UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANA PAULA FERREIRA DAS NEVES

APLICANDO A TEORIA VAN HIELE NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA COM MATERIAIS MANIPULATIVOS

MACEIÓ/AL
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANA PAULA FERREIRA DAS NEVES

APLICANDO A TEORIA VAN HIELE NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA COM MATERIAIS MANIPULATIVOS

Texto apresentado à banca examinadora para fins de qualificação como etapa parcial necessária à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

MACEIÓ/AL
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

N511a Neves, Ana Paula Ferreira das.
Aplicando a teoría Van Hiele no ensino fundamental: uma experiencia com materiais manipulativos / Ana Paula Ferreira das Neves. – 2016.
100 f. il.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 85-87.
Anexos: f. 88-100.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Ensino fundamental. 3. Teoria Van Hiele. I. Título.

CDU: 514.12

ANA PAULA FERREIRA DAS NEVES

APLICANDO A TEORIA *VAN HIELE* NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA COM MATERIAIS MANIPULATIVOS

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Educação da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 31 de maio de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
Orientador e presidente
(IM/UFAL)

Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo
(IM/UFAL)

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros
(IM/UFAL)

Dedico este trabalho ao meu Deus, que sempre esteve comigo nos momentos felizes e nos momentos de nervosismo; aos meus pais que me educaram; ao meu esposo Neemias pela paciência e amor; e a minha filha Anne Letícia que veio ao mundo no momento exato para me alegrar e motivar.

AGRADECIMENTOS

Um agradecimento muito especial a Deus e a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho. De modo muito especial agradeço:

Ao professor Dr. Ediel Azevedo Guerra pela orientação, pelas incansáveis leituras e correções, pela compreensão e paciência dedicada, pelo incentivo dado e pelos exemplos de competência e profissionalismo demostrado em todos os momentos.

Ao professor Dr. Amauri da Silva Barros agradeço imensamente pelo incentivo e por todos os seus ensinamentos desde a graduação.

Ao professor Dr. Vânio Fragoso de Melo por ter aceitado participar da banca examinadora desde a qualificação e por suas ricas contribuições.

Aos professores doutores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática – PPGECIM por suas discussões teóricas, pelo compromisso e dedicação.

Ao futuro professor Willian Pereira dos Santos (estagiário) que esteve presente em todos os encontros, agradeço imensamente pelo suporte e por suas ricas contribuições.

Às minhas amigas Maria Dayane, Maria Patrícia Felix e Vanessa Alves pelos incentivos, a dedicação e as horas gastas para revisar e corrigir meu trabalho.

A amiga Lidiane, pois no momento que estava nervosa achando que não iria conseguir terminar o trabalho ela apareceu oferecendo ajuda para cuidar da minha bebê.

Aos amigos e colegas do mestrado, por compartilharem suas experiências e pelo carinho em especial ao amigo Edcarlos Pereira, pelas caronas, amizade e por compartilhar da mesma fé.

Aos meus pais (Aelson Inácio das Neves e Vicentina Ferreira das Neves) que me ensinaram, educaram e que me deram muito amor.

Ao meu esposo Neemias Silva do Nascimento, pela paciência, amor, cuidado, pela ajuda e dedicação em fazer comigo os geoplanos.

A minha filha Anne Letícia, com seu sorriso e carinho ter mostrado como é bom ser mãe.

Todo amanhã se cria num ontem, através de um hoje.

De modo que o nosso futuro baseia-se no passado e corporifica no presente. Temos que saber o que fomos e o que somos para saber o que seremos. Freire (1994)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal a criação, a execução e a avaliação de uma sequência didática de caráter interativo e dinâmico que propicie a aprendizagem de conceitos fundamentais da geometria euclidiana vista no ensino fundamental. As atividades da sequência criada incluem trabalhos com materiais manipulativos e fundamentam-se na Teoria Van Hiele de ensino da geometria. Trata-se de um trabalho de natureza quanti-qualitativa com procedimentos metodológicos inspirados na metodologia da pesquisa-ação. A experiência foi realizada com alunos do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Rio Largo/AL.

Palavras-chave: Geometria. Ensino Fundamental. Materiais concretos ou manipulativos. Teoria Van Hiele.

ABSTRACT

This work has as main objective the creation, implementation and evaluation of a didactic sequence of interactive and dynamic character that is conducive to learning fundamental concepts of Euclidian geometry view in elementary school. The activities of the established sequence include work with manipulatives and materials are based on the geometry of teaching Theory Van Hiele. This is a quantitative and qualitative work with methodological procedures based on the action research methodology. The experiment was conducted with students from the ninth grade of elementary school in a public school in the city of Rio Largo / AL.

Word-Key: Geometry. Elementary School. Concrete or manipulative materials. Van Hiele theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os conhecimentos geométricos são de grande utilidade tanto em situações cotidianas quanto no exercício de várias profissões. Essa relevância social da geometria se encontra reconhecida nos currículos oficiais das instituições de ensino responsáveis pela renovação dos quadros de profissionais que atuarão em diversos campos profissionais.

Ao lado do reconhecimento social do saber geométrico, encontram-se também as dificuldades de aprendizagem da disciplina de geometria nas escolas de educação básica. Essa constatação estabelece um grande desafio aos professores que atuam nesse nível de ensino: como tornar a geometria mais atrativa e mais assimilável pelos estudantes dos ensinos fundamental e médio?

Foi motivado por esse desafio que estabelecemos para o presente trabalho o seguinte objetivo geral: a criação, a execução e a avaliação de uma sequência didática de caráter interativo e dinâmico que propicie a aprendizagem de conceitos fundamentais da geometria euclidiana abordados nos anos finais do ensino fundamental.

Para atingir esse objetivo geral, optamos em construir uma sequência didática para o ensino de conceitos elementares da geometria euclidiana nos anos finais do ensino fundamental. Ao aplicarmos os testes Van Hiele de avaliação do nível de pensamento geométrico, constatamos que a grande maioria dos estudantes do 9º ano do colégio escolhido não se encontrava nem no nível zero. Resolvemos então elaborar atividades para a sequência didática com materiais manipulativos, fundamentadas na Teoria Van Hiele de ensino da geometria. Optamos também pela produção de um trabalho de natureza quanti-qualitativa com procedimentos metodológicos inspirados na metodologia da pesquisa-ação.

A intervenção didática foi desenvolvida com alunos do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Rio Largo/AL e contou com a participação de 41 estudantes. Essa intervenção foi norteada pelas seguintes questões investigativas: qual o efeito de aprendizagem decorrente da aplicação da sequência produzida? Os estudantes progredirão de nível de pensamento geométrico? O relato da experiência e os resultados obtidos podem ser encontrados no corpo deste trabalho.

Esta dissertação encontra-se estruturada em cinco seções. Na seção 2, intitulado *O ensino da geometria na Educação Básica*, apresentamos aspectos característicos relativos ao ensino de conteúdos da disciplina de Geometria nos níveis fundamental e médio e, ademais, elementos da Teoria Van Hiele de ensino da Geometria. Em seguida, na seção 3, intitulado *O uso de materiais concretos ou manipulativos no ensino da matemática*, abordamos algumas recomendações e alguns cuidados necessários ao trabalho com esse tipo específico de recurso didático e discorremos acerca do geoplano e do Tangram. Já na seção 4, intitulado *O experimento*, apresentamos a sequência didática, descrevemos sua aplicação e avaliamos os desdobramentos e os efeitos produzidos na aprendizagem pelos sujeitos participantes dos conceitos geométricos abordados. Finalizamos tecendo algumas considerações finais.

2 A GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Este capítulo se encontra estruturado em duas seções. Na seção 1.1, apresentamos aspectos característicos relativos ao ensino de conteúdos da disciplina de Geometria nos níveis fundamental e médio. Na seção 1.2, apresentamos elementos da Teoria Van Hiele de ensino da Geometria.

2.1 Compassos e descompassos da geometria na educação básica

A Geometria está presente em diversas situações do cotidiano: nas construções, em brinquedos e brincadeiras infantis, em diversos objetos, na natureza e nas obras de artes. Por meio de uma simples observação do ambiente, podem ser notadas várias formas distintas.

Etimologicamente, o termo “geometria” significa “medida da terra”. Segundo Pavanello (1989),

> É difícil precisar quando o homem começou a desenvolver conceitos de natureza geométrica. O que parece mais provável é que tais conhecimentos foram sendo construídos empiricamente, como resposta a necessidades de ordem prática das comunidades que, no Neolítico – ou Idade da Pedra – deixaram sua vida nômade, passando a se fixar à terra e a cultivá-la (PAVANELLO, 1989, p.21).

Não é possível saber com exatidão quando a geometria surgiu, mas tem-se, através dos tempos, os registros presentes nos legados das civilizações (babilônios, egípcios, gregos, romanos, hindus, árabes, chineses) que utilizaram as formas geométricas no seu cotidiano, como por exemplo, na agricultura com as práticas das irrigações naturais fornecidas pelos rios, depois ampliando a área de plantio pela construção de canais de irrigação. Dessa forma, a agricultura contribuiu de muitas maneiras para que o crescimento geométrico se desenvolvesse empiricamente, geração após geração entre os povos das civilizações antigas.

A tecelagem é outro trabalho praticado pelas civilizações antigas que pode ser citado e associado ao desenvolvimento da geometria, pois, conforme apontado por Pavanello (1989):

> A análise da arte de tecer vai proporcionar uma maior compreensão das relações entre forma e número, deixando assim patente uma ligação entre geometria e aritmética [...]. Por outro lado, os ornamentos usados na tecelagem vão desenvolver as noções de simetria. (Ibid., p.22).

A Geometria também foi empregada pelos povos considerados primitivos na pintura corporal, na construção de objetos de decoração, de utensílios domésticos, de enfeites e na criação de desenhos variados. Nas cerâmicas, cestarias e pinturas de diversas culturas, onde podem ser notadas formas geométricas como triângulos, quadrados e círculos.

A geometria é um conteúdo de suma importância, porém, apesar disso, ficou durante muito tempo, relegada a um segundo plano. Como afirma Viana (2000 *apud* VIEIRA, 2010, p.23)

> Sabemos que uma das consequências do movimento de matemática moderna no Brasil foi a introdução e destaque para o ensino de conjuntos e funções, isto é, conteúdo mais relacionados à álgebra, reservando o ensino de geometria a um plano inferior e até deixando de ensiná-la.

Segundo Pirola (2000), quando o assunto de geometria era ensinado, a ênfase estava mais concentrada nos aspectos algébricos e aritméticos sendo que os conceitos geométricos ficavam a mercê de sobras de tempo, ou seja, se houvesse tempo poderiam ser ensinados.

> Esse costume de programar a geometria para o final do ano letivo é, de certo modo, reforçado pelos livros didáticos que, pelo que pude observar, abordam esse tema quase sempre por último, dando a impressão de que esta é a programação mais conveniente. (PAVANELLO, 1989, p.6).

De acordo com Vieira (2010, p.23), a Educação Matemática trouxe, a partir da década de 1980, uma forte crítica à ausência de geometria nas aulas de matemática em todos os níveis. Formou-se um círculo vicioso, no qual os estudantes não estudam geometria no ensino básico, depois não veem o suficiente nos cursos que formam professores de matemática e, portanto, não ensinam geometria devido à defasagem de conhecimentos e falta de interesse em obtê-los.

O ensino de Geometria passou por períodos que se alternavam entre a extrema valorização, impulsionados por razões de ordem econômica, social e política, sobretudo a partir do desenvolvimento industrial que exigia mão de obra qualificada para a produção de novas máquinas; e outros marcados pelo seu desprestígio e consequente abandono, acarretando, inclusive, diferenciações na estruturação curricular entre as escolas da rede pública e privada.

Pavanello (1989) relata que:

> Nas escolas para a elite, busca-se o desenvolvimento das capacidades intelectuais, o que leva, na Geometria, à enfatização dos processos dedutivos, através dos quais se pretende conseguir o desenvolvimento do raciocínio lógico. As escolas para as camadas inferiores são orientadas a prepararem os estudantes para o trabalho, por isso a ênfase nas aplicações práticas dos princípios das ciências e, o que interessa a este trabalho, particularmente nos princípios da Geometria. (Ibid, p.87)

Segundo Stanich (2013, p.44-45), o Desenho Geométrico se constituiu como ciência e parte obrigatória da estruturação curricular, desencadeando a publicação e a circulação de um grande número de manuais, cujo objetivo era auxiliar o seu ensino apoiado nas teorias da

Geometria às classes trabalhadoras com a intenção explícita de melhorar e fomentar o desenvolvimento industrial.

No Brasil, segundo Zuin (2001, p.58), vivemos mudanças de programas, elaboração de novas propostas de ensino, sobretudo fazendo-se abandonar o Desenho Geométrico e relegar para um segundo plano o estudo da Geometria. A Geometria Plana e Espacial foi, ao longo das décadas, sofrendo cortes de vários tópicos no ensino fundamental e médio. O Desenho Geométrico foi sendo abolido das matrizes curriculares da grande maioria das escolas, principalmente nas escolas públicas.

Quando Emílio Garrastazu Médici foi presidente do Brasil, entre 1969 e 1974, o Desenho Geométrico passou a não ser mais exigido nos exames vestibulares dos cursos de Arquitetura e Engenharia, passando a figurar como uma disciplina optativa da parte diversificada do antigo segundo grau. Com isso, as escolas se viram desobrigadas de ensinar essa disciplina (Zuin 2001).

A partir da década de 90, com o fracasso do movimento da Matemática Moderna, as construções Geométricas foram novamente valorizadas e novas propostas curriculares foram elaboradas a fim de atender aos anseios sociais pela construção de uma escola inspirada nos ideais democráticos (Stanich 2013). Em 1996, é promulgada a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN 9394/96) e logo após, em 1997, houve a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Neles observa-se uma grande preocupação do Ministério da Educação e do Desporto em relação ao ensino de Geometria. Podemos observar em diversos trechos dos PCNs de Matemática a importância da construção do conhecimento Geométrico, em um desses destaca-se que:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive.
>
> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problemas e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.
>
> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação das propriedades das figuras, além da construção de outras relações.
>
> (...)
>
> Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1997, p. 51).

Ao longo do tempo, a geometria vem se firmando cada vez mais através de suas utilizações na astronomia, arquitetura, construção civil e hoje mais do que nunca através da computação gráfica e de desenvolvimento de softwares. Porém, nem sempre isso aconteceu, pois a geometria não vinha sendo ensinada na maior parte das escolas por vários motivos, dentre eles a falta de preparação dos professores, que muitas vezes não conseguem solucionar problemas simples de geometria. Pirola (2000), trabalhando com professores e alunos em sua tese de doutorado, evidenciou uma questão: os problemas, principalmente aqueles que envolviam os conceitos geométricos, pareciam não ser bem entendidos nem pelos professores e nem pelos alunos. Uma grande parte dos professores alegava que não podia ensinar os conceitos geométricos porque não os havia aprendido no curso de magistério e/ou licenciatura. Assim, a ênfase do ensino de matemática era mais concentrada na aritmética e na álgebra.

O Professor do ensino superior, quando ensina geometria, muitas vezes toma como pressuposto básico que seus alunos já conhecem os conceitos elementares da geometria do ensino fundamental e médio. Isso na verdade nem sempre ocorre. Esses alunos entram em contato com a geometria superior – como é o caso da geometria não-euclidiana – sem conhecer os conceitos básicos que irão ensinar nas escolas, acarretando assim prejuízos em sua formação, o que se reflete em sua prática em sala de aula, onde muitas vezes deixa-se para abordar os conteúdos de geometria no final do ano letivo.

Pirola (2000) salienta que a geometria não deve ser tratada apenas como mais um capítulo do livro didático que se esgota em si mesmo ou que se apresenta como um tema facultativo, mas deve ser considerada como um elemento fundamental ao desenvolvimento do raciocínio, da criatividade, da abstração, bem como da aprendizagem da lógica e da organização do conhecimento.

Ao se trabalhar com alunos de ensino médio e/ou do fundamental II, observa-se que grande parte deles apresenta dificuldades em aprender geometria, principalmente no processo dedutivo e em fazer demonstrações.

Um aspecto que pode estar contribuindo para essas dificuldades refere-se à ausência de trabalhos realizados com materiais concretos e com desenhos geométricos. As construções geométricas com auxílio de régua e de compasso, de softwares geométricos, do geoplano e de jogos computacionais são de fundamental importância à compreensão dos conceitos geométricos, bem como à organização dos conhecimentos relevantes às demonstrações geométricas.

Lorenzato (1995) sugere que a geometria no Ensino Fundamental seja apresentada para descrever o mundo físico; para exploração das formas geométricas por meio da rotação, entre outros; para estabelecer relação entre a geometria, a álgebra e a aritmética, entre outros aspectos.

Dentre os objetivos do ensino de matemática específicos para as séries finais do ensino fundamental II é importante, para este estudo, destacar que se considera o desenvolvimento

> Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> * interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
> * produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
> * ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularíssimo e ângulo para estabelecer relações, inclusive, as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. (BRASIL, p. 81-82)

As orientações curriculares para o Ensino médio (2006, p.75) enfatizam que:

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2006, p.75)

Lorenzato (1995) afirma que a geometria pode esclarecer situações abstratas, facilitando a comunicação da ideia matemática. Com isso, temos que utilizar a Geometria para auxiliar na resolução de problemas, aplicar propriedades geométricas, favorecer a emissão e a verificação de hipóteses e integrar a Geometria com a Aritmética e Álgebra. "Quem pretende ensinar Geometria ou pesquisar sobre o ensino da Geometria não pode deixar de conhecer o modelo de Van Hiele", modelo esse que concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (LORENZATO, 1995).

2.2 A Teoria de Van Hiele, desenvolvimento do pensamento geométrico

Problemas referentes ao ensino e à aprendizagem da geometria têm sido pesquisados e abordados por vários educadores, entre eles podemos citar o casal holandês Van Hiele.

Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof trabalhavam como professores de geometria do curso secundário, na Holanda, em meados dos anos 50. Eles desenvolveram uma teoria acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico (VAN HIELE,1986). Através da observação durante suas práticas na sala de aula, eles identificaram que seus alunos tinham grandes dificuldades de aprendizagem, pois na época, o ensino de geometria era basicamente formado pelos axiomas e demonstrações de teoremas que, não sendo entendidos muitas das vezes pela maioria dos estudantes, acabavam sendo simplesmente decorados, ocorrendo assim uma barreira no aprendizado.

Baseado nesse fato, Viana (2000) relata que o casal procurou entender por que isso ocorria. Foi então que em 1951, como professor na escola Montessori, Van Hiele (1986) não se conformando com a ideia de que a aprendizagem de fatos e métodos pudesse ser o objetivo do ensino da Matemática, passou a ter mais contato com as crianças e através de seus depoimentos veio a identificar as formas de pensamento delas. Nessa época, Van Hiele entrou em contato com os psicólogos da Gestalt e iniciou seu trabalho sobre *insight* e estruturas. Após muitas pesquisas, elaboraram um modelo que consiste em um esquema de compreensão do aluno através de níveis de raciocínio hierárquicos e sequenciais.

Segundo Vieira (2010), essas pesquisas mais tarde se transformaram nas teses de doutoramento do casal, concluídas simultaneamente na Universidade de Utrecht, em 1957, sob a orientação de Vans Freudenthal. Nasser, citado por Vieira (2010, p.25), diz que esses trabalhos demoraram a ganhar atenção internacional. Só foi na década de 1970 que o modelo começou a ser visto e usado por muitos professores e pesquisadores. Izaak Wirszup iniciou a divulgação do trabalho e, na mesma época, Hans Freudenthal escreveu sobre os trabalhos do casal Van Hiele no seu livro Mathematics and Education Task (1973), desde então

> A teoria de Van Hiele tem sido a base de diversos projetos de pesquisas, teses de mestrado e doutorado e artigos apresentados em congressos ou publicados em periódicos de Educação matemática em todo mundo. (NASSER, *apud* VIEIRA,1995, p.25).

Os trabalhos de Van Hiele tinham três grandes características: uma forte base estruturalista (as estruturas estavam presentes na sua visão de mundo e de organização), uma influência da psicologia da Gestalt (base para análise da percepção e interpretação cognitiva dessas estruturas) e uma preocupação com a didática da matemática, presente principalmente nas atividades propostas por sua esposa Dina (VIANA, 2000, p.37).

A teoria dos Van Hiele introduz uma nova interpretação da aprendizagem da geometria. Segundo essa teoria,

> A aprendizagem de conceitos geométricos ocorre por níveis de compreensão. Os alunos atribuem significado a um conceito básico de forma gradual, observando regularidades e produzindo generalizações (NASSER, TINOCO 2004, p. 70).

Sendo assim, o aluno se moveria sequencialmente de um nível para outro, começando do nível 0 e podendo chegar até o nível 4, passando de um nível inicial para um mais elevado. Esses níveis são classificados em: visualização (ou reconhecimento), análise, dedução informal (ou ordenação), dedução formal e rigor, que podem ser identificados mediante a aplicação do teste dos níveis de Van Hiele (ANEXO 1). Esse teste é composto por 15 questões que englobam conhecimentos gerais em geometria, e permite definir o nível de pensamento geométrico no qual o aluno se encontra.

Vejamos as classificações, características e exemplos de cada nível de acordo com Nasser (1997, p.5), começando pelo nível básico (NASSER, *apud* VIEIRA, p.25-26)

Nível 0: Visualização ou Reconhecimento. Nesse nível o aluno visualiza objetos que estão a sua volta, introduzindo assim noções de conceitos geométricos. Através desta visualização, o aluno nota as formas geométricas como um todo, ou seja, aparência física, mas não pelas suas propriedades ou partes. O aluno ainda não é capaz de tamanha percepção, pois seu vocabulário geométrico está pouco desenvolvido, isso quer dizer que eles seriam incapazes de perceber nas figuras geométricas características como ângulos ou dizer que os lados opostos são paralelos. Os alunos nessa fase classificam os quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios somente pelo aspecto visual.

Nível 1: Análise. Os alunos nesse nível ainda não são capazes de distinguir relações entre as figuras e nem de definir conceitos. Mas este nível é marcado pelo início de uma análise de conceitos e características das figuras geométricas. A partir disso, o aluno reconhece que as figuras são divididas em partes. Podemos citar que nessa fase os alunos dão a descrição de um quadrado através de suas propriedades, por exemplo, que um quadrado tem quatro lados e eles são iguais, que tem quatro ângulos retos e que os lados opostos são paralelos.

Nível 2: Ordenação ou Dedução Informal. Alunos deste nível conseguem produzir relações entre as propriedades das figuras, surgindo assim deduções simples. Há a capacitação de decisões das propriedades e conhecimento das classes das figuras. Nesse nível, porém, os significados das deduções não são compreendidos como um todo. São capacitados para acompanhar as demonstrações formais, mas não conseguem alterar a ordem lógica e nem provas das deduções com novas formas. O aluno neste nível é capaz de dizer que o retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.

Nível 3: Dedução Formal. Neste nível o aluno entende o significado da dedução das teorias geométricas de uma forma mais complexa. É a partir daqui que é empregado o sistema axiomático, e o aluno sente-se capaz em construir demonstrações e novas formas de desenvolver suas deduções. Ele não utiliza muito o rigor matemático em suas derivações. O estudante pode fazer demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.

Nível 4: Rigor. O aluno dentro deste nível é capacitado a construir noções de várias questões dentro dos sistemas axiomáticos, isto é, há possibilidade de estudarem as geometrias não-euclidianas. A geometria é vista em um plano abstrato, ou seja, o aluno estabelece e faz demonstrações de teoremas em uma geometria finita.

