UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Demonstrações geométricas de relações algébricas elementares: Uma proposta de sequência didática.

Rubia Marcia dos Santos Lima Soares

Maceió, junho de 2019.

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS DE RELAÇÕES ALGÉBRICAS ELEMENTARES:
Uma proposta de sequência didática.

RUBIA MARCIA DOS SANTOS LIMA SOARES

Maceió
2019

RUBIA MARCIA DOS SANTOS LIMA SOARES

DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS DE RELAÇÕES ALGÉBRICAS ELEMENTARES:
Uma Proposta de Sequência Didática.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto.

Maceió

2019

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

S676d Soares, Rubia Marcia dos Santos Lima.
Demonstrações geométricas de relações algébricas elementares : uma proposta de sequência didática / Rubia Marcia dos Santos Lima Soares. – 2019.
76 f. : il. color.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 76.

1. Geometria algébrica – Estudo ensino. 2. Sequência didática. 3. Desenho geométrico. 4. Material didático. 5. Ensino e aprendizagem. I. Título.

CDU: 514: 37.025

Folha de Aprovação

RUBIA MARCIA DOS SANTOS LIMA SOARES

DEMONSTRAÇÕES GEOMÉTRICAS DE RELAÇÕES ALGÉBRICAS ELEMENTARES: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 30 de maio de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto – UFAL (Presidente)

Prof. Dr. André Luiz Flores - UFAL

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

MACEIÓ – 2019

A Deus,

por mais um

sonho realizado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por me presentear com esta oportunidade de crescimento profissional e pessoal, que é a realização desse projeto, onde pude aprender o quão gratificante é a obtenção de conhecimento, seja ele em qualquer área, principalmente na matemática, por seu brilhantismo.

A Universidade Federal de Alagoas, seu corpo docente, direção, administração e serviços gerais que proporcionaram um ambiente criativo e incentivador, me fazendo vislumbrar uma profissão tão importante pra sociedade, capaz de mudar a vida de tantas pessoas, que é a de professor.

Durante minha vida escolar e acadêmica tive professores admiráveis, que contribuíram na minha formação e não tenho palavras para expressar a minha gratidão. Dentre eles, tive a satisfação em ser aluna de excelentes professores dessa instituição como Adina Rocha, André Flores, Gregório da Silva, Isnaldo Barbosa, José Carlos Almeida, Luis Guillermo Martínez, Vânio Fragoso e Viviane de Oliveira, que se destacam pelo empenho em melhorar a educação que vai além da Universidade, realizando projetos tanto na educação superior como na educação básica.

Em especial, sou grata ao meu orientador Prof. Gregório da Silva que, mais uma vez, acreditou no meu potencial, pelo empenho dedicado, suporte em diversas situações e confiança mesmo diante das dificuldades.

Meus sinceros agradecimentos às pessoas mais importantes da minha vida, meus pais, Josefa e Raimundo, que abdicaram de tantas coisas e fizeram inúmeros sacrifícios pra me proporcionar a possibilidade de sonhar e mostraram, com sua simplicidade, que todo o caminho que me levasse a essa realização, deveria ser guiado por Deus.

A todos que colaboraram, principalmente amigos e colegas de turma, para que esse projeto se concretizasse, muito obrigada.

“Uma boa prova

é aquela que nos torna mais sábios”

Yuri Ivanovich Manin

RESUMO

A grande dificuldade em entender o processo de demonstração de identidades algébricas, tem se tornado um grande desafio para alunos, que muitas vezes necessitam de um material que os auxilie ou simplesmente os convença de que essas expressões são verdadeiras. Nada melhor do que usarmos a beleza da geometria para através de imagens estimularem estudantes na busca do conhecimento. Então, desenvolvemos sequências didáticas utilizando material concreto, que podem ser aplicadas em sala de aula de forma bastante dinâmica. Tendo em vista que a própria imagem já induz a prova de alguma expressão, abordamos minuciosamente os passos que devemos fazer para chegarmos ao resultado. Podendo ser utilizado pelo professor ao apresentar o conteúdo ou apenas para fixá-lo, servindo de base para o surgimento de investigações em outras identidades. A ênfase é fornecer pistas visuais ao observador para estimular o pensamento matemático.
.

Palavras-chaves: Identidades algébricas; Geometria; Material concreto; Provas sem palavras.

ABSTRACT

The great difficulty in understanding the process of demonstrating algebraic identities has become a great challenge for students who often need material that helps them or simply convinces them that these expressions are true. Nothing is better than using the beauty of geometry for images to stimulate students in the pursuit of knowledge. Then, we develop didactic sequences using concrete material, which can be applied in the classroom in a very dynamic way. Given that the image itself already proves the proof of some expression, we approach in detail the steps we must take to arrive at the result. It can be used by the teacher when presenting the content or just to fix it, serving as the basis for the emergence of investigations into other identities. The emphasis is to provide visual cues to the observer to stimulate mathematical thinking.
.

Key Words: Algebraic identities; Geometry; Concrete material; Proof Withont Words.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Demonstrações geométricas de relações algébricas elementares: uma proposta de sequência didática foi desenvolvida para que professores e alunos tivessem a oportunidade de conhecer a matemática de forma mais encantadora, relacionando geometria e álgebra através da visualização de figuras, acompanhadas por expressões que auxiliam no entendimento.

Demonstração refere-se à prova matemática, uma sucessão finita de argumentos restritos às regras da lógica mostrando que determinada afirmação é necessariamente verdadeira quando se assumem certos axiomas. Em sala de aula, o objetivo da demonstração é explicar e estimular a compreensão dos estudantes.

Será que de fato, uma imagem vale mais que mil palavras? É a beleza da matemática simplificada em uma imagem que nos faz compreender melhor certas expressões ou até melhorar o entendimento de suas demonstrações.

Martin Gardner, em seus “Jogos matemáticos populares”, coluna da edição de outubro de 1973 da revista Scientific American, discutiu as Proof Withont Words como diagramas do tipo “olhar – ver”. Ele disse: “em muitos casos, uma prova maçante pode ser complementada por um análogo geométrico, de modo tão simples e belo que a verdade de um teorema é quase vista de relance”.

A utilização de materiais concretos é uma das formas de facilitar o aprendizado e a interação entre os alunos, de apresentar uma maneira mais fácil e palpável de aprender matemática. Com isso, sugerimos a confecção de materiais e em alguns casos distribuímos em vários envelopes, pois há uma sequência a ser seguida. Para facilitar essa confecção, indicamos expressões genéricas, onde o professor pode definir as medidas e com valores já definidos para o material do aluno e do professor.

A dissertação é composta por sequências didáticas que o professor pode aplicá-las em diferentes momentos, de acordo com seu planejamento. São Teoremas muito utilizados, de forma que sugerimos sua aplicação nos 8º e 9º anos do ensino fundamental II, pois de acordo com a “Base Nacional Comum Curricular” (BNCC), são nesses anos é que algumas demonstrações são exploradas.

Inicialmente, apresentamos a diferença de quadrados, onde temos uma igualdade e uma desigualdade para serem demonstradas geometricamente. Em seguida, teoremas com igualdades demonstradas através de sequencias de ações com o material concreto. Depois, trabalhamos com desigualdades entre os lados de um triângulo retângulo. O próximo item aborda áreas proporcionais utilizando medianas para provar. Os próximos dois itens tratam de desigualdade entre área e diagonal de um quadrilátero convexo e côncavo, respectivamente.

2. AS MUDANÇAS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNs)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são diretrizes separadas por disciplinas elaboradas pelo governo federal e não obrigatórias por lei. Elas visam subsidiar e orientar a elaboração ou revisão curricular; a formação inicial e continuada dos professores; as discussões pedagógicas internas às escolas; a produção de livros e outros materiais didáticos e a avaliação do sistema de Educação.

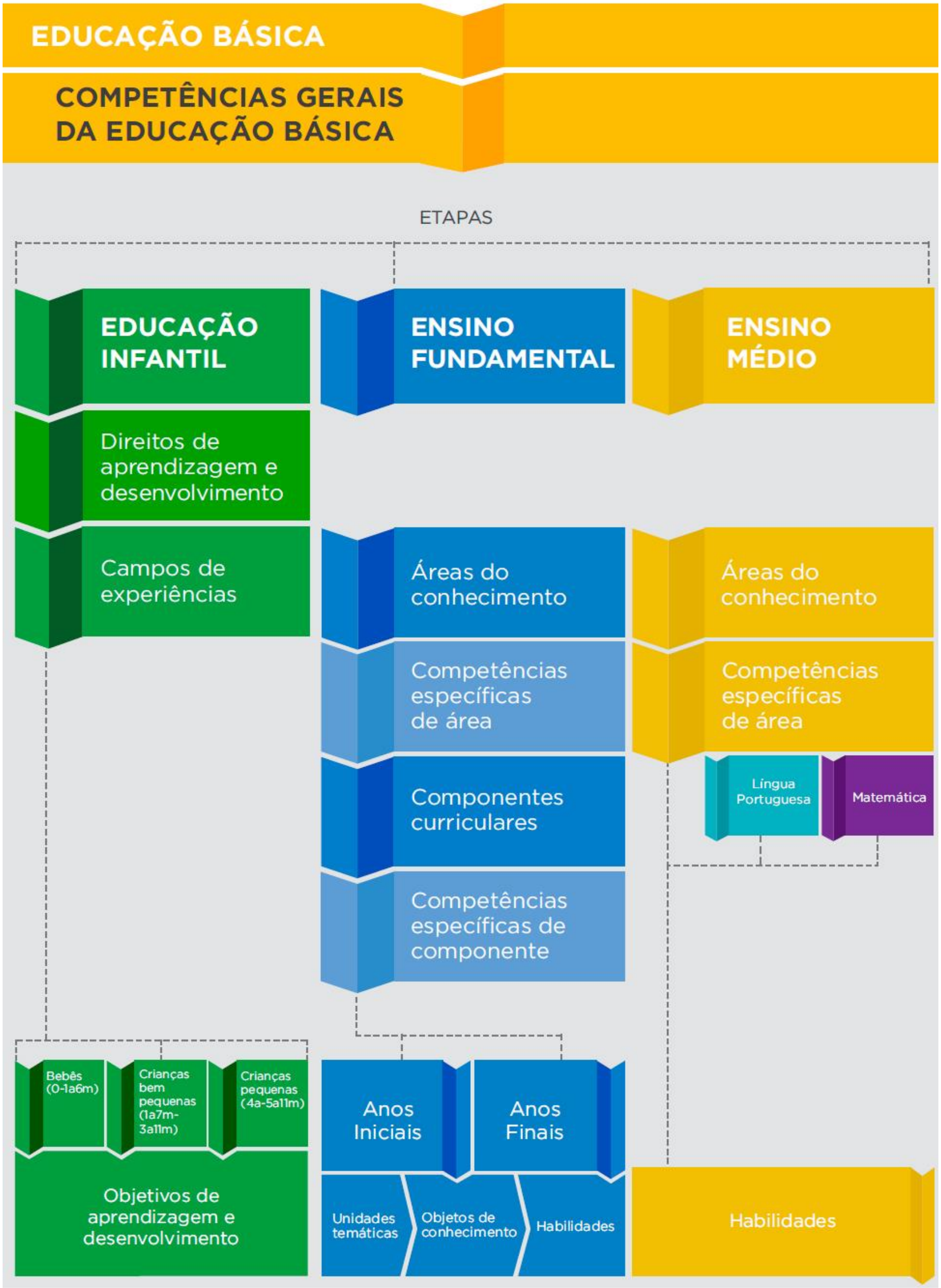
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi criada para que todas as escolas tenham um padrão mínimo de instrução, e o esperado é que essa padronização aumente a qualidade do ensino no país, especialmente na esfera pública.

A BNCC faz parte do Plano Nacional da Educação, previsto na Constituição Federal de 1988. A primeira versão foi redigida em 2014. Após passar por um ciclo de debates e consulta pública, foi homologada pelo MEC em dezembro de 2017. De forma que todas as instituições escolares do Brasil devem, obrigatoriamente, implementar a BNCC até o final de 2019.

Apesar das alterações, o documento não propõe uma ruptura com a visão sobre a disciplina adotada desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): documento que durante anos serviu de referência para as escolas brasileiras. A BNCC aprofunda e amplia alguns dos objetivos dos PCNs.

:

Figura 1 - Estrutura da BNCC.



Fonte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br

As 10 Competências Gerais da Base Nacional Comum Curricular acompanham o desenvolvimento dos alunos desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o

consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL - ANOS FINAIS.

Vamos destacar as principais mudanças na área de Matemática.

Na unidade temática Álgebra, as equações não são mais trabalhadas de forma exaustiva nos 8º e 9º anos. A ênfase é dada à capacidade de resolver situações-problema utilizando o pensamento algébrico, e isso pode ou não envolver equações e inequações.

Na unidade temática Geometria, algoritmos e fluxogramas passam a ser tema das aulas de Geometria a partir do 6o ano. Fluxogramas aparecem como forma de identificar os passos necessários na resolução de problemas geométricos, a exemplo das construções de polígonos e transformações no plano. Além disso, aparece também para estruturar a classificação de figuras utilizando para isso as organizações próprias dos fluxogramas.

Na unidade temática Números, um conceito novo na ideia de números é a progressão no ensino das frações, destacando as diferentes concepções da fração, como número (elemento dos racionais), operador (aplicado a inteiros discretos ou contínuos) ou representante de relações (entre parte e todo ou razão entre partes).

Na unidade temática Grandezas e medida, o foco é a resolução de problemas envolvendo medidas e medições, compreendendo que medir é comparar um inteiro contínuo com diferentes unidades, padronizadas ou não. As figuras planas aparecem com mais destaque nessa etapa do ensino.

Na unidade temática Probabilidade e estatística, a interpretação e a elaboração de gráficos mais complexos, que antes acontecia apenas no Ensino Médio, já são tratadas como objeto de conhecimento a partir do 6o ano.

Observe que muitos conteúdos foram reorganizados e alguns novos foram inseridos. Destacamos alguns objetos de conhecimento e habilidades em geometria, que nos mostram a importância do trabalho a ser desenvolvido, nos 8º e 9º anos.

MATEMÁTICA – 8º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	**(EF08MA14)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Fonte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br

MATEMÁTICA – 9º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
		(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.
	Distância entre pontos no plano cartesiano	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Fonte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br

3. ÁREAS ALGÉBRICAS

Nesta secção, iremos mostrar como fatoramos algumas expressões através de diferentes visualizações de uma mesma figura, onde faremos uso de alguns recursos, como agrupamentos, para que tenhamos um resultado claro. São sequências didáticas que o professor pode aplicá-las em diferentes momentos, de acordo com seu planejamento.

3.1. Diferença de quadrados

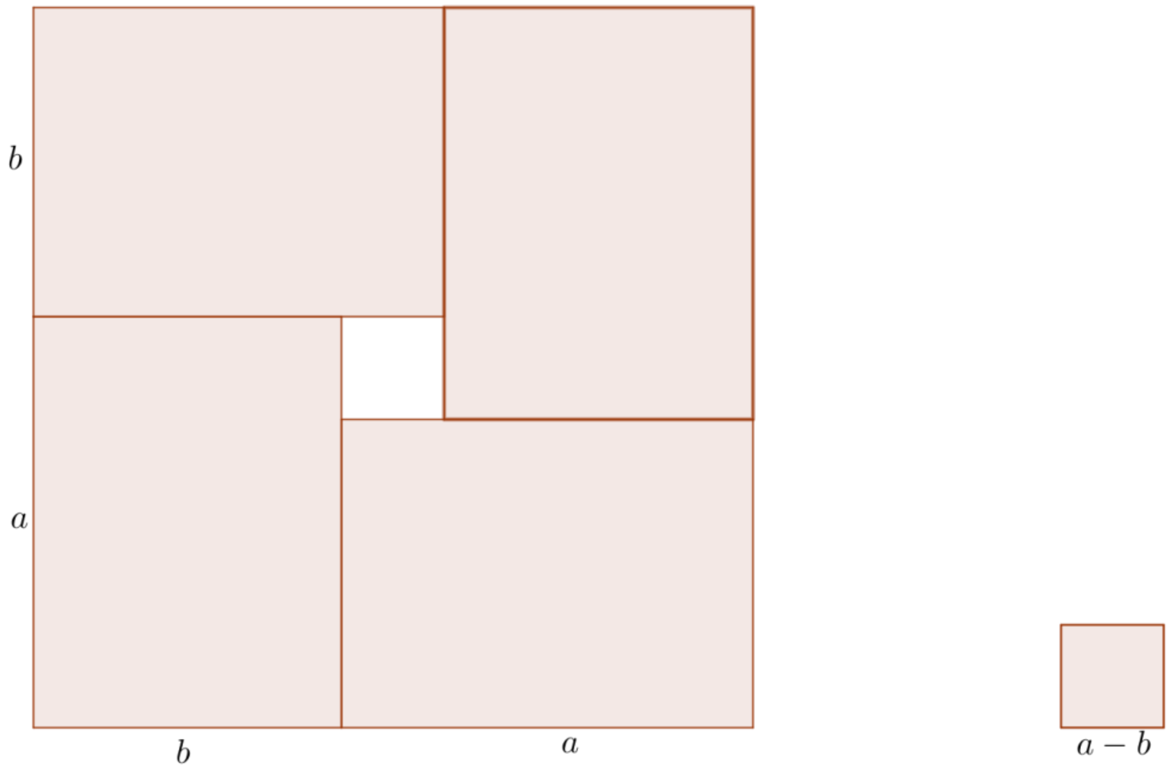
Teorema: *Dados a,b,c e d reais positivos, o produto da soma dos quadrados é*

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

e

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Figura 2 - Diferença de quadrados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Monômios ou termos algébricos.
- Os produtos notáveis.
- Potências.
- Desigualdades.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Quatro retângulos de comprimento $\boldsymbol{a}$ e largura $\boldsymbol{b}$.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{a - b}$.

Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para quadriláteros com medidas diferentes e definir valores para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, tais que $\boldsymbol{a > b}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{a = 8cm}$ e $\boldsymbol{b = 5cm}$:
  - Quatro retângulos de comprimento $\boldsymbol{8\ cm}$ e largura $\boldsymbol{5cm}$.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{8 - 5 = 3cm}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{a = 16cm}$ e $\boldsymbol{b = 10cm}$:
  - Quatro retângulos de comprimento $\boldsymbol{16cm}$ e largura $\boldsymbol{10cm}$.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{16 - 10 = 6cm}$.

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade das expressões.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

e

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

❖ Tomando como referência os valores do material do aluno, ou seja, $\boldsymbol{a = 8cm}$ e $\boldsymbol{b = 5cm.}$

Possível solução:

➢ Igualdade

$$(8 + 5)^2 - (8 - 5)^2 = 48 \cdot 5$$
$$13^2 - 3^2 = 4 \cdot 40$$
$$169 - 9 = 160$$
$$160 = 160\,.$$

➢ Desigualdade

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
$$\frac{8+5}{2} \geq \sqrt{8 \cdot 5}$$
$$6{,}5 \geq \sqrt{40} \approx 6{,}32\,.$$

❖ Tomando como referência os valores do material do professor, ou seja, $\boldsymbol{a = 16cm}$ e $\boldsymbol{b = 10cm.}$

Possível solução:

➢ Igualdade

$$(16 + 10)^2 - (16 - 10)^2 = 4 \cdot 16 \cdot 10$$
$$26^2 - 6^2 = 4 \cdot 160$$
$$676 - 36 = 640$$
$$640 = 640\,.$$

➢ Desigualdade

$$\frac{16+10}{2} \geq \sqrt{16 \cdot 10}$$
$$\frac{26}{2} \geq \sqrt{160}$$
$$13 \geq 4\sqrt{10} \approx 12{,}64\,.$$

3.1.1. Demonstração da igualdade

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab\,.$$

I. Considere os retângulos, a medida do lado maior $\boldsymbol{a}$ e do lado menor $\boldsymbol{b}$. Construa um quadrado utilizando as cinco peças, sem sobreposição.

Possível solução:

II. Obtenha a medida do lado do quadrado formado pelas cinco peças, bem como a medida do lado do quadrado menor, localizado no centro da figura.

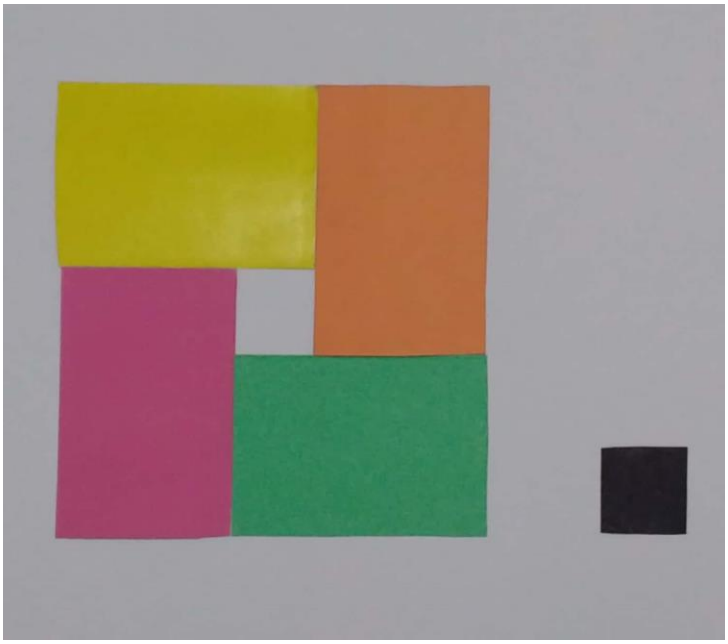
Possível solução:

Quadrado maior: $a + b$.

Quadrado menor: $a - b$.

III. Retire o quadrado menor, restando o quadrado maior vazado.

Possível solução:



IV. Podemos observar a composição desse quadrado vazado de duas formas (Induzir o aluno à visualização). Na primeira, temos a área de um quadrado maior, menos a área de um quadrado menor. Na segunda, temos a área de quatro retângulos. Obtenha uma expressão que represente as duas composições.

Possível solução:

A primeira composição é $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

A segunda composição é $4 \cdot ab$.

V. Assim, a área desse quadrado vazado é a mesma área dos quatro retângulos. Encontre essa igualdade.

Possível solução:

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

3.1.2. Demonstração da desigualdade

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} .$$

VI. Compare a área do quadrado completo (formado pelas cinco peças) e a área do quadrado vazado (os quatro retângulos) de forma a obter uma desigualdade simplificada.

Possível solução:

A área do quadrado completo é maior que a área dos quatro retângulos juntos, pois possui o quadrado menor a mais.

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

$$\frac{(a + b)^2}{4} \geq ab$$

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \geq ab$$

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} .$$

VII. Analise o que acontece com as medidas $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, lados do retângulo, quando não existir o quadrado central.

Possível solução:

Vai ocorrer a igualdade $a = b$, ou seja, vamos ter quatro quadrados iguais, e ainda:

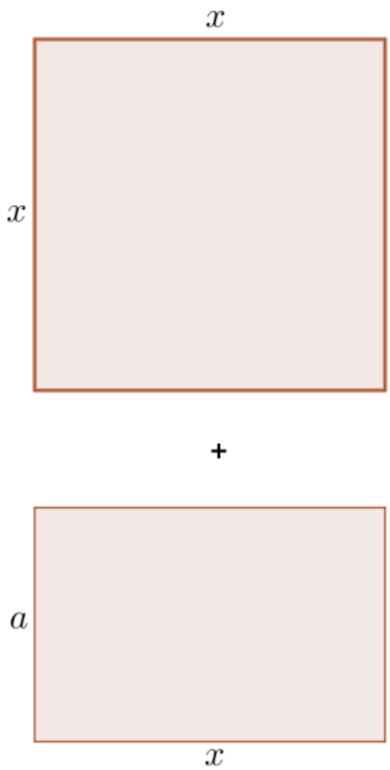
$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}\ .$$

3.2. Completando quadrados

Teorema: *Para quaisquer* $a > 0$ *e* $x > 0$*, temos*

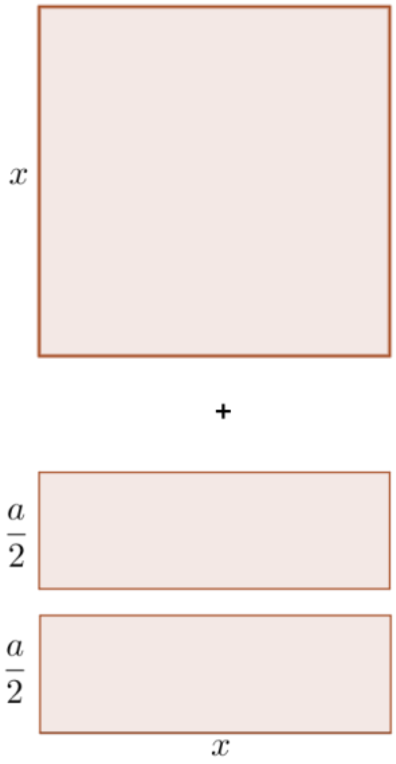
$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Figura 2 - Soma de dois quadriláteros.



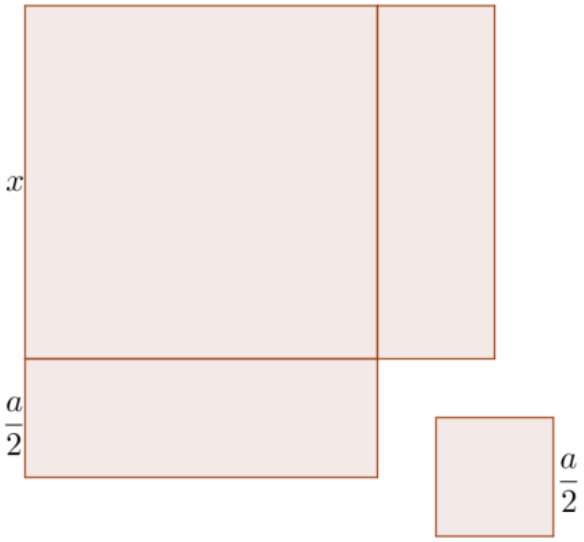
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3 - Dividimos um retângulo em dois.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 4 - Reorganizando três quadriláteros.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Monômios ou termos algébricos.

- Os produtos notáveis.
- Potências.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{x}$.
  - Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{x}$ e largura $\boldsymbol{\frac{a}{2}}$ **.**
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{\frac{a}{2}}$**.**

  Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para quadriláteros diferentes e definir valores para $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{a}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{x = 10cm}$ e $\boldsymbol{a = 6cm}$:
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{10cm.}$
  - Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{10cm}$ largura $\boldsymbol{\frac{6}{2} = 3cm}$ **.**
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{3cm.}$

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{x = 20cm}$ e $\boldsymbol{a = 12\ cm}$:
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{20cm.}$
  - Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{20cm}$ largura $\boldsymbol{\frac{12}{2} = 6cm}$ **.**
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{6cm.}$

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 .$$

- Tomando como referência os valores do material do aluno, ou seja, $\boldsymbol{x = 10cm}$ e $\boldsymbol{a = 6cm}$:

  Possível solução:

$$10^2 + 6 . 10 = (10 + \frac{6}{2})^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$100 + 60 = (10 + 3)^2 - (3)^2$$

$$160 = 169 - 9$$

$$160 = 160 .$$

- Tomando como referência os valores do material do professor, ou seja, $\boldsymbol{x = 20cm}$ e $\boldsymbol{a = 12\ cm}$:

  Possível solução:

$$20^2 + 12 . 20 = (20 + \frac{12}{2})^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2$$

$$400 + 240 = (20 + 6)^2 - (6)^2$$

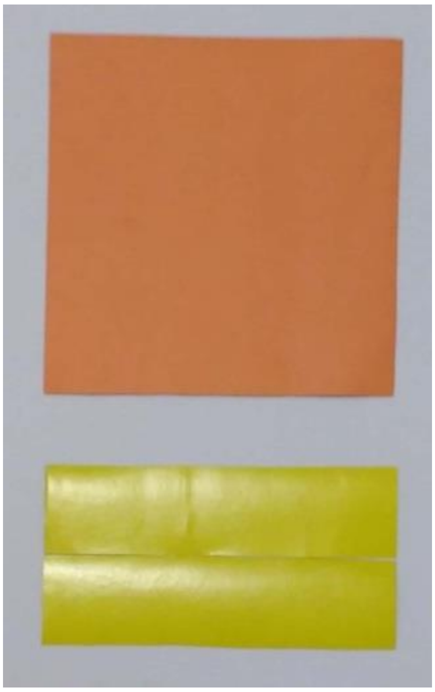
$$640 = 676 - 36$$

$$640 = 640 .$$

3.2.1. Demonstração

I. Considere o quadrado maior e os dois retângulos. Construa um quadrado e um retângulo utilizando as três peças, sem sobreposição.

Possível solução:



II. Obtenha as áreas do quadrado e do retângulo e a soma das mesmas.

Possível solução:

Quadrado: x^2 .

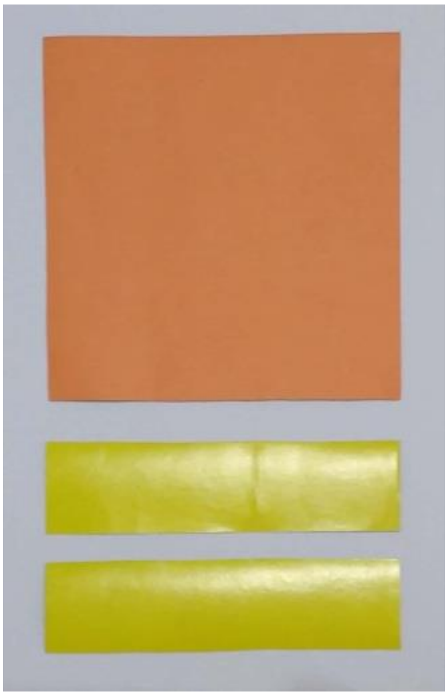
Retângulo: ax .

Soma: $x^2 + ax$.

III. Separe as duas peças do retângulo formado e verifique as medidas de cada um de seus lados.

Possível solução:

Lados do retângulo: $\frac{a}{2}$ e x



IV. Considerando essas três peças e o quadrado menor, construa um quadrado, sem sobreposição. Em seguida retire o quadrado menor, para que possamos preservar a área inicial.

Possível solução:

V. Podemos observar à composição dessa figura como a área do quadrado formado menos a área do quadrado menor (Induzir o aluno à visualização). Obtenha uma expressão que represente essa composição.

Possível solução:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

VI. Compare a área inicial, do quadrado mais o retângulo, com a área de quadrado vazado. Concluímos que permanecemos com a mesma área, apenas reagrupando as peças.

Possível solução:

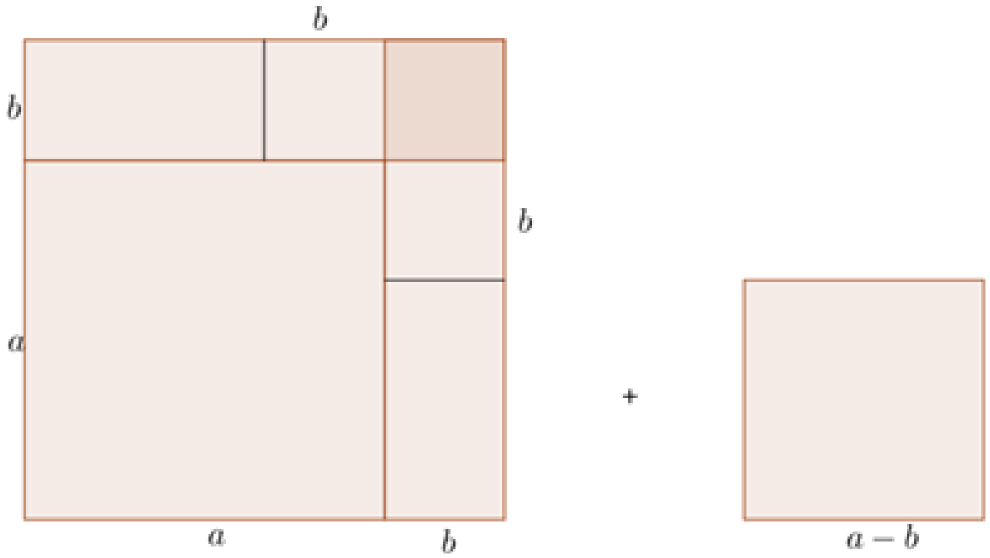
$$x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

3.3. Fatoração de quadrados

Teorema: *Para quaisquer números reais positivos a e b, temos que*

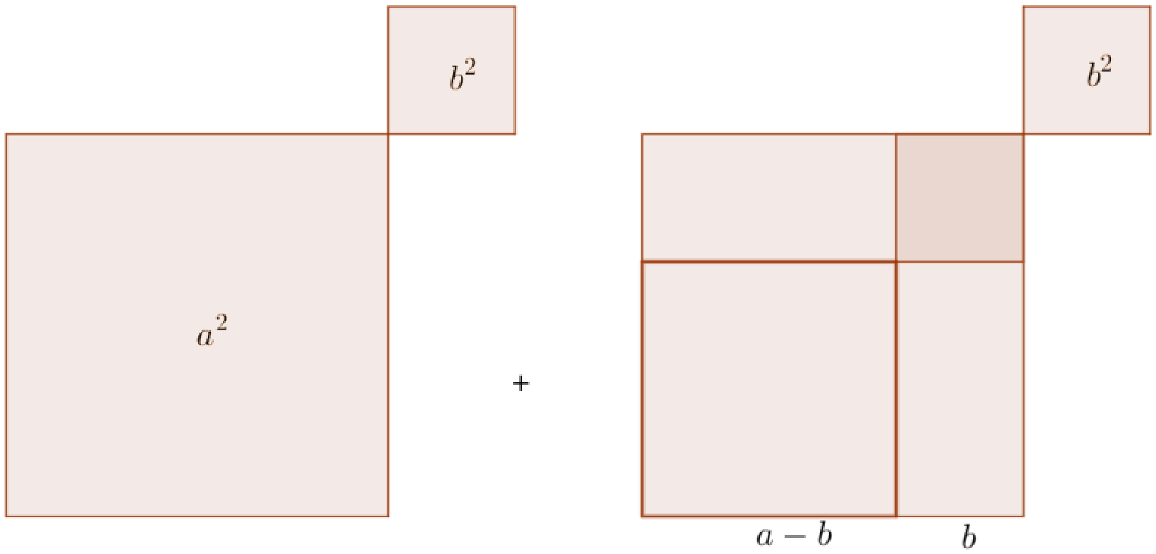
$$(a+b)^2+\ (a-b)^2=2\,(a^2+b^2)\,.$$

Figura 5 - Soma de dois quadrados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 6 - Reagrupar os quadriláteros.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Monômios ou termos algébricos.
- Os produtos notáveis.
- Potências.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{a}$.
  - Três quadrados de lado $\boldsymbol{b}$.
  - Dois retângulos de largura $\boldsymbol{b}$ e comprimento $\boldsymbol{a-b}$ **.**
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{a-b}$ **.**

  Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para quadriláteros diferentes e definir valores para $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, tais que $a > b$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{a = 10cm}$ e $\boldsymbol{b = 3cm}$:
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{10cm}$.
  - Três quadrados de lado $\boldsymbol{3cm}$.
  - Dois retângulos de largura $\boldsymbol{3cm}$ e comprimento $\boldsymbol{10 - 3 = 7\ cm.}$
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{10 - 3 = 7\ cm.}$

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{a = 20cm}$ e $\boldsymbol{b = 6cm}$:
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{20cm}$.
  - Três quadrados de lado $\boldsymbol{6cm}$.
  - Dois retângulos de largura $\boldsymbol{6cm}$ e comprimento $\boldsymbol{20 - 6 = 14\ cm}$.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{20 - 6 = 14\ cm.}$

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\,(a^2+b^2)\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do aluno, ou seja, $\boldsymbol{a = 10cm}$ e $\boldsymbol{b = 3cm}$.

