UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

CAMPUS DO SERTÃO

ENGENHARIA CIVIL

DAONE DA SILVA SANTOS

PROCEDIMENTO SEMI-ANALÍTICO PARA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE VIGAS METÁLICAS

DELMIRO GOUVEIA. JANEIRO DE 2017.

DAONE DA SILVA SANTOS

PROCEDIMENTO SEMI-ANALÍTICO PARA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE VIGAS METÁLICAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito à conclusão do curso de Bacharelado em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Alagoas – UFAL, *Campus* do Sertão.

Orientador: Prof.º Dr. Márcio André Araújo Cavalcante

DELMIRO GOUVEIA. JANEIRO DE 2017.

S237p Santos, Daone da Silva
Procedimento semi-analítico para análise elastoplástica de vigas metálicas / Daone da Silva Santos. - 2017.
72f.: il.

Monografia (Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Delmiro Gouveia, 2017.
Orientação: Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante.

1. Análise Elastoplástica. 2. Vigas Metálicas.

CDU 624

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Campus Sertão/
UFAL – Delmiro Gouveia

Folha de Aprovação

AUTOR: DAONE DA SILVA SANTOS

PROCEDIMENTO SEMI-ANALÍTICO PARA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE VIGAS METÁLICAS

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado adequado para obtenção do título de Engenheiro Civil e aprovado em sua forma final pelo professor orientador e pelo Colegiado do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas – Campus do Sertão em 21 de fevereiro de 2017.

Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante, UFAL (Orientador)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Wayne Santos de Assis, UFAL (Examinador Interno)

Mestre em Eng. Civil Christiano Augusto Ferrario Várady Filho (Examinador Externo)

DEDICATÓRIA

Primeiramente, este trabalho dedica-se à Deus, sobretudo por conferir-me força, saúde e motivação frente aos desafios inerentes ao período de graduação. Genuinamente dedico este trabalho à Ele pois além de tudo, me proporcionou oportunidades incríveis nestes últimos anos, as quais foram fundamentais para minha formação.

Do mesmo modo, dedico os meus esforços à minha família que com muito cuidado e carinho me apoiou durante este período de graduação. Especialmente minha mãe, meu pai e meu irmão, pois sem eles eu certamente não teria conseguido. Além disso, dedico este trabalho a todos os amigos que sempre confiaram no meu potencial e que sempre me ajudaram direta ou indiretamente. Não poderia esquecer de dedicar este trabalho também a todos os professores que tive até o presente momento, os quais trasmitiram conhecimentos importantes para mim. Estes conhecimentos não se restringem ao âmbito acadêmico, mas abrangem uma formação ampla, humanística e socialmente compromissada.

Dedico este trabalho à Universidade Federal de Alagoas – Campus do Sertão e agradeço por todo o apoio e infraestrutura concedidos. Enfim, minha formação não é fruto apenas do meu próprio esforço, mas esta é principalmente fruto de todo apoio e ajuda que tive durante esta jornada árdua. Esta vitória não é minha, é nossa!

AGRADECIMENTOS

À Deus, por todas as dádivas mencionadas anteriormente.

Aos meus pais, Maria Lindaíce e Lúcio, por todo o carinho, companheirismo e dedicação em todos os momentos. Ao meu irmão, Talvane, que me apoiou e me incentivou a sempre dar o melhor de mim. Aos meus familiares de uma forma geral.

À minha namorada, Cybele Karine, que sempre esteve ao meu lado com toda delicadeza e consistência.

À todos os amigos que incondicionalmente doaram esforços em prol da concretização dos meus sonhos. Com estes compartilhei momentos felizes e dividi momentos de angústias e tristezas.

À todos os professores que me guiaram e trasmitiram o saber pacientemente. Ao programa PET Engenharias por me proporcionar momentos intensos de aprendizados e crescimento pessoal. À professora Bruna Rosa por me orientar e me ensinar coisas importantes. Ao Campus do Sertão como um todo.

Ao meu atual orientador, Márcio André Araújo Cavalcante, o qual minuciosamente me ensinou coisas fantásticas, tanto no que diz respeito à Engenharia quanto à arte do pensar amplamente. Seu compromisso, maturidade e paciência jamais serão esquecidos.

RESUMO

Para o dimensionamento e a concepção de estruturas em geral, faz-se sempre necessário a correta avaliação das tensões e deslocamentos em vista à um bom desempenho estrutural dos seus componentes. Nestes moldes, frisa-se que o procedimento normalmente utilizado para o dimensionamento de vigas metálicas considera um comportamento elástico-linear do material e baseia-se nas considerações ou restrições cinemáticas da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Todavia, ressalta-se a necessidade de prever o comportamento dos elementos estruturais sob regime de deformações plásticas, em vista ao entendimento dos modos de falha e as zonas de deformações plásticas. Diante do exposto, este trabalho propõe um procedimento semi-analítico para a avaliação das tensões e deslocamentos em vigas metálicas sob um regime elastoplástico de deformação, considerando as restrições cinemáticas da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Além disto, adota-se um procedimento incremental-iterativo baseado nas Equações de Prandtl-Reus modificadas, propostas em Mendelson (1968), em vista a calcular as deformações plásticas. Ademais, com o intuito de verificar o modelo proposto, comparou-se os resultados obtidos com este modelo com aqueles advindos de uma análise empregando o ABAQUS®, *software* baseado no Método dos Elementos Finitos. Por fim, observou-se uma boa concordância entre os resultados, demonstrando a eficácia do modelo e sobretudo sua relevância quando de uma avaliação mais realista e sofisticada do comportamento estrutural de vigas metálicas.

Palavras-chave: Vigas Metálicas. Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli. Análise Elastoplástica. Teoria da Plasticidade. Equações de Prandtl-Reuss Modificadas.

ABSTRACT

The stress and displacement analysis is necessary to design and build efficiently any structure. In general, the current accepted procedures to design steel beams admit the linear-elastic material behavior and are based on the assumptions adopted by the Euler-Bernoulli beam theory. However, it is critical to predict the behavior of the structural elements under plastic deformation, in order to understand the failure modes and the plastic hinges formation in steel beams. Accordingly, this work proposes a theoretical procedure to evaluate stresses and displacements in steel beams under elastoplastic deformation, assuming the kinematic assumptions of the Euler-Bernoulli beam theory. Moreover, an iterative-incremental procedure based on the reformulated Prandtl-Reuss equations proposed by Mendelson is employed to compute the plastic strains, in the context of a secant or total elastoplastic formulation. In order to verify the proposed approach, its results are compared with those ones obtained by the finite element method analysis. This comparison demonstrates the effectiveness of the proposed model, and shows the possibility to realize more realistic and sophisticated analysis of steel beams using this approach.

Keywords: Steel Beams. Euler-Bernoulli Beam Theory. Elastoplastic Analysis. Theory of Plasticity. Reformulated Prandtl-Reuss Equations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Diante de um cenário de crescente aumento das demandas atreladadas às necessidades humanas e do meio ambiente, a Engenharia tem se tornado indispensável. Mais especificamente, os estudos depreendidos pela Engenharia Civil têm contribuído bastante para atender estas referidas demandas, sobretudo no que diz respeito à construção. Nesses moldes, esclarece-se que, de maneira geral, os projetos de componentes estruturais admitem que as possíveis solicitações externas conduzem a um comportamento elástico dos materiais constituintes, como mencionam Jorge e Dinis (2005).

Todavia, há a necessidade de prever o comportamento dos elementos estruturais sob regime de deformações plásticas, sobretudo devido a questões de segurança. Do mesmo modo, a simulação dos processos de fabricação de componentes metálicos por conformação mecânica (laminação, forjamento, trefilação, extrusão, estampagem) envolvem inevitavelmente deformações plásticas. Nesta perspectiva, evidencia-se a importância do entendimento dos fenômenos e modelos relacionados à formulação do comportamento plástico dos materiais.

1.1. Motivação e Justificativa do Trabalho

A maioria dos procedimentos adotados em projetos de componentes estruturais baseiam-se nas restrições cinemáticas adotadas pela teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Além disso, admite-se que os possíveis carregamentos externos conduzirão o material a um comportamento linear-elástico, o que significa que as deformações serão reversíveis e que a Lei de Hooke para a relação tensão-deformação é válida. Em contrapartida, a análise do comportamento de estruturas sob o regime de deformação plástica tem se tornado importante, além de ter alcançado avanços significativos nas últimas décadas (Baker and Heyman (1969); Horne (1979); Moy (1981); Neal (1977)). Em adição, Baker (1949) observou que os métodos de dimensionamento que consideram o regime plástico para o caso de vigas contínuas, proporcionam maiores níveis de economia.

Obviamente, nas construções tradicionais de engenharia, engenheiros e projetistas devem dimensionar as estruturas cuidadosamente em vista a impedir deformações excessivas e limitar o estado de tensão a certo nível. No entanto, existem alguns tipos de componentes estruturais que necessitam de uma análise mais minuciosa, sob a perspectiva de uma teoria mais sofisticada. À título de ilustração, cita-se alguns elementos constituintes de veículos automotivos, os quais precisam ser dimensionados de forma a otimizar a absorção de energia de deformação, reduzindo assim os efeitos de um possível acidente. Neste caso, opta-se por utilizar fundamentalmente a zona de comportamento plástico do material (JORGE, 2001).

Diante da referida necessidade do estudo e modelagem do comportamento de elementos estruturais sob um regime elastoplástico de deformação, propõe-se neste trabalho uma formulação semi-analítica para análise elastoplástica de vigas metálicas. O presente modelo adota as considerações ou restrições cinemáticas da teoria de vigas de Euler-Bernoulli no desenvolvimento da formulação. Do mesmo modo, para a avaliação das deformações plásticas, ultiliza-se um procedimento incremental-iterativo, baseado nas Equações de Prandtl-Reuss modificadas, proposto em Mendelson (1968). Dessa forma, o modelo proposto viabiliza a realização de análises mais realistas e sofisticadas de vigas metálicas sob regime elastoplástico de deformação.

1.2. Objetivo Geral

Propor uma formulação semi-analítica para a análise elastoplástica de vigas metálicas, baseada na teoria de vigas de Euler-Bernoulli e num procedimento incremental-iterativo para avaliação das deformações plásticas.

1.3. Objetivos Específicos

Avaliar tensões e deslocamentos em vigas metálicas sob regime elastoplástico de deformação;

Empregar um procedimento incremental-iterativo proposto em Mendelson (1968), baseado nas equações de Prandtl-Reuss modificadas, para avaliação das deformações plásticas;

Investigar a formação de zonas de plastificação, suas respectivas localizações no domínio da viga, assim como a propagação destas durante a aplicação do carregamento;

Desenvolver recursos imagéticos, tais como campos de tensões e deformações e diagramas em seções específicas, de modo a obter celeridade na interpretação da análise.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para uma melhor compreensão e formulação do problema investigado, faz-se necessário o estudo de alguns campos da mecânica dos sólidos. Neste aspecto, apresentam-se as três teorias principais que serviram de embasamento para a formulação e melhor entendimento do problema. Destaca-se, no entanto, que estas teorias serão apresentadas de forma bem suscinta, sobretudo por questões de objetividade, sendo apenas a teoria da plasticidade um pouco mais longa e detalhada, dada sua inerente complexidade.

2.1. Introdução à Teoria da Elasticidade

A teoria da elasticidade se preocupa com o entendimento e formulação do comportamento reológico dos materiais, em outras palavras, esta teoria propõe uma maneira pela qual o material se deforma quando sujeito a ações externas. De maneira geral, concebe-se um modelo físico-matemático para modelagem do comportamento reológico dos materiais, levando-se em consideração resultados obtidos experimentalmente, o que caracteriza a via fenomenológica. Em adição, de modo a simplificar a análise, considera-se que os materiais são contínuos, o que significa dizer que as funções que representam os esforços, deslocamentos, deformações, etc., são contínuas no espaço e no tempo. Esta hipótese é razoável para o caso do material estudado neste trabalho, posto que a dimensão máxima dos cristais de um metal é, no geral, infinitamente inferior às dimensões comumentes analisadas pela engenharia (SILVA, 2004).

Dando continuidade, definem-se a seguir alguns conceitos fundamentais da teoria de elasticidade, a saber, (1) forças externas, (2) esforços internos, (3) movimento de corpo rígido, (4) tensão, e (5) deformação.

(1) Forças Externas – são forças exercidas exteriormente ao corpo por meio de mecanismos exteriores a este e dividem-se em forças de corpo e de superfície. O primeiro deles pode ser entendido como forças que atuam no volume do corpo, como a gravidade por exemplo. Por outro lado, as forças de superfície são as que atuam na superfície de um corpo, como o peso distribuído na superfície de uma estrutura por exemplo.

(2) Esforços Internos – são forças internas ao corpo sólido exercidas entre as partes constituintes deste. À título de ilustração, pode-se exemplificar esforços internos como o esforço normal e transversal, o momento fletor e torsor atuantes em uma determinada

seção transversal de um elemento estrutural, de forma a garantir o equilíbrio das partes, além de satisfazer a terceira lei de Newton, com ação e reação atuantes em partes distintas do corpo.

(3) Movimento de Corpo Rígido – consiste no deslocamento dos pontos constituintes de um corpo, sem que haja, no entanto, variação da distância entre eles.

(4) Tensão – definida como a força interna por unidade de área, esta possibilita analisar os esforços internos de maneira independente das dimensões e geometria do corpo.

(5) Deformação – definida como a variação da distância entre dois pontos no interior de um corpo dividida pela distância original, esta viabiliza analisar os deslocamentos independentemente das dimensões e geometria do corpo.

Assim sendo, apresenta-se nos subitens a seguir, uma breve abordagem acerca da análise de tensão, análise de deformação e relações constitutivas.

2.1.1. Análise de Tensão

Esclarece-se, inicialmente, que os estados de tensão em torno de um ponto consistem em grandezas físicas tensoriais ou, em outras palavras, podem ser expressos como um vetor com nove componentes para o estado de tensão tridimensional e quatro componentes para o estado plano de tensão (SILVA, 2004). Assim sendo, fala-se aqui de tensor de tensão que consiste na organização das componentes do vetor de tensão em relação à um sistema de coordenadas previamente escolhido.

Admitindo-se um carregamento externo aplicado à um corpo genérico composto pelas forças P_1 a P_8 e um plano de análise AB conforme ilustra a Figura 1. Considerando-se um elemento de área (*ΔA*) neste plano sob ação de um elemento de força (*ΔP*), a tensão pode então ser definida como segue:

$$\sigma = \frac{\Delta P}{\Delta \mathrm{A}} \qquad (1)$$

Fazendo-se uso da Equação 1, pode-se definir a tensão em um ponto (*p*) do material tornando *ΔA* infinitamente pequeno. Dessa forma, a tensão em (*p*) pode ser expressa como:

$$\sigma_p = \lim_{\Delta \mathrm{A} \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta \mathrm{A}} \qquad (2)$$

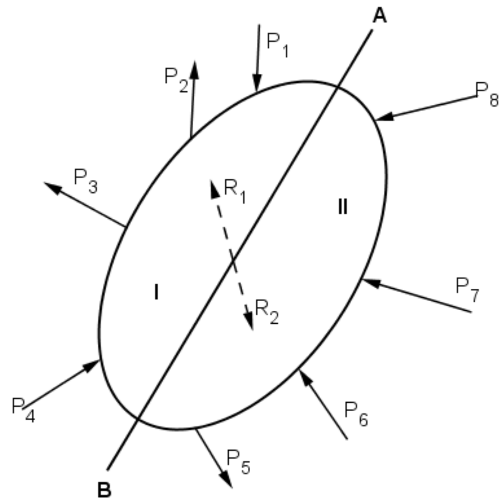


Figura 1: Ilustração de um corpo genérico sujeito à um carregamento externo.
Fonte: Adaptado de Mendelson (1968).

De modo a ter uma definição completa do estado de tensão em um ponto, é necessária a avaliação das tensões relativas à três planos mutualmente perpendiculares entre si, que em escala infinitesimal definem este ponto. Considerando-se um sistema de eixos perpendiculares entre si (*x*, *y*, *z*) e um paralelepípedo com dimensões infinitesimais (*dx*, *dy*, *dz*), como ilustrado na Figura 2, observa-se que a definição completa do estado de tensão neste ponto se dá por meio de um tensor com nove componentes, como previamente mencionado. Abaixo, explicita-se de maneira geral o estado de tensão em um ponto.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

A Figura 2 mostra uma representação do estado de tensão em um ponto, ilustrando a convenção de sinais geralmente adotada, sendo nesta figura todas as tensões positivas. As componentes da diagonal principal da matriz da Equação 3 representam as tensões normais, enquanto que as demais referem-se às tensões de cisalhamento.

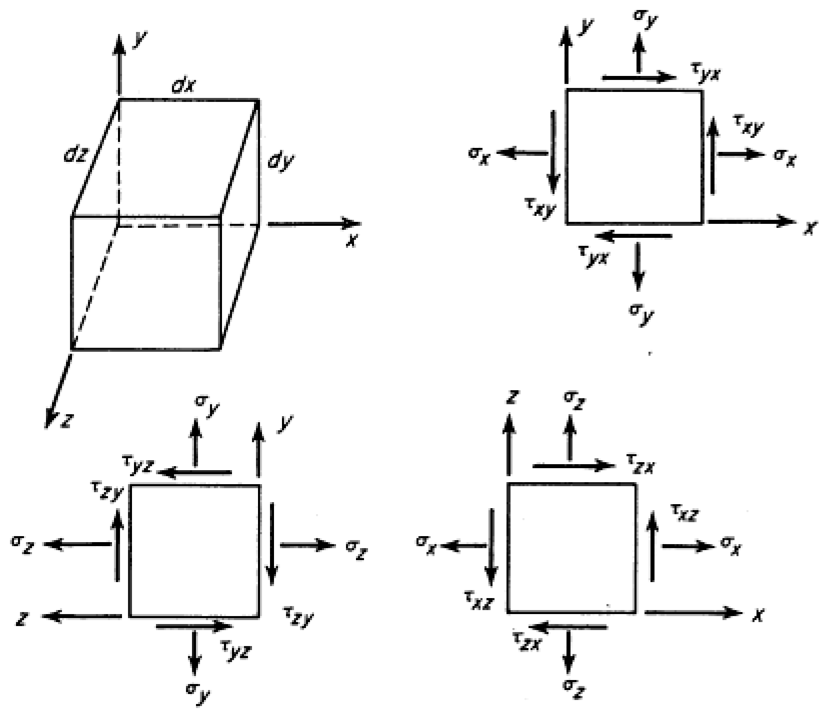


Figura 2: Ilustração e convenção do estado de tensão em um ponto.

