}(\xi_k) &= (2\pi)^{-n/2}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-ix\cdot\xi_k}dx\\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty}f(x)e^{-ix\cdot\xi_k}dx\\ &= \hat{f}(\xi),\end{aligned}$$

portanto $\hat{f}$ é contínua. Com isto, ficam provadas as propriedades (1) e (2). □

Lema 15. ***(Riemann-Lebesgue)*** *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi) = 0.$$

Demonstração. Consultar [14]. □

2.5.2 Transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^n)$

Na subseção anterior, vimos que é possível desenvolver a teoria da transformada de Fourier tomando funções $L^1(\mathbb{R}^n)$. Todavia, é extremamente conveniente introduzir um espaço de funções "muito bem comportadas" para estudar a aplicação $f \longmapsto \hat{f}$. Esse espaço é o espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ que definimos anteriormente.

Definição 14. *A transformada de Fourier de uma função $f \in S(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\hat{f}$ é dada por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\xi\cdot x} f(x)dx. \tag{2.7}$$

Teorema 16. *A transformada de Fourier define uma bijeção linear de $S(\mathbb{R}^n)$ em $S(\mathbb{R}^n)$ e sua inversa é dada por*

$$\left(\mathcal{F}^{-1}f\right)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} f(\xi)d\xi.$$

Demonstração. Consultar [17]. □

A próxima proposição resume as principais propriedades da Transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 6. *Sejam f e g em $S(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{C}$, α um multi-índice, então valem*

1. $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$,
2. $\hat{f}^{\vee} = f = \check{f}^{\wedge}$,
3. $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq C_0\|f\|_{L^1}$,
4. $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$,
5. $\widehat{bf} = b\hat{f}$,
6. $\hat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}}(-\xi)$,
7. $\widehat{(\partial^\alpha f)} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$,
8. $(\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}$,
9. $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$,
10. $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Demonstração. Consultar [14]. □

Teorema 17. ***(Identidade de Plancherel)*** *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2}.$$

Demonstração. Consultar [14]. □

2.6 Distribuições Temperadas

Definição 15. *Uma aplicação* $T : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma distribuição temperada se*

1. T é linear;
2. T é contínua, isto é, se $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$, então $T(\varphi_m) \longrightarrow T(\varphi)$ em $\mathbb{C}$.

Em outras palavras, T é uma distribuição temperada se T é um funcional linear contínuo. O conjunto de todas as distribuições temperadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ que denotaremos por $S'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, o espaço das distribuições temperadas é o dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$.

Notação: Utilizamos o símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar a ação de um elemento $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ em $S(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \quad \textit{com} \quad T \in S'(\mathbb{R}^n) \quad \textit{e} \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{2.8}$$

No que segue, precisaremos de uma noção de convergência no espaço $S'(\mathbb{R}^n)$. Isto motiva a seguinte definição

Definição 16. *Dizemos que uma sequência* $(T_j) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ *converge a* $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ *se, e somente se*

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Neste caso, denotaremos $T_j \xrightarrow{S'} T$.

Agora vamos relacionar as distribuições temperadas com funções usuais. Um resultado simples, nesta direção, é descrito na proposição a seguir.

Proposição 7. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *para* $1 \leq p \leq \infty$, *então* f *define uma distribuição temperada pela seguinte fórmula*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. A linearidade de T_f decorre imediatamente da linearidade da integral. Para mostrar a continuidade de T_f, basta tomar uma sequência $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ que converge a φ em $S(\mathbb{R}^n)$ e mostrar que $T_f(\varphi_m)$ converge a $T_f(\varphi)$ em $\mathbb{C}$. Então, tomando q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\varphi\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^q}, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Daí, temos que

$$|T_f(\varphi_j) - T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_j - \varphi\|_{L^q}.$$

Portanto, pelo Lema (13) se $\{\varphi_j\}$, é uma sequência em Schwartz tal que $\varphi_j \xrightarrow{S} (\varphi)$, então

$$T_f(\varphi_j) \longrightarrow T_f(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{C}.$$

