UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

GREGORIO TOMAS DA SILVA GONZAGA

O APLICATIVO *LENSOO CREATE* COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

MACEIÓ/AL
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

GREGORIO TOMAS DA SILVA GONZAGA

O APLICATIVO *LENSOO CREATE* COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Texto apresentado à banca examinadora para fins de etapa final necessária à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.
Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

MACEIÓ/AL
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janis Christine Angelina Cavalcante

G642a Gonzaga, Gregório Tomas da Silva.
O aplicativo *Lensoo Creat* como ferramenta didática no processo de ensino e de aprendizagem da matemática na Educação Básica / Gregório Tomas da . – Maceió, AL, 2018.
60f.: il. color.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 59-60.

1. Ensino da matemática – Processo de ensino e aprendizagem. 2. Lousa virtual. 3. *Lensoo Creat*. 4. Funções Polinomiais – Educação básica. 5. Ferramenta didática. I. Título.

CDU: 37.046.12:51

GREGÓRIO TOMÁS DA SILVA GONZAGA

O APLICATIVO *LENSOO CREATE* COMO FERRAMENTA DIDÁTICA NO PROCESSO DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Educação da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 08 de junho de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ediel Azevêdo Guerra
Orientador e presidente
(IM/UFAL)

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa
(IM/UFAL)

Prof. Dr. Kleber Cavalcanti Serra
(IF/UFAL)

Nenhuma sociedade que esquece a arte de questionar pode esperar encontrar respostas para os problemas que as afligem. (BAUMAN, 1999)

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria José da Silva, com amor e gratidão, pela educação, carinho e amor ensinados a mim, e em especial ao meu maior mentor, meu pai Espedito Gonzaga (*In Memorian*), que desde cedo nos instruiu, à mim e aos meus irmãos, no caminho da retidão, honestidade, justiça e estudos. Um homem que sabia o verdadeiro significado da caridade ao próximo, mas que entendia que sem esforço, trabalho e dedicação não se constrói um caminho sólido e duradouro. Espero um dia ter a honrada tarefa de passar seus nobres valores aos jovens do amanhã.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Espedito Gonzaga (*In Memoriam*) e Maria José da Silva, por todo ensinamento dedicado à minha educação, e por me transformar na pessoa que sou hoje.

Ao meu orientador Professor Dr. Ediel Azevedo Guerra por compartilhar seus conhecimentos e práticas docentes, pelo incentivo, por acreditar nesse trabalho e, acima de tudo, por mostrar que quantos mais conhecimentos adquirimos mais humildes e responsáveis devemos ser.

Aos Professores doutores Isnaldo Isaac Barbosa e Kleber Cavalcanti Serra por aceitarem o convite como membros da banca examinadora, e com isso contribuírem para o aprimoramento do trabalho.

À minha amada amiga Carlina Rocha de Almeida Barros pelo grande incentivo, apoio e conversas filosóficas que marcaram a caminhada do Mestrado.

Aos meus irmãos Gustavo Tobias da Silva Gonzaga, Glaucia Tiana da Silva Gonzaga e João Vitor Gonzaga, por me apoiarem sempre na busca do conhecimento.

A todos os meus alunos e ex-alunos, pois o ato de ensinar nos transforma e nos faz refletir sobre as adversidades sociais, e sobretudo nos eleva a alma.

RESUMO

O presente trabalho visa fundamentalmente apresentar o aplicativo educacional *Lensoo Create* como uma importante ferramenta de apoio didático para o professor de matemática tanto da educação básica quanto da educação superior. Apresentam-se aqui um breve tutorial de seu uso, destinado aos professores que quiserem utilizá-lo como instrumento de trabalho, e um DVD produzido com esse aplicativo com uma sequência de videoaulas sobre um conteúdo matemático. A disponibilização desse DVD pretende atingir dois objetivos: em primeiro lugar, mostrar aos docentes, com um exemplo prático, as potencialidades técnicas e didáticas do referido aplicativo; em segundo lugar, apresentar aos estudantes do ensino médio um conteúdo matemático importante da Matemática desse nível de ensino com um enfoque que propicie posteriormente a apropriação de conceitos e ideias utilizados no Cálculo Diferencial.

Palavras-chave: Lousa virtual. *Lensoo Create*. Funções Polinomiais. Máximos e Mínimos de Funções Polinomiais.

ABSTRACT

This study aims to present the fundamentally educational app Lensoo Create as an important educational tool to support the math teacher both basic education as higher education . We present here a brief tutorial on its use for teachers who want to use it as a working tool, and a DVD produced with this application with a video classes sequence on a mathematical content. The release of this DVD aims to achieve two objectives: first, to show teachers with a practical example , technical and educational potential of that application ; secondly, to introduce high school students an important mathematical content of mathematics this level of education with a focus that subsequently triggers the appropriation of concepts and ideas used in differential calculus .
Keywords: virtual whiteboard . Lensoo Create. Polynomial functions. Maxima and Minima of polynomial functions.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A sociedade contemporânea vive sob forte influência das novidades tecnológicas e digitais. Usa-se computadores, *tablets* e *smartphones* para otimizar trabalhos e compromissos da vida cotidiana, bem como para promover o entretenimento e a comunicação entre as pessoas.

O ensino e a aprendizagem também se beneficiam dessas novidades. Os *sites* de relacionamento, o uso de videoaulas, os *softwares* e aplicativos educacionais vêm transformando a maneira de ensinar e aprender.

Contudo, muitos dos professores que estão diuturnamente em sala de aula, principalmente aqueles da educação básica, dispõem geralmente de pouco tempo para se informarem acerca das novas ferramentas digitais que estão atualmente sendo produzidas para subsidiarem o Ensino a Distância e que podem ser utilizadas como instrumentos de apoio à sua prática docente. Foi motivado por essa constatação que decidimos produzir essa dissertação. Desse modo, resolvemos definir como objetivo principal desta dissertação apresentar o aplicativo Lensoo Create para os professores de matemática da educação básica, por meio da disponibilização de um DVD, com videoaulas de um conteúdo matemático do ensino médio, no qual exibimos as potencialidades desse aplicativo, e de um tutorial da utilização do Lensoo Create.

Este trabalho encontra-se estruturado em três capítulos. No capítulo 1, intitulado “Fundamentação Matemática” formalizamos e exemplificamos o conceito de função, função polinomial, função polinomial de grau 1, função polinomial de grau 2, máximo e mínimo de funções polinomiais e como determiná-los, tais tópicos são importantes para o entendimento da Física e Ciências afins.

Já no capítulo 2, intitulado “Fundamentação Teórico-Metodológica” destacamos o uso de algumas tecnologias que já estão sendo utilizadas no Ensino de Matemática e em EaD (KENSKI, 2012), discorremos cronologicamente, através de Borba, Silva e Gadanidis (2014), as quatro fases do uso das tecnologias na educação matemática no Brasil, bem como apresentamos as principais tecnologias utilizadas, apresentamos alguns aplicativos já utilizados no ensino de Matemática, e finalizamos com a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, importante para o aprendizado efetivo da Matemática.

No terceiro e último capítulo, intitulado “O aplicativo *Lensoo Create* como ferramenta didática” apresentamos o aplicativo educacional *Lensoo Create*, trazendo um breve tutorial de seu uso, e disponibilizamos um DVD produzido com esse aplicativo com uma sequência de videoaulas sobre um conteúdo matemático do ensino médio, visando atingir dois objetivos: em primeiro lugar, mostrar com um exemplo prático as potencialidades técnicas e didáticas do referido aplicativo; em segundo lugar, apresentar um conteúdo matemático importante da matemática do ensino médio com um enfoque que propicie posteriormente a apropriação de conceitos e ideias utilizados no Cálculo Diferencial.

1 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA.

Neste capítulo formalizamos e explicamos os conceitos de função, função polinomial, máximo e mínimo de funções polinomiais, de grande importância para o entendimento da Física e das Ciências afins.

1.1 Definição de função real

Muitas leis da física e da química, bem como muitos princípios ligados às engenharias, estabelecem como certas grandezas se relacionam. Essas relações assumem diferentes representações, tais como gráficos, fórmulas matemáticas, dados numéricos tabelados e/ou por palavras.

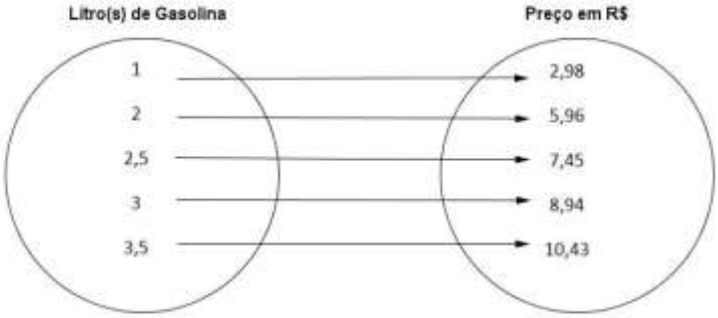
Segundo o historiador Boyer (1974), representante da historiografia tradicional da Matemática, um dos pioneiros a intuir essas ideias foi Leibniz[1], que cunhou o termo função para indicar a dependência de uma quantidade em relação a outra. A seguir, será definido informalmente o conceito de função do ponto de vista de relação entre grandezas, segundo Machado (2011).

Definição 1: Quando uma grandeza y depende de outra grandeza x, os valores de x e y podem ser postos em correspondência. Se para cada valor de x corresponder um único valor de y, então y é *função* de x.

A figura 1 ilustra um exemplo de função segundo a perspectiva dessa definição. Ela se refere à relação entre o preço y, em R$, pago pelo consumo do número x de litros de gasolina consumida.

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), nascido em Leipzig, Alemanha, foi uma das grandes personalidades do século XVII. Considerado por muitos como o último sábio a conseguir conhecimento universal. Seus interesses figuravam entre o Direito, a Filosofia, a Física e a Matemática. Nesta última, dedicou-se ao estudo de séries infinitas, determinantes e sistemas de equações lineares, mas sua grande façanha deu-se no desenvolvimento do Cálculo Integral. Pioneiro na lógica simbólica, foi ele quem usou pela primeira vez o símbolo $\int y$, e ainda mais tarde $\int y\,dx$, para designar integral. A ele também é atribuída a invenção da primeira máquina de calcular (BOYER, 1974).

Figura 1 – Diagrama da relação entre o litro de gasolina e o preço pago



Fonte: Autor, 2015

Nesse caso, dizemos que y é *função* de x. É comum dizer, também, que x é uma *variável independente* e y uma *variável dependente*.

Agora, se formalizará o conceito de função que convém nos estudos das disciplinas matemáticas atuais (ÁVILA, 2012). Tal conceito emergiu após os estudos de Fourier[2] sobre propagação de calor, e que foi melhor explicada num trabalho de Dirichlet[3] de 1837.

Atualmente, a definição de função é dada referenciando-a à linguagem de conjuntos (DANTE, 2010; LIMA *et al*, 1998).

Definição 2: Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma *função* de A em B é uma regra, representada por f, que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. Costuma-se escrever $y = f(x)$ para denotar o elemento y correspondente ao elemento x.

Retomando o exemplo citado anteriormente, sobre o número de litros x consumidos, e o preço do litro da gasolina y, implicará em:

$$y = 2{,}98x. \quad (1)$$

O domínio dessa função, nesse exemplo, é um subconjunto dos números racionais.

[2] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) foi um matemático e físico francês celebrado por desenvolver importantes estudos no campo das funções periódicas e séries trigonométricas convergentes, que mais tarde passariam a chamar-se séries de Fourier (BOYER, 1974).

[3] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) foi um matemático alemão que trouxe grandes contribuições para o campo da teoria dos números, análise e mecânica (BOYER, 1974).

Da fórmula anterior, podemos destacar a representação da mesma função através de uma lei matemática

$$f(x) = 2{,}98x. \text{ (2)}$$

Sendo assim, o preço de $x = 3$ litros de gasolina calculado pela fórmula (2) será $f(3) = 2{,}98 \times 3 = 8{,}94$ ou seja, pagar-se-á R$ 8,94 por 3 litros de gasolina.

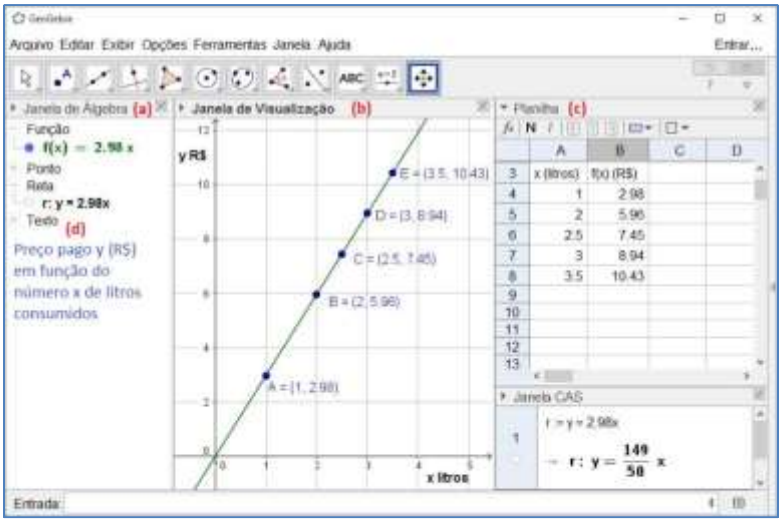
Como já foi dito antes, uma função pode ser representada de diferentes maneiras a depender de suas características, do interesse de quem a estuda, e para o que se destina.

A figura 2 a seguir foi extraída do *software* GeoGebra, e nos mostra as diferentes representações para a função do exemplo já citado, onde destaca-se: (a) representação gráfica; (b) representação matemática; (c) representação tabelada; (d) representação escrita.

Lembremos aqui a definição de gráfico de uma função.

Definição 3: O *gráfico de uma função f* de um conjunto *A* em um conjunto *B* é o conjunto de todos os pares ordenados *(a, f(a))*, com $a \in A$. Na linguagem dos conjuntos, o gráfico da função *f* é o conjunto *Graf (f)* dado por $Graf(f) = \{(a, f(a)); a \in A\}$.

Figura 2 – Diferentes representações de uma função



Fonte: Autor, 2015

Os modelos para funções são muitos, a depender do fenômeno estudado e da relação entre as variáveis x e y.

Quando se deseja entender fenômenos de crescimento vegetativo, como o número de indivíduos de determinada bactéria em relação ao tempo transcorrido, utiliza-se um modelo exponencial. Os fenômenos periódicos, como a posição de um corpo preso a uma mola que oscila em função do tempo, são representados por relações trigonométricas. Para o estudo de variações constantes, como, por exemplo, a relação entre o preço e o número de unidades de camisas produzidas por determinada fábrica, é comum usar-se modelos lineares. Em investigações de fenômenos que variam uniformemente, como a altura de uma pedra abandonada de uma torre em função do seu tempo de queda, utiliza-se geralmente um modelo quadrático.

Os dois últimos casos são exemplos de relações modeladas por um tipo especial de função bastante utilizada nas Ciências Exatas, as funções polinomiais, que daremos um tratamento especial na próxima seção.