Nasser e Sant’anna (2010) afirmam que é através da vivência de atividades adequadas ordenadas pelo professor que há progresso de nível. “Portanto, a elevação de níveis depende mais de aprendizagem adequada do que de idade ou maturação” (NASSER; SANT’ANNA, 2010 p. 6). Assim percebemos que o professor tem um papel fundamental no modelo de Van Hiele, pois é ele que tem que selecionar as atividades que o aluno deve praticar para que possa passar para um nível mais elevado.

O casal Van Hiele formulou outra grande contribuição para o modelo, pois eles tinham uma preocupação em tentar entender como o professor poderia facilitar a ascensão e o raciocínio geométrico de seus alunos de um nível para o outro. Eles introduziram então o que foi chamado Fases de Aprendizagem. Segundo Van Hiele (*apud* NASSER;SANT’ANNA, 2010), para o aluno avançar para outro nível, é necessário que ele passe por cinco fases de aprendizagem: a fase de informação, a fase de orientação dirigida, a fase de explicação, a fase de orientação livre e a fase de integração.

Passemos a caracterizar cada uma das fases mencionadas no parágrafo anterior. A fase de informação é sobre os objetivos de estudos. A fase de orientação dirigida é a fase que os estudantes exploram o tópico de estudo através de atividades que o professor selecionou e ordenou com muito cuidado. Na fase de explicação, os alunos expressam e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas que foram observadas. A fase de orientação livre é aquela na qual são procuradas soluções próprias para as atividades mais complexas. E por último temos a fase de integração, em que o aluno revê e resume o que aprendeu, formando uma visão geral do sistema de objetos e relações do nível atingido. Como afirmam Pazos e Werlang, citado por Vieira,

> Nas fases de aprendizagem o objetivo é favorecer o deslocamento do aluno para um nível imediatamente superior ao que ele se encontra, tendo as seguintes etapas: Informação: o aluno explora, discute com os colegas e professor o material a ser estudado; Orientação Dirigida: o professor fornece material sobre o objetivo de estudo em função do nível de raciocínio do aluno; Explicação: o professor conduz, orienta as discussões da turma, para que os alunos se apropriem da linguagem pertinente; Orientação Livre: o professor fornece ao aluno material com várias possibilidades de uso e dá instruções que permitam diversas formas de atuação do aluno sobre o objetivo de estudo; Integração: reflexão dos alunos sobre as suas próprias ações nas etapas anteriores. (PAZOS; WERLANG, apud VIEIRA, 2010, p.27)

As fases de Aprendizagem são etapas pelas quais o aluno passa no decorrer do processo de ensino-aprendizagem. Por sua vez, o professor orienta o aluno para que ele passe por todas essas fases. De acordo com Crowley (1987), citado por Vieira (2010), o modelo Van Hiele é

> Sequencial - como a maioria das teorias em desenvolvimento, uma pessoa deve prosseguir através dos níveis em ordem. Para trabalhar com sucesso em um nível particular, um aluno deve ter adquirido as estratégias dos níveis precedentes.
>
> Progressivo – o progresso (ou a falta de) de nível para nível depende mais do conteúdo e métodos de ensino recebidos do que da idade (...).
>
> Extrínseco e intrínseco – objetos inerentes a um nível tornam-se os objetivos de estudo em um próximo nível. Por exemplo, no nível 0 só a forma de uma figura é percebida. A figura é, obviamente, determinada por suas propriedades, mas é somente no nível 1 que a figura é analisada e seus componentes e propriedades descobertos.
>
> Linguístico – cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seus próprios sistemas de relações conectando esses símbolos. Assim, uma relação que é ‘correta’ em nível pode ser modificada em outro. Por exemplo, uma figura pode ter mais de um nome (classe de inclusão) – um quadrado é também um retângulo (ou um paralelogramo). Um estudante no nível 1 não nota que este tipo de confusão pode ocorrer. Esta noção e a linguagem que a acompanha são, entretanto, fundamentais no nível 2.
>
> Desconectado – se o aluno está em um nível e a instrução em outro diferente, o aprendizado e o progresso desejados podem não ocorrer. Em particular, se o professor, material de estudo, conteúdo, vocabulário e assim por diante estiverem em um nível mais elevado do que o aluno, este não conseguirá acompanhar o raciocínio usado (CROWLEY, 1987, *apud* VIEIRA, 2010, p.27-28).

As pesquisas já desenvolvidas mostram que o progresso de níveis não ocorre num período de tempo muito curto e leva alguns meses, pois é necessário o amadurecimento nas estratégias, objetos de estudo e linguagem características daquele nível. Mas isso é subjetivo, pois depende da experiência da turma, de aspectos sociais, de inter-relacionamento entre os alunos e entre estes e o professor, do número de aulas de geometria por semana, e, principalmente, se o ensino está adaptado ao nível de Van Hiele correspondente.

Para as dificuldades apresentadas pelos alunos nas aulas de geometria, o modelo Van Hiele fornece uma explicação: que o aluno não tem condições de acompanhar um curso dado num nível Van Hiele mais elevado do que o dominado por ele. Na maioria dos livros texto do

9º ano do ensino fundamental exige-se raciocínio dos níveis de abstração e de dedução, mas infelizmente a maioria dos alunos chega no 9º ano sem nem ter conhecimento do nível básico (reconhecimento).

De acordo com a teoria Van Hiele, o aluno não adquire uma linguagem adequada sozinho para avançar de nível para outro mais elevado. Estando o aprendiz em um nível, caso o professor utilize uma linguagem de um nível superior, o aluno não será capaz de acompanhar os processos que estão sendo empregados. Logo, poderá não ocorrer a aprendizagem no nível desejado. De acordo com Vieira (2010),

> É imprescindível que o professor ofereça condições para que os alunos assumam o papel de protagonistas no processo de aprendizagem e isso passa pelo emprego de uma linguagem acessível a todos. Através de uma linguagem adequada a cada nível e de atividades pertinentes a cada um deles, os alunos conseguirão chegar a um nível suficiente alto de desenvolvimento mental que os capacite a trabalhar adequadamente no nível formal da geometria. (VIEIRA, 2010, p.34).

A fim de amenizar as discrepâncias de nível, Nasser e Sant'anna (2010, p. 8) falam recomendam duas estratégias: uma delas é desenvolver atividades que propiciem a elevação e a unificação dos alunos da turma e a outra é adotar para a instrução um nível mais baixo, o mais próximo possível do nível atingido pela turma.

Antes, devemos identificar em que nível Van Hiele cada aluno se encontra. "A melhor maneira de reconhecer em que nível um determinado aluno está raciocinando é por meio da observação direta de seu modo de raciocinar, e das estratégias que ele usa para resolver problemas" (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 8). Sabemos que essa tarefa não é simples de ser feita, principalmente em uma turma com mais de 40 alunos e com tão poucas aulas dedicadas à Geometria. Então, o melhor a fazer é aplicar testes que foram desenvolvidos por pesquisadores para avaliar o desempenho em atividades característica de cada nível. Mas como a maioria das questões é de múltipla escolha, em alguns casos não se garante 100% o nível real em que o aluno se encontra. Em geral, eles garantem com confiança os níveis de cerca de 90% dos alunos de cada amostra.

Os níveis Van Hiele seguem uma hierarquia. O ideal é que o aluno que consegue atingir, por exemplo, o nível de abstração, tenha também acertado as questões dos dois níveis anteriores. Mas isso em alguns casos não ocorre. Às vezes acontece de algum aluno conhecer as propriedades de algumas figuras geométricas (nível de análise), mas não ser capaz de identificar todas as figuras (nível de reconhecimento). Isso significa que o aluno teve falhas na construção de sua "bagagem" geométrica. Para reverter esse quadro, em geral são necessários alguns meses de um curso de geometria bem trabalhados.

Os testes que se encontram no Anexo 1 foram adaptados por Nasser (1992), para identificar os três primeiros níveis Van Hiele. Cada teste contém cinco questões, e cada folha deve ser resolvida de uma vez para que as questões dos testes mais avançados não ajudem a solucionar os mais simples. O aluno só alcança um nível se ele acertar pelo menos 60% das questões do teste daquele nível, ou seja, se ele responder corretamente a pelo menos três das cinco questões propostas.

Segundo Van Hiele, citado por Vieira (2010, p. 27), “não basta que o professor explique as atividades para o aluno. O aluno tem que ser submetido ao desafio de resolver as questões do seu jeito. ‘Às vezes, há uma tentativa de informar os alunos do contexto por explicação, mas isso é inútil: os alunos devem aprender fazendo, não sendo informados por explicação.’”

Para estudar e entender geometria os alunos devem ter algumas habilidades. Hoffer (HOFFER,1981, *apud* VIEIRA, 2010, p. 28) identificou cinco tipos de habilidades básicas definidas como visual, verbal, gráfica, lógica e aplicação, apresentadas no quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Tipos de habilidades necessárias para a aprendizagem de Geometria

Tipos de Habilidades	**Comentários**
Habilidades visuais	Geometria é claramente uma matéria visual, mas com demasiada frequência, seus aspectos visuais têm servido primariamente como uma ferramenta para provas. (...) pode ser que os alunos precisem explorar mais figuras e esquemas manipuláveis.
Habilidades verbais	Um curso de geometria provavelmente salienta o uso de linguagem mais do que qualquer outro curso matemático. Há abundância de vocabulário para os alunos aprenderem. Há definições precisas. Há postulados e proposições que descrevem propriedades de figuras e relações entre figuras. Pede-se que os alunos leiam muito material e que escrevam suas próprias demonstrações.
Habilidades de desenhos	Os cursos de Geometria fornecem oportunidades para os alunos expressarem suas ideias em desenhos e diagramas. Na vida posterior, alguns alunos podem ter mais necessidade de fazer um desenho de uma situação geométrica do que provar teoremas. As habilidades de desenhar podem e provavelmente devem ser desenvolvidas em cursos de Geometria, e as atividades ajudam com frequência a preparar alunos para aprender, mais tarde, relações geométricas.
Habilidades lógicas	A Geometria é uma das matérias do currículo que mais ajudam os alunos a analisar a forma de um argumento e a reconhecerem a forma de argumentos válidos e não-válidos no contexto de figuras geométricas e, posteriormente, em problemas da vida diária. (...) Para os alunos desenvolverem habilidades lógicas, muitos necessitam trabalhar informalmente com ideias ilustrativas e verbais antes de serem introduzidos às regras da lógica.
Habilidades aplicadas	Dedicando mais tempo ao desenvolvimento de habilidades nós seremos capazes de prover os alunos com mais aplicações práticas de Geometria que ocorrem, por exemplo, em arquitetura, astronomia e engenharia, bem como aplicações do raciocínio que são usadas por advogados, pessoas de negócios e consumidores.

Fonte: (HOFFER 1981, *apud* VIEIRA, 2010, p. 29).

Hoffer (1981) relacionou cada uma das habilidades citadas acima com os cincos níveis Van Hiele, obtendo assim, 25 cruzamentos, apresentados no quadro 2 a seguir (VIEIRA, 2010, p. 29):

Quadro 2 – Relação entre habilidades e níveis de Van Hiele

Nível Habilidade	Visualização ou Reconhecimento	Análise	Ordenação ou dedução informal	Dedução Formal	Rigor
Visual	Reconhece figuras diferentes de um desenho. Reconhece informações rotuladas numa figura.	Percebe as propriedades de uma figura como parte integrante de uma figura maior.	Reconhece inter-relações em diferentes tipos de figuras. Reconhece propriedades comuns de diferentes tipos de figuras.	Usa informação sobre uma figura para deduzir outras informações.	Reconhece suposições injustificadas feitas através do uso de figuras. Concebe figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos.
Verbal	Associa o nome correto com uma figura dada. Interpreta sentenças que descrevem figuras.	Descreve acuradament e várias propriedades de uma figura.	Define palavras precisa e concisamente. Formula sentenças mostrando inter-relações entre figuras.	Entende a distinção entre definições, postulados e teoremas. Reconhece o que é dado num problema e o que se pede para achar ou fazer.	Formula extensões de resultados conhecidos. Descreve vários sistemas dedutivos.
Desenho	Faz esquemas de figuras identificando acuradamente as partes dadas.	Traduz numa figura a informação verbal dada. Usa as propriedades de figuras para desenhar ou construir as figuras.	Dadas certas figuras, é capaz de construir outras figuras relacionadas às figuras dadas.	Reconhece quando o como usar elementos auxiliares numa figura. Deduz a partir de informação dada como desenhar ou construir uma figura específica.	Entende as limitações e capacidades de vários instrumentos de desenho. Representa pictoriamente conceitos atípicos em vários sistemas dedutivos.
Lógica	Percebe que há diferenças e semelhanças entre figuras. Entende a conservação da forma de figuras em posições diferentes.	Entende que figuras podem ser classificadas em tipos diferentes. Percebe que propriedades podem ser usadas para distinguir as figuras.	Entende qualidades de uma boa definição. Usa propriedades de figuras para determinar se uma classe de figuras está contida numa outra classe.	Usa regras de lógica para desenvolver provas. É capaz de deduzir consequências a partir de informação dada.	Entende as limitações e capacidades de hipóteses e postulados. Sabe quando um sistema de postulados é independente, consistente e categórico.
Aplicações	Identifica formas geométricas em objetos físicos.	Reconhece propriedades geométricas de objetos físicos. Representa fenômenos físicos em papel ou num modelo.	Entende o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	É capaz de deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. É capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usa modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolve modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e da natureza.

Fonte: (HOFFER 1981 *apud* VIEIRA 2010, p.30).

Diante do exposto, as habilidades matemáticas estão presentes no pensamento de geometria e possuem uma grande relação com conceitos em vários níveis. À medida que se conhecem as relações entre o tipo de habilidade necessária para a assimilação de cada um desses conhecimentos, o professor adquire algumas ferramentas para a compreensão dos processos que os alunos utilizam para efetivar a compreensão e resolução dos problemas ao longo do trabalho com geometria (NASSER, 1997 *apud* VIEIRA 2010, p.30-31).

Edward Chace Tolman (1886-1969) acreditava que todo comportamento é intencional. Ou seja, que todo comportamento é guiado por expectativas que estão relacionadas aos objetivos (LEFRANÇOIS, 2012, p.201-202). Assim, cabe ao professor, na maior parte das vezes, influenciar e dirigir o comportamento dos alunos, assumindo o papel de colaborador, orientador e incentivador da aprendizagem, precisando assim encontrar meios para influenciar e guiar seus objetivos e expectativas, buscando sempre que os alunos desenvolvam sua autonomia em relação à aprendizagem.

3 USO DE MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Este capítulo se encontra subdividido em três seções. Na seção 2.1, apresentamos algumas considerações teóricas acerca do trabalho didático com materiais concretos ou manipulativos. Nas seções 2.2 e 2.3, apresentamos, respectivamente, o geoplano e o Tangram, especificando detalhes sobre a construção e a utilização desses dois recursos didáticos.

3.1 Materiais concretos ou manipulativos

O processo de ensino e de aprendizagem na educação básica não é, definitivamente, uma atividade simples ou trivial. Não é raro nos depararmos na literatura especializada com posicionamentos como este retratado na citação seguinte:

> O processo de ensino e aprendizagem da matemática apresenta dificuldades tanto para os alunos quanto para os professores. Os alunos muitas vezes argumentam que não entendem os conteúdos e não veem utilidade dos mesmos no cotidiano de suas vidas. Os professores de sua parte relatam que os alunos são desinteressados e que demonstram pouca vontade para o estudo. Este panorama provoca uma angústia aos docentes, pois é cada vez maior o número de alunos que são promovidos às séries seguintes e não conseguem acompanhar os conteúdos ora abordados. (SOUZA; VERSA, p. 25).

Ao fazer uso de materiais concretos na sala de aula, temos percebido em nossa prática a sua potencialidade para a promoção da aprendizagem de conteúdos matemáticos desde a educação infantil até o ensino médio. É evidente como a utilização desse material favorece o desenvolvimento do raciocínio indutivo, a organização do pensamento, a concentração, dentre outros, facilitando assim a compreensão para a resolução de problemas matemáticos, além de tornar as aulas mais dinâmicas, interessantes e agradáveis tanto para os estudantes quanto para o professor.

A utilização de materiais concretos na aprendizagem de matemática está associada ao fato de eles oferecerem um conceito de diversão e de brincadeira para os alunos. Isso faz com que ocorra um maior interesse e envolvimento por parte deles, pois proporciona algo diferente do que ocorre em sala de aula no cotidiano, acabando por deixá-los mais animados e dispostos para as aulas. (RODRIGUES, et al., 2009).

Entretanto, nas series finais do ensino fundamental e no ensino médio, não é tão comum o uso desses recursos. Arnoldo, ao citar Pais (1996), diz que "a maior barreira enfrentada por estudantes de geometria remete-se à falta de imagens mentais, que são usadas para decodificar os desenhos ou representações gráficas" (PAIS *apud* ARNOLDO, 2010, p.155).

Viana (2000), por sua vez, afirma que:

> Parece ser viável apresentar às crianças objetos do mundo físico vivenciado por elas e associá-los a conceitos geométricos. É esperado que os alunos, manipulando o objeto e sob orientação do professor, descubram propriedades que contribuam para a elaboração conceitual. Ao manipular, por exemplo, uma caixa de sapato, eles podem identificar faces, vértices, arestas, perceber que duas faces se "encontram" em uma aresta, que existem faces que são paralelas etc. Um desenho em perspectiva da caixa talvez dificulte (de acordo com a idade do aluno) a identificação daqueles elementos. (VIANA, 2000, p.31).

E mais adiante acrescenta,

> É importante que o professor, nas atividades de ensino de conceitos geométricos, possa trabalhar com objetos e com figuras, e assim auxiliar os alunos a formarem imagens mentais. Convém lembrar, no entanto, que objetos e figuras são apenas representações dos conceitos. Ficar preso a essas representações é impedir que o aluno alcance níveis mais altos de conceituação (Ibid., p.33).

Apesar da ampla defesa, em trabalhos acadêmicos, da utilização de recursos manipulativos nas aulas de matemática, ainda hoje em muitas escolas o ensino-aprendizagem de matemática é caracterizado como uma transmissão de conhecimento de forma tradicional, onde o professor é o centro das atenções e o aluno simplesmente um mero expectador, um ser passivo, ou seja, o professor expõe e transmite o assunto e o aluno tenta memorizar regras, fórmulas e procura absorver o que está sendo exposto.

No entanto, temos que ter o cuidado para não exagerar na utilização dos materiais concretos, devendo utilizá-lo somente quando for oportuno. Pois ao utiliza-los deve-se promover condições para que o aluno desenvolva lógicas de relações, ou seja, o aluno deve apreender uma lógica para que assim aprenda o conceito. Ressalta Jardinetti (1996), "muitos professores ou pesquisadores exageram ao empregar os materiais concretos, como se fosse o 'santo milagroso' do ensino da matemática, dando uma 'conotação fetichizadora'" (JARDINETTI, *apud* ARNOLDO, 2010, p.158). Jardinetti diz que muitas vezes o recurso concreto é inadequado para determinada situação ao que se propõe. É necessário que esses materiais funcionem como uma ferramenta de apoio para o professor conciliar teoria e prática visando uma aprendizagem significativa ao aluno.

Deve-se destacar que este procedimento metodológico é mais um recurso didático que os professores podem utilizar. Jamais se pode recomendar que a utilização deste procedimento exclua outras formalidades da matemática tais como demonstrações, propriedades e outras conjecturas.

É preciso que esse trabalho seja executado de forma dirigida para que o aluno possa realmente alcançar o objetivo esperado, sendo um sujeito ativo na construção do seu próprio conhecimento. Agora “dizer que a criança deve construir seu próprio conhecimento não implica que o professor fique sentado, omita-se e deixe a criança inteiramente só” (KAMII, 1990, p.48), e sim, que o professor seja um mediador, um incentivador no processo de ensino-aprendizagem. Em suma, “devemos sempre estimular um constante vínculo entre manipulação de materiais e situações significativas para o aluno” (PAIS, 2000, p.15).

É importante ressaltar que o uso de material didático manipulável no estudo da geometria requer do professor um tempo significativo fora da sala de aula, para preparar as atividades e refletir sobre a proposta político-pedagógica; sobre o papel histórico da escola, sobre o tipo de aluno que deseja formar, sobre qual matemática acredita ser importante para esse aluno. Pois muitas das vezes o professor nem sempre tem a clareza das razões pelas quais os materiais concretos são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática e nem o momento adequado para utilizá-los. A esse respeito vale recordar a seguinte recomendação:

> Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um ‘aprender’ mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um ‘aprender’ que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. (FIORENTINI; MIORIM, p.4).

Depreende-se dessa recomendação que a adoção do lúdico nas aulas de matemática pode proporcionar uma melhor interação entre professor e aluno, pois o aluno torna-se mais participativo e com isso contribui para que as aulas tornem-se mais produtivas. Essa posição teórica também é defendida em Rodrigues *et al.* (2009).

Quando o aluno se depara com uma situação desconhecida, o uso de um material que possa ilustrar o que está sendo discutido pode ser indispensável, mesmo nas séries finais do ensino fundamental ou ensino médio, quando muitos professores supõem que o aluno já tenha um nível de desenvolvimento mental e uma já maior capacidade de abstração. Isso, na maioria das vezes, não é o que se observa ao trabalhar com alunos dessas séries. Muitos deles apresentam grandes dificuldades de abstração e necessitam de recursos que possibilitem uma visualização do que está sendo estudado para que possa ocorrer a compreensão (VIEIRA, 2010, p.40).

Segundo Passos, citado por Vieira (2010, p. 45), ao construir um espaço onde o aluno pode criar, manipular, argumentar e enfrentar situações diversificadas, o professor estará contribuindo para a formação de conceitos pelo aluno de forma efetiva. Não ocorrerá apenas uma aprendizagem momentânea, onde o aluno só repete o que o professor fez, mas uma aprendizagem consistente, que o aluno utilizará sempre que for necessário, atingindo assim um alto nível de pensamento geométrico.

3.2 O Geoplano

A palavra geoplano é de origem inglesa (*geoboards*) e francesa (*geoplans*), onde "geo" vem de geometria e "plans" significa tábuas ou superfície plana. Uns dos primeiros trabalhos sobre o geoplano foi criado e desenvolvido em 1961 pelo professor Dr. Caleb Gattegno (1911-1988), do *Institute of Education*, *London University*, o qual foi reconhecido mundialmente pelas suas pesquisas em educação infantil e por toda sua vida dedicou-se a criação de materiais pedagógicos. "A partir deste, muitos outros pesquisadores em Educação Matemática passaram a utilizar o Geoplano como uma ferramenta para o ensino de Geometria plana elementar, para o ensino de frações, dentre outros " (VIEIRA, 2010, P.46).

Lembremos aqui a definição do geoplano dada por Machado (1993):

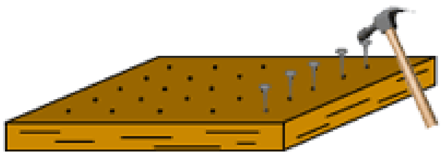
> Geoplano: é um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo (construir, movimentar e desfazer). Contribui para explorar problemas geométricos e algébricos, possibilitando a aferição de conjecturas e podendo-se registrar o trabalho em papel ou reproduzi-lo em papel quadriculado. Além disto, o geoplano facilita o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial, comparação, relação, discriminação, sequência, envolvendo conceitos de frações e suas operações, simetria, reflexão, rotação e translação, perímetro, área. O geoplano é um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes (MACHADO, 1993 p.1).

