



Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA
CONSTANTE FOLHEADAS POR ESFERAS**

ANDRÉ PIZZAIA BUTTA

MACIÓVAL, 2008

Foto: São Francisco

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

André Pizzaia Butta

**HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA
CONSTANTE FOLHEDAS POR ESFERAS**

Maceió – Alagoas
2008

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

André Pizzaia Butta

HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE FOLHEADAS POR ESFERAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante*

Maceió-AL
28 de abril de 2008

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

B988h Butta, André Pizzaia.
Hipersuperfícies de curvatura média constante folheadas por esferas / André
Pizzaia Butta, 2008.
2270f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2008.

Bibliografia: f. 21-22.

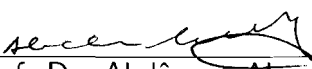
1. Geometria diferencial. 2. Hipersuperfícies. 3. Folheação (Matemática).
4. Curvatura media. I. Título.

CDU: 514.764.27

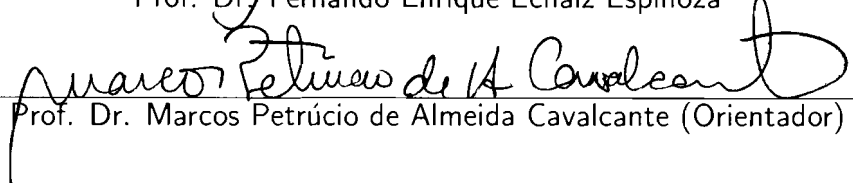
HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE FOLHEADAS POR ESFERAS

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 28 de abril de 2008 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros


Prof. Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza


Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante (Orientador)

À matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo término do trabalho; e em segundo, à minha família pela confiança e apoio. Agradeço também a todos os outros que me ajudaram, dentre os quais cito alguns: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante, meu orientador, pela paciência que teve e pela contribuição acadêmica; agradecimentos especialíssimos a Isnaldo Isaac Barbosa que me ajudou com o Latex e também com a apresentação; agradeço a Fabiano dos Santos Brião pelo auxílio com os desenhos; agradeço a José Eduardo Milton de Santana pelas revisões no texto; agradeço o apoio de Abraão Mendes do Rêgo, Alex Santana dos Santos, Arlyson Alves do Nascimento, Carlos Alberto Silva dos Santos, Clarissa Codá dos Santos Cavalcanti Marques, Daniel Nicolau Brandão, Darliton Cezário Romão, Everson Feitosa do Nascimento, Gregório Manoel da Silva Neto, José Arnaldo dos Santos, José Borges dos Santos Filho, José Fabio Bóia Porto, Julio César de Souza Almeida, Leandro Favacho da Costa, Leonardo de Oliveira Carvalho, Marcius Petrúcio de Almeida Cavalcante, Maria de Andrade Costa, Priscila Santos Ramos, Thiago Fontes Santos.

Quando alguém ataca o bem desperdiça energia para o bem.

—JOSÉ EDUARDO MILTON DE SANTANA

RESUMO

Nesta dissertação de Mestrado, exploraremos hipersuperfícies n -dimensionais (conexas) no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Consideraremos que as hipersuperfícies possuem curvatura média constante e são folheadas por $(n - 1)$ -hiperesferas. Necessitaremos de resultados clássicos como o teorema de Alexandrov e um teorema de simetria. Basicamente responderemos à seguinte pergunta: *Quando uma hipersuperfície de dimensão n com curvatura média constante e folheada por esferas em um dos espaços acima citados, é uma hipersuperfície de revolução?* Além disso, em $\mathbb{R}^{n+1}$ as esferas estarão contidas nos hiperplanos paralelos e em $\mathbb{H}^{n+1}$ nas horoesferas.

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação estudaremos alguns teoremas de classificação de hipersuperfícies de curvatura média constante folheadas por esferas conforme as definições que deixaremos precisas no texto.

O estudo da classificação de uma subvariedade $M^n \subset \overline{M}^{n+k}$ “folheada por esferas” abrange vários casos. Aqui veremos os casos em que o espaço ambiente é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$.

No espaço Euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, é conhecido que a única superfície mínima completa e de rotação é o catenóide (veja [Meusnier, 1785] e [Barbosa, Colares, 1986]). Em particular, o catenóide é folheado por círculos em planos paralelos. B. Riemann descobriu outras superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ folheadas por círculos em planos paralelos.

Em 1869 A. Enneper mostrou que todas as superfícies mínimas que são geradas por uma família a um-parâmetro de círculos são catenóides ou uma das superfícies descobertas por Riemann. Veja [Enneper, 1869].

J. Nitsche (veja [Nitsche, 1989]) encontrou todas as superfícies de curvatura média constante não-nula em $\mathbb{R}^3$ geradas por uma família a um-parâmetro de circunferências. Ele provou que a superfície deve ser uma esfera ou, no caso não-esférico, as circunferências devem pertencer a planos paralelos. Neste último caso, Nitsche provou que as superfícies têm que ser necessariamente de revolução.

Aqui recordamos que C. Delaunay, no século *XIX*, classificou as superfícies de revolução de curvatura média constante no espaço Euclidiano (cf. [Delaunay, 1841]).

Estas ficaram conhecidas na literatura especializada como *superfícies de Delaunay*.

Ao estudar hipersuperfícies mínimas folheadas por esferas em $\mathbb{R}^{n+1}$, W. Jagy (veja [Jagy, 1991]) observou uma grande diferença entre os ambientes $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Para $n \geq 4$, todas as hipersuperfícies mínimas geradas por uma família a um-parâmetro de hiperesferas em hiperplanos paralelos são de rotação, ou seja, não existem as superfícies descobertas por Riemann em dimensões mais altas.

R. López estudou as superfícies de curvatura média constante folheadas por esferas em vários ambientes, e também o caso de dimensões altas.

