

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROFMAT- MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

MAX MANOEL LIMA DE SOUZA

**Os três famosos problemas gregos: uma proposta de introdução à álgebra  
moderna para o Ensino Médio Integrado do IFAL**

Maceió  
2020

MAX MANOEL LIMA DE SOUZA

**Os três famosos problemas gregos: uma proposta de introdução à álgebra moderna para o Ensino Médio Integrado do IFAL**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima.

Maceió  
2020

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S729t Souza, Max Manoel Lima de.  
Os três famosos problemas gregos : uma proposta de introdução à álgebra moderna para o ensino médio integrado do IFAL / Max Manoel Lima de Souza. - 2020.  
48 f. : il.

Orientadora: Juliana Roberta Theodoro de Lima.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 47-48.

1. Método de projeto no ensino. 2. Régua de cálculo. 3. Matemática - Resolução de problemas. 4. Álgebra. I. Título.

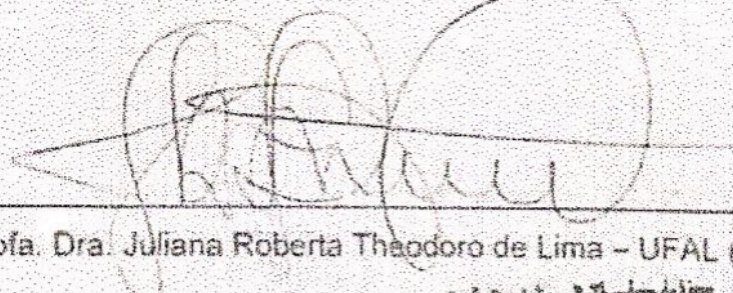
CDU: 372.851.2(813.5)

Folha de Aprovação

MAX MANOEL LIMA DE SOUZA

O Três Famosos Problemas Gregos: Uma Proposta de Introdução à  
Algebra Moderna para o Ensino Médio Integrado do IFAL

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 17 de abril de 2020.

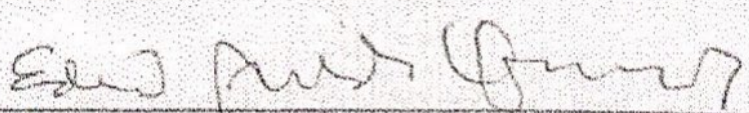


---

Prof. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima – UFAL (Orientadora)

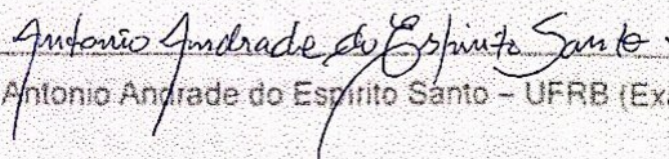
Prof. Dra. Juliana R. Theodoro de Lima  
Instituto de Matemática - UFAL  
SIAPE: 2347015

Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra – UFAL (Examinador Interno)



---

Prof. Dr. Antonio Andrade do Espírito Santo – UFRB (Examinador Externo)

*“Ações valem mais que palavras.”*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família, ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, aos meus colegas e aos professores do curso, especialmente à Professora Juliana Theodoro de Lima, por toda atenção, compreensão e ajuda que me deu para realizar este trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho, vamos apresentar uma proposta de projeto de ensino de álgebra para o Instituto Federal de Alagoas, Campus Murici, que visa a resolução dos três famosos problemas dos gregos a partir dos conteúdos abordados no ensino médio integrado dos cursos de técnico em agroecologia e técnico em agroindústria. Esses problemas consistem sobre a possibilidade de construção de um quadrado de mesma área que um círculo dado, um ângulo com um terço da medida de outro ângulo dado e um cubo com o dobro do volume de um cubo dado, usando apenas uma régua sem marcações e um compasso.

**Palavras chave:** Projeto de ensino. Três famosos problemas dos gregos. Régua sem marcações e compasso.

## ABSTRACT

In this work, we bring a project to algebraic learning at IFAL, Murici campus, which has the resolution of three famous greek problems. It comes from the contents covered in high school, agroecology and agroindustry courses. These mathematical problems consists in searching a possible construction of a square that has the same area as a given circle, a angle which is a third of measure of any given other angle, and finally, a cube which volume is the double of another given cube, only with a scale with no markings and a bow compass required.

**Key words:** Project learning. Three famous greek problems. Scale with no markings and a bow compass.



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Duplicação do cubo . . . . .	14
1.2	Construção mecânica da duplicação do cubo . . . . .	15
1.3	Duplicação do cubo através da geometria analítica . . . . .	15
1.4	Trissecção do ângulo . . . . .	16
1.5	Planificação do cone . . . . .	17
1.6	Espiral de Arquimedes . . . . .	18
3.1	Exemplo 1 . . . . .	26
3.2	Construtibilidade do ponto médio e da reta perpendicular . . . . .	28
3.3	Ponto construtível a partir de pontos colineares . . . . .	28
3.4	Construtibilidade a partir de pontos não colineares . . . . .	30
3.5	Equivalência entre coordenadas construtíveis e pontos construtíveis ( $\Rightarrow$ ) . . . . .	30
3.6	Equivalência entre coordenadas construtíveis e pontos construtíveis ( $\Leftarrow$ ) . . . . .	31
3.7	Propriedades dos números construtíveis . . . . .	33
4.1	Aproximação da trissecção do ângulo . . . . .	38
4.2	Continuação da aproximação da trissecção do ângulo . . . . .	39
4.3	Aproximação para a quadratura do círculo . . . . .	40

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>FUNDAMENTAÇÃO NO ENSINO: O PAPEL DA MATEMÁTICA FORMAL E DAS DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO BÁSICO</b>	<b>11</b>
<b>1 OS TRÊS FAMOSOS PROBLEMAS DOS GREGOS</b>	<b>13</b>
1.1 Duplicação do cubo . . . . .	13
1.2 Trissecção do ângulo . . . . .	16
1.3 Quadratura do círculo . . . . .	17
<b>2 EXTENSÕES RACIONAIS GERADAS POR UMA QUANTIDADE FINITA DE ELE- MENTOS</b>	<b>19</b>
<b>3 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS</b>	<b>25</b>
<b>4 APLICAÇÕES</b>	<b>37</b>
4.1 Duplicação do Cubo . . . . .	37
4.2 Trissecção do ângulo . . . . .	37
4.3 Quadratura do círculo . . . . .	40
<b>Metodologia e ajustes pedagógicos</b>	<b>41</b>
<b>5 METODOLOGIA E AJUSTES PEDAGÓGICOS</b>	<b>42</b>
5.1 Exercícios . . . . .	44
5.2 Considerações finais . . . . .	45
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>45</b>

## INTRODUÇÃO

Os projetos de ensino do Instituto Federal de Alagoas consistem em ações institucionais que visam a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem nos cursos de educação básica, de graduação presencial e de educação à distância, destinando-se exclusivamente aos discentes como público alvo (EDITAL N°11/2018/PROEN/IFAL, para mais informações, vide [1]). Com base nessas argumentações, apresentaremos uma proposta de projeto de ensino que relaciona um problema matemático mais avançado com os assuntos do ensino médio para o campus Murici, local onde o autor dessa dissertação encontra-se lotado.

O intuito deste trabalho é contemplar alunos do 4º ano do Ensino Médio integrado (Os cursos do Ensino Médio integrado são divididos em 4 anos, onde os alunos têm disciplinas do ensino médio juntamente com as disciplinas do ensino técnico ou tecnológico. Os conteúdos de matemática se encerram no 3º ano), com uma maior afinidade e desempenho na disciplina de matemática, e que planejam seguir sua vida acadêmica em áreas comuns com a mesma. Assim, iremos trabalhar com problemas bastante populares: os três famosos problemas dos gregos, que perduraram por milênios para serem resolvidos. Estes problemas envolvem principalmente os conteúdos do 3º ano dos cursos de ensino médio integrado de técnico em agroecologia e técnico em agroindústria, tais como: números complexos, polinômios e equações algébricas. Estes cursos também possuem o componente curricular de desenho, que é trabalhado no 1º ano, e que possui vários temas nos conteúdos programáticos que ajudarão aos alunos entender melhor o desenvolvimento deste projeto, tais como: traçados de paralelas, perpendiculares, divisão de segmento, mediatriz, concordância, divisão de ângulos, bissetriz e divisão de circunferência.

O objetivo deste projeto também é resolver os três famosos problemas dos gregos, cujas soluções perduraram por milênios para serem encontradas. As soluções serão realizadas através de critérios de construtibilidade, que normalmente são vistos em disciplinas de ensino superior e que envolvem a área de álgebra. Porém, aqui serão construídos a partir dos conteúdos citados anteriormente, de maneira didática e de fácil leitura e compreensão. Mais precisamente, mostraremos que é impossível construir um quadrado de mesma área de um círculo dado, um ângulo que é um terço da medida de alguns ângulos dados e um cubo que possui o dobro de volume de um cubo dado, usando apenas régua sem marcações e compasso.

Este projeto será desenvolvido no IFAL através de aulas expositivas, no formato de seminários, apresentados pelo autor deste projeto em conjunto com os alunos escolhidos pelo mesmo, sendo 1 bolsista e 3 colaboradores, mas aberto também a comunidade acadêmica do Campus Murici. Esses seminários terão uma carga horária total de 45 horas, divididas

em 3 horas semanais, e terão também como base de aprendizado todos os capítulos dessa dissertação, como uma construção cuidadosa de todos os seus passos. Serão realizadas 3 avaliações objetivas, divididas entre os seminários, com intuito de observar o grau de aprendizado e de acompanhamento dos participantes acerca dos conteúdos. Os recursos necessários para o andamento do projeto serão basicamente uma sala de aula normal, algumas réguas, alguns compassos e pincel, todos para quadro branco e se possível, o uso do laboratório de informática, para utilizar recursos computacionais de aproximações e construções. Este trabalho aguarda a abertura de edital para projetos de ensino do IFAL para ser realizado. A ideia é, depois de aplicado, submeter os resultados obtidos acerca da inserção de uma formalidade matemática maior nesses cursos, objeto atualmente de bastante discussão de autores especializados em educação matemática em suas pesquisas [13].

Os impactos e resultados esperados ao fim do projeto são diversos. Dentre eles, os participantes poderão experimentar como é parte do estudo dos cursos mais voltados para exatas, em particular da área de matemática, através do rigor científico das demonstrações. Eles também poderão entender um pouco mais da necessidade de estudar alguns conteúdos do ensino médio, através da aplicação dos mesmos na resolução dos problemas dos gregos. O entendimento da natureza também é um fator a ser mudado, pois os participantes entenderão melhor as características e propriedades dos números irracionais, dos números construtíveis e dos números transcendentos, que aparecem em várias grandezas na natureza.

## FUNDAMENTAÇÃO NO ENSINO: O PAPEL DA MATEMÁTICA FORMAL E DAS DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

De acordo com o Sistema de Avaliação na Educação Básica (Saeb), em 2017, cerca de 70% dos estudantes que concluíram o ensino médio no país apresentaram resultados considerados insuficientes em matemática [2, Pág. 45, 62, 106]. A dificuldade dos alunos no ensino médio com relação à matemática é uma realidade que atormenta a educação básica no Brasil há muito tempo. Diante disso, diversas pesquisas e metodologias pedagógicas apresentam tentativas de modificar essa situação, e muitas delas criticam o formalismo matemático excessivo nos conteúdos e demonstrações do ensino médio, apresentando jogos, algoritmos, músicas e outras associações como alternativas para o aprendizado da matemática. Diminuir a matemática formal no ensino básico não é uma solução para o problema, muito pelo contrário, pois as demonstrações e o formalismo matemático possuem um grande papel no desenvolvimento e abstração do jovem. O objetivo utópico seria equilibrar o formalismo matemático junto à ideia de tornar os conteúdos mais atrativos. A falta de formalismo matemático a torna pouco agradável, já que o jovem, ao aprender tais conteúdos, muitas vezes decoram fórmulas e que muitas vezes não tem ideia de suas aplicações.