Possível solução:

$$(10+3)^2 + (10-3)^2 = 2\,(10^2+3^2)$$

$$(13)^2 + (7)^2 = 2\,(100+9)$$

$$169 + 49 = 2\,(109)$$

$$218 = 218\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do professor, ou seja, $\boldsymbol{a = 20cm}$ e $\boldsymbol{b = 6cm}$:

Possível solução:

$$(20+6)^2 + (20-6)^2 = 2\,(20^2+6^2)$$

$$(26)^2 + (14)^2 = 2\,(400+36)$$

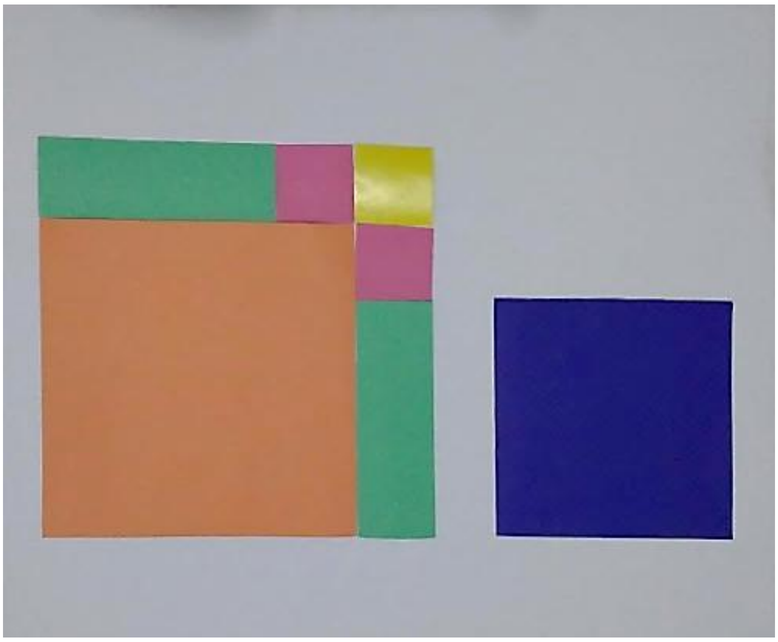
$$676 + 196 = 2\,(436)$$

$$872 = 872\,.$$

3.3.1. Demonstração

I. Construir dois quadrados utilizando as sete peças, sem sobreposição.

Possível solução:



II. Obtenha as áreas dos dois quadrados e a soma das mesmas.

Possível solução:

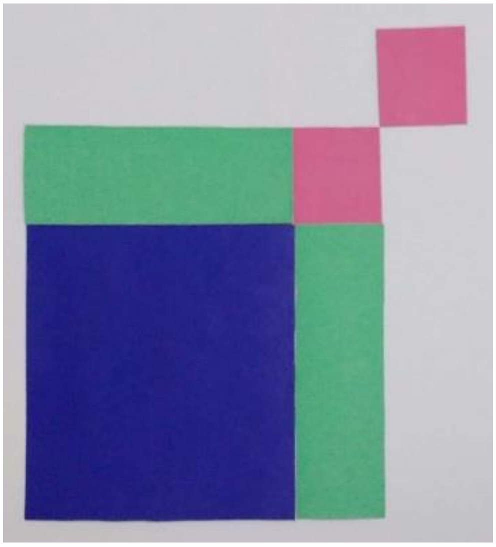
Quadrado maior: $(a+b)^2$.

Quadrado menor: $(a-b)^2$.

Soma: $(a+b)^2+(a-b)^2$.

III. Construir quatro quadrados utilizando as sete peças, sem sobreposição.

Possível solução:

IV. Obtenha uma expressão simplificada para a soma das áreas dos quatro retângulos.

Possível solução:

$$a^2+b^2+a^2+b^2=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)\,.$$

V. Compare a área inicial, dos dois quadrados, com a área final, dos quatro quadrados. Concluímos que permanecemos com a mesma área, apenas reagrupando as peças. Encontre a igualdade que represente esse fato.

Possível solução:

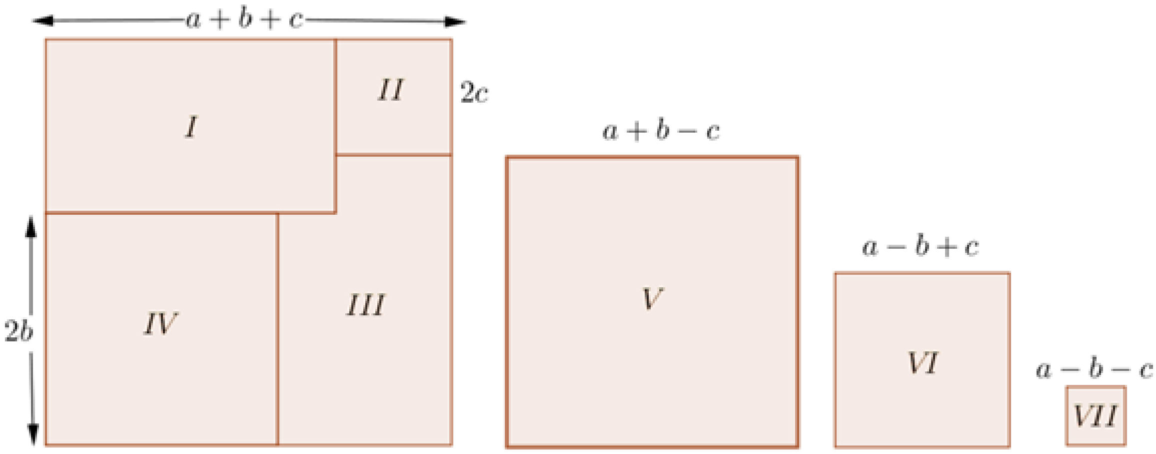
$$(a+b)^2+\ (a-b)^2=2\,(a^2+b^2)\,.$$

3.4. A soma dos quadrados de quatro termos

Teorema: *Se a, b e c são números reais, então*

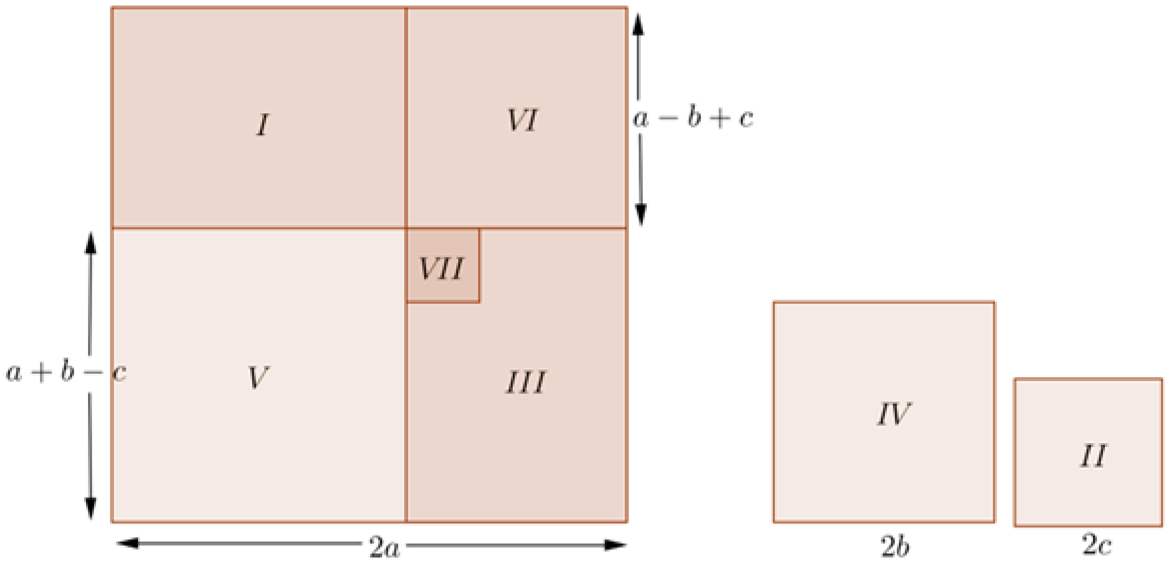
$$(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 .$$

Figura 7 - Soma dos quadrados de quatro termos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 8 - Reagrupando quadrados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Monômios ou termos algébricos.
- Os produtos notáveis.
- Potências.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{a+b-c}$ e largura $\boldsymbol{a-b+c}$ **.** (Peça I)
  - Um quadrado de lado $\mathbf{2}\boldsymbol{c}$ **.** (Peça II)
  - Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{a-b+c}$ e largura $\boldsymbol{a+b-c}$ (retirar o quadrado de lado $\boldsymbol{a-b-c}$ de acordo com a figura). (Peça III)
  - Um quadrado de lado $\mathbf{2}\boldsymbol{b}$ **.** (Peça IV)
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{a+b-c}$**.** (Peça V)
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{a-b+c}$**.** (Peça VI)
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{a-b-c}$**.** (Peça VII)

  Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para quadriláteros diferentes e definir valores para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, tais que $\boldsymbol{a > b+c}$ e $\boldsymbol{b > c}$**.**

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{a = 6cm}$, $\boldsymbol{b = 3cm}$ **e** $\boldsymbol{c = 2cm}$:
  - Um retângulo de comprimento $6+\mathbf{3-2=7}$ **cm** e largura $\mathbf{6-3+2=5}\ \boldsymbol{cm}$**.**
  - Um quadrado de lado $\mathbf{2.2=4}\ \boldsymbol{cm}$**.**
  - Um retângulo de comprimento $6+\mathbf{3-2=7}\ \boldsymbol{cm}$ e largura $\mathbf{6-3+2=5}\ \boldsymbol{cm}$ (retirar o quadrado de lado $\mathbf{9-5-3=1}\ \boldsymbol{cm}$**).**
  - Um quadrado de lado $\mathbf{2.3=6}$ **cm.**
  - Um quadrado de lado $6+\mathbf{3-2=7cm.}$
  - Um quadrado de lado $6-\mathbf{3+2=5cm.}$
  - Um quadrado de lado $6-\mathbf{3-2=1cm.}$

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{a = 18cm}, \boldsymbol{b = 10cm}$ e $\boldsymbol{c = 6cm}$:
  - Um retângulo de comprimento $9+\mathbf{5-3=11cm}$ e largura $\mathbf{9-5+3=7cm.}$
  - Um quadrado de lado $\mathbf{2.3=6cm.}$
  - Um retângulo de comprimento $\mathbf{9+5-3=11cm}$ e largura $\mathbf{9-5+3=7cm}$ (retirar o quadrado de lado $\mathbf{9-5-3=1cm.}$
  - Um quadrado de lado $\mathbf{2.5=10\ cm.}$

- Um quadrado de lado $\mathbf{9+5-3=11cm.}$
- Um quadrado de lado $\mathbf{9-5+3=7cm.}$
- Um quadrado de lado $\mathbf{9-5-3=1cm.}$

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(a-b-c)^2=(2a)^2+(2b)^2+(2c)^2\ .$$

- Tomando como referência os valores do material do aluno, ou seja, $\boldsymbol{a=6cm}$, $\boldsymbol{b=3cm}$ **e** $\boldsymbol{c=2cm}$:

  Possível solução:

$$(6+3+2)^2+(6+3-2)^2+(6-3+2)^2+(6-3-2)^2$$
$$=(2.6)^2+(2.3)^2+(2.2)^2$$
$$(11)^2+(7)^2+(5)^2+(1)^2=(12)^2+(6)^2+(4)^2$$
$$121+49+25+1=144+36+16$$
$$196=196\ .$$

- Tomando como referência os valores do material do professor, ou seja, $\boldsymbol{a=18cm, b=10cm}$ e $\boldsymbol{c=6cm}$:

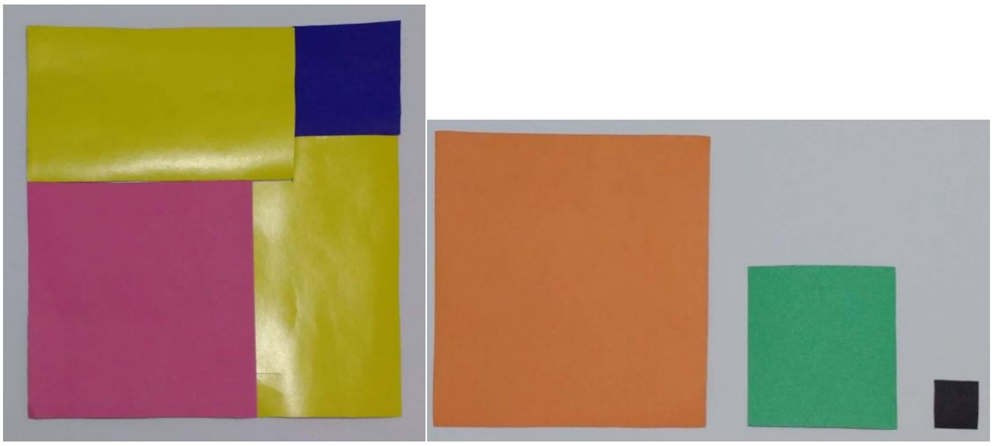
  Possível solução:

$$(18+10+6)^2+(18+10-6)^2+(18-10+6)^2+(18-10-6)^2$$
$$=(2.18)^2+(2.10)^2+(2.6)^2$$
$$(34)^2+(22)^2+(14)^2+(2)^2=(36)^2+(20)^2+(12)^2$$
$$1156+484+196+4=1296+400+144$$
$$1840=1840\ .$$

3.4.1. Demonstração

I. Construir quatro quadrados utilizando as sete peças, sem sobreposição.

Possível solução:



II. Obtenha os lados dos quatro quadrados e a soma da área dos mesmas.

Possível solução:

Lado $a + b + c$

Lado $(a + b + c) - 2c = a + b - c$.

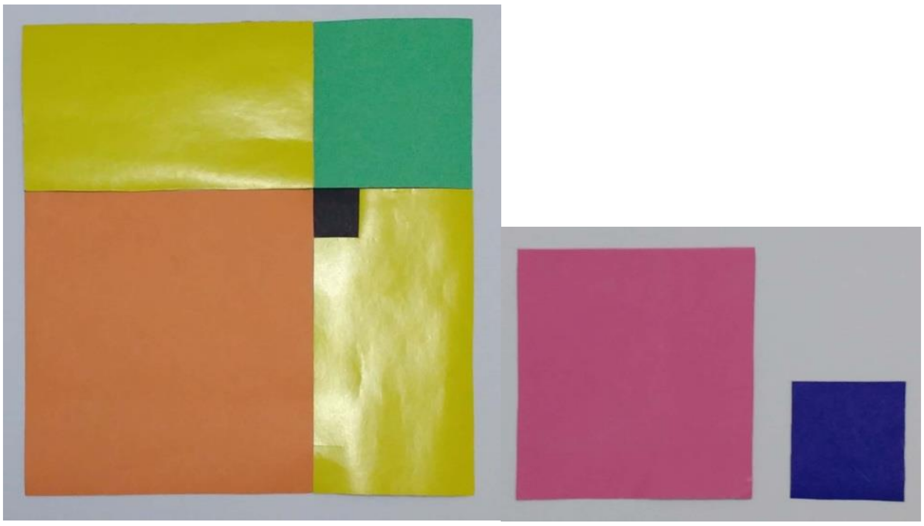
Lado $(a + b + c) - 2b = a - b + c$.

Lado $(a + b + c) - 2b - 2c = a - b - c$.

Soma das áreas: $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2$.

III. Construir três quadrados utilizando as sete peças, sem sobreposição.

Possível solução:



IV. Obtenha as medidas dos lados dos três quadrados e a soma das mesmas.

Possível solução:

Lado $(a + b - c) + (a - b + c) = 2a$.

Lado $2b$.

Lado $2c$.

Soma das áreas: $(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$.

V. Compare a área inicial, dos quatro quadrados, com a área final, dos três quadrados. Concluímos que permanecemos com a mesma área, apenas reagrupando as peças. Encontre a igualdade que represente esse fato.