Esse material tem a finalidade de despertar o interesse e a curiosidade do aluno, facilitando assim a aprendizagem, pois a partir das construções feitas no geoplano o aluno pode construir suas próprias hipóteses, seus próprios conceitos. Além do mais, permite que o aluno e professor se desprendam do ambiente tradicional da sala de aula para um momento mais interativo e concreto, de construção do conhecimento. (BEZERRA et al, 2013).

A grande parte dos alunos tem dificuldades em matemática e principalmente em geometria, pois essa última requer deles uma maior concentração e certo raciocínio lógico para compreender situações abstratas. No entanto, essas dificuldades podem ser sanadas com o auxílio dos materiais concretos nas aulas de matemática para trabalhar geometria, como é o caso do geoplano. "O Geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas, constituindo-se em um suporte concreto para a representação mental, trazendo para o concreto ideias abstratas. " (SÁ, 1999, p.2). Possibilitando ao professor trabalhar com diversos assuntos desde os anos iniciais do ensino fundamental até o ensino médio.

Escolhemos trabalhar com o geoplano por ser um material simples e de fácil acesso que pode ser confeccionado com uma tábua de madeira cujas medidas vão variar de acordo com a forma desejada que servirá de base na qual são fixados vários pregos ou pinos de madeiras como mostra a figura 1. Para explorar o geoplano são necessários atilhos de borracha (aquelas ligas usadas para amarrar dinheiro, se possível coloridas) ou barbantes os quais podemos prender aos pregos desenhando e formando figuras geométricas sobre o geoplano. No geoplano quadrado, a distância entre um prego e outro tem que ser a mesma tanto na vertical quanto na horizontal.

Figura 1 - Geoplano



Fonte: <http://junior.te.pt/site_regresso_2004/geoplano.html>

Existem vários tipos de geoplano, tais como quadrado, trelissado, circular, oval, retangular e triangular.

Vejamos no que se segue alguns modelos de Geoplanos.

Figura 2 - Geoplano quadrado

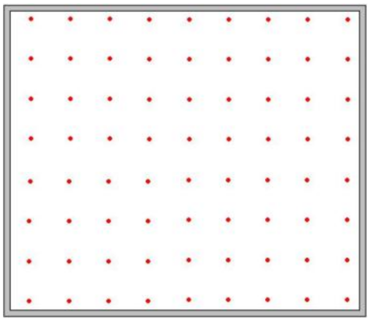
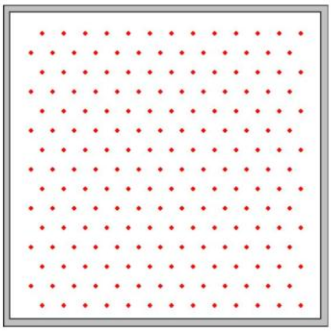


Figura 3- Geoplano trelissado



Fonte das imagens: 2 e 3:< http://matunifal.blogspot.com.br/2011/05/geoplano.html>.

Figura 4 - Geoplano circular

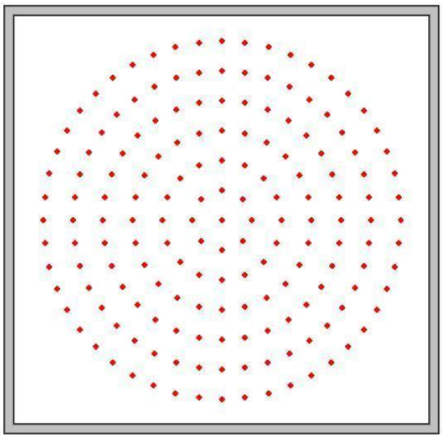
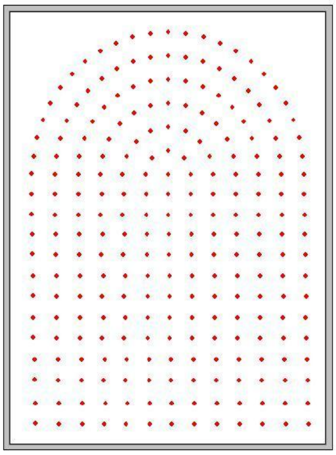


Figura 5- Geoplano oval



Fonte das imagens: 4 e 5:< http://matunifal.blogspot.com.br/2011/05/geoplano.html>.

Bezerra destaca alguns assuntos que podem ser trabalhados com a utilização do geoplano em cada etapa de ensino.

Nos anos iniciais podem ser abordados as construções livres, frações, figuras planas, simetria, a construção da tabuada, polígonos, grandezas de medidas, entre outros. Nas séries finais do ensino fundamental podem ser estudados o teorema de Pitágoras, produtos notáveis, áreas e perímetro, tipos de triângulo, reta, segmento de reta, volume, entre outros. Já no Ensino Médio destacamos sequência, análise combinatória, funções, ponto, plano cartesiano, etc.

> O Geoplano, além dos importantes conceitos matemáticos que pode explorar, tem também a característica de propiciar um desenvolvimento de um trabalho criativo, no qual todos participam de forma cooperativa, tornando o aprendizado muito mais significativo. (SÁ, 1999, p.2).

Sabe-se que, algumas vezes, os conceitos de área e perímetro são abordados na escola de modo superficial até mesmo em livros didáticos. Geralmente são trabalhados simultaneamente, o que pode gerar confusão se forem abordados mecanicamente. No entanto, alguns livros didáticos atuais apresentam atividades envolvendo os conceitos de áreas e perímetro desde as séries iniciais, de modo a não gerar ambiguidade na compreensão desses conceitos. Caso isso não aconteça, o professor dos anos finais do Ensino Fundamental ou mesmo no Ensino Médio deve fazer a retomada desses conteúdos. Adolescentes, assim como as crianças, gostam de atividades lúdicas nas quais podem usar barbantes, dobraduras, colagens, palitos e canudos (VIEIRA, 2010, p.44).

Decidimos adotar para esta pesquisa o geoplano retangular, por ser a nosso ver um dos mais adequados para o estudo de áreas e perímetros de polígonos planos. Assim, confeccionamos 25 tabuleiros de madeira, contendo as seguintes dimensões: 30 cm de comprimento, 21 de largura e 1,5 cm de altura. O Geoplano pode apresentar apenas os pontos na malha (formados pelos pregos) ou também serem quadriculados.

No caso da sequência didática aqui proposta, o tabuleiro foi riscado com uma régua, com quadradinhos de $9\ cm^2$, e em cada lado foi deixada uma margem de 1,5 cm. Nos vértices de cada quadradinho foi colocado um prego, totalizando 63 pregos em cada tabuleiro. Estabelecemos que cada quadradinho do geoplano constituía uma unidade de área. Logo, cada geoplano tinha uma área total de 432 cm^2 unidades de área. Foram adotada essas dimensões porque foram as de mais fácil obtenção na serraria. A título de esclarecimento, podem ser construídos geoplanos com quaisquer dimensões. Algumas recomendações iniciais são necessárias:

> Na apresentação do material para o aluno, é importante deixar que eles primeiramente manipulem livremente o material, para depois dar início às atividades específicas. Isso pode ser feito através de um desenho livre, no qual o aluno pode criar as figuras que quiser, explorando a sua criatividade (VIEIRA, 2010, p.48).

O geoplano possui um amplo leque de aplicações didáticas. Entre elas destacamos o cálculo da área de polígonos utilizando o Teorema de Pick, conhecido também pela fórmula de Pick. O teorema de Pick foi descoberto em 1899 pelo matemático Georg Alexander Pick nascido em Viena, na Áustria, em 1859 e morto durante a II guerra mundial, em 1943, no campo de concentração de Theresienstadt. A fórmula de Pick é um teorema do final do século passado que dá um critério interessante para o cálculo de área de polígonos simples com vértices sobre uma malha sem precisar dividir o polígono em triângulos e nem calcular a soma de cada triângulo.

Teorema (Fórmula de Pick − forma simples): A área de uma região poligonal de vértice sobre o reticulado é dada por:

$$A = \frac{b}{2} + i - 1,$$

onde b é o número de pontos do reticulado que estão sobre os lados da região poligonal e i é o número de pontos do reticulado que estão no interior da região poligonal.

Queremos ressaltar que esse teorema só é válido para polígonos simples, ou seja, polígonos que consistem em uma única peça e não contêm buracos no seu interior e nem intersecções das suas arestas.

Figura 6- Polígono simples

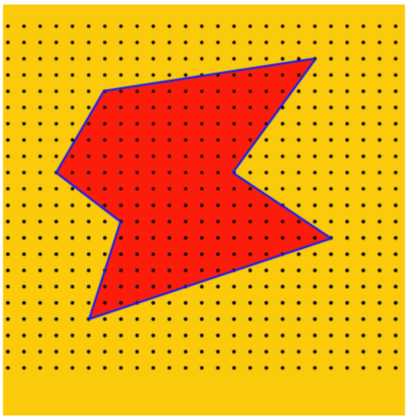
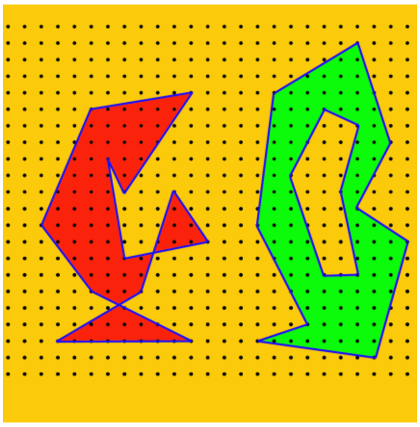


Figura 7- Polígonos não simples



Fonte das imagens 6 e 7: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>.

***Demonstração do teorema de Pick*:**

Para demonstrar o teorema de Pick, é preciso mostrar em primeiro lugar que o segundo membro da fórmula de Pick – o que dá aquilo a que pode-se chamar o número de Pick do polígono

$$Pick\ (p) = \frac{b}{2} + i - 1,$$

é aditivo no sentido seguinte: justapondo dois polígonos ao longo de pelo menos uma aresta. Então o número de Pick do polígono resultante é igual à soma dos números de Pick dos dois polígonos referidos.

Este fato não deve surpreender. De fato, sabe-se que o mesmo acontece para área – justapondo dois polígonos ao longo de pelo menos uma aresta, a área do polígono obtido é a soma das áreas dos polígonos iniciais.

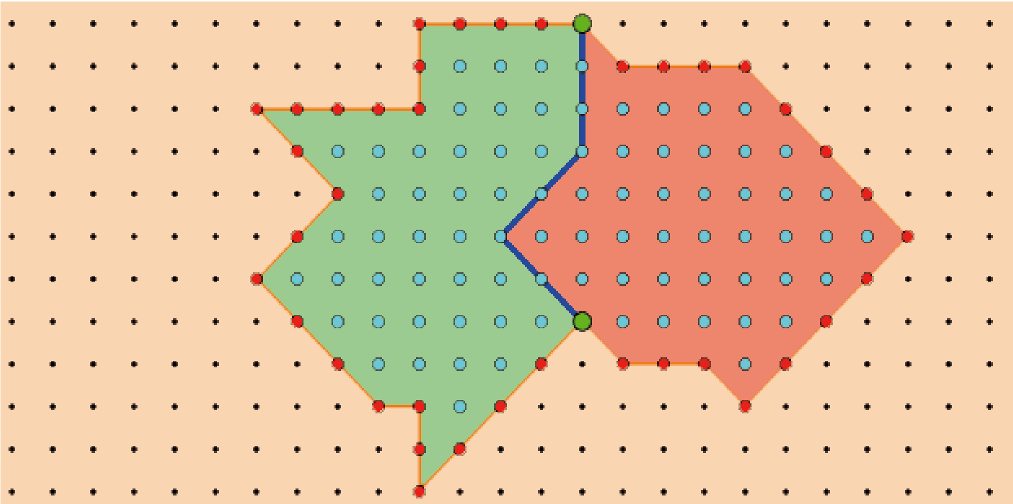
Assim, se o Teorema de Pick for válido, por outras palavras, se:

$$A\ (p) = PICK\ (p).$$

Então terá de obedecer a essa mesma propriedade de aditividade.

Considere então dois polígonos arbitrários p_d e p_e, sendo p_d o polígono da direita e p_e o da esquerda.

Figura 8 - Poligonos



Fonte: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>.

Suponha que o número de pontos do interior e da fronteira do polígono p_d são I_d e B_d, respectivamente, e os do polígono p_e são I_e e B_e. Unindo os polígonos p_d e p_e obtém um polígono p com I pontos interiores e B pontos de fronteira, como se ilustra na figura anterior. O nosso objetivo é mostrar que:

$$Pick\ (p) = Pick\ (p_e) + Pick\ (p_d),$$

isto é, que:

$$\frac{1}{2}B + I - 1 = \left(\frac{1}{2}B_e + I_e - 1\right) + \left(\frac{1}{2}B_d + I_d - 1\right).$$

Repare que depois de justapor os dois polígonos, os pontos do reticulado situados sobre as arestas comuns dos dois polígonos p_d e p_e tornam-se pontos interiores do polígono p, exceto dois deles (a verde na figura 8), que continuam a ser pontos de fronteira, embora agora do polígono p.

Seja k o número de pontos de contato de p_d e p_e que após a justaposição se tornaram pontos interiores de p (na figura 8 k = 6). Então

$$I = I_d + I_e + k.$$

(1)

Por outro lado, se quisermos calcular B temos de retirar k a B_e e a B_d, uma vez que, depois da junção dos dois polígonos, esses k pontos ficaram pontos interiores de p. Precisamos ainda ter em atenção que os dois pontos a verde são comuns a p_e e p_d e portanto foram contados duas vezes.

Resumindo tudo isto, temos então que:

$$B = (B_e - k) + (B_d - k) - 2,$$

Isto é,

$$B = B_e + B_d - 2k - 2.$$

(2)

Substituindo então (1) e (2) na fórmula de $Pick\,(p)$, obtemos:

$$Pick\,(p) = I + \frac{1}{2}B - 1$$

$$= (I_d + I_e + k) + \frac{1}{2}(B_e + B_d - 2k - 2) - 1$$

$$= \left(I_e + \frac{1}{2}B_e - 1\right) + \left(I_d + \frac{1}{2}B_d - 1\right)$$

$$= Pick(p_e) + Pick(p_d).$$

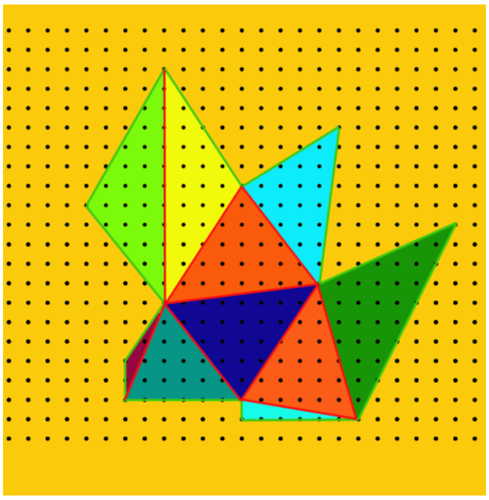
(3)

Está assim provada a aditividade do número de Pick.

Acabamos de mostrar que justapondo dois polígonos ao longo de pelo menos uma aresta, os respectivos números de Pick adicionam-se (bem como as respectivas áreas). Isto sugere a seguinte estratégia de demonstração: decompomos o polígono dado $\mathcal{P}$, numa justaposição de polígonos "elementares" para os quais o teorema de Pick seja fácil de verificar diretamente.

Ora, qualquer polígono simples $\mathcal{P}$, com vértices no reticulado, pode ser decomposto em triângulos cujos vértices são também pontos do reticulado.

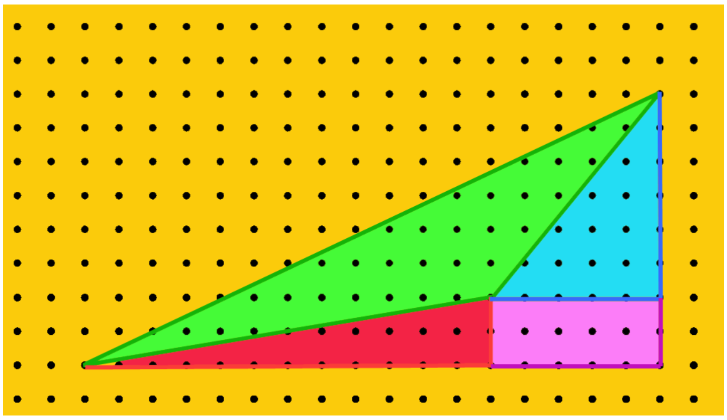
Figura 9 - Polígonos em triângulos



Fonte:< http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>.

Basta, pois, provar o teorema de Pick para um triângulo arbitrário com vértices no reticulado.

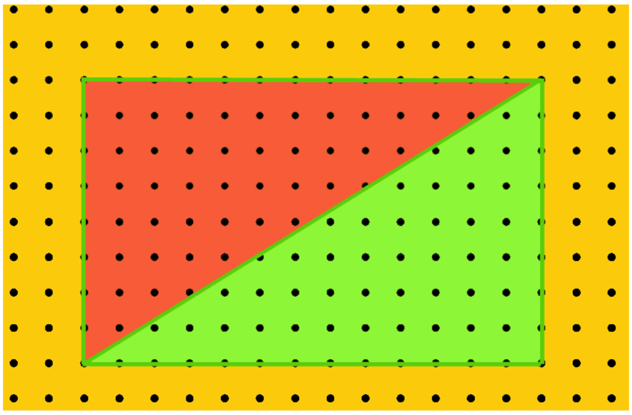
Figura 10- Polígonos em triângulos e retângulos



Fonte: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>.

Mas um tal triângulo pode ser completado num triângulo retângulo justapondo-lhe ou retângulos ou novos triângulos retângulos. E, por último, um retângulo é justaposição de dois triângulos retângulos.

Figura 11- Polígonos em triângulos e retângulos



Fonte:< http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>.

Tudo isto permite concluir que basta provar o teorema de Pick para retângulos! Mas estes são justaposição de quadrados de lado 1. E para estes últimos, o teorema de Pick é trivial. De fato, para um quadrado de lado 1, a área é 1, enquanto que $B = 4$ e $I = 0$.

Portanto o número de Pick é

$$\frac{B}{2} + I - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1.$$

Tratando-se da utilização didática do geoplano convém ter sempre viva na memória a recomendação seguinte: "O geoplano pode permitir ao aluno uma forma de estudar a matemática numa proposta mais livre, praticando, discutindo e descobrindo propriedades a partir de situações que permitem a investigação e a constante experimentação" (VIEIRA, 2010, p.48). Como bem ressalta esse autor, o geoplano pode se constituir em um recurso eficiente, pois ele permite que o próprio aluno construa o seu conhecimento e desenvolva o pensamento geométrico.

3.3 Tangram

Ouvimos muitas vezes algumas frases do tipo: "criança vai à escola para aprender e não para brincar"; "temos que separar brincadeira de coisa séria". De acordo com as frases mencionadas, brincadeira é pura diversão e não devemos utilizá-la em sala de aula. Uma outra situação que retrata esse aspecto dicotômico entre o trabalho e o jogo é narrada pela fábula da formiga e a cigarra. Nela encontra-se a intenção de se passar a visão de que as formigas, como trabalham para armazenar seus alimentos, estão agindo de acordo com as normas impostas pela sociedade, no caso, agindo de forma correta, ao passo que a cigarra, ao deleitar-se com a música, está comportando-se de forma errada. Ainda hoje, essa fábula continua sendo narrada com os mesmos valores, enfatizando o trabalho e diminuindo o lazer. Porém, conhecemos uma outra frase que diz “é brincando que a criança aprende” e é com essa ideia que iremos introduzir o Jogo Tangram como um recurso didático importante para o desenvolvimento do aluno na construção do conhecimento matemático.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções, além de possibilitar a construção de uma atitude positiva perante os erros, [...] sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p.46).

Grando (1995) ressalta que, para os alunos, o ensino da matemática é apresentado como uma das áreas mais caóticas em termos da compreensão dos conceitos nela envolvidos, o elemento jogo se apresenta com formas específicas e características próprias, propícias a dar compreensão para muitas das estruturas matemáticas existentes e de difícil assimilação.

O Tangram é um quebra-cabeça chinês de origem milenar formado de sete peças geométricas oriundas de um quadrado, que permite criar e montar mais de 1.700 figuras entre pessoas, objetos, animais, plantas, letras, números e outras figuras com as sete peças que o compõem, segundo a enciclopédia do Tangram, incluindo a própria formação original, o quadrado, “além de trabalhar o raciocínio lógico fundamental para obter sucesso em trabalhos que envolvam aplicação matemática e desenvolver a atenção cognitiva. ” (ALVES, et. al.2011).

Existem diversas lendas sobre a origem do Tangram. Em uma delas conta-se que:

> [...] um monge chinês deu ao seu discípulo um quadrado de porcelana, um rolo de papel de arroz, pincel e tintas, e disse: - vai e viaja pelo mundo. Anota tudo que vires de belo e depois volta. A emoção da tarefa fez com que o discípulo deixasse cair o quadrado de porcelana, que se partiu em sete pedaços. O discípulo, tentando reproduzir o quadrado, viu formar uma imensidão de figuras belas e conhecidas a partir das sete peças. De repente percebeu que não precisaria mais correr o mundo. Tudo de belo que existia poderia ser formado pelo Tangram. (ALVES et al, 2011).

Alves et al (2011) afirmam que a utilização do Tangram geometricamente não se limita em apenas construir figuras, podendo ser aplicado em estudos de áreas, ângulos, perímetros de algumas figuras geométricas. Levando o jogo para sala de aula, é possível trabalhar com modelagem de várias figuras em que os desafios propostos aos alunos seriam calcular as medidas das figuras construídas, utilizando-se de instrumentos de medição como: régua; transferidor; compasso, desenvolvendo o manuseio de tais instrumentos e colocando em prática o conteúdo de geometria. (ALVES, et. al, 2011, p. 6-7), objetivando o reconhecimento de todas as figuras geométricas que fazem parte do Tangram e identificando suas propriedades através do manuseio.

Construção do Tangram

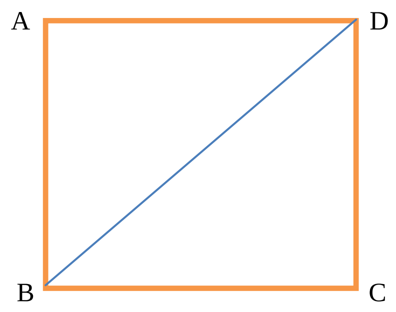
Para a construção do Tangram, o primeiro passo é formar um quadrado.

Figura 12 – Construção do Tangram A

Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Depois de formado, o quadrado ABCD, tracemos um segmento de reta que vai do vértice B ao vértice D, dividindo-o em dois triângulos iguais.

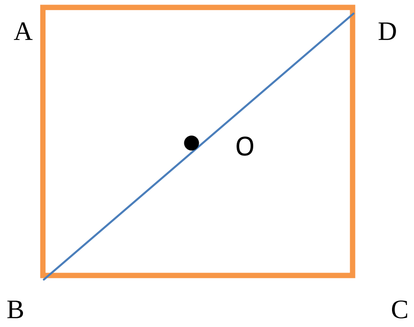
Figura 13 – Construção do Tangram B



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Precisamos encontrar o ponto médio do segmento BD e para isto basta pegar o vértice A e dobrar até o segmento BD. O ponto de encontro do vértice A e do segmento BD será o ponto médio de BD, que chamaremos de ponto O.