Segundo Bishop et al (1999):

“ ... a matemática formal e as demonstrações disciplinam o pensamento, no sentido não só da ramificação dos conhecimentos, como também de disciplinar a alma, no controle e na ordem dos indivíduos. A ordem e disciplina são pilares para qualquer sociedade se manter consolidada e é uma das características que o mercado de trabalho espera de qualquer um. A matemática formal tem um importante papel nesse aspecto, exigindo raciocínio lógico, argumentos já demonstrados e evitando tanto o senso comum como a intuição nas investigações e soluções de problemas. ”

O pensamento crítico é outra das características trabalhadas na matemática formal. Ao realizar uma demonstração, o indivíduo indiretamente está questionando a veracidade de um fato e, ao mesmo tempo, investigando e utilizando argumentos científicos para a solução de um problema ou comprovação de uma afirmação. Vamos tomar por exemplo, o aprendizado da tabuada. Muitos alunos são orientados em utilizar a tabuada através de memorizações ou de algoritmos de contagem nos dedos (como para os múltiplos de 9). Isso dificulta o aprendizado mais adiante acerca dos outros conteúdos que necessitam apenas de um conceito básico do produto de números naturais, como as expressões numéricas e potenciações. Por outro lado, para o aluno que aprende a tabuada através da soma de números naturais, é possível aprender os outros conteúdos de uma maneira muito mais suave, transformando os produtos em somas e evitando decorar várias tabelas. Questionar e investigar os algoritmos das séries iniciais é um importante passo para o desenvolvimento

cognitivo dos alunos.

A ênfase na matemática formal e nas demonstrações aparecem também em diversos documentos de parâmetros curriculares nacionais. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

“ ... para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. ”

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

“ ... a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais também dependem da leitura e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc. ”

Como podemos observar, os argumentos e representações matemáticas na solução de um problema são tão importantes quanto a própria solução do mesmo, mostrando o grau da importância da matemática formal e das demonstrações no ensino básico. Não queremos negar aqui de forma alguma outras possibilidades de aprendizado e propostas pedagógicas menos formais. Muito pelo contrário, pois muitas das vezes, maneiras menos formais de abordagem de um conteúdo podem ter impactos positivos no aprendizado de um aluno. O que queremos enfatizar aqui é que é estritamente necessário que essas práticas conduzam mais a frente ao entendimento do formalismo matemático e das demonstrações. Para maiores informações, vide [3], [4] e [13].

## 1 OS TRÊS FAMOSOS PROBLEMAS DOS GREGOS

Alguns problemas dos gregos foram de extrema importância para o desenvolvimento da geometria e da álgebra que conhecemos. Apesar de várias soluções mecânicas terem sido descobertas ao longo do tempo, as mesmas não condiziam com as regras da geometria euclidiana, que utilizava somente régua sem marcações e compasso. Para mais informações, vide [9].

A seguir, iremos abordar um pouco da origem desses problemas, além de algumas soluções propostas pelos gregos.

### 1.1 Duplicação do cubo

Uma das hipóteses da origem do problema da duplicação do cubo foi da história de um poeta sobre a insatisfação do rei da mitologia grega, Minos, com o tamanho do túmulo de seu filho Glauco. Segundo a história, o rei ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado, e erroneamente, acreditou que isso poderia ser feito dobrando as dimensões do túmulo (para mais detalhes, vide [9]).

Os geômetras da época sabiam que essa solução era incorreta, mas não sabiam como dobrar o volume de um sólido, mantendo sua forma. Hipócrates (440 a.C) foi o primeiro a progredir no problema. Ele reduziu a construção do cubo à construção de duas médias de segmentos proporcionais entre dois segmentos de comprimento  $b$  e  $2b$ . Em outras palavras, se conseguirmos construir  $x$  e  $y$  de modo que

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2b},$$

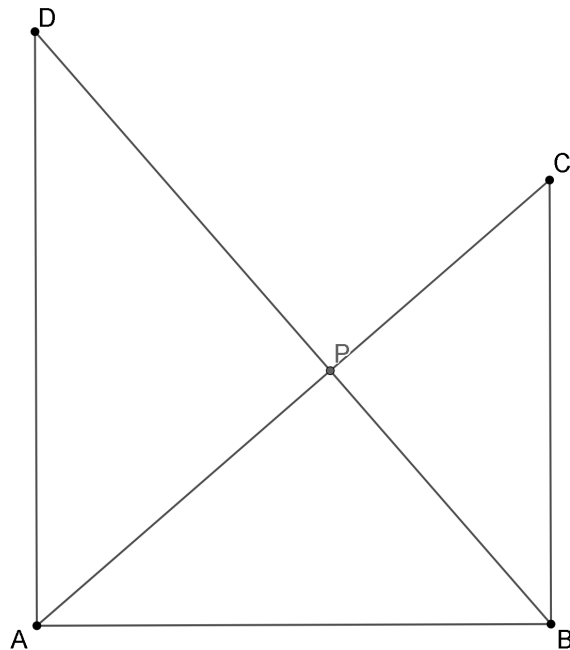
teríamos que  $x^2 = b.y$  e  $y^2 = 2b.x$ . Isolando  $b$  em uma das equações e substituindo na outra restante, temos  $x^3 = 2.b^3$ . Muitas soluções usaram essa redução para resolver o problema.

A seguir, vamos mostrar uma dessas soluções.

Sejam  $A, B, C, D$  vértices de dois triângulos como na Figura 1.1, onde os triângulos  $ABC$  e  $ABD$  são retângulos, com o lado  $AB$  em comum. Seja  $P$  a intersecção de  $\overline{BD}$  com  $\overline{AC}$ , onde  $\widehat{APB} = \frac{\pi}{2}$ . Observe que os triângulos  $APB$ ,  $BPC$  e  $APD$  são semelhantes (a mesma semelhança das relações métricas no triângulo retângulo). Logo:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}.$$

Figura 1.1 – Duplicação do cubo



[9]

Se  $\overline{PD} = 2\overline{PC}$ , então  $\overline{PB}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PC}$  e  $\overline{PA}^2 = 2\overline{PB} \cdot \overline{PC}$ . De forma análoga ao início da seção, temos que  $\overline{PB}^3 = 2\overline{PA}^3$ . Mas será que é possível construir os triângulos da Figura 1.1 com  $\overline{PD} = 2\overline{PC}$ ? Vamos mostrar que a afirmação é verdadeira com o auxílio de um esquadro.

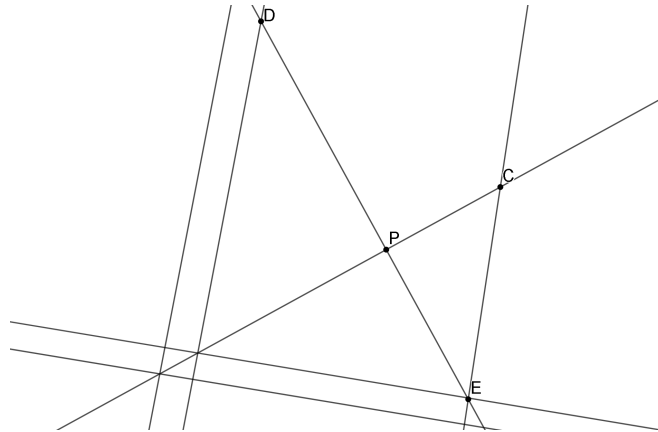
De fato, basta começar traçando as duas retas perpendiculares contendo os segmentos  $\overline{PC}$  e  $\overline{PD}$ , com  $\overline{PD} = 2\overline{PC}$ . Agora, colocamos um esquadro sobre as retas de modo que o esquadro toque em D e o vértice do ângulo do esquadro passe pela reta que contém  $\overline{PC}$ . Por fim, ajustamos o esquadro até que a reta  $r$  que passa por C e é perpendicular à parte inferior do esquadro, também intersecte a reta que contém  $\overline{PD}$  e o esquadro num mesmo ponto  $E$  (Ver Figura 1.2) [9, Cap. 4, pág. 136].

Uma outra solução bastante interessante para o problema da duplicação do cubo é através da geometria analítica. Seja  $a$  a medida da aresta de um cubo. Vamos construir duas parábolas, com retas diretrizes perpendiculares, com mesmo vértice  $O$  na origem, de modo que  $d(O, F_2) = 2d(O, F_1) = 2\frac{a}{4}$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos das parábolas, como na Figura 1.3.

Vamos encontrar a abscissa do ponto  $P$  de intersecção das parábolas, através de suas

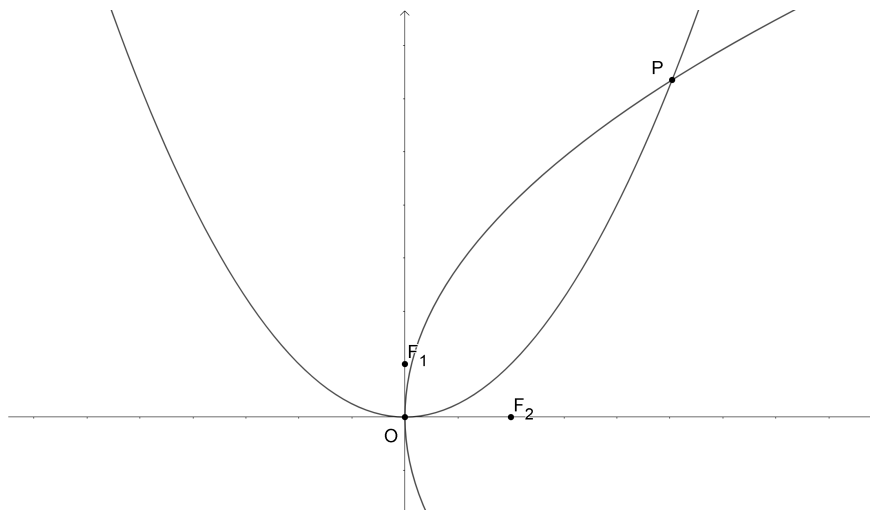


**Figura 1.2** – Construção mecânica da duplicação do cubo



[9]

**Figura 1.3** – Duplicação do cubo através da geometria analítica



Fonte: Autoria própria

equações, que são  $x^2 = ay$  e  $y^2 = 2ax$ : elevando os membros da primeira equação ao quadrado e substituindo a segunda equação na primeira, obtemos:

$$x^4 = 2a^3x \Rightarrow x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2a}$$

Portanto, um cubo com a medida da ordenada de  $P$  teria o dobro do volume de um cubo de medida  $a$ .

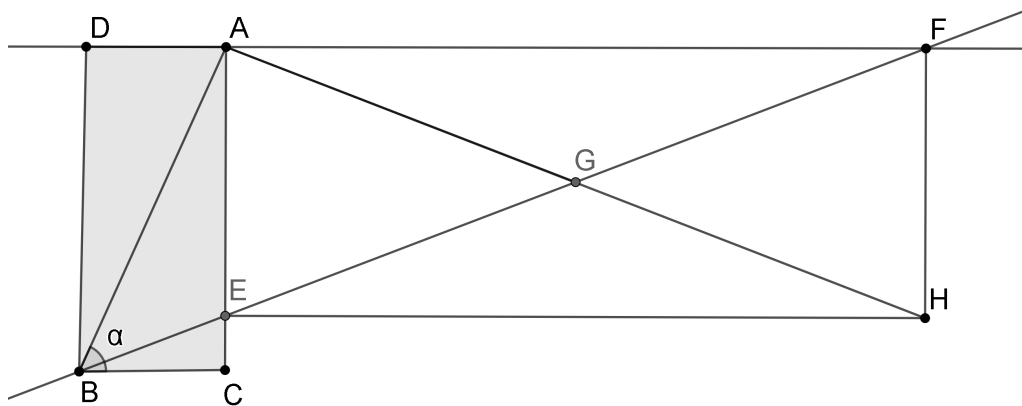
Apesar destas soluções resolverem o problema da duplicação do cubo, elas não podem ser realizadas utilizando apenas régua e compasso. No capítulo 3 provaremos a impos-

sibilidade da construção de duas médias proporcionais com o uso apenas de régua sem marcações e compasso [9, Cap. 4, pág. 151].