1.2 Funções Polinomiais

O pensamento algébrico é um importante aliado no equacionamento de problemas de natureza real, tais como cálculo de áreas, volumes, e também nos serve para modelar fenômenos estudados pela Física e ciências afins.

Estudos indicam que as raízes do pensamento algébrico surgiram no mundo árabe por volta do século XI, e é atribuído o título de pai da Álgebra ao matemático e astrônomo al-Khowarizmi[4] (BOYER, 1974).

Agora, irá se formalizar o conceito de expressão algébrica e em seguida a definição de função polinomial, adaptadas de Dante (2010).

Definição 4: Chama-se *expressão algébrica ou polinomial* na variável complexa x toda expressão da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (3)$$

na qual:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes;
- n é um número inteiro positivo não nulo;
- o maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau da expressão.

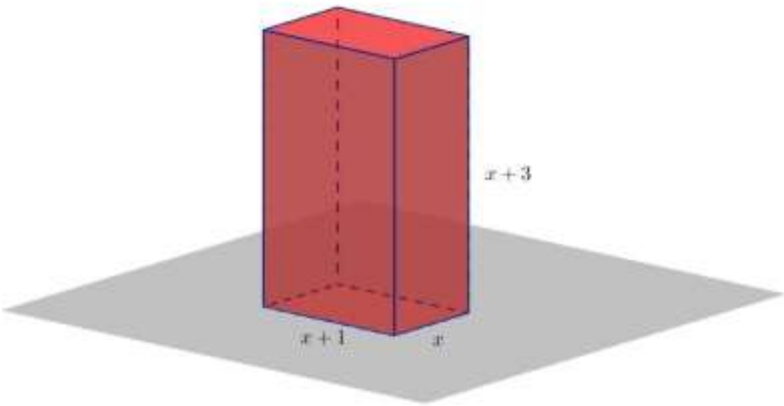
[4] Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi (?-850) foi um matemático, astrônomo e geografo árabe que viveu no século XI, e que fez parte da *Bait al-hikma* ("*A Casa da Sabedoria")* comparável ao antigo museu de Alexandria. A ele é atribuído o título de pai da Álgebra, mas o certo é que al-Khowarizmi apresentou, em sua obra *Al-jabr wa'l muqābala* ("livro do cálculo Algébrico e confrontação"), soluções de problemas envolvendo equações quadráticas diversas. Acredita-se que a palavra álgebra tenha sido originada da expressão árabe Al-jabr, daí o título atribuído à al-Khowarizmi (BOYER, 1974).

Sendo assim, o termo $3x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 7$ é uma expressão polinomial, na qual $a_3 = 3, a_2 = 4, a = -\frac{1}{2}$ e $a_0 = 7$ são os coeficientes da expressão polinomial e $n = 3$ é o grau da expressão.

O uso de expressões polinomiais é bastante comum em Modelagem[5] Matemática, para o equacionamento de problemas reais como é o caso do exemplo seguinte.

Deseja-se construir uma caixa no formato de um paralelepípedo reto com as dimensões $x \times (x+1) \times (x+3)$, em que x é medido em metros, como mostra a figura 3.

Figura 3 – Paralelepípedo reto



Fonte: Autor, 2015

Sabe-se pela definição do volume de paralelepípedo reto que

$$V(x) = x(x+1)(x+3). \ (4)$$

Aplicando as propriedades multiplicativas, obtém-se

$$V(x) = x^3 + 4x^2 + 3x. \ (5)$$

Assim, pode-se calcular o volume V da caixa em função da medida x de uma de suas dimensões. A expressão (6) é denominada função polinomial e sua definição será formalizada a seguir segundo Dante (2010).

[5] Modelagem Matemática: É descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma situação para uma situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final [...] essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012).

Definição 5: As funções complexas[6] $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por expressões polinomiais são denominadas *funções polinomiais*, sendo sua forma geral

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (6)$$

para todo x complexo[7], de grau n, em que n é um número inteiro positivo, sendo a_n diferente de 0.

Sendo assim, a função do exemplo anterior, definida por $V(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$, é uma função polinomial do 3º grau que modela o volume do paralelepípedo em função da comprimento x.

Adotando $x = 3$ cm, o volume do sólido será:

$$V(3) = (3)^3 + 4 \cdot (3)^2 + 3 \cdot (3), \quad (7)$$

$$V(3) = 27 + 36 + 9, \quad (8)$$

$$V(3) = 72 \text{ cm}^3. \quad (9)$$

Sendo assim, quando o comprimento é $x = 3$ cm o volume do paralelepípedo assume o valor $V(3) = 72$ cm³. O procedimento citado é denominado valor numérico da função polinomial V quando $x = 3$, e serve para se determinar o volume estabelecido o valor para o comprimento.

A figura 4 apresenta as diferentes representações para a função polinomial V; a sua fórmula matemática na janela de álgebra; o seu gráfico na janela de visualização; e alguns valores[8] tabelados na planilha. Pode-se notar também o par ordenado representado pelo ponto $A = (3{,}72)$, que destaca o valor numérico $V = 72$ m³ quando $x = 3$ m.

Convencionou-se adotar o intervalo real $]0, +\infty[$ para o domínio de V, entendendo ser coerente valores não negativos para x, uma vez que o problema trata do cálculo de um volume.

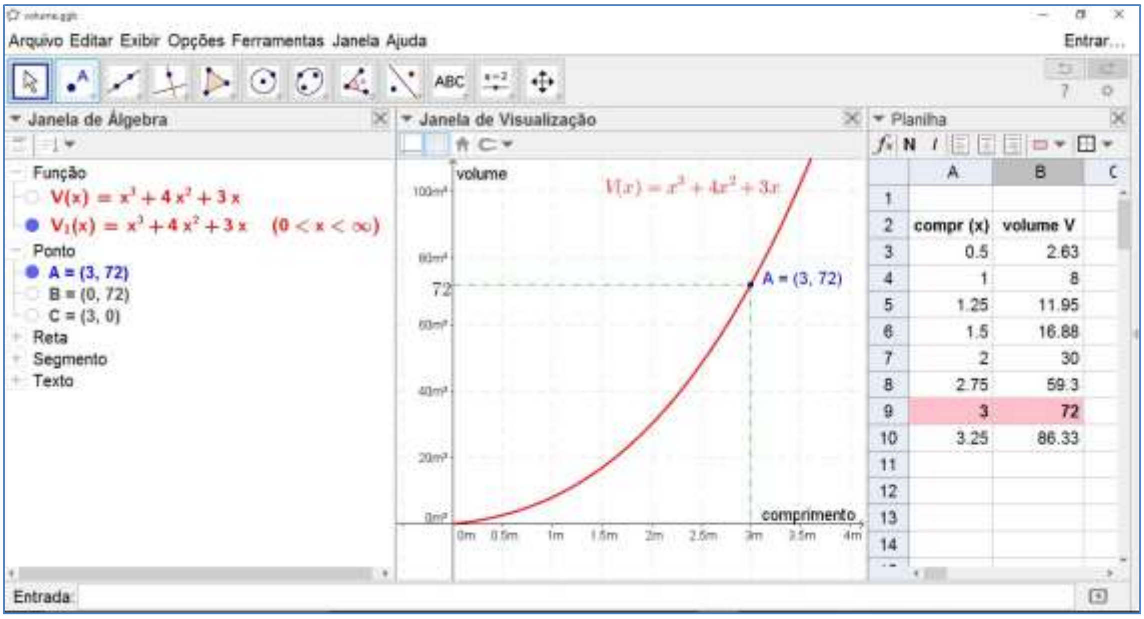
---

[6] Funções complexas são funções cujo domínio e o contradomínio são conjuntos formados por números complexos, isto é, seja D um conjunto de números complexos e seja f uma lei que faz corresponder, a cada elemento z do conjunto D, um único número complexo, que denotamos por $f(z)$. Nestas condições, diz-se que f é uma função com domínio D. O conjunto I dos valores $w = f(z)$, correspondentes a todos os valores de z em D, é chamado a imagem de D pela função f. (ÁVILA, 1993).

[7] Um símbolo da forma $a + bi$, onde a e b são dois números reais quaisquer, e $i = \sqrt{-1}$ denominado unidade imaginária, deve ser chamado de número complexo com parte real a e parte imaginária b. (COURANT, ROBBINS, 2000).

[8] Adotou-se na presente representação tabelada a aproximação numérica por arredondamento em duas casas decimais.

Figura 4 – gráfico da função polinomial V para $x > 0$



Fonte: Autor, 2015

Outra aplicação bastante útil do uso de funções polinomiais para descrever movimentos é descrita a seguir.

No estudo dos movimentos que possuem aceleração escalar constante (e não nula), denominados Movimentos Uniformemente Variados (MUV), utiliza-se funções polinomiais para descrever tanto a posição s do móvel como também a sua velocidade em relação ao tempo t transcorrido durante o movimento (RAMALHO, NICOLAU, TOLEDO, 2009).

O MUV é caracterizado pelas funções polinomiais

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (10)$$

e

$$v(t) = v_0 + at, \qquad (11)$$

também conhecidas, respectivamente, como *função horária do espaço* e *função horária da velocidade*, em que s_0 representa a posição inicial do móvel, v_0 a velocidade inicial (quando $t = 0$) e a a aceleração a que é submetido o móvel.

Aqui vale uma observação no tocante à simbologia das expressões matemáticas (10) e (11). É comum que um matemático utilize x para representar a variável independente t, e $f(x)$ para representar as variáveis dependentes $s(t)$ e $v(t)$. Supõe-se que esse fato esteja relacionado à característica generalizadora da Matemática, enquanto que a Física trata de problemas de natureza concreta.

As funções (10) e (11) são dois tipos especiais de funções polinomiais e serão tratadas na próxima secção bem como o estudo de seus pontos extremos.

1.3 Máximo e mínimo de uma função afim

A noção de proporcionalidade surge muito cedo na vida de uma criança, pois – a ideia de quanto mais se aumenta uma grandeza, maior será uma outra relacionada a ela – parece ser inerente ao pensamento humano. Além disso, tal noção está presente em vários fenômenos estudados pelas Física, Química e afins.

A seguir será dada a definição de proporcionalidade, retirada do livro Temas e Problemas Elementares, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e que serve de livro texto em minicursos voltados para aperfeiçoamento de professores de Matemática do Ensino Médio.

Definição 5: Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é *proporcional* a x quando:

1) As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Diz-se então que existe uma correspondência $x \mapsto y$ e que y é função de x.
   Quando escrevemos $x \mapsto y$ pretendemos dizer que y é o valor correspondente a x.
2) Quanto maior for x, maior será y. Em símbolos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
3) Se a um valor x_0 correspondente y_0 e c é um número qualquer, então o valor de y que corresponde a cx_0 é cy_0. Simbolicamente: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto cy_0$.

Um bom exemplo de uma lei física que pode ser modelada por proporção é a lei de Hooke[9].

Segundo a referida lei, a força $\vec{F}$ de uma mola é proporcional ao deslocamento $\vec{d}$ da extremidade livre a partir da posição que ocupa quando está no estado relaxado.

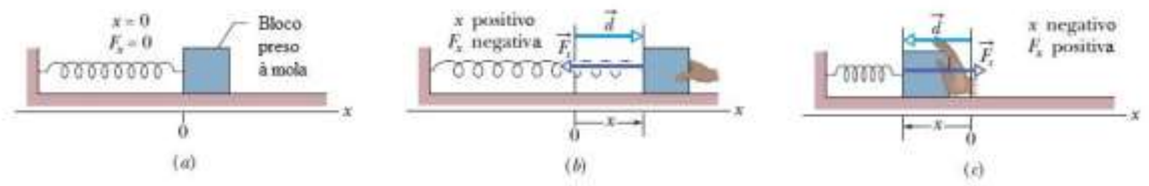
Essa força, denominada força elástica, é dada por:

[9] Robert Hooke (1635-1695) foi um renomado cientista experimental inglês e uma das figuras chaves da revolução científica. Foi um membro da renomada *Royal Society*, criada em 1662, sociedade científica que reuniu cientistas e pensadores como Newton e Leibniz. Entre suas principais obras estão a *Micrographia*, na qual descreve e interpreta vários fenômenos ligados à óptica das películas finas e transparentes; a identificação das células vegetais; e talvez a mais importante, a Lei de Hooke, fundamental para compreender e fornecer a descrição matemática do movimento oscilatório de corpos elásticos (BAPTISTA, FERRACIOLI, 2003).

$$\vec{F} = -k\vec{d}. (12)$$

A constante k depende da rigidez da mola: quanto mais rígida a mola, menor é o valor de k. O exemplo a seguir ilustra a Lei de Hooke.

Figura 5 – Lei de Hooke



Fonte: HALLIDAY, 2008

Seja uma mola, de constante elástica k, em seu estado natural. Tomemos uma força de intensidade 32 N (*Newtons*), aplicada como mostra a figura (5-b), provocando um deslocamento de 2,50 cm. Sendo assim, é possível determinar a sua constante k. De fato

Substituindo os valores de x e y, obtem-se

$$k = -\frac{(-32)}{2,50} \Longrightarrow k = 12,80. (13)$$

Sendo assim, a constante elástica da mola vale 12,80 N/cm ou 1280 N/m em unidades do Sistema Internacional.

Uma outra aplicação do uso da relação de proporcionalidade à Física encontra-se na Dinâmica[10], mais precisamente no Princípio Fundamental da Dinâmica, também conhecida como Segunda Lei de Newton[11], no qual afirmar-se que a aceleração adquirida por um corpo é diretamente proporcional à intensidade da resultante das forças que atuam sobre o corpo,

[10] Dinâmica é a parte da Mecânica que estuda os movimentos e as causas que os produzem ou os modifica (RAMALHO, NICOLAU, TOLEDO, 2009).

[11] Isaac Newton (1643-1727) nascido em Woolsthorpe, Inglaterra, é considerado por muitos como um dos maiores cientistas de todos os tempos. Desde muito cedo já mostrava habilidades matemáticas prodigiosas. Ao ingressar no Trinity College em 1661, teve acesso a grandes obras como a Óptica de Kepler, Geometria a Renato Des Cartes de van Schooten, as obras de Viète, e a Arithmetica Infinitorum de Wallis, que talvez o tenha influenciado mais profundamente. Seus interesses abrangiam a Astronomia, a Alquimia (mais tarde chamada Química), a Teologia, mas foi na Matemática e na Física que seu nome entrou de vez para a História da Ciência. Na Matemática desenvolveu trabalhos ligados a extração de raízes por métodos numéricos, trabalhou com séries infinitas que o possibilitou na descoberta do teorema binomial, porém sua grande façanha nessa área é a descoberta, junto com Leibniz, do Cálculo Infinitesimal, o que redeu uma disputa história entre os dois. Na Física seus trabalhos foram inúmeros, tendo com destaque especial a formulação da Lei da Gravitação Universal e a descoberta da natureza das cores (BOYER, 1974).

sendo a massa a constante de proporcionalidade, também definida como medida da inércia do corpo.

Do ponto de vista matemático tem-se a fórmula

$$\overrightarrow{F_R} = m \cdot \vec{a} \quad (14)$$

na qual,

- $\overrightarrow{F_R}$ representa a resultante das forças;
- $\vec{a}$ é a aceleração adquirida pelo corpo;
- m representa a constante de proporcionalidade massa.