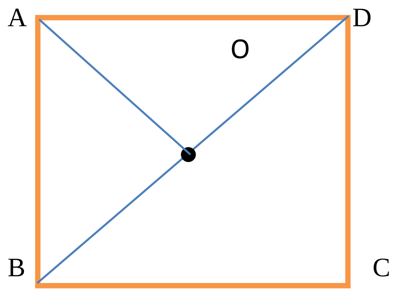
Figura 14 – Construção do Tangram C



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Agora iremos traçar um segmento de reta que vai do vértice A ao ponto O, formando três triângulos.

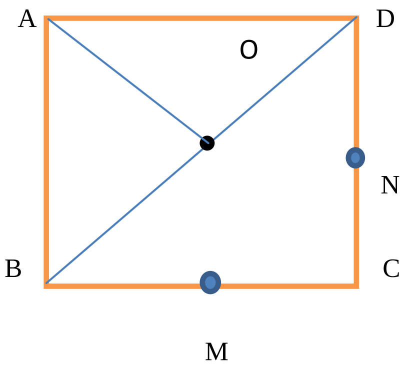
Figura 15 – Construção do Tangram D



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Dobremos o vértice C até o ponto O, assim formando dois pontos M e N, respectivamente, um no segmento BC e outro no segmento CD.

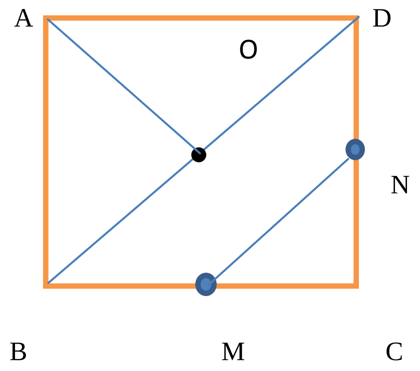
Figura 16 – Construção do Tangram E



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Tracemos um segmento de reta do ponto M ao ponto N.

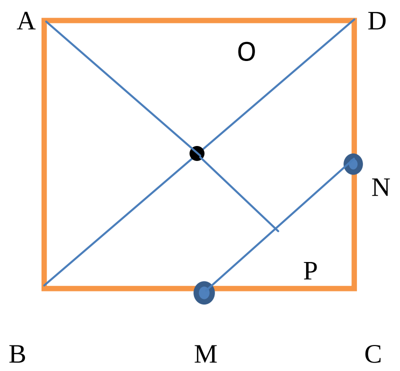
Figura 17 – Construção do Tangram F



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Façamos uma reta perpendicular saindo do ponto O ao segmento MN no ponto P.

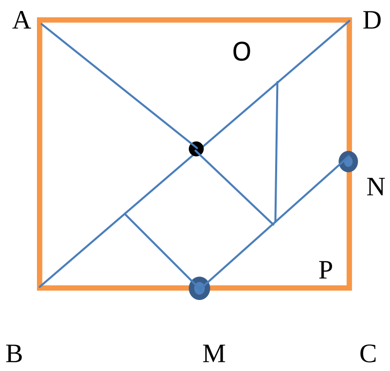
Figura 18 – Construção do Tangram G



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Tracemos um segmento de reta paralela ao segmento OP, partindo do ponto M ao segmento BO, e outro paralelo ao lado AB saindo do ponto P ao segmento OD.

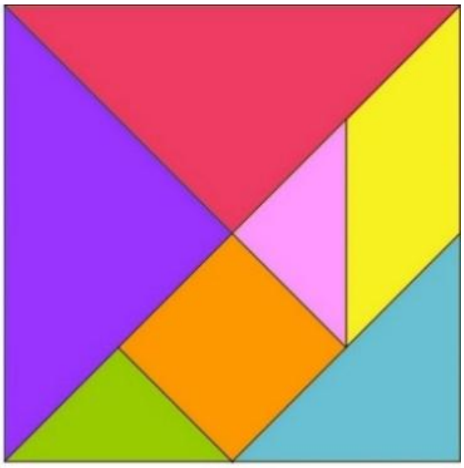
Figura 19 – Construção do Tangram H



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada por Miranda

Assim, concluímos a construção do Tangram com suas sete peças, sendo um quadrado, um paralelogramo, dois triângulos grandes, um triângulo médio, e dois triângulos pequenos. Tomando o quadrado original formado pelas sete peças do Tangram como unidade de área, observamos que cada triângulo grande tem área igual a 1/4, o triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo têm áreas iguais a 1/8 e cada triângulo pequeno tem área igual a 1/16.

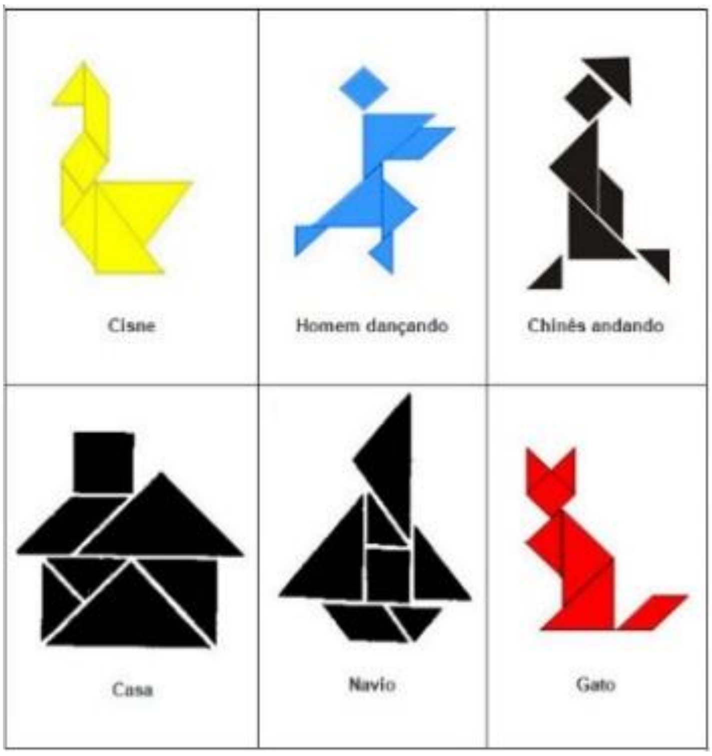
Figura 20 - Tangram



Fonte: <http://ensinarevt.com/jogos/tangram/>.

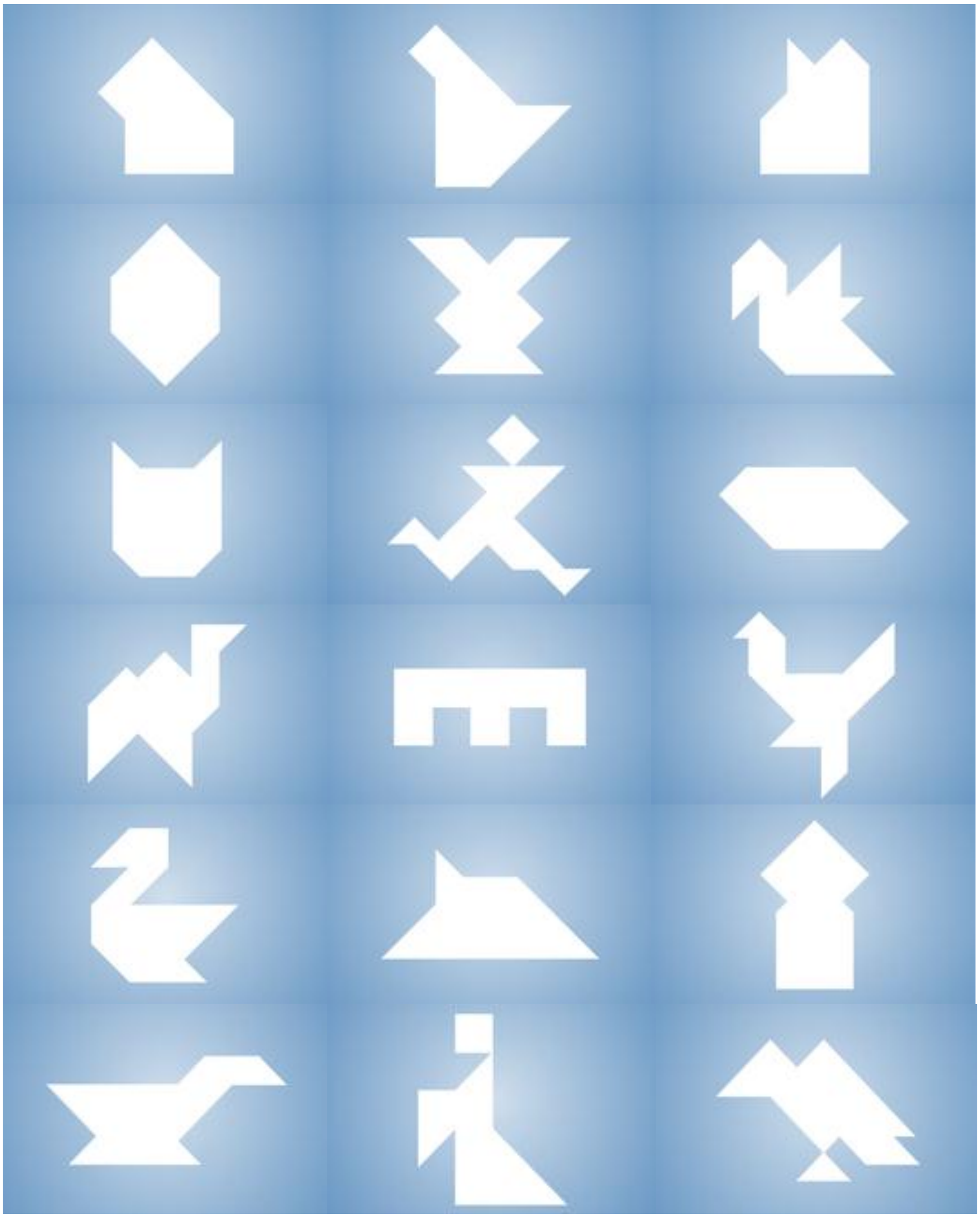
Vejamos algumas figuras feitas com as sete peças do Tangram, sem sobreposição.

Figura 21 - Figuras feitas com o Tangram



Fonte:< http://pibidmatematicapucminas.blogspot.com.br/2015_05_01_archive.html>

Figura 22 - Figuras do rachacuca



Fonte: <http://rachacuca.com.br/raciocinio/tangram/>.

Para construir figuras utilizando as sete peças do Tangram, o aluno tem que pensar, raciocinar e interagir, pois não são simples essas construções. Ao fazer as construções devemos deixar claro sobre a conservação de área de cada figura.

> Enfim, o uso de material lúdico em sala de aula, como o Tangram, é uma estratégia eficaz para entender conceitos de número e operações, além de educar a atenção, despertar interesse por mais conhecimento e trabalhar a interdisciplinaridade. Portanto, entende-se que a aprendizagem deve acontecer de forma interessante e prazerosa e um recurso que possibilita isso são os materiais lúdicos. (FERREIRA, 2008).

Além desses conceitos citados por Ferreira, podemos trabalhar outros como os tipos de polígonos que compõem o Tangram, congruência de triângulos, área, perímetro e frações, dentre outros. Ao trabalharmos com Tangram e geometria, conseguimos envolver teoria e prática em sala de aula e promover a interação entre os alunos de forma prazerosa e divertida. Conforme afirma Vergnaud (1993) citado por Berger (2013, p. 62) “é através das experiências que os alunos constroem o conhecimento”.

4 O EXPERIMENTO

Neste capítulo apresentamos a sequência didática, descrevemos sua aplicação e avaliamos os desdobramentos e os efeitos produzidos na aprendizagem pelos sujeitos participantes dos conceitos geométricos abordados. Especificamos o local onde as atividades foram desenvolvidas, o número de participantes e as atividades desenvolvidas. Além disso, descrevemos detalhes de fatos ocorridos durante a execução dessas atividades e avaliamos os resultados obtidos.

4.1 O contexto do experimento

O projeto foi implantado numa escola estadual que está situada na cidade de Rio Largo. A cidade pertence ao Estado de Alagoas, localizada a 27 km da capital, Maceió, é a segunda cidade mais populosa da Região Metropolitana de Maceió, e a terceira maior do Estado, estimada em 75.267 habitantes, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2014 e tem uma área de 309,425Km^2 .

A cidade é banhada pelo Rio Mundaú, o nome Rio Largo originou-se de um engenho de açúcar existente no local onde o rio apresenta maior largura.

Essa escola estadual atende aos alunos do próprio bairro e de alguns bairros vizinhos. Também possui vários alunos do município de Maceió. Ela foi escolhida por ser aquela na qual a pesquisadora trabalha e, por este motivo, facilitaria a aceitação do trabalho, tanto pela direção quanto pelos pais e alunos.

A escola tem carência de algumas instalações. A quadra esportiva, por exemplo, só tem o terreno e os laboratórios de química, física, biologia e informática não foram implantados até o momento.

4.2 Instrumentos de coleta de dados

Com o objetivo de saber em que nível de conhecimento geométrico cada aluno se encontrava, foi utilizado o teste dos níveis Van Hiele (Anexo A), relatado no capítulo I. Esse teste contém 15 questões que envolvem conhecimentos básicos de geometria. O teste foi aplicado no início e no último dia das atividades, respectivamente denominados de pré-teste e pós-teste.

Além desse teste, foram utilizadas as atividades VH1, VH2, VH3, VH4 E VH5, VH6 E VH9 propostas por Nasser e Sant’anna (2010), baseada na apostila do projeto Fundão:

“Geometria segundo a teoria de Van Hiele”, para o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico.

Além das tarefas ali sugeridas, incluímos o geoplano, descrito no Capítulo 2 desta dissertação. Também foi aplicado um teste elaborado pela autora desta dissertação contendo 10 questões sobre áreas e perímetros e a utilização do teorema de Pick (Anexo C).

4.3 Proposta de atividades

Após realizar uma pesquisa bibliográfica abrangendo diversos trabalhos tratando da teoria Van Hiele e da aplicação de materiais manipulativos como recursos didáticos, foi elaborada uma proposta de sequência didática desenvolvida com alunos do 9º ano no qual a pesquisadora trabalha.

Foi apresentada a proposta para a direção da escola no começo do ano letivo (2015), que autorizou a realização da pesquisa com esses alunos. Os alunos foram informados oralmente que iriam participar de um projeto a ser desenvolvido pela pesquisadora sobre geometria, sua data, horários, objetivos e quais instrumentos seriam utilizados.

Deve-se ressaltar que no final da pesquisa só foram considerados os alunos que participaram de todos os encontros. Se algum sujeito faltou a uma ou outra atividade, automaticamente eles eram retirados, mas esta dispensa não era divulgada para os alunos, a fim de que continuassem motivados e aprendendo.

O período referente à experimentação foi planejado para ser desenvolvido em 4 semanas e meia (cada semana com 4 aulas de 50 minutos). É bom ressaltar que houve situações externas que interferiram no período de coleta de dados, como por exemplo paralizações e greve na rede estadual de ensino, problemas familiares de alguns alunos, problemas de saúde e o nascimento da filha, antes do tempo, da pesquisadora.

Segundo Araújo (2012, p. 71), esses fatores externos à ação investigativa também interferem no processo de ensino-aprendizagem dos sujeitos, porém, cabe ao professor-mediador coordenar/mediar esforços no sentido de continuar o processo de investigação considerando as especificidades de cada situação ou as singularidades dos sujeitos.

4.4 Sujeitos participantes

A amostra do presente estudo foi composta por 41 alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola estadual, com a faixa etária entre 13 a 24 anos de idade dos quais

37 alunos têm idade menor ou igual a 15 anos, sendo 19 do sexo feminino e 22 do sexo masculino.

4.5 Atividades desenvolvidas

Para a execução do projeto foram necessárias 20 aulas de 50 min, com encontro de 1h e 40min. Com exceção do 1º e do 11º encontro que foram de 50 min, os encontros se deram nos meses de outubro, novembro e dezembro de 2015.

Quadro 3 - Atividades desenvolvidas por encontro, objetivo e descrição sucinta

ENCONTRO	ATIVIDADES	OBJETIVOS	DESCRIÇÃO
1º	Teste dos níveis de van Hiele (Anexo A) pré-teste	Averiguar o nível de pensamento geométrico de cada sujeito.	Teste contendo 15 questões.
2º	Atividade VH1(p.)	Diferenciar figura geométrica plana de sólido geométrico e observar as semelhanças entre os pares de figuras e de sólidos.	12 pares de figuras, nas quais deveriam ser cortados e observados os elementos comuns e as diferenças.
3º	Atividade VH2 (p.)	Diferenciar figura geométrica plana de sólido geométrico e observar as semelhanças entre os pares de figuras e de sólidos.	12 pares de figuras, nas quais deveriam ser observados os elementos comuns e as diferenças.
4º	Atividade VH3 (p.)	Classificar os quadriláteros	Figuras recortadas: 4 quadrados, 4 retângulos, 4 paralelogramos, 4 quadriláteros, quaisquer, para serem agrupados conforme as características comuns.
5º	Atividade VH4 (p.)	Identificar propriedades características dos diferentes tipos de quadriláteros.	5 cartazes: quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios e tiras contendo as propriedades, que deveriam ser coladas em cada cartaz.
6º	Atividade VH5 (p.)	Identificar que alguns tipos de quadriláteros têm propriedades em comum.	Representar graficamente a relação entre os grupos de quadriláteros, através de um diagrama.
6º	Atividade VH6	Concluir que há propriedades mínimas para descrever os diferentes tipos de quadriláteros	Com os cartazes dos grupos de quadriláteros, retirar as tiras com propriedades redundantes sem prejudicar a descrição.
7º	Atividade desenvolvida pela pesquisadora	Apresentação da geometria no cotidiano	Arrumação da sala e apresentar para o corpo docente e discente da escola sobre a geometria no cotidiano.
8º	Atividade VH9	Reconhecer as figuras geométricas que fazem parte do Tangram	Construção do Tangram com cartolina e construção de figuras usando suas peças.
9º	Atividades com o Tangram (Anexo J)	Reconhecer que mesmo construindo outras figuras sempre há conservação de área.	Construir figuras e usando a régua calcular o perímetro e áreas (atividade anexo J)
10º	Atividade elaborada pela pesquisadora	Investigar as contribuições do material concreto (geoplano)	Construção de figuras geométricas e calcular área pela fórmula de Pick
11º	Teste dos níveis de Van Hiele. Pós teste.	Averiguar o nível de pensamento geométrico de cada sujeito.	Teste contendo 15 questões.

Fonte: Autora, 2016 – Adaptado de VIEIRA, 2010.

4.5.1 Primeiro encontro

Objetivo: Investigar o nível de pensamento geométrico de cada participante, através do teste dos níveis Van Hiele (Anexo A).

Desenvolvimento:

Nesse primeiro encontro estiveram presentes 41 sujeitos da pesquisa, havendo inicialmente uma conversa entre a pesquisadora e os sujeitos da pesquisa em relação a como se daria o desenvolvimento do projeto, mostrando os objetivos gerais e específicos, pedindo para eles a colaboração e o respeito entre os participantes e a pesquisadora para que em todos os encontros prevalecesse a regra de boa convivência.

Logo após esse momento, foi aplicado o teste dos níveis Van Hiele (Anexo A) aos participantes. Entregando a cada sujeito da pesquisa uma folha por vez, ou seja, só era entregue outra folha quando o aluno terminasse de resolver a anterior, já que o referido teste tem 3 folhas contendo em cada uma destas 5 questões, totalizando 15 questões, sendo 9 delas objetivas e 6 discursivas. Não foi entregue todas as folhas ao mesmo tempo, para que as questões dos testes mais avançados não ajudassem a solucionar os mais simples.

Convém ressaltar que esse teste contém questões que envolvem conhecimentos básicos em geometria e foi utilizado com o objetivo de investigar o nível de pensamento geométrico de cada participante. Ao analisar os resultados do teste Van Hiele, seria determinar o nível de conhecimento geométrico e que esses alunos se encontravam.

Ao analisar os resultados do teste Van Hiele, a pesquisadora notou que a maioria dos sujeitos da pesquisa apresentava níveis de pensamento abaixo do esperado para o 9º ano do ensino fundamental II. Então foram desenvolvidas atividades para proporcionar o avanço nos níveis.

Para amenizar essa discrepância de níveis, foram selecionadas e aplicadas 7 atividades para o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico elaborado por Nasser e Sant’anna (2010, p.13-23 e 27), fundamentada nos trabalhos de Dina Van Hiele-Geoldof e outros artigos. As atividades desenvolvidas para o avanço se intitulam: VH1 (Anexo B), VH2 (Anexo C), VH3 (Anexo D), VH4 (Anexo E), VH5, VH6 e VH9 (Anexo J). Essas atividades foram escolhidas objetivando a tornar o aluno apto a:

- Observar semelhanças e diferenças entre pares de figuras planas e sólidos;
- Identificar propriedades características dos diferentes tipos de quadriláteros;
- Observar propriedades comuns a alguns tipos de quadriláteros;

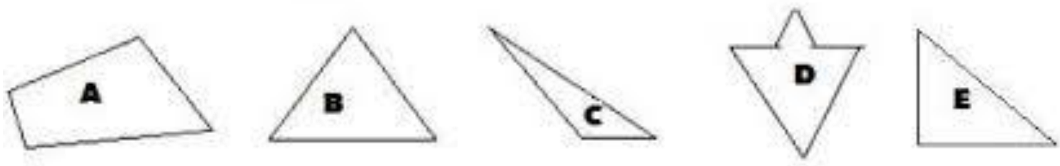
- Concluir que cada tipo de quadrilátero pode ser definido por um conjunto mínimo de propriedades;

Para cada atividade foi utilizado um encontro com duas aulas seguidas de 50 minutos. O sétimo encontro a princípio não fazia parte da proposta para que os sujeitos da pesquisa avançassem para um nível mais elevado. Mas se fez necessário o acréscimo.

Foram analisadas cada uma das questões com base nos níveis de Van Hiele, e foi identificado em qual nível de pensamento geométrico cada aluno se encontrava.

Questão 1: Assinale o(s) triangulo(s):

Figura 23 - Figuras presentes da questão 1 do teste dos níveis de Van Hiele.



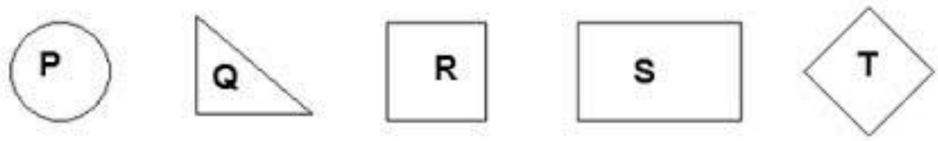
Fonte: NASSER; SANT'ANNA 2010.

Resultados da primeira questão:

Nessa questão, 21 sujeitos da pesquisa marcaram as alternativas B, C e E, ou seja, acertaram a questão. Já 8 alunos só consideraram triângulo a letra B, desconsiderando C e E. Mais 3 sujeitos da pesquisa além de marcar as alternativas B, C, E marcaram também a letra D como sendo triângulo. Outros 6 marcaram as alternativas B e E, 2 alunos marcaram B e C, e apenas um marcou a leta A como sendo triângulo.