## 1.2 Trissecção do ângulo

O problema da trissecção do ângulo se resume a construir, usando régua sem marcações e compasso, um ângulo cuja medida é um terço da medida de um ângulo dado. Os gregos reduziram o problema da seguinte maneira: dado um ângulo  $\alpha$ , podemos construí-lo como o ângulo entre a diagonal e um lado de um retângulo. Seja  $DACB$  esse retângulo,  $\overline{AB}$  a diagonal e  $\overline{BC}$  o lado que forma o ângulo  $\alpha$ . Vamos tomar agora, uma reta  $r$  passando por  $B$ , intersectando  $\overline{AC}$  em um ponto  $E$  e uma reta  $s$  que contém  $\overline{AD}$ , onde  $s$  intersecte  $r$  em um ponto  $F$  tal que  $\overline{EF} = 2\overline{AB}$  (vide Figura 1.4). Diante disso, perguntamos: seria possível a descrição acima?

**Figura 1.4** – Trissecção do ângulo



[9]

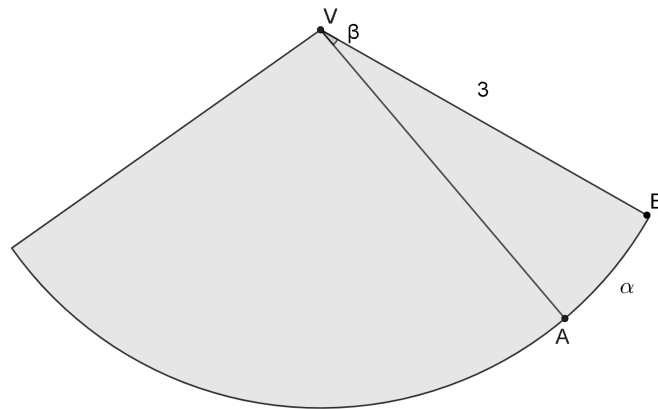
Ao traçarmos o ponto médio  $G$  de  $\overline{EF}$ , temos que  $G$  seria a intersecção de duas diagonais do retângulo  $AEHF$ . Logo,  $\overline{EG} = \overline{GF} = \overline{AG} = \overline{AB}$ ,  $\widehat{ABG} = \widehat{AGB}$  ( $ABG$  é um triângulo isósceles),  $\widehat{AGB} = \widehat{GAF} + \widehat{GFA} = 2\widehat{GFA}$  (Teorema do Ângulo Externo) e  $\widehat{GFA} = \widehat{GBC}$  (ângulos alternos internos). Portanto,  $\widehat{ABG} = 2\widehat{GBC}$ , e assim,  $\widehat{GBC} = \frac{\alpha}{3}$ .

O problema da possibilidade dessa construção ficou conhecido como *problema de neusis*. Uma maneira de realizar essa construção (sem usar somente régua sem marcações e compasso) é marcar em uma régua a medida  $2\overline{AB}$  e ajustar a régua de modo que ela passe por  $B$  e os extremos da marcação feita fiquem sobre o segmento  $\overline{AC}$  e sobre a reta

que contém  $\overline{AD}$  [9, Cap. 4, pág 137].

Uma outra maneira de se trissectar um ângulo é através de um cone reto. Dada a medida  $\alpha$  (em radianos) de um ângulo qualquer, ao marcar o arco  $AB$  de medida também  $\alpha$  na circunferência da base de um cone reto com raio da base igual a 1 e geratriz 3, temos a seguinte planificação do cone:

**Figura 1.5** – Planificação do cone



[9]

Como a planificação do cone é um setor circular, temos:  $\alpha = 3\beta$  e portanto,  $\beta = \frac{\alpha}{3}$  (usamos aqui a relação  $l = \alpha r$ , onde  $l$  é o comprimento do arco de uma circunferência,  $\alpha$  é o ângulo associado ao arco e  $r$  é o raio) [9, Cap. 4, pág. 153].

### 1.3 Quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo consiste em construir um quadrado com mesma área de um círculo dado. Este problema foi estudado há muito tempo e muitas soluções e aproximações foram feitas. Em 1800 a.C. os egípcios tomaram a aproximação de  $\frac{16}{9}$  do raio do círculo para o lado do quadrado, tendo assim a área aproximadamente 3,16 vezes o raio ao quadrado, o que é uma aproximação bastante justa para a época.

Uma solução bastante interessante feita por Arquimedes (c. 225 a.C.) foi utilizar uma espiral. Essa espiral consiste em todos os pontos  $P$  que se movem uniformemente ao longo do raio de uma circunferência de raio  $r$ , e, ao mesmo tempo, o raio esteja girando em torno de seu centro  $O$  a partir do segmento inicial  $\overline{OA}$ , satisfazendo a relação  $\overline{OP} = r\alpha$  (vide

Figura 1.6). Logo,  $\overline{OP}$  tem a mesma medida que o comprimento do arco  $AOB$ , e assim, quando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\overline{OP} = \frac{\pi r}{2}$ . Portanto, a área do círculo é dada por:

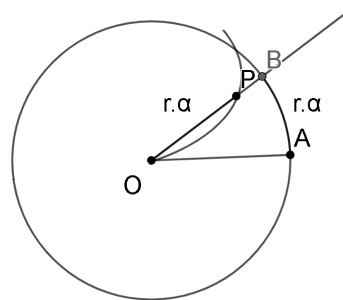
$$A_{\text{círculo}} = \frac{\pi r}{2} 2r = \overline{OP} 2r,$$

e o lado do quadrado que queremos deve satisfazer a equação

$$l^2 = \overline{OP} 2r,$$

quando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**Figura 1.6** – Espiral de Arquimedes



[9]

Apesar de existir uma maneira de construir  $l$  que satisfaz essa equação usando régua sem marcações e compasso, o problema aqui seria construir essa espiral para encontrar  $\overline{OP}$  usando régua e compasso [9, Cap 4, pág. 141].

## 2 EXTENSÕES RACIONAIS GERADAS POR UMA QUANTIDADE FINITA DE ELEMENTOS

Iniciaremos agora, o estudo sobre alguns conjuntos  $L$ , satisfazendo  $\mathbb{Q} \subset L \subset \mathbb{R}$ . A ideia aqui é observar conjuntos que satisfazem propriedades em comum com  $\mathbb{Q}$  e aplicarmos os resultados obtidos nos problemas envolvendo construções com régua sem marcações e compasso. para mais detalhes, vide [7, Cap. 5, pág. 88]

No decorrer deste capítulo, denotaremos por  $K[x]$  o conjunto de todos os polinômios na variável  $x$ , com coeficientes no conjunto  $K$ . Em símbolos:

$$K[x] = \{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; n \geq 0, a_i \in K, i = 1, \dots, n\}.$$

Trataremos  $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$  como um conjunto satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Se  $k_1, k_2 \in K$ , então  $k_1 - k_2, k_1 \cdot k_2 \in K$ ;
2. Se  $k_1 \neq 0$  e  $k_1 \in K$ , então  $\frac{1}{k_1} \in K$ .

Observe que os conjuntos  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  possuem as propriedades acima, enquanto o conjunto  $\mathbb{Z}$  não. Iremos encontrar mais adiante outros conjuntos entre  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  que também satisfazem as propriedades acima.

**Definição 2.0.1.** *Sejam  $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R} - K$ . Definimos:*

- (i.)  $K[b_1] := \{f(b_1); f(x) \in K[x]\}$ ;
- (ii.)  $K[b_1, b_2] := K[b_1][b_2] := \{f(b_2); f(x) \in K[b_1][x]\}$ ;
- (iii.)  $K[b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n] := K[b_1, b_2, \dots, b_{n-1}][b_n] := \{f(b_n); f(x) \in K[b_1, b_2, \dots, b_{n-1}][x]\}$ .

Vamos apresentar alguns exemplos, para mostrarmos como encontrar explicitamente os conjuntos  $K[b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n]$ .

**Exemplo 2.0.2.**  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f(\sqrt{2}); f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ .

Observemos que, pelo algoritmo da divisão, temos que  $f(x) = (x^2 - 2) \cdot q(x) + r(x)$ , onde  $q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$  e o grau de  $r(x)$  é menor que 2. Logo,  $f(\sqrt{2}) = r(\sqrt{2}) = a \cdot \sqrt{2} + b$ , onde  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Portanto,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a \cdot (\sqrt{2}) + b; a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

**Exemplo 2.0.3.**  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt{3}] = \{f(\sqrt{3}); f(x) \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}][x]\}$ .

De forma análoga ao exemplo anterior, temos que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt{3}] = \{a.(\sqrt{3}) + b; a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\}$ . Como  $a.(\sqrt{3}) + b = (a_1 + b_1\sqrt{2})\sqrt{3} + (a_2 + b_2.\sqrt{2}) = b_1\sqrt{6} + a_1\sqrt{3} + b_2.\sqrt{2} + a_2$ , onde  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ , temos que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{b_1\sqrt{6} + a_1\sqrt{3} + b_2\sqrt{2} + a_2; a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}\}$ .

**Definição 2.0.4.** *Sejam  $K \subset \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R} - K$ . Dizemos que  $b$  é algébrico sobre  $K$  se existir algum polinômio  $f(x) \in K[x]$ , tal que  $f(b) = 0$ . Caso contrário, dizemos que  $b$  é transcendente sobre  $K$ . Se tivermos um conjunto  $L \supset K$ , tal que todo elemento de  $L$  é algébrico sobre  $K$ , dizemos que  $L$  é uma extensão algébrica de  $K$ . Chamaremos de polinômio minimal de  $b$  sobre  $K[x]$ , o polinômio mônico (com coeficiente líder igual à 1)  $f(x)$  de menor grau em  $K[x]$ , tal que  $f(b) = 0$ .*

No exemplo anterior,  $\sqrt{2}$  é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$ , com polinômio minimal  $f(x) = x^2 - 2$ . Na proposição a seguir, veremos que se  $b$  for algébrico sobre  $K$ , então a forma de  $K[b]$  depende apenas do grau do polinômio minimal de  $b$  sobre  $K$ .

**Proposição 2.0.5.** *Seja  $b \in \mathbb{R} - K$  algébrico sobre  $K$ , com  $K$  satisfazendo 1 e 2. Se o grau do polinômio minimal de  $b$  sobre  $K$  é  $n$  e  $\alpha, \beta \in K[b]$  então:*

- (i.)  $K[b] = \{a_{n-1}.b^{n-1} + \dots + a_1.b + a_0; a_i \in K, 0 \leq i \leq n - 1\}$ ;
- (ii.)  $\alpha - \beta \in K[b]$ ;
- (iii.)  $\alpha.\beta \in K[b]$ ;
- (iv.)  $\frac{1}{\alpha} \in K[b]$ , quando  $\alpha \neq 0$ .

*Demonstração.* (i.) Seja  $f(x) \in K[x]$ . Vamos mostrar que  $f(b) = a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$ , onde  $a_i \in K, 0 \leq i \leq n - 1$ . De fato, seja  $p(x)$  o polinômio minimal de  $b$  sobre  $K$ . Pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, temos que  $f(x) = p(x).q(x) + r(x)$ , onde  $q(x), r(x) \in K[x]$  e o grau de  $r(x)$  é no máximo  $n - 1$ . Daí, tem-se  $r(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ .

Portanto,  $f(b) = p(b)q(b) + r(b) = r(b) = a_{n-1}.b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$ .

- (ii.) Vamos utilizar o item anterior para escrever  $\alpha = a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$  e  $\beta = c_{n-1}b^{n-1} + \dots + c_1b + c_0$ , onde  $a_i, c_i \in K, 0 \leq i \leq n - 1$ . Logo:

$$\alpha - \beta = (a_{n-1} - c_{n-1}).b^{n-1} + \dots + (a_1 - c_1).b + (a_0 - c_0).$$

Como  $K$  satisfaz 1 e 2, temos que  $\alpha$  e  $\beta \in K[b]$ .

(iii.) Escrevendo  $\alpha$  e  $\beta$  como no item anterior, podemos escrever

$$\alpha\beta = (d_{2n-2})b^{2n-2} + \dots + (d_1)b + (d_0),$$

onde  $d_i \in K$ .

Tomando o polinômio  $f(x) = (d_{2n-2})x^{2n-2} + \dots + (d_1)x + (d_0)$ , temos que  $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ , onde  $r(x)$  tem grau no máximo igual a  $n - 1$  e  $p(x)$  é o polinômio minimal de  $b$  sobre  $K[x]$ . Portanto,  $\alpha\beta = f(b) = r(b)$ , onde  $r(b) \in K[b]$ .