Fonte: Mendelson (1968).

Dando continuidade, menciona-se que, de modo a estabelecer o equilíbrio à translação e rotação, dois conjuntos de equações são comumente encontrados na literatura sobre teoria da elasticidade. A Equação 4 estabelece o equilíbrio à translação.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

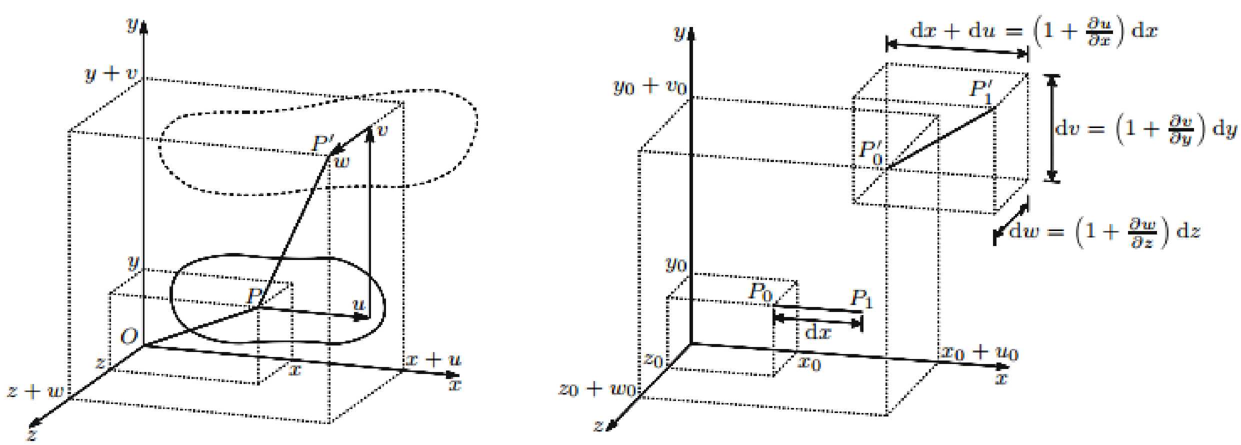
Onde $F_x, F_y\ e\ F_z$ representam as componentes da força de corpo por unidade de volume, concernentes aos eixos $x, y\ e\ z$, respectivamente. As Equações 4 são conhecidas na literatura como Equações Diferencias de Equilíbrio. Quanto ao equilíbrio à rotação, pode-se deduzir a seguinte relação:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\ ;\ \tau_{yz} = \tau_{zy}\ ;\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad (5)$$

Por fim, elucida-se que para o caso desta pesquisa, adotou-se uma análise considerando-se um estado plano de tensão, sendo, portanto, nulas todas as componentes de tensão na direção de z.

2.1.2. Análise de Deformação

A análise de deformação está relacionada com os deslocamentos relativos dos pontos que compõem o corpo, estes últimos definidos em relação à um sistema de eixos referencial. Basicamente, todos os pontos do corpo podem apresentar os mesmos deslocamentos, diz-se então que houve deslocamento de translação e/ou rotação de corpo rígido do corpo. A deformação, por outro lado, é acompanhada por esforços internos, e constituem num alongamento ou encurtamento, ou mesmo distorção, de uma porção específica do corpo. A análise de deformação é importante para a análise estrutural, uma vez que as tensões podem ser relacionadas com as deformações, fornecendo-se os parâmetros necessários para uma análise completa da estrutura. A hipótese de continuidade é de grande valia, pois permite que as deformações sejam definidas independentemente das dimensões do elemento estrutural. A seguir, baseando-se em Silva (2004), apresentam-se alguns conceitos iniciais da análise de deformação, a saber, as propriedades matemáticas do tensor de deformações e suas relações com os deslocamentos, definindo-se, assim, o movimento dos pontos constituintes de um corpo.



(a) **(b)**

Figura 3: (a) deslocamento do ponto genérico P de um corpo; (b) determinação da deformação ε_{xx}.

Fonte: Silva (2004).

Quanto ao tensor de deformações, tem-se três deformações normais e três deformações angulares, ou distorções. Assim sendo, o estado de deformação em um ponto fica totalmente definido por um tensor com seis componentes independentes. A Figura 3 (a) ilustra um sistema de coordenadas ortogonais (*x*, *y*, *z*) com os pontos que constituem o corpo. No processo de deformação do corpo, o ponto *P* é deslocado para a posição *P'*, sendo este deslocamento representado pelo vetor $\overrightarrow{PP'}$. Dessa forma, após a deformação, o ponto terá as seguintes coordenadas: (*x*+*u*, *y*+*v*, *z*+*w*), onde *u*, *v* e *w* são componentes do campo de deslocamentos nas direções de *x*, *y* e *z*, respectivamente, sendo, assim, funções contínuas dependentes destas coordenadas.

A Figura 3 (b) mostra uma representação oportuna para a formulação da deformação normal na direção de *x* (ε_{xx}), esquematizando um segmento de reta de comprimento *dx* definido pelos pontos $P_0(x_0,y_0,z_0)$ e $P_1(x_0+dx,y_0,z_0)$. Assim, após a deformação, as posições destes pontos serão $P'_0(x_0+u_0, y_0+v_0, z_0+w_0)$ e $P'_1(x_0+dx+u_1, y_0+v_1, z_0+w_1)$, respectivamente. A partir de operações algébricas e geométricas, pode-se constatar que:

$$u_1 = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$v_1 = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}dx \qquad (6)$$

$$w_1 = w_0 + \frac{\partial w}{\partial x}dx$$

Como a deformação normal consiste na variação do comprimento em relação ao comprimento inicial, observa-se que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\overrightarrow{P_0{'}P_1{'}} - dx}{dx} \;\therefore\; \overrightarrow{P_0{'}P_1{'}} = (1+\varepsilon_{xx})dx \qquad (7)$$

Fazendo-se uso do teorema de Pitágoras para expressar $\overrightarrow{P_0{'}P_1{'}}$ em função de suas projeções nas direções dos eixos coordenados, e atentando-se para o fato deste procedimento ser perfeitamente reproduzível para os outros dois eixos (*y* e *z*), pode-se chegar às seguintes relações:

$$\varepsilon_{xx} + \frac{{\varepsilon_{xx}}^2}{2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{yy} + \frac{{\varepsilon_{yy}}^2}{2} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \tag{8}$$

$$\varepsilon_{zz} + \frac{{\varepsilon_{zz}}^2}{2} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

Dando continuidade, segue o procedimento para a determinação das distorções, a fim de se obter a completa caracterização do estado de deformação em um ponto. Inicalmente, considere os segmentos de reta perpendiculares entre si antes da deformação, como ilustra a Figura 4. Após a deformação, tem-se os segmentos compostos por $\overline{P_0{}'P_1{}'}$ e $\overline{P_0{}'P_2{}'}$, também ilustrados na Figura 4.

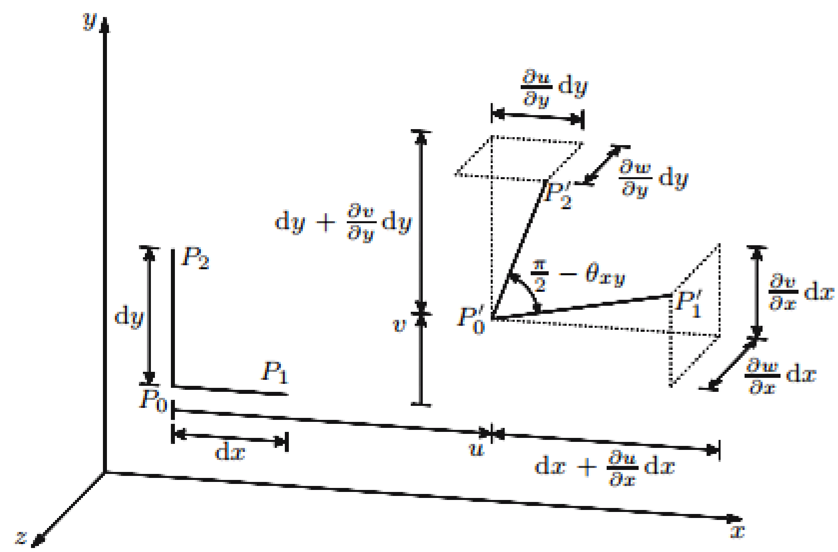


Figura 4: Ilustração esquemática para determinação das distorções.

Fonte: Silva (2004).

De posse desta representação, fazendo-se o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{P_0{}'P_1{}'}$ e $\overrightarrow{P_0{}'P_2{}'}$, depois de algumas manipulações algébricas, pode-se chegar à seguinte relação:

$$sen(\theta_{xy}) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v \partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w \partial w}{\partial x\, \partial y}}{(1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})} \tag{9}$$

Analogamente, pode-se provar que:

$$sen(\theta_{xz}) = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v \partial v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w \partial w}{\partial x\, \partial z}}{(1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{zz})} \tag{10}$$

$$sen(\theta_{yz}) = \frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u \partial u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v \partial v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w \partial w}{\partial y\, \partial z}}{(1+\varepsilon_{yy})(1+\varepsilon_{zz})} \tag{11}$$

De posse das Equações 8, 9, 10 e 11, define-se completamente o estado de deformação em um ponto. Salienta-se, no entanto, que esta formulação da deformação em um ponto é geral e bastante complexa, uma vez que são expressões longas, envolvem derivadas parciais, e as deformações e distorções são fornecidas de forma implícita.

Dessa forma, torna-se oportuno adotar algumas considerações simplificadoras. A principal delas advém de uma condição quase sempre adotada nos projetos de engenharia, das deformações serem muito pequenas, imperceptíveis para o usuário da estrutura, sendo, portanto, bastante razoável considerá-las infinitesimais. Assim sendo, é possível fazer diversas simplificações nas Equações 8, 9, 10 e 11, obtendo-se, assim, uma caracterização mais simples do estado de deformação em um ponto. As Equações 12 e 13 representam o estado de deformação em um ponto para um regime de pequenas deformações.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{12}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\gamma_{xz}}{2} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \tag{13}$$

$$\frac{\gamma_{yz}}{2} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

2.1.3. Relações Constitutivas

Nos itens anteriores, foram apresentados os aspectos teóricos relacionados com análises de tensão e de deformação em um ponto de forma independente, como se estas análises pudessem ser realizadas de forma dissociada, embora se falasse na relação entre elas. Nestes termos, este item tem como objetivo apresentar as relações constitutivas, que constituem o elo entre tensões e deformações, como destaca Silva (2004). Nesses moldes, esclarece-se que a via fenomenológica é sempre usada no processo de quantificação e entendimento do comportamento reológico dos materiais. Em adição, neste processo se faz sempre necessário a adoção de modelos de comportamento, os quais são diversos na literatura. Nesta seção, considera-se o modelo linear elástico proposto por Robert Hooke (Lei de Hooke) e, por fim, admite-se que o material é isotrópico.

Com base nessas informações, torna-se oportuno analisar um estado de tensão uniaxial definido pela tensão longitudinal (σ_{xx}), e encontrar a sua relação com as deformações longitudinal (ε_{xx}) e transversais (ε_{yy} e ε_{zz}), e replicar esta formulação para as outras direções, visto que a consideração de material isotrópico permite esta abordagem. De maneira geral, considerando-se σ_{xx} positivo, observa-se um alongamento na direção longitudinal (x) e encurtamentos idênticos nas direções transversais (y e z). Estas deformações nas direções transversais são decorrentes do efeito Poisson, que propõe uma relação linear entre as deformações transversais e longitudinal, definida pelo coeficiente de Poisson (v). Por sua vez, a lei de Hooke propõe uma relação linear entre tensão e deformação longitudinais, definida pelo módulo de elasticidade (E). Atentando-se aos aspectos mencionados, e observando o princípio da superposição dos efeitos, pode-se chegar nas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - v(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - v(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - v(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Similarmente, constata-se que as tensões tangenciais provocam distorções no plano em que atuam, permitindo assim uma formulação para γ_{xy}, γ_{xz}, e γ_{yz}. As relações entre as deformações angulares e as tensões tangenciais são apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

Onde *G* consiste no módulo de elasticidade de cisalhamento, e está relacionado com *E* e *v* por meio da Equação 16.

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{16}$$

De posse das Equações 14, 15 e 16, define-se completamente a lei constitutiva de um material isotrópico com comportamento elástico linear. A seguir, apresenta-se um breve apanhado sobre a teoria da plasticidade.

2.2. Introdução à Teoria da Plasticidade

Mendelson (1968) menciona que a teoria da plasticidade é compreendida em duas categorias, a saber, teorias físicas e teorias matemáticas. As teorias físicas se empenham em explicar o motivo pelo qual os metais apresentam comportamento plástico, considerando o que acontece com os átomos, cristais e grãos que constituem o material. Por outro lado, as teorias matemáticas se importam com o aspecto sistemático, objetivando formulações passíveis de verificação experimental, sendo, portanto, aplicáveis do ponto de vista macroscópico. Esta categoria é mais estudada na Engenharia de Estruturas, pois fornece as ferramentas necessárias para aplicações práticas.

Dessa forma, este material restringe-se às teorias matemáticas envolvidas no estudo da plasticidade, e serão abordados os seguintes conceitos fundamentais do modelo elastoplástico: critério de escoamento, regras de endurecimento e de escoamento plástico e leis constitutivas.

2.2.1. Ensaio de Tração Uniaxial e Observações Experimentais

O ensaio de tração uniaxial consiste no experimento mais conhecido, simples e importante do estudo da mecânica dos materiais. Um corpo sólido prismático é inserido em um aparato para que seja submetido à acréscimos graduais de tensão na direção longitudinal, de forma a alongá-lo nesta direção, onde são mensuradas as tensões e as deformações (tanto longitudinais como transversais). Nesta perspectiva, define-se a tensão de engenharia (σ_n) pela Equação 17, onde *P* representa a carga longitudinal agindo sobre o corpo, enquanto A_0 representa a área inicial da seção transversal.

$$\sigma_n = \frac{P}{A_0} \tag{17}$$

Em adição, define-se também a deformação longitudinal média (ε) a partir da Equação 18, na qual l_0 representa o comprimento inicial, e l equivale ao comprimento do corpo após a aplicação da carga.

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_o} \tag{18}$$

A partir das leituras dos esforços de tração e dos respectivos alongamentos, pode-se traçar um diagrama relacionando a tensão de engenharia e a deformação longitudinal média (gráfico tensão-deformação). Para uma liga metálica, de acordo com observações experimentais, tem-se um gráfico tensão-deformação assumindo o aspecto representado na Figura 5.

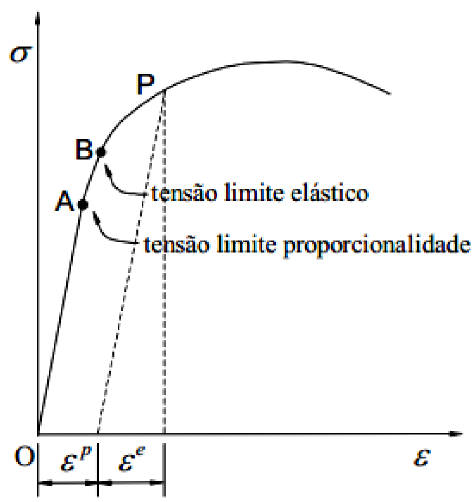


Figura 5: Gráfico tensão-deformação de uma liga metálica.

Fonte: Jorge e Dinis (2005).

Como pode ser observado na Figura 8, o ponto A consiste na tensão limite de proporcionalidade, ponto a partir do qual o material passa a apresentar um comportamento não-linear. Enquanto isso, o ponto B representa a tensão de escoamento, que é a tensão limite do comportamento elástico. Nos metais mais correntes, o trecho AB da curva é muito pequeno, sendo por isso razoável admitir não haver distinção entre a tensão de escoamento e a tensão limite de proporcionalidade.

2.2.2. Modelos Uniaxiais Idealizados para o Comportamento Elastoplástico do Material

Diante da complexidade inerente ao real comportamento do gráfico tensão-deformação, alguns modelos foram idealizados, buscando-se facilitar o estudo do comportamento elastoplástico dos materiais. Tomando-se a tensão aplicada (σ) e a deformação (ε), pode-se fazer as seguintes distinções para o comportamento idealizado dos materiais:

- *Comportamento linear elástico*: esta idealização é uma das mais usadas no estudo do comportamento de estruturas. Esta admite que o material assumirá comportamento que obedece à lei de Hooke, o que caracteriza uma relação linear entre tensão e deformação. A Figura 6 ilustra fisicamente esta idealização.

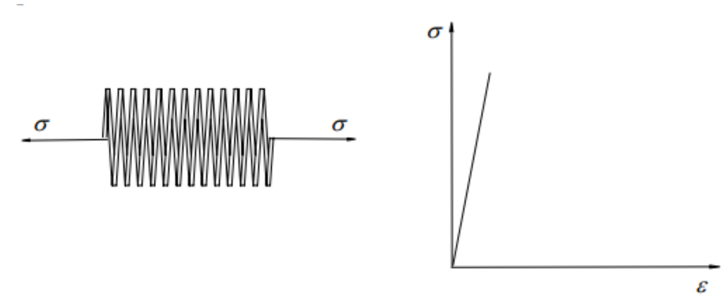


Figura 6: Modelo linear elástico.

Fonte: Jorge e Dinis (2005).

- *Comportamento rígido-perfeitamente plástico*: em situações em que pode surgir deformações plásticas a idealização de comportamento linear elástico é incapaz de prover meios sistemáticos para análise. Assim sendo, propõe-se idealizações para o comportamento plástico do material, sendo o mais básico deles o comportamento rígido-perfeitamente plástico. Nesta idealização, tem-se o material se comportando como um corpo rígido até um certo nível de tensão, logo após este nível de tensão o material inicia um processo de deformação plástica continuado, sem que haja necessidade de acréscimos de tensões. Estes conceitos são, fisicamente, ilustrados na Figura 7.

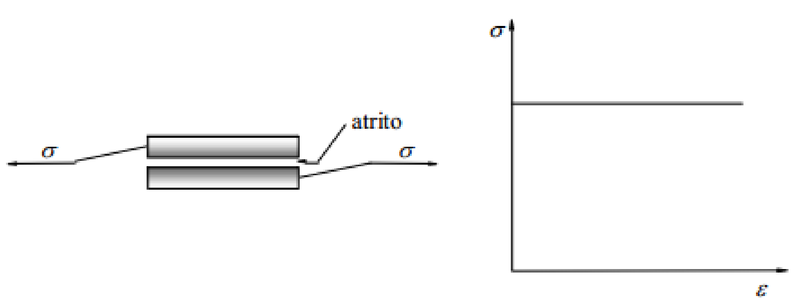


Figura 7: Modelo rígido-perfeitamente plástico.