$\square$

2.7 Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$

Nesta seção, nos concentramos no estudo dos espaços $W^{k,2}(\Omega)$, com $k \in \mathbb{N}$, onde $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$, um fato importante é que podemos usar a transformada de Fourier para expressar uma norma no espaço $W^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$ equivalente a norma padrão. De fato, dado $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, pela Proposição 6, temos que a transformada de Fourier da derivada $\partial^\alpha u(x)$ é dada por $\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)$, pela identidade de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u|^2 \, dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\widehat{\partial^\alpha u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \left\|i^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{u}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha|^2 \, |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \, |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Por outro lado, existem constantes reais positivas c_1 e c_2 $(c_1 \leq c_2)$, tais que

$$c_1 \left(1 + |\xi|^2\right)^k \leq \sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq c_2 \left(1 + |\xi|^2\right)^k.$$

Então, temos

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \|u\|^2_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Portanto, a norma $\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$ é equivalente a norma padrão em $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, vamos definir o espaço H^s com esta norma, mas vamos considerar um s arbitrário (não somente $s \in \mathbb{N}$).

Definição 17. *Sendo $s \in \mathbb{R}$, temos um subconjunto de $S'(\mathbb{R})$, chamado um espaço de Sobolev, dado por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}, \ s \in \mathbb{R}.$$

A norma em $H^s(\mathbb{R})$ é dada a partir do produto interno que definimos a seguir

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

Teorema 18. *Sejam $s, k \in \mathbb{R}$ com $k > 0$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Então $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ tal que $|\alpha| \leq k$. Pela proposição 3, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-k} |\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-k} |i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-k} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{s-k+|\alpha|} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 19. *(Imersão de Sobolev). Se $s > n/2$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_\infty(\mathbb{R}^n)$ e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\xi^2\right)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{H^s},$$

aqui, $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ é a coleção das funções contínuas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tais que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Em geral, temos que se $s > k + n/2$, onde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é imerso continuamente em $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções $C^k(\mathbb{R}^n)$, tais que

$$\lim_{|x|\to\infty} \partial^\alpha f(x) = 0, \quad \forall |\alpha| \leq k$$

munido da norma

$$\|f\|_{\infty,k} := \max_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}.$$

Além disso, vale

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C_s \|f\|_{H^s}.$$

Demonstração. Dado $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, pelo Lema 10, juntamente com o Lema 2 (Desigualdade de Hölder), segue que

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\xi^2\right)^{-s/2} \left(1+\xi^2\right)^{s/2} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\xi^2\right)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\xi^2\right)^{s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\leq \|f\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\xi^2\right)^{-s} d\xi \right)^{1/2} < \infty,
\end{aligned}$$

Agora usando o item (2) da Proposição 6, juntamente com a formula da transformada inversa, segue que

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |(\hat{f})^{\vee}(x)| \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\xi) e^{i(x\cdot\xi)} \right| d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}(\xi)\|_{L^1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty} = \|(\hat{f})^{\vee}\|_{L^\infty} &\leq (2\pi)^{-n/2} \|(\hat{f})\|_{L^1} \\
&\leq (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\xi^2\right)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Por um cálculo análogo ao Teorema 15, juntamente com o Teorema 3, temos a inclusão contínua de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Agora se $k > 0$, considere $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > n/2 + k$, para certo $k \in \mathbb{N}$. Do teorema 18 tem-se que $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R})$, para todo multi-índice α satisfazendo $|\alpha| \leq k$. Como $s-k > n/2$, temos pelo caso $k = 0$, que $\partial^\alpha f \in C_\infty(\mathbb{R}^n), \forall |\alpha| \leq k$. Daí $f \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ e temos a inclusão contínua desejada. $\square$

Capítulo 3

Resultados Principais

3.1 A Equação de KdV Generalizada

Neste capítulo, trabalhamos com a equação de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV) dada por

$$u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função de valor real, e $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. O caso $p = 2$ é a famosa equação de Korteweg-de Vries (KdV). O estudo da equação acima é bem técnico, exigindo muitas ferramentas da Análise Harmônica, ver por exemplo, o livro de (Linares e Ponce [24]), quando considerarmos o problema de Cauchy, dado por

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \ x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}, \tag{3.2}$$

onde u_0 é uma função em um certo espaço de Banach.