(iv.) Tomando  $\alpha = a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$  e  $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , com  $a_i \in K$ , temos que existem  $q(x)$  e  $r_1(x)$  em  $K[x]$  tais que  $p(x) = q(x)f(x) + r_1(x)$ , onde o grau de  $r_1(x)$  é no máximo  $n - 2$  e  $p(x)$  é o polinômio minimal de  $b$  sobre  $K[x]$ . Observe que  $r_1(x)$  não pode ser o polinômio nulo, pois caso contrário,  $p(b) = 0 = q(b)f(b)$ , e assim  $q(b) = 0$  ou  $f(b) = 0$ , o que contraria a minimalidade de  $p(x)$ .

Se o grau de  $r_1(x)$  for 0,  $r_1(x) = b_1 \in K$  e  $-r_1(b) = q(b)f(b)$ . Assim:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{f(b)} = \frac{q(b)}{q(b)f(b)} = \frac{q(b)}{-r_1(b)} = \frac{1}{-b_0}q(b).$$

Como  $\frac{1}{-b_1} \in K$ , então  $\frac{1}{-b_1} \in K[b]$  e, pelo item anterior,  $\frac{1}{-b_1}q(b) \in K[b]$ .

Se o grau de  $r_1(x)$  não for 0, então temos apenas que  $\frac{1}{\alpha} = \frac{q(b)}{-r_1(b)}$ .

Como  $-r_1(x)$  é um polinômio de grau no máximo  $n - 2$ , podemos escrever  $p(x) = (-r_1(x))(q_2(x)) + r_2(x)$ , onde  $q_2(x)$  e  $r_2(x)$  são polinômios em  $K[x]$  e o grau de  $r_2(x)$  é no máximo  $n - 3$ . Novamente, temos  $r_2(x)$  não pode ser o polinômio nulo, como também que se o grau de  $r_2(x)$  for 0, então

$$\frac{q(b)}{-r_1(b)} = \frac{q(b) \cdot q_2(b)}{-r_1(b)q_2(b)} = \frac{q(b)q_2(b)}{-r_2(b)} = \frac{q(b)q_2(b)}{-b_2} = \frac{1}{-b_2}(q(b)q_2(b)) \in K[b],$$

onde  $b_2 \in K$ . Se o grau de  $r_2(x)$  não for 0, podemos repetir o procedimento feito anteriormente até que o grau de algum  $r_k(x)$  seja 0 (podemos garantir que em algum momento o grau de algum  $r_k(x)$  será 0, pois a cada divisão de  $p(x)$  por  $r_k(x)$  produz um resto de grau menor que o grau de  $r_k$ ).

Portanto,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{-b_k} (q(b)q_2(b) \dots q_k(b)) \in K[b],$$

pois  $\frac{1}{-b_k} \in K[b]$  e  $q(b)q_2(b) \dots q_k(b) \in K[b]$ .

□

A proposição anterior nos diz que  $K[b]$  possui as propriedades 1 e 2. Além disso, temos também que  $K[b]$  pode ser criado a partir dos elementos de  $K$  e  $b$ .

Iremos definir agora a ideia de dimensão para conjuntos.

**Definição 2.0.6.** *Sejam  $K \subset L \subset \mathbb{R}$  conjuntos com as propriedades 1 e 2. Se todo elemento  $k_1 \in L$  puder ser escrito como  $k_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ , onde  $a_i \in K$  e  $b_i \in L$ , e se  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 0$  implicar que todos  $a_i$  são 0, então dizemos que o conjunto  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  é uma base de  $L$  sobre  $K$  e que a dimensão de  $L$  sobre  $K$  é  $n$ .*

Usaremos a notação  $[L, K] = n$  para nos referirmos à dimensão de  $L$  sobre  $K$ . A seguir, vamos mostrar um exemplo de uma base de um conjunto  $K$ .

**Exemplo 2.0.7.** *O conjunto  $\{1, \sqrt{2}\}$  é uma base de  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  sobre  $\mathbb{Q}$  e  $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{Q}] = 2$ . De fato, se  $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ , então  $\alpha = a.1 + b\sqrt{2}$ , onde  $a, b \in \mathbb{Q}$ , e se  $a.1 + b\sqrt{2} = 0$ , então  $a = -b\sqrt{2}$ . Mas  $a$  e  $b$  são racionais, logo  $a = b = 0$ .*

De um modo geral, é fácil encontrar  $[K[b], K]$ , quando  $b$  é algébrico sobre  $K$ . Basta encontrarmos o grau do polinômio minimal de  $b$  sobre  $K$ , como diz a proposição a seguir.

**Proposição 2.0.8.** *Sejam  $K \subset \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R} - K$  algébrico sobre  $K$ , com polinômio minimal de grau  $n$ . Então  $[K[b], K] = n$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.0.5, temos que  $K[b] = \{a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0; a_i \in K, 0 \leq i \leq n-1\}$ . Logo, se  $\alpha \in K[b]$ , então  $\alpha = a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$ . Agora, se  $a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0$ , temos que  $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ , quando  $x = b$ . Mas o grau de  $f(x)$  é no máximo  $n-1$ , e como o polinômio minimal de  $b$  sobre  $K$  tem grau  $n$ , então  $f(x) = 0$  (polinômio nulo). Portanto, todos  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ , e assim  $\{1, b, b^2, \dots, b^{n-1}\}$  é base de  $K[b]$  sobre  $K$ . □

O próximo teorema será um de nossos principais resultados deste trabalho, e terá importância crucial no estudo de números construtíveis.



**Teorema 2.0.9** (Lei das Torres). *Sejam  $M \subset K \subset L \subset \mathbb{R}$  conjuntos com as propriedades 1 e 2, onde  $[K, M] = m$  e  $[L, K] = n$ . Então:  $[L, M] = mn$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  uma base de  $K$  sobre  $M$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  uma base de  $L$  sobre  $K$ . Vamos mostrar que o conjunto  $C = \{a_i b_j; a_i \in A \text{ e } b_j \in B\}$  é uma base de  $L$  sobre  $M$  (O conjunto  $C$  possui  $mn$  elementos). Com efeito, se  $l \in L$ , então  $l = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$ , onde  $x_i \in K$ , pois  $B$  é base de  $L$  sobre  $K$ . Por outro lado,  $x_i = y_{i1} a_1 + y_{i2} a_2 + \dots + y_{im} a_m$ , onde  $y_{ij} \in M$ , pois  $A$  é base de  $K$  sobre  $M$ . Logo:

$$l = y_{11} a_1 b_1 + y_{21} a_1 b_2 + \dots + y_{n1} a_1 b_n + \dots + y_{1m} a_m b_1 + y_{2m} a_m b_2 + \dots + y_{nm} a_m b_n,$$

onde  $y_{ij} \in M$ . Agora, se

$$y_{11} a_1 b_1 + y_{21} a_1 b_2 + \dots + y_{n1} a_1 b_n + \dots + y_{1m} a_m b_1 + y_{2m} a_m b_2 + \dots + y_{nm} a_m b_n = 0,$$

reescrevendo essa equação como

$$a_1(y_{11} b_1 + y_{21} b_2 + \dots + y_{n1} b_n) + a_2(y_{12} b_1 + y_{22} b_2 + \dots + y_{n2} b_n) + \dots + a_m(y_{1m} b_1 + \dots + y_{nm} b_n) = 0,$$

temos que  $y_{1j} b_1 + y_{2j} b_2 + \dots + y_{nj} b_j = 0$ , pois  $A$  é base de  $K$  sobre  $M$ . Por outro lado,  $y_{ij} = 0$ , pois  $B$  é base de  $K$  sobre  $M$ . Portanto,  $C$  é base de  $L$  sobre  $M$ .  $\square$

### 3 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

Nosso objetivo aqui será determinar quais medidas não podem construídas usando régua sem marcações e compasso, utilizando conhecimentos básicos de geometria analítica, polinômios e extensões racionais. Nesse capítulo, serão abordadas definições e teoremas de [7, Cap. 4, pág. 88]. Para mais detalhes, vide autor.

Na definição a seguir abordaremos de uma maneira mais formal a possibilidade da construção de pontos usando régua sem marcações e compasso, a partir de alguns pontos dados.

**Definição 3.0.1.** *Seja  $\mathbb{A}$  um subconjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$  contendo pelo menos dois pontos. Dizemos que um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  é um ponto construtível a partir de  $\mathbb{A}$ , se  $P$  pode ser obtido através de:*

- (i) *Interseção de duas retas, onde ambas contém dois pontos de  $\mathbb{A}$ ;*
- (ii) *Interseção de uma reta e uma circunferência, onde a reta contém dois pontos de  $\mathbb{A}$  e o centro e algum ponto da circunferência são pontos de  $\mathbb{A}$ ;*
- (iii) *Interseção de duas circunferências, onde os centros e algum ponto de ambas são pontos de  $\mathbb{A}$ .*

Chamaremos de  $\langle \mathbb{A} \rangle$  o conjunto de todos os pontos construtíveis a partir de  $\mathbb{A}$ .

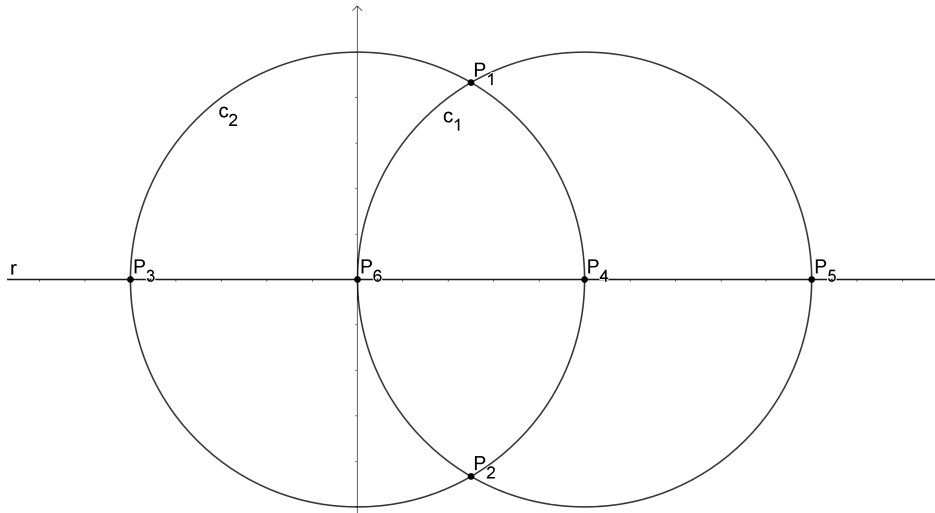
Esta definição é bastante razoável, pois as construções de pontos usando régua e compasso são na verdade interseções entre retas e circunferências.

O exemplo a seguir, mostra como encontrar pontos construtíveis a partir de dois pontos.

**Exemplo 3.0.2.** *Seja  $\mathbb{A} = \{(0, 0), (1, 0)\}$ . O conjunto  $\langle \mathbb{A} \rangle$  é formado pelas interseções das circunferências  $c_1$ ,  $c_2$  e a reta  $r$  da Figura 3.1.*

*Para calcularmos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$ , basta encontrarmos as soluções dos seguintes sistemas de equações:*

Figura 3.1 – Exemplo 1



[7]

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ y = 0. \end{cases}.$$

As soluções são respectivamente  $\{(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{-3}}{2})\}$ ,  $\{(-1, 0), (1, 0)\}$  e  $\{(0, 0), (2, 0)\}$ .

Portanto, o conjunto dos pontos construtíveis a partir de  $\mathbb{A} = \{(0, 0), (1, 0)\}$  é

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \left\{ \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{-3}}{2} \right), (-1, 0), (1, 0), (0, 0), (2, 0) \right\}.$$

Utilizaremos a notação  $\langle \mathbb{A} \rangle^2$  para a conjunto  $\langle \langle \mathbb{A} \rangle \rangle$  (pontos construtíveis a partir de  $\langle \mathbb{A} \rangle$ ) e  $\langle \mathbb{A} \rangle^n$  para o conjunto  $\langle \langle \mathbb{A} \rangle^{n-1} \rangle$ . Essas notações são essenciais para a nossa próxima

definição.