Fonte: Jorge e Dinis (2005).

- *Comportamento rígido-plástico com endurecimento linear*: esta idealização é bem similar à anterior, no entanto, no processo de deformação plástica assume-se uma relação linear entre tensão e deformação plástica e, portanto, um acréscimo de deformação plástico requer, necessariamente, um acréscimo de tensão. A Figura 8 ilustra estes conceitos.

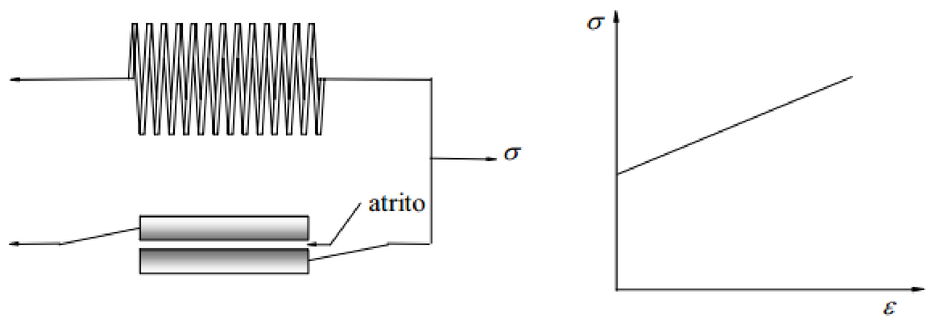


Figura 8: Modelo rígido-plástico com endurecimento linear.

Fonte: Jorge e Dinis (2005).

- *Comportamento elástico-perfeitamente plástico*: assume-se um comportamento linear elástico até um certo nível de tensão, o qual é conhecido como tensão de escoamento. Depois de atingido esta tensão, o material apresenta um comportamento perfeitamente plástico, o que representa um processo de deformação plástica continuado, sem que haja necessidade de acréscimos de tensões. A Figura 9 ilustra estes conceitos.

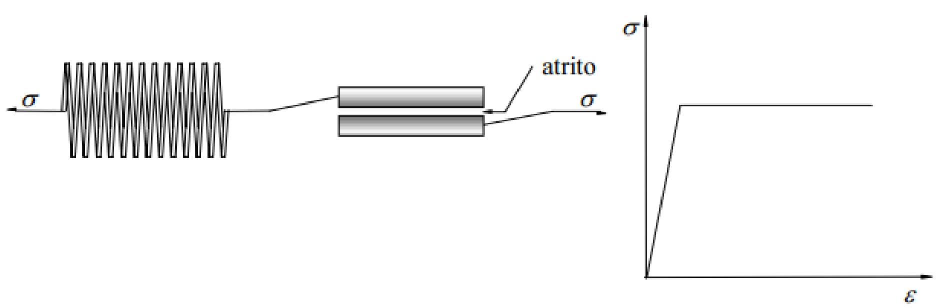


Figura 9: Modelo elástico-perfeitamente plástico.

Fonte: Jorge e Dinis (2005).

- *Comportamento elastoplástico com endurecimento linear*: por fim, este modelo considera um comportamento linear elástico até a tensão de escoamento. Neste regime assume-se que o material se deforma conforme a lei de Hooke. Depois de atingido esta tensão, o material apresenta deformação plástica com relação linear entre tensão e deformação e, portanto, um acréscimo de deformação plástico requer, necessariamente, um acréscimo de tensão. A Figura 10 ilustra estes conceitos.

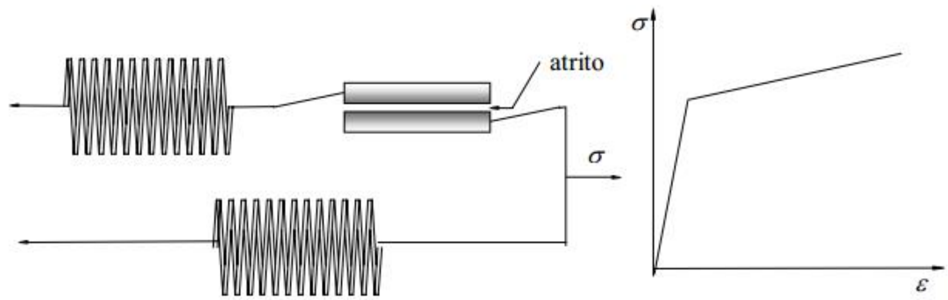


Figura 10: Modelo elastoplástico com endurecimento linear.

Fonte: Jorge e Dinis (2005).

2.2.3. Lei da Decomposição

O comportamento elastoplástico compreende o fenômeno pelo qual o material responde inicialmente de maneira elástica, e a partir de um certo nível de tensão apresenta um comportamento inerentemente plástico.

A Figura 11 mostra o modelo reológico elastoplástico unidimensional. Por consequência da tensão aplicada (σ), o material sofrerá uma deformação (ε), a qual pode ser decomposta em sua componente elástica e sua componente plástica, como mostra a Equação 19.

$$\varepsilon = \varepsilon^{\mathrm{p}} + \varepsilon^{e} \tag{19}$$

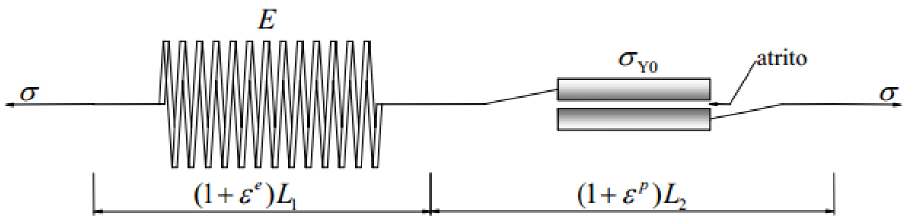


Figura 11: Modelo reológico elastoplástico unidimensional.

Fonte: Jorge e Dinis (2005).

Como já mencionado, a deformação causada pelo carregamento será elástica até um certo ponto (limite elástico), e dentro deste intervalo esta deformação satisfaz à lei de Hooke. A deformação plástica inicia-se quando a tensão aplicada atinge o limite elástico, ou seja, quando esta excede a tensão de escoamento (Y).

À luz destas considerações, em uma formulação elastoplástica é conveniente decompor o tensor das deformações em uma componente elástica e uma componente plástica, e estabelecer modelos matemáticos separadamente. Dessa forma, para o comportamento elástico utiliza-se da teoria da elasticidade, e para o comportamento plástico a teoria da plasticidade, onde três aspectos importantes devem ser considerados:

(i) Estabelecer um critério de escoamento, indicando o início da plastificação;

(ii) Estabelecer uma lei de endurecimento depois da plastificação iniciada;

(iii) Definir uma regra de escoamento, de modo a desenvolver uma relação entre tensão e deformação pós-plastificação.

2.2.4. Superfície de Escoamento

Atentando-se aos aspectos supracitados, faz-se necessário introduzir uma abordagem que extrapole a noção básica de carregamentos e modelos unidimensionais, em vista a estender estes conceitos para um estado de tensão tridimensional. Assim sendo, enunciam-se, abaixo, quatro postulados importantes sobre o início do processo de escoamento.

Existe uma função geral para o escoamento - assume-se que o escoamento depende apenas do estado de tensão e não da maneira pela qual este estado foi alcançado. Uma lei define um limite de elasticidade, que consiste em um critério para o início do escoamento. Em outras palavras, admite-se a existência de uma função de escoamento $f\ (\sigma_{ij})$, tal que:

Se $f\left(\sigma_{ij}\right) < 0$ ou $f\left(\sigma_{ij}\right) = 0$ e $f^*\left(\sigma_{ij}\right) < 0$, então o material está no regime elástico. Se $f\left(\sigma_{ij}\right) = 0$ e $f^*\left(\sigma_{ij}\right) \geq 0$, então o material está exibindo um comportamento plástico. Onde $f(\sigma_{ij})$ define a superfície de escoamento, e $f^*(\sigma_{ij})$ indica o incremento do carregamento.

O material é isotrópico – este postulado diz que não há diferença entre as direções escolhidas, o que significa que a função de escoamento será a mesma independentemente das direções dos eixos. Uma implicação importante deste postulado é a possibilidade de definir $f\left(\sigma_{ij}\right)$ apenas como função das tensões principais, $f\ (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

O escoamento independe do estado de tensão hidrostático – isso significa que a função f depende apenas das tensões desviadoras principais, S_1, S_2 e S_3, ou seja, $f\ (S_1, S_2, S_3)$. Utilizando-se os invariantes das tensões desviadoras, J_1, J_2 e J_3, e atentando-se para o fato que $J_1 = 0$, tem-se que f é função dos invariantes J_2 e J_3, ou seja, $f\ (J_2, J_3)$.

Comportamentos idênticos para tração e compressão – postula-se aqui que o material apresenta as mesmas propriedades de escoamento tanto sob efeito de tração quanto de compressão. Isso implica na imposição que a função de escoamento seja uma função par, ou seja, $f\left(\sigma_{ij}\right) = f\left(-\sigma_{ij}\right)$.

Estes constituem os quatro postulados principais para o desenvolvimento de uma função de escoamento sob o viés da teoria clássica da plasticidade.

Fundamentando-se no exposto, desenvolve-se a seguir conceitos fundamentais relacionados à função de escoamento genérica.

2.2.4.1. Função de Escoamento Genérica

Sem perda de generalidade, uma função para a superfície de escoamento pode ser escrita como $f\ (J_2, J_3) = 0$, sendo esta definida no espaço das tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. À luz dos postulados supracitados, os estados de tensões principais cujos pontos estiverem dentro desta superfície determinam um comportamento elástico do material, enquanto os pontos que estiverem sobre a superfície indicam o início de um comportamento plástico do material.

Nesse contexto, a Figura 12 ilustra o espaço das tensões principais, assim como a superfície de escoamento com suas peculiaridades e adjacências. Desta forma, a reta $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ representa o eixo hidrostático, sendo este igualmente inclinado em relação aos eixos principais, com ângulo de inclinação igual a $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$. Intuitivamente, a superfície de escoamento consiste em um prisma infinito cuja geratriz é paralela ao eixo hidrostático, devido ao fato do escoamento independer do estado de tensão hidrostático.

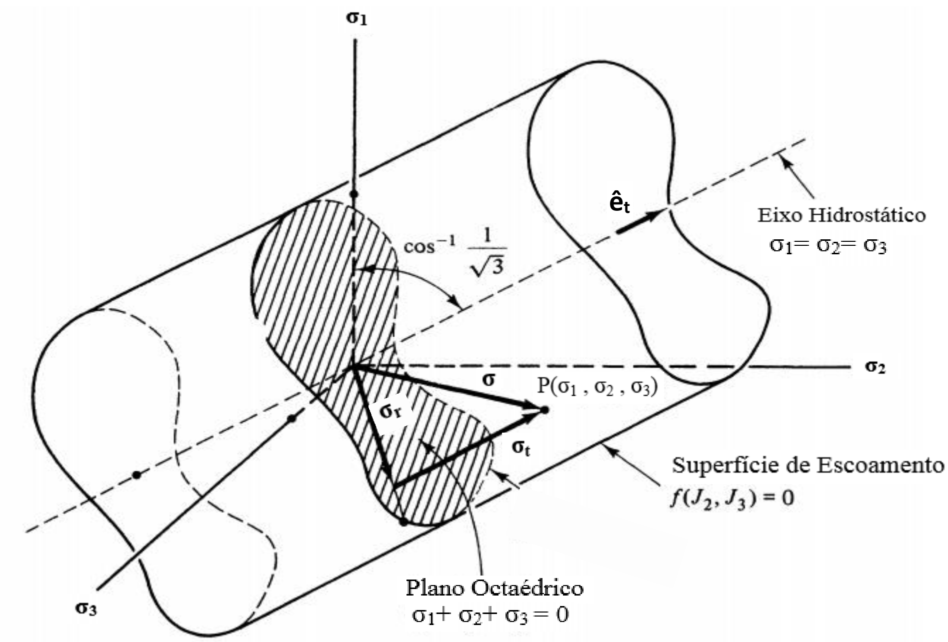


Figura 12: Superfície de escoamento genérica.

Fonte: Adaptado de Shames e Cozzarelli (2014).

Dando continuidade, observa-se a representação de um ponto $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ genérico situado dentro da superfície de escoamento, do vetor $\boldsymbol{\sigma}$ e das suas componentes nas direções desviadora ($\boldsymbol{\sigma_r}$) e hidrostática ($\boldsymbol{\sigma_t}$), do plano octaédrico e do vetor direcional ($\hat{e}_t$), que descreve a direção do eixo hidrostático. Desta forma, utilizando-se de conhecimentos algébricos e geométricos, pode-se verificar que $\boldsymbol{\sigma_r}$ e $\boldsymbol{\sigma_t}$ podem ser expressos, respectivamente, pelas Equações 20 e 21.

$$\boldsymbol{\sigma_r} = S_1\vec{\imath} + S_2\vec{\jmath} + S_3\vec{k} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\sigma_t} = \sigma_m\vec{\imath} + \sigma_m\vec{\jmath} + \sigma_m\vec{k} \tag{21}$$

Onde σ_m corresponde à tensão média ($\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$), e S_1, S_2 e S_3 são as tensões principais do estado de tensão desviador.

2.2.5. Critério de Escoamento de Von Mises

O critério de escoamento proposto por Von Mises, estabelece a seguinte expressão para a função de escoamento.

$$f\ (J_2) = J_2 - \frac{Y^2}{3} = 0 \tag{22}$$

Atentando-se para o fato de que $\sqrt{2J_2} = |\boldsymbol{\sigma_r}|$. O critério de escoamento de Von Mises pode ser geometricamente representado por um cilindro circular infinito com raio igual a $\sqrt{\frac{2}{3}}Y$, representado no sistema de coordenadas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ conforme ilustra a Figura 13.

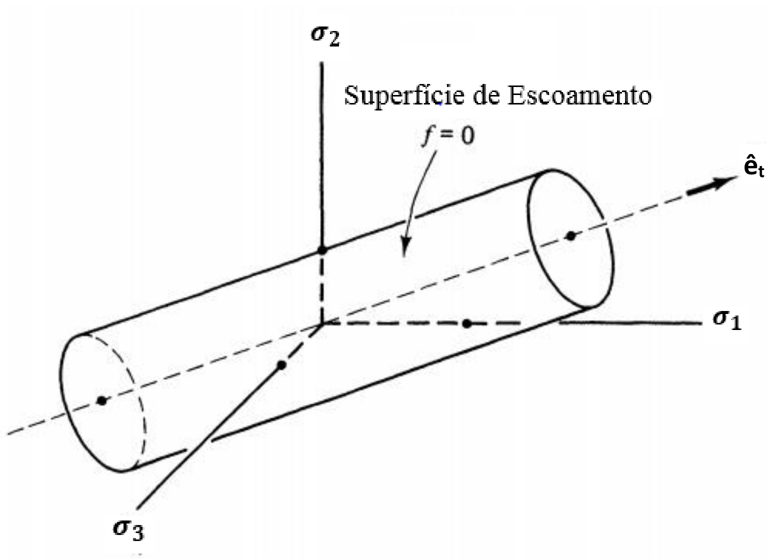


Figura 13: Representação geométrica do critério de escoamento de Von Mises.

Fonte: Adaptado de Shames e Cozzarelli (2014).

2.2.5.1. Critério de Von Mises para um Estado Plano de Tensão

O segundo invariante do estado de tensão desviador, J_2, pode ser também expresso como $J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$. Assim sendo, para um estado plano de tensão, onde $\sigma_3 = 0$, a Equação 22 pode ser simplificada da seguinte forma.

$$\sigma_1{}^2 - (\sigma_2\sigma_1)^2 + \sigma_2{}^2 = Y^2 \qquad (23)$$

A Equação 23 caracteriza uma elipse rotacionada à 45° em relação à horizontal no plano σ_1, σ_2 , conforme ilustra a Figura 14.

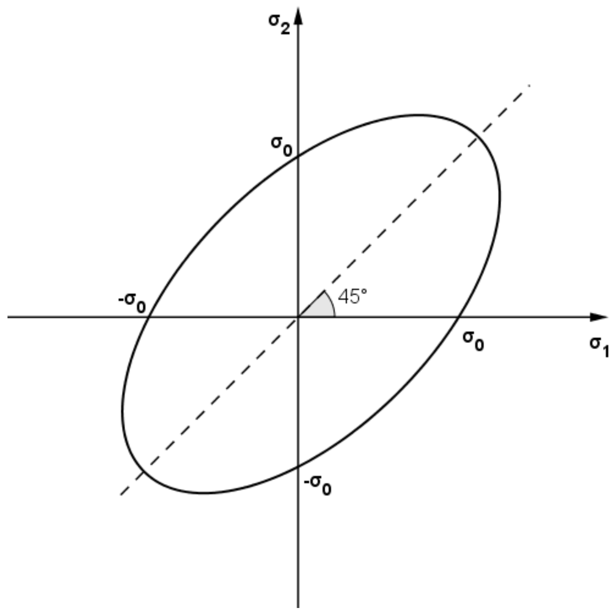


Figura 14: Representação geométrica do critério de Von Mises para o Estado Plano de Tensão.

Fonte: Adaptado de Mendelson (1968).

2.2.5.2. Critério da Máxima Energia de Distorção

O critério da máxima energia de distorção assume que o escoamento iniciará quando a energia de distorção for igual a energia de distorção no momento do escoamento para um estado uniaxial de tensão, ou seja, quando $u_d = u_{d(lim)}$, onde u_d representa a energia de distorção. Neste ínterim, a Equação 24 expressa u_d em termos de J_2.

$$u_d = \frac{1+v}{E} J_2 \qquad (24)$$

Para um estado uniaxial de tensão, ao iniciar o escoamento, tem-se $u_{d(lim)} = 2\,\frac{1+v}{E} Y^2$, o que resulta em: $\frac{1+v}{3E} Y^2 = \frac{1+v}{E} J_2$. Nesta perspectiva, evidencia-se, a partir de uma simples manipulação algébrica, que o critério da máxima energia de distorção é exatamente igual ao critério de escoamento de Von Mises.

2.2.6. Regra de Endurecimento

O “encruamento” ou “endurecimento” pode ser entendido como a propriedade de um material aumentar a tensão axial com a evolução da deformação axial após o ponto de escoamento. A Figura 15 exemplifica este fenômeno de endurecimento dos metais, ao passo que ilustra o aumento na tensão de escoamento após o processo consecutivo de carga e descarga.