Nesta dissertação, nos basearemos no artigo de R. López [López, 1999] onde são estudadas as hipersuperfícies (conexas) n -dimensionais em dois ambientes diferentes: os espaços $(n + 1)$ -dimensionais Euclidiano e hiperbólico. Consideraremos que as hipersuperfícies são folheadas por $(n - 1)$ -hiperesferas em hiperplanos paralelos (ao longo desta dissertação, hiperesferas serão chamadas de esferas, por simplicidade). Mais precisamente:

1. Hipersuperfícies de dimensão n de curvatura média constante no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ folheadas por esferas em hiperplanos paralelos.
2. Hipersuperfícies de dimensão n de curvatura média constante no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ folheadas por esferas em horosferas paralelas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos de geometria Riemanniana que serão usados no decorrer desta dissertação. A referência padrão para este capítulo é o livro de do Carmo [do Carmo, 2005].

1.1 Introdução

Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional, munida de uma métrica Riemanniana que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathfrak{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Consideraremos a conexão de Levi-Civita

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, definamos a aplicação linear $T : T_p M \rightarrow T_p M$ pondo $T(Y(p)) = \nabla_Y X(p)$. Definimos a *divergência* de X como o traço da aplicação T , isto é, $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}(T).$$

Se $f \in \mathfrak{D}(M)$, definimos também o *gradiente* de f como o campo vetorial $\operatorname{grad} f$ em M definido por

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, v \in T_p M,$$

enquanto o Laplaciano de f é definido por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$

Exemplo 1.1 Consideremos que a variedade é o espaço Euclidiano, $M = \mathbb{R}^n$, com coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ e campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0) = e_i$. Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vamos denotar por $f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f$. Além disso podemos escrever qualquer campo X em $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma $X = \sum_{i=1}^n z_i e_i$. Neste caso, é bem conhecido que

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n f_i e_i,$$

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial x_i}$$

e

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

1.2 A Curvatura Média

Seja $\Phi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície orientável completa M em uma variedade Riemanniana orientável $\overline{M}$. Como usual, identificaremos M com a sua imagem por Φ , $\Phi(M)$. Com esta identificação, o espaço tangente de M em um dado ponto $p \in M$, $T_p M$, é um subespaço do espaço tangente de $\overline{M}$ em p , $T_p \overline{M}$.

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ e consideremos um campo vetorial normal unitário η em M . Chamamos de *segunda forma fundamental* de M em $p \in M$ o operador linear auto-adjunto $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ definido como

$$S_\eta(X) = -\overline{\nabla}_X \eta(p), \quad X \in T_p M.$$

Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base ortonormal de $T_p M$ tal que e_i é um autovetor de S_η associado ao autovalor $k_i \in \mathbb{R}$, isto é, $S_\eta(e_i) = k_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Cada e_i é chamado uma *direção*

principal de M em p e k_i a *curvatura principal* na direção e_i . Definimos em M a *curvatura média* H como

$$H = \frac{1}{n} \operatorname{tr} S_\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle S_\eta(e_i), e_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle k_i e_i, e_i \rangle = \frac{1}{n} (k_1 + \dots + k_n).$$

Sejam $f : \overline{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e a um valor regular de f . É bem conhecido que $M = \{p \in \overline{M}; f(p) = a\}$ é hipersuperfície de $\overline{M}$.

Proposição 1.1 *Seja $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e a um valor regular de f . Se $M = f^{-1}(a)$ é orientada pela campo vetorial normal unitário $\eta = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$, então sua curvatura média H é dada por*

$$nH = -\operatorname{div}_{\overline{M}} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right).$$

Demonstração Sendo a um valor regular de f e $M = f^{-1}(a)$ vamos escolher $e_1, \dots, e_n$, $e_{n+1} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} = \eta$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $p \in M$ em $\overline{M}$. Inicialmente verificamos que

$$0 = \eta(1) = \eta \langle \eta, \eta \rangle = 2 \langle \overline{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} nH &= \operatorname{traço} S_\eta = \sum_{i=1}^n \langle S_\eta(e_i), e_i \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \overline{\nabla}_{e_i} \eta, e_i \rangle - \langle \overline{\nabla}_\eta \eta, \eta \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} \eta, e_i \rangle = -\operatorname{div}_{\overline{M}} \eta \\ &= -\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} \right). \end{aligned}$$

■

Corolário 1.1 Para hipersuperfícies $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que são imagem inversa de um valor regular de f , orientadas pelo campo vetorial normal unitário $N = -\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$, vale a seguinte identidade:

$$nH |\text{grad } f|^3 = \Delta f |\text{grad } f|^2 - \text{Hess}_f(\text{grad } f, \text{grad } f),$$

onde grad , Δ e Hess denotam os operadores gradiente, Laplaciano e Hessiana respectivamente com a métrica Euclidiana ([Lima, 2005], págs. 139, 155 e 183).

Demonstração Ora, na métrica Euclidiana temos que

$$-\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{(-f_1, \dots, -f_{n+1})}{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{1/2}}.$$

Derivando a i -ésima coordenada de $\frac{(-f_1, \dots, -f_{n+1})}{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{1/2}}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\frac{f_i}{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{1/2}} \right] &= -\frac{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{1/2} \cdot f_{ii} - f_i \cdot \frac{2 \cdot (f_1 f_{1i} + \dots + f_{n+1} f_{(n+1)i})}{2 \cdot (f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{1/2}}}{f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2} \\ &= -\frac{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2) f_{ii} - (f_1 f_i f_{1i} + \dots + f_{n+1} f_i f_{(n+1)i})}{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{|\text{grad } f|^2 f_{ii} - \sum_{j=1}^{n+1} f_j f_i f_{ji}}{|\text{grad } f|^3} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n+1} f_j f_i f_{ji} - |\text{grad } f|^2 f_{ii}}{|\text{grad } f|^3}, \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\frac{f_i}{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{1/2}} \right] &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\sum_{j=1}^{n+1} f_j f_i f_{ji} - |\text{grad } f|^2 f_{ii}}{|\text{grad } f|^3} \\
&= \frac{\sum_{i,j=1}^{n+1} f_i f_j f_{ij} - |\text{grad } f|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} f_{ii}}{|\text{grad } f|^3} \\
&= \frac{\text{Hess}_f(\text{grad } f, \text{grad } f) - |\text{grad } f|^2 \Delta f}{|\text{grad } f|^3}.
\end{aligned}$$