**Definição 3.0.3.** *Seja  $\mathbb{A} = \{(0,0), (1,0)\}$ . Um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  é dito construtível se  $P \in \langle \mathbb{A} \rangle^n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Uma reta  $r$  é dita construtível se  $r$  contém dois pontos de  $\langle \mathbb{A} \rangle^n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Um número  $a \in \mathbb{R}$  é dito construtível se  $(a,0) \in \langle \mathbb{A} \rangle^n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ .*

Observe que  $\langle \mathbb{A} \rangle^{n-1} \subset \langle \mathbb{A} \rangle^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . De fato, dados  $P_1, P_2 \in \langle \mathbb{A} \rangle^{n-1}$ , temos que  $P_1$  e  $P_2$  são na verdade a interseção entre a reta passando por eles e uma circunferência centrada em um dos pontos e passando pelo outro, concluindo assim, que  $P_1, P_2 \in \langle \mathbb{A} \rangle^n$ . Isto nos diz que *pontos construtíveis a partir de pontos construtíveis também são construtíveis*.

Os próximos resultados serão ferramentas que utilizaremos para encontrarmos características mais gerais acerca dos números construtíveis.

**Proposição 3.0.4.** *Sejam  $P, Q$  e  $R$  pontos construtíveis e  $r$  uma reta construtível passando por  $P$ . Então:*

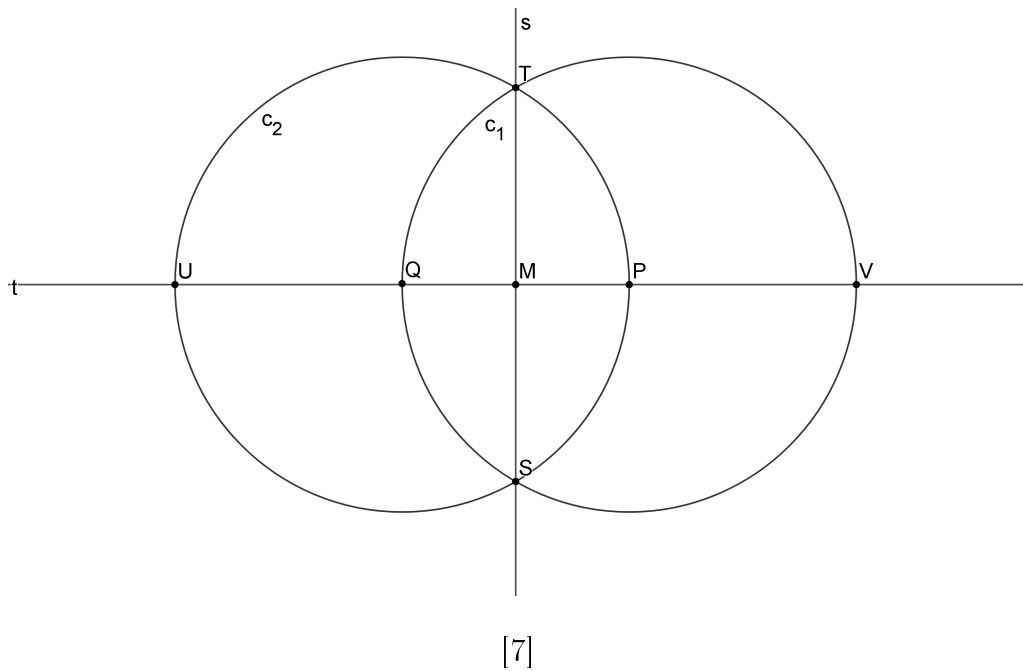
1. *O ponto médio  $M$  de  $\overline{PQ}$  é construtível e as retas perpendiculares à  $\overline{PQ}$  passando por  $P, Q$  e  $M$  também são construtíveis;*
2. *Se  $P, Q$  e  $R$  são colineares, então existe um ponto  $X$  construtível tal que  $X \in r$  e  $|\overline{PS}| = |\overline{QR}|$ .*

*Demonstração.* 1. Tomando uma circunferência  $c_1$  centrada em  $P$ , e uma circunferência  $c_2$  centrada em  $Q$ , temos que  $M$  é a interseção entre a reta que passa por  $P$  e  $Q$  e a reta que passa por  $S$  e  $T$  (interseções entre as circunferências) como mostra a Figura 3.2. Então  $M$  é construtível a partir de  $P$  e  $Q$ . Como  $P$  e  $Q$  são construtíveis, então  $M$  é construtível.

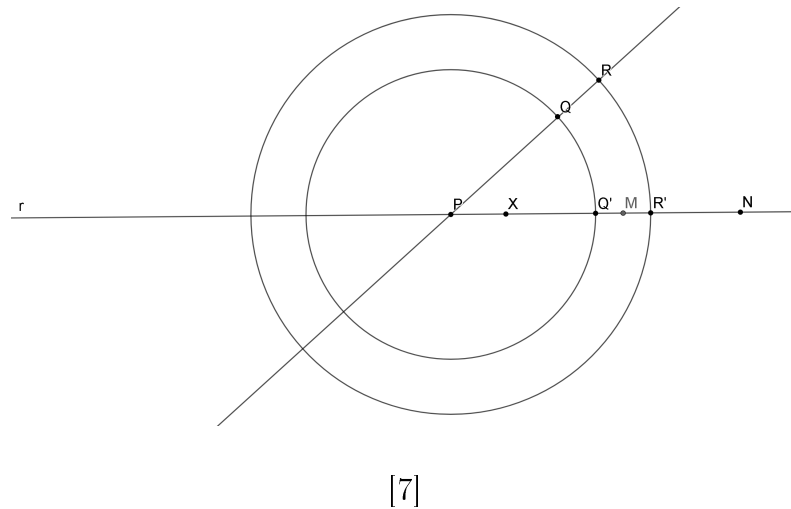
Acabamos de mostrar que, além de  $M$  ser construtível, a reta perpendicular à  $\overline{PQ}$  e que passa por  $M$  também é construtível ( $T$  e  $S$  são construtíveis). Logo, pela Figura 3.2, observando que  $Q$  é ponto médio de  $\overline{UP}$  e que  $P$  é ponto médio de  $\overline{QV}$ , temos que as retas perpendiculares à  $\overline{PQ}$  e que passam por  $P$  e  $Q$  também são construtíveis.

2. Podemos construir um ponto  $Q'$  como interseção de  $r$  com uma circunferência passando por  $Q$  e centrada em  $P$ , e  $R'$  como interseção de  $r$  com uma circunferência passando por  $R$  e centrada em  $P$ . Logo  $Q'$  e  $R'$  são construtíveis. Além disso, podemos observar pela Figura 3.3 que  $|\overline{Q'R'}| = |\overline{QR}|$ .

**Figura 3.2** – Construtibilidade do ponto médio e da reta perpendicular



**Figura 3.3** – Ponto construtível a partir de pontos colineares



Seja  $N$  um ponto tal que  $|\overline{PQ'}| = |\overline{Q'N}|$  e seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{Q'R'}$ , como na Figura 3.3. Temos  $N$  é um ponto construtível, pois é interseção de  $r$  com a circunferência centrada em  $Q'$  e passando por  $P$ . O ponto  $M$  também é construtível pelo item 1.). Seja  $X$  um ponto entre  $P$  e  $Q'$  tal que  $|\overline{XM}| = |\overline{MN}|$ . Observe que

$$|\overline{R'Q'}| = |\overline{Q'N}| - |\overline{R'N}| = |\overline{PQ'}| - |\overline{XQ'}| = |\overline{PX}|.$$

Além disso,  $X$  é construtível pois é a interseção de  $r$  com a circunferência centrada

em  $M$  e que passa por  $N$ .

□

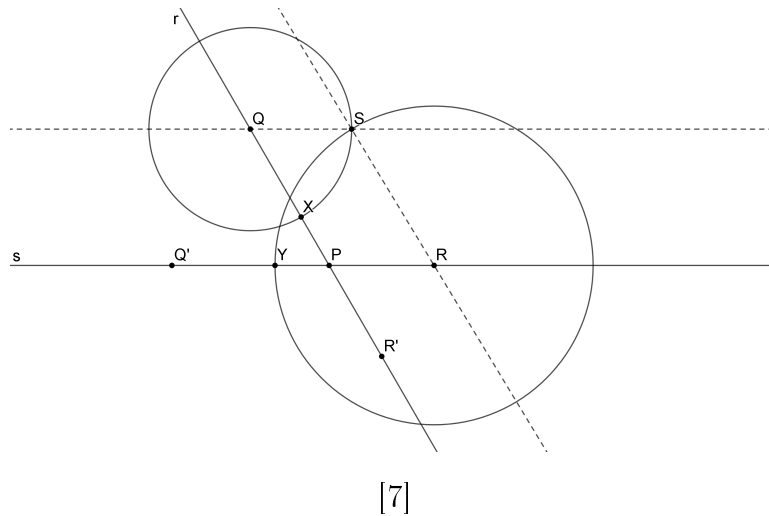
**Proposição 3.0.5.** *Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  pontos construtíveis e não colineares. Então, a reta que passa por  $R$  e é paralela à reta que passa por  $P$  e  $Q$  é construtível.*

*Demonstração.* Seja  $r$  a reta que passa por  $P$  e  $Q$ , e  $s$  a reta que passa por  $P$  e  $R$ . Podemos encontrar um ponto construtível  $R'$  em  $r$ , de modo que  $|\overline{PR'}| = |\overline{PR}|$  e um ponto construtível  $Q'$  em  $s$  de modo que  $|\overline{PQ'}| = |\overline{PQ}|$  (vide Figura 3.4).

Pela proposição anterior, existe  $X$  em  $r$  de modo que  $|\overline{QX}| = |\overline{PR'}|$  e  $Y$  em  $s$  de modo que  $|\overline{Q'Y}| = |\overline{YR}|$ .

Desse modo, obtemos um ponto  $S$ , que é a interseção da circunferência centrada em  $Q$  e passando por  $X$  com outra circunferência centrada em  $R$  e passando por  $Y$ , concluindo que  $S$  é construtível. Pela construção de  $S$ , a reta que passa por  $S$  e  $R$  é construtível e é paralela à  $s$ .

**Figura 3.4** – Construtibilidade a partir de pontos não colineares

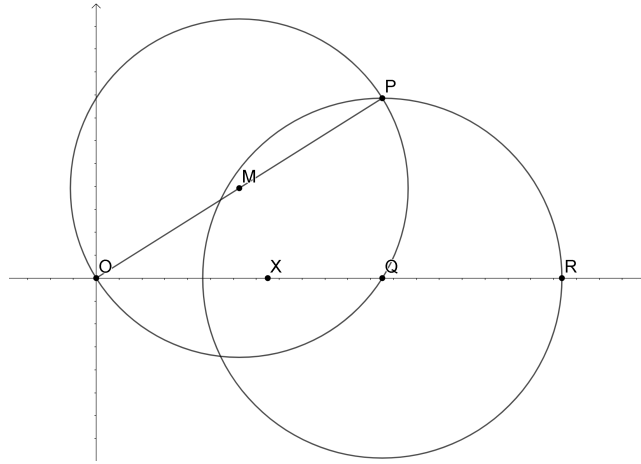


□

**Proposição 3.0.6.** *Um ponto  $P(a, b) \in \mathbb{R}^2$  é construtível, se e só se  $a$  e  $b$  são números construtíveis.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ): Seja  $P(a, b)$  um ponto construtível e seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{OP}$ , onde  $O(0, 0)$ . Pela Figura 3.5 podemos observar que o ponto  $Q(a, 0)$  é a interseção da reta que passa por  $O$  e  $(1, 0)$  com a circunferência centrada em  $M$  e passando por  $P$  ( $M$

**Figura 3.5** – Equivalência entre coordenadas construtíveis e pontos construtíveis ( $\Rightarrow$ )



[7]

é construtível pela Proposição 3.0.4), e portanto, temos que  $Q$  é construtível, ou seja,  $a$  é construtível.

Seja  $R$  um ponto na mesma reta que  $O$  e  $Q$  de modo que  $|\overline{PQ}| = |\overline{QR}|$  como na Figura 3.5. Observe que  $R$  é construtível, pois é interseção da reta que passa por  $O$  e  $Q$  com a circunferência centrada em  $Q$  e passando por  $P$ .