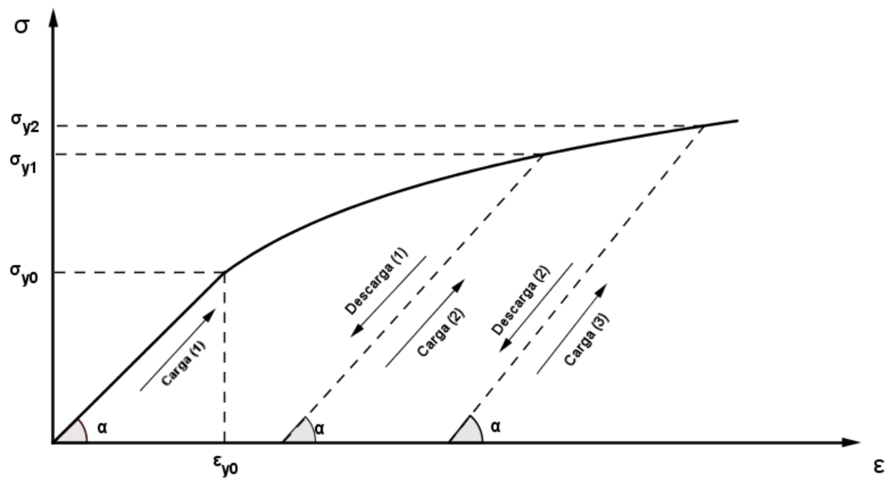


Figura 15: Ilustração do processo de endurecimento dos metais.

Fonte: O Autor (2017)

Dessa forma, a superfície de escoamento muda com a ocorrência de deformações plásticas adicionais. A “regra de escoamento” define a evolução da superfície de escoamento com o fluxo plástico, e esta mudança na superfície de escoamento pode ser matematicamente expressa por meio da Equação 25.

$$f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^{p}\right) = F\ (\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^{p}) + K^2 \varepsilon_e{}^{p} = 0 \tag{25}$$

Onde o termo $F\ (\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^{p})$ define a forma da superfície de escoamento, enquanto o termo $K^2 \varepsilon_e{}^{p}$ define o tamanho desta. Neste ponto, faz-se necessário definir tensão e deformação plástica efetivas. Estas são definidas pelas Equações 26 e 27, respectivamente.

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \tag{26}$$

$$\varepsilon_e{}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\left[\varepsilon_{ij}{}^p \varepsilon_{ij}{}^p\right]} = \sqrt{\frac{2}{3}\left[(\varepsilon_1{}^p)^2 + (\varepsilon_2{}^p)^2 + (\varepsilon_3{}^p)^2\right]} \tag{27}$$

Observa-se que, para um estado de tensão uniaxial, onde $\sigma_1 \neq 0$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, a tensão efetiva será igual a σ_1, o que pode ser facilmente constatado para as outras duas direções principais. Em adição, quando em regime plástico, o material apresenta invariância do seu volume, ou seja, consiste em um material plástico incompressível. Assim sendo, por meio de manipulações algébricas com a Equação 27, para um estado de tensão uniaxial, pode-se verificar que $\varepsilon_e{}^p = \varepsilon_1{}^p$.

2.2.6.1. Modelo de Endurecimento Isotrópico

Neste modelo, considera-se que a superfície de escoamento inicial se expande uniformemente sem distorção e sem translação quando ocorre o fluxo plástico. A partir disso, utilizando-se do critério de escoamento de Von Mises e da Equação 25, tem-se:

$$f\left(J_2, \varepsilon_{ij}{}^p\right) = F\,(J_2) + K^2 \varepsilon_e{}^p = 0 \therefore$$

$$\frac{\sigma_e{}^2}{3} + K^2 \varepsilon_e{}^p = 0 \tag{28}$$

A partir da Equação 28, para o estado de tensão uniaxial, pode-se verificar a seguinte igualdade: $\sigma_e = Y(\varepsilon_e{}^p)$. Desta forma, obtém-se o critério de escoamento de Von Mises para materiais elastoplásticos com endurecimento isotrópico.

2.2.6.2. Modelo de Endurecimento Cinemático

Neste modelo, conjectura-se que durante o fluxo plástico, a superfície de escoamento se desloca como um corpo rígido no espaço das tensões, mantendo a forma, o tamanho e a orientação da superfície inicial. Dessa forma, a evolução da superfície de escoamento com o fluxo plástico pode ser matematicamente representada pela Equação 29.

$$f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}{}^p\right) = F\,(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^R(\varepsilon_{ij}{}^p)) + K^2 = 0 \tag{29}$$

Onde $\sigma_{ij}{}^R(\varepsilon_{ij}{}^p)$ consiste no tensor das tensões de recuperação, representando graficamente a translação do centro da superfície de escoamento, tendo a mesma dimensão do tensor das tensões.

2.2.6.3. Modelo de Endurecimento Misto

Neste modelo, considera-se que durante o fluxo plástico a superfície de escoamento sofre uma translação definida por ${\sigma_{ij}}^R({\varepsilon_{ij}}^p)$ e uma expansão uniforme medida por $K^2{\varepsilon_e}^p$, mantendo sua forma original. Isto pode ser expresso matematicamente pela Equação 30.

$$f\left(\sigma_{ij}, {\varepsilon_{ij}}^p\right) = F\left(\sigma_{ij} - {\sigma_{ij}}^R({\varepsilon_{ij}}^p)\right) + K^2{\varepsilon_e}^p = 0 \tag{30}$$

2.2.7. Condição de Continuidade do Fluxo Plástico

Se num determinado ponto de um corpo for verificada a condição $f\left(\sigma_{ij}, {\varepsilon_{ij}}^p\right) < 0$, o corpo apresentará nesse ponto um comportamento elástico. Se, por outro lado, for verificada a igualdade $f\left(\sigma_{ij}, {\varepsilon_{ij}}^p\right) = 0$, o comportamento será plástico. Quando em regime plástico, o comportamento do ponto material será condicionado pela variação de $f\left(\sigma_{ij}, {\varepsilon_{ij}}^p\right)$ relativamente a σ_{ij}. Desta maneira, a condição de continuidade do fluxo plástico é que o incremento em "f" seja nulo ("$df = 0$"). Abaixo, as Equações 31, 32 e 33 expressam df para os casos de materiais elástico-perfeitamente plástico, elasto-plástico com endurecimento isotrópico e elasto-plástico com endurecimento cinemático, misto ou distorcional, respectivamente.

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} \tag{31}$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial {\varepsilon_e}^p} d{\varepsilon_e}^p \tag{32}$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon^p}} d\boldsymbol{\varepsilon^p} \tag{33}$$

Onde $d\boldsymbol{\sigma} = \{d\sigma_{11}\ d\sigma_{22} \ldots d\sigma_{12}\}^T$ representa o vetor incremento de tensão e $d\boldsymbol{\varepsilon^p} = \{d{\varepsilon_{11}}^p\ d{\varepsilon_{22}}^p \ldots d{\varepsilon_{12}}^p\}^T$ representa o vetor incremento de deformação plástica. Além disso, o vetor gradiente da função de escoamento $\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)$ é um vetor normal à superfície de escoamento: $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}}\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} \ldots \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}}\right\}^T$.

Para materiais elásticos-perfeitamente plásticos, a condição de continuidade do fluxo plástico implicará em $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} = 0$, ou seja, o gradiente de "f" será perpendicular ao vetor incremento de tensão, pois σ_{ij} deve permanecer na superfície de escoamento, que por sua vez não se altera durante o processo de escoamento.

Do mesmo modo, para materiais elastoplásticos com endurecimento, a condição de continuidade do fluxo plástico leva às seguintes conclusões: (1) se $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} > 0$ então $d\varepsilon_e{}^p > 0$ e (2) se $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} \leq 0$ então $d\varepsilon_e{}^p = 0$, consistindo, portanto, no retorno ao regime elástico.

2.2.8. Postulado de Drucker

Enquanto a energia elástica de deformação é totalmente recuperável, a energia associada a um comportamento plástico não é totalmente recuperável, por conta de fenômenos de origem térmica e/ou de contato a nível atômico. O postulado de Drucker tem como objetivo tratar esses fenômenos de uma maneira sistemática e passível de modelagem. Abaixo enuncia-se este postulado.

Postulado de Drucker: Suponha que tenhamos um estado inicial de tensão, e um dado agente externo produz incrementos de tensão, e em seguida os remove lentamente. Diante disso, tem-se que:

(1) O trabalho realizado pelo agente externo durante a aplicação do carregamento é positivo.
(2) O trabalho resultante após o ciclo de carregamento e descarregamento é zero ou positivo.

Matematicamente, o Postulado de Drucker pode ser enunciado da seguinte maneira: suponha que para um estado de tensão σ_{ij} e de deformação ε_{ij} um dado agente externo produz incrementos de tensão $d\sigma_{ij}$ e de deformação $d\varepsilon_{ij}$, tendo este último uma parcela elástica ($d\varepsilon_{ij}{}^e$), e podendo ter uma parcela plástica ($d\varepsilon_{ij}{}^p$). Agora suponha que este agente externo seja removido, liberando os incrementos de deformação elástica. Diante disso, tem-se:

(1) Trabalho realizado pelo agente externo durante a aplicação do carregamento:

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = d\sigma_{ij}\left(d\varepsilon_{ij}{}^e + d\varepsilon_{ij}{}^p\right) > 0 \tag{34}$$

(2) Trabalho resultante após o ciclo de carregamento e descarregamento:

$$d\sigma_{ij}\left(d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}{}^e\right) = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}{}^p \geq 0 \tag{35}$$

Para materiais elásticos-perfeitamente plásticos verifica-se que $d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}{}^{p} = 0$, sendo a expressão $d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}{}^{p} \geq 0$ válida para materiais elastoplásticos com endurecimento. Além disso, um material que satisfaz o Postulado de Drucker é dito "estável" ou "work-hardening material".

Os materiais que apresentam um processo de "amaciamento" (tensão diminuiu com a deformação) não satisfazem o Postulado de Drucker e apresentam um comportamento "instável", pois um determinado estado de tensão conduziria a mais de um estado de deformação. Apesar dos materiais elásticos-perfeitamente plásticos apresentarem um comportamento "instável", os mesmos satisfazem o Postulado de Drucker, pois não apresentam um processo de "amaciamento".

2.2.9. Leis da Normalidade e da Convexidade

O Postulado de Drucker pode ser estendido para um incremento de tensão finito, em particular para o caso em que o estado de tensão inicial ($\sigma_{ij}{}^{*}$) se encontra no interior da superfície de escoamento e o estado de tensão final (σ_{ij}) está sobre a superfície de escoamento. Admitindo-se um incremento de carga que conduza o estado de tensão de $\sigma_{ij}{}^{*}$ para o estado de tensão σ_{ij}, e em seguida um descarregamento que conduza novamente o estado de tensão para $\sigma_{ij}{}^{*}$, o Postulado de Drucker implica na seguinte relação:

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^{*}\right) d\varepsilon_{ij}{}^{p} \geq 0 \tag{36}$$

Esta expressão tem importantes consequências na teoria da plasticidade. Para uma superfície de escoamento diferenciável em todos os seus pontos, como ocorre para o critério de Von Mises, é possível definir um plano tangente à superfície em qualquer ponto pertencente à mesma, assim como um vetor normal a esse plano. Admitindo-se uma representação esquemática bidimensional para a superfície de escoamento e a relação dada pelo Postulado de Drucker expressa por um produto escalar dos vetores $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{*})$ e $d\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}$, segue:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{*}).\, d\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}} \geq 0 \tag{37}$$

Onde $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ ...\ \sigma_{12}\}^{T}$, $\boldsymbol{\sigma}^{*} = \{\sigma^{*}{}_{11}\ \sigma^{*}{}_{22}\ ...\ \sigma^{*}{}_{12}\}^{T}$ e $d\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}$ definido como anteriormente.

De posse destas informações, para que a relação dada pelo Postulado de Drucker seja válida para um estado de tensão elástico inicial "arbitrário", o vetor incremento de deformação plástica $d\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}$ deve ser normal ao plano tangente à superfície de escoamento e com o sentido apontando para fora da mesma, esta é a lei da normalidade. A Figura 16 ilustra esta lei por meio de uma representação bidimensional da superfície de escoamento e adjacentes.

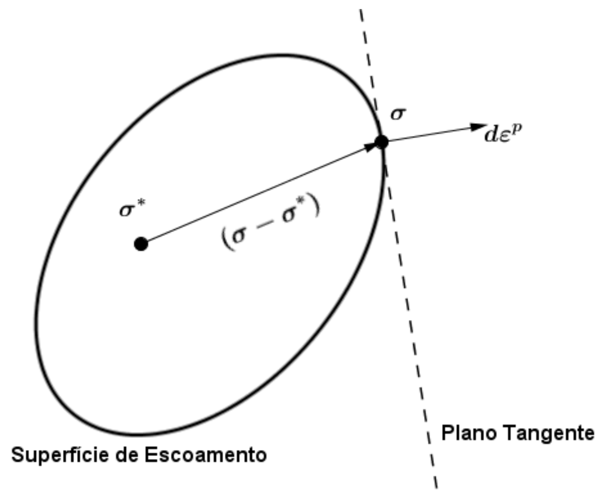


Figura 16: Ilustração bidimensional da lei da normalidade.

Fonte: O Autor (2017)

Por outro lado, se o estado de tensão inicial se encontrar do outro lado do plano tangente à superfície de escoamento, a relação dada pelo Postulado de Drucker é "violada". Deste modo, toda a região elástica encontra-se do mesmo lado do plano tangente, concluindo-se que a superfície de escoamento é "convexa". Esta é a chamada lei da convexidade. A Figura 17 ilustra esta lei por meio de uma representação bidimensional da superfície de escoamento com concavidade e adjacentes.

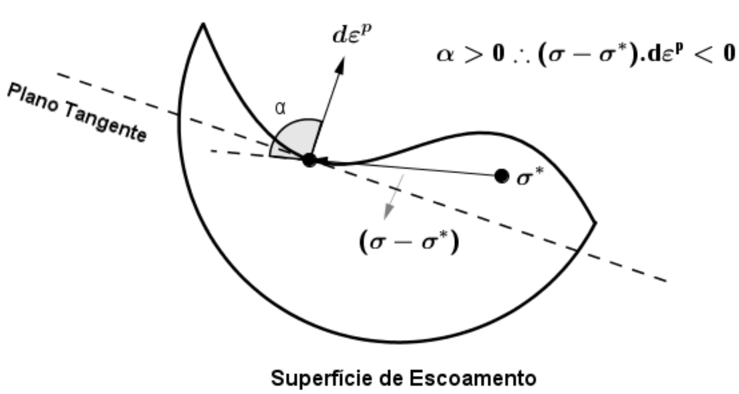


Figura 17: Ilustração bidimensional da lei da convexidade.

Fonte: O Autor (2017)

2.2.10. Função Potencial Plástico e Regra de Escoamento

A função potencial elástico $\left[g\left(\sigma_{ij}\right)\right]$ é uma função escalar das tensões a partir da qual os incrementos de deformação plástica podem ser determinados.

Regra de escoamento ou de fluxo plástico: a hipótese cinemática postulada para a deformação plástica ou fluxo plástico é a seguinte.

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{38}$$

Onde $d\lambda$ representa o fator de proporcionalidade escalar não negativo, denominado "multiplicador plástico". Assim sendo, elucida-se duas leis concernentes ao fluxo plástico, a saber, a lei associativa do escoamento plástico e a lei associativa de Von Mises.

Lei associativa do escoamento plástico: a função de escoamento coincide com a função potencial plástico, ou seja:

$$g\left(\sigma_{ij}\right) = f\left(\sigma_{ij}\right) \;\therefore\; d\varepsilon_{ij}{}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{39}$$

A lei associativa também é referida como "condição de normalidade ", uma vez que resulta da aplicação da lei da normalidade, válida para materiais que satisfazem o Postulado de Drucker. Para os metais, a utilização da lei associativa leva a resultados concordantes com observações experimentais.

Para outros materiais, como é o caso dos solos, a aplicação de regras de escoamento plástico fazendo uso da lei não associativa $\left[g\left(\sigma_{ij}\right) \neq f\left(\sigma_{ij}\right)\right]$ conduz a resultados mais realistas.

Lei associativa de Von Mises: para materiais elasto-plásticos com endurecimento isotrópico, o critério de Von Mises admite que $f\left(J_2, \varepsilon_e{}^{p}\right) = J_2 - \frac{Y^2(\varepsilon_e{}^{p})}{3} = 0$ e, portanto, a lei associativa de Von Mises pode ser expressa pela Equação 40.

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \therefore\ d\varepsilon_{ij}{}^{p} = d\lambda\, S_{ij} \qquad (40)$$

Uma vez que $\frac{\partial f}{\partial J_2} = 1$ e $\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}$. Assim sendo, a Equação 40 implica na seguinte relação:

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_{11}{}^{p}}{S_{11}} = \frac{d\varepsilon_{22}{}^{p}}{S_{22}} = \frac{d\varepsilon_{33}{}^{p}}{S_{33}} = \frac{d\varepsilon_{23}{}^{p}}{S_{23}} = \frac{d\varepsilon_{13}{}^{p}}{S_{13}} = \frac{d\varepsilon_{12}{}^{p}}{S_{12}} \qquad (41)$$

Estas últimas são conhecidas como Equações de Prandtl-Reuss.

2.2.11. Relação Entre Incrementos de Deformação Plástica e Deformação Total

Esta seção baseia-se em um procedimento delineado em Mendelson (1968), o qual propõe uma abordagem incremental-iterativa para avaliação dos incrementos de deformação plástica a partir da deformação total, sem necessitar recorrer às tensões. Primeiramente, supõe-se um estado de tensão σ_{ij} e de deformação plástica $\varepsilon_{ij}{}^{p}$ resultantes de um dado carregamento. Em seguida, supõe-se incrementos de deformação plástica $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ decorrentes de um incremento de carregamento. Desta forma, a deformação total ε_{ij} pode ser avaliada como segue:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^{e} + \varepsilon_{ij}{}^{p} + d\varepsilon_{ij}{}^{p} \qquad (42)$$

Onde $\varepsilon_{ij}{}^{e}$ corresponde à componente elástica da deformação total, $\varepsilon_{ij}{}^{p}$ representa a deformação plástica acumulada antes do incremento de carregamento (admitida conhecida) e $d\varepsilon_{ij}{}^{p}$ corresponde ao incremento de deformação plástica resultante do incremento de carregamento (ainda a ser determinado). Dando continuidade, a Equação 43 define a deformação total modificada.