3.2 O Princípio de Duhamel

Nesta seção, vamos obter uma representação integral de (3.2), para $p = 2, 3$ e 4. Aplicando a transformada de Fourier com respeito a variavel x para $u(x,t) \in S'(\mathbb{R})$ no sistema (3.2), obtemos

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(\xi,t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) + p\widehat{u^{p-1}\partial_x u}(\xi,t) = 0, \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{3.3}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.3) pelo fator integrante $e^{(i\xi)^3 t}$, obtemos

$$\widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} + e^{(i\xi)^3 t} \widehat{f}(t) = 0, \tag{3.4}$$

onde $f(x,t) = pu(x,t)^{p-1}\partial_x u(x,t)$. Observando que

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}\right) = \widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}, \tag{3.5}$$

de (3.4) e (3.5), obtemos a relação

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}\right) = -\widehat{f}(t) e^{(i\xi)^3 t}.$$

Integrando de 0 até t, temos a seguinte igualdade

$$e^{(i\xi)^3 t} \widehat{u}(t) = \widehat{u}_0 - \int_0^t \widehat{f}\left(t'\right) e^{(i\xi)^3 t'} dt',$$

ou ainda,

$$\widehat{u}(t) = \widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t} - e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}\left(t'\right) e^{(i\xi)^3 t'} dt'.$$

Portanto, aplicando a transformação inversa, obtemos a equação

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t}\right)^\vee - \left(e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}\left(t'\right) e^{(i\xi)^3 t'} dt'\right)^\vee \\ &= \left(\widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t}\right)^\vee - \int_0^t \left(e^{i\xi^3 (t'-t)} \hat{f}\left(t'\right)\right)^\vee dt', \end{aligned}$$

por outro lado tomando $S(t)u_0 = \left(e^{-(i\xi)^3 t}\widehat{u}_0\right)^\vee$, logo

$$\left(e^{i\xi^3 (t'-t)} \widehat{f}\left(t'\right)\right)^\vee = S\left(t'-t\right) f\left(t'\right) = S\left(t'-t\right)\left(pu^{p-1}u_x\right)\left(t'\right),$$

então temos a identidade

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S\left(t'-t\right)\left(pu^{p-1}\partial_x u\right)\left(t'\right) dt', \tag{3.6}$$

ou seja,

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S\left(t-t'\right)\left(\partial_x u^p\right)\left(t'\right) dt'. \tag{3.7}$$

Isto é, se u satisfaz o sistema (3.2), então u satisfaz a equação integral (3.7), a qual recebe o nome de fórmula de Duhamel.

3.3 Boa Colocação

Nesta seção, definimos o conceito de boa colocação. Para isso, considere a seguinte definição

Definição 18. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Observe que dizer que a imersão de X em Y é contínua é equivalente a dizer que a aplicação identidade $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x, x \in X$, é contínua.

Agora, retornemos ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.8}$$

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço reflexivo de Banach que suporemos ser imerso continuamente no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Suponhamos também que exista outro espaço reflexivo de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ que é imerso continuamente em X. Supondo que o problema (3.8) tem solução e que esta é única, podemos definir uma função que, a cada condição inicial u_0 em um espaço Y, associa uma única solução u em um espaço X. Essa função é chamada de fluxo e está bem definida pela existência e unicidade de solução.

A seguir, damos a noção de boa colocação usada neste trabalho.