Os exemplos abaixo ilustram a definição 5 de duas formas distintas, sendo no primeiro caso uma aplicação da regra de três simples, e o segundo caso a utilização da fórmula (14).

Um corpo de massa $m = 5{,}2$ kg, quando submetido a uma força resultante igual a 13 Newtons adquire uma aceleração de 2,5 m/s². Utilizando a regra de três para calcular a força necessária para que sua aceleração triplique, tem-se

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad (15)$$

daí obtém-se facilmente a igualdade seguinte

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot a_2}{a_1}. \qquad (16)$$

Tomando $F_1 = 13$ N, $a_1 = 2{,}5$ m/s² e $a_2 = 3a_1$ e aplicando-se as propriedades multiplicativas conclui-se que

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot 3a_1}{a_1} = 3F_1 = 3 \cdot 13 = 39 \text{ N}. \qquad (17)$$

ou seja, a força necessária para que a aceleração seja triplicada deve ser de 39 N, isto é, o triplo da força inicial.

Agora, o mesmo exemplo será resolvido pela fórmula (9), sendo $m = 5{,}2$ kg e a aceleração o triplo de $a = 2{,}5$ m/s², ou seja, $a = 7{,}5$ m/s². Sendo assim, tem-se

$$F = m \cdot a, \qquad (18)$$

$$F = 5{,}2 \cdot 7{,}5 = 39 \text{ N}. \quad (19)$$

onde verifica-se que em ambos os casos o triplo da intensidade da força resultante implica no triplo da aceleração adquirida pelo corpo.

Pode-se intuir que a ideia de proporcionalidade entre grandezas abre espaço para o modelo polinomial mais simples, o polinômio do 1ª grau ou função afim, uma vez que nela configura-se o princípio do pensamento linear.

A seguir será apresentado a definição de função afim, segundo Leithold (1994), livro utilizado nos cursos de graduação em Ciências Exatas.

Definição 6: Dados dois números reais a e b, a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ é chamada *função afim*. O coeficiente a é denominado *coeficiente angular* ou *taxa de variação*, e o coeficiente b é denominado *coeficiente linear* ou *intercepto*. Esse conceito inclui todas as funções cujos gráficos são retas:

- para $a = 0$, ela é a função constante $f(x) = b$,
- para $b = 0$, ela é a função linear $f(x) = ax$,
- para $a \neq 0$, ela é a função polinomial do 1º grau.

Como foi dito na definição 6, o gráfico da função afim é uma reta cuja inclinação está intimamente relacionada ao valor do seu coeficiente a. Ao coeficiente citado vale destacar ainda que:

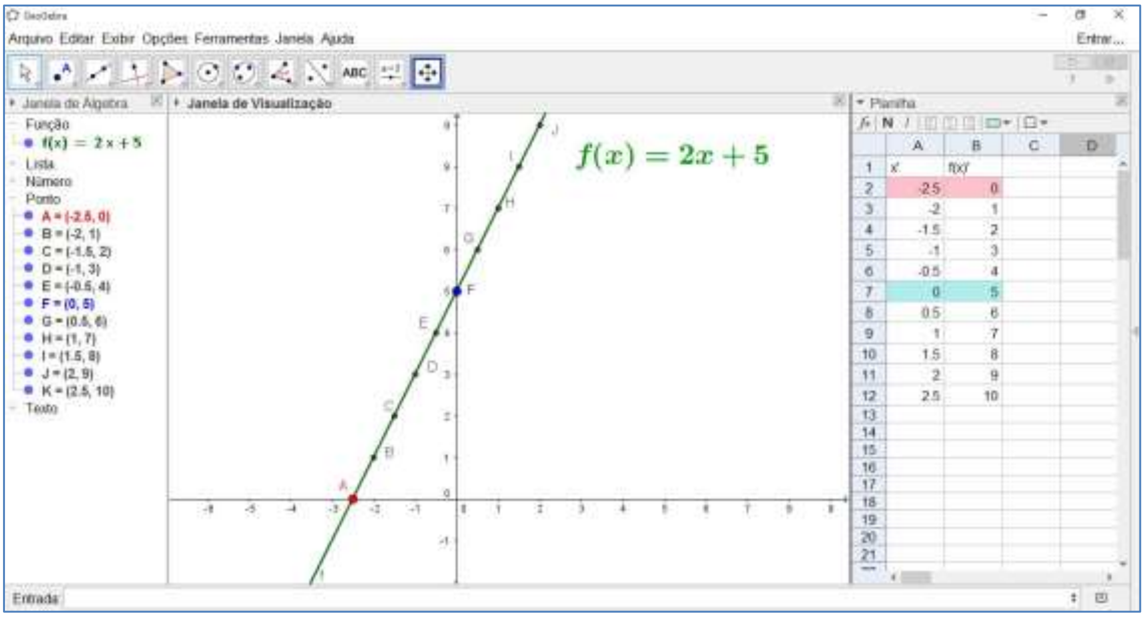
- para $a > 0$, os valores da função afim $f(x) = ax + b$ crescem quando x cresce. A função é dita *crescente*.
- para $a = 0$, os valores da função afim $f(x) = ax + b$ não variam quando x varia, sendo chamada *função constante*.
- para $a < 0$, os valores da função afim $f(x) = ax + b$ decrescem quando a variável x decresce. A função é dita *decrescente*.

A figura (6) destaca a função afim f nas representações algébrica, gráfica e tabelada. Pode-se notar, tanto pelo sinal do coeficiente a, como pelos valores da tabela, que f é uma função crescente, ou seja, $x_0 < x_1 \Longrightarrow y_0 < y_1$.

Vale destacar ainda os pontos A e F, cujas coordenadas representam os interceptos[12] x e y, respectivamente, sendo x_A a raiz (ou zero) de f, e y_F o seu valor inicial.

[12] Denominam-se intercepto x e intercepto y os valores onde a reta intercepta o eixo das abscissas e das ordenadas, respectivamente (LEITHOLD, 1994).

Figura 6 – Função afim crescente

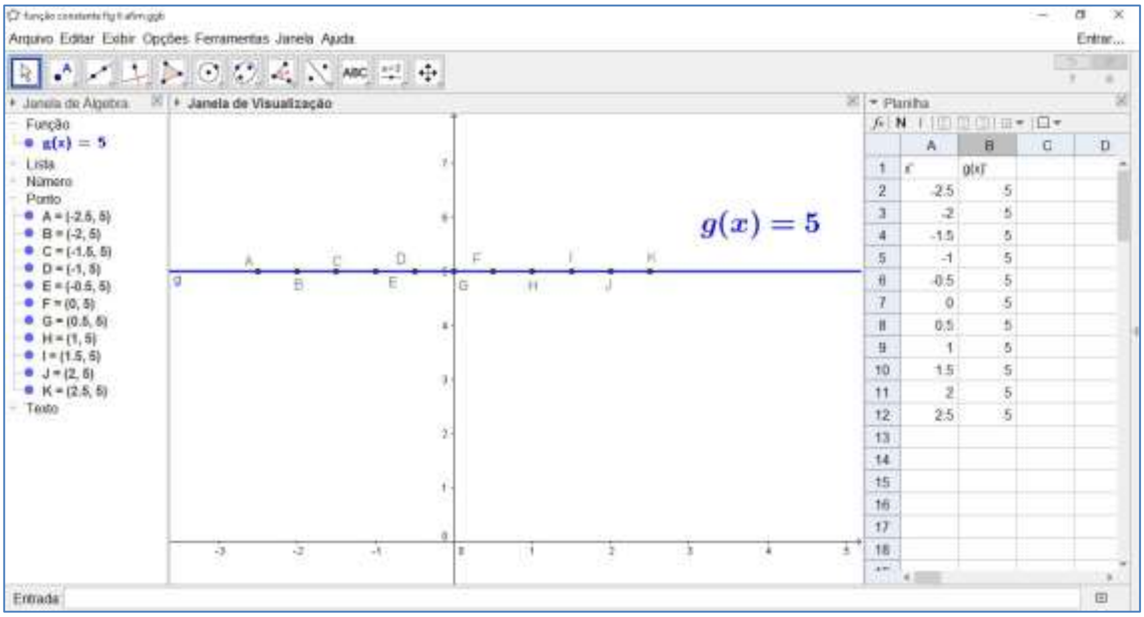


Fonte: Autor, 2015

A figura (7) dá destaque à função constante g onde nota-se, ora por intermédio de sua tabela, ora pela inclinação de seu gráfico – paralelo ao eixo das abscissas x – que mesmo x assumindo valores distintos, os valores de y permanecem constantes iguais a 5, isto é, $y = 5, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como o gráfico da função g é uma reta paralela ao eixo das abscissas, a função não toca o eixo x, tendo somente intercepto $y = 5$.

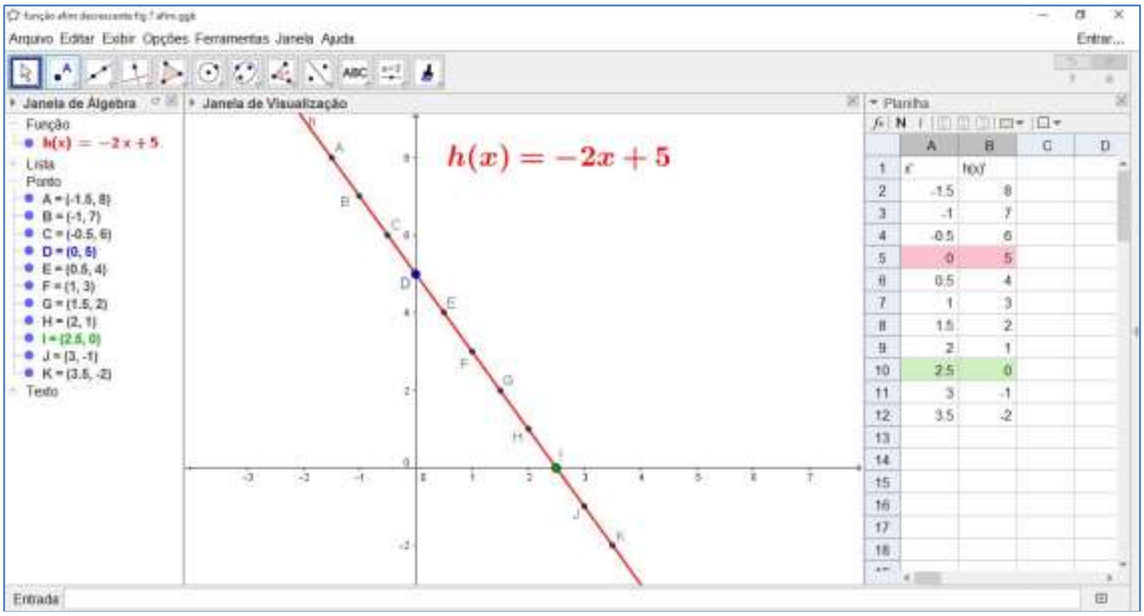
Figura 7 – Função constante



Fonte: Autor, 2015

A figura (8) ilustra a função afim h que, ao contrário da função f, para $x_0 < x_1 \Longrightarrow y_0 > y_1$, pois $a = -2 < 0$, caracterizando uma função decrescente. Nota-se ainda os pontos I e D, cujas coordenadas representam os interceptos x e y, respectivamente, sendo x_I o zero da função h, e y_D o seu valor inicial.

Figura 8 – Função afim decrescente



Fonte: Autor, 1015

Como se pode ver, o gráfico da função g mantém o mesmo valor da imagem y independentemente do valor do domínio x, fato que não ocorre nas funções f e h. Para essas duas últimas funções percebem-se variações nos valores da imagem y na medida em que se faz variar o x no domínio.

Nesse ponto, entende-se que, antes de prosseguir o estudo dos valores máximo e mínimo de uma função afim, necessita-se da definição de intervalo real, que será dada a seguir.

Definição 7: Sendo a e b dois números reais e $a < b$, destacam-se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- O conjunto formado pelos números reais compreendidos entre a e b, não incluindo a e b, é denominado intervalo aberto e representado por $]a; b[$ ou $(a; b)$.

$$(a; b) = \,]a; b[\, = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}. \ (21)$$

Representação geométrica:

Figura 9 – intervalo aberto $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$

Fonte: Autor, 2015

- O conjunto formado por a, b e pelos números reais compreendidos entre a e b, é denominado intervalo fechado e representado por $[a; b]$.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}. \ (22)$$

Representação geométrica:

Figura 10 – Intervalo fechado $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

Fonte: Autor, 2015

- O conjunto formado pelos números reais compreendidos entre a e b, incluindo a e excluindo b, é denominado intervalo semiaberto à direita e representado por $[a; b)$.

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}. \quad (23)$$

Representação geométrica:

Figura 11 – Intervalo semiaberto $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$

Fonte: Autor, 2015

- O conjunto formado pelos números reais compreendidos entre a e b, excluindo a e incluindo b, é denominado intervalo semiaberto à esquerda e representado por $(a; b]$.

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\}. \quad (24)$$

Representação geométrica:

Figura 12 – Intervalo semiaberto $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

Fonte: Autor, 2015

Há ainda os intervalos $(-\infty; a), (a; +\infty), (-\infty; a], [a; +\infty)$, cuja representação são semirretas de extremo a. É importante notar que os símbolos $-\infty$ (menos infinito) e $+\infty$ (mais infinito) não são números reais, portanto não podem ser operados como tais.

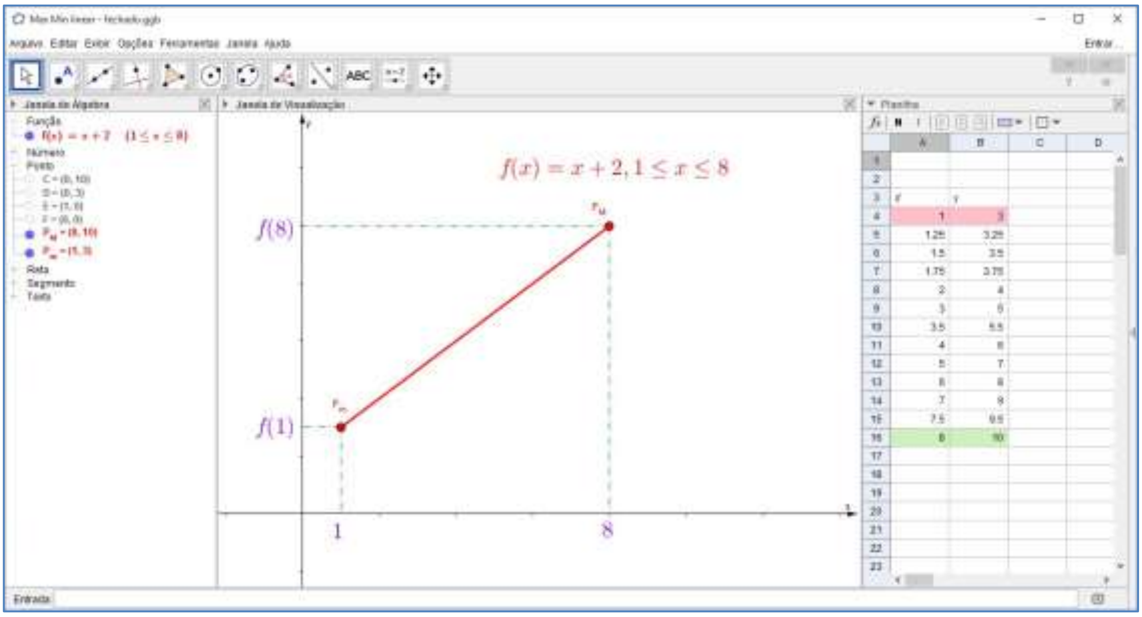
Definição 8: Sejam a e b, com $a < b$, extremos do intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e seja $f: I \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = mx + n$. Adotando-se $m > 0$, observa-se que:

- Se $I = [a; b]$, então $f(a) < f(x_0) < f(b)$, $\forall x_0 \in I$, com $a < x_0 < b$. Nesse caso dizemos que os pares ordenados $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ são, respectivamente, o *ponto mínimo* e o *ponto máximo* da função afim.
- Se $I = [a; b)$, então $f(a) \leq f(x_0)$, $\forall x_0 \in I$. Nesse caso dizemos que o par ordenado $(a, f(a))$ é *ponto mínimo* de f. Porém, a função não possui um *ponto máximo* pois $f(x_0) < f(b), \forall x_0 \in I$, e por definição $b \notin I$.
- Se $I = (a; b]$, então $f(x_0) \leq f(b)$, $\forall x_0 \in I$. Nesse caso dizemos que o par ordenado $(b, f(b))$ é ponto de máximo de f. Entretanto, a função não possui um ponto de mínimo uma vez que $f(a) < f(x_0), \forall x_0 \in I$, e por definição $a \notin I$.
- Se $I = (a; b)$, a função f nem possui ponto mínimo e nem possui ponto máximo, haja vista $f(a) < f(x_0) < f(b)$, $\forall x_0 \in I$ tal que $a < x_0 < b$, que por definição a e b não pertencem ao domínio I.