Como $-\text{div} \left(-\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} \right) = -\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\frac{f_i}{(f_1^2 + \dots + f_{n+1}^2)^{1/2}} \right]$ e, pela Proposição 1.1, $nH = -\text{div} \left(-\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} \right)$, segue-se que

$$nH = \frac{|\text{grad } f|^2 \Delta f - \text{Hess}_f(\text{grad } f, \text{grad } f)}{|\text{grad } f|^3},$$

que nos leva à identidade proposta. ■

1.3 Princípio do máximo para hipersuperfícies

Aqui, enunciaremos uma generalização do princípio do máximo para funções harmônicas que englobará o caso de equações diferenciais parciais elípticas, dada por E. Hopf em 1927 (ver [Hopf, 1927]), o qual diz que, dentre as funções harmônicas, somente as constantes podem atingir máximos relativos em um conjunto aberto conexo. Para o que apresentaremos a seguir utilizamos a referência [Leão, 1983].

Uma expressão do tipo

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

onde $a_{ij}, b_i, c : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, são funções definidas em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$, será chamada um *operador diferencial de ordem dois*.

Vamos sempre supor que a matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ é simétrica e positiva definida para todo ponto $x \in U$, isto é,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j > 0,$$

para todo $x \in U$ e todo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Neste caso a expressão $Lu = 0$ é chamada uma *equação elíptica linear de segunda ordem*.

Agora, enunciaremos o princípio do máximo:

Teorema 1.1 (E. Hopf) *Seja*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

onde $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável, e $b_i, c : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções localmente limitadas com $c \leq 0$. Suponhamos ainda que para todo $p \in U$ existem uma vizinhança V de p e constantes $\delta, \epsilon > 0$ tais que

$$\delta \sum_{i=1}^2 \lambda_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq \epsilon \sum_{i=1}^2 \lambda_i^2,$$

para todo $x \in V$ e todo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $Lu \geq 0$ em U e p é um ponto de máximo local não-negativo, então u é constante em uma vizinhança de p .

Sabemos que, localmente, toda hipersuperfície pode ser vista como um gráfico (sobre o seu hiperplano tangente). Quando escrita assim, é bem conhecido que a equação $H = H_0$ constante é uma equação diferencial elíptica de segunda ordem. Nestes termos o Princípio do Máximo de E. Hopf pode ser reformulado assim:

Teorema 1.2 *Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$ com curvatura média constante H_0 , e $p \in M_1 \cap M_2$ um ponto de tangência. Se M_1 e M_2 possuem a mesma orientação em p , e M_2 está acima de M_1 em uma vizinhança conexa, V de p , então M_1 e M_2 coincidem em V .*

É importante frisar que este teorema vale em outros espaços ambientes, dentre os quais o espaço hiperbólico (veja [Levitt, Rosenberg, 1985]).

Usando esse fato Alexandrov (veja [Alexandrov, 1962]) mostrou que uma subvariedade (portanto mergulhada) M^n fechada no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e com curvatura média constante tem que ser uma esfera. Para mostrar isso Alexandrov fez reflexões da hipersuperfície ao longo de hiperplanos paralelos, encontrando, pelo teorema acima, um hiperplano de simetria para a hipersuperfície em cada direção. Essa técnica ficou conhecida como *Método da Reflexão de Alexandrov* e a utilizaremos também nesse nosso trabalho.

CAPÍTULO 2

SIMETRIA VERTICAL

Neste capítulo provaremos um teorema de simetria para hipersuperfícies com bordo não vazio do espaço Euclidiano com curvatura média constante. O resultado nos diz que uma hipersuperfície com tais características herda a simetria do bordo. O resultado que vamos apresentar aparece em [López, 1998] no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Aqui, consideraremos algumas notações. Sejam P_1 e P_2 dois hiperplanos paralelos e ortogonais ao eixo x_{n+1} , isto é, se $a = (0, \dots, 0, 1)$, então $P_i \perp a$, $i = 1, 2$. Também, assumimos que $P_1 = \{x_{n+1} = c_1\}$ e $P_2 = \{x_{n+1} = c_2\}$, com $c_1 < c_2$. Sejam Γ_1 e Γ_2 duas hipersuperfícies C^∞ conexas, orientáveis e fechadas como subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma_i \subset P_i$, $i = 1, 2$. Denotaremos por Ω_i o domínio limitado por Γ_i em P_i e $\text{ext}(\Omega_i) = P_i - \overline{\Omega_i}$ o exterior do domínio Ω_i em P_i . Além disso, seja V_i o volume de Ω_i , $i = 1, 2$. Agora,

1. Sejam $P_i^+ = \{x_{n+1} > c_i\}$ e $P_i^- = \{x_{n+1} < c_i\}$ os semi-espacos abertos superior e inferior determinados por P_i , $i = 1, 2$;
2. Seja $S = P_1^+ \cap P_2^- = \{c_1 < x_{n+1} < c_2\}$ a faixa determinada pelos planos P_1 e P_2 .