Definição 19. *(Boa Colocação) Dizemos que o problema de Cauchy* (3.8) *é localmente bem posto* (*l.w.p.*) *em Y se valem as seguintes condições:*

(1) Para cada $u_0 \in Y$ existe um T e uma única solução u de (3.8) *tal que $u \in C([-T,T];Y)$ e $u(0) = u_0$;*

(2) O fluxo é contínuo, ou seja, a aplicação

$$u_0 \in Y \longmapsto u \in C\left([-T,T]\,;Y\right),$$

é contínua. Aqui u é a solução de (3.8) *associada do dado inicial u_0. Em outras palavras, a solução depende continuamente do dado inicial. Dizemos que o problema inicial avaliado*

(3.8) *está globalmente bem colocado (g.w.p.) em* Y *se pudermos escolher* T *na parte (1) da definição acima, como qualquer número real.*

O espaço X, usado na definição acima, é o clássico espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ que satisfaz a inclusão $H^r(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ para $r \leq s$. Para estabelecer um resultado de boa colocação para a equação (3.1), o método geralmente usado é baseado na resolução da equação integral correspondente associado a (3.1), a saber, a fórmula de Duhamel.

3.4 Teorema de Existência e Unicidade

A seguir enunciaremos um teorema de existência e unicidade, que usaremos na demonstração das leis de conservação.

Teorema 20. *Seja* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, *para* $s \geq 1$ *com* $p = 2, 3$ *ou* 4, *então existe um único* $u \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$ *solução de (3.2) no sentido de Duhamel:*

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\left[(u^p)_x(s)\right] ds, \quad S(t)u_0 = \left(e^{i\xi^3 t}\widehat{u}_0\right)^{\vee},$$

Além disso, temos que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}\right).$$

Demonstração. Consultar [18] e [2]. □

3.5 Leis de Conservação

Nesta seção, obtemos leis de conservação que são essenciais na prova do resultado de estabilidade orbital. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição 8. *Seja* $u(x,t)$ *uma solução do problema de Cauchy (3.2), com dado inicial* $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, *dada pelo Teorema 20.*

(a) A massa é preservada, isto é,

$$M[u](t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,0)dx = M[u_0],$$

(b) A energia é conservada, ou seja:

$$E[u](t) := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x,t)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x,t)}{p+1} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x,0)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x,0)}{p+1} \right) dx = E\left[u_0\right].$$

Demonstração. Seja $u(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma solução global para a equação (3.1) com decaimento, ou seja $\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} u^{(n)}(x,t) = 0$.

(a) Multiplicando a equação (3.1) por u obtemos

$$uu_t + uu_{xxx} + pu^p u_x = uu_t + [(u_x u_{xx} + uu_{xxx}) - u_x u_{xx} + pu^p u_x] = 0,$$

que podemos reescrever na forma

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \partial_x \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right) = 0,$$

ou

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\partial_x \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right).$$

Integrando sobre a reta e lembrando que $u(x) \longrightarrow 0$ (assim como todas as suas derivadas) quando $x \to \pm\infty$. Usando a regra de Leibniz para derivar sob o sinal de integração, podemos então escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} u^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right) dx \\ &= -\left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right) \Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = A_1,$$

onde A_1 é uma constante, portanto concluímos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x,0) dx.$$

(b) Multiplicando a equação (3.1) por $u_{xx}+u^p$, segue que

$$u_t(u_{xx}+u^p) = -\left(u_{xx}+u^p\right)_x(u_{xx}+u^p).$$

Novamente, integrando sobre a reta e lembrando que $u(x) \longrightarrow 0$ (assim como todas as suas derivadas), quando $x \to \pm\infty$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_t(u_{xx}+u^p)dx &= -\int_{\mathbb{R}}\left(u_{xx}+u^p\right)_x(u_{xx}+u^p)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\partial_x(u_{xx}+u^p)^2dx \\ &= -\frac{1}{2}(u_{xx}+u^p)^2\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando novamente a regra de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} u_tu_{xx}+u_tu^pdx &= \int_{\mathbb{R}} u_tu_{xx}dx + \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx \\ &= u_xu_t\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{\mathbb{R}} u_xu_{tx}dx + \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} u_xu_{tx}dx + \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u_x^2dx + \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx,\end{aligned}$$

mas por (3.9), temos que

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u_x^2dx + \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx = 0,$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u_x^2dx - \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx = 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx\right) = 0,$$

logo

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}dx = A_2,$$

onde A_2 é uma constante. Portanto, temos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,0)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(x,0)dx.$$