Um resultado análogo vale para o caso em que $m < 0$, desde que seja observado, pelo fato de f ser uma função decrescente, que para $a < x_0 < b$, com $x_0 \in I$ tem-se em todos os casos $f(b) < f(x_0) < f(a)$.

Como exemplo destaca-se a função afim $f(x) = x + 2$, apresentada na figura 13, cujo domínio é o conjunto fechado $I = [1,8]$. Pode-se notar que a função possui ponto mínimo em $P_m = (1; 3)$ e ponto máximo em $P_M = (8; 10)$.

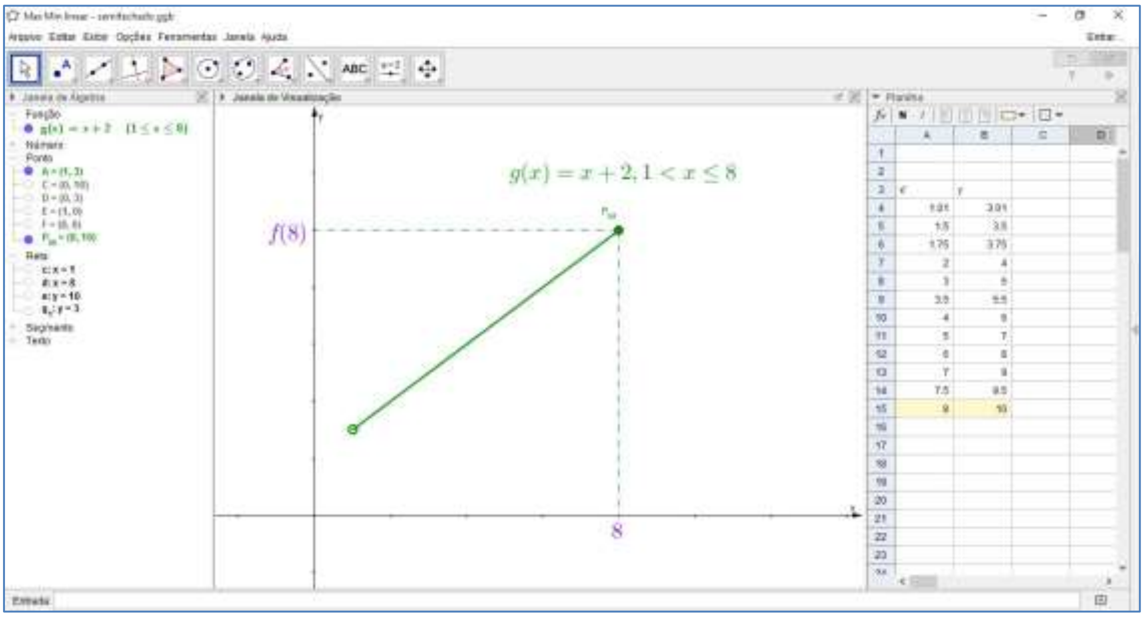
Figura 13 – Valor mínimo e máximo da função $f(x) = x + 2,\ I = [1; 8]$



Fonte: Autor, 2015

Já a figura 14 ilustra a função afim $g(x) = x + 2$, cujo domínio é o conjunto semifechado $I = (1; 8]$. Pode-se notar que a função possui apenas um valor máximo no ponto $P_M = (8; 10)$, não possuindo um valor mínimo pois $x = 1$ não está definido para a função.

Figura 14 – Valor máximo da função $g(x) = x + 2,\ I = (1; 8]$



Fonte: Autor, 2015

Dando continuidade ao estudo das funções polinomiais, irá se definir na próxima secção a função quadrática, bem como seus valores extremos.

1.4 Máximo e mínimo de funções quadráticas

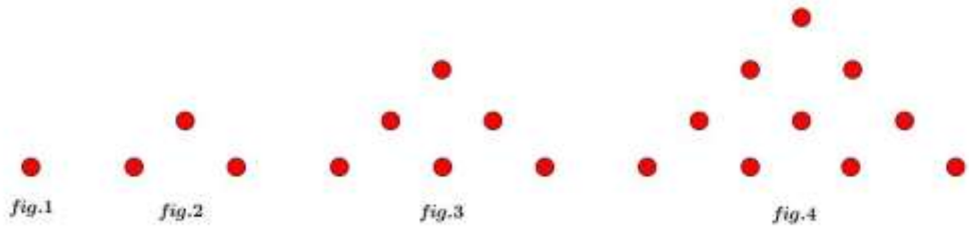
Quando um móvel se desloca no espaço em função do tempo ele descreve um caminho que pode ser modelado através de uma função matemática. Em particular, quando um corpo é arremessado obliquamente à superfície terrestre, a gravidade atua de modo a fazê-lo percorrer uma trajetória curva, denominada trajetória parabólica.

Além disso, muitas sequências[13] numéricas importantes tem seus termos gerais dados por funções quadráticas. Por outro lado, quando se estuda a relação entre os lados de um retângulo e a área delimitada pelo seu perímetro descobre-se uma relação quadrática, modelada por uma função polinomial do 2º grau.

Definição 9: Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *função quadrática* quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A sequência de números triangulares[14] apresentada na figura 15 tem seu termo geral dado por restrição de uma função quadrática que relaciona a posição p do termo com o número n de pontos, sendo $n = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p$.

Figure 15 – Sequência de números triangulares



Fonte: Autor, 2015

[13] Sequência numérica: é uma sucessão de números, chamados termos. Entende-se que os termos têm uma ordem definida, isto é, há um primeiro termo a_1, um segundo termo a_2, um terceiro termo a_3 e assim por diante, tipicamente escrita como $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (ANTON, BIVIENS, DAVIS, 2007).

[14] Números triangulares: Números como três, seis, dez, e quinze ou, em geral, números dados pela fórmula $N = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, eram chamados triangulares, pois assumem a forma triangular; e motivo de curiosidade e veneração pelos filósofos pitagóricos (BOYER, 1974).

Como se pode perceber, para a posição $p = 3$ o número de pontos será $n = 6$ pontos. De fato:

$$n = \frac{1}{2}(3)^2 + \frac{1}{2}(3) = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6. \quad (25)$$

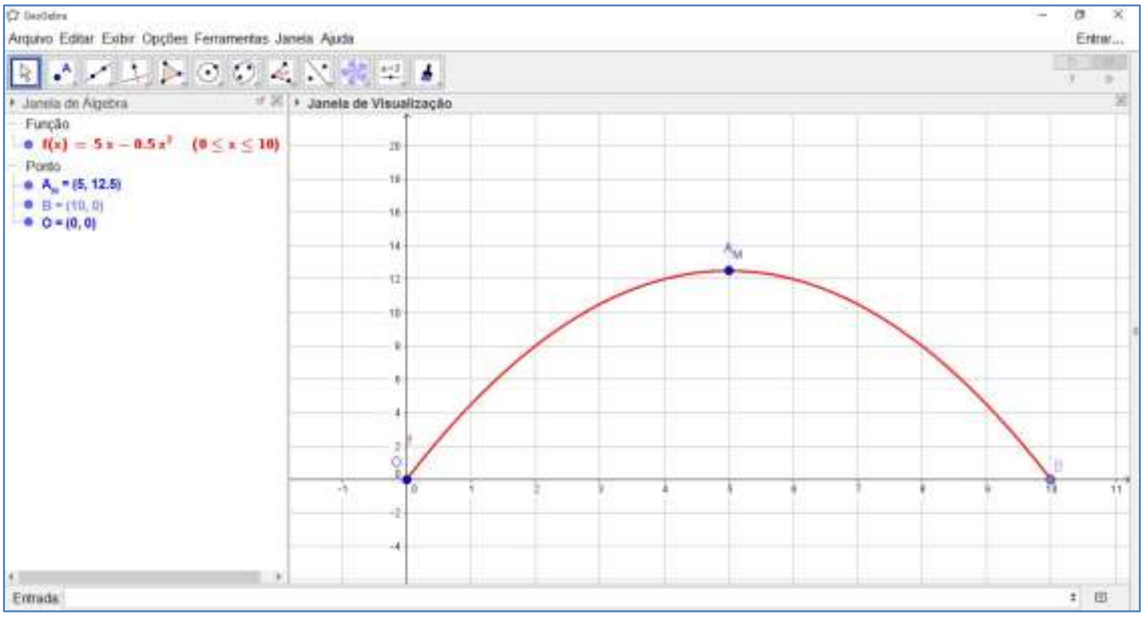
Assim como a posição $p = 10$ será dada por:

$$n = \frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{2}(10) = \frac{100}{2} + \frac{10}{2} = 50 + 5 = 55. \quad (26)$$

Uma outra aplicação das funções quadráticas pode ser encontrada em lançamentos oblíquos ao longo da superfície terrestre.

Imagine que um corpo lançado de certa posição inicial ao nível do mar, passe pela altura máxima de 12,5 metros quando estiver a 5 metros da origem, e chegando a um alcance máximo de 10 metros do ponto de partida voltando a permanecer a mesma altura do lançamento, como mostra a figura 16.

Figura 16 – Lançamento nas proximidades da Terra



Fonte: Autor, 2015

Assim, o lançamento citado é descrito pela função $f(x) = 5x - 0{,}5x^2$, no intervalo $0 \leq x \leq 10$, em que x é o tempo de voo e $f(x)$ é a altura atingida pelo objeto lançado.

Como se pode notar, o caminho descrito pelo projetil é uma curva cuja natureza está relacionada com a função que o modela. Destaca-se também o ponto $A_M = \left(5, \frac{25}{2}\right)$ no qual o projétil sofre mudança de sentido na sua trajetória.

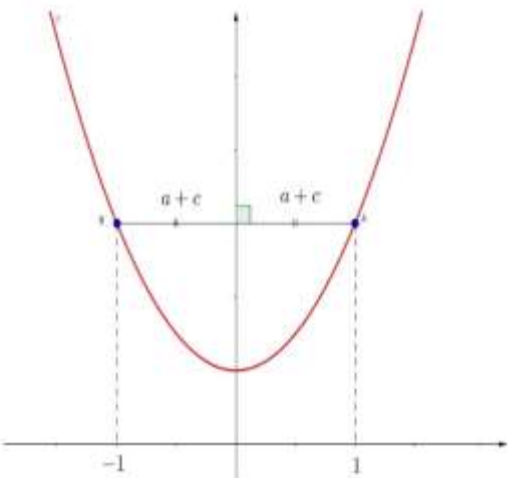
Teorema: O gráfico de uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma curva, denominado *parábola*, que possui um ponto chamado de *vértice da parábola*, que a divide simetricamente em duas partes (denominadas *ramos* da parábola), sendo um crescente e o outro decrescente. Além disso, as coordenadas do vértice V dessa parábola são dadas por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right). \ (27)$$

Demonstração: Admitiremos que o gráfico dessa função é uma parábola. (Ao leitor interessado na demonstração desse fato, recomendamos o livro de Lima *et al*. (1998, pág. 125 e seguintes).

Comecemos tratando da simetria de uma parábola dada como gráfico da função apresentada no enunciado do teorema. Para isso, considere na figura 17 o desenho de uma parábola que é o gráfico de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$. Ou seja, o caso no qual *b = 0.*

Figura 17 – Simetria da parábola



Fonte: Autor, 2015

Note inicialmente que para essa função $f(1) = f(-1) = a + c$.

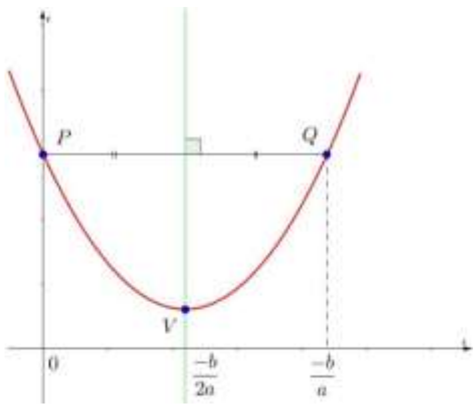
Mais geralmente, uma conta fácil mostra que para todo número real r vale a seguinte igualdade:

$$f(r) = f(-r) = ar^2 + c. \text{ (28)}$$

Vê-se dessa maneira que o eixo dos y é um eixo de simetria desse tipo de parábola.

Vamos, então, para o caso $b \neq 0$, a função é $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Para $x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$, temos $y = c$. Então, os pontos $P = (0, c)$ e $Q = \left(-\frac{b}{a}, c\right)$, de mesma ordenada, pertencem à parábola. O eixo de simetria é a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$: a reta formada pelos pontos de abscissa $\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)}{2}$, o mesmo que $\left(-\frac{b}{2}\right)$.

Figure 18: Abscissa do vértice da parábola



Fonte: Autor, 2015

Nesse caso, $x_v = -\frac{b}{2a}$, fórmula equivalente também para o caso $b = 0$. Com isso conclui-se que, em toda parábola $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, a abscissa do vértice é $x_v = -\frac{b}{2a}$.

O cálculo da ordenada do vértice y_v pode ser feito determinando-se a imagem de $x_v = -\frac{b}{2a}$, isto é, substituindo x por x_v. Assim, teremos:

$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c = x_v(ax_v + b) + c, \qquad (29)$$

$$y_v = -\frac{b}{2a} \cdot \left(\cancel{a} \cdot \frac{-b}{2\cancel{a}} + b\right) + c = \frac{-b}{2a} \cdot \frac{b}{2} + c = \frac{-b^2+4ac}{4a}. \qquad (30)$$

Logo,

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}, \qquad (31)$$

que é o resultado que queríamos provar.