Denotamos por $\mathcal{H}$ a família das hipersuperfícies de curvatura média constante mergulhadas com fronteira $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Teorema 2.1 (*Simetria Vertical*). *Seja $\Sigma \in \mathcal{H}$ contido na faixa S . Seja Π um hiperplano ortogonal a P_i tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é invariante por reflexão através de Π . Suponhamos ainda que cada parte de Γ_i determinada por Π é um gráfico sobre Π . Então Π é um hiperplano de simetria de Σ . Além disso, a parte de Σ em qualquer um dos lados de Π é um gráfico sobre Π . Em particular, se Γ_1 e Γ_2 são duas esferas concêntricas, a hipersuperfície é de rotação.*

Demonstração Considere a hipersuperfície F fechada mergulhada da seguinte maneira:

$$F = \Sigma \cup \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Seja W o domínio interior limitado por F em $\mathbb{R}^{n+1}$ e escolhamos um campo vetorial (C^∞ por partes) unitário normal para F apontando para dentro de W . Depois de uma mudança de coordenadas se necessário, suponhamos que o hiperplano vertical Π é o hiperplano $\Pi = \{x_2 = 0\}$ gerado pelos vetores $e_1, e_3, e_4, \dots, e_n$ e $a = e_{n+1}$. Consideremos os hiperplanos verticais $\Pi(t) = \{x_2 = t\}$. Se $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, definimos $A_{t+} = A \cap \{x_2 > t\}$ e A_{t+}^* a reflexão de A_{t+} pelo hiperplano $\Pi(t)$. Se $A, B \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que $A \geq B$ se para todo $x \in A, y \in B$, tal que $x_i = y_i$ para $i = 1, 3, 4, \dots, n, n+1$, então $x_2 \geq y_2$. Da mesma maneira, definimos A_{t-} e A_{t-}^* . Tomemos um número real $t > 0$ grande o suficiente para obtermos $\Sigma \cap \Pi(t) = \emptyset$ (o que é possível porque Σ é compacto). Agora, movamos $\Pi(t)$, $t \rightarrow 0$, até que $\Pi(t)$ tangencie Σ num instante $\bar{t} > 0$. Neste ponto, podemos mover $\Pi(\bar{t})$ para a esquerda tal que para um $\delta > 0$ pequeno $\Sigma_{(\bar{t}-\delta)+}^*$ fique contido em W . Como W é limitado, seguimos refletindo Σ ao longo de hiperplanos verticais para obtermos o primeiro instante, $t_0 \geq 0$ tal que $\Sigma_{t_0+}^* \subset \overline{W}$ mas $\Sigma_{t+}^* \not\subset \overline{W}$ para $t < t_0$. Se entre $\Sigma_{t_0+}^*$ e Σ_{t_0-} existe um ponto de tangência, então pelo princípio do máximo e por analiticidade, temos $\Sigma_{t_0+}^* = \Sigma_{t_0-}$ e $\Pi(t_0)$ é um hiperplano de simetria de Σ . Portanto, $t_0 = 0$, Π é um hiperplano de simetria e Π divide Σ em dois gráficos sobre Π . Senão, o primeiro ponto de tangência é um ponto da fronteira e, já que cada parte de Γ_i determinada por Π é um gráfico, ele ocorre quando $t_0 = 0$ e $\Pi(t_0) = \Pi$. Então temos duas possibilidades:

1. O hiperplano Π é um hiperplano de simetria, ou
2. $\Sigma_{0+}^* \geq \Sigma_{0-}$. Neste caso, iniciamos com hiperplanos $\Pi(t)$ para $t < 0$ grande em módulo. Então, analogamente, refletindo Σ_{t-}^* com respeito a $\Pi(t)$ para obter o primeiro ponto de contato entre Σ_{t-}^* e Σ_{t+} , concluímos que existe um hiperplano de simetria $\Pi(t_1)$ de Σ e $t_1 < 0$; contradição com a simetria do bordo que ocorre em relação a Π .

■

CAPÍTULO 3

HIPERSUPERFÍCIES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

J. Nitsche provou que uma superfície M de curvatura média constante $H \neq 0$ e folheada por círculos em planos paralelos em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície de Delaunay. Neste capítulo apresentaremos uma generalização para o caso de hipersuperfícies no $\mathbb{R}^{n+1}$ feita por R. López em [López, 1999].

Teorema 3.1 *Seja M^n uma subvariedade n -dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante $H \neq 0$ e folheada por esferas em hiperplanos paralelos. Então M^n é uma hipersuperfície de revolução.*

Demonstração Sem perda de generalidade, assumamos que cada hiperplano da folheação é paralelo a $x_{n+1} = 0$. Seja $P_1 = \{x_{n+1} = t_1\}$ e $P_2 = \{x_{n+1} = t_2\}$ dois hiperplanos da folheação com $t_1 < t_2$. Consideremos M^* como a parte de M entre P_1 e P_2 . Usaremos o método de reflexão de Alexandrov no espaço Euclidiano, aludido no Capítulo 1. Aplicando este método com hiperplanos ortogonais à folheação mostramos, no Capítulo 2, que M^* herda as simetrias de sua fronteira $\partial M^* = (M^* \cap P_1) \cup (M^* \cap P_2)$. Logo, para cada $t_1 \leq t \leq t_2$, os centros de cada nível $M \cap \{x_{n+1} = t\}$ pertencem ao mesmo plano bidimensional. Após uma translação, se necessário, podemos escrever esse plano bidimensional como $x_2 = \dots = x_n = 0$. Como a curva dos centros das esferas pertence a esse plano, podemos parametrizá-la como $t \mapsto (c(t), 0, \dots, 0, t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Portanto, M^* é o conjunto de nível de uma função suave f dada por

$$f = (x_1 - c(t))^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2 - r(t)^2 = 0,$$

onde $r(t) > 0$ denota o raio da esfera no nível $x_{n+1} = t$. Provaremos que a curva dos

centros das esferas é uma reta ortogonal ao hiperplano x_{n+1} , isto é, c é uma função constante. Isso mostra que M^* é uma hipersuperfície de revolução.