Questão 2: Assinale o(s) quadrado(s):

Figura 24 - Figuras presentes da questão 2 do teste dos níveis de Van Hiele.



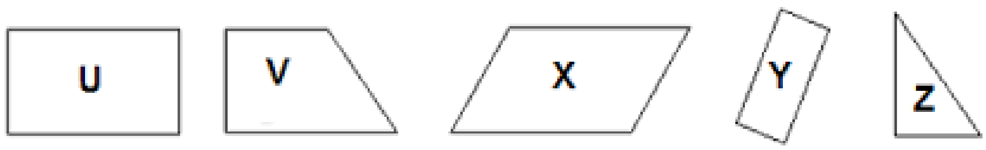
Fonte: NASSER; SANT'ANNA 2010

Resultados da segunda questão:

Nessa segunda questão todos os sujeitos da pesquisa (41 alunos) assinalaram R como sendo quadrado, desses, 20 perceberam que T também é um quadrado e 5 marcaram também S como sendo um quadrado. Nenhum dos sujeitos da pesquisa marcaram P e Q.

Questão 3: Assinale o(s) retângulo(s):

Figura 25 - Figuras presentes da questão 3 do teste dos níveis de Van Hiele.



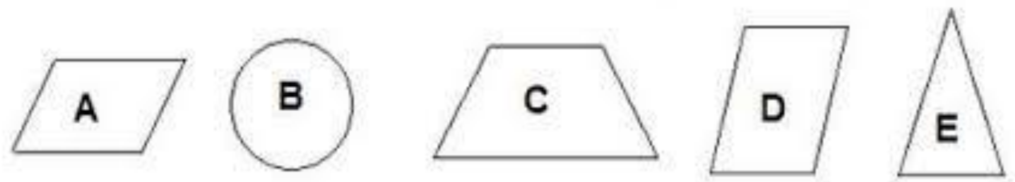
Fonte: NASSER; SANT’ANNA 2010

Resultado da terceira questão:

21 sujeitos da pesquisa acertaram essa questão, marcando as alternativas U e Y como sendo retângulo. 11 alunos só marcaram a alternativa U, 5 marcaram X, 1 marcou V e 3 marcaram a alternativa Z.

Questão 4: Assinale o(s) paralelogramo(s):

Figura 26 - Figuras presentes da questão 4 do teste dos níveis de Van Hiele.



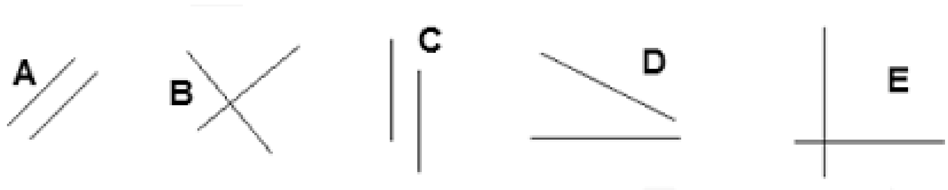
Fonte: NASSER; SANT’ANNA 2010.

Resultado da quarta questão:

Nessa questão, apenas 6 alunos acertaram marcando A e D, 5 além de marcar A e D marcaram também C. Outros 11 sujeitos da pesquisa marcaram apenas A como sendo paralelogramo, 9 marcaram A e também C. Ninguém marcou B ou E.

Questão 5: Assinale os pares de retas paralelas:

Figura 27 - Figuras presentes da questão 5 do teste dos níveis de Van Hiele.



Fonte: NASSER; SANT’ANNA 2010.

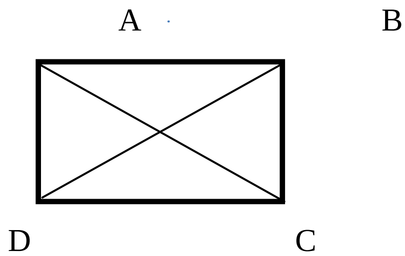
Resultado da quinta questão:

Na quinta questão, 14 sujeitos da pesquisa acertaram os pares de retas paralelas, marcando A e C, 6 marcaram apenas o par de retas A, esquecendo de C. Outros 21 erraram completamente a questão, marcando B, D ou E como respostas.

Questão 6: No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

Figura 28 - Figura presente da questão 6 do teste dos níveis de Van Hiele

a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada de NASSER; SANT’ANNA 2010.

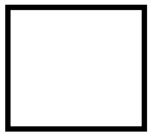
Resultado da sexta questão:

Nessa questão, 5 sujeitos da pesquisa marcaram as alternativas (a), (b) e (c) acertando a questão, 7 marcaram apenas (a) e (b), 4 marcaram apenas (a) e (c), 3 marcaram só (a) e 8 sujeitos da pesquisa marcaram só (c). Mais13 alunos marcaram a alternativa (d) e apenas 1 marcou a alternativa (e) como sendo todas verdadeiras.

Questão 7: Dê 3 propriedades dos quadrados:

Figura 29- Figura presente da questão 7 do teste dos níveis de Van Hiele

1- ....
2- ....
3- ....



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada de NASSER; SANT'ANNA 2010.

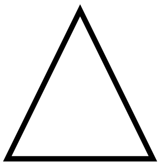
Resultado da sétima questão:

Na questão 7, 22 sujeitos da pesquisa escreveram que um quadrado tem 4 lados iguais, desses, 6 escreveram que um quadrado também tem quatro ângulos retos, 1 aluno além dessas propriedades, citou que as diagonais são iguais e outro escreveu que os lados são paralelos, mas 16 sujeitos da pesquisa não escreveram nada.

Questão 8: Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre ângulos do triângulo isósceles:

Figura 30 - Figura presente da questão 8 do teste dos níveis de Van Hiele

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.
b) Um dos ângulos mede 90º.
c) Dois ângulos têm a mesma medida.
d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada de NASSER; SANT'ANNA 2010.

Resultado da oitava questão:

Nessa questão, 19 alunos acertaram a questão marcando (c) como a única alternativa correta, 10 alunos marcaram a letra (a), 7 marcaram a letra (b), 4 a letra (d) e apenas 1 marcou a alternativa (e).

Questão 9: Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

Figura 31- Figura presente da questão 9 do teste dos níveis de Van Hiele

1- ....
2- ....
3- ....

Fonte: Autora, 2016- Adaptada de NASSER; SANT'ANNA, 2010

Resultado da nona questão:

Nessa questão, dois sujeitos da pesquisa escreveram que os paralelogramos têm os lados paralelos e um deles escreveu que, além disso, ele é um quadrilátero. Apenas 1 sujeito da pesquisa disse que as diagonais do paralelogramo são diferentes. 37 não responderam.

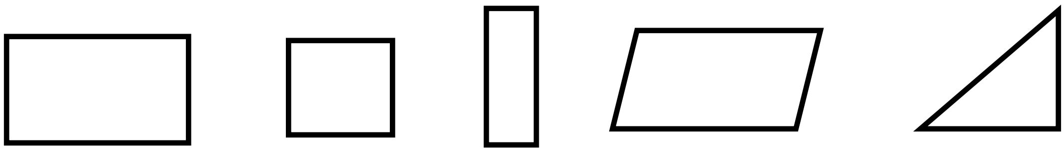
Questão 10: Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Resultado da décima questão:

Na questão 10, 9 sujeitos da pesquisa acertaram essa questão, 8 deles responderam e desenharam um paralelogramo e 1 desenhou um trapézio retângulo. Outros 10 sujeitos não entenderam a pergunta e responderam entre quadrados ou retângulos. Mais 12 deixaram em branco.

Questão 11: Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:

Figura 32 - Figura presente da questão 11 do teste dos níveis de Van Hiele



Fonte: Autora, 2016 - Adaptada DE NASSER; SANT'ANNA, 2010

Resultado da decima primeira questão:

Na questão 11, 37 sujeitos da pesquisa (do total de 41) assinalaram o primeiro como sendo retângulo. Desses, 30 assinalaram também o terceiro como sendo retângulo e 10 desses sujeitos da pesquisa assinalaram também o paralelogramo. Mais 3 alunos não assinalaram nenhuma figura, 1 aluno assinalou apenas o paralelogramo como sendo retângulo, mas nenhum dos 41 sujeitos da pesquisa considerou o quadrado como sendo retângulo.

Questão 12: Os quatros ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? ....
b) Por quê? ....
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ....

Resultado da decima segunda questão:

Nessa questão, 5 sujeitos da pesquisa responderam corretamente, dizendo não para alternativa (a) e falando que o retângulo também poderia ser esse quadrilátero que tem todos os ângulos iguais. 3 alunos não responderam. Outros 33 sujeitos responderam sim para a alternativa (a) e escreveram que o quadrado tem lados iguais.

Questão 13: Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? ....
Por quê? ....

Resultado da décima terceira questão:

Nessa questão, 14 sujeitos da pesquisa escreveram sim e 17 responderam não, para a primeira pergunta e nenhum deles soube responder o porquê. Mais 10 sujeitos da pesquisa não responderam nada.

Questão 14: Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.
(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c) I e II não podem ser ambas verdadeiras
d) I e II não podem ser ambas falsas.
e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

Resultado da décima quarta questão:

Na questão 14, 19 sujeitos da pesquisa (em 41) marcaram a opção correta (c), 21 sujeitos da pesquisa erraram essa questão, e 1 sujeito da pesquisa não marcou nenhuma opção.

Questão 15: Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

a) Qualquer propriedade dos quadrados é válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Resultado da decima quinta questão:

Referente a essa questão, apenas 4 sujeitos da pesquisa (em 41) acertaram a opção correta (c), os outros 37 sujeitos da pesquisa erraram.

Foi analisado pela pesquisadora que grande parte dos sujeitos da pesquisa tinham um vocabulário geométrico pouco desenvolvido. Nas questões que tinham o porquê, por exemplo, eles não sabiam explicar.

4.5.1.1 Análise do teste dos níveis de Van Hiele

A seguir foi elaborada uma tabela para verificar em quais níveis de pensamento geométrico se encontrava cada sujeito da pesquisa no início dos trabalhos. De acordo com os seguintes critérios:

- Nível Básico (0) – Para que os sujeitos da pesquisa possam atingir esse nível é necessário eles acertarem no mínimo três questões referente ás questões de 1 a 5.
- Nível 1 – as questões de 6 a 10 se referem a este nível. Para o sujeito atingir este nível é necessário que ele acerte no mínimo três destas questões.
- Nível 2 – as questões de 11 a 15 referem-se ao nível 2, e para que o sujeito venha atingi-lo é necessário que ele acerte no mínimo três destas questões.

Quadro 4 - Nível de pensamento geométrico dos alunos no início da pesquisa

Q / S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
A1			X					X								-
A2			X	X		X								X		-
A3		X	X	X								X				0
A4		X	X					X						X		-
A5	X		X		X		X			X					X	0
A6		X	X					X						X		-
A7	X															-
A8	X	X		X			X	X						X		0
A9		X	X													-
A10	X	X	X			X								X		0
A11	X		X		X	X		X		X				X		1
A12			X			X										-
A13	X	X	X					X						X		0
A14	X	X	X	X												0
A15		X						X						X		-
A16		X	X													-
A17	X		X		X					X				X		0
A18												X		X		-
A19								X								-
A20														X		-
A21	X	X	X		X			X								0
A22		X			X							X			X	-
A23	X	X														-
A24	X	X	X		X		X	X		X						1
A25	X	X	X		X	X		X		X					X	1
A26														X		-
A27								X		X						-
A28	X	X						X						X		-
A29		X		X	X					X				X		0
A30		X	X							X				X		-
A31	X		X		X		X	X								0
A32	X							X								-
A33					X			X		X				X		-
A34														X	X	-
A35	X	X	X		X											0
A36																-
A37																-
A38	X			X	X										X	0
A39	X		X	X	X									X		0
A40								X		X		X				-
A41		X			X			X								-

Fonte: Autora, 2016 – Adaptado de VIEIRA, 2010.

Quadro 5 - Legenda

X	Indica que o sujeito acertou a questão.
	Indica que o sujeito errou a questão.
-	Indica que o sujeito não atingiu nenhum dos níveis.
0	Indica que o sujeito atingiu o nível básico (0).
1	Indica que o sujeito atingiu o nível 1.
2	Indica que o sujeito atingiu o nível 2.

Fonte: Autora, 2016– Adaptado de VIEIRA, 2010.

Analisado o quadro 4, contatamos que 25 alunos (em 41) não atingiram nenhum nível, 13 alunos atingiram o nível 0 (básico), 3 alunos atingiram o nível 1 e nenhum aluno atingiu o nível 2. Consequentemente o resultado demonstrou que os sujeitos da pesquisa estavam com o nível de pensamento geométrico muito baixo. Foram desenvolvidas nos encontros seguintes, atividades que pudessem aumentar o nível de conhecimento geométrico dos participantes.

4.5.2 Segundo encontro

Neste segundo encontro estiveram presente todos os 41 sujeitos da pesquisa. Foi realizada a atividade VH1 (Anexo B), com os seguintes objetivos:

O aluno deverá diferenciar figura geométrica plana de sólido geométrico;

O aluno deverá observar as semelhanças e as diferenças entre os pares de figuras e de sólidos.

Desenvolvimento:

Ao iniciarmos esse segundo encontro, a sala foi dividida em equipes de dois e uma equipe de três sujeitos da pesquisa, cada equipe recebeu duas tesouras e uma folha com 12 pares de figuras, cada par contendo a mesma numeração. A autora também levou para a sala de aula algumas caixas de sapatos e de perfumes que representassem um paralelepípedo, levou também alguns dados e caixas cúbicas de cosméticos, além disso levou algumas pirâmides triangulares confeccionadas com cartolina guache.

Foi pedido para os alunos cortarem os pares de figuras da atividade VH1. Logo após, foram entregues para cada equipe três tipos de sólidos geométricos (um cubo, um paralelepípedo e uma pirâmide triangular), para que eles observassem. A seguir a autora entregou para cada equipe uma folha de registro (Anexo B) onde havia a numeração dos pares de figuras observados na atividade VH1, que deveria ser preenchida por cada equipe, anotando os elementos em comum e as diferenças notadas em cada par da atividade VH1. Os sujeitos da pesquisa passaram muito tempo recortando as figuras, utilizando as duas aulas para concluir a atividade.

A pesquisadora recolheu todos os trabalhos para fazer os estudos dos resultados em casa, junto com a próxima atividade.

4.5.3 Terceiro encontro

No terceiro encontro estiveram presentes todos os 41 sujeitos participantes.

Nesse encontro foi realizada a atividade VH2, com os seguintes objetivos: O aluno deverá diferenciar figuras geométricas planas de sólidos geométricos; O aluno deverá observar as semelhanças e as diferenças entre os pares de figuras e de sólidos.

Note que os objetivos das atividades VH1 e VH2 são os mesmos, semelhança também percebida pelos sujeitos da pesquisa, mas na atividade VH2 os alunos não manuseiam as figuras e os sólidos como fizeram na atividade VH1, eles trabalham apenas com as representações das figuras e dos sólidos.

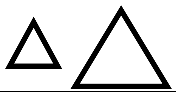
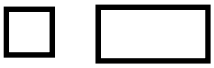
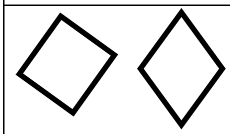
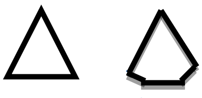
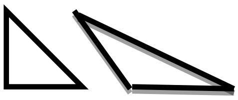
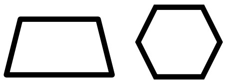
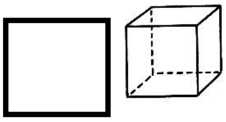
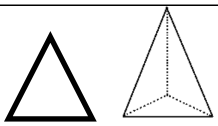
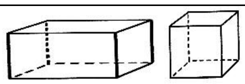
Desenvolvimento:

Foi entregue para cada sujeito da pesquisa uma folha de registro – Atividade VH2 (Anexo C), onde encontrava as numerações e os pares de figuras geométricas, para que, depois de observados, os sujeitos da pesquisa relatassem os elementos em comum e as diferenças entre elas.

Ao terminar esta atividade, a pesquisadora fez um quadro com as respostas dos alunos: eles iriam falando enquanto ela copiava no quadro os elementos que eles notaram que eram em comum e as diferenças. Foi percebido que a grande maioria não tinha um vocabulário geométrico adequado, não tinham noção de paralelismo, lados e ângulos opostos, ângulos agudos e nem sabiam o que eram ângulos obtusos.

Abaixo encontram-se os registros das respostas dadas pela maioria dos alunos, escritas pela autora da forma que os sujeitos da pesquisa relataram as atividades VH1 e VH2.

Quadro 6- Respostas dadas pelos sujeitos da pesquisa às atividades VH1 e VH2.

Figuras que foram recortadas	Pares de figuras	Elementos em comum	Diferença
	1	Três lados, três ângulos, são triângulos.	Um é grande e o outro pequeno.
	2	Quatro lados, quatro ângulos retos e lados paralelos.	Um é quadrado e outro é retângulo. Um tem todos os lados iguais e o outro não.
	3	Quatro lados, quatro ângulos, ângulos opostos iguais, lados opostos iguais.	Um tem os quatros ângulos retos e o outro não tem ângulos retos.
	4	Quatro lados e quatro ângulos.	Um tem os lados opostos paralelos e o outro só tem um oposto lado paralelo.
	5	Quatro lados iguais, quatro ângulos, lados opostos paralelos, ângulos opostos iguais.	Um é um quadrado e o outro é um losango. Quatro ângulos reto e o outro não tem ângulo reto.
	6	Um ângulo igual.	Uma têm três lados e a outra têm cinco.
	7	São triângulos, três lados e três ângulos.	Um é reto e outro é inclinado.
	8	Têm um lado oposto paralelo.	Um têm quatro lados e o outro têm seis.
	9	Quatro lados, quatro ângulos, lados paralelos e ângulos opostos iguais.	Um têm quatro lados iguais e o outro não.
	10	Face quadrada e têm ângulos de 90º.	Uma é figura plana e a outra é espacial.
	11	Face triangular e ângulos agudos.	Uma é figura plana e a outra é espacial.
	12	Figuras espacial, seis faces.	Uma têm todas as faces iguais e a outra não.

Fonte: Autora 2016 – Adaptado de VIEIRA, 2010.

4.5.4 Quarto encontro

Nesse quarto encontro estiveram presentes 40 sujeitos. Um sujeito faltou alegando que tinha ido ao médico.

Nesse encontro foi realizada a atividade VH3 com o seguinte objetivo: o aluno deverá classificar os quadriláteros.

Desenvolvimento:

Para cada sujeito da pesquisa foi entregue a atividade VH3 (Anexo D) com 24 quadriláteros (4 quadrados, 4 retângulos, 4 paralelogramos, 4 losangos, 4 trapézios e 4 quadriláteros quaisquer), uma tesoura, cola, régua e três folhas, e em cada folha constavam escrito os nomes de dois quadriláteros, exemplo: 4 quadrados e no verso da mesma folha escrito 4 retângulos.

Foi pedido aos estudantes que cortassem os 24 quadriláteros e colassem cada quadrilátero em seu determinado grupo.

Alguns tiveram dificuldades em separar os paralelogramos dos losangos, então pedimos para eles usarem a régua e notar que os losangos possuem todos os lados iguais. Ao terminar a atividade VH3 (Anexo D), os alunos guardaram-nas para trazer no encontro seguinte.

4.5.5 Quinto encontro

Neste quinto encontro estiveram presentes todos os 41 sujeitos participantes.

Neste encontro foi desenvolvida a atividade VH4 – listando propriedades (Anexo E) com o seguinte objetivo: o aluno deverá ser capaz de identificar propriedades características dos diferentes tipos de quadriláteros.

Desenvolvimento:

Para esta atividade foram utilizados 5 cartazes, um para cada tipo de quadrilátero (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios) classificado na atividade anterior. A autora levou para sala 4 tipos de cada quadrilátero de diversos tamanhos já recortados, levou também tiras de cartolina com os nomes dos quadriláteros e com as suas propriedades em número suficiente para os cinco cartazes, ou seja: cinco tiras com o nome “4 lados”, e mais cinco tiras com o nome “4 ângulos”, duas com o nome “4 ângulos retos”, e mais duas tiras escritas “4 lados congruentes”, quatro tiras escritas “lados opostos congruentes” e mais 4 com o nome “ângulos opostos congruentes” e apenas uma tira escrita "lados opostos paralelos". Também foram levadas tiras em branco para completar os cartazes com as propriedades que se fizessem necessárias na hora da aplicação da atividade.

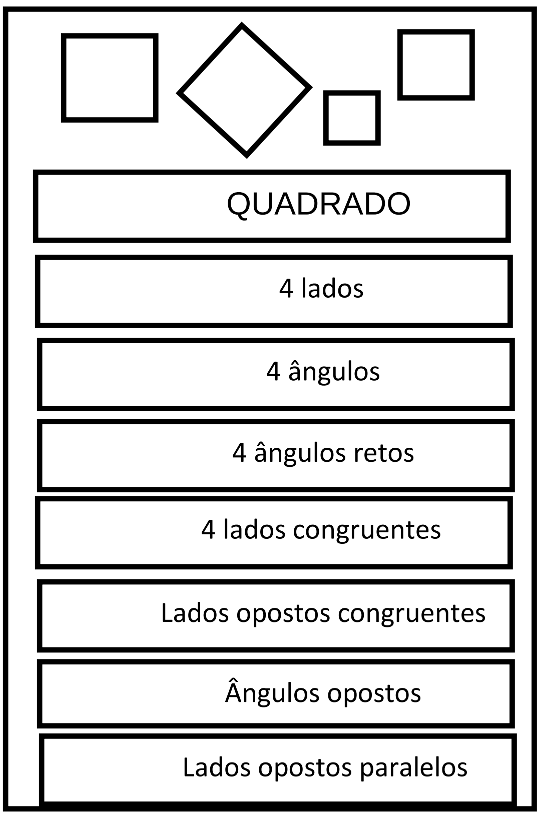
Com a ajuda do estagiário, que esteve presente em todos os encontros, a autora colocou no quadro o primeiro cartaz, que foi o dos quadrados, e perguntou à turma qual era o nome dado aos quadriláteros que apareciam no cartaz. Todos os alunos responderam sem nenhuma dificuldade. Logo após, pedimos para os sujeitos se dividirem em equipes de 2 ou 3 alunos e entregamos para cada uma dessas equipes as tiras com as propriedades para que após discutirem colassem-nas na atividade VH3 que eles fizeram no encontro anterior. Muitos alunos sentiram dificuldades na palavra "congruentes", então foi explicado que poderia ser substituída pela palavra "igual". Após todas as equipes terminarem, a autora foi colando as tiras no quadro dos quadrados de acordo com as propriedades que os alunos mencionavam.

O mesmo procedimento descrito acima foi feito com os outros quadriláteros na ordem a seguir: retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios.

Os alunos sentiram a necessidade de fazer mais quatro tiras (3 escritos lados opostos paralelos e 1 escrita um par de lados opostos paralelos).