Passemos, agora, a fazer algumas considerações acerca da concavidade de uma parábola. Quando os ramos de uma parábola se abrem para baixo como na figura 16, dizemos a parábola possui sua *concavidade voltada para baixo*. Quando os ramos se abrem para cima, como na figura 17, dizemos que a parábola possui *concavidade voltada para cima*.

A concavidade da parábola está intimamente relacionada ao valor do coeficiente a. Quando $a > 0$, a parábola tem sua concavidade voltada para cima e a função f atinge seu valor mínimo na abscissa do seu vértice. Quando $a < 0$, a parábola tem sua concavidade voltada para baixo e a função f atinge seu máximo valor no vértice.

Definição 10: Seja f uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, x real. Um ponto de abscissa x_0 é *ponto de mínimo* da função f quando $f(x_0) \leq f(x), \forall x\ real$. Se x_0 é *ponto de mínimo* da função *f*, então $f(x_0)$ é chamado valor mínimo da função *f*. Um ponto de abscissa x_0 é *ponto de máximo* da função f quando $f(x_0) \geq f(x), \forall x\ real$. Se x_0 é *ponto de mínimo* da função *f*, então $f(x_0)$ é chamado *valor máximo* da função *f*.

Com relação ao parâmetro b, Dante (2010) explicita que: quando $b > 0$, a parábola intersecta o eixo y no seu ramo crescente; quando $b < 0$, a parábola intersecta o eixo y no seu ramo decrescente; quando $b = 0$, a parábola intersecta o eixo y no vértice. Já o parâmetro c indica o ponto onde o gráfico toca o eixo y.

1.5 Método de Fermat para a determinação dos pontos de máximo e de mínimo

Fermat observou que poderia determinar os pontos de máximo e de mínimo de uma função polinomial por um argumento geométrico (BOYER, 1974). Nos próximos parágrafos apresentamos uma adaptação do argumento desse importante matemático francês, o qual julgamos compreensível para estudantes do ensino médio. (Nesta seção tomamos como referência básica o livro de história da matemática do Boyer (1974).)

Suponha que $(x_0, f(x_0))$ é um ponto do gráfico da função dada por

$$f(x) = -x^2 + 4x, \quad (32)$$

que é um ponto de máximo dessa função polinomial. Considere a inclinação da reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e por um outro ponto $(x_0 + E, f(x_0 + E))$ do gráfico da função $f(x)$ dada, situado próximo ao ponto $(x_0, f(x_0))$. A inclinação dessa reta secante *s* que corta o gráfico da função *f* em dois pontos é dada pelo quociente

$$q(x_0, E) = \frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}. \quad (33)$$

Daí obtemos a seguinte igualdade

$$q(x_0, E) = \frac{-(x_0+E)^2+4(x_0+E)-(-x_0{}^2+4x_0)}{E}. \quad (34)$$

Desenvolvendo as operações indicadas no numerador desse último quociente chegamos ao seguinte resultado

$$q(x_0, E) = \frac{-2x_0E+E^2+4E)}{E}, \quad (35)$$

donde segue-se que

$$q(x_0, E) = -2x_0 + E + 4. \quad (36)$$

Entretanto, Fermat observa que quando E se aproxima de zero essa reta secante *s* vai tendendo para a posição horizontal. Mas uma reta horizontal tem inclinação zero. Então a inclinação da reta horizontal, a qual denotaremos doravante por $q(x_0)$, deve se anular quando $E = 0$. Ou seja, é necessário que tenhamos a seguinte identidade $q(x_0) = q(x_0, 0) = 0$.

Dessa última identidade e da igualdade (31), obtemos $-2x_0 + 4 = 0$. Daí, $x_0 = 2$ é o ponto de máximo da função *f*.

Fermat conclui que esse procedimento pode ser estendido para qualquer função polinomial. Seja, propõe que o ponto de máximo de uma função polinomial *f* pode ser encontrado por meio da equação

$$q(x_0) = q(x_0, 0) = 0, \quad (37)$$

Onde

$$q(x_0, E) = \frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}. \text{ (38)}$$

Apliquemos essas ponderações para o caso particular de uma função quadrática. Para isso, considere a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e calculemos a inclinação $q(x_0)$ da reta tangente ao gráfico de f num ponto de abscissa x_0 em que ela atinge o seu valor máximo. Neste ponto a inclinação da reta tangente é horizontal. Logo, nesse ponto a inclinação da reta tangente ao gráfico deve ser zero. Ou seja, é necessário que tenhamos

$$q(x_0) = 0. \text{ (39)}$$

Por definição, sabemos que

$$q(x_0, E) = \frac{f(x_0+E)-f(x_0)}{E}. \text{ (40)}$$

Desenvolvendo, obtemos

$$q(x_0, E) = \frac{a(x_0+E)^2+b(x_0+E)+c-\left(ax_0{}^2+bx_0+c\right)}{E}, \text{ (41)}$$

$$q(x_0, E) = 2ax_0 + aE + b. \text{ (42)}$$

Segue-se de (32) que

$$q(x_0) = q(x_0, 0) = 2ax_0 + b. \text{ (43)}$$

Sendo assim, para determinarmos o valor extremo de f toma-se $q(x_0) = 0$, ou seja,

$$q(x_0) = 0 \therefore 2ax_0 + b = 0. \text{ (44)}$$

Donde se conclui facilmente que

$$x_0 = -\frac{b}{2a}. \text{ (45)}$$

Notemos que esse valor de x_0 coincide com o valor da abscissa $x_v = -\frac{b}{2a}$ do vértice do gráfico da função quadrática que estamos considerando. Portanto, o valor máximo dessa função é dado pela ordenada do vértice do gráfico da função f, ou seja, por

$$y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}, \text{(46)}$$

Como já foi provado anteriormente.

Finalizamos este capítulo, ressaltando que o estudo dos extremos (máximo e mínimo) de uma função é fundamental para entendermos o comportamento de determinados fenômenos estudados pela Ciência, em particular pela Física. De um lado, pensar em abordagens que possam despertar o interesse dos alunos do Ensino Médio para a compreensão desses conceitos é de grande importância para o Ensino de Matemática. Por outro lado, o uso de tecnologias digitais vem ganhando a simpatia dos estudantes. Logo, proponho aqui que o domínio de ferramentas digitais pelo docente pode ser de muito proveito didático não apenas na educação superior, mas também na educação básica. Sendo assim, o próximo capítulo tratará de destacar algumas tecnologias já utilizadas no Ensino. Esperamos, dessa maneira, convencer o leitor da importância da escolha do tema dessa dissertação.

2 NOVAS TECNOLOGIAS E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Este capítulo tem por objetivo destacar algumas tecnologias que já estão sendo utilizadas no Ensino de Matemática e na Educação a Distância (EaD), bem como apresentar as teorias que subsidiaram a elaboração do produto educacional, objetivo final que pretendemos atingir nesta etapa final do nosso curso de mestrado.

2.1 As novas tecnologias no ensino de Matemática

A vida humana, em seus diferentes segmentos, respira a velocidade das inovações tecnológicas. A Ciência, por exemplo, a utiliza para simular aspectos do Universo, na busca de vacinas e tratamentos de doenças, no estudo de técnicas mais eficazes que beneficiem a agricultura e a pecuária, no estudo das variações climáticas. Essas inovações também já fazem parte da vida do cidadão comum.

De um modo cada vez mais rápido os computadores pessoais ganham maior poder de processamento e armazenamento de dados, as interfaces ficam mais amigáveis facilitando a interação com os usuários. Além disso, com a popularização e o aumento da velocidade da internet mais usuários usufruem das benesses da grande rede.

Nos dias atuais, utiliza-se o computador, *tablets* e *smartphones* conectados à rede para realizar as mais variadas tarefas tais como pagamentos bancários, compras em lojas virtuais, pedido de taxis, consultas meteorológicas, verificação do horário de transportes coletivos, marcação de consultas médicas, comunicação e informação, facilitando a vida cotidiana das pessoas.

Mas não basta possuir um computador, um *tablet* ou um *smartphone*, é preciso saber utilizá-los. Para Kenski (2012), a utilização de alguma inovação, seja ela de qualquer tipo, como um processo, um serviço ou um produto, precisa ser informada e aprendida. Essas novas aprendizagens, quando colocadas em prática, reorientam todos os processos de descoberta, relações, valores e comportamentos.

Para Pierre Lévy (1998), filosofo da corrente denominada Cibercultura[15], a hegemonia de determinadas tecnologias – desenvolvidas para garantir ao homem a superação

[15] A Cibercultura é produzida no ciberespaço que é um novo meio de comunicação que surge da interconexão de computadores, na qual ela emerge e se transforma. O termo [ciberespaço] especifica não apenas a infraestrutura material da comunicação digital, mas também o universo oceânico de informação que ela abriga, assim como os seres humanos que navegam e alimentam esse universo. Quanto ao neologismo "Cibercultura", especifica aqui o conjunto de técnicas (materiais e intelectuais), de práticas, de atitudes, de modos de pensamento e de valores que se desenvolvem juntamente com o crescimento do ciberespaço (LÉVY, 1999, p. 17).

de obstáculos naturais e a sua sobrevivência com melhor qualidade de vida, em cada lugar e em cada época – necessariamente encaminha as pessoas para novas aprendizagens.

Ressalta-se a importância da apropriação da tecnologia para suprir as necessidades atuais e futuras. Com efeito,

> Dominar tecnologia é tão importante quanto aprender a desenhar, escrever ou se comunicar, pois é uma forma de expressar a criatividade. Quando estudam programação, as pessoas não só aprendem a programar como também programam para aprender. Ao programar, as crianças aprendem a solucionar problemas, a comunicar suas ideias e a planejar. Essas habilidades serão úteis não apenas para cientistas da computação, mas para qualquer pessoa, independentemente da idade, da experiência, do interesse ou da profissão que optar seguir (RESNICK, 2014, p. 45).

As afirmações anteriores confirmam o que já se pode notar com relação à educação e à aprendizagem. Basta um passeio pelo *Facebook* ou *YouTube* para perceber a grande variedade e número de canais voltados para orientação de jogos, dicas de receitas culinárias, e aulas virtuais de diferentes disciplinas e assuntos.

Nesse ambiente tecnológico é possível perceber o surgimento de cenários e oportunidades para a aprendizagem da Matemática de maneira a pôr o aprendiz e o professor em movimento.

Para Gravina e Santarosa (1998), tais ambientes podem proporcionar o “fazer matemática”, que consiste em experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e demonstrar, colocando assim o aprendiz como sujeito ativo na construção do próprio conhecimento.

Uma breve consulta em *sities* de busca nos revela um número expressivo de trabalhos e pesquisas em educação matemática realizados no Brasil.

> Quando olhamos grande parte das pesquisas em educação matemática desenvolvidas no Brasil nos últimos trinta anos, notamos diversificados contextos, propostas e perspectivas com relação ao uso didático e pedagógico de tecnologias para investigação matemática. (BORBA, 2012, p. 18)

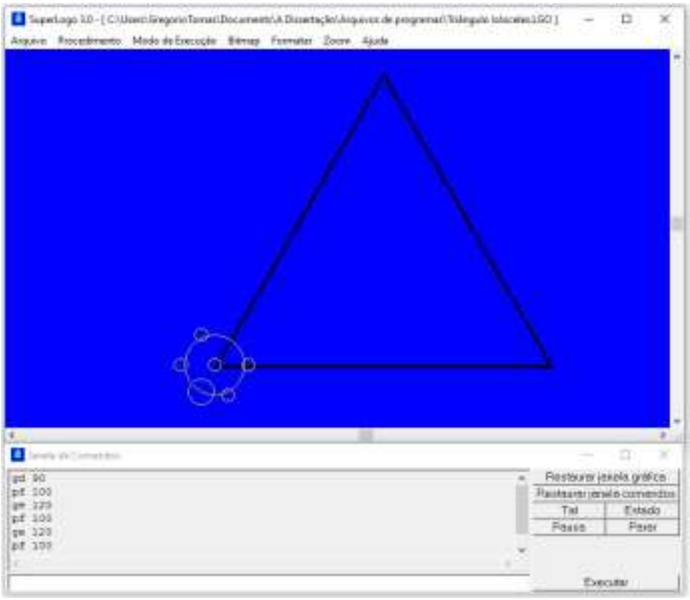
As pesquisas na área de tecnologia voltadas ao ensino de matemática têm seu início por volta dos anos de 1980, e de lá até os dias atuais houveram mudanças significativas que vão desde as tecnologias utilizadas aos processos metodológicos e pedagógicos.

De acordo com os autores Borba, Silva e Gadanidis (2014), é pertinente e interessante observar de modo argumentativo quatro fases cronológicas do uso das tecnologias na educação matemática no Brasil.

A primeira fase, cujo período é marcado no ano de 1985, tem como característica fundamental o uso do software LOGO, baseada na perspectiva teórica do construcionismo[16]. Nele, o aluno pode estabelecer relações entre representações algébricas (os comandos) e representações geométricas dinâmicas (os movimentos executados pelo cursor). É nessa fase também que surge a perspectiva de que as escolas poderiam ou deveriam ter laboratórios de informática, e o uso de calculadoras simples e científicas. O foco principal desse período está na capacitação e formação do professor para o uso dos meios tecnológicos e as suas potencialidades para uma mudança pedagógica.

A figura 19 representa um triângulo Isósceles criado a partir de uma versão de 2004 do software LOGO, onde se pode notar o cursor em forma de tartaruga.

Figura 19 – Software SuperLogo



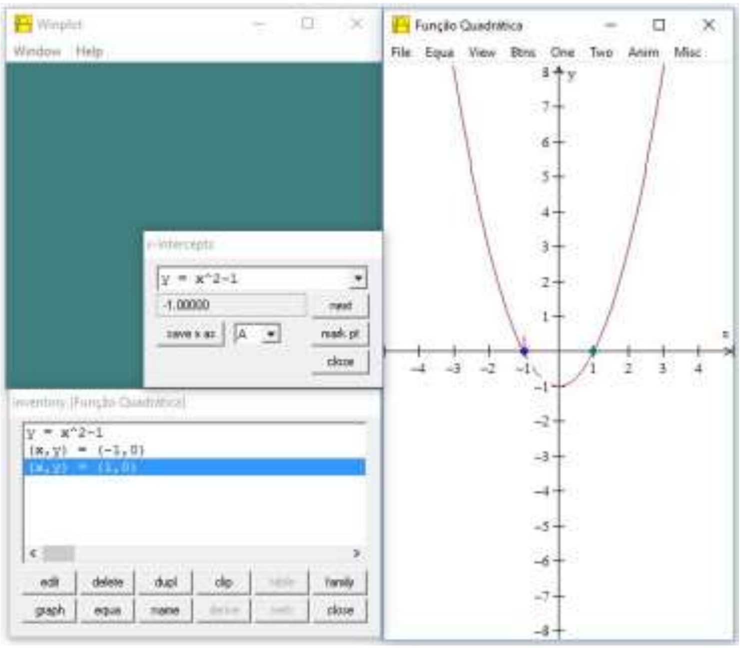
Fonte: Autor, 2016

[16] Construcionismo: é uma teoria educacional (ou de aprendizagem) desenvolvida pelo matemático Seymour Papert, que se baseia, principalmente, na teoria epistemológica desenvolvida por Jean Piaget, a qual procura explicar o que é conhecimento e como ele é desenvolvido pelas pessoas em diferentes momentos de suas vidas. De acordo com Piaget, as pessoas constroem conhecimento na medida em que agem sobre o objeto de conhecimento (uma coisa, uma ideia ou uma pessoa) e sofrem uma ação deste objeto. (MALTEMPI, 2005, p. 2)

A segunda fase, que acontece na primeira metade dos anos 1990, é marcada pelo acesso e popularização do computador. Nessa fase destaca-se o uso de softwares voltados às múltiplas representações de funções (como o Winplot, o Fun e o Graphmathica) e de geometria dinâmica[17] (como o Cabri Géomètre e o Geometricks). Tais programas possuem interfaces amigáveis, proporcionando uma interação maior do usuário com os objetos gráficos e os comandos dos softwares. É também nessa fase que se passa a ter uma perspectiva maior em relação a todos os envolvidos no processo de ensino (professor, alunos e pesquisadores).