Suponhamos, por contradição, que exista um subintervalo de $[t_1, t_2]$ onde c é não-constante, e assim, $c' \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que este intervalo é $[t_1, t_2]$. Agora, usaremos a igualdade do Corolário 1.1 da introdução:

$$\begin{aligned}
\text{grad } f &= 2(x_1 - c, x_2, \dots, x_n, -(x_1 - c)c' - rr'), \\
|\text{grad } f|^2 &= 4\{(x_1 - c)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + [(x_1 - c)c' + rr']^2\} \\
&= 4\{r^2 + [(x_1 - c)c' + rr']^2\}, \\
\Delta f &= 2[\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ parcelas}} - (x_1 - c)c'' - (-c')c' - rr'' - r'r'] \\
&= 2[n - (x_1 - c)c'' + c'^2 - rr'' - r'^2] \\
\text{Hess}_f &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{(n+1) \times (n+1)} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -c' \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c' & 0 & \dots & -(x_1 - c)c'' + c'^2 - rr'' - r'^2 \end{bmatrix} \\
\text{Hess}_f(\text{grad } f, \text{grad } f) &= \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) f_i f_j \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) f_i^2 - 4c' f_1 f_{n+1} + [c'^2 - r'^2 - rr'' - (x_1 - c)c''] f_{n+1}^2 \\
&= 8(x_1 - c)^2 + 8 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 16c'(x_1 - c)[(x_1 - c)c' + rr'] + 8[c'^2 - r'^2 - rr'' - (x_1 - c)c''][(x_1 - c)c' - rr']^2 \\
&= 8\{r^2 + 2c'(x_1 - c)[(x_1 - c)c' + rr'] + [c'^2 - r'^2 - rr'' - (x_1 - c)c''][(x_1 - c)c' - rr']^2\}.
\end{aligned}$$

Por um lado, podemos escrever o primeiro membro da igualdade do Corolário 1.1 como

$$8nH\{r^2 + [(x_1 - c)c' + rr']^2\}^{3/2}.$$

Vamos fixar uma seção t . Como x_1 é variável, introduzimos a variável λ por

$$\lambda = \frac{(x_1 - c)c' + rr'}{r}.$$

Como $c' \neq 0$ para cada esfera da folheação de M^* , λ toma valores num intervalo da reta $\mathbb{R}$. Observando que $r\lambda = (x_1 - c)c' + rr'$ e $x_1 = r(\lambda - r')/c' + c$, podemos escrever o segundo membro da igualdade do Corolário 1.1 assim:

$$\begin{aligned} & 8\{r^2 + 2c'(x_1 - c)[(x_1 - c)c' + rr'] + [c'^2 - r'^2 - rr'' - (x_1 - c)c''][(x_1 - c)c' + rr']^2\} \\ & - 8[n - (x_1 - c)c'' + c'^2 - rr'' - r'^2]\{r^2 + [(x_1 - c)c' + rr']^2\} \\ & = 8\left\{r^2 + 2c'\frac{r(\lambda - r')}{c'}[\lambda r] + \left[c'^2 - r'^2 - rr'' - \frac{r(\lambda - r')}{c'}c''\right][\lambda r]^2\right\} \\ & - 8\left[n - \frac{r(\lambda - r')}{c'}c'' + c'^2 - rr'' - r'^2\right]\{r^2 + [\lambda r]^2\} \\ & = 8\{r^2 + 2r(\lambda - r')\lambda r\} - 8n[\lambda r]^2 - 8r^2\left[n - \frac{r(\lambda - r')}{c'}c'' + c'^2 - rr'' - r'^2\right] \\ & = 8r^2 + 16r^2\lambda^2 - 16r^2r'\lambda - 8n\lambda^2r^2 - 8r^2n + \frac{8r^3c''}{c'}\lambda - \frac{8r^3r'c''}{c'} - 8r^2c'^2 + 8r^3r'' + 8r^2r'^2 \\ & = 8r^2\left(1 - n - \frac{rr'c''}{c'} - c'^2 + rr'' + r'^2\right) + 8r^2\left(-2r' + \frac{rc''}{c'}\right)\lambda + 8r^2(2 - n)\lambda^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$8r^2(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2),$$

com

$$a_0 = 1 - n - \frac{rr'c''}{c'} - c'^2 + rr'' + r'^2, \quad a_1 = -2r' + \frac{rc''}{c'}, \quad a_2 = 2 - n.$$

Reparamos que os coeficientes do polinômio em λ são funções da variável independente t .

O primeiro membro da igualdade do Corolário 1.1 da introdução pode ser escrito como $8nH\{r^2 + [(x_1 - c)c' + rr']^2\}^{3/2} = 8nH[r^2 + (r\lambda)^2]^{3/2} = 8nH\{r^2[1 + \lambda^2]\}^{3/2} = 8nHr^3(1 + \lambda^2)^{3/2}$, e assim temos $8nHr^3(1 + \lambda)^{3/2} = 8r^2(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2)$. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$8^2n^2H^2r^6(1 + \lambda^2)^3 = 8^2r^4(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2)^2$$

$$\Rightarrow n^2 H^2 r^2 (1 + 3\lambda^2 + 3\lambda^4 + \lambda^6) = a_0^2 + 2a_0 a_1 \lambda + (2a_0 a_2 + a_1^2) \lambda^2 + 2a_1 a_2 \lambda^3 + a_2^2 \lambda^4.$$

Daí temos

$$n^2 H^2 r^2 \lambda^6 = 0 \cdot \lambda^6 \Rightarrow n^2 H^2 r^2 = 0 \Rightarrow H = 0,$$

o que é uma contradição, pois supomos que H é diferente de zero. Portanto, $c'(t) = 0$. Como t é arbitrário, então c é constante e assim, M^* é uma hipersuperfície de revolução. Como M^* é uma parte arbitrária de M , então M é uma hipersuperfície de revolução. ■

CAPÍTULO 4

HIPERSUPERFÍCIES NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Vamos considerar o modelo do semi-espaço superior do espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^{n+1} := \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}; x_{n+1} > 0\}$$

munido com a métrica

$$ds^2 = \frac{(dx_1)^2 + \dots + (dx_{n+1})^2}{x_{n+1}^2}.$$

O espaço hiperbólico possui uma compactificação natural $\overline{\mathbb{H}^{n+1}} = \mathbb{H}^{n+1} \cup \partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$, onde $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$ pode ser identificado com as classes assintóticas de raios geodésicos em $\mathbb{H}^{n+1}$. No modelo do semi-espaço superior, $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1} = \{x_{n+1} = 0\} \cup \{\infty\}$ é a compactificação um-ponto do hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$.