Por fim, vamos obter o resultado no caso em que $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$. De fato, temos que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $H^1(\mathbb{R})$, então existe $u_{0_n} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$u_{0_n} \longrightarrow u_0 \in H^1(\mathbb{R}).$$

Mas $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset H^4(\mathbb{R})$, logo pelo Teorema 20, temos que para cada dado inicial $u_{0_n} \in H^4(\mathbb{R})$, existe uma única solução u_n do problema (3.2). Agora, pela imersão de Sobolev, temos que

$$u_n(x,t) \in H^4(\mathbb{R}) \Longrightarrow u_n(x,t) \in C_0^3,$$

para cada t fixo, pois $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_\infty^k(\mathbb{R})$ para $s > k + \frac{1}{2}$, então tomando $k = 3, n = 1$ segue o resultado acima. Portanto, pelos casos anteriores, temos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_n^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_n^2(x,0)dx \quad \text{em } H^4(\mathbb{R}). \tag{3.10}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x u_n^2(x,t)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u_n^{p+1}(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x u_n^2(x,0)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u_n^{p+1}(x,0)dx. \tag{3.11}$$

Por outro $H^4(\mathbb{R})) \subset H^1(\mathbb{R})$, o que implica $u_{0_n} \in H^1(\mathbb{R})$, além disso, sabemos que o fluxo $u_0 \longrightarrow u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ é contínuo, ou seja, a aplicação $\Gamma : H^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ dada por

$$\Gamma(u_0) = u,$$

é contínua, então usando o fato de que $u_{0_n} \longrightarrow u_0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} u_n^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

Portanto, fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (3.10), obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,0)dx,$$

portanto, provamos o caso (a), para $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Já no caso (b), aplicamos a seguinte desigualdade de **Gagliardo-Nirenberg** que diz:

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}), \quad \int |v|^{p+1} dx \leqslant C(p) \left(\int v^2 dx \right)^{(p+3)/4} \left(\int v_x^2 dx \right)^{(p-1)/4}.$$

Finalmente, fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (3.11), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x,t)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x,t)}{p+1} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x,0)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x,0)}{p+1} \right) dx.$$

A prova da desigualdade de **Gagliardo-Nirenberg** pode ser encontrada em [12], com isso concluímos a demonstração da Proposição 8.

□

3.6 Soluções Tipo Soliton

Nesta seção, vamos encontrar uma solução particular, tipo onda solitária (Soliton) Q_c, para a equação generalizada de Korteweg-de Vries (gKdV) (3.1), tal que Q_c é uma função real, de modo que Q_c e todas as suas derivadas $Q_c^{(n)}$ tendem para zero, quando $s \longrightarrow \pm\infty$. Para isso, introduzimos a forma de onda solitária $u(x,t) = Q_c(x - ct - x_0)$, com $c > 0$ (que representa a velocidade da onda) e x_0 (uma constante arbitrária).

Observe que:

1. $u_t = \dfrac{d}{dt} Q_c(x - ct - x_0) = -cQ'_c(x - ct - x_0)$;
2. $u_x = \dfrac{d}{dx} Q_c(x - ct - x_0) = Q'_c(x - ct - x_0)$;
3. $u_{xxx} = \dfrac{d^3}{dx^3} Q_c(x - ct - x_0) = Q'''_c(x - ct - x_0)$.