A figura 20 é uma representação gráfica através do software Winplot da função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 1$, e os pontos que representam os seus zeros. Nela observa-se uma interface amigável utilizada através das caixas de diálogos.

Figura 20 – Software Winplot



Fonte: Autor, 2016

Vale destacar aqui a utilização do software Winplot pelo autor em sua graduação, primeira metade dos anos 2000, para o estudo de funções na disciplina de Cálculo Diferencial.

A terceira fase tem seu início pontuado por volta de 1999, e sua característica principal é o advento da internet. Nessa fase a internet começa a ser utilizada como fonte de informação e comunicação entre alunos e professores. Há também o surgimento de cursos à

---

[17] Geometria dinâmica é a geometria proporcionada por programas gráficos, no qual se destaca o dinamismo atribuído às possibilidades da utilização, manipulação, combinação, visualização e construção virtual de objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação. (BORBA, SILVA, GADANIDIS, 2014, p. 23)

distância para formação continuada de professores através de videoconferências, e-mails, *chats* e fóruns de discussões. É nessa época que surge expressões como “Tecnologia da Informação” (TI) e “Tecnologia da Informação e Comunicação” (TIC).

As interações virtuais nesses ambientes passam a dividir-se em duas modalidades; as interações assíncronas, que são caracterizadas pela comunicação divididas em momentos (envio e recepção de mensagens diferidos no tempo) tais como fóruns de discussões e e-mails; e síncronas que exige que os interlocutores estejam conectados ao serviço no mesmo momento para que haja a troca de mensagens online, citando como exemplo o uso de *chats*.

Essas interações passam a acontecer ambientes próprios de maneira organizada prenunciando os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA), espaços eletrônicos construídos para permitir a veiculação e interação de conhecimentos e usuários, e que dão suporte para a utilização de diversos tipos de linguagens e gêneros digitais.

A figura 21 representa o *Moodle* (*Modular Object Oriented Distance Learning*), um dos principais representantes do AVA, caracterizando-se por ser um espaço aberto para gerenciamento de cursos, destinado a produção e viabilização de cursos *online*.

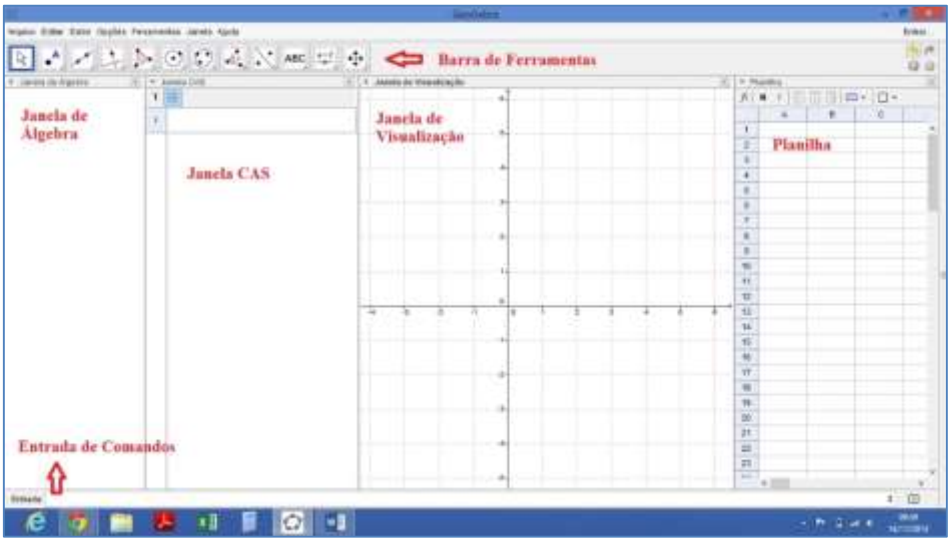
Figure 21 – Moodle da Universidade Federal de Alagoas - UFAL

Fonte: Autor, 2016

A quarta fase (presente momento), que teve seu início em meados de 2004, é marcada pela internet de alta velocidade. Além disso, tem por características diversos aspectos que merecem um olhar especial, e serão listados a seguir.

1) Software Multiplataforma[18] GeoGebra: software de Matemática dinâmica que junta geometria, álgebra, tabelas e cálculos, e com isso possibilita o ensino-aprendizagem nos diferentes níveis de ensino, desde o Ensino Fundamental e Médio à Universidade. O programa permite, além de proporcionar múltiplas representações de um mesmo objeto matemático, que o usuário possa explorar suas construções matemáticas de modo a manipulá-las com movimentos interativos, e assim descobrir as propriedades e padrões matemáticos que seriam estáticos na abordagem quadro-pincel-voz.

Figure 22 – Software GeoGebra



Fonte: Autor, 2016

2) Multimodalidade: variadas formas de comunicação passaram a estar presentes no ciberespaço, em destaque as audiovisuais, facilitadas pelo fácil acesso a vídeos em plataformas ou repositórios (*YouTube* e *TEDTalks*), colocando também o usuário como produtor de vídeos e conhecimento. Tecnologias móveis e portáteis: destaque para os *smartphones*, *tablets*, *laptops*, dentre outros, que passaram a possuir multifuncionalidades com suas câmeras digitais, jogos e uma extensa variedade de aplicativos. Além disso, vê-se a multiconectividade e acesso em tempo integral à internet. A tecnologia *Touch Screen* ganha popularidade e passa a ser acessível a grande parte das pessoas.
3) Performance e conectividade: Estar online em tempo integral é uma característica da fase atual, incluindo a sala de aula e com isso exigindo uma reorganização de dinâmicas e

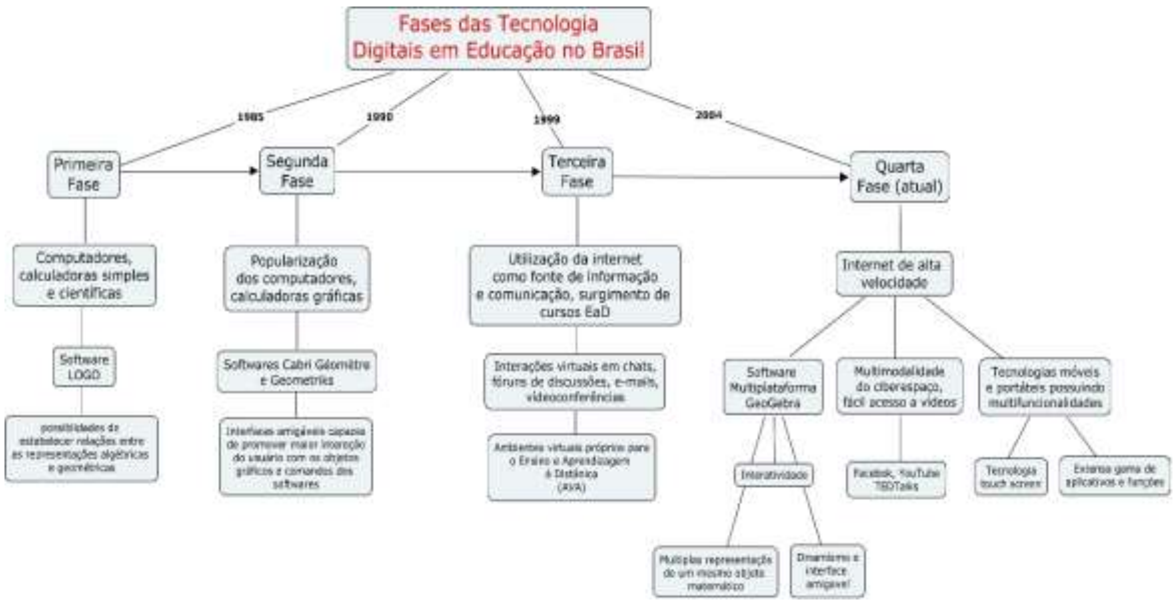
[18] Software Multiplataforma: programa ou sistema que pode ser executado em mais de um equipamento (computador, *tablet*, *smartphone*) ou em mais de uma plataforma, e seu ponto forte é a portabilidade.

interações nos ambientes escolares. Vê-se o compartilhamento de vídeos (*YouTube*) nas redes sociais (*Facebook*) dos mais variados temas e assuntos.

4) A Matemática ganha outras dimensões: o conhecimento matemático do estudante passa a ir além da sala de aula e torna-se compartilhado no ciberespaço, estando presente em diversos diálogos e cenários sociais. A matemática se alia as artes e a comunicação e transforma os estudantes e professores em artistas produtores de materiais audiovisuais disseminados na internet.

A figura 23 apresenta o mapa conceitual das quatro fases bem como destaca suas características e pontos importantes.

Figure 23 – Mapa conceitual das fases das tecnologias digitais



Fonte: Autor, 2015

Para Borba, Silva e Gadanidis (2014), tais aspectos causam inquietações, questionamentos e perguntas a serem formuladas, caracterizando a quarta fase como um grande laboratório, favorável ao desenvolvimento de investigações e pesquisas.

O próximo tópico tratará de alguns aplicativos utilizados para o ensino de matemática, inclusive para a modalidade à distância.

2.2 Aplicativos e Educação à Distância:

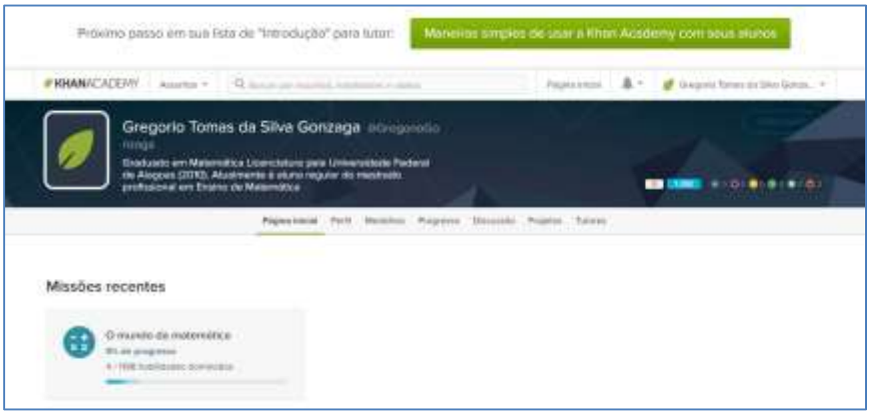
Os *smartphones*, *tablets* e *laptops* ganharam a simpatia dos usuários não apenas por serem portáteis e de fácil operação. A multifuncionalidade proporciona ao usuário usufruir de diversos aplicativos tais como câmeras digitais de alta performance, leitores de texto, editores de vídeo e imagem, acesso às redes sociais dentre outras utilidades.

No ano de 2004, um jovem analista do mercado financeiro norte-americano, chamado Salman Khan, formado pelo conceituado Massachusetts *Institute of Technology* (MIT) e com MBA pela *Harvard Business School*, foi solicitado por familiares a ajudar sua prima mais nova que estava tendo dificuldades com os conteúdos de Matemática. Porém, havia um detalhe crucial, sua prima morava em Nova York e Salman morava em Boston, cidades distantes 345 km.

Para resolver o problema, Khan começou a dar aulas por telefone e via *Skype* a sua prima, mas logo surgiram outros familiares interessados. Com o intuito de contornar esse impasse lhe veio a ideia de gravar vídeos que seriam postados no site de carregamento e compartilhamento de vídeos, *YouTube*, e assim seus primos poderiam ver e rever as aulas quando fosse mais conveniente.

Para a surpresa do analista, em pouco tempo milhares de visualizações mostraram que seus vídeos estavam fazendo sucesso entre os jovens ao redor do mundo. Foi então que Salman Khan decidiu abandonar a carreira financeira e dedicar-se as videoaulas, criando a fundação *Khan Academy*, um *site* plataforma gratuito, disponível em várias línguas incluindo o Português, onde o usuário encontra uma longa lista de aulas e exercícios de Matemática para diferentes níveis de escolaridade.

Figura 24 – Portal *Khan Academy*



Fonte: Autor, 2016

Basicamente, para a realização e gravação das aulas, Khan utiliza uma lousa eletrônica, um programa para gravar e editar vídeos e uma mesa digitalizadora.

Hoje em dia pode-se dizer que há um crescente número de aplicativos voltados para o ensino e aprendizagem, que podem ajudar o professor em seus planejamentos, na gestão do tempo em sala de aula, na postagem que materiais didáticos para seus alunos, na edição de vídeo-aulas, salas virtuais dentre outras funções.

Com o aumento e a popularização da modalidade de Ensino à Distância, e o acesso crescente das tecnologias digitais, destacam-se aplicativos para *tablets* e *smartphones* destinados à democratização e melhoria do ensino.

Para Suhr e Ribeiro (2010, p.26), a EaD pode ser uma valiosa ferramenta em prol da democratização do ensino no Brasil, mas para isso é necessário que se busque a constante melhoria de sua qualidade – elemento que também deve perpassar a educação presencial.

A seguir irá dar destaque aos pontos positivos e negativos de dois aplicativos de lousa digital destinados ao uso dos aparelhos *tablets* para aplicação de conceitos como a sala de aula invertida[19], e o uso em EaD.

---

[19] A ideia da sala de aula invertida (Flipped Classroom) surgiu em escolas do ensino médio americano quando Jonathan Bergman e Aaron Sams precisaram lançar mão de estratégias diferenciadas para atender alunos que precisavam se ausentar por longo tempo das aulas regulares para jogos (muitos deles eram atletas). Segundo os próprios autores, eles passaram a gravar suas aulas e a postá-las para que, mesmo longe da sala de aula, os alunos pudessem acompanhar a turma regular. Assim, depois de assistirem aos vídeos gravados pelos professores, quando regressassem das viagens estes alunos trariam suas dúvidas e contribuições, para momentos de discussão e aplicação, em contrapartida a aulas magnas e teóricas. A partir desta experiência inicial, os professores resolveram ampliar esta possibilidade para todos os alunos, invertendo a lógica das aulas: os alunos, por conta própria, nos locais e horários em que eles mesmos decidirem, assistem aos vídeos, que tem o papel de levar o conteúdo teórico das disciplinas, apresentado conceitos, autores e diferentes proposições a respeito do tema de estudo. A partir daí e com o estudo de vários materiais de apoio os alunos se reúnem com os professores não

Educreations: é um aplicativo de lousa digital, de uma comunidade global de mesmo nome, onde qualquer pessoa pode ensinar o que sabe da mesma forma que pode aprender o que não sabe, através de aulas à distância gravadas por intermédio de *tablets* e *smartphones*. Seus fundadores são Wade Roberts e Chris Streeter, dois engenheiros com experiências em criação de softwares e interessados em educação, engajados na democratização do aprendizado para todos. O aplicativo está disponível somente para a plataforma Apple.