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}{}^{p} \qquad (43)$$

Atentando-se para o fato de que $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^{e} + d\varepsilon_{ij}{}^{p}$, e subtraindo-se a deformação média dos elementos da diagonal principal de ambos os lados da equação, tem-se:

$$e'_{ij} = e_{ij}{}^{e} + d\varepsilon_{ij}{}^{p} \qquad (44)$$

Onde $e_{ij}{}^{e}$ corresponde ao tensor desviador de deformação elástica, e e'_{ij} representa o tensor desviador de deformação total modificada. A partir da lei de Hooke e das Equações de Prandtl-Reuss:

$$e'_{ij} = \left(1 + \frac{1}{2Gd\lambda}\right) d\varepsilon_{ij}{}^{p} \tag{45}$$

Onde G é o módulo de elasticidade de cisalhamento. Neste ponto, define-se a deformação total modificada efetiva como $e'_e = \sqrt{\frac{2}{3} e'_{ij} e'_{ij}}$, e por meio de manipulações algébricas apropriadas, tem-se:

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p} = \frac{d\varepsilon_e{}^{p}}{e'_e} e'_{ij} \tag{46}$$

Onde $d\varepsilon_e{}^{p} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}{}^{p} d\varepsilon_{ij}{}^{p}}$ corresponde ao incremento de deformação plástica efetiva. Como estas equações foram deduzidas a partir das equações de Prandtl-Reuss, elas fazem uso de forma implícita da função de escoamento de Von Mises. Ademais, a deformação total modificada efetiva é apenas uma definição matemática, sem nenhum significado físico. Para o incremento de deformação plástica efetiva, tem-se:

$$d\varepsilon^{p}_{e(atual)} = \frac{e'_e - \frac{\sigma_{e(anterior)}}{3G}}{1 + \frac{\frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e{}^{p}}_{(anterior)}}{3G}} \tag{47}$$

Onde $\sigma_{e\,(anterior)} = \mathrm{Y} + \frac{EH}{E-H} \varepsilon_e{}^{p}{}_{(anterior)}$, considerando-se materiais elasto-plásticos com endurecimento linear, e H consiste no parâmetro de endurecimento do material. De posse desta formulação, é possível avaliar os incrementos de deformação plástica resultantes de um incremento de carregamento.

2.3. Teoria de Viga de Euler-Bernoulli

Inicialmente, esclarece-se que a teoria de viga de Euler-Bernoulli faz uso de três considerações básicas no processo de formulação das tensões atuantes em vigas. Abaixo, explicita-se estas considerações básicas:

Para o caso de elementos submetidos a um momento fletor aplicado perpendicularmente ao eixo longitudinal, considera-se:

(i) O eixo neutro não apresenta alongamento ou encurtamento;

(ii) Todas as seções permanecem planas e ortogonais ao eixo deformado;

(iii) Quaisquer deformações das seções em relação aos seus próprios eixos serão desprezadas;

De posse destas considerações, pode-se partir para a dedução da relação momento-curvatura, da fórmula da flexão, da fórmula do cisalhamento transversal e quaisquer outras formulações e observâncias oportunas desta teoria. Assim sendo, mostra-se a seguir, suscintamente, esta formulação.

Relação Momento-Curvatura: para a obtenção desta relação, parte-se inicialmente da seguinte equação.

$$M(x) = \int_A -y\sigma_{xx}\, dA \tag{48}$$

Sabe-se, diretamente da consideração (i), que $\varepsilon_{xx} = -Ky$, onde *K* representa a curvatura e *y* caracteriza a localização de análise ao longo da altura da viga. Combinando $\varepsilon_{xx} = -Ky$ com a lei de Hooke na Equação 48 e resolvendo-a para *K*, obtem-se a relação momento-curvatura:

$$K = \frac{M(x)}{EI} \tag{49}$$

Fórmula da Flexão: esta pode ser obtida, simplesmente pela substituição de $\varepsilon_{xx} = -Ky$ em $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$ (lei de Hooke), depois substituindo a relação momento-curvatura e resolvendo para σ_{xx}. Seguindo-se este procedimento pode-se chegar na fórmula da flexão:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M(x)}{I}y \tag{50}$$

Onde *I* representa o momento de inércia da seção em relação ao eixo neutro.

Localização do Eixo Neutro: fazendo-se a resultante das forças horizontais igual a zero, tem-se:

$$F_x = \int_A \sigma_{xx}\, dA = 0 \therefore \int_A [-Ky]E\, dA = 0 \tag{51}$$

Considerando-se que *K* e *E* são ambas grandezas não nulas, obrigatoriamente $\int_A y\, dA = 0$ e isso implica que o eixo neutro coincide com o eixo do centroide horizontal da peça.

Fórmula do Cisalhamento Transversal: Hibeller (2011) propõe um procedimento para a obtenção da fórmula do cisalhamento transversal baseado no equilíbrio horizontal de forças em um elemento como ilustrado na Figura 18. De posse desta representação, pode-se obter a seguinte equação:

$$\sum F_x = 0 \therefore \int_{A'} \sigma' dA' - \int_{A'} \sigma \, dA' - \tau_{xy}(tdx) = 0 \quad (52)$$

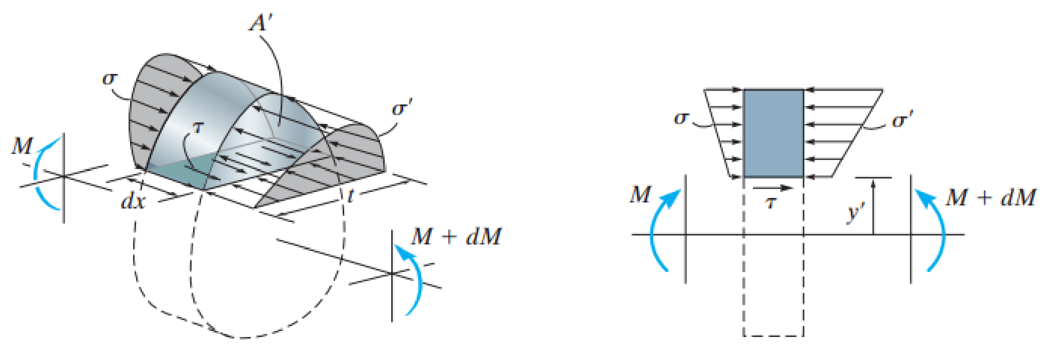


Figura 18: Vista tridimensional e vista lateral.

Fonte: Hibeller (2011).

Substituindo a fórmula da flexão na Equação 52, atentando-se para o fato de que $\frac{dM(x)}{dx}$ consiste no esforço cortante ($Q(x)$) e resolvendo para τ_{xy}, tem-se a fórmula do cisalhamento transversal:

$$\tau_{xy} = \frac{Q(x)\,V}{It} \quad (52)$$

Onde $V = \int_{A'} y \, dA' = \bar{y}' A'$.

De maneira breve esta é a formulação da teoria de viga de Euler-Bernoulli. Destaca-se que esta formulação modela apenas o comportamento de vigas sob um regime elástico de deformação. O modelo proposto neste trabalho, utiliza-se de procedimento análogo no processo de formulação para um regime elastoplástico de deformação. No que se segue, apresenta-se esta formulação, fazendo-se sempre uma comparação paralela entre as fórmulas da teoria de viga de Euler-Bernoulli e as propostas neste estudo.

3. FORMULAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

No processo de formulação do modelo proposto neste trabalho, adotou-se as restrições cinemáticas da teoria de viga de Euler-Bernoulli. Inicialmente, não se conhece a deformação plástica, ${\varepsilon_{xx}}^{p}$, mas prossegue-se com a formulação, como se este parâmetro fosse conhecido, e posteriormente este é avaliado por meio do procedimento incremental-iterativo descrito em 2.2.11.

Antes de proceder para a formulação da relação momento-curvatura para um regime elastoplástico de deformação, propõe-se o invento de uma nova variável ($\bar{y}$) a qual mede a divergência entre o eixo do centroide horizontal e o eixo neutro como ilustra a Figura 19. Sabe-se que, para os casos de vigas analisados neste trabalho, o eixo neutro ainda coincidirá com o eixo do centroide horizontal, isso pela simetria da seção das vigas e, sobretudo, pela consideração de comportamento idêntico para tração e compressão do material.

No entanto, se estas hipóteses não forem satisfeitas, o eixo neutro não coincidirá com o eixo do centroide horizontal, sendo, portanto, a concepção de $\bar{y}$ bastante oportuna. Dessa forma, optou-se por desenvolver uma formulação mais genérica por meio da criação deste parâmetro, mesmo que para os casos analisados neste trabalho o $\bar{y}$ seja desnecessário.

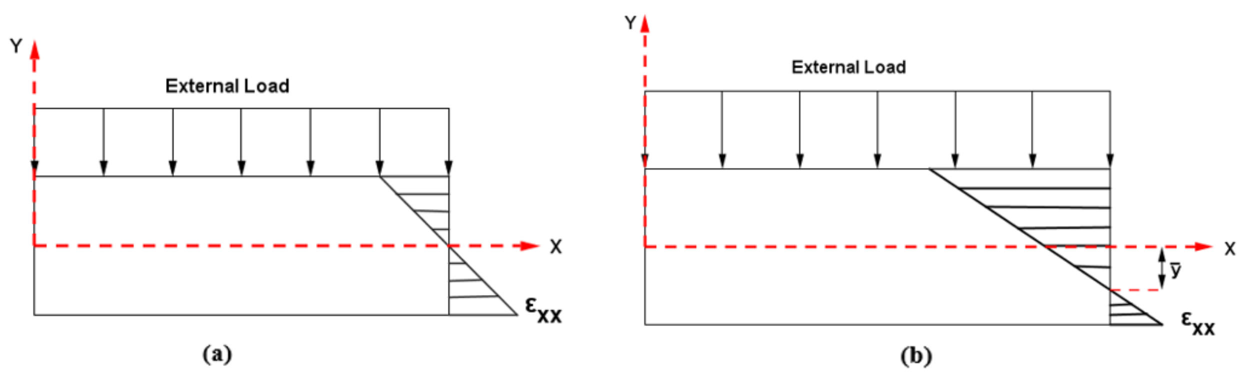


Figura 19: (a) Diagrama de deformação longitudinal para um regime elástico; (b) Diagrama de deformação longitudinal para um regime elastoplástico genérico.

Fonte: Santos e Cavalcante (2016)

Baseando-se no exposto, segue-se para a avaliação de $\bar{y}$, notando que agora $\varepsilon_{xx} = -K(y-\bar{y})$. Em adição, o princípio da decomposição, delineado em 2.2.3, afirma que ${\varepsilon_{xx}}^{e} =$

$\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}{}^{p}$. Utilizando-se da condição de resultante de forças horizontais nula, conforme Equação 51, tem-se agora:

$$\int_A [-K(y - \bar{y}) - \varepsilon_{xx}{}^{p}]E\, dA = 0 \tag{53}$$

Operando algumas manipulações algébricas básicas na Equação 53, pode-se chegar na seguinte relação:

$$\bar{y} = \frac{1}{K}\frac{1}{A}\int_A \varepsilon_{xx}{}^{p}\, dA + \frac{1}{A}\int_A y\, dA \tag{54}$$

Vale notar que $\frac{1}{A}\int_A y\, dA$ corresponde ao centro geométrico da seção em relação à y, e como este foi definido iniciando-se no meio da viga como ilustrado na Figura 19, $\frac{1}{A}\int_A y\, dA = 0$. Assim sendo $\bar{y}$ é avaliado com a equação a seguir:

$$\bar{y} = \frac{\overline{\varepsilon_{xx}{}^{p}}}{K} \tag{55}$$

Onde $\overline{\varepsilon_{xx}{}^{p}} = \frac{1}{A}\int_A \varepsilon_{xx}{}^{p} dA$. Tendo uma fórmula para $\bar{y}$, pode-se agora formular a relação momento-curvatura para um regime elastoplástico de deformação. Isto é feito na seção subsequente.

3.1. Relação Momento-Curvatura para um Regime Elastoplástico de Deformação

Para um regime elastoplástico, a Equação 48 fornecerá a seguinte igualdade:

$$M(x) = E\left[K\int_A y^2\, dA - K\bar{y}\int_A y\, dA + \int_A y\, \varepsilon_{xx}{}^{p}\, dA\right] \tag{56}$$

Substituindo $\bar{y} = \frac{\overline{\varepsilon_{xx}{}^{p}}}{k(x)}$ na Equação 56 e fazendo-se algumas simplificações, pode-se obter:

$$M(x) = E\left[KI - \overline{\varepsilon_{xx}{}^{p}}\int_A y\, dA + \int_A y\, \varepsilon_{xx}{}^{p}\, dA\right] \tag{57}$$

Atentando-se para $\overline{\varepsilon_{xx}{}^{p}} = \frac{1}{A}\int_A \varepsilon_{xx}{}^{p} dA$ e substituindo-o na Equação 57, obtem-se:

$$M(x) = E\left[KI - \frac{1}{A}\int_A y\, dA \int_A \varepsilon_{xx}{}^{p}\, dA + \int_A y\, \varepsilon_{xx}{}^{p}\, dA\right] \tag{58}$$

Observando, novamente que $\frac{1}{A}\int_A \ y\,dA = 0$ e resolvendo a Equação 58 para K, pode-se determinar a relação momento-curvatura.

$$K = \frac{M(x)}{EI} - \frac{1}{I}\int_A \ \mathrm{y}\,\varepsilon_{xx}{}^{p}\,dA \tag{59}$$

Facilmente, pode-se observar que se $\varepsilon_{xx}{}^{p} = 0$ a relação momento-curvatura deduzida aqui para um regime elastoplástico, reduz-se à relação momento-curvatura para um regime elástico, representada pela Equação 49.

3.2. Fórmula da Flexão para um Regime Elastoplástico de Deformação

Para a dedução da fórmula da flexão, utiliza-se a lei de Hooke combinada ao princípio da decomposição. Logo após, pode-se substituir K pela expressão dada pela Equação 59. Este processo é mostrado abaixo:

$$\sigma_{xx} = E(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}{}^{p}) \ \therefore$$

$$\sigma_{xx} = E[-K(y - \bar{y}) - \varepsilon_{xx}{}^{p}] \ \therefore$$

$$\sigma_{xx} = E\left[-(\frac{M(x)}{EI} - \frac{1}{I}\int_A \ y\,\varepsilon_{xx}{}^{p}\,dA)(y - \bar{y}) - \varepsilon_{xx}{}^{p}\right] \tag{60}$$

Operando algumas simplificações básicas na Equação 60, pode-se obter a fórmula da flexão para um regime elastoplástico:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M(x)}{I}(y - \bar{y}) + \frac{E}{I}(y - \bar{y}) \ \int_A \ y\,\varepsilon_{xx}{}^{p}\,dA - E\varepsilon_{xx}{}^{p} \tag{61}$$

Fazendo-se uma rápida análise, percebe-se que se $\varepsilon_{xx}{}^{p} = 0$ então $\bar{y} = 0$ por consequência, e assim sendo, a Equação 60, reduzir-se-á a Equação 50 que é a fórmula da flexão para um regime elástico de deformação. Esta comparação/verificação é importante para uma rápida averiguação da consistência do modelo proposto neste trabalho. A seguir, deduz-se a fórmula do cisalhamento transversal.

3.3. Fórmula do Cisalhamento Transversal para um Regime Elastoplástico de Deformação

Quanto à esta formulação, faz-se uso do mesmo procedimento delineado em 2.3 e considera-se a ilustração da Figura 18. Considerando deformações plásticas, o equilíbrio horizontal de forças dado pela Equação 52, fornece a seguinte equação.

$$\int_{A'} \left\{ -\frac{M(x+\Delta x)}{I}[y-\bar{y}(x+\Delta x)] + \frac{E}{I}[y-\bar{y}(x+\Delta x)] \int_{A} y\, {\varepsilon_{xx}}^{p}(x+\Delta x, y)\, dA - E{\varepsilon_{xx}}^{p}(x+\Delta x, y) \right\} dA' - \int_{A'} \left\{ -\frac{M(x)}{I}[y-\bar{y}(x)] + \frac{E}{I}[y-\bar{y}(x)] \int_{A} y\, {\varepsilon_{xx}}^{p}(x,y)\, dA - E{\varepsilon_{xx}}^{p}(x,y) \right\} dA' = \tau_{xy} t \Delta x \quad (62)$$

A Equação 61 leva em consideração a variação do momento fletor ($M(x)$) e do eixo neutro ($\bar{y}$) ao longo de um elemento horizontal da viga genérico (Δx). Faz-se Δx tender a zero, aplica-se operações do cálculo diferencial e integral e resolve-se esta equação para τ_{xy}. Após uma manipulação algébrica um pouco extensa e exaustiva, pode-se chegar à fórmula do cisalhamento para um regime elastoplástico.

$$\tau_{xy} = \left[-Q(x) + E\int_{A} y\, \frac{\partial {\varepsilon_{xx}}^{p}}{\partial x} dA \right] \frac{\bar{y}' - \bar{y}}{It} A' + \left[M(x) - E\int_{A} y\, {\varepsilon_{xx}}^{p}\, dA \right] \frac{1}{It}\frac{d\bar{y}}{dx} A' - \frac{E}{t}\int_{A'} \frac{\partial {\varepsilon_{xx}}^{p}}{\partial x} dA' \quad (63)$$

Onde $\bar{y}' = \frac{1}{A'}\int_{A'} y\, dA'$. Analogamente, se ${\varepsilon_{xx}}^{p} = 0$ e $\bar{y} = 0$ então a Equação 63 reduzir-se-á a Equação 52 que é a fórmula do cisalhamento transversal para um regime elástico de deformação. Tendo as Equações 55, 59, 61 e 63 caracteriza-se o estado de tensão, deformação e também é possível avaliar deslocamentos em vigas metálicas sob regime elastoplástico.

Vale destacar, no entanto, que quando comparada com a formulação da teoria de viga de Euler-Bernoulli para um regime elástico, a formulação proposta apresenta um maior nível de robustez e complexidade. A seguir, será feito uma simplificação do modelo proposto, em vista a obter expressões mais simples, mas ainda válidas para muitos casos de carregamentos, vinculações e padrões geométricos de vigas.

3.4. Simplificação do Modelo

Para o caso de vigas submetidas à carregamentos aplicados transversalmente ao seu eixo longitudinal, e considerando-se haver uma perfeita simetria em qualquer seção transversal de análise, como é o caso das vigas estudadas neste trabalho, nota-se que o eixo neutro também coincidirá com o eixo do centróide horizontal. Isso se dá pelo fato de haver uma distribuição simétrica do campo de deformações plásticas em relação a *y*, o que leva a deformação plástica média a ser zero. Consequentemente, como pode ser observado na Equação 55, tem-se $\bar{y} = 0$. De posse destas observações, pode-se simplificar bastante o modelo proposto.