Fazendo a mudança de variável $s = x - ct - x_0$ e introduzindo esta forma de onda solitária na equação da gKdV(3.1), ficamos com uma equação diferencial ordinária para $Q_c(s)$ da seguinte forma:

$$-cQ'_c + pQ_c^{p-1} Q'_c + Q'''_c = 0.$$

Aplicando a integral em relação a s em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\int -cQ'_c ds + \int pQ_c^{p-1} Q'_c ds + \int Q'''_c ds = \int 0 \, ds,$$

$$-cQ_c + \int (Q_c^p)' ds + Q''_c = -cQ_c + Q_c^p + Q''_c = a.$$

No entanto temos que $Q_c, Q_c^{(n)} \longrightarrow 0$, quando $s \longrightarrow \pm\infty$, isso implica que $a = 0$, assim

$$-cQ_c + Q_c^p + Q_c'' = 0. \tag{3.12}$$

Agora multiplicando $-cQ_c + Q_c^p + Q_c'' = 0$ por Q_c' segue que

$$-cQ_cQ_c' + Q_c^pQ_c' + Q_c''Q_c' = 0.$$

Integrando novamente com relação s, obtemos que:

$$\begin{aligned}\int -cQ_cQ_c'ds + \int Q_c^pQ_c'ds + \int Q_c''Q_c'ds &= -c\int \frac{(Q_c^2)'}{2}ds + \int \frac{(Q_c^{p+1})'}{p+1}ds + \int \frac{[(Q_c')^2]'}{2}ds \\ &= \frac{-cQ_c^2}{2} + \frac{Q_c^{p+1}}{p+1} + \frac{(Q_c')^2}{2} \\ &= b.\end{aligned}$$

Analogamente, pelo mesmo motivo que no caso $a = 0$, temos também que $b = 0$, daí segue que

$$-c(p+1)Q_c^2 + 2Q_c^{p+1} + (p+1)(Q_c')^2 = 0,$$

Colocando o termo Q_c^2 em evidência, obtemos a seguinte equação

$$(p+1)(Q_c')^2 = \left[c(p+1) - 2Q_c^{p-1}\right]Q_c^2. \tag{3.13}$$

Observamos agora que é necessário $\left[c(p+1) - 2Q_c^{p-1}(s)\right] > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Além disso, pela física do problema, podemos supor que $Q_c(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Daí, $0 < Q_c < \left[\frac{1}{2}c(p+1)\right]^{1/(p-1)} \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Segue portanto de (3.13) que

$$\frac{\sqrt{p+1}|Q_c'|}{Q_c\sqrt{c(p+1) - 2Q_c^{p-1}}} = 1. \tag{3.14}$$

Então, tomando $\phi^2 = (p+1)c - 2Q_c^{p-1}$, temos

$$Q_c = \left(\frac{c(p+1) - \phi^2}{2}\right)^{1/p-1} \Longrightarrow Q_c' = \frac{1}{p-1}\left(\frac{c(p+1) - \phi^2}{2}\right)^{2-p/p-1}\left(\frac{-2\phi\phi'}{2}\right).$$

Por (3.14), segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{p+1}|Q_c'|}{Q_c\sqrt{c(p+1)-2Q_c^{p-1}}} &= \frac{\sqrt{p+1}/(p-1)\left(\left(c(p+1)-\phi^2\right)/2\right)^{(2-p)/p-1}(-\phi\phi')}{\left(\left(c(p+1)-\phi^2\right)/2\right)^{1/p-1}\sqrt{c(p+1)-2\left(\left(c(p+1)-\phi^2\right)/2\right)^{(p-1)/p-1}}}\\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left[\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/p-1}\right]^{(-p+2)-1}\frac{-\phi\phi'}{\sqrt{c(p+1)-c(p+1)+\phi^2}}\\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left[\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/p-1}\right]^{-(p-1)}\frac{-\phi\phi'}{\phi}\\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left[\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/p-1}\right]^{-(p-1)}(-\phi')\\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{-1}(-\phi')\\
&= \frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}\frac{(-\phi')}{c(p+1)-\phi^2} = 1.
\end{aligned}
$$

Agora, usando frações parciais, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}\frac{(-\phi')}{c(p+1)-\phi^2} &= \frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}\frac{(-\phi')}{(\sqrt{c(p+1)}-\phi)(\sqrt{c(p+1)}+\phi)}\\
&= \frac{A}{(\sqrt{c(p+1)}-\phi)}+\frac{B}{(\sqrt{c(p+1)}+\phi)}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}(-\phi') = (A+B)(\sqrt{c(p+1)})+(A-B)\phi,
$$

então

$$
\begin{cases} A-B=0\\ (A+B)\sqrt{c(p+1)} = \dfrac{2\sqrt{p+1}(-\phi')}{(p-1)}. \end{cases}
$$