A figura 25 representa a tela de comandos e edição do aplicativo *Educriations*.

Figure 25 – Tela de gravação do aplicativo *educriations*

Fonte: Autor, 2015

Destaca-se como as principais vantagens da lousa digital *Educriations*:

- Aplicativo e gratuito, bem como cadastro na comunidade;
- Opção para aula pública ou privativa. Sendo pública pode-se disponibilizar o link em *sities* de relacionamento como Facebook e *sities* de vídeos como *YouTube*;
- Interface amigável e de fácil manipulação;
- Opção para quatro tipos de papel (liso, com linhas horizontais, quadriculados e coordenadas);

---

mais para a aula expositiva, mas sim para a aplicação do conteúdo explorado nos vídeos e estudado previamente. (SCHNEIDER at al, 2013, p. 68)

- Opção para adição de figuras em formatos jpg, gif entre outras;
- Uma vez a aula finalizada, gera-se um link do vídeo da aula e o aluno poderá vê-la em qualquer plataforma (computadores, *tablets*, *smartphones*);
- O aplicativo não precisa passar por uma conversão, ou seja, finalizada a aula salva-se e ela está pronta para ser vista.

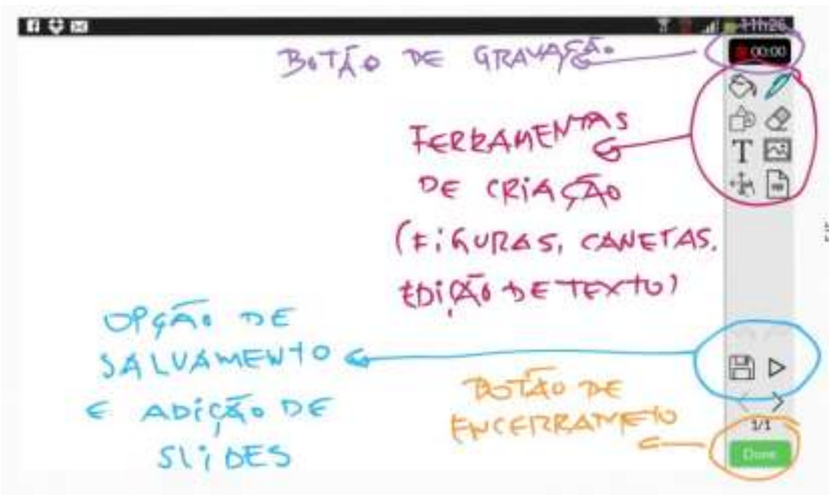
Destaca-se como pontos negativos do aplicativo:

- Não há opções para desenhar formas geométricas tais como, linhas retas, circunferências, quadriláteros, triângulos, etc.
- Não há opção de inserção de vídeos;
- Não pode-se baixar o vídeo para sua máquina, ficando apenas disponível o link.

***Lensoo Create*:** é um aplicativo de lousa digital, do grupo *Lensoo Inc*., onde é possível a gravação de voz e escrita suave, permitindo criações de vídeo aulas, como também sendo possível rápido compartilhamento através de e-mails, Facebook, *YouTube*, Twitter e outras comunidades de relacionamento. Seu criador é o Dr. Pratap Chillakanti, pioneiro e visionário na introdução de inovação tecnológica na aprendizagem e ensino com mais de 25 anos de indústria, possuindo também experiência acadêmica, sendo professor na Universidade da Califórnia em Berkeley. O aplicativo está disponível tanto na plataforma IOS como na plataforma *Android*.

A figura 26 representa a tela de configurações e gravação do aplicativo *Lensoo Create*.

Figure 26 – Tela de gravação do aplicativo *Lensoo Create*



Fonte: Autor, 2016

Destaca-se como as principais vantagens da lousa digital *Lensoo Create*:

- Aplicativo disponível nas plataformas IOS e *Android*;
- Aplicativo possui versão gratuita, bem como cadastro na comunidade;
- Opção para aula pública ou privativa. Sendo pública pode-se disponibilizar o link em *sities* de relacionamento como Facebook e *sities* de vídeos como *YouTube*;
- Interface amigável e de fácil manipulação;
- Opção de inserção de figuras geométricas, linhas retas, arquivos pdf e de imagens;
- Uma vez a aula finalizada, gera-se um link do vídeo da aula e o aluno poderá vê-la em qualquer plataforma (computadores, *tablets*, *smartphones*);
- Opção de baixar o vídeo para o aparelho, possibilitando acesso estando off-line.
- O aplicativo não precisa passar por uma conversão, ou seja, finalizada a aula salva-se e ela está pronta para ser vista.

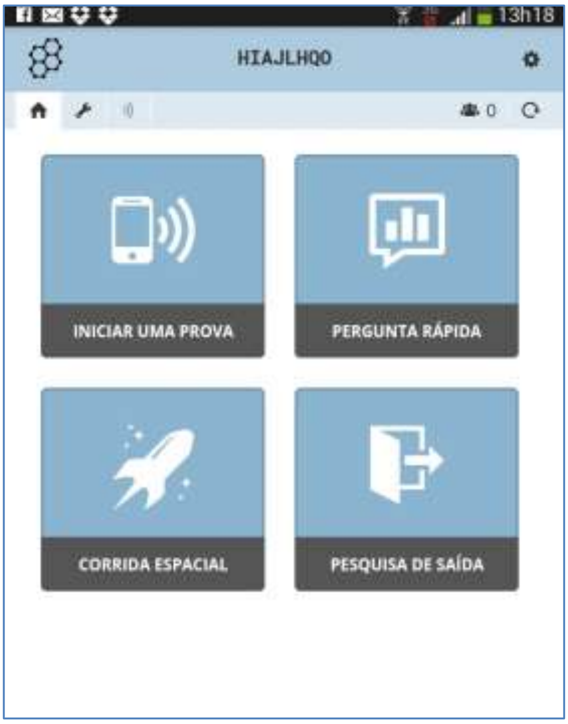
Destaca-se como pontos negativos do aplicativo:

- Aplicativo possui na versão gratuita tempo limitado em 15 minutos para edição da aula;
- Não há opção de inserção de vídeos;

Além dos aplicativos de lousa digital pode-se destacar aplicativos de interatividade habilitados para *tablets*, laptops e *smartphones*, que funciona como um sistema de resposta inteligente que permite que os professores conectem a sala por meio de uma série de exercícios e jogos educacionais.

O aplicativo Socrative possui as características citadas anteriormente. Nele, é possível criar salas virtuais com registro individual para até 50 pessoas, com testes e simuladores, jogos, questões desafio dentre outras ferramentas. Nele, o professor pode ter acesso a relatórios dos participantes, enviar mensagens e dar *feedbacks*. O aplicativo está disponível em alguns idiomas, incluindo o Português, tanto para a plataforma IOS como para o sistema Android. No site do aplicativo é possível acessar vídeo aulas tutoriais de como utilizar a ferramenta. A figura 27 mostra a tela inicial do aplicativo.

Figure 27 – Tela inicial do aplicativo Socrative



Fonte: Autor, 2016

Há ainda o uso de softwares de edição de vídeo capazes de filmar a ação da tela do computador gravando o áudio (CamStudio – *freeware*, Camtasia – *payware*), permitindo assim que o operador explique sua ação enquanto executa tarefas na máquina.

Pode-se intuir que as tecnologias digitais estão revolucionando a forma de ensino e aprendizado da geração atual. Os softwares educacionais, os simuladores gráficos, os ambientes virtuais de aprendizado contribuem para que o aprendiz construa o seu próprio conhecimento e sejam sujeitos ativos na produção do próprio saber.

Nesses ambientes o aluno tem possibilidades de ir além do papel e lápis, pode-se incentivar a exploração de conceitos, a modelagem de problemas, o refinamento de ideias e conjecturas, simulações e experimentos.

Porém, o papel do professor não diminui em consequência dessas ferramentas educacionais e do momento tecnológico no ensino. Suas atribuições se renovam, e a importância em saber utilizar essas tecnologias aliada a mediação do conhecimento matemático o coloca em destaque na formação do aprendiz.

O papel do professor pesquisador é fundamental para promover melhores estratégias de ensino, fazendo com que o aluno consiga transitar entre as diferentes representações de um objeto matemático.

2.3 Teoria dos registros de representação semiótica:

A Matemática se ocupa em estudar conceitos abstratos, que não estão diretamente ligados ao mundo dos sentidos. Suas propriedades, padrões, estruturas e relações expressam uma infinidade de situações, indo das corriqueiras às mais sofisticadas.

Portanto, para que o seu entendimento seja pleno e efetivo faz-se necessário o uso das representações nos diferentes registros, permitindo o elo entre abordagens distintas de um mesmo objeto matemático.

> [...] há uma diferença básica entre a matemática e os outros domínios do conhecimento científico. Objetos matemáticos, em contraste com os fenômenos da astronomia, física, química, biologia, etc. não são acessíveis pela percepção ou por instrumentos (microscópios, telescópios, aparelhos de medição). A única maneira de ter acesso a eles e lidar com eles é usar sinais e representações semióticas. (DUVAL, 2006, p. 107)

Duval (2006) estabelece três aproximações da noção de representação, duas delas já tradicionais da Psicologia, que são as representações subjetivas, inerentes ao universo da infância, que estuda suas crenças e fantasias, as explicações e as concepções referentes a fenômenos físicos e naturais; e as representações computacionais, que estão relacionadas às tarefas executadas sem pensar, de uma forma mecanizada, como por exemplo, exercícios repetitivos.

De acordo com Duval (2006), existe uma terceira forma de representação matemática que ele denomina semiótica, e que diferentemente da representação subjetiva e computacional, é externa e consciente do aluno. São as representações semióticas que realizam a função de objetivação e expressão, podendo o conteúdo matemático mudar de signo e, no entanto, não haver uma mudança em seu significado.

> Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza. (DURVA, 1995, p. 17)

De acordo com Duval (2006), existem dois tipos de transformações de registros de representação semiótica: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos permanecem dentro do mesmo sistema semiótico, como, por exemplo, no cálculo das imagens de uma função f de grau 1 para se obter o par ordenado (x, y), em que somente se trabalha com a manipulação algébrica. Ao localizar os pares ordenados (x, y) no plano cartesiano determinando do gráfico de f, ocorrerá a utilização de dois sistemas e passando às conversões.

Sendo assim, destaca-se a importância de se pensar uma aula sobre certo objeto matemático de forma a se trabalhar em sistemas de diferentes representações possibilitando a sua aprendizagem.

3 O APLICATIVO *LENSOO CREATE* COMO FERRAMENTA DIDÁTICA.

O presente capítulo visa fundamentalmente apresentar o aplicativo educacional *Lensoo Create*, trazendo um breve tutorial de seu uso e disponibilizando um DVD produzido com esse aplicativo com uma sequência de videoaulas sobre um conteúdo matemático do ensino médio. A disponibilização do DVD visa a atingir dois objetivos: em primeiro lugar, mostrar com um exemplo prático as potencialidades técnicas e didáticas do referido aplicativo; em segundo lugar, apresentar um conteúdo matemático importante da matemática do ensino médio com um enfoque que propicie posteriormente a apropriação de conceitos e ideias utilizados no Cálculo Diferencial.

3.1 O que é o aplicativo

O aplicativo *Lensoo Create* é uma ferramenta digital para *tablets* e *smartphones*, do tipo quadro branco virtual, disponível para as plataformas *Androide* e IOS, onde é possível a gravação da escrita e da fala, permitindo com isso a confecção de videoaulas que podem ser rapidamente disponibilizadas na plataforma do próprio aplicativo e/ou disponibilizadas nas redes sociais como Facebook e *YouTube*.

Nele o professor pode usar arquivos PowerPoint, inserir figuras e imagens, escrever apontamentos e resolver questões de modo que o aluno, com acesso a internet, possa ver e rever na hora em que desejar. Com interface amigável, o aplicativo pode ser usado por qualquer pessoa que saiba manusear aparelhos *tablets* e *smartphones*, sem o necessário domínio de linguagens computacionais sofisticadas.

O aplicativo possui uma versão gratuita, em que o tempo de gravação fica limitado a 15 minutos, e uma versão paga, que tem a possibilidade de gravação para 30 minutos. A versão paga ainda oferece alguns recursos que serão mostrados mais adiante.

O aplicativo foi desenvolvido pela empresa de tecnologia em educação Lensoo, que tem como mentor e fundador Pratap Chillakanti, especialista em desenvolvimento de softwares para a difusão do conhecimento e do ensino, programas de treinamento corporativo e professor na Universidade de Berkeley na California.

No próximo item será apresentado um tutorial do uso do aplicativo Lensoo Create, juntamente com um mapa de seus comandos.

3.2 Tutorial do aplicativo *Lensoo Create*

O aplicativo *Lensoo Create* pode ser baixado no *play.google*, para a plataforma *Androide*, ou no *app Store*, para a plataforma IOS. O aplicativo utilizado no trabalho é a versão paga 6.6.2 para a plataforma *Androide*.

No primeiro uso, há a necessidade de se criar uma conta na plataforma do aplicativo para que se possa publicar as videoaulas.

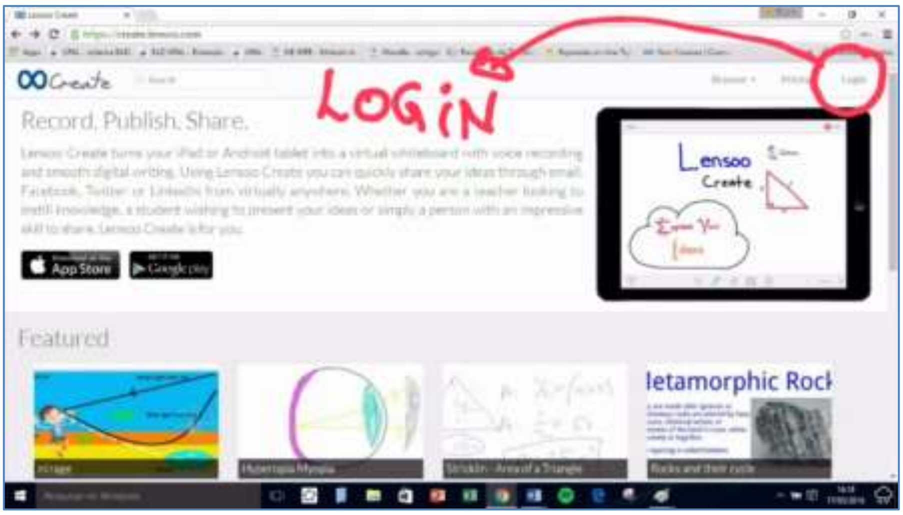
1. Após baixar o aplicativo, deve-se clicar no seu ícone como mostra a figura 28.