Assim sendo, a fórmula da flexão pode ser simplificada, fazendo-se $\bar{y} = 0$ na Equação 61. Dessa forma, obtem-se:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M(x)}{I} y + \frac{Ey}{I} \int_A y\, \varepsilon_{xx}{}^p \, dA - E\varepsilon_{xx}{}^p \tag{64}$$

Analogamente, fazendo-se $\bar{y} = 0$ na Equação 63, pode-se simplificar a fórmula do cisalhamento transversal:

$$\tau_{xy} = \left[-Q(x) + E \int_A y \frac{\partial \varepsilon_{xx}{}^p}{\partial x} dA\right] \frac{\bar{y}' A'}{It} - \frac{E}{t} \int_{A'} \frac{\partial \varepsilon_{xx}{}^p}{\partial x} dA' \tag{65}$$

Estas duas simplificações são de ordem considerável, sobretudo esta última, pois a Equação 63 é bastante extensa. Na seção a seguir, apresenta-se três métodos numéricos que foram utilizados no processo de implementação da análise usando o modelo proposto, assim como uma breve descrição da rotina do algoritmo que implementa o modelo proposto.

4. MÉTODOS NUMÉRICOS

A implementação foi realizada utilizando o MATLAB®, software muito explorado por cientistas e engenheiros no mundo todo, por sua ampla capacidade de realizar análises numéricas, cálculo com matrizes, processamento de dados e construção de gráficos com uma interface amigável (MathWorks, 2016). Como pode ser percebido facilmente, o modelo proposto não é passível de ser implementado apenas levando-se em consideração operações analíticas, sendo necessário aplicar alguns métodos numéricos para realização da análise.

Dessa forma, para realização das operações de diferenciação e integração necessárias nesta análise, utilizou-se o método das diferenças finitas e a regra do trapézio, respectivamente. Em adição, para a avaliação da deflexão em cada viga estudada, optou-se por utilizar o método de Euler Melhorado.

4.1. Método das Diferenças Finitas

Esta seção e a subsequente se baseam, preponderantemente, no trabalho de Amos e Subramaniam (2014). Estes autores, mencionam que a diferenciação numérica é sempre necessária quando não se tem expressões analíticas, ou estas são muito complexas de serem resolvidas com procedimentos usuais do cálculo diferencial. A diferenciação numérica, faz-se necessária também quando se dispõe de um conjunto de dados discretos.

Nesta perspectiva, esclarece-se que para a diferenciação numérica tem-se duas abordagens estabelecidas na literatura dos métodos numéricos. A primeira delas consiste em ajustar, ou interpolar os pontos discretos e então avaliar as derivadas analiticamente. A segunda consiste na aproximação por diferenças finitas e esta foi a utilizada neste trabalho.

Quanto a este método, frisa-se que a derivada em um ponto x_i é aproximada tomando-se os valores dos pontos na vizinhança, x_{i-1} e x_{i+1}. Esta aproximação é feita avaliando a inclinação da reta que ligas estes pontos da vizinhança de x_i. Para obter um nível aceitável de precisão, é fundamental ter uma vasta quantidade de pontos para a análise e, no caso deste trabalho, isso é possível por meio de uma discretização da viga em uma malha bem refinada.

Elucida-se que, no que tange ao método das diferenças finitas, existem três maneiras bem simples de aproximar derivadas. Estas são: fórmula da diferença progressiva, fórmula da diferença regressiva e fórmula da diferença central. A primeira delas avalia a inclinação da reta que conecta os pontos $(x_i,\ f(x_i))$ e $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$, a fórmula da diferença regressiva calcula a inclinação da reta que conecta os pontos $(x_{i-1},\ f(x_{i-1}))$ e $(x_i,\ f(x_i))$ e por fim a fórmula da diferença central avalia a inclinação da reta que conecta os pontos $(x_{i-1},\ f(x_{i-1}))$ e $(x_{i+1},\ f(x_{i+1}))$. Optou-se por utilizar neste trabalho a fórmula da diferença central, sendo as derivadas aproximadas por meio da Equação 66.

$$\frac{df}{dx}(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{x_{i+1}-x_{i-1}} \tag{66}$$

4.2. Regra do Trapézio

Quanto à integração numérica, menciona-se que esta é necessária sob os mesmos motivos ou casos pelos quais a diferenciação numérica é necessária, mencionados na seção anterior. Na literatura de métodos numéricos, encontram-se vários métodos para a aproximação numérica de integrais. Basicamente, os métodos podem ser entendidos como métodos abertos e métodos fechados.

Nos métodos abertos, o intervalo de integração extrapola os pontos finais deste intervalo, enquanto nos métodos fechados, utiliza-se os pontos finais do intervalo na análise. A regra do trapézio e o método de Simpson são, por exemplo, métodos fechados, ao passo que os métodos da quadratura de Gauss e do ponto central são métodos abertos.

A regra do trapézio consiste em um refinamento simples do método do retângulo e do ponto central (não mostrados aqui) e faz uso do polinômio interpolador de Newton entre os pontos $x=a$ e $x=b$. A regra do trapézio, traduz-se na seguinte fórmula:

$$I(f) = \frac{[f(a)+f(b)]}{2}\ (b-a) \tag{67}$$

Utilizou-se a Equação 67 para aproximação numérica das integrais neste trabalho. A seguir apresenta-se o método de Euler Melhorado para avaliação das deflexões das vigas.

4.3. Método de Euler Melhorado

A deflexão $v(x)$ pode ser aproximada utilizando-se o método de Euler melhorado, uma vez que a curvatura é conhecida, sendo dada pela Equação 59. Assim sendo, calcula-se a inclinação $\theta(x)$ e posteriormente a deflexão. Noronha e Cavalcante (2015) mencionam que o método de

Euler melhorado consiste em uma discretização do domínio de análise em n pontos, $(x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$, sendo a inclinação θ_{i+1} determinada a partir do valor da inclinação no ponto anterior (θ_i). Este processo se inicia com um valor conhecido de inclinação inicial (θ_0), previamente determinado por meio de condições de contorno. A fórmula fornecida pelo método de Euler melhorado, para avaliação da inclinação é a seguinte:

$$\theta_{i+1} \approx \theta_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{\kappa_i + \kappa_{i+1}}{2} \tag{68}$$

Seguindo um raciocínio análogo as deflexões podem também ser avaliadas da mesma maneira. As deflexões podem ser computadas por meio da Equação 69.

$$v_{i+1} \approx v_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} \tag{69}$$

Por fim, atenta-se, novamente, para a necessidade de uma discretização bem refinada de modo a se obter um nível de precisão aceitável. Estes métodos numéricos apresentados acima viabilizaram a implementação do modelo proposto.

4.4. Descrição da Rotina do Algoritmo do Modelo Proposto

Apresenta-se, a seguir, uma descrição breve da rotina computacional criada nesta pesquisa para a implementação do modelo proposto e obtenção dos resultados necessários para a análise.

Passo 01 - definição dos parâmetros de entrada: primeiramente, define-se alguns parâmetros iniciais para a análise, a saber, as dimensões da viga, a magnitude do carregamento e as propriedades mecânicas do material.

Passo 02 – discretização espacial da viga: define-se a malha da viga constando de 100 pontos na horizontal e 100 pontos na vertical. Nomeia-se a quantidade de pontos na horizontal e na vertical como Nx e Ny, respectivamente.

Passo 03 – cálculo de parâmetros geométricos: calcula-se a área da seção transversal e o momento de inércia da seção transversal, parâmetros geométricos primordiais para a análise.

Passo 04 – inicialização dos incrementos de deformação plástica: inicia-se a avaliação dos incrementos de deformação plástica por meio da criação de matrizes de dimensões Nx por Ny compostas por elementos nulos.

Passo 05 – cálculo dos parâmetros para avaliação da tensão de cisalhamento: inicia-se a avaliação da área (A'), ilustrada na Figura 18, por meio da formulação clássica da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, descrita em 2.3. Em adição, calcula-se o momento de primeira ordem utilizado na avaliação da tensão de cisalhamento e inicia-se o cálculo da posição do centroide desta área.

Passo 06 – carga no passo corrente e avaliação dos esforços internos: o carregamento é dividido e "aplicado" aos poucos à viga. Assim sendo, calcula-se os esforços internos no passo corrente, a saber, o momento interno e o esforço cortante, por meio da mecânica clássica.

Passo 07 – cálculo da curvatura e posição da linha neutra no passo corrente: avalia-se a deformação plástica horizontal média, o momento de primeira ordem da deformação plástica horizontal e o momento de primeira ordem da derivada horizontal da deformação plástica média, por meio da regra do trapézio. De posse destes parâmetros, calcula-se a curvatura no passo corrente, por meio da Equação 59 e a posição da linha neutra ($\bar{y}$) por meio da Equação 55.

Passo 08 – avaliação da derivada horizontal da posição da linha neutra: por meio do método das diferenças finitas, avalia-se a derivada horizontal da posição da linha neutra.

Passo 09 – componente de tensão horizontal e de cisalhamento: de posse destes passos anteriores, calcula-se as componentes da tensão horizontal e de cisalhamento, por meio das Equações 61 e 63, respectivamente.

Passo 10 – cálculo dos incrementos de deformação plástica efetiva e dos incrementos de deformação plástica: para a avaliação destes calculam-se primeiramente as deformações totais modificadas, a média das componentes normais das deformações totais modificadas, as tensões totais modificadas desviadoras, a tensão total modificada desviadora efetiva e a tensão efetiva com o modelo bi-linear. Em seguida, verifica-se por meio do critério de escoamento de Von Mises modificado se houve escoamento. Se negativo, o incremento de deformação plástica efetiva e os incrementos de deformação plásticas serão nulos. Se positivo, o incremento de deformação plástica efetiva e os incrementos de deformação plásticas são calculados e atualizados a cada passo por meio do procedimento descrito em 2.2.11.

Passo 11 – atualização da derivada horizontal da deformação plástica horizontal: por meio do método das diferenças finitas a derivada horizontal da deformação plástica horizontal pode ser atualizada.

Passo 12 - início do procedimento iterativo: inicia-se um processo no qual as iterações são realizadas até se obter um bom nível de convergência, estipulado por uma tolerância de 10^{-10}. Neste procedimento, as variáveis descritas acima são recalculadas iterativamente.

Passo 13 – organização dos resultados: de posse dos resultados obtidos com os passos acima, criou-se códigos para organização e plotagens dos resultados. Estes programas, basicamente se utilizam dos dados do programa descrito nos 12 passos anteriores para geração dos gráficos. Os códigos geram os seguintes resultados: campo das deformações plásticas efetivas, campo das tensões de cisalhamento, campo das tensões horizontais, ao longo do domínio da viga, deflexão da viga e os diagramas das deformações plásticas efetivas, tensão de cisalhamento e tensão horizontal em seções específicas da viga.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

A análise foi implementada no MATLAB® para obtenção de resultados podendo estes serem incialmente submetidos a uma rápida verificação para averiguar se há concordância entre os resultados obtidos e o que se espera fisicamente. No entanto, esta averiguação não é suficiente para validar o modelo proposto, sendo, portanto, necessário comparar os resultados obtidos nesta pesquisa com resultados obtidos a partir de métodos já validados ou a partir de experimentos. Assim sendo, decidiu-se comparar os resultados obtidos pelo modelo proposto com resultados obtidos com o ABAQUS®, *software* muito utilizado por seu poder de simulação numérica e que emprega métodos dos elementos finitos em seu processo de solução de problemas.

A análise fornece alguns resultados que são mostrados a seguir, a saber, diagramas da tensão horizontal e de cisalhamento em seções críticas de cada viga, campos das tensões horizontais e de cisalhamento, campo das deformações plásticas efetivas ao longo do domínio da viga e, por fim, os gráficos de deflexão das vigas.

5.1. Objeto de Análise

O objeto de estudo deste trabalho consiste em vigas metálicas com diferentes padrões de carregamento, vinculação e geometria. Considerou-se para análise três configurações diferentes de vigas, a saber, viga simplesmente apoiada, viga engastada e viga bi-apoiada com uma extremidade em balanço. A primeira delas, apresenta as seguintes características: (1) comprimento de 3m, (2) seção transversal de 30x15cm, (3) carregamento distribuído transversalmente com magnitude de 650KN/m. Quanto à viga engastada, tem-se: (1) comprimento de 1 m, (2) seção transversal de 10x5cm, (3) carregamento concentrado na extremidade livre com magnitude de 40 KN. Por fim, a viga bi-apoiada com uma extremidade em balanço apresenta as seguintes características: (1) comprimento de 3m, (2) seção transversal de 30x15cm, (3) carregamento distribuído transversalmente com magnitude de 2000KN/m.

As Figuras 20, 21 e 22 ilustram estas três vigas com seus respectivos padrões de geometria, vinculação e carregamento, os quais foram utilizados como parâmetros para a análise.

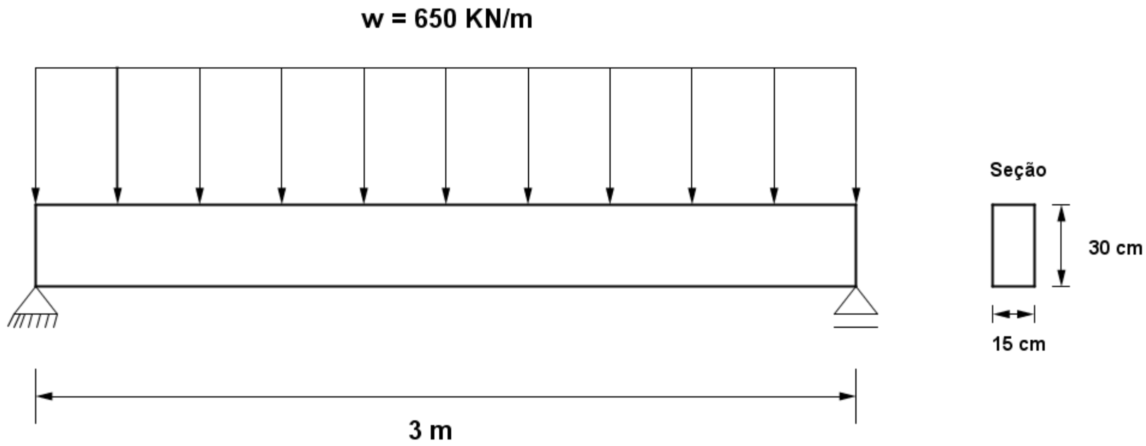


Figura 20: Viga simplesmente apoiada com padrões de geometria, vinculações e carregamento.

Fonte: O Autor (2017)

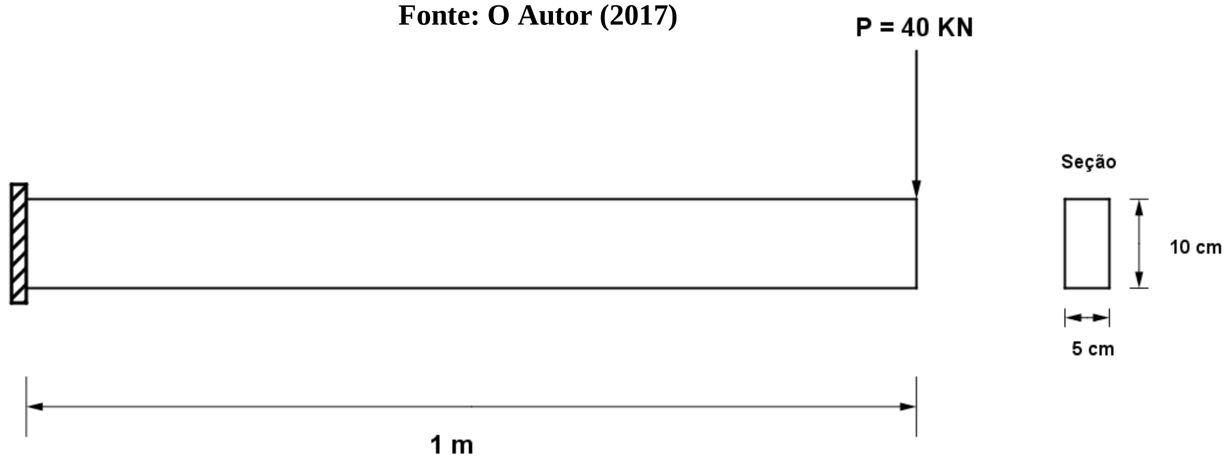


Figura 21: Viga engastada com padrões de geometria, vinculações e carregamento.

Fonte: O Autor (2017)

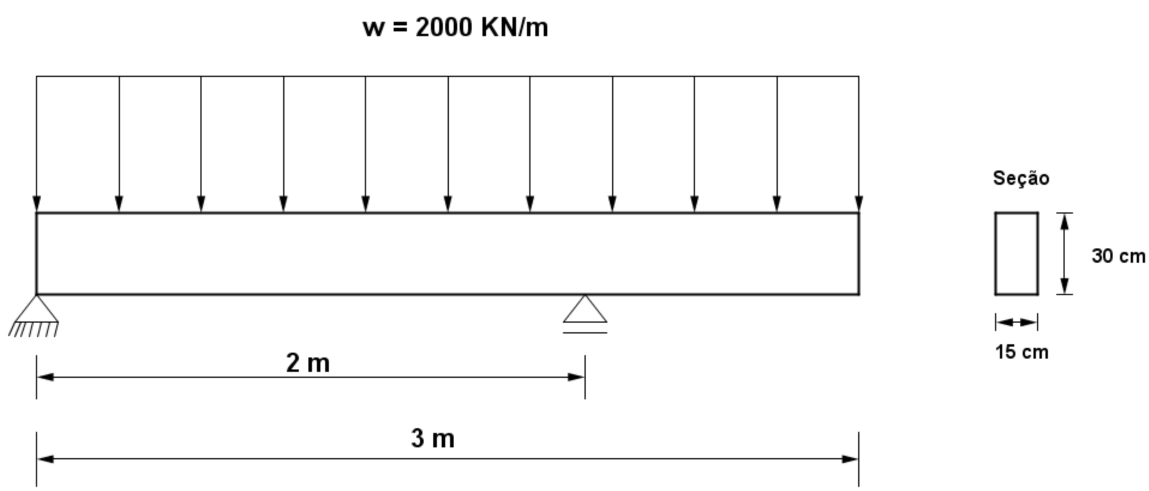


Figura 22: Viga bi-apoiada com extremidade em balanço com padrões de geometria, vinculações e carregamento.