Possível solução:

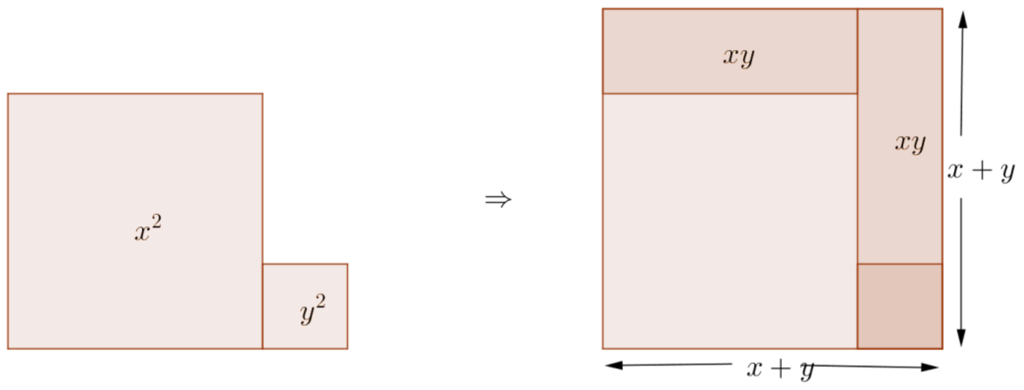
$$(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2$$
$$= (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 .$$

3.5. Soma de quadrados

Teorema: *Dados x e y números reais positivos, temos*

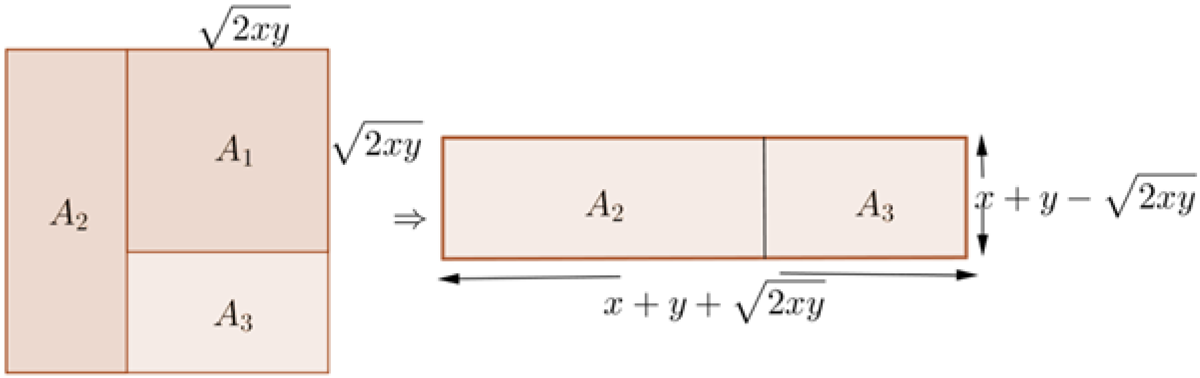
$$x^2 + y^2 = \left(x + y + \sqrt{2xy}\right) . \left(x + y - \sqrt{2xy}\right).$$

Figura 9 - Acrescentamos dois retângulos de mesma área xy .



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 10 - Nova divisão no quadrado.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Tempo necessário: 2 h/aula

Conteúdos associados a habilidades:

- Monômios ou termos algébricos.
- Os produtos notáveis.
- Potências.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{x}$**.**
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{y}$**.**
  - Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{x}$ e largura $\boldsymbol{y}$.
  - Um quadrado de lado $\sqrt{\boldsymbol{2xy}}$ **.**
  - Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{x+y}$ e largura $\boldsymbol{x+y-\sqrt{2xy}}$ **.**
  - Um retângulo de comprimento $\sqrt{\boldsymbol{2xy}}$ e largura $\boldsymbol{x+y-\sqrt{2xy}}$.

  Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para quadriláteros diferentes e definir valores para $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, tais que $\boldsymbol{x+y>\sqrt{2xy}}$**.**

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{x = 9cm}$ e $\boldsymbol{y = 2cm}$, distribuídos em envelopes da seguinte forma:

I. Envelope

- ❖ Um quadrado de lado $\boldsymbol{9cm.}$
- ❖ Um quadrado de lado $\boldsymbol{2cm.}$
- ❖ Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{9cm}$ e largura $\boldsymbol{2cm}$.

II. Envelope

- ❖ Um quadrado de lado $\boldsymbol{\sqrt{2.9.2} = 6cm.}$
- ❖ Um retângulo de comprimento= $\boldsymbol{9 + 2 = 11cm}$ e largura $\boldsymbol{9 + 2 - \sqrt{2.9.2} = 5cm.}$
- ❖ Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{\sqrt{2.9.2} = 6\ cm}$ e largura $\boldsymbol{9 + 2 - \sqrt{2.9.2} = 5cm.}$

➢ Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{a = 18cm}$ e $\boldsymbol{b = 4cm}$:

- ❖ Um quadrado de lado $\boldsymbol{18cm.}$
- ❖ Um quadrado de lado $\boldsymbol{4cm.}$
- ❖ Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{18cm}$ e largura $\boldsymbol{4cm}$.
- ❖ Um quadrado de lado $\boldsymbol{\sqrt{2.18.4} = 12cm.}$
- ❖ Um retângulo de comprimento $\mathbf{18 + 4 = 22cm}$ e largura $\mathbf{18 + 4 - \sqrt{2.18.4} = 10cm.}$
- ❖ Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{\sqrt{2.18.4} = 12cm}$ e largura $\mathbf{18 + 4 - \sqrt{2.18.4} = 10cm.}$

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$x^2 + y^2 = \left(x + y + \sqrt{2xy}\right).\left(x + y - \sqrt{2xy}\right).$$

- Tomando como referência os valores do material do aluno, ou seja, $\boldsymbol{x = 9cm}$ e $\boldsymbol{y = 2cm}$:

  Possível solução:

$$9^2 + 2^2 = \left(9 + 2 + \sqrt{2.9.2}\right).(9 + 2 - \sqrt{2.9.2})$$

$$81 + 4 = (9 + 2 + 6)\ \ (9 + 2 - 6)$$

$$85 = 17\,.\,5$$

$$85 = 85\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do professor, ou seja, $\boldsymbol{a = 18cm}$ e $\boldsymbol{b = 4cm}$:

  Possível solução:

$$18^2 + 4^2 = \left(18 + 4 + \sqrt{2.18.4}\right).(18 + 4 - \sqrt{2.18.4})$$

$$324 + 16 = (18 + 4 + 12).(18 + 4 - 12)$$

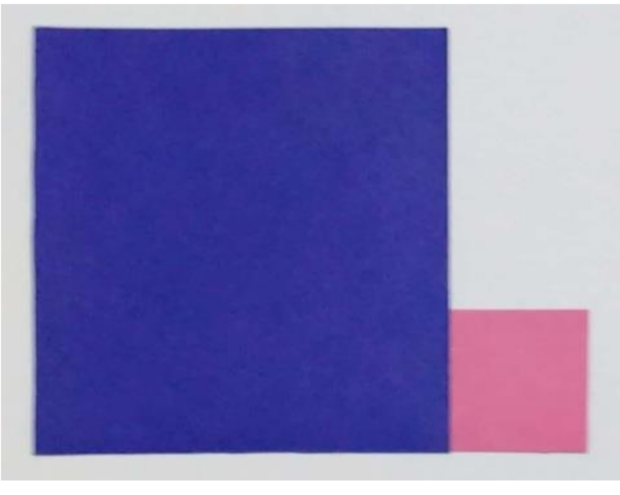
$$340 = 34\,.\,10$$

$$340 = 340\,.$$

3.5.1. Demonstração

I. Distribuir para cada grupo dois envelopes contendo as peças. Com o primeiro envelope, exponha apenas dois quadrados.

Possível solução:



II. Obtenha as áreas dos quadrados e a soma das mesmas, fixando a área inicial.

Possível solução:

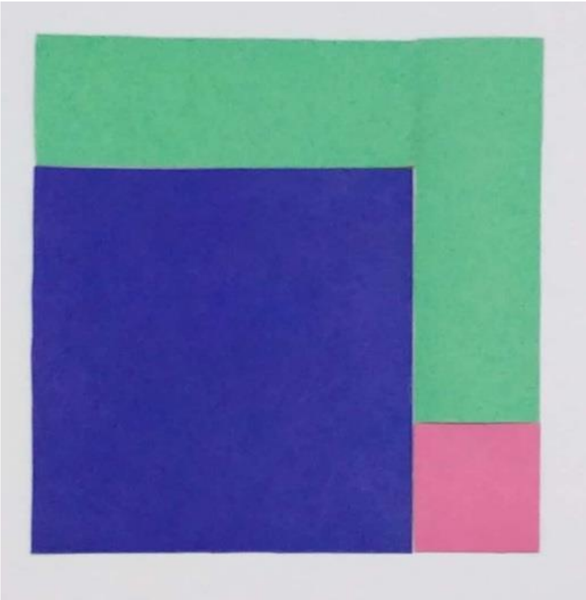
Quadrado: x^2 .

Retângulo: y^2 .

Soma: $x^2 + y^2$.

III. Ainda com o primeiro envelope, utilizando os dois retângulos restantes, complete o quadrado, utilizando as quatro peças, sem sobreposição.

Possível solução:



IV. Observe as áreas adicionadas, ou seja, os dois retângulos. Encontre uma expressão que melhor represente essa área. Lembrando que teremos que retirá-las no final.

Possível solução:

$$(x + y)^2 - x^2 - y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 = 2xy .$$

V. Utilizando apenas as peças do segundo envelope, substituir o quadrado formado por outro de mesma área.

Possível solução:

VI. Nessa nova distribuição de peças, temos um quadrado de lado $\sqrt{\boldsymbol{2xy}}$, que representa a área dos dois retângulos adicionados. Calcule medida dos lados de cada retângulo.

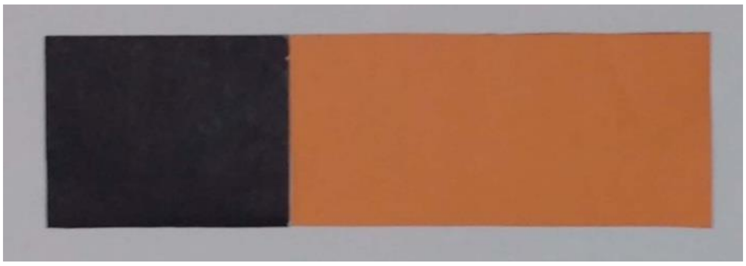
Possível solução:

Lados do retângulo maior: $x + y$ e $x + y - \sqrt{2xy}$.

Lados do retângulo menor: $x + y - \sqrt{2xy}$ e $\sqrt{2xy}$.

VII. Observe que os retângulos possuem um lado em comum. Construir um retângulo com duas peças, retirando a área do quadrado que a mesma dos dois retângulos acrescentados no início, para que possamos preservar a área inicial.

Possível solução:



VIII. Encontre uma expressão que melhor represente essa área.

Possível solução:

$$\left(x + y + \sqrt{2xy}\right) . \left(x + y - \sqrt{2xy}\right).$$

I. Compare a área inicial, dos dois quadrados, com a área final, do retângulo. Concluímos que permanecemos com a mesma área, apenas modificando as peças. Encontre a igualdade que represente esse fato.

Possível solução:

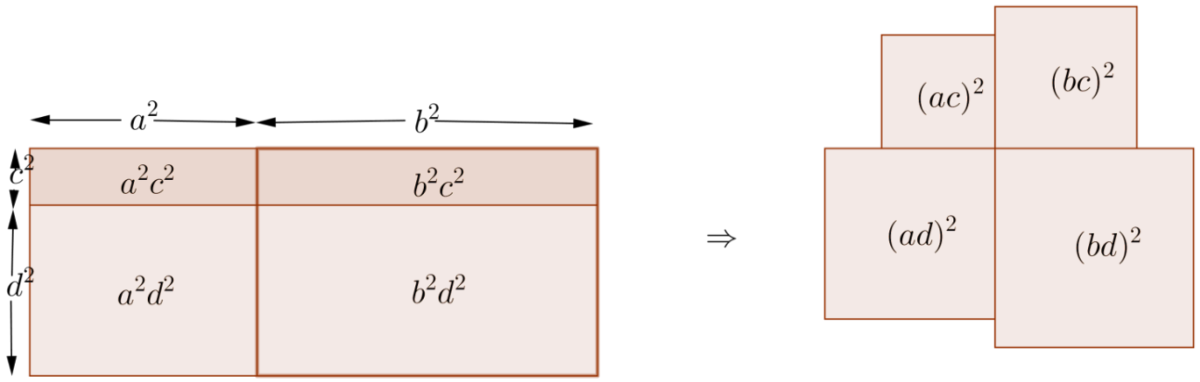
$$x^2 + y^2 = \left(x + y + \sqrt{2xy}\right) . \left(x + y - \sqrt{2xy}\right).$$

3.6. Identidade de diofanto

Teorema: *Dados a,b,c e d reais positivos, o produto da soma dos quadrados é*

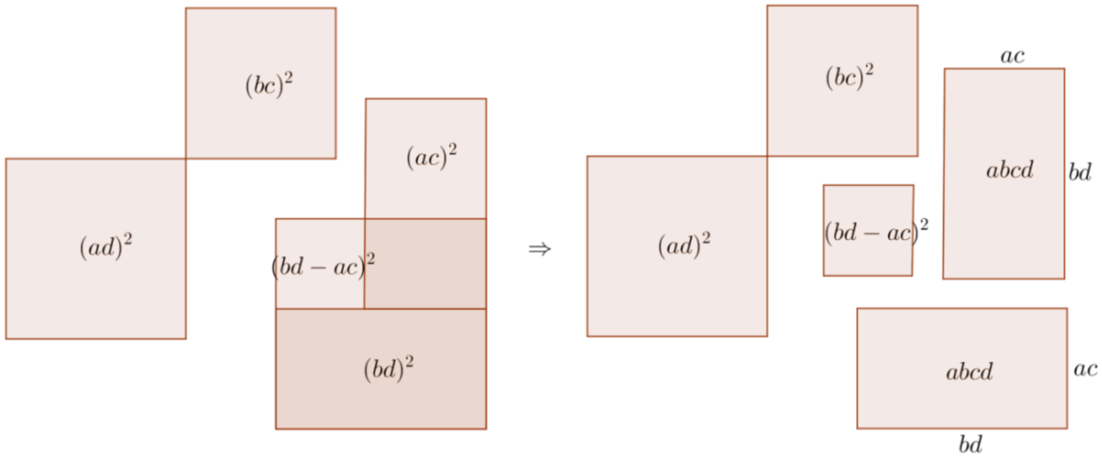
$$(a^2 + b^2) . (c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2 .$$

Figura 11 - Retângulos transformados em quadrados de mesma área.



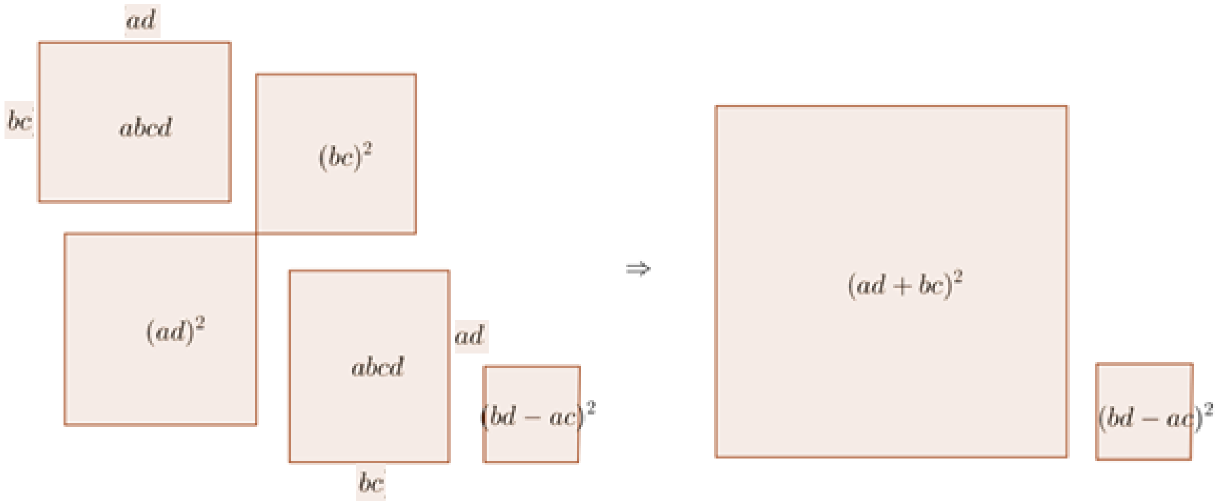
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 12 - Construção do quadrado de lado bd - ac.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 13 - Cinco quadriláteros reorganizados.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Monômios ou termos algébricos.
- Os produtos notáveis.
- Potências.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{a^2}$ e largura $\boldsymbol{d^2}$.
  - Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{b^2}$ e largura $\boldsymbol{c^2}$.
  - Um retângulo de comprimento $\boldsymbol{b^2}$ e largura $\boldsymbol{d^2}$.
  - Um quadrado de lado $(\boldsymbol{ac})^2$.
  - Um quadrado de lado $(\boldsymbol{bc})^2$.
  - Um quadrado de lado $(\boldsymbol{ad})^2$.
  - Um quadrado de lado $(\boldsymbol{bd})^2$.
  - Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{ac}$ e largura $\boldsymbol{bd}$.
  - Um quadrado de lado $(\boldsymbol{bd}-\boldsymbol{ac})^2$.
  - Dois retângulos de comprimento $\boldsymbol{ad}$ e largura $\boldsymbol{bc}$.
  - Um quadrado de lado $(\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc})^2$.

Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para quadriláteros com áreas diferentes e definir valores para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$, tais que $\boldsymbol{bd} > \boldsymbol{ac}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{a = 3cm, b = 4cm, c = 1cm}$ e $\boldsymbol{d = 2cm}$, distribuídos em envelopes da seguinte forma:

I. Envelope
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{3^2 = 4}$**cm** e largura $\mathbf{1^2 = 1}$**cm.**
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{3^2 = 9}$**cm** e largura $\mathbf{2^2 = 4}$**cm.**
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{4^2 = 16}$**cm** e largura $\mathbf{1^2 = 1}$**cm.**
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{4^2 = 16}$**cm** e largura $\mathbf{2^2 = 4}$**cm.**

II. Envelope
   - Um quadrado de lado $\mathbf{3.1 = 3}$**cm.**
   - Um quadrado de lado $\mathbf{4.1 = 4}$**cm.**
   - Um quadrado de lado $\mathbf{3.2 = 6}$**cm.**
   - Um quadrado de lado $\mathbf{4.2 = 8}$**cm.**

III. Envelope
   - Dois retângulos de comprimento $\mathbf{3.1 = 3}$**cm** e largura $\mathbf{4.2 = 8}$**cm.**
   - Um quadrado de lado $\mathbf{4.2 - 3.1 = 5}$**cm.**

IV. Envelope
   - Dois retângulos de comprimento $\mathbf{3.2 = 6}$**cm** e largura $\mathbf{4.1 = 4}$**cm.**

V. Envelope
   - Um quadrado de lado $\mathbf{3.2 + 4.1 = 10}$**cm.**

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{a = 3cm, b = 5cm, c = 2cm}$ e $\boldsymbol{d = 4cm}$:
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{3^2 = 9}$**cm** e largura $\mathbf{2^2 = 4}$**cm.**
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{3^2 = 9}$**cm** e largura $\mathbf{4^2 = 16}$**cm.**
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{5^2 = 25}$**cm** e largura $\mathbf{2^2 = 4}$**cm.**
   - Um retângulo de comprimento $\mathbf{5^2 = 25}$**cm** e largura $\mathbf{4^2 = 16}$**cm.**
   - Um quadrado de lado $\mathbf{3.2 = 6}$**cm.**

- Um quadrado de lado $\mathbf{5.2} = \mathbf{10cm}$**.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{3.4} = \mathbf{12cm}$**.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{5.4} = \mathbf{20cm}$**.**
- Dois retângulos de comprimento $\mathbf{3.2} = \mathbf{6cm}$ e largura $\mathbf{5.4} = \mathbf{20cm}$**.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{5.4} - \mathbf{3.2} = \mathbf{14cm}$**.**
- Dois retângulos de comprimento $\mathbf{3.4} = \mathbf{12cm}$ e largura $\mathbf{5.2} = \mathbf{10cm}$**.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{3.4} + \mathbf{5.2} = \mathbf{22cm}$**.**

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$(a^2 + b^2)\,.\,(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do aluno, ou seja, $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{b} = \mathbf{4}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{c} = \mathbf{1}\boldsymbol{cm}$ e $\boldsymbol{d} = \mathbf{2}\boldsymbol{cm}$:

  Possível solução:

$$(3^2 + 4^2)\,.\,(1^2 + 2^2) = (3.2 + 4.1)^2 + (4.2 - 3.1)^2$$
$$(9 + 16)\,.\,(1 + 4) = (6 + 4)^2 + (8 - 3)^2$$
$$(25)\,.\,(5) = (10)^2 + (5)^2$$
$$125 = 100 + 25$$
$$125 = 125\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do professor, ou seja, $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}\boldsymbol{cm},\ \boldsymbol{b} = \mathbf{5}\boldsymbol{cm},\ \boldsymbol{c} = \mathbf{2}\boldsymbol{cm}$ e $\boldsymbol{d} = \mathbf{4}\boldsymbol{cm}$:

  Possível solução:

$$(3^2 + 5^2)\,.\,(2^2 + 4^2) = (3.4 + 5.2)^2 + (5.4 - 3.2)^2$$
$$(9 + 25)\,.\,(4 + 16) = (12 + 10)^2 + (20 - 6)^2$$

$$(34)\,.\;(20) = (22)^2 + (14)^2$$
$$680 = 484 + 196$$
$$680 = 680\,.$$

3.6.1. Demonstração

I. Distribuir para cada grupo os cinco envelopes contendo as peças. Com o primeiro envelope, construa um retângulo usando as quatro peças, sem sobreposição, fixando a área inicial.

Possível solução:

II. Obtenha os lados do retângulo formado e sua área. Fixe a área inicial.

Possível solução:

Lado menor: $a^2 + b^2$.

Lado maior: $c^2 + d^2$.

Área: $(a^2 + b^2).(c^2 + d^2)$.

III. Com o segundo envelope, substituir cada retângulo pôr um quadrado com mesma área. Veja que tínhamos um retângulo de lados $\boldsymbol{a^2}$ e $\boldsymbol{c^2}$ (cuja área é $\boldsymbol{a^2c^2}$) e agora temos um quadrado de lado $\boldsymbol{ac}$ (cuja área é $(\boldsymbol{ac})^{\boldsymbol{2}}$), ou seja, permanecemos com a mesma área. Observe que isso ocorre com os outros três quadriláteros e que peças com mesma cor possuem áreas iguais.

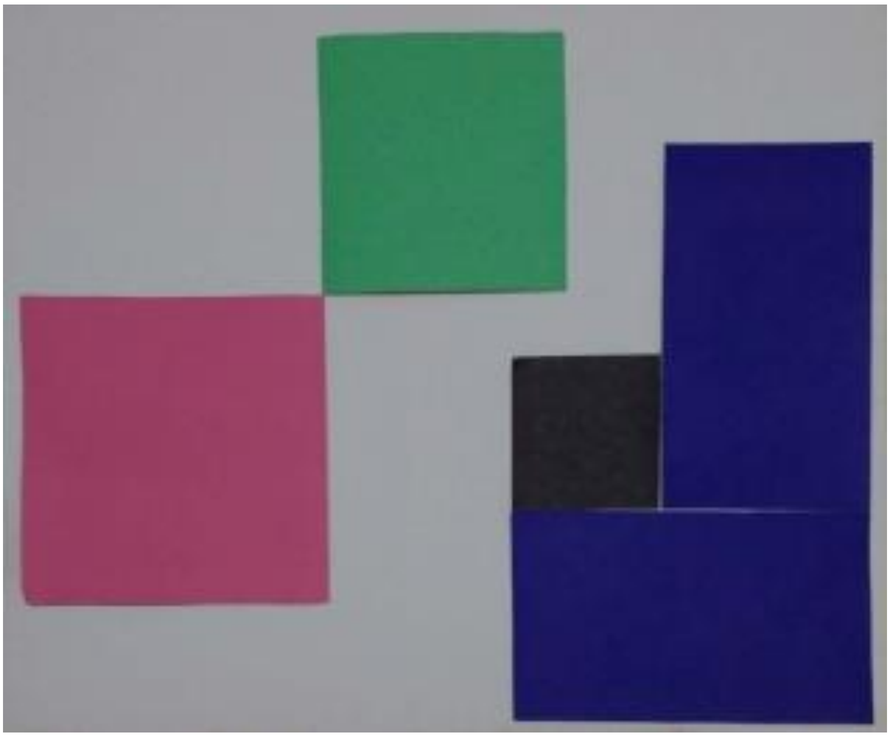
Possível solução:

IV. Retire o quadrado maior e o quadrado menor, e separadamente junte-os, de forma que, os outros dois permaneçam inalterados.

Possível solução:

V. Utilizando as peças do terceiro envelope, substituir os dois quadrados separados, permanecendo com a mesma área.

Possível solução:



VI. Calcule a área do quadrado formado nessa nova subdivisão, bem como, a área dos retângulos.

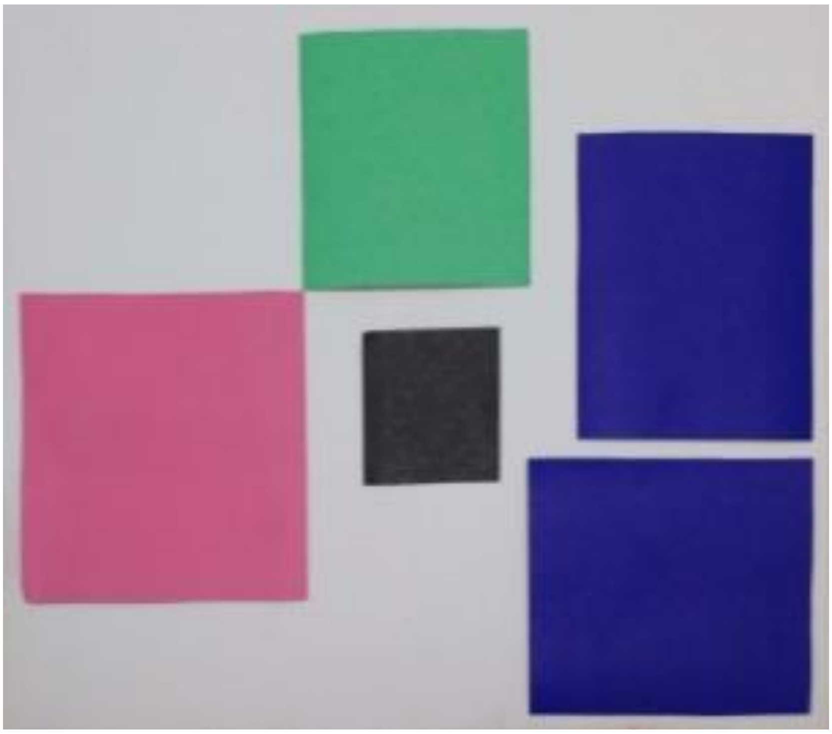
Possível solução:

Temos que a medida do lado do quadrado maior $\boldsymbol{bd}$ menos a medida do lado do quadrado menor $\boldsymbol{ac}$ é igual ao lado do quadrado formado $\boldsymbol{bd} - \boldsymbol{ac}$, portanto sua área é $(\boldsymbol{bd} - \boldsymbol{ac})^{\mathbf{2}}$**.**

Logo os lados de cada retângulo são $\boldsymbol{ac}$ e $\boldsymbol{bd}$, e suas áreas são $\boldsymbol{abdc}$**.**

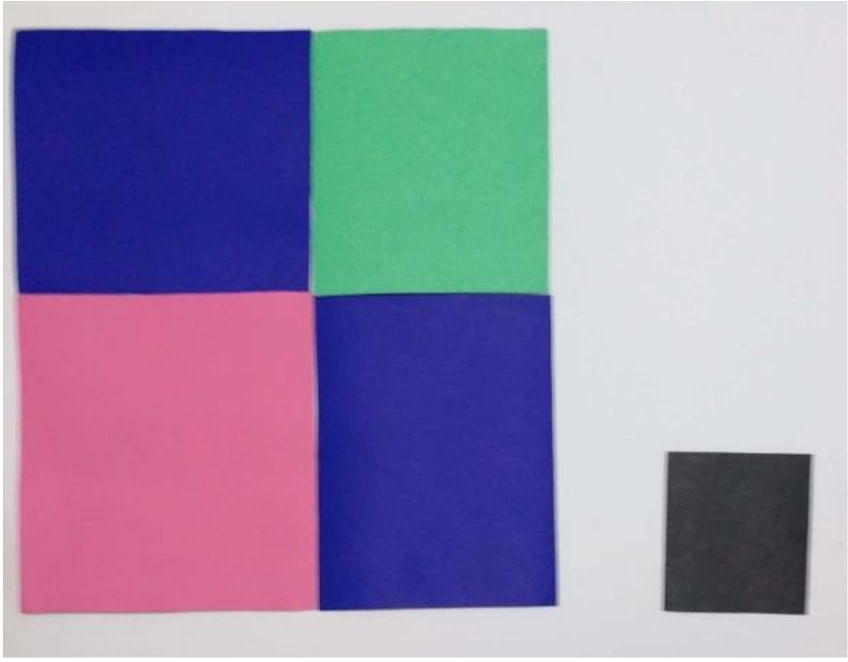
VII. Com o quarto envelope, substituir os dois retângulos por outros dois retângulos de mesma área, para termos lados em comum com os quadrados. Temos a intenção de completar o quadrado maior, logo devemos ter dois retângulos de lados $\boldsymbol{ad}$ e $\boldsymbol{bc}$**,** note que permanecemos com a mesma área $\boldsymbol{abdc}$**.**

Possível solução:



VIII. Observe que os dois retângulos juntamente com os dois quadrados inalterados formam um quadrado maior. Então obtenha dois quadrados com essas cinco peças.

Possível solução:



IX. Observe à composição desses quadrados e obtenha uma expressão que represente a área de cada um, assim como a soma das mesmas.

Possível solução:

Quadrado maior: $(ad + bc)^2$.

Quadrado menor: $(bd - ac)^2$.

Soma: $(ad + bc)^2 + (bd - ac)^2$.

X. Compare a área inicial, do retângulo, com a área final, dos dois quadrados. Concluímos que permanecemos com a mesma área, apenas modificando as peças.

Possível solução:

$$(a^2 + b^2) \, . \, (c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (bd - ac)^2 \, .$$

3.7. DESIGUALDADE ENTRE OS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

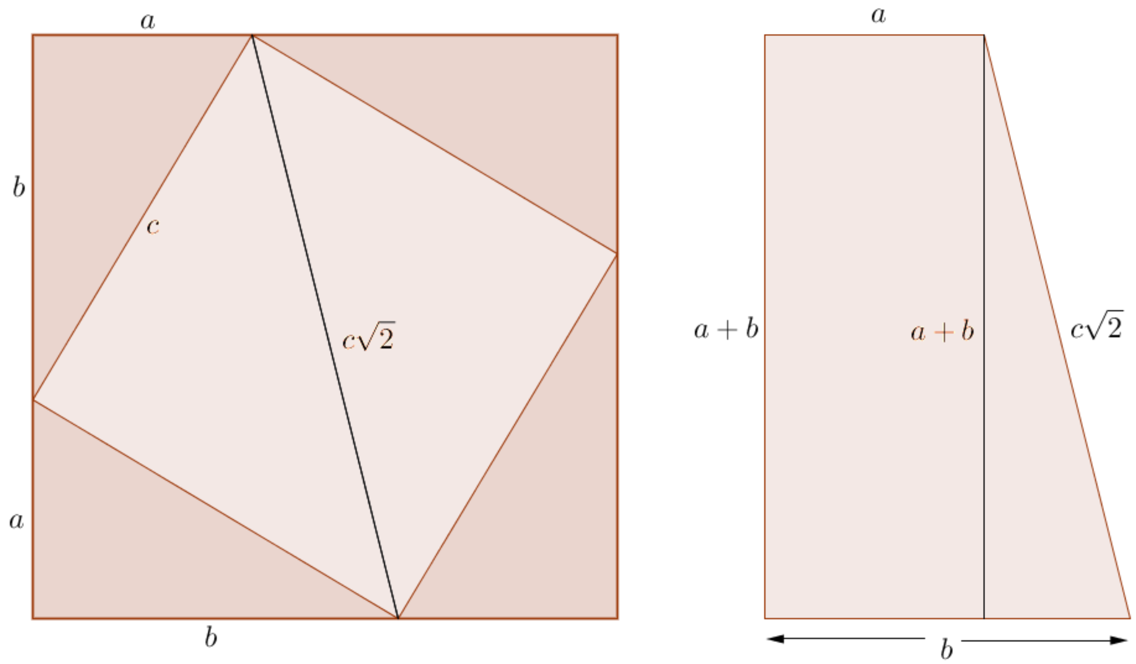
Teorema: *Em um triângulo retângulo de catetos* a *e* b *e hipotenusa* c *vale a desigualdade*

$$a + b \leq c\sqrt{2}$$

e a igualdade vale se, e somente se, o triângulo é isósceles, ou seja,

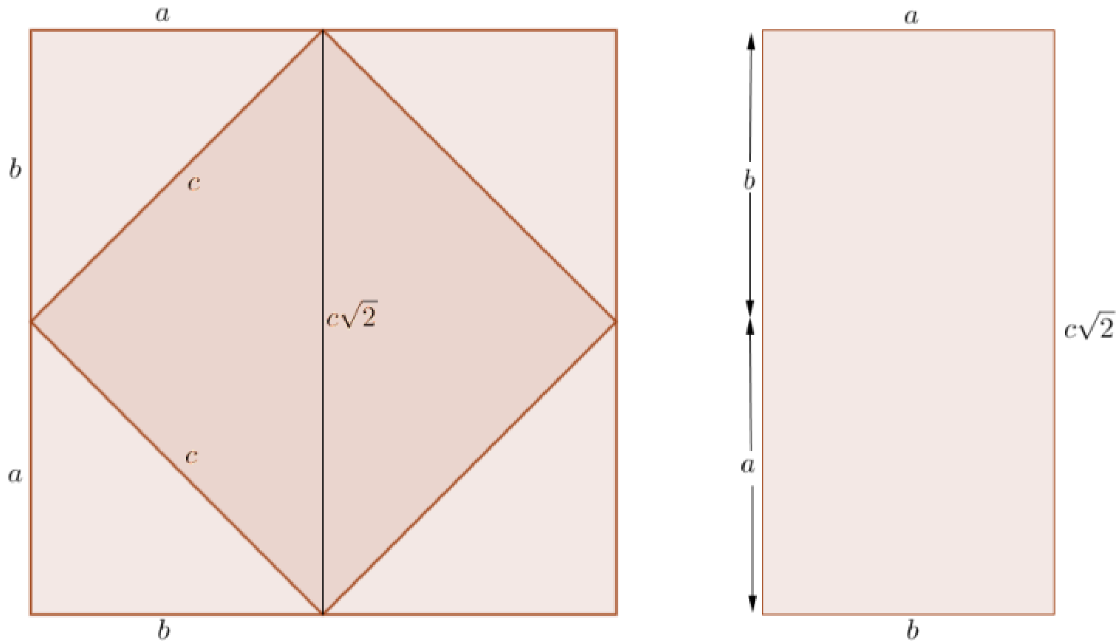
$$a = b \text{ e } c = a\sqrt{2} \, .$$

Figura 14 - Relação entre diagonal do quadrado menor e lado do quadrado maior.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 15 - Relação entre diagonal do quadrado menor e lado do quadrado maior.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 9° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- O Teorema de Pitágoras.
- Relações métricas no triângulo retângulo.
- Relações trigonométricas no triângulo retângulo.
- Calculando as áreas de algumas figuras geométricas.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Dois quadrados de lado $\boldsymbol{a+b}$.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{c}$, tais que $\boldsymbol{a+b<c\sqrt{2}}$.
  - Um quadrado de lado $\boldsymbol{c}$, tais que $\boldsymbol{a+b=c\sqrt{2}}$ e $\boldsymbol{a=b}$.

  Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para quadriláteros diferentes e definir valores para $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, distribuídos em envelopes da seguinte forma:

I. Envelope (tomando $\boldsymbol{a = 5\,cm, b = 12cm, c = 13cm}$).

- Um quadrado de lado $\mathbf{5+12=17}\boldsymbol{cm}$ **.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{13}\boldsymbol{cm}$**.**

II. Envelope (tomando $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{8,5}\ \boldsymbol{cm}$**).**

- Um quadrado de lado $\mathbf{8,5+8,5=17}\boldsymbol{cm}$ **.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{12,02}\ \boldsymbol{cm}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, distribuídos em envelopes da seguinte forma:

I. Envelope (Tomando $\boldsymbol{a} = \mathbf{8}\ \boldsymbol{cm},\ \boldsymbol{b} = \mathbf{15}\boldsymbol{cm},\ \boldsymbol{c} = \mathbf{17}\boldsymbol{cm}$**)**

- Um quadrado de lado $\mathbf{8+15=23}\boldsymbol{cm}$ **.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{17}\boldsymbol{cm}$**.**

II. Envelope (Tomando $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{11,5}\ \boldsymbol{cm}$)**.**

- Um quadrado de lado $\mathbf{11,5+11,5=23}\boldsymbol{cm}$ **.**
- Um quadrado de lado $\mathbf{16.2}\boldsymbol{cm}$**.**

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade das expressões.

$$a+b \leq c\sqrt{2}$$

e

$$a = b\ e\ c = a\sqrt{2} \Leftrightarrow\ a+b = c\sqrt{2}\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do aluno.

  Possível solução:

- Desigualdade (Tomando $\boldsymbol{a = 5\ cm, b = 12cm,\ c = 13cm}$).

$$5 + 12 < 13\sqrt{2}$$

$$17 < 13\sqrt{2}\ .$$

- Igualdade (Tomando $\boldsymbol{a = b = 8,5\ cm,}$).

  Assim sendo, $c = 8{,}5\sqrt{2}$. Logo

$$8{,}5 + 8{,}5 = 8{,}5\ .\sqrt{2}\ .\sqrt{2}$$

$$17 = 17\ .$$

❖ Tomando como referência os valores do material do professor.

Possível solução:

- Desigualdade (Tomando $\boldsymbol{a = 8\ cm,\ b = 15cm,\ c = 17cm}$).

$$8 + 15 < 17\sqrt{2}$$

$$23 < 24{,}04\ .$$

- Igualdade (Tomando $\boldsymbol{a = b = 11,5\ cm}$).

  Assim sendo, $c = 11{,}5\sqrt{2}$. Logo

$$11{,}5 + 11{,}5 = 11{,}5\sqrt{2}\ .\sqrt{2}$$

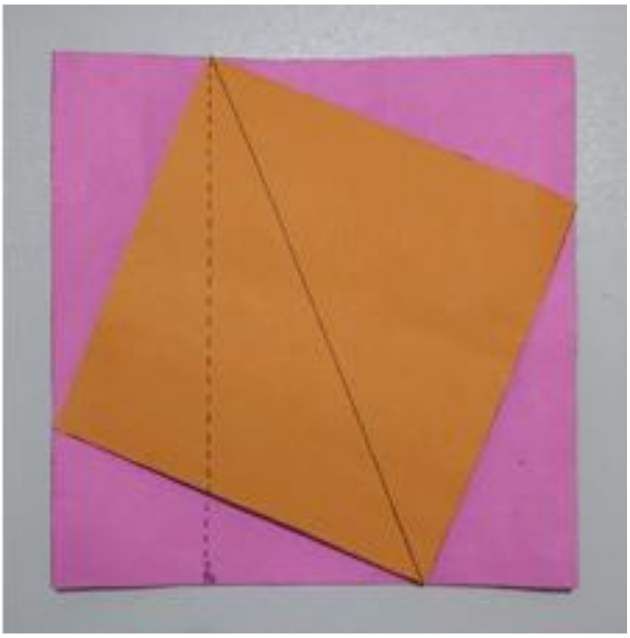
$$23 = 23\ .$$

3.7.1. Demonstração da desigualdade

$$a + b < c\sqrt{2}\ .$$

I. Com o primeiro envelope, inserir o quadrado menor no quadrado maior, com sobreposição.

Possível solução:



II. Observe que a diagonal do quadrado menor divide o quadrado maior em dois trapézios retângulos. Verifique os valores da base menor, base maior e altura do trapézio.

Possível solução:

Base menor: a .

Base maior: b .

Altura: $a + b$.

III. Traçando um segmento paralelo a altura do trapézio, obtemos um triângulo retângulo junto com a diagonal do quadrado menor. Encontre a medida da hipotenusa.

Possível solução:

Hipotenusa: $c\sqrt{2}$.

IV. Observe que em qualquer triângulo retângulo o cateto é sempre menor que a hipotenusa. Concluímos assim, que a altura do trapézio (ou o lado do quadrado maior) é menor que a diagonal do quadrado menor. Encontre a desigualdade que represente esse fato.

Possível solução:

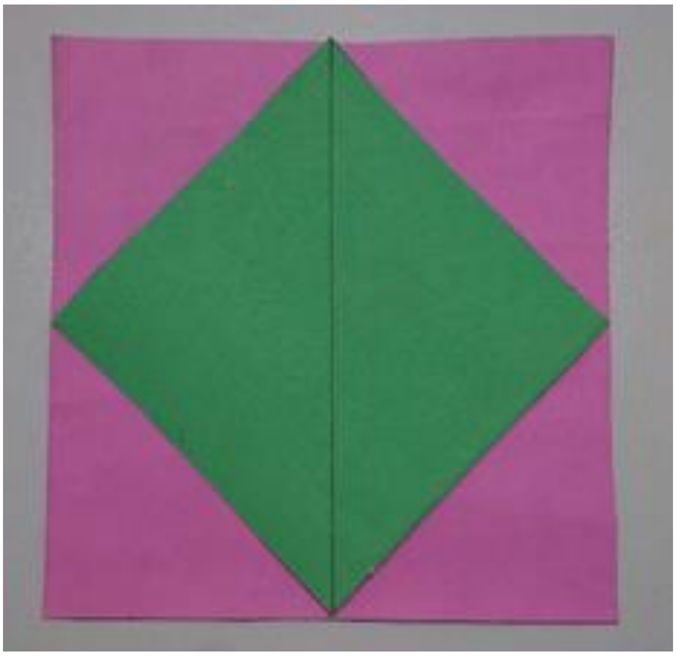
$$a + b < c\sqrt{2}\,.$$

3.7.2. Demonstração da igualdade

$$a + b = c\sqrt{2}\,.$$

V. Com o segundo envelope, inserir o quadrado menor no quadrado maior, com sobreposição.

Possível solução:



Observe que a diagonal do quadrado menor divide o lado do quadrado ao meio. O que acontece com $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$? Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo Δabc, encontre uma expressão simplificada pra $\boldsymbol{c}$**.**

Possível solução:

Vamos obter $a = b$. E a seguinte igualdade

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = a\sqrt{2}\,.$$

VI. Observe que a diagonal do quadrado menor é paralela ao lado do quadrado maior e o divide em dois retângulos de mesma área. Concluímos que a medida do lado do quadrado maior é igual à medida da diagonal do quadrado menor. Encontre a igualdade que represente esse fato.

Possível solução:

$$a + b = c\sqrt{2}\,.$$

4. DESIGUALDADES RELATIVAS ÀS ÁREAS

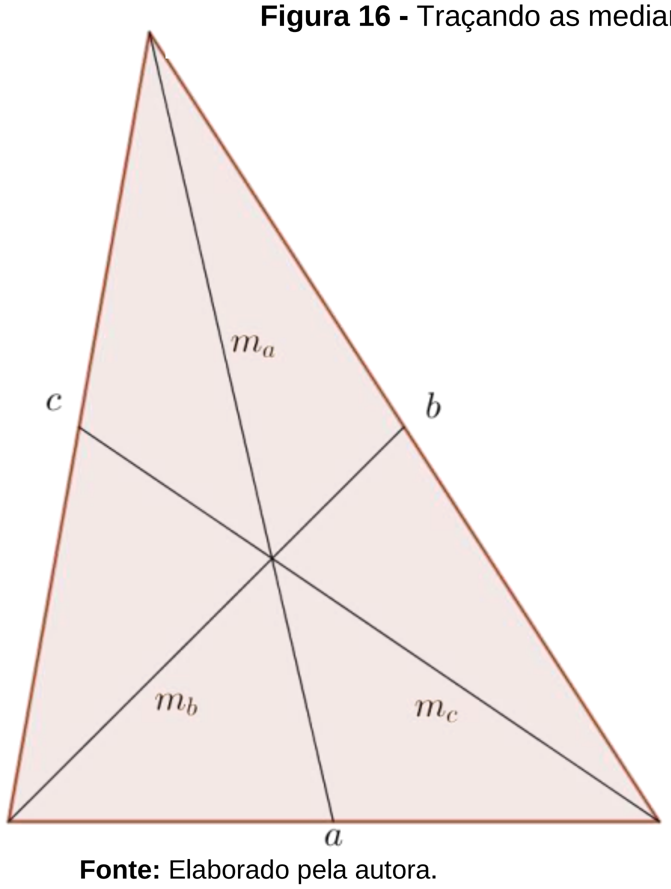
Iniciamos, nesta secção, algumas propriedades dos quadriláteros, relacionando suas áreas com diagonais, lados ou medianas.

4.1. Áreas proporcionais

Teorema: *Considere o triângulo de lados a, b e c, representado por Δabc. Traçando as medianas m_a, m_b e m_c, que formam o triângulo $\Delta m_a m_b m_c$, então*

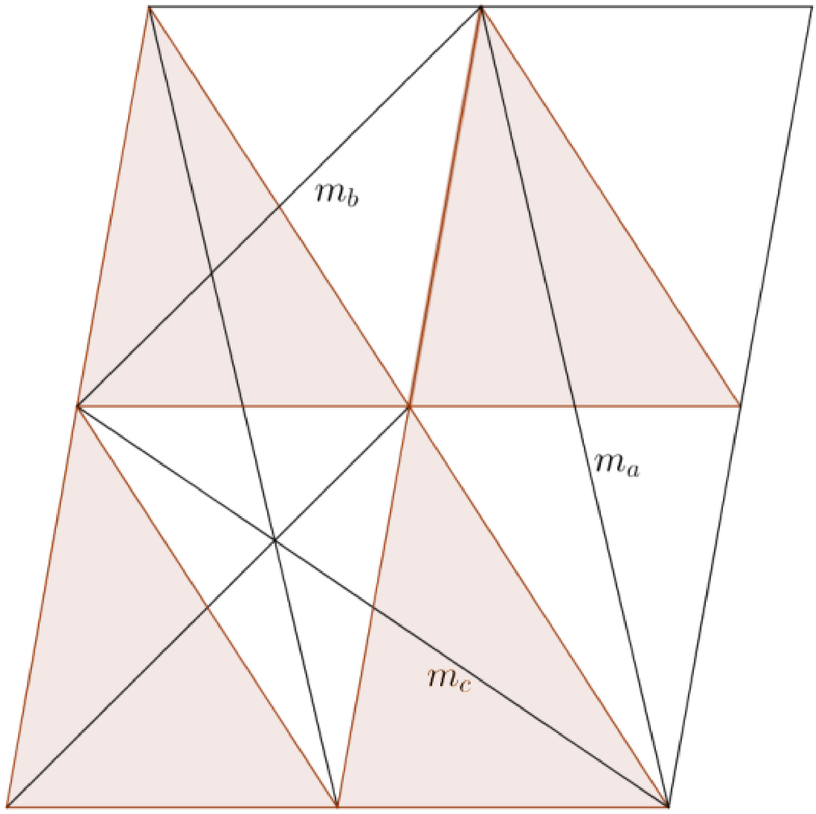
$$Área\ (\Delta m_a m_b m_c) = \frac{3}{4} \cdot Área(\Delta abc).$$

Figura 16 - Traçando as medianas de um triângulo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 17 - Paralelogramo formado por triângulos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Elementos de um triângulo.
- Os ângulos no triângulo.
- Classificação dos triângulos.
- Altura, mediana e bissetriz de um triângulo.
- Congruência de triângulos.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Dois triângulos de lados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, e $\boldsymbol{c}$.
  - Quatro triângulos de lados $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, e $\frac{c}{2}$.

  Obs.: Preferencialmente utilizar a mesma cor para os dois triângulos maiores e cores diferentes para os quatro triângulos menores. Definir valores para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$**.**

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{a}$ = $\mathbf{24}\boldsymbol{cm}$, $\boldsymbol{b}$= $\mathbf{18}\boldsymbol{cm}$ e $\boldsymbol{c}$ = $\mathbf{22}\boldsymbol{cm}$:
  - Dois triângulos de lados $\boldsymbol{a}$ = $\mathbf{24}\boldsymbol{cm}$, $\boldsymbol{b}$= $\mathbf{18}\boldsymbol{cm}$ e $\boldsymbol{c}$ = $\mathbf{22}\boldsymbol{cm}$.
  - Quatro triângulos de lados $\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{2}} = \mathbf{12}\boldsymbol{cm},$ $\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{2}} = \mathbf{9}\boldsymbol{cm},$ e $\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{2}} = \mathbf{11}\boldsymbol{cm}$.
- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{a}$ = 36$\boldsymbol{cm}$, $\boldsymbol{b}$= 28$\boldsymbol{cm}$ e $\boldsymbol{c}$ = 32$\boldsymbol{cm}$:
  - Dois triângulos de lados $\boldsymbol{a}$ = 36$\boldsymbol{cm}$, $\boldsymbol{b}$= 28$\boldsymbol{cm}$ e $\boldsymbol{c}$ = 32$\boldsymbol{cm}$.
  - Quatro triângulos de lados $\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{2}} = \mathbf{18}\boldsymbol{cm}$, $\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{2}} = \mathbf{14}\boldsymbol{cm}$, e $\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{2}} = \mathbf{16}\boldsymbol{cm}$

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$\acute{A}rea\ (\Delta m_a m_b m_c) = \frac{3}{4} \cdot \acute{A}rea(\Delta abc).$$

- Tomando como referência os valores do material do aluno.
  Possível solução:

  - Vamos calcular a área do triângulo menor (Tomando $\boldsymbol{a}$ = 12$\boldsymbol{cm}$, $\boldsymbol{b}$= 9$\boldsymbol{cm}$ e $\boldsymbol{c}$ = 11$\boldsymbol{cm}$), através da Fórmula de Heron $\boldsymbol{A} = \sqrt{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})}$, sendo $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}$ o semiperimetro.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+9+11}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16(16-12)(16-9)(16-11)}$$
$$= \sqrt{16(4)(7)(5)} = \sqrt{2240} = 8\sqrt{35}\,.$$

Observe que o triângulo formado pelas medianas $\Delta m_a m_b m_c$ possui seis metades do triângulo destacado, logo formam três desses triângulos e o Δabc é formado por quatro desses triângulos, logo

$$3 \cdot 8\sqrt{35} = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 8\sqrt{35}$$
$$24\sqrt{35} = 24\sqrt{35}\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do professor.

Possível solução:

Vamos calcular a área do triângulo menor (Tomando $\boldsymbol{a = 18cm}$, $\boldsymbol{b = 14cm}$ e $\boldsymbol{c = 16cm}$), através da Fórmula de Heron

$\boldsymbol{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, sendo $\boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2}}$ o semiperimetro.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+14+16}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-18)(24-14)(24-16)}$$
$$= \sqrt{24(6)(10)(8)} = \sqrt{11520} = 48\sqrt{5}\,.$$

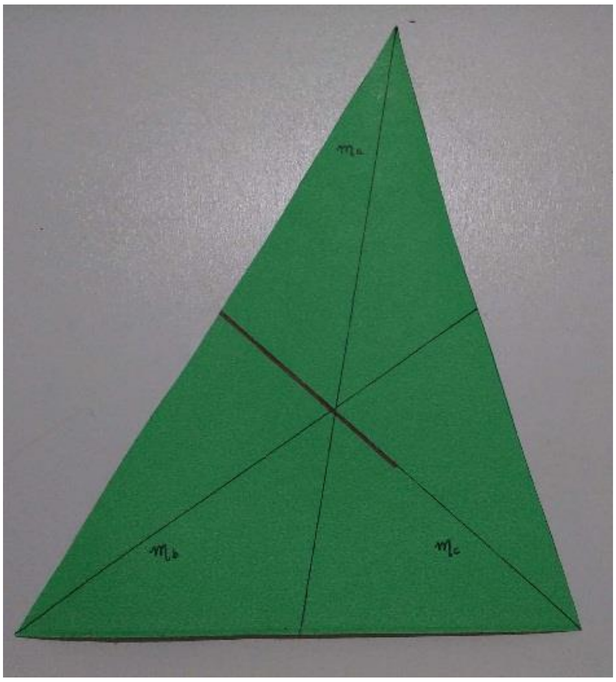
Observe que o triângulo formado pelas medianas $\Delta m_a m_b m_c$ possui seis metades do triângulo destacado, logo formam três desses triângulos e o Δabc é formado por quatro desses triângulos, logo

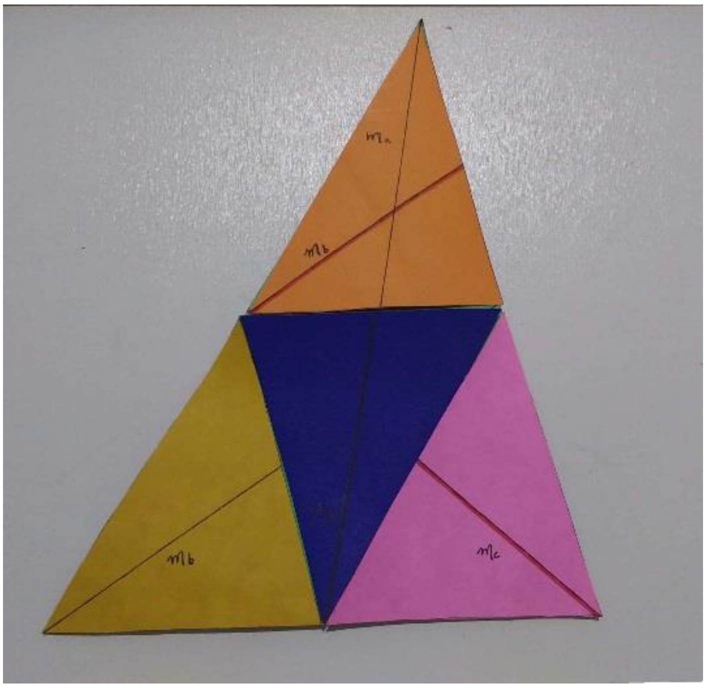
$$3 \cdot 48\sqrt{5} = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 48\sqrt{5}$$
$$144\sqrt{5} = 144\sqrt{5}\,.$$

4.1.1. Demonstração

I. Com o primeiro envelope, inserir os quatro triângulos menores no triângulo maior, com sobreposição e seguindo os traçados.