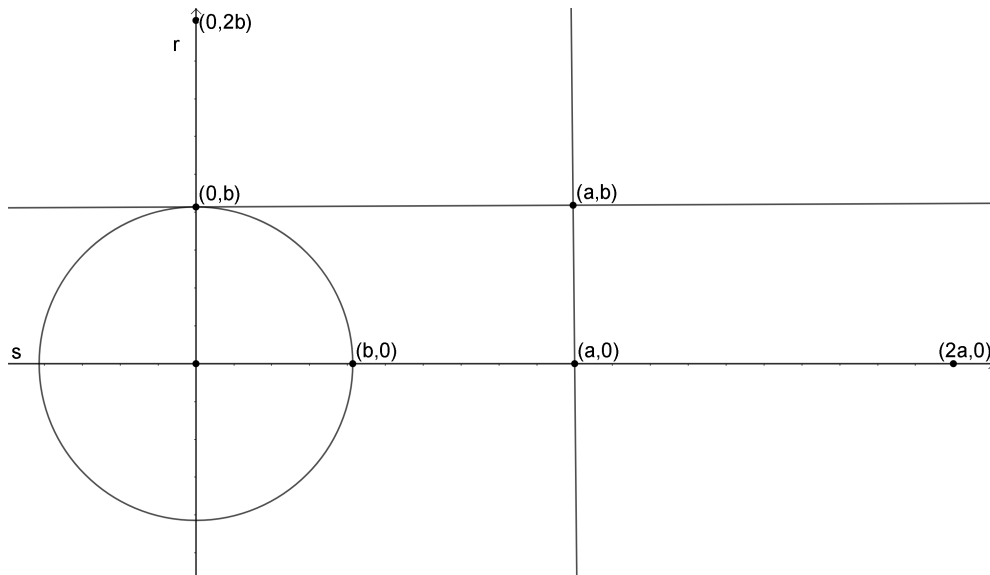
Usando a Proposição 3.0.4, existe um ponto  $X$  na reta de modo que  $X$  é construtível e  $|\overline{OX}| = |\overline{RQ}|$ . Como  $|\overline{RQ}| = b$ , temos que  $X(b, 0)$  e portanto  $b$  é construtível.

( $\Leftarrow$ ): Suponha que  $a > 0$  e  $b > 0$  (Os outros casos são análogos). Se  $a$  e  $b$  são números construtíveis, por definição  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$  também são. A reta  $r$  que passa por  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  é construtível pelo item 1. da Proposição 3.0.4, pois  $(0, 0)$  é ponto médio do segmento de  $(-1, 0)$  a  $(1, 0)$ , e a reta  $r$  é perpendicular à reta  $s$  que passa por  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ . Daí, temos que  $(0, b)$  é a interseção de uma circunferência passando por  $(0, 0)$  e passando por  $(b, 0)$  com a reta  $r$ , ou seja,  $(0, b)$  é construtível.

Não é difícil verificar que  $(0, 2b)$  e  $(2a, 0)$  são construtíveis. Logo,  $(a, b)$  é a interseção da reta perpendicular à  $s$  passando por  $(a, 0)$  com a reta perpendicular à reta  $r$  passando por  $(0, b)$ , que são retas construtíveis pelo item 1. da Proposição 3.0.4. Portanto,  $(a, b)$  é construtível (vide Figura 3.6).

□

**Figura 3.6** – Equivalência entre coordenadas construtíveis e pontos construtíveis ( $\Leftrightarrow$ )



Fonte: Autoria própria

Se  $z \in \mathbb{Z}$ , então  $(z, 0) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{|z|}$  (o ponto  $(z, 0)$  é interseção da reta passando por  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  com a circunferência centrada em  $(z - 1, 0)$  e passando por  $(z - 2, 0)$ . Basta um raciocínio indutivo até chegarmos em  $(1, 0) \in \langle \mathbb{A} \rangle$ ). Deste fato e da Proposição 3.0.6, temos:

**Corolário 3.0.7.** *Qualquer ponto em  $\mathbb{R}^2$  de coordenadas inteiras é um ponto construtível.*

O próximo teorema e a Proposição 3.0.6 nos mostram que, além dos pontos de coordenadas inteiras serem todos construtíveis, os pontos de coordenadas racionais também são.

**Teorema 3.0.8.** *Seja  $\mathbb{T}$  o conjunto de todos os números construtíveis. Se  $a, b \in \mathbb{T}$ , então:*

1.  $b - a \in \mathbb{T}$ ;
2.  $a \cdot b \in \mathbb{T}$ ;
3.  $\frac{1}{a} \in \mathbb{T}$ , se  $a \neq 0$ .

*Demonstração.* 1.  $P(a, 0)$  e  $Q(b, 0)$  são construtíveis pela Proposição 3.0.6. Suponha que  $b > a > 0$  (os outros casos são análogos). Pela Proposição 3.0.4, existe um ponto construtível  $X$ , de modo que  $|\overline{OX}| = |\overline{PQ}| = b - a$ , onde  $O(0, 0)$ . Logo  $b - a \in \mathbb{T}$ .

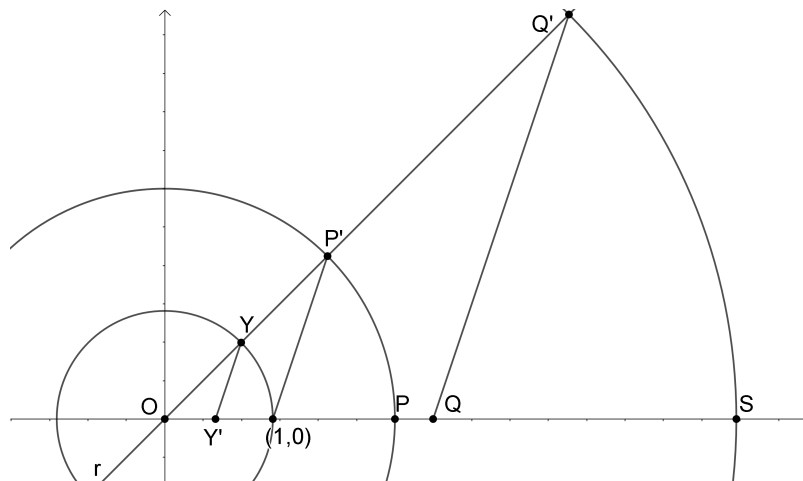
2. Seja  $r$  uma reta construtível, não-vertical e não-horizontal passando por  $O(0, 0)$  (o Exemplo 3.0.2 garante a existência de tal reta, basta apenas tomar a reta que passa



por  $P_1$  e  $P_6$  na figura 3.1). Tome  $P$  e  $Q$  como no item anterior e  $P'$  de modo que  $P' \in r$  e  $|\overline{OP}| = |\overline{OP'}| = a$  (vide Figura 3.7). Pela Proposição 3.0.5, temos que o ponto  $Q'$ , ponto tal que  $\overline{QQ'}$  é paralelo a reta que passa por  $P'$  e  $(1,0)$ , é construtível. Usando semelhança de triângulos na Figura 3.7, temos que  $a = \frac{|\overline{OQ'}|}{b}$ , e assim,  $|\overline{OQ'}| = a.b$ . Tomando o Ponto  $S$  na reta que passa por  $O$  e  $(1,0)$ , de modo que  $|\overline{OQ'}| = |\overline{OS}|$ , temos que  $S$  é construtível.

3. Seja  $Y$  um ponto na reta  $r$  de modo que  $|\overline{OY}| = 1$ , e  $Y'$  um ponto na reta que passa por  $O$  e  $(1,0)$  de modo que  $\overline{Y'Y}$  é paralelo à reta que passa por  $P'$  e  $(1,0)$ . Pela Proposição 3.0.5, temos que  $Y'$  é construtível e por semelhança de triângulos novamente na Figura 3.7, temos que  $|\overline{OY'}| = \frac{1}{a}$ . Portanto,  $\frac{1}{a} \in \mathbb{T}$ .

**Figura 3.7** – Propriedades dos números construtíveis



[7]

□

**Corolário 3.0.9.** *Qualquer ponto em  $\mathbb{R}^2$  de coordenadas racionais é um ponto construtível.*

Vamos denotar por  $\mathbb{B}_n$  o conjunto de todas as coordenadas dos pontos de  $\langle \mathbb{A} \rangle^n$  e  $\mathbb{B}_0$  como sendo o conjunto das coordenadas de  $\mathbb{A}$ . Pela Proposição 3.0.6, sabemos que  $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{T}$ .

Observe que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\mathbb{B}_1] \subset \mathbb{Q}[\mathbb{B}_2] \subset \dots \subset \mathbb{T}$  pelo Teorema 3.0.8 e, se  $b \in \mathbb{T}$ , então  $(b, 0)$  é construtível. Logo,  $b \in \mathbb{Q}[\mathbb{B}_n]$ , para algum  $n$  natural.

Assim,

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{Q}[\mathbb{B}_n] = \mathbb{T}.$$

O próximo teorema mostrará uma condição necessária para um número ser construtível.

**Teorema 3.0.10.** *Se um número  $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  é construtível, então  $[\mathbb{Q}[b], \mathbb{Q}] = 2^k$ , para algum  $k$  natural.*

*Demonstração.* Primeiramente, se  $b \in \mathbb{T}$ , então  $b \in \mathbb{Q}[\mathbb{B}_n]$ , para algum  $n$  natural. Pela Lei das Torres, temos:

$$[\mathbb{Q}[\mathbb{B}_n], \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\mathbb{B}_n], \mathbb{Q}[b]] \cdot [\mathbb{Q}[b], \mathbb{Q}].$$

Logo, precisamos apenas mostrar que  $[\mathbb{Q}[\mathbb{B}_n], \mathbb{Q}] = 2^k$ , para algum  $k$  natural.

Em  $[\mathbb{Q}[\mathbb{B}_n], \mathbb{Q}]$ , podemos usar novamente a Lei das Torres iteradamente para obter:

$$[\mathbb{Q}[\mathbb{B}_n], \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}[\mathbb{B}_n], \mathbb{Q}[\mathbb{B}_{n-1}]] \cdot [\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{n-1}], \mathbb{Q}[\mathbb{B}_{n-2}]] \cdots [\mathbb{Q}[\mathbb{B}_0], [\mathbb{Q}]].$$

Em  $[\mathbb{Q}[\mathbb{B}_i], \mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}]]$ , podemos observar que  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_i] = \mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}][b_1, b_2, \dots, b_r]$ , onde  $\{b_1, b_2, \dots, b_r\} = \mathbb{B}_i - \mathbb{B}_{i-1}$ . Fazendo  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}] = K_0$ ,  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}][b_1] = K_1$ ,  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}][b_1, b_2] = K_2$ ,  $\dots$ ,  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}][b_1, b_2, \dots, b_j] = K_j, \dots$ ,  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}][b_1, b_2, \dots, b_r] = K_r$ , temos, novamente pela Lei das Torres que  $[K_r, K_0] = [K_r, K_{r-1}] \cdot [K_{r-1}, K_{r-2}] \cdots [K_1, K_0]$ .

Precisamos mostrar basicamente que a dimensão  $[K_j, K_{j-1}]$  é 1 ou 2,  $\forall 0 \leq j \leq r$ . Com efeito, sabemos que  $K_j = K_{j-1}[b_j]$  e que  $b_j$  é uma coordenada de um ponto obtido através de uma das seguintes maneiras: interseção de duas circunferências com centro e um ponto em  $\mathbb{B}_{i-1}$ , uma circunferência com centro e um ponto em  $\mathbb{B}_{i-1}$  e uma reta com dois pontos em  $\mathbb{B}_{i-1}$ , ou duas retas com dois pontos em  $\mathbb{B}_{i-1}$ . Para a interseção de duas circunferências, temos:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = s^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 = r^2 \\ x^2 - 2a_2x + a_2^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2 = s^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 - r^2 = 0 \\ (2a_1 - 2a_2)x + (2b_1 - 2b_2)y + a_2^2 + b_2^2 - s^2 - a_1^2 - b_1^2 + r^2 = 0 \end{cases},$$

onde  $(a_1, b_1) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  é o centro de uma circunferência,  $(c_1, d_1) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  é um ponto dela,  $(a_2, b_2) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  é o centro de outra circunferência,  $(c_2, d_2) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  é um ponto dela,  $r^2 = (a_1 - c_1)^2 + (b_1 - d_1)^2$  e  $s^2 = (a_2 - c_2)^2 + (b_2 - d_2)^2$ .