Fonte: O Autor (2017)

Ademais, vale destacar que os valores dos carregamentos mostrados acima não foram escolhidos arbitrariamente, os mesmos foram calculados em função da geometria, da vinculação e das propriedades do material. A definição da magnitude do carregamento objetivou certificar-se que haveria zonas de plastificação no domínio da viga.

5.2. Propriedades do Material

As vigas mencionadas acima são constituídas do aço ASTM A36, o qual é amplamente conhecido e utilizado para fins estruturais, como salienta Júnior (2015). Este aço apresenta teor de carbono variando entre 0,008% e 2,11%, sendo esta caracterísitica favorável para alguns casos e desfavorável para outros. Por exemplo, o aumento do teor de carbono aumenta a resistência do aço, mas diminui sua ductilidade (PFEIL, 2009).

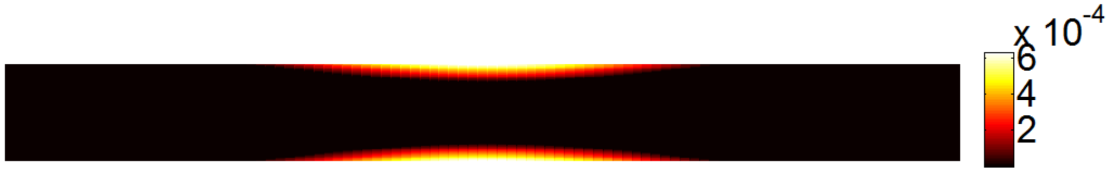
O aço ASTM A36 apresenta módulo de elasticidade (E) de 200 GPa, coeficiente de Poisson (v) igual a 0,26 e tensão de escoamento (Y) igual à 250 MPa. Estas são as propriedades inerentes ao referido material. Em adição, assumiu-se um valor para o parâmetro de endurecimento (H) de 20 GPa.

A seguir, apresenta-se os resultados obtidos para cada viga, bem como as discussões e conclusões que podem ser tiradas a partir da análise destes resultados.

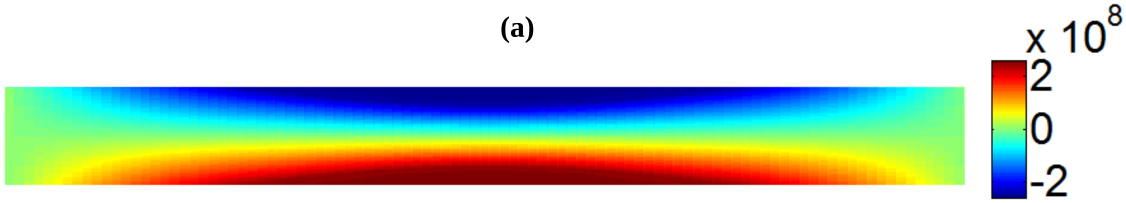
5.3. Viga Simplesmente Apoiada

De posse das configurações geométricas, de vinculação e padrões de carregamentos desta viga e também das propriedades do material, implementou-se o modelo proposto.

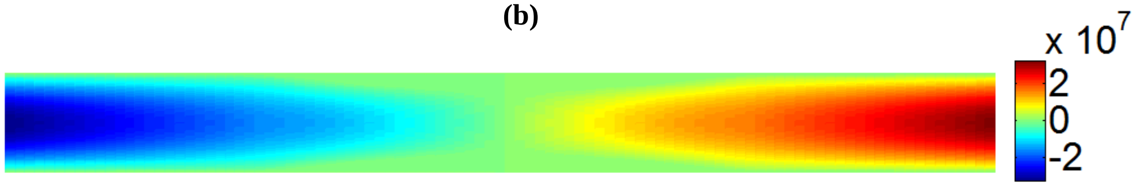
A Figura 23 traz os resultados dos campos de tensões horizontais e de cisalhamento e o campo das deformações plásticas efetivas ao longo do domínio da viga.



(a)



(b)



(c)

Figura 23: (a) Campo das deformações plásticas efetivas; (b) Campo das tensões horizontais; (c) Campo das tensões de cisalhamento.

Fonte: O Autor (2017)

Os valores das deformações plásticas efetivas na Figura 23(a) são adimensionais, enquanto os valores das tensões horizontais e de cisalhamento, Figuras 23(b) e 23(c), estão expressos em N/m^2, ou Pa. Ao interpretar o campo de deformações plásticas efetivas, Figura 23(a), percebe-se uma ótima consistência física, pois a zona de plastificação encontra-se no meio da viga. Sabe-se que, para o padrão de carregamento desta viga, tem-se maiores níveis de tensões no meio desta, sobretudo porque o momento fletor atinge seu ponto máximo nesta localidade. Em adição, este mesmo comportamento pode ser percebido para o campo das tensões horizontais, o que fornece um rápido indicativo de que o modelo proposto está em concordância com o que se espera fisicamente.

Outro fator importante é a simetria que estes campos de tensões e deformações apresentam, tanto na direção de *x* quanto na direção de *y*, o que também se esperava, diante de todas as considerações feitas neste trabalho.

Dando continuidade, a Figura 24 apresenta a deflexão da viga em questão. Vale destacar que a deflexão máxima ocorre no meio da viga, como esperado, e que o seu valor máximo é 10 mm.

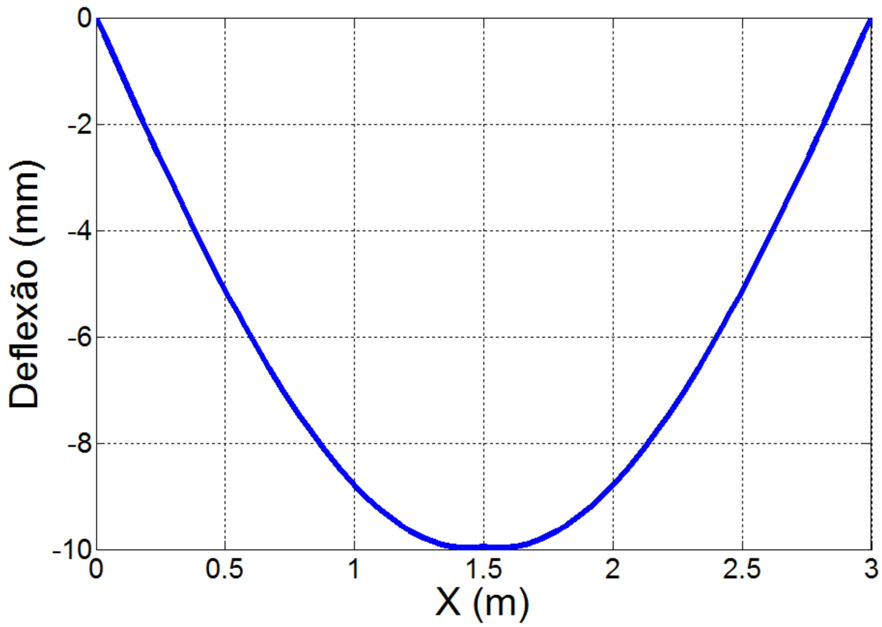


Figura 24: Deflexão da viga.

Fonte: O Autor (2017)

5.3.1. Comparação dos Resultados

Para validar o modelo proposto, esta mesma viga, com seus padrões de geometria, vinculação e carregamento, foi analisada ultilizando-se o software ABAQUS®. A Figura 25 mostra os resultados dos diagramas das tensões horizontais analisado no meio da viga. O gráfico em azul representa os resultados obtidos com o modelo proposto, ao passo que o gráfico em laranja corresponde aos resultados obtidos para a mesma seção utilizando o ABAQUS®. Notavelmente, os resultados obtidos por meio do modelo proposto estão muito próximos dos resultados obtidos com o ABAQUS®.

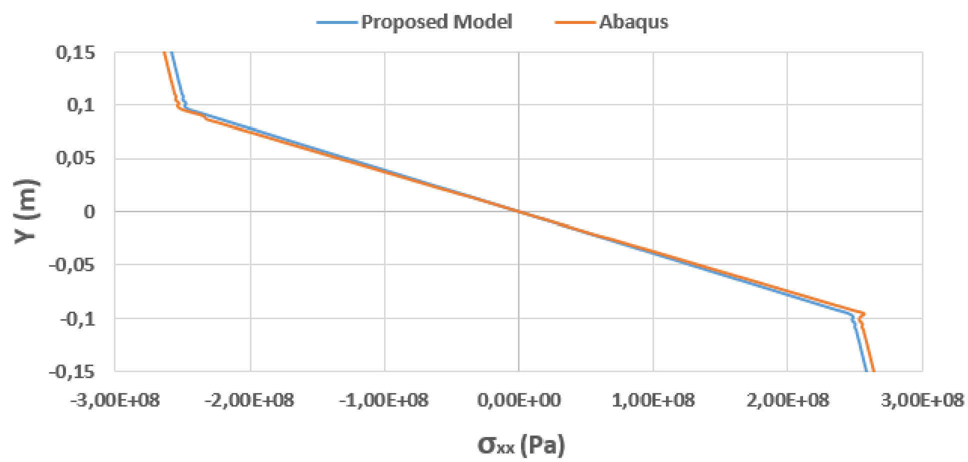


Figura 25: Diagrama das tensões horizontais na seção do meio da viga.

Fonte: O Autor (2017)

Do mesmo modo, a Figura 26 ilustra os resultados dos diagramas das tensões de cisalhamento transversal analisados no meio da viga. Novamente, o gráfico em azul representa os resultados obtidos com o modelo proposto, enquanto o gráfico em laranja corresponde aos resultados obtidos para a mesma seção utilizando o ABAQUS®.

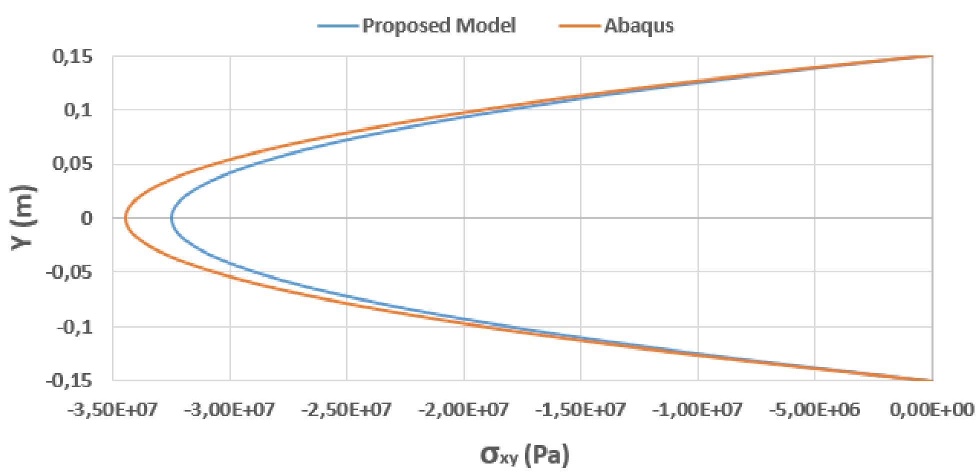


Figura 26: Diagrama das tensões de cisalhamento transversal na seção do meio da viga.

Fonte: O Autor (2017)

A Tabela 1 mostra a divergência relativa percentual entre os resultados obtidos pelo modelo proposto e pelo ABAQUS ®.

Tabela 1: avaliação das divergências entre o modelo proposto e o ABAQUS

	Modelo Proposto	ABAQUS®	Divergência Relativa Percentual
$\sigma_{xx\,MAX}$ (Pa)	*$2.58x10^8$*	*$2.64x10^8$*	*2.4%*
$\tau_{xy\,MAX}$ (Pa)	*$-3.25x10^7$*	*$-3.44\ x10^7$*	*5.5%*
$\lvert V_{MAX} \rvert$ (mm)	*10*	*10.3*	*3%*

Fonte: O Autor (2017)

Como pode ser observado, os resultados são relativamente próximos, o que atesta a eficácia e acurácia do modelo proposto, assim como reforça que o modelo proposto é confiável e pode ser utilizado para análise de vigas metálicas sob um regime elastoplástico de deformação. Verifica-se que, embora de ordem não expressiva, houveram divergências entre os resultados obtidos por meio do modelo proposto e os resultados obtidos por meio do ABAQUS®, mas as mesmas já eram esperadas, posto que no processo de formulação do modelo proposto algumas considerações simplificadoras foram estabelecidas. Já o ABAQUS® utiliza-se de procedimentos mais robustos e sofisticados, e, portanto, viabiliza análises mais livres de considerações simplificadoras.

Além do mais, no processo de dedução da fórmula do cisalhamento transversal (Equação 63) foram admitidas algumas hipóteses simplificadoras. Talvez a mais crítica delas é que os esforços de cisalhamento são constantes ao longo da largura da viga, o que não é verdade e pode ter sido um dos fatores que ocasionaram esta pequena divergência nos resultados.

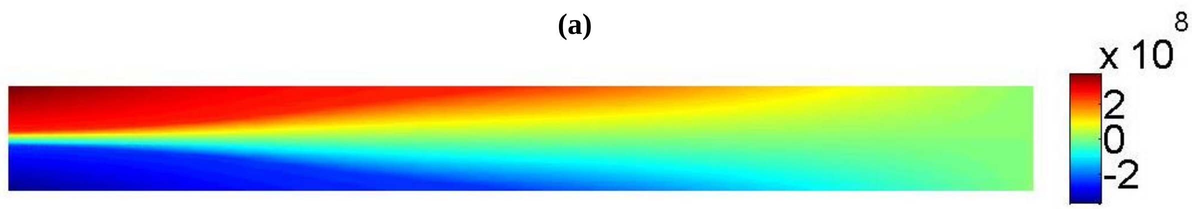
5.4. Viga Engastada

Similarmente, implementou-se o modelo proposto para análise da viga engastada.

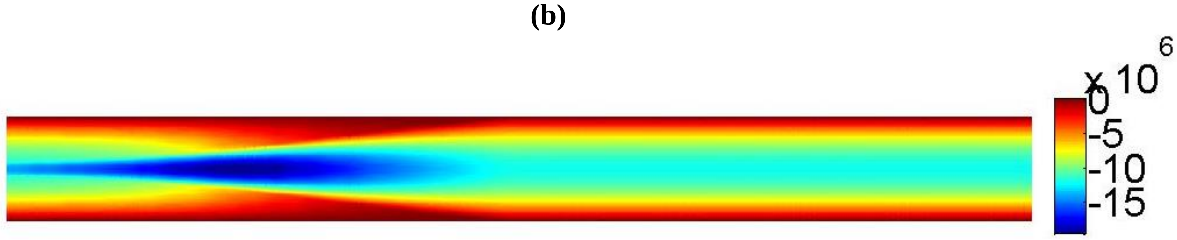
A Figura 27 mostra os resultados dos campos de tensões horizontais e de cisalhamento e o campo das deformações plásticas efetivas ao longo do domínio da viga.

Os valores das deformações plásticas efetivas na Figura 27(a) são adimensionais, enquanto os valores das tensões horizontais e de cisalhamento, Figuras 27(b) e 27(c) estão expressos em N/m^2, ou Pa. Ao interpretar o campo de deformações plásticas efetivas, Figura 27(a), percebe-se uma ótima consistência física, pois a zona de plastificação encontra-se no engaste. Sabe-se que para o padrão de carregamento desta viga, tem-se maiores níveis de tensões justamente no engaste, sobretudo porque o momento fletor atinge seu ponto máximo nesta localidade. Em adição, este mesmo comportamento pode ser percebido para o campo das tensões horizontais, o que fornece um rápido indicativo de que o modelo proposto está em concordância com o que se espera fisicamente.

(a)



(b)



(c)

Figura 27: (a) Campo das deformações plásticas efetivas; (b) Campo das tensões horizontais; (c) Campo das tensões de cisalhamento.

Fonte: O Autor (2017)

Novamente, estes campos de tensões e deformações apresentam simetria na direção de *y*, o que também se esperava, diante de todas as considerações feitas neste trabalho.

Dando continuidade, a Figura 28 apresenta a deflexão da viga em questão. Vale destacar que a deflexão máxima ocorre na extremidade livre da viga, como esperado e que o seu valor máximo é, aproximadamente, 32 mm.

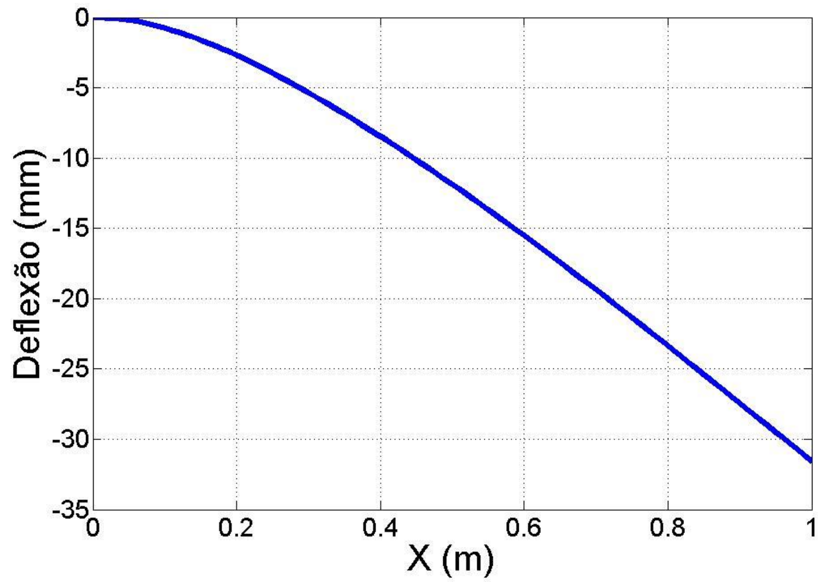


Figura 28: Deflexão da viga.

Fonte: O Autor (2017)

5.4.1. Comparação dos Resultados

Igualmente, esta viga, com seus padrões de geometria, vinculação e carregamento, foi analisada ultilizando-se o software ABAQUS®. A Figura 29 mostra os resultados dos diagramas das tensões horizontais analisados na extremidade engastada da viga. O gráfico em azul representa os resultados obtidos com o modelo proposto, enquanto o gráfico em laranja corresponde aos resultados obtidos para a mesma seção utilizando o ABAQUS®. Notavelmente, os resultados obtidos por meio do modelo proposto estão muito próximos dos resultados obtidos com o ABAQUS®.