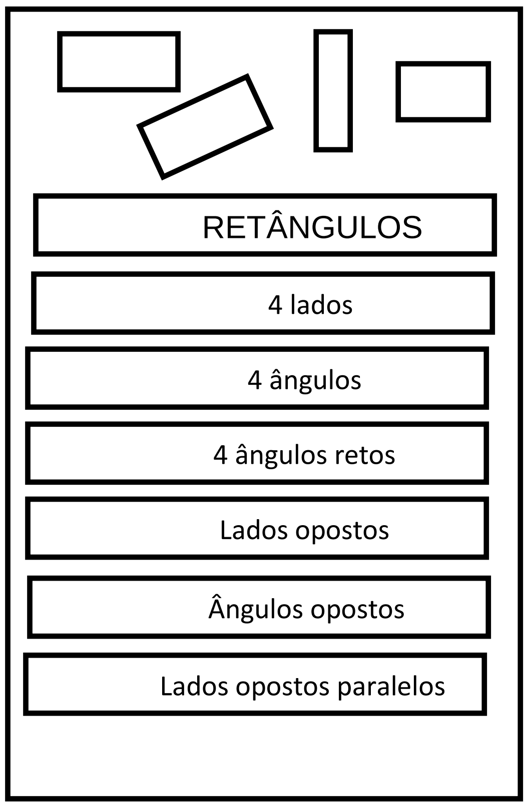
A seguir estão os resultados da atividade VH4 confeccionados pelos alunos.

Figura 33 - Cartaz nº 1, referente à atividade VH4



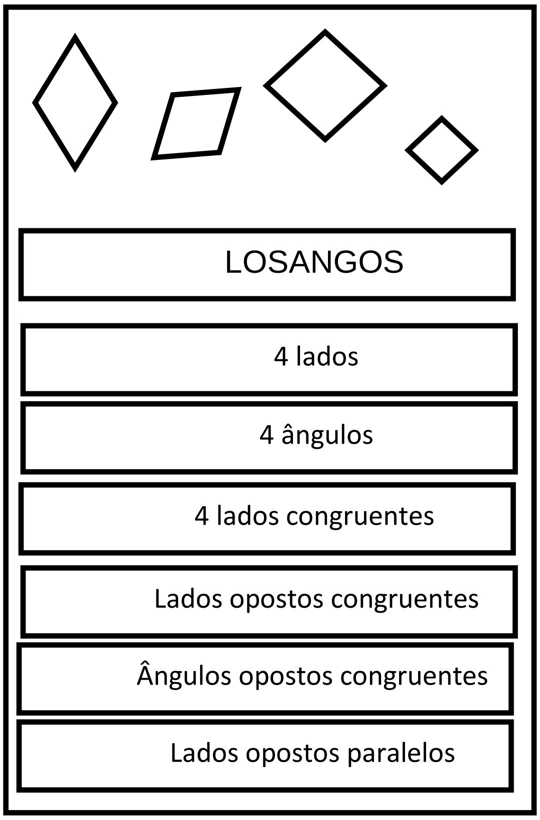
Fonte: Autora, 2016.

Figura 34- cartaz nº 2, referente atividade VH4



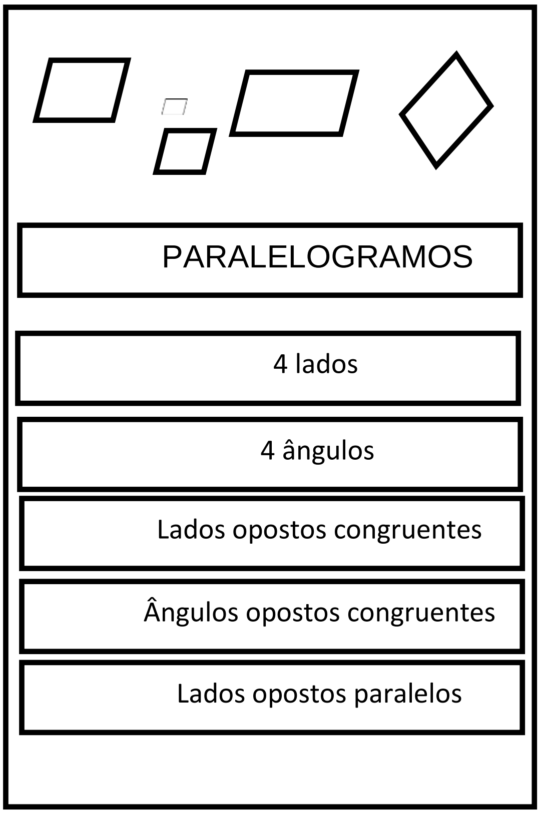
Fonte: Autora, 2016.

Figura 35 - Cartaz nº 3, referente à atividade VH4



Fonte: Autora, 2016.

Figura 36- cartaz nº 4, referente atividade VH4



Fonte: Autora, 2016.

Figura 37 - Cartaz nº 5, referente à atividade VH4

Fonte: Autora, 2016.

Na realização da atividade VH4 (Anexo E), foi notado que alguns sujeitos tiveram dificuldades para identificar algumas propriedades dos quadriláteros analisados, mas todas as equipes conseguiram satisfatoriamente concluir a atividade.

4.5.6 Sexto encontro

Neste sexto encontro, foram realizadas duas atividades, a saber: Atividade VH5 e Atividade VH6, cada uma delas será descrita abaixo.

Atividade VH5 – Inclusão de Classes

Essa atividade tem como objetivo: o aluno deverá observar que alguns tipos de quadriláteros têm propriedades em comum

Desenvolvimento:

A pesquisadora, com a ajuda do estagiário, colocou todos os cinco cartazes da atividade VH4 no quadro, um ao lado do outro, com as propriedades pedindo para a turma observá-las. Logo após, a pesquisadora fez com que os alunos atentassem para os grupos dos quadrados e dos retângulos e começou a instigá-los a perceber que o quadrado fazia parte do grupo dos retângulos. Ou seja, que o quadrado é um tipo especial de retângulos. Os sujeitos da pesquisa perceberam que todas as propriedades dos retângulos também são do quadrado e que a única diferença entre eles é que todos os lados do quadrado têm a mesma medida.

Depois de algumas reflexões, foi percebido que o quadrado pode ser também um tipo de losango com os ângulos opostos iguais a 90º. Os sujeitos da pesquisa ficaram atentos para o fato de algumas propriedades estarem presentes em vários cartazes ao mesmo tempo, então foi percebido que tanto o losango quanto o retângulo são um tipo de paralelogramo. O mais complicado para os sujeitos da pesquisa foi aceitarem que os paralelogramos faziam parte do grupo dos trapézios.

Foi então que a pesquisadora junto com o estagiário começou a discutir se realmente os paralelogramos faziam parte do grupo dos trapézios. A pesquisadora pediu à turma que observasse os cinco cartazes mais uma vez, principalmente nas regras dos trapézios.

No trabalho de Vieira (2010, p. 84) foram discutidas duas definições para o trapézio;

1ª) O trapézio é o quadrilátero que possui um par de lados paralelos.

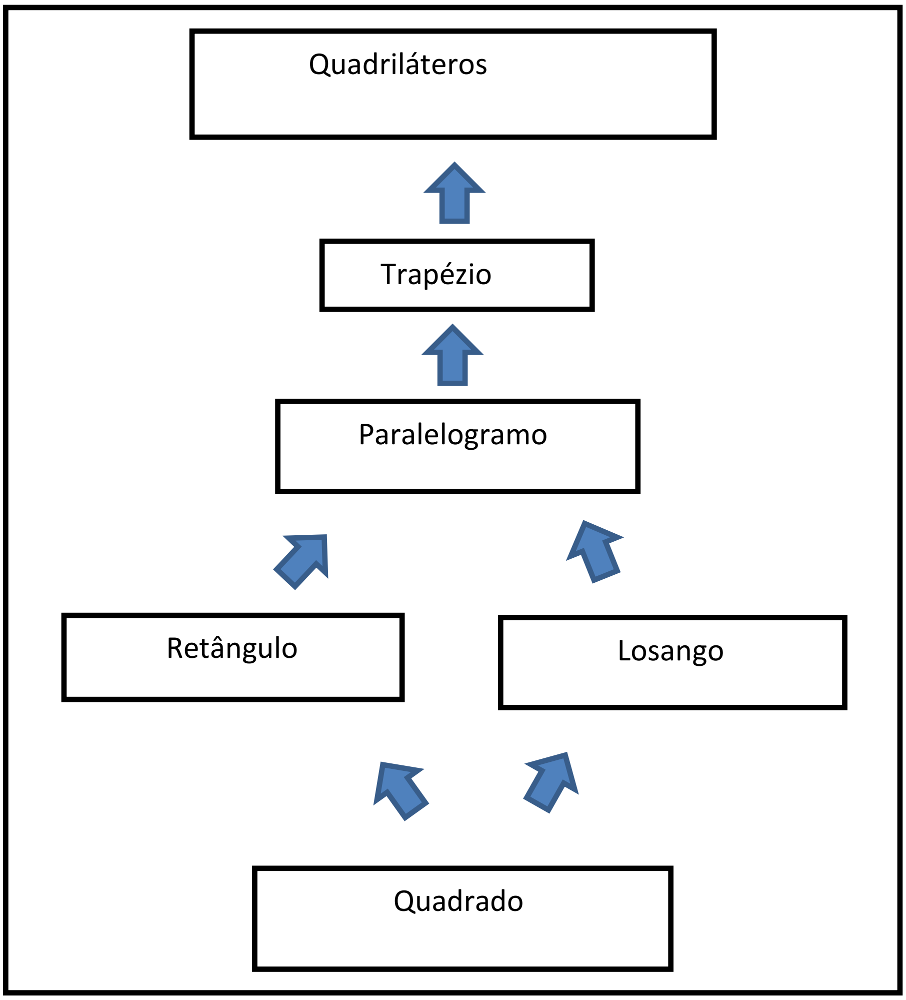
2ª) O trapézio é o quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos.

> A diferença primordial entre as duas definições é a seguinte: na primeira, todos os paralelogramos são incluídos no conjunto de trapézios, pois o fato de possuírem dois pares de lados paralelos não desmente o fato de possuir um par de lados paralelos. Na segunda, os paralelogramos não são trapézios, pois ao possuírem dois pares de lados paralelos, contrariam a definição, que afirma que o trapézio só pode ter um par de lados paralelos. (VIEIRA, 2010, p. 84).

A pesquisadora escreveu no quadro as duas definições dadas para o trapézio. Então, junto com a turma e o estagiário, decidiram adotar a primeira definição para poder incluir os paralelogramos no grupo dos trapézios e colocar em todos os cinco cartazes essa definição.

Após essa compreensão, a pesquisadora pediu para a turma representar graficamente a relação entre os grupos de quadriláteros, através de um desenho ou diagrama. Ao recolher os desenhos da turma, a pesquisadora apresentou dois gráficos para representar essas inclusões.

Figura 38- Gráfico inclusão de classes 1



Fonte: Autora, 2016 - adaptado de Nasser e Sant'anna, 2010.

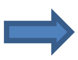
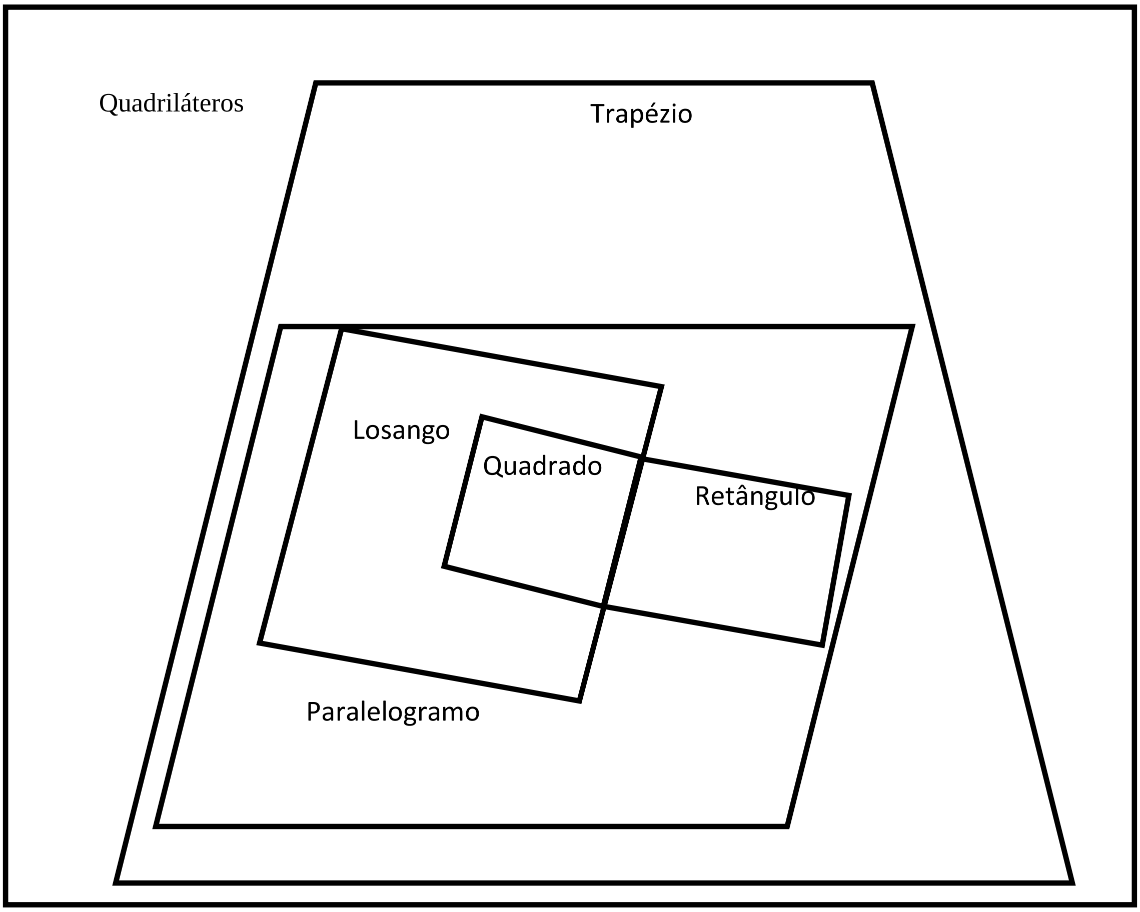
 significa: "é um tipo especial de"

Figura 39 - Gráfico inclusão de classes 2



Fonte: Autora, 2016 - Adaptado de NASSER; SANT'ANNA, 2010.

Ao concluir essa atividade, foi proposta para turma a tarefa seguinte.

Atividade VH6 – Propriedades Mínimas

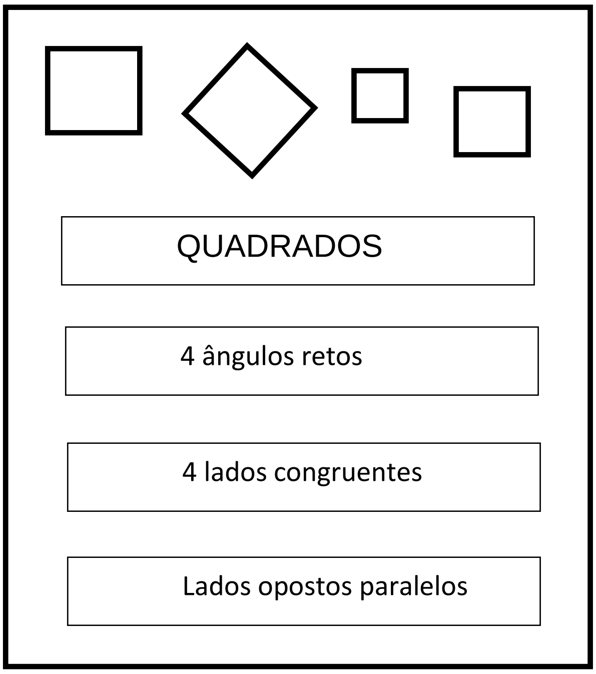
Com o seguinte objetivo: o aluno deverá concluir que há propriedades mínimas para descrever os diferentes tipos de quadriláteros.

Desenvolvimento:

Com todos os cinco cartazes no quadro, a pesquisadora perguntou para os sujeitos da pesquisa se todas essas propriedades são necessárias para descrever um quadrado. Então pediu para eles verificarem quais as tiras com propriedades redundantes que poderiam ser retiradas do cartaz do quadrado sem prejudicar sua descrição.

A seguir, encontram-se as propriedades deixadas pelos sujeitos da pesquisa como sendo suficientes para descrever um quadrado.

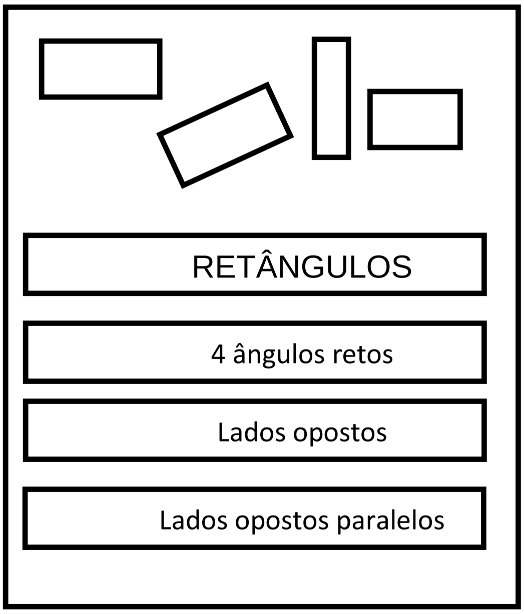
Figura 40 - Referente à atividade VH6



Fonte: Autora, 2016.

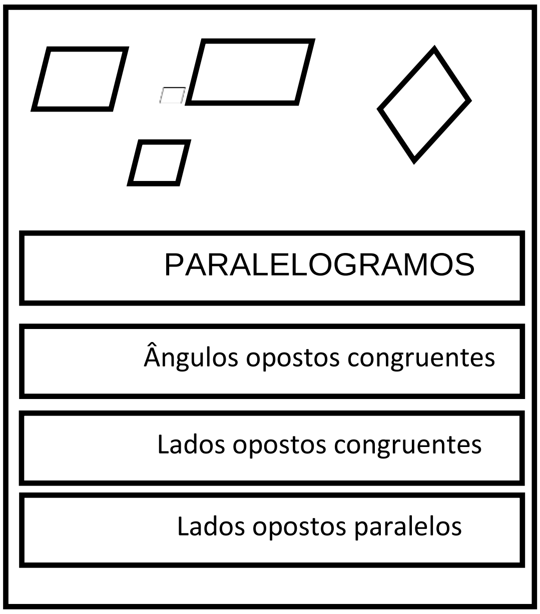
Ao terminarem de descrever as propriedades mínimas para o quadrado, a pesquisadora pediu para os alunos em grupos de 3 ou 4 participantes repetirem a atividade para os retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios. Quando todos os grupos terminaram, a pesquisadora foi perguntando às equipes quais propriedades eles retiraram de cada quadro e por quê. Deixando cada quadro com as seguintes propriedades:

Figura 41 - Referente à atividade VH6



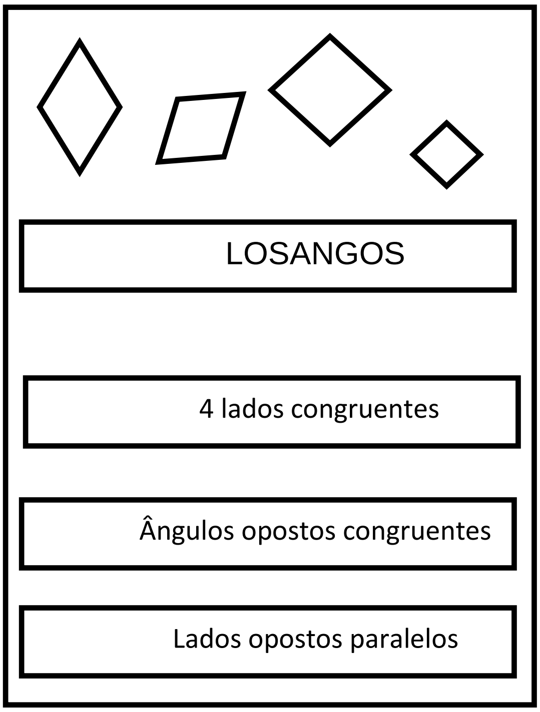
Fonte: Autora, 2016.

Figura 42 - Referente à atividade VH6



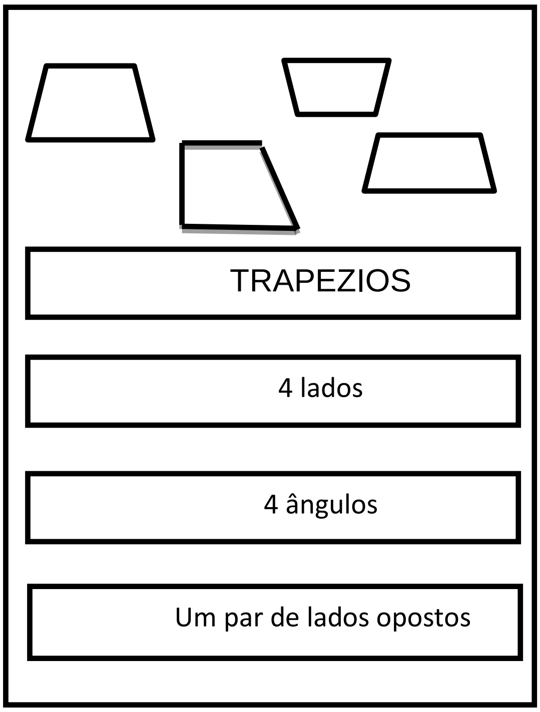
Fonte: Autora, 2016.

Figura 43 - Referente à atividade VH6



Fonte: Autora, 2016.

Figura 44 - Referente à atividade VH6



Fonte: Autora, 2016.

O interessante é que em todos os quadros de quadriláteros os alunos deixaram três propriedades para cada um. Ao concluir a atividade, um dos sujeitos da pesquisa ressaltou sobre as diagonais dos quadriláteros, perguntando se elas poderiam fazer parte das propriedades. A pesquisadora respondeu que faz parte, sim, das propriedades dos quadriláteros, comentando um pouco sobre o assunto. Após os alunos darem-se por esclarecidos, foram solicitadas algumas tarefas para o encontro seguinte, descritas no tópico *sétimo encontro*.

4.5.7 Sétimo encontro

Neste encontro estiveram presentes os 41 sujeitos da pesquisa.

Objetivos: o aluno perceber que a geometria faz parte do seu dia a dia; dar oportunidade aos alunos para demonstrar suas capacidades e conhecimentos no campo da geometria; envolver direção, equipe técnica, corpos docente e discente num trabalho de integração escolar; incentivar a pesquisa.

Desenvolvimento:

Previamente foi pedido que os alunos fizessem uma pesquisa de alguns locais onde pode ser notada a geometria. Eles trouxeram algumas imagens de prédios, viadutos, lagos, obras de arte e uma imagem do Congresso Nacional.

Um dos projetos que a escola realiza durante o ano letivo é a semana científica e foi decidido que os alunos do 9º ano (A), iriam trabalhar com a geometria. Alguns alunos ficaram responsáveis pela geometria nas obras de arte (pesquisar e trazer pinturas de quadros), outros em fazer uma maquete do Congresso Nacional e outra equipe ficou responsável em organizar e decorar a sala com figuras geométricas planas e espaciais.

As equipes trabalharam nas produções dos materiais, organizaram e decoraram a sala, trouxeram a maquete do Congresso Nacional projetado por Oscar Niemeyer pronta, trouxeram também várias imagens de quadros de Tarsila do Amaral e sua biografia. Ao terminar toda a arrumação, os alunos repassaram para a pesquisadora todas as falas da apresentação.