Observe que, ao isolarmos  $y$  na segunda equação e substituírmos na primeira, obteremos uma equação polinomial de grau 2, com coeficientes em  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}] \subset K_{j-1}$ . Portanto,  $b_j$  é raiz de um polinômio de grau 2, com coeficientes em  $K_{j-1}$ , e assim  $[K_j, K_{j-1}] = [K_{j-1}[b_j], K_{j-1}] = 2$ .

Para a intersecção de uma circunferência e uma reta, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 = r^2 \\ y = b_2 + \left( \frac{d_2 - b_2}{c_2 - a_2} \right) \cdot (x - a_2) \end{cases},$$

onde  $(a_1, b_1) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  é o centro de uma circunferência,  $(c_1, d_1) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  é um ponto dela,  $(a_2, b_2), (c_2, d_2) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  são pontos da reta e  $r^2 = (a_1 - c_1)^2 + (b_1 - d_1)^2$ . De modo análogo à intersecção de duas circunferências, encontramos que  $[K_j, K_{j-1}] = 2$ .

Para a intersecção de duas retas, temos:

$$\begin{cases} y = b_1 + \left( \frac{d_1 - b_1}{c_1 - a_1} \right) \cdot (x - a_1) \\ y = b_2 + \left( \frac{d_2 - b_2}{c_2 - a_2} \right) \cdot (x - a_2) \end{cases},$$

onde  $(a_1, b_1), (c_1, d_1) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  são pontos de uma reta e  $(a_2, b_2), (c_2, d_2) \in \langle \mathbb{A} \rangle^{i-1}$  são pontos de outra. Se substituírmos  $y$  da segunda equação na primeira, temos uma equação polinomial de grau 1, com coeficientes em  $\mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}] \subset K_{j-1}$ . Logo, de modo análogo às intersecções anteriores, temos que  $[K_j, K_{j-1}] = 1$ .

Portanto,  $[\mathbb{Q}[\mathbb{B}_i], \mathbb{Q}[\mathbb{B}_{i-1}]] = 2^r$ , onde  $r \in \mathbb{N}$ , e assim,  $[\mathbb{Q}[\mathbb{B}_n], \mathbb{Q}] = 2^k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $r \leq k$ .

□

## 4 APLICAÇÕES

Com uso do Teorema 3.0.10, iremos tratar dos três famosos problemas dos gregos, abordados no Capítulo 1. Para mais detalhes, vide [7, Cap.5, pág115].

### 4.1 Duplicação do Cubo

Como vimos no Capítulo 1, o problema da duplicação do cubo se resume a encontrar um segmento de comprimento  $\alpha$ , a partir de um segmento de comprimento  $\beta$ , de modo que  $\alpha^3 = 2\beta^3$ . Daí, temos que  $\alpha = \sqrt[3]{2}\beta$ . Vamos mostrar inicialmente, que é impossível construir um segmento de medida  $\sqrt[3]{2}\beta$  usando régua sem marcações e compasso, quando  $\beta = 1$ , mostrando que  $\sqrt[3]{2}$  não é construtível. De fato, o polinômio  $f(x) = x^3 - 2$  é o polinômio minimal de  $\sqrt[3]{2}$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Logo  $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}], \mathbb{Q}] = 3$ , e assim, pelo Teorema 3.0.10,  $\sqrt[3]{2}$  não é construtível. De um modo mais geral, quando  $\beta$  for construtível,  $\alpha = \sqrt[3]{2}\beta$  não pode ser. Basta observar que se  $\alpha$  fosse construtível, então  $\alpha \frac{1}{\beta} = \sqrt[3]{2}$  seria construtível pelo Teorema 3.0.8, o que não é verdade.

### 4.2 Trisecção do ângulo

Para trissecionar um ângulo  $\alpha \in (0, \pi)$  usando régua sem marcações e compasso, teríamos que ser capazes de construir o ponto  $(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right))$  no plano cartesiano. Apesar de alguns ângulos poderem ser trissecionados, como  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , outros não podem ser, como é o caso de  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

Com efeito, se  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  pudesse ser trissecionado, então  $(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), \sin\left(\frac{\pi}{9}\right))$  seria construtível. Pela Proposição 3.0.6,  $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$  também seria construtível. Mas

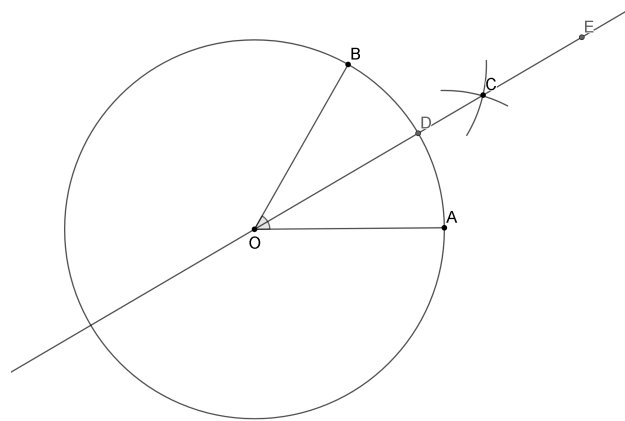
$$\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right) = \frac{1}{2} = 4 \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \Rightarrow 8 \cdot \cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 1 = 0.$$

Daí, o polinômio  $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$  é o polinômio minimal (ao dividirmos todos os termos por 8) de  $\frac{\pi}{9}$  sobre  $\mathbb{Q}$  (para verificar este fato, basta usar o fato de que qualquer raiz racional de  $f(x)$  deve ser da forma  $\frac{p}{q}$ , com  $p = \pm 1$  e  $q = 1, q = 2, q = 4$ , ou  $q = 8$ , mas  $\frac{p}{q}$  com esses valores não são raízes de  $f(x)$ ), e portanto,  $[\mathbb{Q}\left[\frac{\pi}{9}\right], \mathbb{Q}] = 3$ , o que contraria o Teorema 3.0.10.

Apesar de não conseguirmos trissectar o ângulo  $\frac{\pi}{3}$  usando régua sem marcações e compasso, podemos encontrar uma boa aproximação da terça parte desse ângulo. O procedimento a seguir encontra essa aproximação.

Considere uma circunferência de raio 1, centro em  $O$  e arco  $AB = \frac{\pi}{3}$ . Vamos traçar primeiro a bissetriz de  $\frac{\pi}{3}$  passando por  $O$  ( basta traçar uma reta por  $O$  e  $C$ , onde  $C$  é a intersecção de duas circunferências centradas em  $A$  e  $B$  com mesmo raio maior que 1. Seja  $D$  a intersecção da bissetriz de  $\frac{\pi}{3}$  passando por  $O$  e do arco  $AB$ . Na bissetriz, utilizando o compasso, podemos encontrar um ponto  $E \neq O$  de modo que  $DE = 1$  (vide Figura 4.1).

**Figura 4.1** – Aproximação da trissecção do ângulo



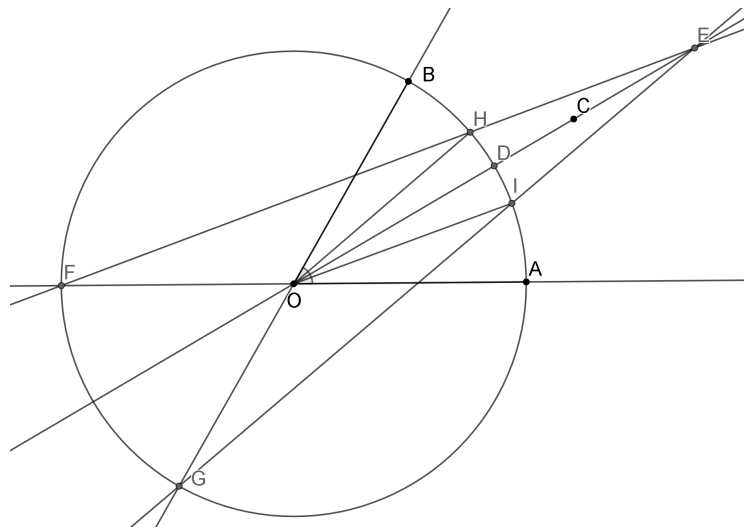
Fonte: Autoria própria

Sejam  $F$  e  $G$  as intersecções das retas que contém  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  com a circunferência de raio 1, e  $H$  e  $I$  a intersecções das retas que contém  $\overline{EF}$  e  $\overline{EG}$  com a circunferência de raio 1, como na Figura 4.2. Vamos mostrar que  $\widehat{HOI}$  é aproximadamente  $\frac{1}{3}\widehat{AOB}$ . Com efeito, como  $\widehat{OGE}$  é um ângulo com vértice na circunferência, temos que  $\widehat{OGE} = \frac{1}{2}(\widehat{DOI} + \widehat{BOD})$ . Observe também que  $\widehat{BOD} = \widehat{OGE} + \widehat{OEG}$  pelo teorema do ângulo externo, e assim,  $\widehat{OEG} = \frac{1}{2}(\widehat{DOI} - \widehat{BOD})$ .

Usando a Lei dos senos no triângulo  $\widehat{OGE}$ , temos:

$$\frac{\overline{OG}}{\sin(\widehat{OEG})} = \frac{\overline{OE}}{\sin(\widehat{OGE})}$$

Figura 4.2 – Continuação da aproximação da trisseção do ângulo



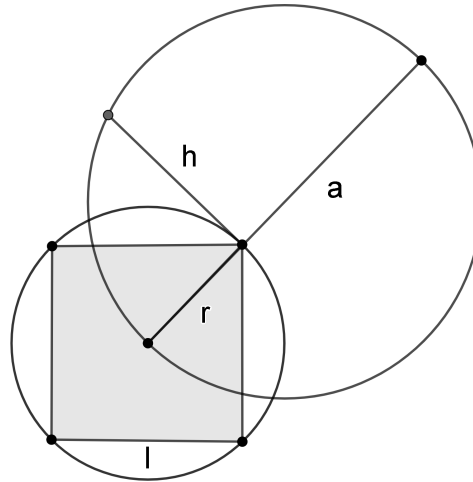
[11]

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}(D\hat{O}I - B\hat{O}D)\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{1}{2}(D\hat{O}I + B\hat{O}D)\right)} \\
 &\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(D\hat{O}I - B\hat{O}D)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(D\hat{O}I + B\hat{O}D)\right)} = \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right) - \cos\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right)}{\sin\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right) + \cos\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right)} = \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow \sin\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right) \\
 &\Rightarrow \tan\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right) = 3 \tan\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Como  $2 \cdot D\hat{O}I = H\hat{O}I$  e  $2 \cdot B\hat{O}D = A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$ , a aproximação  $\frac{\tan\left(\frac{B\hat{O}D}{2}\right)}{\tan\left(\frac{D\hat{O}I}{2}\right)} \approx \frac{B\hat{O}D}{D\hat{O}I}$  faz com que  $H\hat{O}I \approx \frac{1}{3}A\hat{O}B$ . Com auxílio de uma calculadora, temos as aproximações  $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)} \approx 1,58$  e  $\frac{\pi}{\left(\frac{\pi}{9}\right)} = 1,5$ , o que faz nossa construção aproximada ser bastante razoável [11].

### 4.3 Quadratura do círculo

**Figura 4.3** – Aproximação para a quadratura do círculo



Fonte: Autoria própria

Para construir um quadrado com mesma área de um círculo usando régua e compasso, temos que construir um segmento  $x$  de modo que  $x^2 = \pi r^2$ , onde  $r$  é o raio da circunferência. Logo, temos que  $x = \sqrt{\pi}r$ . Vamos mostrar inicialmente que  $\sqrt{\pi}$  não é construtível. De fato, se  $\sqrt{\pi}$  fosse construtível,  $\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \pi$  seria construtível. Mas  $\pi$  é transcendente sobre  $\mathbb{Q}$ , ou seja, se  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , então  $f(\pi) \neq 0$ . Com a ideia da construção feita no Exemplo 2.0.2, como não conseguimos um polinômio com coeficientes em  $\mathbb{Q}$  que  $\pi$  seja raiz, então não conseguimos uma base com um número finito de elementos para  $\mathbb{Q}[\pi]$  sobre  $\mathbb{Q}$ , o que contraria o Teorema 3.0.10.