Para enunciarmos os resultados principais desse capítulo vamos precisar apresentar algumas das hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{H}^{n+1}$. Sugerimos a referência [Freire, 2000], para maiores detalhes. As principais são as que se seguem:

1. As componentes conexas dos hiperplanos verticais de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathbb{R}_+^{n+1}$ e os hemisférios contidos em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, ortogonais a $\partial \mathbb{H}^{n+1}$. Eles são hiperplanos totalmente geodésicos de $\mathbb{H}^{n+1}$; assim eles têm curvatura média constante zero.
2. As esferas geodésicas de $\mathbb{H}^{n+1}$. Elas são as esferas Euclidianas contidas em $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Uma esfera geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}$ com raio hiperbólico ρ tem curvatura média constante $H = \coth \rho > 1$.
3. As horoesferas. Uma horoesfera é uma hipersuperfície com curvatura média constante 1 em $\mathbb{H}^{n+1}$ e pode ser descrita como uma esfera Euclidiana em $\mathbb{R}_+^{n+1}$ tangente a $\partial \mathbb{H}^{n+1}$ ou como um hiperplano Euclidiano horizontal $\{x_{n+1} = cte.\}$ em $\mathbb{H}^{n+1}$.
4. As esferas equidistantes. Elas são os conjuntos $S' = S \cap \mathbb{H}^{n+1}$, onde S é uma esfera Euclidiana em $\mathbb{R}^{n+1}$ que intercepta $\partial \mathbb{H}^{n+1}$ por um ângulo α diferente de $\pi/2$. Cada S'

é um conjunto de pontos à mesma distância de um hiperplano totalmente geodésico de $\mathbb{H}^{n+1}$ e tem curvatura média constante menor que 1.

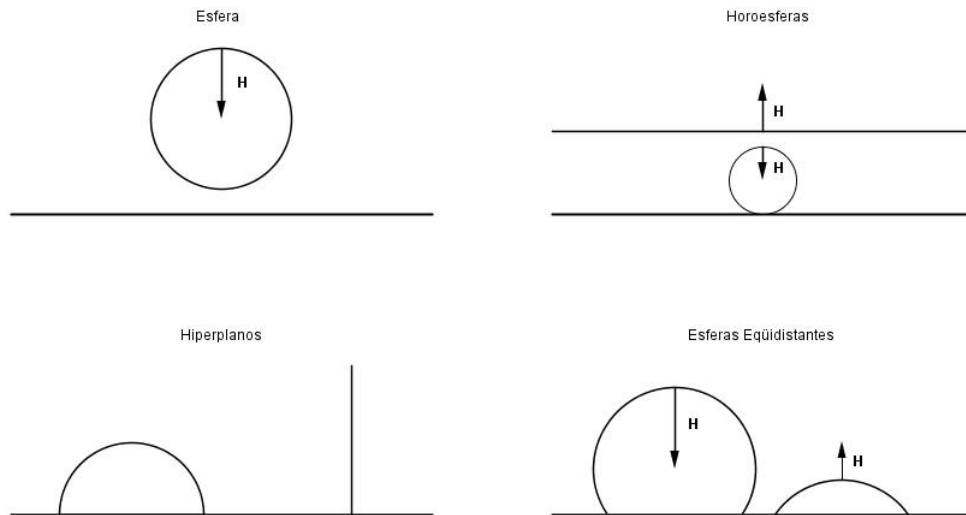


Figura 1. Algumas hipersuperfícies de curvatura média constante do espaço hiperbólico

Lidaremos com hipersuperfícies folheadas por esferas contidas em horoesferas ou hiperplanos em duas situações naturais, que serão chamadas simplesmente de *horoesferas paralelas* ou *hiperplanos paralelos*. Para nossa conveniência, daremos nossa definição.

Definição 4.1 *Uma família a um-parâmetro de horoesferas ou hiperplanos geodésicos são chamadas **paralelas** se as fronteiras assintóticas delas coincidem exatamente em um ponto.*

Como a fronteira assintótica de uma horoesfera é exatamente um ponto, ‘horo-esferas paralelas’ significa que elas têm a mesma fronteira assintótica. Por meio do uso de uma isometria de $\mathbb{H}^{n+1}$, podemos descrever uma família de horoesferas paralelas como hiperplanos Euclidianos em $\{x_{n+1} > 0\}$ paralelos ao hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$ no sentido Euclidiano. Da mesma maneira, uma família de hiperplanos geodésicos paralelos pode ser vista como hiperplanos paralelos ao hiperplano $\{x_n = 0\}$. Também, em nosso modelo para $\mathbb{H}^{n+1}$, $(n-1)$ -esferas são simplesmente $(n-1)$ -esferas Euclidianas contidas em $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Na demonstração, escreveremos uma hipersuperfície M no espaço hiperbólico localmente como o conjunto de nível de uma função suave f . Assim, necessitamos de uma igualdade análoga à igualdade do Corolário 1.1 para descrever a curvatura média H de M em termos de f . Lembramos que no nosso modelo de $\mathbb{H}^{n+1}$, a métrica hiperbólica é conforme à métrica Euclidiana em $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Proposição 4.1 *Seja M uma hipersuperfície orientada imersa em $\mathbb{R}_+^{n+1}$ e sejam ds_0^2 e ds^2 as métricas Euclidiana e hiperbólica em $\mathbb{R}_+^{n+1}$, respectivamente. Seja N uma aplicação de Gauss para a imersão $M \rightarrow (\mathbb{R}_+^{n+1}, ds_0^2)$ e considere a orientação em $M \rightarrow (\mathbb{R}_+^{n+1}, ds^2)$ dada por $\eta = x_{n+1}N$. Denotemos por h e H as curvaturas médias de M para a imersão de M em $(\mathbb{R}_+^{n+1}, ds_0^2)$ e em $(\mathbb{R}_+^{n+1}, ds^2)$, respectivamente. Então, para cada $p \in M$,*

$$H(p) = x_{n+1}(p)h(p) + N_{n+1}(p), \quad (4.1)$$

onde $N_{n+1}(p)$ denota a x_{n+1} -coordenada de $N(p)$.