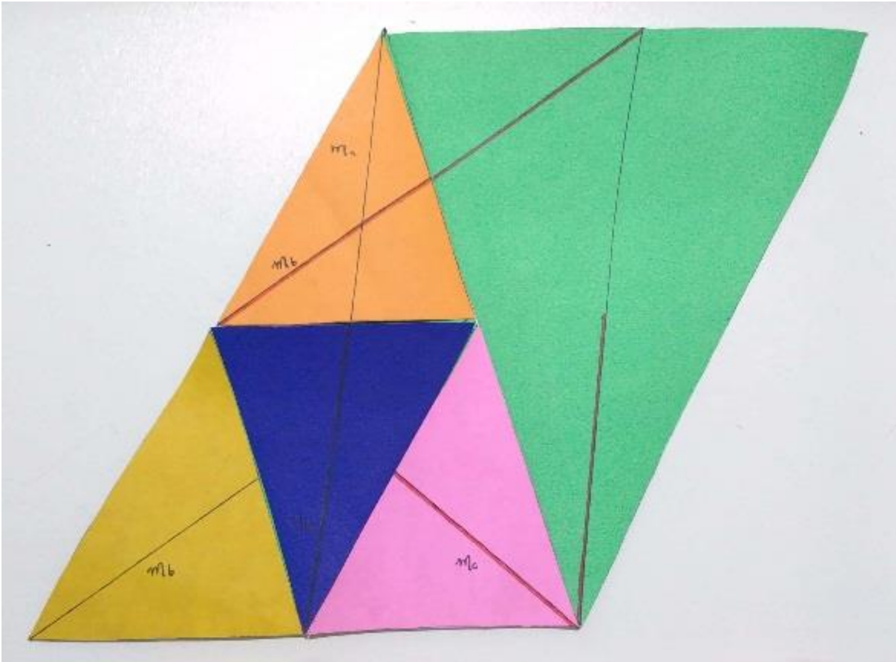
Possível solução:





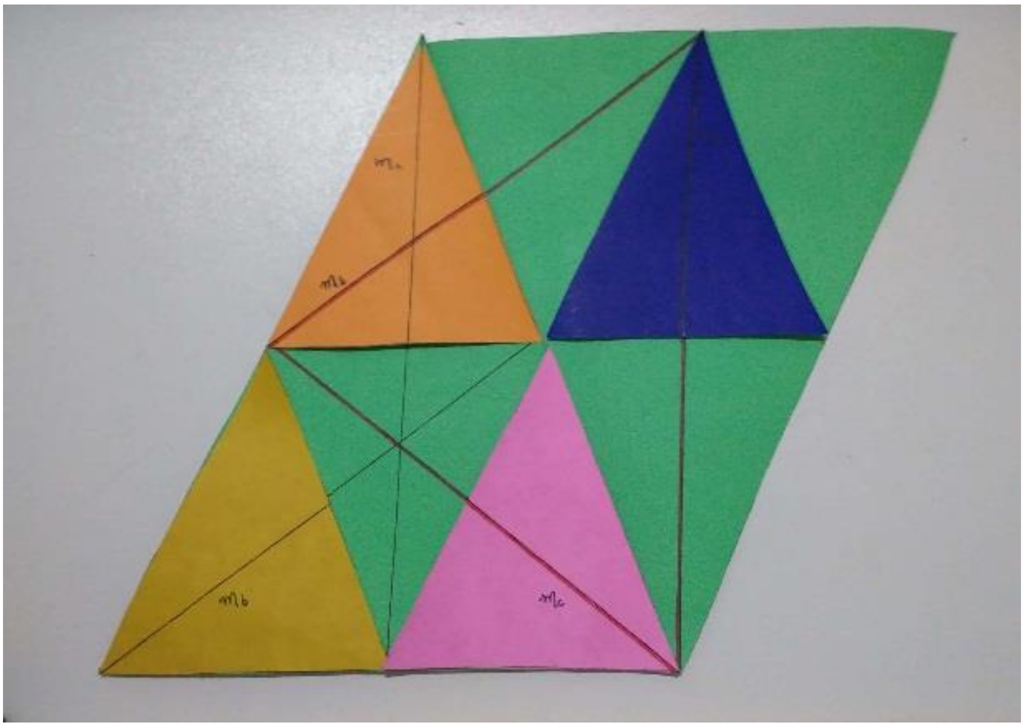
II. Com o segundo envelope, utilize o triângulo maior para completar o paralelogramo.

Possível solução:



III. Retirar o triângulo menor central do primeiro triângulo e o inserir no centro do outro triângulo. Identificar o triângulo formado pelas medianas através de retas paralelas.

Possível solução:



IV. Observe que o triângulo formado pelas medianas $\Delta m_a m_b m_c$ possui seis metades do triângulo destacado, logo formam três desses triângulos, ou ainda, que a metade de três triângulos está inserida no triângulo $\Delta m_a m_b m_c$ e as outras metades, que estão fora, completam perfeitamente o triângulo, ocupando as áreas não preenchidas interiormente. Observe que apenas um triângulo está totalmente fora. Encontre a relação de proporcionalidade existente entre Δabc e $\Delta m_a m_b m_c$.

Possível solução:

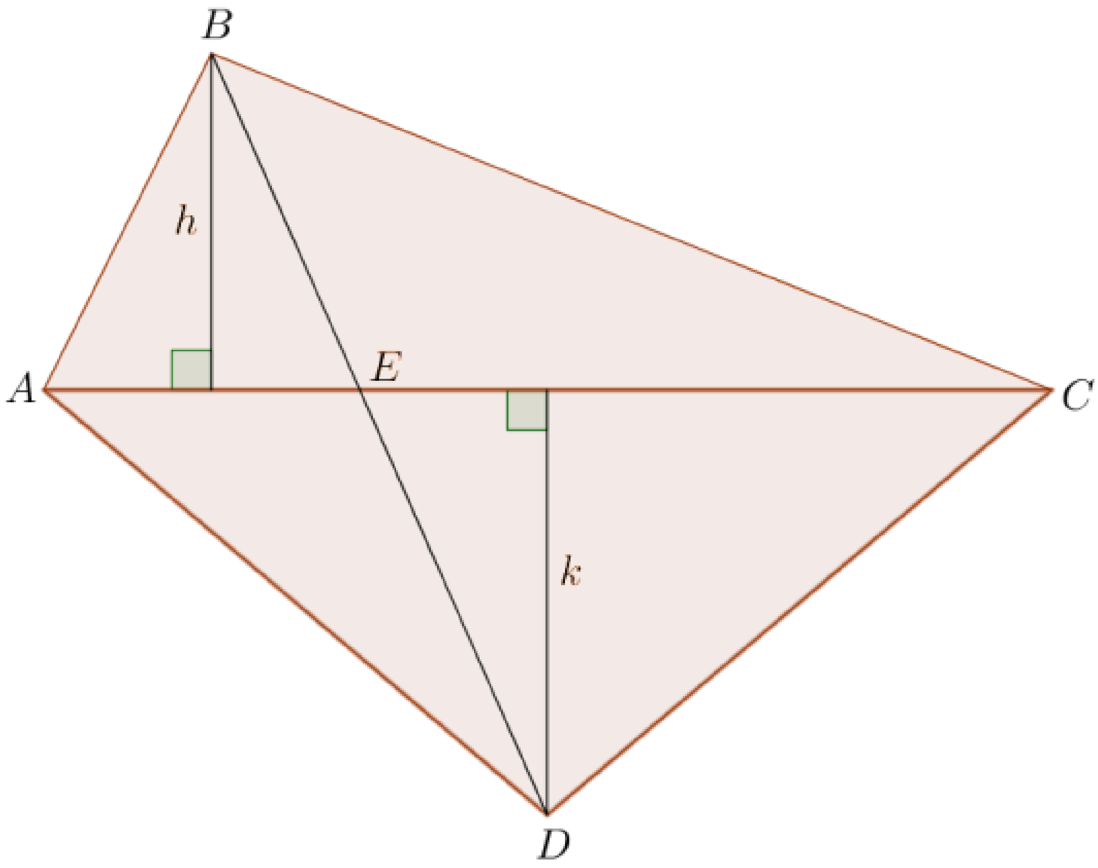
O triângulo original Δabc é formado por quatro desses triângulos destacados e o triângulo formado pelas medianas $\Delta m_a m_b m_c$ possui três triângulos destacados (ou possui seis metades do triângulo destacado). Logo

$$\acute{A}rea\ (\Delta m_a m_b m_c) = \frac{3}{4} \cdot \acute{A}rea(\Delta abc).$$

4.2. Desigualdade entre área e diagonal de um quadrilátero convexo

Teorema: *A área de um quadrilátero convexo é inferior ou igual a metade do produto dos comprimentos de suas diagonais, com igualdade se, e somente se, as diagonais são perpendiculares.*

Figura 18 - Quadrilátero convexo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Polígonos e seus elementos.
- Perímetro de um polígono.
- Diagonais de um polígono.
- Ângulos de um polígono convexo.
- Ângulos de um polígono regular.
- O quadrilátero e seus elementos.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Três triângulos de lados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.
  - Um triângulo de lados $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{c}$.

Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para todos os triângulos e definir valores para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{f}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{a = 10cm},\ \boldsymbol{b = 20cm},\ \boldsymbol{c = 22cm},\ \boldsymbol{e = 14cm}$ e $\boldsymbol{f = 17cm.}$

I. Envelope.
- Um triângulo de lados $\mathbf{10}\boldsymbol{cm},\ \mathbf{20}\boldsymbol{cm}\ e\ \mathbf{22}\boldsymbol{cm}$.
- Um triângulo de lados $\mathbf{14}\boldsymbol{cm},\ \mathbf{17}\boldsymbol{cm}\ e\ \mathbf{22}\boldsymbol{cm}$.

II. Envelope.
- Dois triângulos de lados $\mathbf{10}\boldsymbol{cm},\ \mathbf{20}\boldsymbol{cm}\ e\ \mathbf{22}\boldsymbol{cm}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{a = 20cm},\ \boldsymbol{b = 40cm},\ \boldsymbol{c = 44cm},\ \boldsymbol{e = 26cm}$ e $\boldsymbol{f = 30cm.}$

I. Envelope.
- Um triângulo de lados $\mathbf{20}\boldsymbol{cm}, \mathbf{40}\boldsymbol{cm}\ e\ \mathbf{44}\boldsymbol{cm}$.
- Um triângulo de lados $\mathbf{26}\boldsymbol{cm}, \mathbf{30}\boldsymbol{cm}\ e\ \mathbf{44}\boldsymbol{cm}$.

II. Envelope.
- Dois triângulos de lados $\mathbf{20}\boldsymbol{cm}, \mathbf{40}\boldsymbol{cm}\ e\ \mathbf{44}\boldsymbol{cm}$.

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$Área(ABCD) \leq \frac{d \cdot D}{2}\ .$$

De forma que a $\boldsymbol{Área(ABCD)}$ é a área do quadrilátero, $\boldsymbol{d}$ seja a diagonal menor e $\boldsymbol{D}$ represente a diagonal maior.

- ❖ Tomando como referência os valores do material do aluno, ou seja, tomando $\boldsymbol{a = 10cm}$, $\boldsymbol{b = 20cm}$, $\boldsymbol{c = 22cm}$, $\boldsymbol{e = 13cm}$ e $\boldsymbol{f = 15cm}$ e alturas $\boldsymbol{h = 9,5cm}$ e $\boldsymbol{k = 9cm}$

  Possível solução:

- ➢ Desigualdade

$$\frac{22 \cdot 9{,}5}{2} + \frac{22 \cdot 9}{2} < \frac{22 \cdot 19}{2}$$

$$\frac{209}{2} + \frac{198}{2} < \frac{418}{2}$$

$$104{,}5 + 99 < 209$$

$$203{,}5 < 209\,.$$

- ➢ Igualdade

$$\frac{22 \cdot 9{,}5}{2} + \frac{22 \cdot 9{,}5}{2} = \frac{22 \cdot 19}{2}$$

$$\frac{209}{2} + \frac{209}{2} = \frac{418}{2}$$

$$104{,}5 + 104{,}5 = 209$$

$$209 = 209\,.$$

- ❖ Tomando como referência os valores do material do professor, ou seja, tomando $\boldsymbol{a = 20cm}$, $\boldsymbol{b = 40cm}$, $\boldsymbol{c = 44cm}$, $\boldsymbol{e = 26cm}$ e $\boldsymbol{f = 30cm}$

Possível solução:

- ➢ Desigualdade

$$\frac{22 \cdot 9{,}5}{2} + \frac{22 \cdot 9}{2} < \frac{22 \cdot 19}{2}$$

$$\frac{209}{2} + \frac{198}{2} < \frac{418}{2}$$

$$104{,}5 + 99 < 209$$

$$203{,}5 < 209\,.$$

- ➢ Igualdade

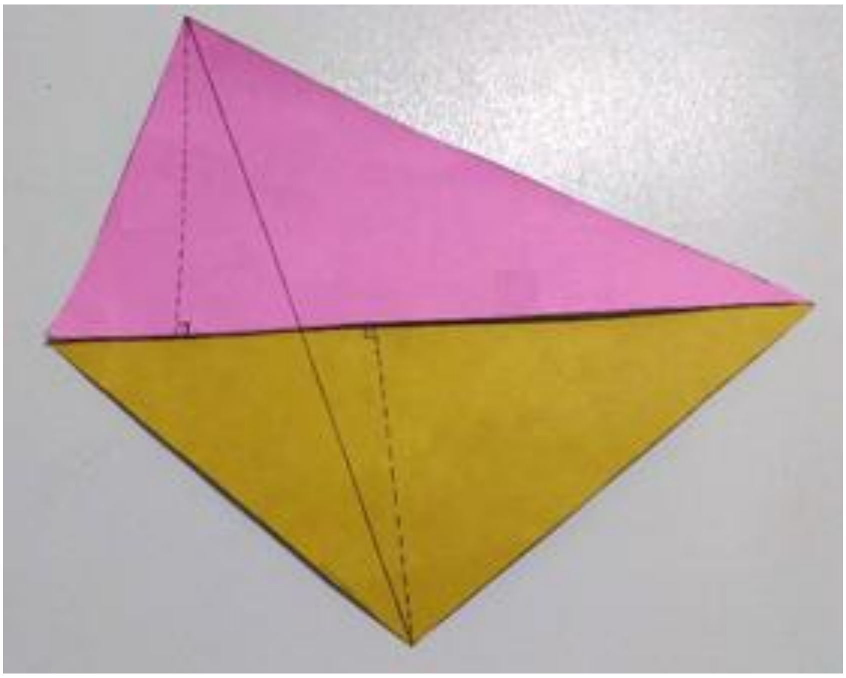
$$\frac{22 \cdot 9{,}5}{2} + \frac{22 \cdot 9{,}5}{2} = \frac{22 \cdot 19}{2}$$

$$\frac{209}{2} + \frac{209}{2} = \frac{418}{2}$$
$$104{,}5 + 104{,}5 = 209$$
$$209 = 209\,.$$

4.2.1. Demonstração da desigualdade

$$Área(ABCD) < \frac{d \cdot D}{2}\,.$$

I. Com o primeiro envelope, construir um quadrilátero de forma que suas diagonais não sejam perpendiculares, sem sobreposição.
Possível solução:



II. Observe que o lado comum aos triângulos (tomemos como base) é a diagonal maior do quadrilátero. Calcule a área do quadrilátero.
Possível solução:

$$Área(ABCD) = \frac{D.h}{2} + \frac{D.k}{2} = \frac{D}{2}\,.(h+k)\,.$$

III. Sabemos que em qualquer triângulo retângulo o cateto é sempre menor que a hipotenusa. Assim sendo, em cada triângulo a altura é menor que parte da diagonal menor, ou seja, a soma das alturas é menor que a diagonal menor. Encontre a desigualdade que represente esse fato.

Possível solução:

$$h + k < d\,.$$

IV. Comparando os valores, temos que a área do quadrilátero é menor que a metade do produto das diagonais. Encontre a expressão que represente esse fato.