Assim,

$$
2A\sqrt{c(p+1)} = \frac{-2\sqrt{p+1}\phi'}{p-1} \Longrightarrow A = \frac{-\phi'}{\sqrt{c}(p-1)},
$$

daí segue que

$$\frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)}-\phi}+\frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)}+\phi}=-\sqrt{c}(p-1).$$

Integrando, obtemos

$$\int\frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)}-\phi}ds+\int\frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)}+\phi}ds=\int-\sqrt{c}(p-1)ds,$$

logo

$$\log(\sqrt{c(p+1)}+\phi)-\log(\sqrt{c(p+1)}-\phi)=-\sqrt{c}(p-1)s+d.$$

Temos então

$$\log\left(\frac{\sqrt{c(p+1)}+\phi}{\sqrt{c(p+1)}-\phi}\right)=-\sqrt{c}(p-1)s+d\Longrightarrow\left(\frac{\sqrt{c(p+1)}+\phi}{\sqrt{c(p+1)}-\phi}\right)=e^{-\sqrt{c}(p-1)s+d},$$

mas isso implica que

$$\phi(s)=\sqrt{c(p+1)}\left(\frac{e^{-\sqrt{c}(p-1)s+d}-1}{e^{-\sqrt{c}(p-1)s+d}+1}\right)=-\sqrt{c(p+1)}\tanh\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s-d}{2}\right).$$

Como

$$Q_c(s)=\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/(p-1)}\quad\text{e }\tanh^2(s)+\operatorname{sech}^2(s)=1,$$

segue que

$$\begin{aligned}
Q_c&=\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/(p-1)}\\
&=\left[\frac{c(p+1)}{2}-\frac{c(p+1)}{2}\tanh^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s-d}{2}\right)\right]^{1/(p-1)}\\
&=\left[\frac{c(p+1)}{2}\left(1-\tanh^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s-d}{2}\right)\right)\right]^{1/(p-1)}\\
&=\left[\frac{c(p+1)}{2}\left(\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s-d}{2}\right)\right)\right]^{1/(p-1)}\\
&=c^{1/(p-1)}\left(\frac{p+1}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s-d}{2}\right)}\right)^{1/(p-1)}.
\end{aligned}$$

Para simplificar a solução adotamos $d = 0$, então

$$Q_c(s) = c^{1/(p-1)} Q(\sqrt{c}s),$$

onde

$$Q(s)(= Q_{c=1}) := \left(\frac{p+1}{2\cosh^2\left(\frac{(p-1)}{2}s\right)} \right)^{1/(p-1)}. \tag{3.15}$$

Encontramos portanto uma solução $Q_c > 0$ da equação de gKdV do tipo onda solitária que satisfaz a EDO não linear.

$$-cQ_c' + pQ_c^{p-1}Q_c' + Q_c''' = 0, \quad \text{com } Q_c \in H^1(\mathbb{R}) \text{ e } Q_c \in S(\mathbb{R})$$

A figura a seguir mostra a evolução no tempo de uma onda unidimensional (Soliton) com velocidade de propagação c.