Demonstração Consideremos a base ortonormal $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right\}$ para o espaço $\mathbb{R}^{n+1}$. Definindo $E_i = x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i}$ temos que $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ é uma base ortonormal para o espaço $\mathbb{H}^{n+1}$.

Escrevendo $N = \sum_{j=1}^{n+1} N_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $\eta = \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e usando o fato que $\eta = x_{n+1}N$ temos que $\eta_j = x_{n+1}N_j$, $j = 1, \dots, n+1$. Também temos que $\eta = \sum_{j=1}^{n+1} N_j E_j$.

Daí, o divergente do espaço hiperbólico é dado por

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\mathbb{H}} \eta &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \nabla_{E_i} \left(\sum_{j=1}^{n+1} N_j E_j \right), E_i \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} \langle E_i(N_j) E_j + N_j \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} \left\langle E_i(N_j) E_j + N_j \nabla_{x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i}} \left(x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), E_i \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} \langle E_i(N_j) E_j, E_i \rangle_{\mathbb{H}} + \sum_{i,j=1}^{n+1} \left\langle x_{n+1} N_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), E_i \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} E_i(N_j) \langle E_j, E_i \rangle_{\mathbb{H}} + \sum_{i,j=1}^{n+1} \left\langle x_{n+1} N_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (x_{n+1}) \frac{\partial}{\partial x_j} + x_{n+1} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right), E_i \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} E_i(N_j) \delta_{ji} + \sum_{i,j=1}^{n+1} \left\langle N_j \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (x_{n+1}) E_j + x_{n+1}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right), E_i \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} E_i(N_i) + \sum_{i,j=1}^{n+1} \left\langle N_j \frac{\partial}{\partial x_i} (x_{n+1}) E_j + x_{n+1} N_j \sum_{k=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k E_k, E_i \right\rangle_{\mathbb{H}} \\
&= x_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} (N_i) + \sum_{i,j=1}^{n+1} N_j \frac{\partial}{\partial x_i} (x_{n+1}) \langle E_j, E_i \rangle_{\mathbb{H}} + x_{n+1} \sum_{i,j,k=1}^{n+1} N_j \Gamma_{ij}^k \langle E_k, E_i \rangle_{\mathbb{H}} \\
&= x_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial N_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n+1} N_j \frac{\partial}{\partial x_i} (x_{n+1}) \delta_{ji} + x_{n+1} \sum_{i,j,k=1}^{n+1} N_j \Gamma_{ij}^k \delta_{ki} \\
&= x_{n+1} \operatorname{div}_{\mathbb{R}} N + \sum_{i=1}^{n+1} N_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_{n+1}) + x_{n+1} \sum_{i,j=1}^{n+1} N_j \Gamma_{ij}^i \\
&= x_{n+1} \operatorname{div}_{\mathbb{R}} N + N_{n+1} + x_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left[N_{n+1} \cdot \left(\frac{-1}{x_{n+1}} \right) \right] \\
&= x_{n+1} \operatorname{div}_{\mathbb{R}} N - n N_{n+1}
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\Gamma_{ij}^i = -\frac{1}{x_{n+1}}$ quando $j = n+1$, e é igual a zero caso contrário.

Usando essa igualdade temos que

$$nH = -\operatorname{div}_{\mathbb{H}} \eta = -x_{n+1} \operatorname{div}_{\mathbb{R}} N + nN_{n+1} = x_{n+1}nh + nN_{n+1},$$

ou seja,

$$H = x_{n+1}h + N_{n+1}.$$

■

A igualdade do Corolário 1.1 e a relação (4.1) da Proposição acima dizem que se M é uma hipersuperfície em $\mathbb{H}^{n+1}$ de curvatura média constante H dada pelo conjunto de nível de $f = 0$, então, já que $h = \frac{H - N_{n+1}}{x_{n+1}}$ temos

$$n \left[\frac{H - N_{n+1}}{x_{n+1}} \right] |\operatorname{grad} f|^3 = \Delta f |\operatorname{grad} f|^2 - \operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f).$$

Daí,

$$n[H - N_{n+1}] |\operatorname{grad} f|^3 = x_{n+1}[\Delta f |\operatorname{grad} f|^2 - \operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)],$$

donde obtemos,

$$nH |\operatorname{grad} f|^3 = nN_{n+1} |\operatorname{grad} f|^3 + x_{n+1}[\Delta f |\operatorname{grad} f|^2 - \operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)], \quad (4.2)$$

onde grad , Δ e Hess são as mesmas notações usadas no Corolário 1.1.

Estamos em condições de estudar subvariedades de curvatura média constante em $\mathbb{H}^{n+1}$ folheadas por esferas em horoesferas paralelas. Em contraste com o caso Euclidiano (quando $H = 0$), a única possibilidade será que a hipersuperfície é uma hipersuperfície rotacional com uma geodésica como eixo de revolução.