Os alunos ficaram admirados de notar que a geometria está presente em diversas obras. Percebe-se essa admiração na fala de um dos participantes que disse: “professora, não tinha notado que a matemática está presente em todos os lugares, agora quando eu ando, vejo em tudo a geometria”. (Fala de um aluno).

Foi interessante a colocação do aluno por constatar diversas figuras geométricas estudadas em sala de aula no seu cotidiano.

Após esses momentos foi aberta a sala para todos os professores, diretores e alunos de outras salas prestigiarem a exposição e as explicações dos trabalhos feitos pelos sujeitos da pesquisa.

Durante a apresentação um dos alunos participantes se confundiu na explicação, trocando paralelepípedo por retângulo ao falar sobre as figuras geométricas presentes na maquete do Congresso Nacional, mas a pesquisadora interviu e fez a correção.

Vale ressaltar que os alunos fizeram duas apresentações de 20 minutos para o corpo discente e docente da escola.

4.5.8 Oitavo encontro

Neste oitavo encontro estiveram presentes os 41 participantes da pesquisa.

Objetivo do encontro: o aluno deverá reconhecer as figuras geométricas que fazem parte do Tangram, e identificar suas propriedades através de seu manuseio. A ideia de área deverá ser dominada.

Desenvolvimento:

A pesquisadora iniciou esse encontro mostrando para os alunos um Tangram feito de cartolina guache e perguntou se algum aluno conhecia aquele jogo, mas apenas um aluno disse que já teve contato há muito tempo, que uma professora tinha levado para a sala de aula no quinto ano do ensino fundamental para eles brincarem. Logo após esse momento, com todos os alunos atentos, a pesquisadora contou uma das lendas do Tangram e entregou para cada participante uma folha de cartolina, uma régua e uma tesoura para que cada aluno pudesse construir o seu próprio Tangram. A pesquisadora foi falando e desenhando no quadro o passo a passo da construção. Neste momento, o estagiário estava ajudando os alunos que estavam sentindo dificuldades.

Ao findar a construção do Tangram, alguns alunos começaram a pintar as 7 peças enquanto a pesquisadora fazia três perguntas sobre as peças que compõem o Tangram. Foram elas:

1) Que tipo de polígonos há no Tangram?
2) Para calcular a área de cada um desses polígonos, quais são as fórmulas que podem ser usadas?
3) Quanto é a soma dos ângulos internos de cada polígono?

Os alunos responderam com facilidade a essas três perguntas.

Logo após esse momento, foi proposto para os alunos criarem alguns objetos utilizando as 7 peças do Tangram usando sua imaginação.

> É importante que o professor prepare seus alunos para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. E, para isso, é fundamental desenvolver neles a iniciativa, o espírito explorador, a criatividade e a independência, através da resolução de problemas. Para tanto, o professor deve propor aos alunos alguns problemas que admitem muitas respostas ou soluções e outros que admitem uma única resposta mas que podem ser resolvidos por meio de várias estratégias. (VASCONCELOS, 2002, p.76).

Os participantes usaram a imaginação e fizeram figuras como casas, barcos e outros objetos. Alguns alunos tiveram dificuldades em criar, foi então que a pesquisadora mostrou algumas imagens de pessoas, animais e alguns objetos para inspirar os participantes a continuar tentando.

Todos os sujeitos da pesquisa concluíram a atividade satisfatoriamente.

4.5.9 Nono encontro

Todos os sujeitos da pesquisa estiveram presentes neste encontro.

Objetivos:

O aluno deve saber calcular áreas e perímetros das figuras planas que compõem o Tangram;

O aluno deve reconhecer que mesmo construindo outras figuras sempre há conservação de área.

> Em grande parte das escolas e da sociedade, de modo geral, costuma-se não enaltecer nem sequer propiciar atitudes investigadoras, mas, sim, desencadear atitudes de apatia e infertilidade em relação ao poder criativo de cada um. Isso ocorre quando é bloqueado o potencial de descobertas e redescobertas, ao oferecer respostas prontas às questões levantadas por nossos filhos ou alunos, ou ainda ao desenvolver um ensino árido com exercícios sem prazer nem ludicidade. (ALVES, 2012, p. 104)

Desenvolvimento:

Após o último encontro, se passaram duas semanas para dar continuidade a pesquisa. Este intervalo ocorreu porque a filha da pesquisadora nasceu, foi então que a pesquisadora entrou em contato com a direção da escola e com o estagiário para continuar com o projeto. O estagiário junto com um dos diretores do colégio, foram à sala, explicaram a situação para os alunos e falaram que as aulas iriam continuar.

Nesse encontro, o estagiário aplicou as atividades com o Tangram (Anexo F). (Adaptadas de LOPES e NASSER, 1995).

Previamente a pesquisadora preparou as atividades e entregou-as ao estagiário para aplicá-las turma. As atividades foram aplicadas e ao término recolhidas para que a pesquisadora junto com o estagiário, em casa, corrigisse cada questão debatendo-as e comentando o que ocorreu durante a aplicação.

1ª Questão: Descreva as peças do Tangram, respondendo:

a) Que tipo de polígonos elas são?
b) Existem peças congruentes?
c) Quais as peças de mesma forma? De que tipo são?

Resultado da 1ª questão:

Nessa questão, os participantes da pesquisa responderam todas as letras sem dificuldades. Demonstrando o conhecimento nas figuras planas.

2ª Questão: Com o quadrado e os dois triângulos pequenos do TANGRAM, formar:

a) Um triângulo
b) Um trapézio
c) Um retângulo
d) Um paralelogramo.

Resultado da 2ª questão:

Nessa 2ª questão, os sujeitos acharam fácil construir o trapézio, o retângulo e o paralelogramo, mas apenas dois de imediato conseguiram formar um triângulo, os outros sujeitos quando perceberam que estavam com dificuldades para formar o triângulo pediram ajuda a outro colega.

3ª Questão: Separe os dois triângulos grandes do seu TANGRAM e forme um quadrado com as 5 peças restantes.

Resultado da 3ª questão:

Apenas cinco alunos tiveram dificuldades em formar o quadrado, mas depois de insistir um pouco mais, eles conseguiram.

4ª Questão: Forme com as 7 peças:

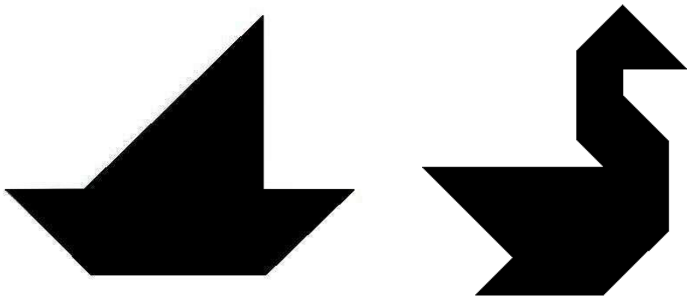
a) Um triângulo
b) Um trapézio
c) Um retângulo
d) Um paralelogramo

Resultado da 4ª questão:

Todos os participantes conseguiram realizar o que foi pedido. Mas muitos deles pediram para continuar a atividade em dupla ou trio. O estagiário permitiu que eles se juntassem em duplas ou trios.

5ª Questão**:** Com as 7 peças do TANGRAM desenhe um barco e uma ave como no modelo abaixo e depois responda: a área e o perímetro das figuras são os mesmos? Justifique sua resposta.

Figura 45 - Figura com as sete peças do Tangram



Fonte:< http://talleresderoboticahfic.blogspot.com.br/2013/03/tangram-y-matematicas.html?view=snapshot.>.

Resultado da 5ª questão:

Os alunos passaram muito tempo para reproduzir as duas figuras, mas como estavam reunidos em grupos, um ajudava o outro. O interessante nessa questão foi que todos os alunos foram calcular a área e o perímetro com o auxílio de régua, eles rapidamente perceberam que os perímetros das figuras eram diferentes. Já para achar o valor da área, eles foram calculando as áreas de cada uma das 7 peças do Tangram e apenas uma equipe percebeu que a figura do barco era a imagem de duas figuras planas (trapézio e triângulo) e calcularam a área com mais facilidade que as outras equipes, mas quando chegaram na imagem da ave eles não conseguiram achar a solução. Já as outras equipes, como calcularam a área de cada figura plana do Tangram notaram que as duas têm a mesma área.

Um dos sujeitos participantes, ao perceber que as áreas são iguais, falou bem alto: Professor as áreas são iguais porque elas são feitas com as mesmas figuras. O estagiário falou que ele estava certo e logo após perguntou por que o perímetro não era o mesmo, muitos dos participantes responderam que não sabiam e ficaram pensando tentando entender por que não era o mesmo. Foi então que o estagiário explicou o porquê.

Ao recolher as atividades, o estagiário pediu para os participantes ao entrassem no site http://rachacuca.com.br/raciocinio/tangram/ chegarem em casa para se divertir com o Tangram.

4.5.10 Décimo encontro

Nesse encontro, todos os 41 participantes estiveram presentes.

Objetivo: investigar as contribuições do material concreto (geoplano) para o ensino de geometria. Calcular área de figuras planas utilizando a fórmula de Pick.

Desenvolvimento:

Previamente a pesquisadora construiu 25 geoplanos retangulares e comprou vários atilhos de borrachas coloridos. Ao chegar na sala, foi pedido para os participantes formar grupos de dois ou três participantes. Foi apresentado o geoplano para os alunos e mostrado qual seria o objetivo de se trabalhar com ele.

Ao iniciar, o estagiário entregou para cada equipe um geoplano retangular de madeira e 10 atilhos de borrachas coloridos. Logo após a entrega dos materiais foi pedido para os participantes criar algumas figuras planas no geoplano com os atilhos, os alunos fizeram várias figuras diferentes usando a imaginação, passaram 15 minutos nessa atividade, ao passar esse tempo foi entregue para os alunos uma folha com algumas atividades para ser realizada usando o geoplano. Atividades com o Geoplano (Anexo G).

1ª Questão: No geoplano construa algumas figuras e identifique seus perímetros e suas áreas, adotando como medida o lado de cada malha.

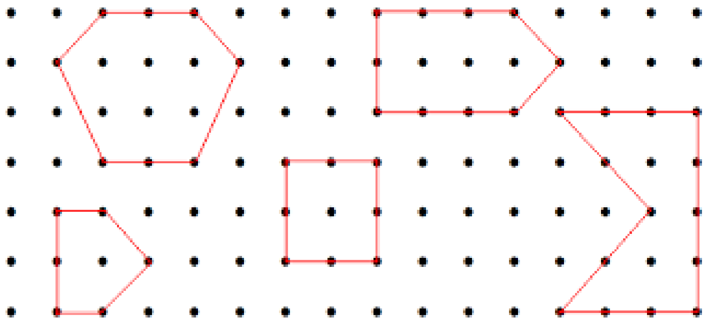
Resultado da 1ª questão:

Cada equipe construiu 4 figuras planas, todas as equipes escolheram figuras conhecidas como quadrado, retângulos, triângulos, trapézios e paralelogramos. Os sujeitos da pesquisa fizeram essa atividade com facilidade.

Vale ressaltar que, como a atividade era em grupo, o aluno que tinha uma facilidade maior que o outro ajudava para que todos pudessem compreender e terminar a tarefa.

2ª Questão: Calcule a área das seguintes figuras planas:

Figura 46 - Figuras planas no geoplano



Fonte: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/artigos/MC/T12_MC1119.pdf>.

Resultado da 2ª questão

A princípio, vários alunos tiveram dificuldades em calcular algumas áreas, mas uma equipe lembrou-se de como tinha feito para calcular as áreas com o Tangram, então dividiram as figuras em duas partes, formando figuras planas de áreas conhecidas. Outra equipe só olhando para as figuras calculou as áreas, alegando ter formado vários quadradinhos. Esta atividade todas as equipes concluíram muito bem.

3ª Questão: Calcule a área das mesmas figuras planas anteriores, mas agora, usando a fórmula de Pick.

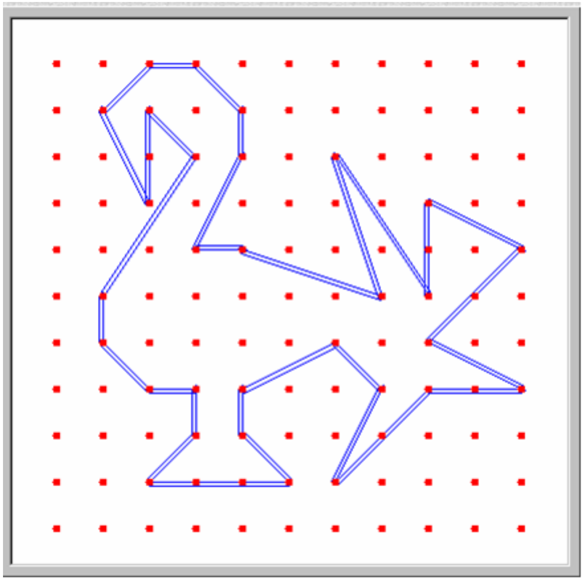
Resultado da 3ª questão

Quando os alunos terminaram a atividade anterior, foi exposta no quadro a fórmula de Pick, explicada sua origem e utilidade. Os sujeitos da pesquisa copiaram no caderno a fórmula. Também foi deixado claro para os participantes que eles só poderiam usar essa fórmula para polígonos simples. Como os sujeitos da pesquisa não sabiam o que eram polígonos simples o estagiário explicou.

Os sujeitos da pesquisa fizeram a atividade sem nenhuma dificuldade.

4ª Questão: Na figura abaixo, reproduza no geoplano e calcule o número de vértice, o número de faces e sua área.

Figura 47 - Figura no geoplano



Fonte: <http://www.matematicasycontabilidad.com/matematicas/117-geometria/geometria-plana-areas/ejercicios-geometria-plana-areas/101-calculo-del-area-y-perimetro-de-poligono-pato-en-el-pptc-geoplano.html>.

Resultado da 4ª questão:

Os alunos reproduziram a imagem, alguns deles sentiram dificuldades na elasticidade de alguns atilhos de borrachas, mas depois de algumas tentativas e trocas de atilhos, conseguiram concluir a figura.

Todas as equipes acertaram os números de faces e vértices. O interessante é que para calcular a área da imagem, todos os participantes utilizaram a fórmula de Pick. Ao perceber que todos utilizaram a fórmula de Pick, foi perguntado aos participantes o porquê desta utilização. As respostas foram unânimes, alegando ser mais fácil utilizar a fórmula para calcular a área da figura.

Foi notado o ânimo dos sujeitos ao calcular área utilizando o geoplano.

4.5.11 Décimo primeiro encontro

Todos os sujeitos da pesquisa estiveram presentes neste encontro.

Objetivo: averiguar o nível de pensamento de cada aluno.

Desenvolvimento:

Nesse encontro, foram aplicados mais uma vez os testes de Van Hiele (ANEXO A) para saber se houve um progresso nos níveis de pensamento geométrico dos participantes.

Foi mais uma vez elaborada uma tabela para verificar em quais níveis de pensamento geométrico cada sujeito da pesquisa se encontrava no final dos trabalhos. Os resultados foram os seguintes:

Quadro 7 - Nível de pensamento geométrico dos alunos do 9º ano no final da pesquisa

Q / S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
A1	X	X	X	X		X	X	X			X				X	1
A2	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X			X	X	2
A3	X	X	X	X			X	X	X		X	X				1
A4		X	X	X	X		X	X	X					X		1
A5	X	X	X	X		X	X	X	X	X					X	1
A6		X	X	X	X			X						X		0
A7	X	X	X		X		X	X		X						1
A8	X	X	X	X			X	X		X				X		1
A9		X	X	X	X	X	X	X	X	X						1
A10	X	X	X		X	X		X		X				X	X	1
A11	X		X	X	X	X	X	X		X				X		1
A12	X	X	X	X		X				X						0
A13	X		X	X	X	X	X			X				X		1
A14	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X			X	X	2
A15	X	X	X		X			X		X	X			X		0
A16	X	X	X	X	X	X	X			X	X					1
A17	X	X	X		X	X	X	X		X				X		1
A18		X	X		X		X	X		X		X		X		1
A19		X	X	X	X		X	X								0
A20		X	X		X		X	X		X				X		1
A21	X	X	X	X	X	X	X	X		X		X			X	1
A22	X	X		X	X			X		X		X			X	0
A23	X	X	X		X		X	X		X						1
A24	X	X	X		X		X	X		X						1
A25	X	X	X		X	X		X		X					X	1
A26	X	X	X			X		X	X		X			X		1
A27	X	X	X			X	X	X	X	X						1
A28	X	X	X		X		X	X		X				X		1
A29		X		X	X		X	X	X	X	X			X		1
A30		X	X	X	X		X			X				X	X	0
A31	X	X	X	X	X		X	X		X	X					1
A32	X	X	X	X	X	X	X	X			X					1
A33		X	X		X	X		X		X				X		1
A34							X							X	X	-
A35	X	X	X	X	X	X	X	X							X	1
A36	X		X	X	X	X	X	X								1
A37							X				X					-
A38	X	X		X	X	X	X	X		X					X	1
A39	X	X	X	X	X	X	X	X		X				X	X	1
A40	X	X	X	X	X		X	X		X		X	X			1
A41	X		X	X	X		X	X		X			X		X	1

Fonte: Autora, 2016 – Adaptado de VIEIRA, 2010.

Ao final dos trabalhos, foi notado que todos os alunos, com exceção de cinco, conseguiram atingir um nível imediatamente superior ao que se encontravam no momento pré-teste. No que se segue, reapresentamos a tabela com o resultado do pré-teste e pós-testes para fins comparativos.

Quadro 8 - Comparação dos níveis dos alunos A1 a A12

Sujeitos	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12
Nível no início	-	-	0	-	0	-	-	0	-	0	1	-
Nível no final	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0

Fonte: Autora, 2016.

Quadro 9 - Comparação dos níveis dos alunos A13 a A23

Sujeitos	A13	A14	A 15	A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23
Nível no início	0	0	-	-	0	-	-	-	0	-	-
Nível no final	1	2	0	1	1	1	0	1	1	0	1

Fonte: Autora, 2016.

Quadro 10 - Comparação dos níveis dos alunos A24 a A34

Sujeitos	A24	A25	A 26	A27	A28	A29	A30	A31	A32	A33	A34
Nível no início	1	1	-	-	-	0	-	0	-	-	-
Nível no final	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	-

Fonte: Autora, 2016.

Quadro 11 - Comparação dos níveis dos alunos A35 a A41

Sujeitos	A35	A36	A37	A38	A39	A40	A41
Nível no início	0	-	-	0	0	-	-
Nível no final	1	1	-	1	1	1	1

Fonte: Autora, 2016.

Três fatos chamam a atenção: (1) o estudante A2, que no início dos trabalhos não tinha alcançado nenhum dos níveis passou para o nível 2; (2) os estudantes que se encontravam no nível 1 não passaram para o nível 2, mas acertaram um número muito maior de questões; (3) os estudantes A34 e A37 continuaram sem alcançar nenhum dos níveis.

Ao investigar sobre os alunos A34 e A37, por não conseguir atingir um dos níveis, foi descoberto que se tratavam de dois alunos especiais que existiam na sala. Mas mesmo sem terem alcançado algum nível, ao observar os testes de ambos foi constatado que eles marcavam apenas uma alternativa como sendo a correta. Logo, não pode ser dito que os alunos A34 e A37 não aprenderam, pelo contrário, eles participaram e compreenderam os assuntos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos desafios para promover o retorno do ensino da geometria, que durante muito tempo foi colocada em segundo plano nos currículos escolares, é pensar em como elaborar atividades que possam despertar o interesse dos alunos. Foi tentando enfrentar esse tipo de desafio que lançamos mão (1) da teoria Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico e (2) da utilização de materiais manipuláveis (concretos), para a elaboração de atividades que fossem capazes de motivar os estudantes da educação básica.

As atividades desenvolvidas tiveram o objetivo de propiciar um contexto educativo que fornecesse aos alunos oportunidades de experimentar novas possibilidades, argumentar, descobrir, deduzir e refletir sobre o conhecimento formado.

Após as realizações dessas atividades, foram percebidos alguns avanços nos participantes da pesquisa. Um deles foi o desenvolvimento de uma linguagem geométrica mais adequada e mais consistente, pois é necessário que o ensino da matemática contemple principalmente o desenvolvimento da capacidade de utilização de diferentes linguagens para aprendizagem de novos significados, os quais podem se configurar em diferentes formas de expressão.

Van Hiele destacou o papel da linguagem na obtenção dos níveis de pensamento em geometria. Por exemplo, para incluir o retângulo como paralelogramo é necessário que o estudante domine a linguagem e as relações que justificam essa inclusão.

Durante a realização das atividades que escolhemos e elaboramos foi possível constatar vários fatos relevantes. Um desses fatos foi a comprovação da ampliação de certas habilidades dos estudantes, que foram desenvolvidas por intermédio do geoplano, do Tangram e das atividades propostas nesse trabalho, as quais possibilitaram a eles lidar com as figuras além de sua percepção imediata, como, por exemplo, visualizar uma figura em diferentes posições e saber que suas propriedades se mantêm. Por meio da observação e experimentação, o aluno começa a discernir as características de uma figura, e a usar as propriedades para conceituar classes de formas.

Vale salientar também que pudemos observar que as atividades em equipe podem trazer muitas contribuições, dentre as quais podemos destacar: maior valorização individual de cada participante; ampliação da percepção dos outros colegas mediante a possibilidade de realização de trocas de conhecimentos, experiências e de ganho de agilidade no cumprimento de metas e objetivos compartilhados.

O ensino de Geometria tem possibilidades fascinantes, como, por exemplo, levar o aluno a desenvolver o senso estético e assim melhor perceber e valorizar a presença de aspectos geométricos em elementos da natureza e também em criações feitas pelos homens. De fato, vários fenômenos naturais ou artísticos podem ser melhor compreendidos e admirados mediante conceitos geométricos. Por exemplo, a geometria permite que alcancemos novos patamares de interpretação das propriedades dos favos de mel, das teias de aranhas, das propriedades de simetria de certas flores, de certas telas e esculturas, de elementos utilizados na arquitetura, em pisos, em vasos de decoração etc.

Logo no início dos nossos trabalhos nos deparamos com um fato inesperado, a saber: mais da metade dos estudantes do 9º ano da escola que escolhemos não havia sequer atingido o nível zero da teoria Van Hiele. Decidimos então fazer uso de materiais manipulativos, inicialmente motivados pelos resultados práticos que já havíamos alcançado em nossa prática docente com esse tipo de recurso didático. Depois nos sentimos mais seguros nesta escolha ao consultarmos autores como Pais (2000) e Vieira (2010). E, de fato, mais uma vez pudemos constatar a potencialidade desses materiais na promoção do envolvimento dos estudantes no processo de aprendizagem tanto pelos seus aspectos lúdicos quanto pela propiciação de experiências táteis e visuais que eles podem viabilizar.

No tocante à questão investigativa que citamos na introdução deste trabalho, ou seja, de avaliar os efeitos de aprendizagem propiciada pela sequência didática elaborada com materiais manipulativos e aplicada segundo os pressupostos da teoria Van Hiele, chegamos à conclusão de que nosso experimento didático foi bem sucedido, haja vista constatarmos que as atividades da sequência didática possibilitaram que a quase totalidade dos estudantes progredissem de nível de pensamento geométrico, com exceção de dois estudantes especiais, como ficou evidenciado nos dados coletados e apresentados no último capítulo desta dissertação.