Possível solução:

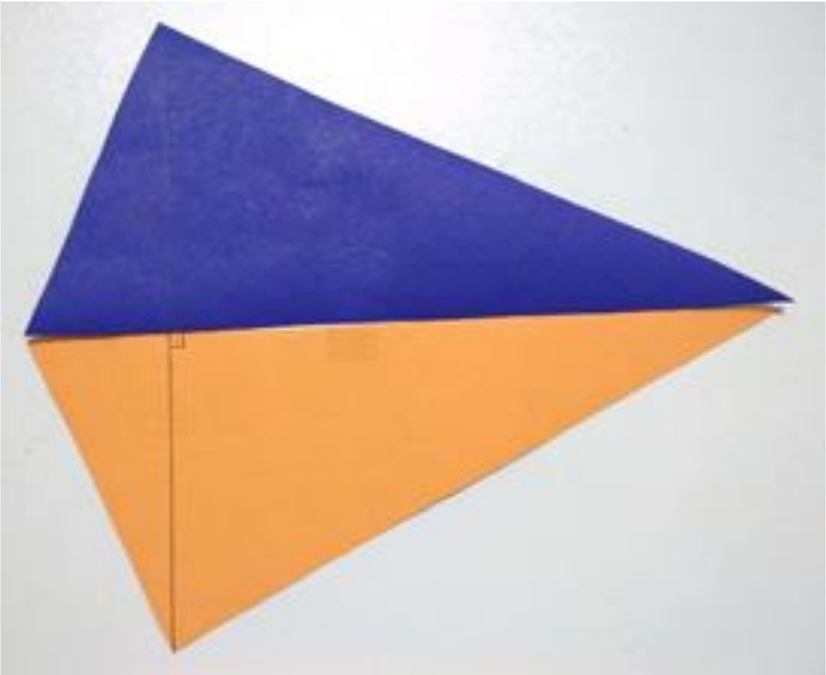
$$Área(ABCD) < \frac{D.d}{2}.$$

4.2.2. Demonstração da igualdade

$$Área(ABCD) = \frac{d \cdot D}{2}.$$

V. Com o segundo envelope, construir um quadrilátero de forma suas sejam perpendiculares, sem sobreposição.

Possível solução:



VI. Observe no quadrilátero que a soma das alturas é igual a diagonal menor, logo, a área do quadrilátero é igual à metade do produto das diagonais. Encontre a expressão que represente esse fato.

Possível solução:

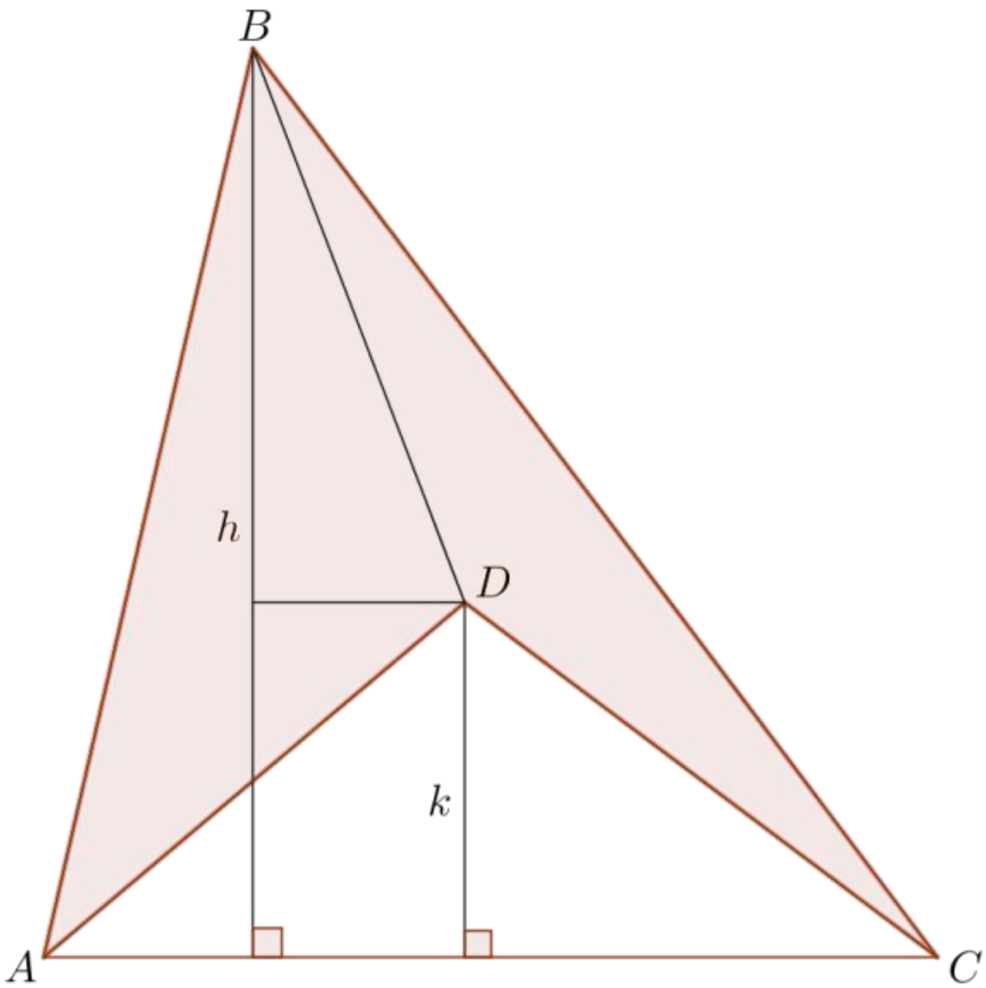
$$h + k = d$$

$$Área(ABCD) = \frac{D.d}{2}.$$

4.3. Desigualdade entre área e diagonal de um quadrilátero côncavo

Teorema: *A área de um quadrilátero côncavo é inferior ou igual à metade do produto dos comprimentos de suas diagonais, com igualdade se, e somente se, as diagonais são perpendiculares.*

Figura 19 - Quadrilátero côncavo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Série ou ano a ser aplicado: 8° ano

Conteúdos associados a habilidades:

- Polígonos e seus elementos.
- Perímetro de um polígono.
- Diagonais de um polígono.
- Ângulos de um polígono convexo.
- Ângulos de um polígono regular.
- O quadrilátero e seus elementos.

Materiais a serem confeccionados em cartolina ou EVA:

- Genericamente.
  - Dois triângulos de lados $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\ e\ \boldsymbol{c}$**.**
  - Um triângulo de lado $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{i}\ e\ \boldsymbol{c}$.
  - Um triângulo de $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\ e\ \boldsymbol{c}$.

  Obs.: Preferencialmente utilizar cores diferentes para todos os triângulos e definir valores para $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\ e\ \boldsymbol{k}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o aluno, tomando $\boldsymbol{c = 22cm, f = 18cm, g = 24cm, h = 12cm, i = 13cm, j = 7cm, k = 18cm.}$

I. Envelope.
  - Um triângulo de lados $\boldsymbol{18cm, 24cm}\ e\ \boldsymbol{22cm}$.
  - Um triângulo de lado $\boldsymbol{12cm, 13cm}\ e\ \boldsymbol{22cm}$.

II. Envelope.
  - Um triângulo de lados $\boldsymbol{18cm, 24cm}\ e\ \boldsymbol{22cm}$.
  - Um triângulo de $\boldsymbol{7cm, 18cm}\ e\ \boldsymbol{22cm}$.

- Sugestões de valores para confecção de materiais para o professor, tomando $\boldsymbol{c = 44cm, f = 36cm, g = 48cm, h = 24cm, i = 26cm, j = 14cm, k = 36cm.}$

I. Envelope.
  - Um triângulo de lados $\boldsymbol{36cm, 48cm}\ e\ \boldsymbol{44cm}$.
  - Um triângulo de lado $\boldsymbol{24cm, 26cm}\ e\ \boldsymbol{44cm}$.

II. Envelope.

- Um triângulo de lados $\mathbf{36cm}, \mathbf{48cm}\ e\ \mathbf{44cm}$.
- Um triângulo de $\mathbf{14cm}, \mathbf{36cm}\ e\ \mathbf{44cm}$.

Distribuição de materiais: Considerando uma turma com 32 alunos, podemos dividi-los em oito grupos com quatro alunos, de forma que cada grupo receba um material completo. O professor pode escrever em cada figura as medidas dos lados correspondentes (sugerimos letras e não valores, para facilitar a compreensão do aluno ao generalizarmos).

Motivação: Através de exemplos numéricos, verifique a veracidade da expressão.

$$Área(ABCD) \leq \frac{d \cdot D}{2}.$$

De forma que a $Á\boldsymbol{rea}(\boldsymbol{ABCD})$ é a área do quadrilátero, $\boldsymbol{d}$ seja a diagonal menor e $\boldsymbol{D}$ represente a diagonal maior.

- Tomando como referência os valores do material do aluno. ($\boldsymbol{c} = \mathbf{22cm}, \boldsymbol{f} = \mathbf{18cm}, \boldsymbol{g} = \mathbf{24cm}, \boldsymbol{h} = \mathbf{12cm}, \boldsymbol{i} = \mathbf{13cm}, \boldsymbol{j} = \mathbf{7cm}, \boldsymbol{k} = \mathbf{18cm}$)

  Possível solução:

  - Desigualdade

$$\frac{22 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{22 \cdot 5{,}5}{2} < \frac{22 \cdot 13}{2}$$

$$\frac{385}{2} - \frac{121}{2} < \frac{286}{2}$$

$$192{,}5 - 60{,}5 < 143$$

$$132 < 228\,.$$

  - Igualdade

$$\frac{22 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{22 \cdot 5{,}5}{2} = \frac{12 \cdot 22}{2}$$

$$\frac{385}{2} - \frac{121}{2} = \frac{264}{2}$$

$$192{,}5 - 60{,}5 = 132$$

$$132 = 132\,.$$

- Tomando como referência os valores do material do professor. ($\boldsymbol{c} = \mathbf{44}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{f} = \mathbf{36}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{g} = \mathbf{48}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{h} = \mathbf{24}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{i} = \mathbf{26}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{j} = \mathbf{14}\boldsymbol{cm}, \boldsymbol{k} = \mathbf{36}\boldsymbol{cm}$)

Possível solução:

- Desigualdade

$$\frac{22 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{22 \cdot 5{,}5}{2} < \frac{22 \cdot 13}{2}$$

$$\frac{385}{2} - \frac{121}{2} < \frac{286}{2}$$

$$192{,}5 - 60{,}5 < 143$$

$$132 < 228\,.$$

- Igualdade

$$\frac{22 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{22 \cdot 5{,}5}{2} = \frac{12 \cdot 22}{2}$$

$$\frac{385}{2} - \frac{121}{2} = \frac{264}{2}$$

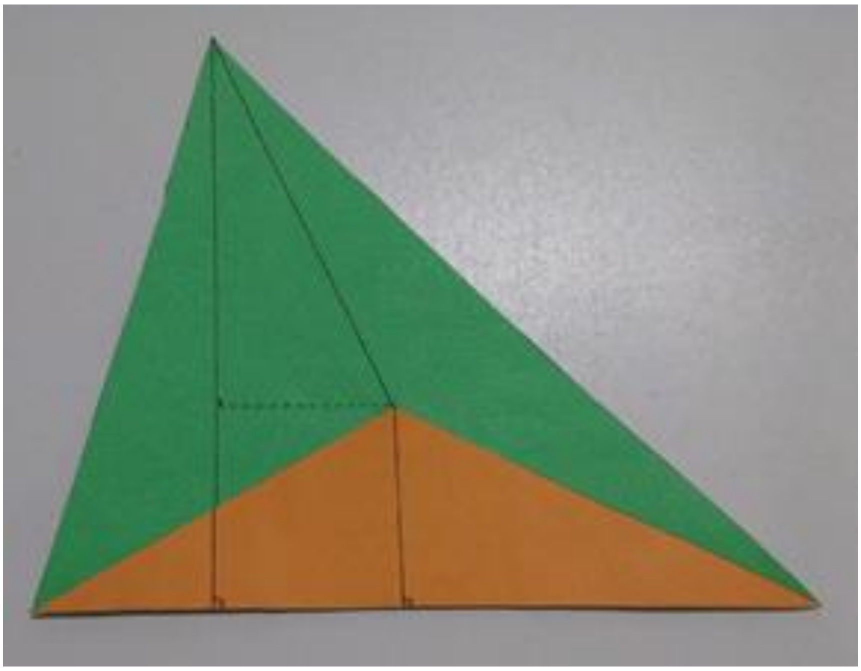
$$192{,}5 - 60{,}5 = 132$$

$$132 = 132\,.$$

4.3.1. Demonstração da desigualdade

$$Área(ABCD) < \frac{d \cdot D}{2}.$$

I. Com o primeiro envelope, construir um quadrilátero de forma que suas diagonais não sejam perpendiculares, com sobreposição.
Possível solução:



II. Observe que o lado comum aos triângulos (tomemos como base) é a diagonal maior do quadrilátero. Calcule a área do quadrilátero, lembrando que é formado pela área do triângulo maior menos a área do triângulo menor.
Possível solução:

$$Área(ABCD) = \frac{D.h}{2} - \frac{D.k}{2} = \frac{D}{2}.(h-k).$$

III. Sabemos que em qualquer triângulo retângulo o cateto é sempre menor que a hipotenusa. Considere o triângulo retângulo cuja altura é $\boldsymbol{h} - \boldsymbol{k}$, a subtração das alturas é menor que a diagonal menor. Encontre a desigualdade que represente esse fato.

Possível solução:

$$h - k < d\,.$$

IV. Comparando os valores, temos que a área do quadrilátero é menor que a metade do produto das diagonais. Encontre a expressão que represente esse fato.

Possível solução:

$$\acute{A}rea(ABCD) < \frac{D}{2}\,.(h-k)$$

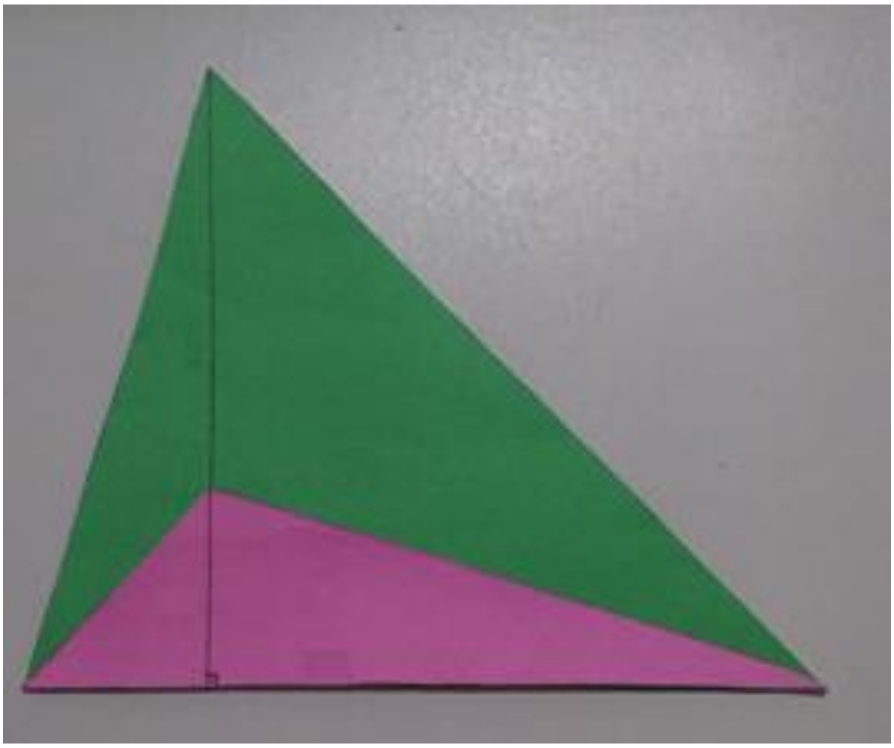
$$\acute{A}rea(ABCD) < \frac{D.d}{2}\,.$$

4.3.2. Demonstração da igualdade

$$\acute{A}rea(ABCD) = \frac{d \cdot D}{2}\,.$$

V. Com o segundo envelope, construir um quadrilátero de forma suas sejam perpendiculares, com sobreposição.

Possível solução:



VI. Observe no quadrilátero que a subtração das alturas é igual a diagonal menor, logo, a área do quadrilátero é igual à metade do produto das diagonais. Encontre a expressão que represente esse fato.

Possível solução:

$$h - k = d$$

$$Área(ABCD) = \frac{D.d}{2}.$$

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As demonstrações de relações algébricas é um dos conteúdos matemáticos que geram dificuldades no ensino fundamental, que devem ser superadas por alunos e professores, trazendo um novo significado de prova matemática. Então demonstrar geometricamente essas identidades facilita o aprendizado, tornando possível sua compreensão.

A demonstração em matemática é uma das competências indicadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino fundamental e para o ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica, mas que ainda não possui, no Brasil, um número de pesquisas suficiente para a compreensão de seus mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos. Afirma que "é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las". Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que "precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação." Com isso devemos valorizar o uso de outros métodos que enriqueçam a compreensão dos conteúdos.

Diante do que apresentamos, concluímos que as demonstrações vão além de um recurso pra eliminar dúvidas. Podemos explorar sua descoberta provocando um desafio intectual, podendo fazer verificações, mas também explicando simplesmente todo o processo de construção, tendo o professor um papel fundamental como um facilitador necessário.

Esta dissertação contribui para a aproximação da geometria com a comunidade escolar, incentivando mais pesquisas que possam aumentar o interesse de professores na realização de atividades e oficinas, bem como alunos, numa nova forma de enxergar a matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum**: BNCC.Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensino-fundamental-anos-finais-unidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades>. Acesso em: 20 de Mar. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**, Brasília: MEC/SEF, 1997.

HEFEZ, Abramo **Aritmética** (Primeira edição). Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha **Geometria** (Primeira edição). Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NELSEN, Roger B. **Proofs Without words I**: The Mathematical Association of America, ISBN, 1993.

NELSEN, Roger B. **Proofs Without words II**: The Mathematical Association of America, ISBN, 2000.

STERN, Júlio M. **Provas sem palavras - Para um matemático uma imagem vale mais que mil palavras?** – USP, Março de 2014.