Teorema 4.1 *Seja M^n uma subvariedade de dimensão n em $\mathbb{H}^{n+1}$ de curvatura média constante e folheada por esferas em horoesferas paralelas. Então M é uma hipersuperfície de revolução, isto é, existe uma geodésica γ tal que M é invariante pelo grupo de isometrias que deixa γ fixa pontualmente.*

Demonstração Podemos assumir que as horoesferas são hiperplanos Euclidianos de $\mathbb{R}_+^{n+1}$ paralelos ao hiperplano $x_{n+1} = 0$. Considere M^* como uma parte de M entre dois níveis $P_1 = \{x_{n+1} = t_1\}$ e $P_2 = \{x_{n+1} = t_2\}$, $t_1 < t_2$. A reflexão de Alexandrov pode ser aplicada neste caso como no Teorema 3.1, onde por reflexões queremos dizer *reflexões hiperbólicas* através de hiperplanos totalmente geodésicos. Em nosso modelo para $\mathbb{H}^{n+1}$, essas reflexões são consideradas como reflexões Euclidianas através de hiperplanos verticais e inversões Euclidianas com respeito a esferas que se encontram ortogonalmente em $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$. Portanto podemos parametrizar os centros Euclidianos das esferas $M^* \cap \{x_{n+1} = t\}$ por $t \rightarrow (c(t), 0, \dots, 0, t)$, onde $r(t) > 0$ denota o raio Euclidiano para cada t . Então a superfície M^* é o conjunto de nível para a mesma função f definida no Teorema 3.1.

Procederemos por contradição. Assim, suponhamos que $c' \neq 0$ no intervalo $[t_1, t_2]$. A $(n+1)$ -ésima coordenada da aplicação de Gauss N de $M^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$N_{n+1} = \frac{(x_1 - c)c' + rr'}{(r^2 + [(x_1 - c)c' + rr']^2)^{1/2}},$$

já que $N = -\frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$.

Vamos fixar o nível $x_{n+1} = t$. Usando $\lambda = \frac{(x_1 - c)c' + rr'}{r}$ a equação (4.2) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$8nHr^3(1 + \lambda^2)^{3/2} = \frac{8nr\lambda}{[r^2(1 + \lambda^2)]^{1/2}} \cdot r^3(1 + \lambda^2)^{3/2} + 8r^2x_{n+1}(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2)$$

$$\Rightarrow nrH(1 + \lambda^2)^{3/2} = nr\lambda(1 + \lambda^2) + x_{n+1}(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2),$$

onde a_0 , a_1 e a_2 são coeficientes que não dependem de λ . O lado direito na equação acima é um polinômio de grau 3: $b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3$. Elevando ambos os membros dessa equação ao quadrado temos

$$n^2r^2H^2(1 + \lambda^2)^3 = (b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3)^2.$$

Comparando os coeficientes líderes dos polinômios dessa última igualdade segue-se que $n^2r^2H^2 = n^2r^2$. Portanto $H^2 = 1$. Como o membro esquerdo da igualdade acima é um

polinômio sem termos λ elevados a potências ímpares, os coeficientes de λ^5 e λ^3 são 0 no membro direito. O coeficiente do termo do quinto grau nos dá $2b_2b_3 = 0$. Como $b_3 = nr \neq 0$, então, $b_2 = 0$. Assim, o coeficiente de λ^3 é $2b_0b_3 = 0$ e então, $b_0 = 0$. Contudo, o termo independente de λ no membro esquerdo é $n^2r^2H^2 = n^2r^2 \neq 0$ e não $b_0 = 0$. Esta contradição nos dá $c' = 0$ em $[t_1, t_2]$, isto é, c é constante. Portanto M é uma hipersuperfície de revolução com a geodésica $\gamma(t) = (c, 0, \dots, 0, t)$ sendo o eixo de rotação. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Alexandrov, 1962] UNIQUENESS THEOREM FOR SURFACES IN THE LARGE. I, II, III, IV, V, 1956-1958, AMS Translations, Series 2, vol 21, (1962), 341-412.
- [Barbosa, Colares, 1986] MINIMAL SURFACES IN $\mathbb{R}^3$. Springer Lecture Notes in Math. N. 1195 (1986).
- [Delaunay, 1841] DELAUNAY, C., *Sur la Surface de Révolution Dont la Courbure Moyenne est Constant*, J. Math. Pure Appl. **6** (1841) p. 309-320.
- [do Carmo, 2005] DO CARMO, M., *Geometria Riemanniana*, 3^a Edição. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2005), 332p.
- [Enneper, 1869] ENNEPER, A., *Die Cyklischen Flächen*, Z. Math. u. Phys. 14, (1869), 392-421.
- [Freire, 2000] FREIRE, R., *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature and Bounded Scalar Curvature in Euclidean and Hyperbolic Space*, Tese de doutorado, IMPA (2000), 83p.
- [Hopf, 1927] HOPF, E., *Elementare Bemerkungen Über Die Lösungen Partieller Differential Gleichungen*, S. B. Preuss. Akad. Phys. Math. Kl. (1927), 147-152.
- [Jagy, 1991] JAGY, W., *Minimal hypersurfaces foliated by spheres*, Michigan Math. J. 38, (1991), 255-270.
- [Leão, 1983] LEÃO, K. F., *O Princípio da Tangência e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, IMPA, (1983) 53p.
- [Lima, 2005] LIMA, E., *Curso de Análise Vol. 2*, 8^a Edição. Projeto Euclides, IMPA, (2005) 546p.

- [Levitt, Rosenberg, 1985] LEVITT, G., ROSENBERG, H., *Symmetry of constant mean curvature hypersurfaces in hyperbolic space*, Duke Math. J. 52, N.1, (1985), 53-59.
- [López, 1998] LÓPEZ, R., *Surfaces of Constant Mean Curvature Bounded by Two Planar Curves*, Ann. Glob. Anal. Geom. 15, (1997) 201-210.
- [López, 1999] LÓPEZ, R., *Constant mean curvature hypersurfaces foliated by spheres*, Differential. Geom. Appl. 11, (1999), 245-256.
- [Meusnier, 1785] MÉMOIRE SUR LA COURBURE DES SURFACES. Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris, Prés. Par Div. Savans 10 (1785), 477-510.
- [Nitsche, 1989] NITSCHKE, J. C. C., *Cyclic surfaces of constant mean curvature*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. II 1, (1989), 1-5.