A sequência didática produzida e aplicada por nós neste experimento apresentou resultados expressivos. Contudo, acreditamos que ela pode ser aperfeiçoada ou adaptada para a aplicação em outras turmas de estudantes. A grande preocupação, entretanto, é manter o enfoque construtivista, em que o aluno participe ativamente da construção do conhecimento. Acreditamos que o uso de materiais manipulativos pode permitir uma aprendizagem capaz de conjugar teoria e prática em sala de aula de uma forma prazerosa e divertida, voltada para a promoção da autonomia intelectual dos estudantes. É de suma importância para a dinâmica das aulas que o professor esteja sempre aberto à possibilidade de introduzir novas propostas didáticas, tornando-as mais interessantes e prazerosas fazendo com que aqueles alunos que não tenham, ou que tenham pouco interesse, ou que tenham dificuldades na disciplina de matemática, venham a mudar de atitude.

Finalizamos destacando que as estratégias e os recursos didáticos aqui mencionados podem não ser uma solução definitiva e infalível para suprir todas as deficiências do ensino convencional de Geometria, mas mediante os resultados aqui apresentados, podemos garantir que a teoria Van Hiele decerto permite a criação de uma efetiva possibilidade de desenvolvimento de habilidades geométricas. E, como bem se sabe, o domínio de conceitos geométricos é um requisito indispensável para a apropriação da matemática de um modo geral. As estratégias aqui criadas visaram a progressão em níveis iniciais dessa teoria (para os níveis zero e nível 1, fundamentalmente). Em trabalhos futuros pretendemos desenvolver estratégias que permitam a progressão em níveis mais altos da teoria Van Hiele, como, por exemplo, para progressão do nível 1 para o nível 2 ou do nível 2 para o nível 3.

REFERÊNCIAS

ALVES, D. C.; GAIDESKI, G.; CARVALHO JUNIOR, J. M. T. **O uso do tangram para aprendizagem de geometria plana**. Curitiba, 2011. Disponível em: <http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads/2012/05/O-USO-DO-TANGRAM-PARA-APRENDIZAGEM-DE-GEOMETRIA-PLANA.pdf>. Acesso em: 5 abr. 2015.

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino de matemática**: uma prática possível. 7. ed. Campinas: Papirus, 2012.

ARAUJO, W. R. **O ensino do conceito de área no sexto ano noturno do ensino fundamental**: uma proposta didática fundamentada na teoria de Van Hiele. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado em Estudo de Ciência e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

ARNOLDO JUNIOR, H. **Estudo do desenvolvimento do pensamento geométrico por alunos surdos por meio do multiplano no ensino fundamental.** 2010. 290 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências E Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

BERGER, C. C. **Explorando o conceito de área com o tangram**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2013.

BEZERRA, Y. S. et al. **Geoplano**. Campina Grande: Universidade Federal de Campina Grande, 2013. Disponível em: <www.ebah.com.br/content/ABAAAfwHYAE/trabalho-sobre-geoplano>. Acesso em: 5 abr. 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_ internet.pdf>. Acesso em: 4 maio 2015.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática (5ª a 8ª séries). Brasília; DF. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 8 maio 2015.

CUNHA, D. A.; SILVA, A. A.; SILVA, F. M. **O uso do material concreto no ensino da matemática**. Fortaleza: UECE,2013.

FERREIRA, A. **O uso do tangram como recurso de aprendizagem.** 2008. Disponível em: <www.planetaeducacao.com.br/portal/artigo.asp?artigo=1148>. Acesso em: 6 abr. 2015.

FREIRE, P. **Educação e mudanças**. 20. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1994.

GRANDO, R. C. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**.1995. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade

Estadual de Campinas, Campinas, 1995.Disponível em: <http://www.bibliotecadigital. unicamp.br/document/?code=vtls000084233>. Acesso em: 5 maio 2015.

LEFRANÇOIS, G. R. **Teorias da aprendizagem**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

LORENZATO, S. Porque não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista** – Sociedade Brasileira de educação Matemática, ano 3, n. 4, p. 13, jan./jun. 1995.

KAMII, C. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 e 6. 11. ed. Campinas: Papirus, 1990.

MACHADO, R. M. **Minicurso**: explorando o geoplano. Campinas: Unicamp, 1993.

MIORIM, M. A.; FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

MIRANDA, D. **Como construir o tangram**. Disponível em: <http://educador.brasiles cola.uol.com.br/estrategias-ensino/como-construir-tangram.htm>. Acesso em: 20 abr. 2015.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso básico de geometria**: enfoque didático. Rio de Janeiro: Projeto Fundão IM/UFRJ, 2004. Módulo 1.

NASSER, L; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria.** 2000. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes /docs_23/analise_significado.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2015.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989. Disponível em: <www.bibliotecadigital.unicamp.br>. Acesso em 14 jan. 2015.

PIROLA, N. A. **Solução de problemas geométricos**: dificuldades e perspectivas. 2000. 243 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: <www.bibliotecadigital.unicamp.br>. Acesso em 14 jan. 2015.

RODRIGUES, A. G.; RODRIGUES, M. C.; MARQUES, G. A. **Uso de materiais concretos como estratégia facilitadora para o ensino da matemática**. Disponível em:< http://matconcretos1.blogspot.com.br/2009/10/o-uso-de-materiais-concretos-como.html >.. 2009. Acesso em 14 jan. 2015.

SÁ, I. P. **Geoplano**: práticas pedagógicas em matemática 1 - UERJ. didática da matemática – USS, 1999. Disponível em: <http://www.magiadamatematica.com/uerj/licenciatura/25-geoplano.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2015.

SOUZA, J. R.; VERSA, I. **Uso de material didático manipulável (material concreto) no estudo da geometria métrica espacial**. 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao. pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1953-8.pdf>. Acesso em 15 jan. 2015.

STANICH, K. A. B. **O processo de ensino e aprendizagem da geometria**: representações sociais de professores do 5º ano do ensino fundamental. 2013. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: <www.sapientia.pucsp.br>. Acesso em 23 jan. 2015.

TAVARES, J. N. **Teorema de Pick** Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick /pick2.html>. Acesso em: 20 maio 2015.

VASCONCELOS, M. C. **Um estudo sobre o incentivo e desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, através da estratégia de resolução de problemas**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

VIANA, O. A. **O conhecimento geométrico de alunos do CEFAM sobre figuras espaciais:** um estudo das habilidades e dos níveis de conceitos. 2000. 230 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: <www.bibliotecadigital.unicamp.br>. Acesso em 28 jan. 2015.

VIEIRA, C. R. **Reiventando a geometria no ensino médio**: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a Teoria de van Hiele. 2010. 155 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2010. Disponível em: <www.repositorio.ufop.br>. Acesso em: 31 out. 2014.

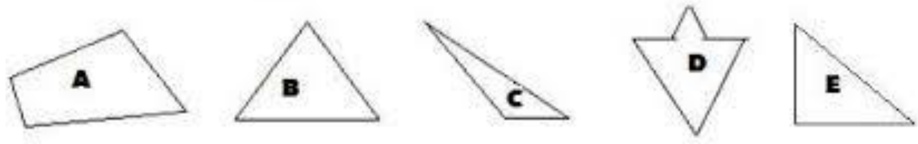
ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso**: as construções geométricas como um saber escolar. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

ANEXOS

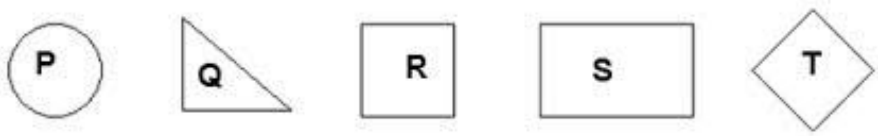
ANEXO A – TESTES VAN HIELE

Nome: ....Turma: ....Idade: ....

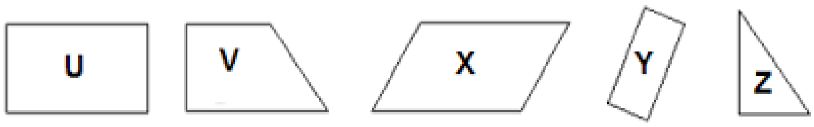
1- Assinale o(s) triangulo(s):



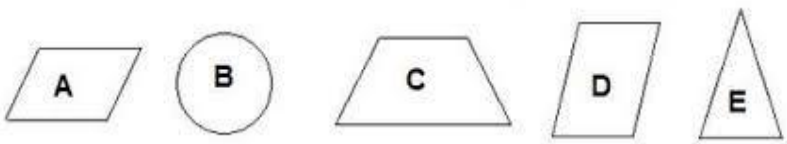
2- Assinale o(s) quadrado(s):



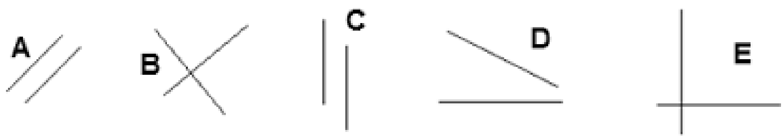
3- Assinale o(s) retângulo(s):



4- Assinale o(s) paralelogramo(s):



5- Assinale os pares de retas paralelas:



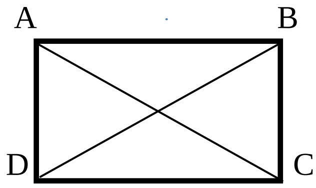
Básico:

S N

Nome: ....Turma: ....Idade: ....

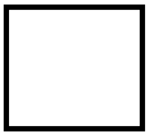
6- No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.



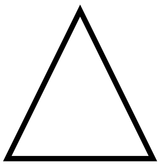
7- Dê 3 propriedades dos quadrados:

1- ....
2- ....
3- ....



8- Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre ângulos do triângulo isósceles:

a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.
b) Um dos ângulos mede 90º.
c) Dois ângulos têm a mesma medida.
d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



9- Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

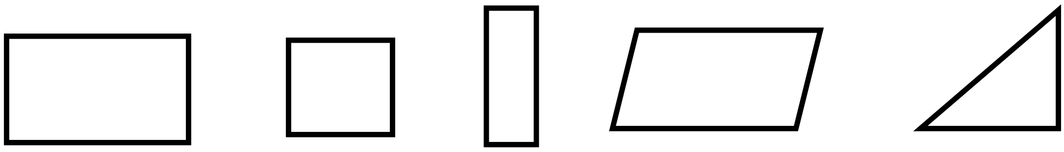
4- ....
5- ....
6- ....

10- Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Nível 1:
S N

Nome: ....Turma: ....Idade: ....

11- Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:



12- Os quatros ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? ....
b) Por que? ....
c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ....

13- Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? .... Por quê? ....

14- Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.
(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
c) I e II não podem ser ambas verdadeiras
d) I e II não podem ser ambas falsas.
e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

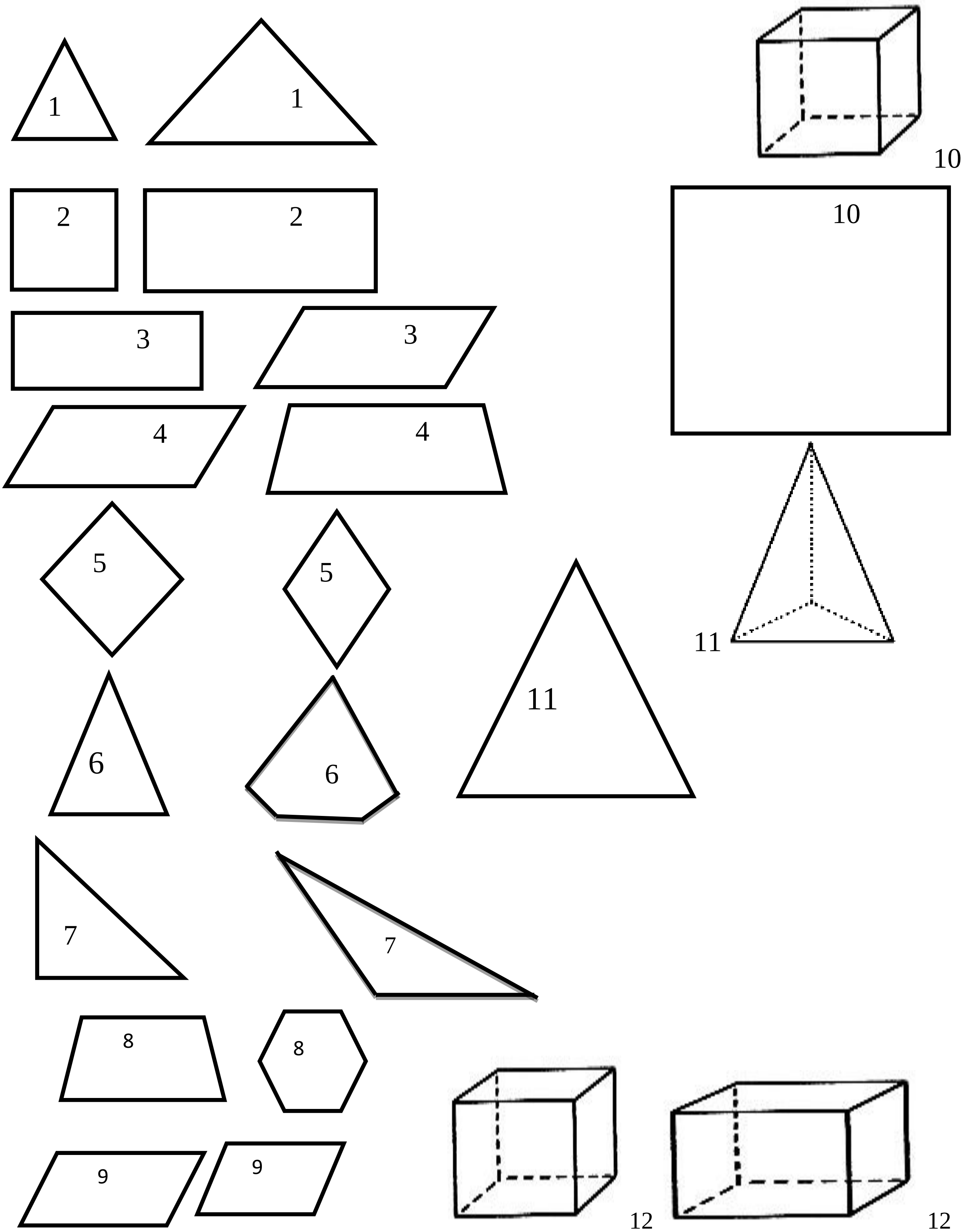
15- Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

a) Qualquer propriedade dos quadrados é válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Nível 2:

S N

ANEXO B – ATIVIDADE VH1

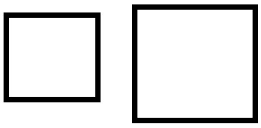
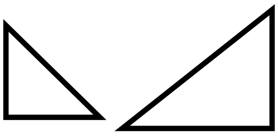
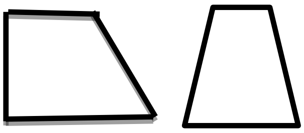
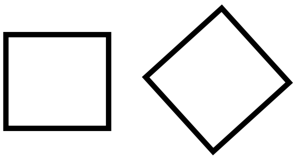
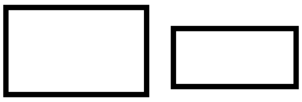
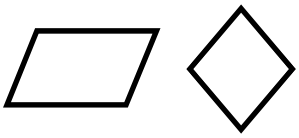
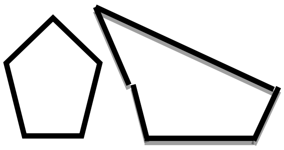
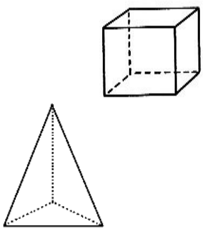


FOLHA DE REGISTRO

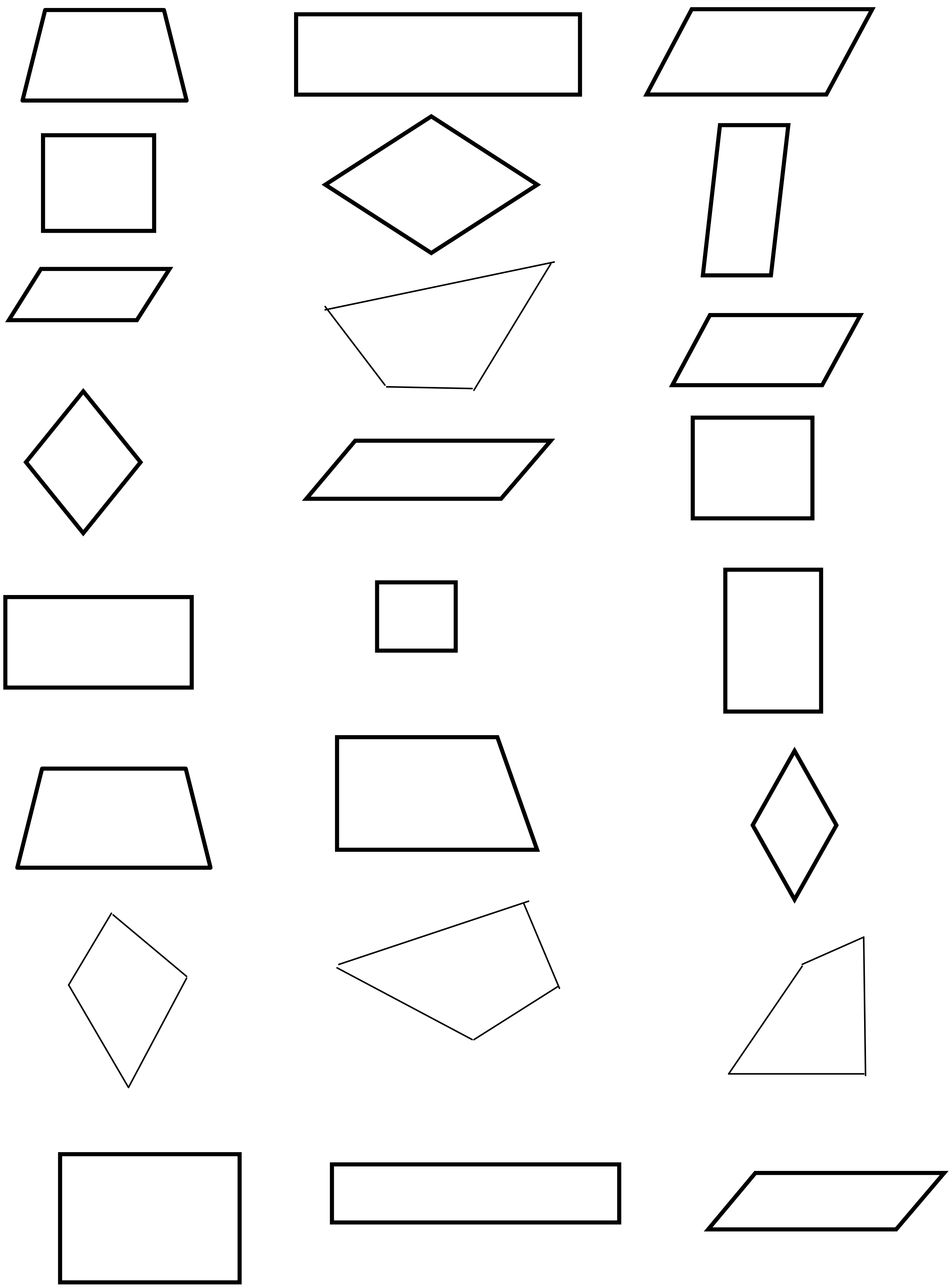
Nomes: .... e ....Turma............

Pares de Figuras	Elementos em comum	Diferenças
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

ANEXO C- FOLHA DE REGISTRO - ATIVIDADE VH2

	Figuras Geométricas	Elementos em comum	Diferenças
			
			
			
			
			
			
			
			

ANEXO D - ATIVIDADE VH3



ANEXO E - ATIVIDADE VH4 – Listando Propriedades

Quadrados
Retângulos
Losangos
Paralelogramos
Trapézios
4 lados
4 lados
4 lados
4 lados
4 lados
4 ângulos
4 ângulos
4 ângulos
4 ângulos
4 ângulos
4 ângulos retos
4 ângulos retos

4 lados congruentes
4 lados congruentes
Lados opostos congruentes
Lados opostos congruentes
Lados opostos congruentes
Lados opostos congruentes
Ângulos opostos congruentes
Ângulos opostos congruentes
Ângulos opostos congruentes
Ângulos opostos congruentes
Lados opostos paralelos

ANEXO F – ATIVIDADES COM O TANGRAM

(adaptadas de Lopes e Nasser, 1995)

Nome:..serie................

1- Descreva as peças do Tangram, respondendo:

a) Que tipo de polígonos elas são?
b) Existem peças congruentes?
c) Quais as peças de mesma forma? De que tipo são?

2- Com o quadrado e os dois triângulos pequenos do TANGRAM, formar:

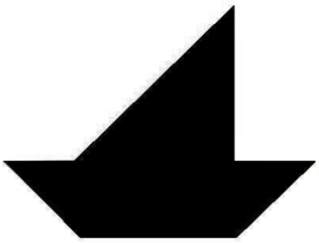
a) Um triângulo
b) Um trapézio
c) Um retângulo
d) Um paralelogramo.

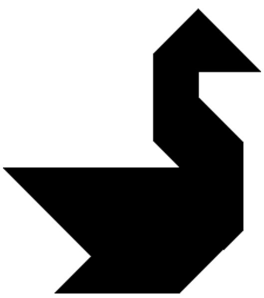
3- Separe os dois triângulos grandes do seu TANGRAM e forme um quadrado com as 5 peças restantes.

4- Forme com as 7 peças:

a) Um triângulo
b) Um trapézio
c) Um retângulo
d) Um paralelogramo

5- Com as 7 peças do TANGRAM desenhe um barco e uma ave como no modelo abaixo e depois responda: a área e o perímetro das figuras são os mesmos? Justifique sua resposta.





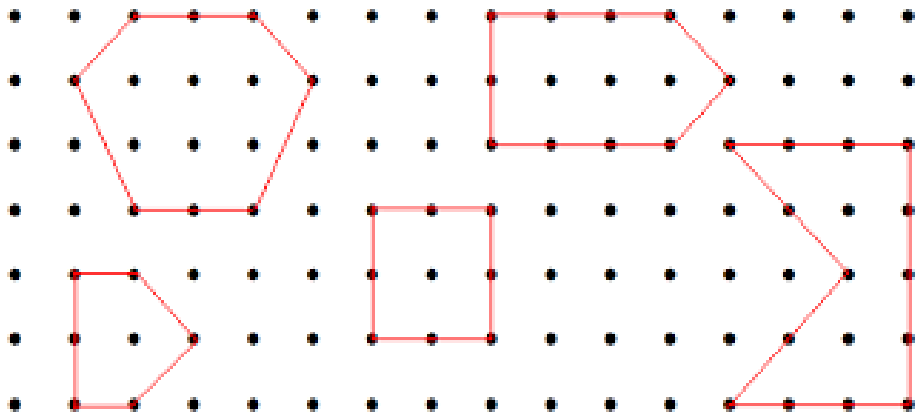
(ANEXO G) ATIVIDADES COM O GEOPLANO

NOME: ....

NOME: ....

1- No geoplano construa algumas figuras e identifique seus perímetros e suas áreas, adotando como medida o lado de cada malha.

2- Calcule a área das seguintes figuras planas:



3- Calcule a área das mesmas figuras planas anteriores, mas agora, usando a fórmula de Pick.

4- Na figura abaixo, reproduza no geoplano e calcule o número de vértice, o número de aresta e sua área.