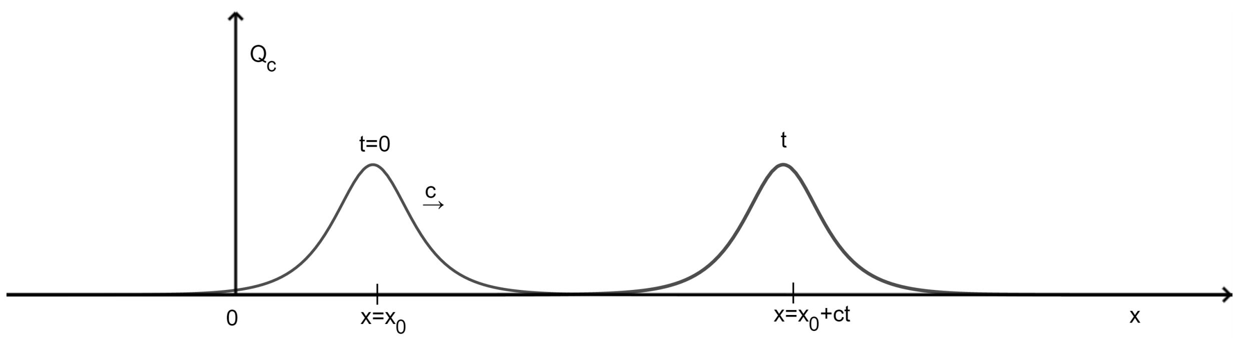

Figura 3.1: Evolução do Soliton

Referências Bibliográficas

[1] Angulo, J. Nonlinear Dispersive Equations: existence and estability of solitary and periodic travelling wave solutions, Providence, AMS, 2009.

[2] Barbosa, I.I. Existência e Estabilidade de Soluções do Tipo Ondas Solitárias para a Equação Korteweg-de Vries (KdV), Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2005.

[3] Bartle, R. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. 1 Ed. Wiley-Interscience; 1995.

[4] Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J. J. Model equations for long waves nonlinear dispersion systems Phil. Trans. R. Soc. 272 47–78, 1972.

[5] Bona, J. L. On the stability theory of solitary waves Proc. R. Soc. A 349 363–74, 1975.

[6] Botelho, G.,Pellegrino, D e Teixeira, E., Fundamentos de Análise Funcional, Segunda edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations (Universitext).Springer, 2010.

[8] Cardoso, D. C. S. O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2005.

[9] Eckhaus, W. and Schuur, P. The emergence of solutions of the Korteweg–de Vries equation from arbitrary initial conditions Math. Methods Appl. Sci. 5 97–116, 1983.

[10] Evans, L.C., Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2010.

[11] Folland, G.B., Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 1999.

[12] Friedman, A. Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[13] Gondar, J., Cipolatti, R., Iniciação à Física Matemática: Modelagem de Processo e Métodos de Solução, IMPA, 2011.

[14] Grafakos, L. Classical Fourier Analysis (Graduate Texts in Mathematics).Springer, 2008.

[15] Hoffman, Kenneth e Kunze, Ray. Álgebra linear. 2 ed Trad. Renate. Watanabe. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

[16] Iório Jr, R.J. e Iório, V.M. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[17] Iório, M.V. EDP, Um curso de graduação. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[18] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle, Comm. Pure Appl. Math. 46, 527-620, 1993.

[19] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1978.

[20] Korteweg, D. J. and De Vries, G. "XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves". The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 39.240, 422-443, 1895

[21] Lima, E.L. Curso de Análise Real, volume I, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, publicações do IMPA, 14 edição, 432 páginas, 2017.

[22] Lima, E.L. Curso de Análise. Volume 2. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[23] Lima, E.L. Espaços Métricos, IMPA, 1977.

[24] Linares, F. and Ponce, G. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Springer, 2009.

[25] Martel, Y. and Merle, F. Asymptotic stability of solitons of the subcritical gKdV equations revisited, Nonlinearity 18 55-80, 2005.

[26] Muñoz, C. (Stability of integrable and nonintegrable structures). Advances in Differential Equations, 19 (9/10), 947–996, 2014.

[27] Reed, M. and Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators. Academic Press. New York, 1978.

[28] Russel, J.S. Report on waves, Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., 1844, pg. 311-390.

[29] Santos, A.S. Estimativas de Strichartz e a Equação Não Linear de Schrödinger em Espaços Euclidianos. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, 2009.

[30] Thayer, J. Operadores Auto-adjuntos e Equações Diferenciais Parciais. SBM, 2007.

[31] Weinstein, M. I. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrodinger equations SIAM J. Math. Anal. 16 472–91, 1985.

[32] Whitham, G.B. Linear and nonlinear waves, Wiley-Interscience, 1974.