Figura 28 – Ícone *Lensoo Create* na área de trabalho

Fonte: Autor, 2016

2. O cadastro é realizado no site do aplicativo https://create.lensoo.com, como mostra a figura 29.

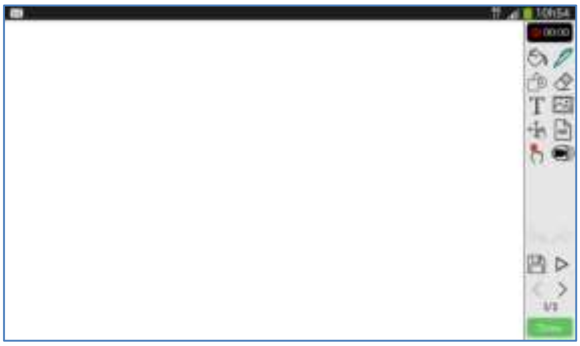
Figura 29 – Tela de criação do login no site do Lensoo



Fonte: Autor, 2016

3. Após clicar no ícone, o aplicativo será iniciado, apresentando a tela de gravação (lâmina de escrita) mostrada na figura 30.

Figura 30 – Tela de gravação do aplicativo Lensoo Create



Fonte: Autor, 2016

A figura 31 apresenta a descrição das ferramentas da tela de gravação.

Figura 31 – Tabela com os comandos da tela de gravação

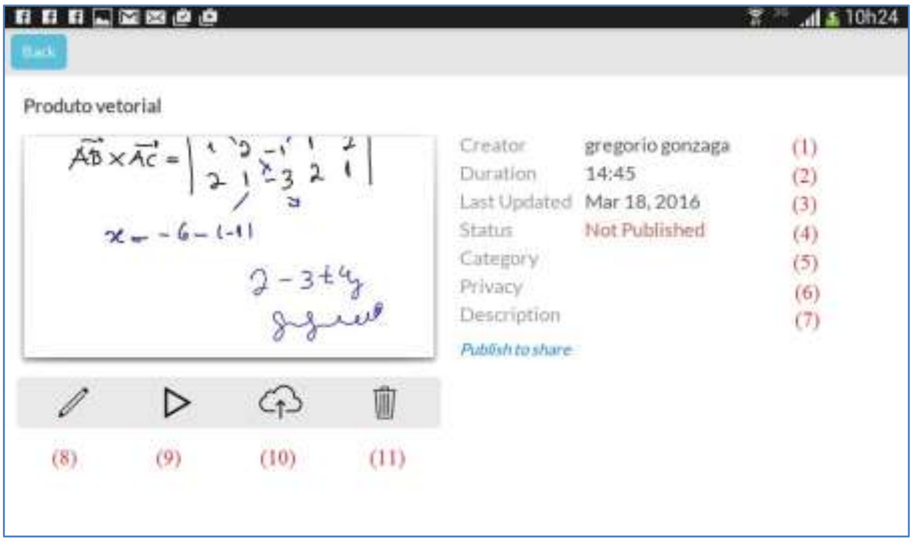
Ícone	Ferramenta	Descrição
00:00	REC	Botão de gravação, pausa e contagem do tempo
	Background Color	Seleciona a cor da paleta e o stilo do quadro branco (linhas, malhas)
	Pen	Seleciona a cor da caneta e a espessura da linha para escrita
	Insert Sharpes	Insere figuras geométricas (tiângulos, quadriláteros e crísculos)
	Eraser	Apaga escritas, desenhos, figuras e arquivos pdf inseridos na paleta
T	Text Too	Insere caixa de texto
	Imager Picker	Insere imagens e fotos
	Transform	Move as imagens e fotos ao longo da paleta
PDF	Import PDF	Importa documentos PDF
	Point Laser	Apontamento em laser
	Vídeo	Grava vídeo com a câmera do aparelho
	Redo Undo	Voltar e adiantar ação feita na paleta
	Save	Salva a vídeo aula
	Paly Replay	Possibilita ver e rever a aula antes da finalização
	Multi Page	Adiciona paletas novas
Done	Done	Finaliza a vídeoaula

Fonte: Autor, 2016

4. Antes que se inicie a gravação da videoaula é importante que o professor já tenha planejado quantas paletas serão necessárias para a confecção da aula, bem como o conteúdo de cada uma delas. Assim, economizará tempo e sua aula será mais produtiva.
   Caso deseje-se alterar a lâmina de escrita, deve-se acionar o ícone *Background Color*. Nele o usuário encontrará opções de paletas diversas, tais como malhas, simulador de quadro de giz, dentre outras.
5. Para adicionar figuras que estão no aparelho, tais como definições de conceitos, fragmentos de questões, gráficos e outros, o usuário deve acionar o ícone *Imager Picker* e, automaticamente o aplicativo abrirá uma janela de procura nas pastas do aparelho. Para ajuste de imagens aciona-se o ícone *Transform* possibilitando o movimento da imagem.
   Aqui, sugere-se que a aula seja preparada em um arquivo PowerPoint e transformada em arquivo de imagem no formato JPEG, para que possa ser inserida através do comando mencionado na sequência planejada.
6. Para início da gravação da aula (voz) basta acionar o botão *REC*, que automaticamente será iniciada a captura da voz.
7. Para iniciar a escrita na lâmina deve-se acionar o ícone *Pen*. É também neste ícone que se regula a espessura da linha e a cor da escrita. Caso necessite corrigir ou apagar uma escrita deve-se acionar o ícone *Eraser*.
8. Para adicionar mais lâminas de escritas deve-se acionar o ícone *Multi Page*, que automaticamente será apresentada nova paleta.
9. Caso o usuário deseja gravar um vídeo (imagem do professor ou de outra natureza) deve-se acionar o ícone Vídeo, no qual automaticamente será iniciada a gravação. Porém, esse comando está disponível apenas para a versão paga.
10. As ferramentas *Insert Sharpes*, *Text tool* e *Point Laser*, podem ser acionadas no decorrer da aula para inserir figuras geométricas, balões de comunicação, caixa de texto e *laser* de apontamento para dar dinâmica a videoaula.
11. Após o término da aula o ícone *Done* deve ser acionado para que se possa salvar a videoaula. O aplicativo abrirá uma caixa de diálogo sugerindo o salvamento, a confecção para a descrição da aula (assunto tratado) e a publicação da videoaula.

Caso o usuário queira ajustar a videoaula posteriormente (adicionar novas laminas e fazer mais gravações) deve-se optar pela opção *save*, permitindo que no próximo acesso possa continuar a edição da aula como mostra a figura 32.

Figura 32 – Tela de salvamento e edição



Fonte: Autor, 2016

(1) *Creator* – nome do usuário criador da videoaula;

(2) *Duration* – tempo de duração da videoaula;

(3) *Last Updated* – data da última edição;

(4) *Status* – categorização de publicação (publicado ou não publicado);

(5) *Category* – Área do conhecimento que aborda a videoaula;

(6) *Privacy* – aberto ao público ou restrito (privado);

(7) *Description* – Descrição breve da videoaula, assunto abordado;

(8) *Reopen unpublised recording* – opção para editar (continuar gravação) videoaula;

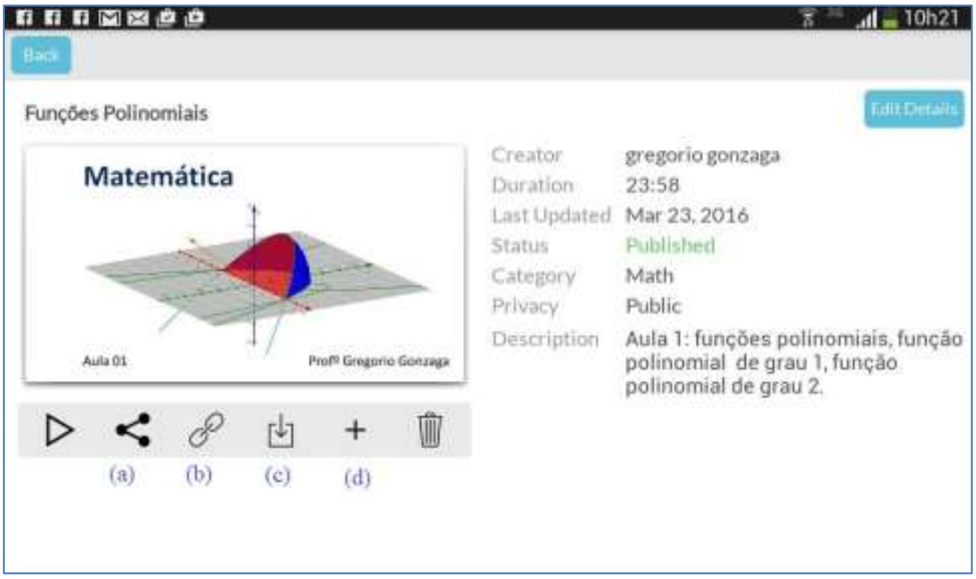
(9) *Replay* – opção para rever a videoaula;

(10) *Publish the recording* – opção para publicar numa lista privada (criada pelo próprio usuário) ou aberto ao público;

(11) *Delete a recording* – descarte da videoaula.

Caso o usuário opte pela opção *save and publish*, a aula será salva e publicada, e não será mais permitido que se possa editar a aula como mostra a figura 33.

Figura 33 – Tela de salvamento e publicação



Fonte: Autor, 2016

(a) *Share a published* – compartilha a videoaula através de e-mail e das redes sociais como Facebook, Twitter, LinkeIn, Whatsapp entre outros;

(b) *Copy the link* – copia o link referente a videoaula postada no portal do aplicativo;

(c) *Download vídeo* – faz o download do vídeo para o aparelho e/ou computador. Para a versão paga, também oferece a opção de postagem direta no *YouTube*, caso o usuário possua um canal em seu nome.

(d) *Add to playlist* – permite que a videoaula seja disponibilizada numa lista de outras videoaulas criada pelo usuário.

Como se pode notar através do tutorial, não há a necessidade de conhecimentos avançados de edição de vídeo para que se possa utilizar o aplicativo, fazendo com que seu uso seja acessível e prático.

3.3 Produto Educacional:

Finalizamos este capítulo remetendo o leitor ao produto educacional associado a esta dissertação, o qual consiste em uma sequência de aulas disponibilizadas em um texto escrito e uma sequência de videoaulas em um CD-ROM produzidas com o aplicativo *Lensoo Create*. O CD-ROM gravado é de nossa autoria e se encontra no apêndice deste trabalho. As aulas apresentadas tratam da determinação de máximos e mínimos das funções afins e quadráticas.

As aulas foram produzidas tendo como fundamentação teórica a teoria dos registros de representação semiótica de Duval. Buscou-se, desse modo, seguindo os preceitos dessa teoria, apresentar os conceitos por meio de situações que propiciassem ao máximo as conversões entre os registros linguístico, geométrico e algébrico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já acentuado ao longo deste trabalho, estamos vivenciando um momento singular na história humana, no qual passamos a contar com máquinas propiciadoras de interligar as pessoas virtualmente por meio de interfaces que permitem tanto a interação por meio da escrita e de imagens quanto da voz humana. E nesse novo contexto das redes sociais, um novo desafio se encontra posto aos educadores: como lançar mão dessas novas ferramentas tecnológicas em benefício da educação e da formação intelectual humana.

Cotidianamente, torna-se cada vez mais evidente a necessidade de desenvolvermos novos modos de ensinar e de aprender que levem em conta essas novas possibilidades tecnológicas. Nesse ambiente tecnológico é possível perceber o surgimento de cenários e oportunidades para a aprendizagem da Matemática de maneira a pôr o aprendiz e o professor em movimento.

Este trabalho foi motivado pelo desafio de apresentar um novo aplicativo que permitisse o ensino de matemática nesse novo contexto tecnológico. Escolhemos então para esse fim o aplicativo *Lensoo Create* pela sua aplicabilidade, facilidade de uso e pelos recursos que ele disponibiliza para o ensino da matemática.

Julgamos que no capítulo 3 desta dissertação atingimos o ápice deste trabalho. É nele que apresentamos o referido aplicativo, descrevemos como aplicá-lo e demonstramos suas potencialidades como ferramenta didática para o professor de matemática.

Esperamos que a apresentação do aplicativo *Lensoo Create* que fornecemos no capítulo 3 seja capaz de convencer aos professores de matemática, não apenas da educação básica mas também da educação superior, das virtudes e das possibilidades que esse aplicativo pode oferecer para a promoção de uma educação mais inclusiva, interativa e mais adaptada ao novo contexto educacional do mundo contemporâneo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W., SILVA, K. P., VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, p. 12, 2012.

ANTON, H., BIVENS, I., DAVIS, S. **Cálculo:** volume 1. Porto Alegre: Bookman, 2014.

ANTON, H., BIVENS, I., DAVIS, S. **Cálculo:** volume 2. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ÁVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 1993.

ÁVILA, G., ARAÚJO, L. C. L. **Cálculo** - Ilustrado, Prático e Descomplicado. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

BAPTISTA, J. P., FERRACIOLI, L. **Da Physis à Física:** uma história da evolução do pensamento da Física. Vitória: Edufes, 2003.

BAUMAN, Z. **Em busca da política.** Rio de Janeiro: Zahar, 1999.

BORBA, M.C.. **Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments.** ZDM (Berlin. Print), v. 44, p. 802-814, 2012.

BORBA, M.C., SILVA, R.S. da, GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2014.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Ed Edgard Blücher, 1974.

COURANT, R., ROBBINS, H. **O que é a Matemática?**: Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e aplicações. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et aprenttissages intellecetuels**. Bern, Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais**. Livraria da Física: Peter Lang, 2006.

GRAVINA, M. A., SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados**. IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. **Fundamentos da Física, volume 1:** Mecânica. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias:** o novo ritmo da informação. 8ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LÉVY, Pierre. **A Inteligência coletiva:** por uma antropologia do ciberespaço. São Paulo, SP: Loyola, 1998.

LIMA, E.L. *et al*. **A matemática do Ensino Médio**, vol.1. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

LIMA, E. L. *et al*. **Temas e Problemas Elementares.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, A. S. **Aprender e aplicar Matemática:** volume 1. São Paulo: Atual, 2011.

MALTEMPI, M.V. **Novas Tecnologias e Construção de Conhecimento:** Reflexões e Perspectivas. In: V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM). Porto, Portugal, 17 a 22 de julho.

RAMALHO, F., NICOLAU G. F., TOLEDO, P. A. **Física 1:** Os Fundamentos da Física. São Paulo: Moderna, 2009.

RESNICK, M. A Geração Geek. In: **Info Exame**. Como formar gênios. São Paulo: Abril Cultural, n. 338, p. 45-53, fev. 2014.

RICHIT, A. Implicações da teoria de Vygotsky aos processos de aprendizagem e desenvolvimento em ambientes mediados pelo computador. **Revista Perspectiva**, Erechim/RS, v. 28, n. 103, p.21-32, set. 2004.

SUHR.I.; RIBEIRO, F. **Reflexões e apontamentos sobre o papel da aula na Educação a Distância.** Revista Intersaberes, Curitiba, ano 5, n. 9, p.25-41, jan/jun 2010.