Portanto, se  $r$  é construtível, então  $x = \sqrt{\pi}r$  não é, pois se  $x$  fosse construtível,  $x \frac{1}{r} = \sqrt{\pi}$  seria construtível, o que não é verdade.

Apesar de não ser sempre possível construir um quadrado com mesma área de um círculo usando régua sem marcações e compasso, temos uma maneira aproximada de fazer essa construção: tomando uma circunferência de raio  $r$  e um quadrado inscrito nessa circunferência de lado  $l$ , temos que  $l\sqrt{2} = 2r$ , e assim  $l = \sqrt{2}r$ . Por outro lado, observe que  $6r + \frac{\sqrt{2}r}{5} \approx 6,2828427r$ , o que é bem próximo de  $2\pi r$ . O número  $a = \frac{6r + \frac{\sqrt{2}r}{5}}{2}$  é uma ótima aproximação para  $\pi r$  e é construtível (a partir de  $r$ ) pelos Teoremas 3.0.8 e 3.0.10. Podemos construir, através de um prolongamento de um segmento de medida  $r$  com extremo no centro do círculo, um segmento de medida  $a$  (vide Figura 4.3), e a partir daí, construir uma circunferência de diâmetro  $r + a$ .



Traçando uma perpendicular ao segmento de medida  $a$  e passando pelo ponto que separa os segmentos de medida  $r$  e  $a$ , podemos construir um segmento  $h$  de modo que  $h^2 = ra \approx \pi r^2$ , e portanto, podemos construir um quadrado de lado  $h$  com área muito próxima da área do círculo [9, Cap. 4, pág. 154].

## 5 METODOLOGIA E AJUSTES PEDAGÓGICOS

A seguir, explanaremos como serão abordados e como foram feitas todas as mudanças e adaptações nos estudos dos três famosos problemas dos gregos, para que os mesmos possam ser entendidos por alunos do ensino médio.

Para começar os estudos dos três famosos problemas dos gregos, faremos primeiramente uma breve alusão histórica sobre as possíveis maneiras de como os problemas surgiram, além de algumas soluções propostas ao longo da história, como visto no Capítulo 1. A ideia é inicialmente tratar o problema de maneira puramente geométrica, para depois abordarmos a parte algébrica.

Após uma maior familiaridade com o problema, iniciaremos os estudos das extensões dos racionais. Observe que as propriedades do início do Capítulo 2 se referem à subcorpos de  $\mathbb{R}$ , mas omitimos esta informação para não sobrecarregarmos os estudos com mais definições e nomes que, a princípio, não seriam úteis. O mais importante aqui é mostrar que estamos interessados em estudar conjuntos “maiores” que  $\mathbb{Q}$ , mas com a mesma estrutura, ou seja, conjuntos com unidade, elemento neutro e fechados com relação à soma e produto.

Tendo em vista que os estudantes já cursaram o 3º ano do ensino médio integrado, a Definição 2.0.1 poderá ser apresentada tranquilamente, pois eles já terão estudado polinômios e números complexos. Devemos focar aqui em como determinarmos esses conjuntos na prática, começando com exemplos como  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ,  $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$  dentre outros, e utilizando o Algoritmo da Divisão de Euclides, também visto no 3º ano, para determinar a forma de tais conjuntos. Após o estudo dos exemplos e a Definição 2.0.4, generalizamos a construção para  $K[b]$ , quando  $b$  é algébrico sobre  $K$ , cuja demonstração também depende apenas dos estudos de polinômios e do algoritmo da divisão.

A lei das torres é a parte mais delicada deste capítulo, pois a definição de base e dimensão, que é necessária para a demonstração da lei das torres, está ligada ao estudo de espaços vetoriais. Mas pelas propriedades do início do Capítulo 2, se  $K \subset L \subset \mathbb{R}$  e  $K$  e  $L$  satisfazem estas propriedades, então  $L$  é um espaço vetorial sobre  $K$ , daí preferimos omitir a definição de espaço vetorial, pois nada iria interferir nas demonstrações. É importante ressaltar também como demonstrar que um conjunto é base dos conjuntos tratados nas definições, através de exemplos como o Exemplo 2.0.7.

Após o estudo das extensões, é hora de formalizarmos a ideia de construtibilidade, além de várias proposições que serão necessárias para demonstrar o Teorema 3.0.8, que faz a ligação entre os números construtíveis e as extensões estudadas no Capítulo 2. Nessas proposições, os estudantes usarão os conhecimentos de geometria plana, geometria analítica e desenho vistas no ensino médio. Muitas das demonstrações construtivas vistas em

desenho terão uma demonstração mais formal nas proposições, visto que transformamos um problema construtivo em um problema algébrico.

Através da Lei das Torres, demonstraremos nosso critério de construtibilidade (Teorema 3.0.8), onde a sua demonstração traz um importante conteúdo visto no 3º ano, que são as posições relativas entre retas e circunferências. Esse critério de construtibilidade será nossa ferramenta para mostrar a impossibilidade de solução dos problemas dos gregos usando apenas régua e compasso.

Para mostrarmos a impossibilidade de construção dos problemas dos gregos usando régua e compasso, usamos a demonstração por absurdo, que é uma importante ferramenta a ser estudada pelos alunos, em conjunto com os Teoremas 3.0.8 e 3.0.10. Existem construções aproximadas para os três famosos problemas dos gregos que são bastante interessantes também.

Como observado anteriormente, as aulas acontecerão no formato de seminários, de forma que os conteúdos sejam ministrados juntamente com os participantes do projeto, sempre questionando os mesmos acerca da veracidade e das justificativas das demonstrações. A duração de cada aula será de 3 horas, dispostas da seguinte maneira:

- Aulas 1 e 2: Os três famosos problemas dos gregos: Uma breve alusão histórica e algumas soluções não euclidianas. Pré-requisitos: geometria do ensino fundamental, parte inicial de geometria analítica e geometria espacial;
- Aulas 3 e 4: Extensões dos racionais. Pré-requisitos: polinômios;
- Aula 5: Resolução de exercícios;
- Aula 6: Avaliação;
- Aulas 7 e 8: Definições e resultados geométricos acerca de números construtíveis. Pré-requisitos: equações de retas e circunferências, polinômios e construções de desenho geométrico (disciplina vista no 1º ano);
- Aulas 9 e 10: Resolução de exercícios;
- Aula 11: Avaliação;
- Aula 12: Critérios de construtibilidade. Pré-requisitos: equações de retas, circunferências e polinômios;
- Aula 13: Impossibilidade de soluções para os três problemas dos gregos usando apenas régua e compasso. Pré-requisitos: construções de desenho geométrico e polinômios;

- Aula 14: Resolução de exercícios;
- Aula 15: Avaliação.

As avaliações não terão um caráter quantitativo aqui. O objetivo delas é verificar o acompanhamento dos alunos com relação aos conteúdos, e adaptar as aulas posteriores através dos resultados e dificuldades relacionadas as mesmas.

## 5.1 Exercícios

1. Mostre que uma das intersecções  $(x_0, y_0)$  entre as curvas de equação  $x^2 = ay$  e  $x^2 + y^2 = ay + bx$  satisfazem  $\frac{a}{x_0} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{b}$ . Conclua uma possível maneira de duplicar o volume de um cubo de aresta  $s$ .
2. Encontre a intersecção entre uma parábola de equação  $x^2 = \frac{s}{4}y$  e uma hipérbole equilátera com eixo real  $4s$ , com as assíntotas sendo os eixos coordenados. Isso resolve o problema da duplicação do cubo?
3. Considere uma circunferência de raio  $r$ , centro em  $O$  e um diâmetro  $\overline{AB}$  contido nela. Trace uma tangente em  $B$ , e em seguida, marque  $C$  nesta tangente, de modo que o ângulo  $BOC$  seja de  $\frac{\pi}{6}$ . Em seguida, marque um ponto  $D$ , de modo que  $B$  esteja contido no segmento  $\overline{CD}$  e  $\overline{BD} = 3r$ . Qual o valor aproximado de  $2\overline{AD}$ ? Utilize esta construção para dar uma solução aproximada da quadratura do círculo.
4. Determine  $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$  e mostre que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ . (Dica: encontre o polinômio minimal de  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  sobre  $\mathbb{Q}$  e utilize a Proposição 2.0.5).
5. Determine  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ .
6. Determine  $[\mathbb{Q}[\sqrt[4]{3}], \mathbb{Q}[\sqrt{3}]]$ . (Dica: utilize a lei das torres).
7. Mostre que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}$ .
8. Determine o polinômio minimal dos seguintes números sobre  $\mathbb{Q}$ :
  - $3 + \sqrt{3}$ ;
  - $\sqrt[4]{2} + 1$ ;
  - $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .
9. Mostre que  $\cos \frac{2\pi}{18}$  não é construtível.

10. Quais dos ângulos abaixo podem ser trissectados?

- $\alpha$  tal que  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ;
- $\alpha$  tal que  $\cos \alpha = -\frac{9}{16}$ ;
- $\alpha$  tal que  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .

11. Mostre que se  $\alpha$  é construtível, então  $\tan \alpha$  também é.

12. Encontre as raízes complexas da equação  $x^3 - 1 = 0$ . Esboce-as no plano de Argand-Gauss e conclua que é possível construir, usando régua e compasso, um triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio 1.

## 5.2 Considerações finais

Existem várias possibilidades de estudos posteriores a partir dos conteúdos estudados. Uma delas, por exemplo, é através das raízes enésimas da unidade, resolver problemas de construtibilidade de polígonos regulares. Outra possibilidade seria tratar da transcendência de alguns números como  $\pi$  e  $e$ . Também podemos estudar de uma forma mais generalizada, os corpos e suas propriedades, que reduzimos a subcorpos de  $\mathbb{R}$ .

Vale ressaltar aqui, a diferença que este projeto de ensino fará para um aluno que pretende ingressar no ensino superior. Os participantes enfrentariam de uma maneira mais natural disciplinas do ensino superior. Além disso, os participantes teriam uma familiaridade maior com algumas notações algébricas.

Este projeto de ensino traz outras familiaridades mais antecipadas com algumas ferramentas matemáticas, como demonstrações por absurdo, noções de indução e símbolos matemáticos. Com o desenvolvimento deste projeto de ensino, os participantes que desejarem ingressar em cursos superiores relacionados com a área de matemática, terão mais chances de sucesso e uma maior facilidade de adaptação.

A fortiori, depois da aplicação do projeto via Edital, submeter os resultados obtidos sobre o possível crescimento acadêmico dos alunos em contato com uma formalização maior da matemática em revistas de Educação matemática, já que, tal abordagem já está sendo bastante comentada a nível de pesquisa dos experts na área.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BRASIL, Instituto Federal de Alagoas. *Edital Nº11 2018 PROEN IFAL*. Disponível em: <https://www2.ifal.edu.br/noticias/proen-publica-edital-de-projetos-de-ensino-para-2019/edital-n-11-2018-proen-ifal.pdf/view>. Acesso em: 10 abril. 2020.
- [2] BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Relatório SAEB 2017*. Disponível em: <https://bit.ly/3cA7ZgU>. Acesso em: 10 abril. 2020.
- [3] BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2014.
- [4] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, 1997.
- [5] COSTA, Valderi Candido da. *Números Construtíveis*. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2013.
- [6] DANTE, Luis Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
- [7] GONÇALVES, Adilson. *Introdução à álgebra*. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [8] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. *Polinômios e equações algébricas*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- [9] HOWARD, Eves. *Introdução à história da matemática*. tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.
- [10] JUNIOR, Luis Pereira da Silva. *Construções Geométricas por régua e compasso e Números Construtíveis*. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2013.
- [11] KILHIAN, Kleber. *Como Dividir um Ângulo em Três Partes Iguais com Régua e Compasso*. O Baricentro da Mente, 2011. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2011/08/como-dividir-um-angulo-em-tres-partes.html>. Acesso em: 4 mar. 2019.
- [12] SANTANA, Luciano Melo. *Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso*. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2013.

- [13] VILELA, Denise Silva; DE DEUS, Karine Angélica. *Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura*. Revista Horizontes, São Paulo, Vol. 32, nº 2, p. 63-76, jul./dez.2014.