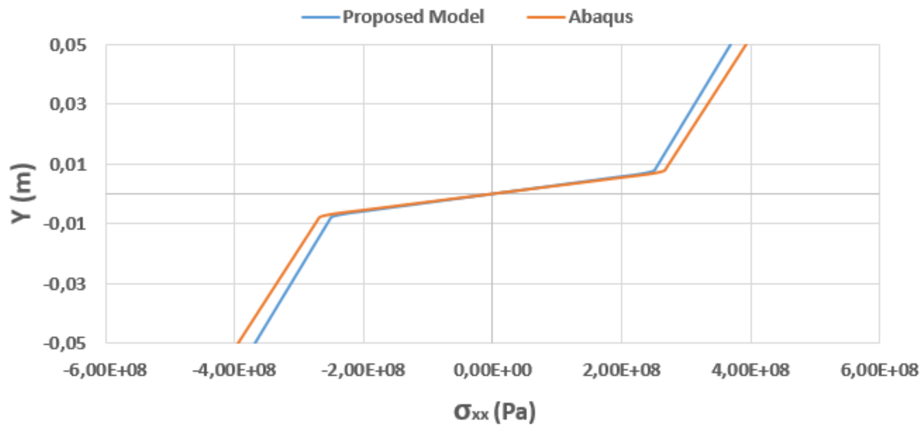


Figura 29: Diagrama das tensões horizontais na extremidade engastada.

Fonte: O Autor (2017)

De forma semelhante, a Figura 30 ilustra os resultados dos diagramas das tensões de cisalhamento transversal analisados na extremidade engastada da viga. Novamente, o gráfico em azul representa os resultados obtidos com o modelo proposto, enquanto o gráfico em laranja corresponde aos resultados obtidos para a mesma seção utilizando o ABAQUS®.

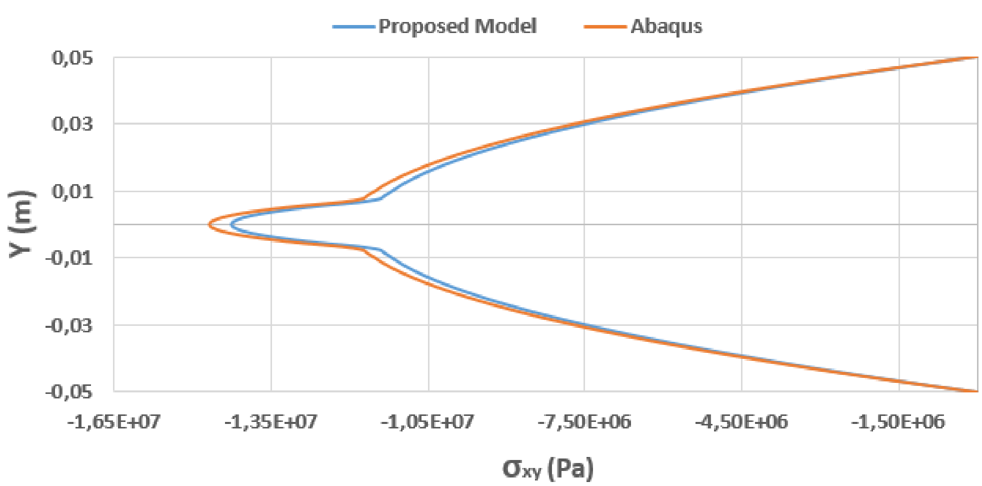


Figura 30: Diagrama das tensões de cisalhamento transversal na extremidade engastada.

Fonte: O Autor (2017)

A Tabela 2 mostra a divergência relativa percentual entre os resultados obtidos pelo modelo proposto e pelo ABAQUS ®.

Tabela 2: avaliação das divergências entre o modelo proposto e o ABAQUS

	Modelo Proposto	ABAQUS®	Divergência Relativa Percentual
$\sigma_{xx\,MAX}$ (Pa)	$3.68x10^{8}$	$3.94x10^{8}$	6.5%
$\tau_{xy\,MAX}$ (Pa)	$-1.42x10^{7}$	$-1.46\,x10^{7}$	2.9%
$\lvert V_{MAX}\rvert$ (mm)	32	36	11.11%

Fonte: O Autor (2017)

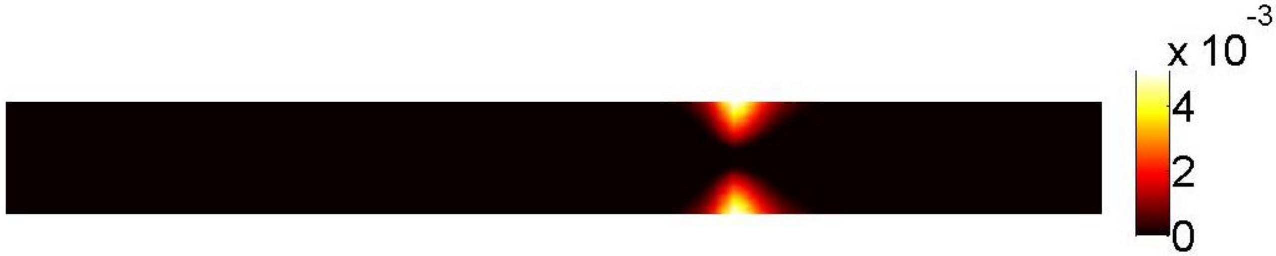
Como pode ser observado, os resultados são relativamente próximos, o que atesta a eficácia e acurácia do modelo proposto, assim como reforça que o modelo proposto é confiável e pode ser utilizado para análise de vigas metálicas sob um regime elastoplástico de deformação. Verificam-se pequenas divergências entre os resultados obtidos por meio do modelo proposto e os resultados obtidos por meio do ABAQUS®, mas as mesmas já eram esperadas, pelos mesmos motivos esboçados no item anterior.

5.5. Viga Apoiada com Extremidade em Balanço

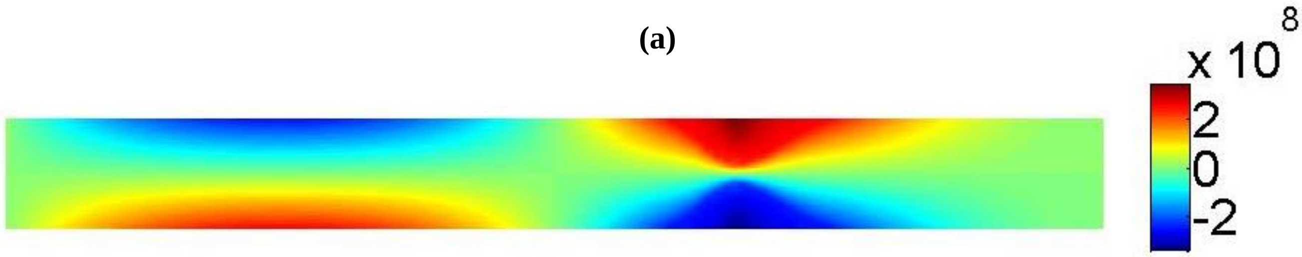
Do mesmo modo, implementou-se o modelo proposto para análise desta viga.

A Figura 31 mostra os resultados dos campos de tensões horizontais e de cisalhamento e o campo das deformações plásticas efetivas ao longo do domínio da viga.

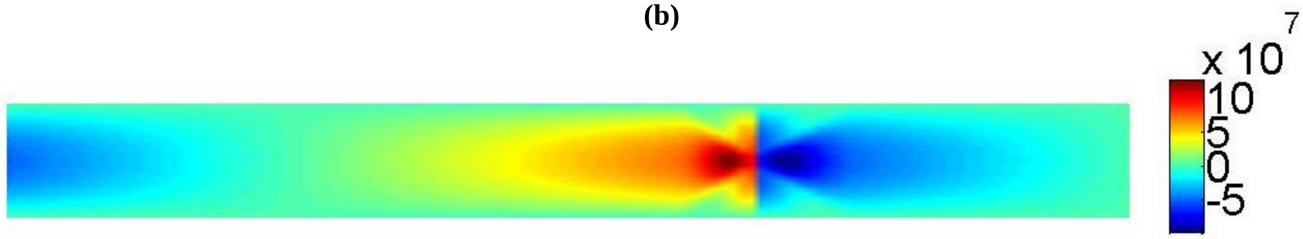
Os valores das deformações plásticas efetivas na Figura 31(a) são adimensionais, enquanto os valores das tensões horizontais e de cisalhamento, Figuras 31(b) e 31(c) estão expressos em N/m^2, ou Pa. Ao interpretar o campo de deformações plásticas efetivas, Figura 31(a), percebe-se uma ótima consistência física, pois a zona de plastificação encontra-se no apoio que que dista 2 m da extremidade esquerda da viga. Para este padrão de carregamento e vinculação, é sabido que justamente nesta localidade há maiores níveis de tensões concentradas. Em adição, este mesmo comportamento pode ser percebido para o campo das tensões horizontais, o que fornece um rápido indicativo de que o modelo proposto está em concordância com o que se espera fisicamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 31: (a) Campo das deformações plásticas efetivas; (b) Campo das tensões horizontais; (c) Campo das tensões de cisalhamento.

Fonte: O Autor (2017)

Novamente, estes campos de tensões e deformações apresentam simetria na direção de *y*, o que também se esperava, diante de todas as considerações feitas neste trabalho.

Dando continuidade, a Figura 32 apresenta a deflexão da viga em questão. Vale destacar que a deflexão máxima ocorre na extremidade livre da viga e que o seu valor máximo é, aproximadamente, 7,4 mm.

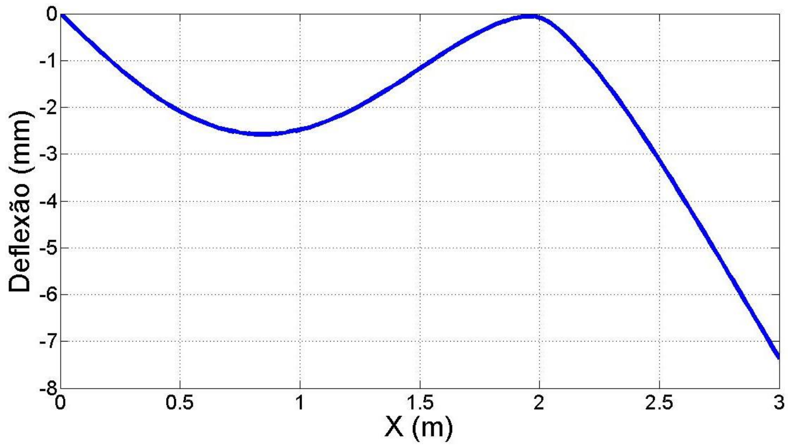


Figura 32: Deflexão da viga.

Fonte: O Autor (2017)

5.5.1. Comparação dos Resultados

Da mesma forma, esta viga, com seus padrões de geometria, vinculação e carregamento, foi analisada ultilizando-se o software ABAQUS®. A Figura 33 mostra os resultados dos diagramas das tensões horizontais analisados na seção do apoio situado a 2 m da extremidade esquerda. O gráfico em azul representa os resultados obtidos com o modelo proposto, enquanto o gráfico em laranja corresponde aos resultados obtidos para a mesma seção utilizando o ABAQUS®. Notavelmente, os resultados obtidos por meio do modelo proposto estão muito próximos dos resultados obtidos com o ABAQUS®.

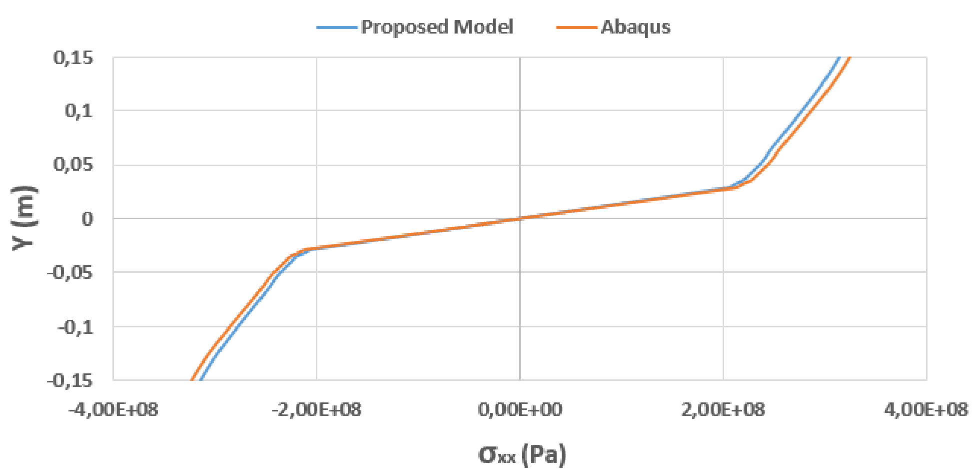


Figura 33: Diagrama das tensões horizontais a 2 m da extremidade esquerda.

Fonte: O Autor (2017)

De forma semelhante, a Figura 34 ilustra os resultados dos diagramas das tensões de cisalhamento transversal analisados na seção do apoio situado a 2 m da extremidade esquerda. Novamente, o gráfico em azul representa os resultados obtidos com o modelo proposto, enquanto o gráfico em laranja corresponde aos resultados obtidos para a mesma seção utilizando o ABAQUS®.

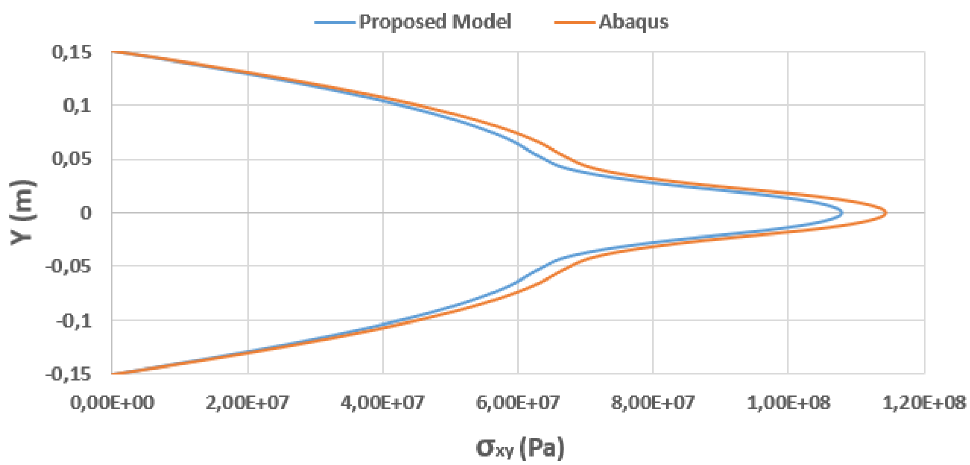


Figura 34: Diagrama das tensões de cisalhamento transversal a 2 m da extremidade esquerda. Fonte: O Autor (2017)

A Tabela 3 mostra a divergência relativa percentual entre os resultados obtidos pelo modelo proposto e pelo ABAQUS ®.

Tabela 3: avaliação das divergências entre o modelo proposto e o ABAQUS

	Modelo Proposto	ABAQUS®	Divergência Relativa Percentual
$\sigma_{xx\,MAX}$ (Pa)	$3.14x10^8$	$3.24x10^8$	2.9%
$\tau_{xy\,MAX}$ (Pa)	$1.07x10^8$	$1.64\,x10^8$	5.6%
$\lvert V_{MAX}\rvert$ (mm)	7.4	8.2	9.7%

Fonte: O Autor (2017)

Como pode ser observado, os resultados são relativamente próximos, o que atesta a eficácia e acurácia do modelo proposto. Verifica-se pequenas divergências entre os resultados obtidos por meio do modelo proposto e os resultados obtidos por meio do ABAQUS®, mas as mesmas já eram esperadas, pelos mesmos motivos anteriormente delineados.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propôs uma abordagem teórica e semianalítica para análise elastoplástica de vigas metálicas. Considerou-se as restrições cinemáticas adotadas pela teoria de vigas de Euler-Bernoulli, no processo de formulação do modelo proposto. Do mesmo modo, para a avaliação das deformações plásticas, ultilizou-se um procedimento incremental-iterativo, baseado nas Equações de Prandtl-Reuss modificadas, proposto em Mendelson (1968). Assim sendo, o modelo proposto possibilita a análise de tensões, deformações e deslocamentos para vigas metálicas sob regime elastoplástico de deformação.

Os resultados obtidos por meio deste modelo mostraram-se bastante consistentes com a noção física do problema. E o mais importante, estes resultados estão em um bom nível de concordância com os resultados obtidos por meio do ABAQUS®, o que atesta a eficácia e acurácia do modelo, assim como indica que o modelo é confiável e pode ser reproduzido, atentando-se, é claro, ao atendimento das considerações observadas neste trabalho.

Por fim, espera-se que este trabalho contribua com a ampliação das investigações científicas concernentes ao entendimento e modelagem dos fenômenos associados a análise elastoplástica de vigas e, sobretudo, possa servir como fonte para estudantes, engenheiros e cientistas.

7. PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Apresenta-se nesta seção uma relação de sugestões para trabalhos futuros que podem acrescentar muito a esta pesquisa:

(i) Ampliar o modelo proposto para o caso de carregamentos de flexo-compressão, o que mudaria consideravelmente os padrões de comportamento do campo de deformações plásticas;

(ii) Analisar vigas com seções comerciais, como vigas com perfil em “T” ou “I”. Para as vigas em “T”, possivelmente $\bar{y} \neq 0$ devido a não simetria geométrica da peça em y. Quanto a este ponto, vale mencionar que a formulação deste modelo teria que ser revista com muito cuidado, pois estas seções comerciais apresentam singularidades, como mudança brusca da geometria da seção transversal, que pode levar a muitos erros, sobretudo na avaliação das tensões de cisalhamento transversal;

(iii) Por fim, mas não menos importante, pode-se analisar vigas metálicas em regime elastoplástico de deformação sob ações dinâmicas. Estas ações poderiam ser de ciclos de carregamentos e descarregamentos, ou até mesmo impactos.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Amos, G. & Subramaniam, V., 2014. ***Numerical Methods for Engineers and Scientists: An Introduction with Applications Using Matlab***. Department of Mechanical Engineering. The Ohio State University. Ohio, USA.

Baker, J.F., 1949. ***A Review of Recent Investigations into the Behaviour of Steel Frames in the Plastic Range***. The J. Inst. Civil Engrs, Vol.31, 188.

Baker, J.F. & Heyman, J. ***Plastic Design of Frames***. University Press – Cambridge, 1969.

Cavalcante, M. A. A. ***Material da Disciplina Análise Não Linear de Estruturas***. Maceió, 2016.

Hibbeler, R. C. ***Mechanics of Materials***. Pearson Prentice Hall. Eighth Edition. New Jersey, USA, 2011.

Horne, M.R. ***Plastic Theory of Structures, 2nd ed***. Pergamon Press – UK, 1979.

Jorge, R. M. ***Análise Elasto-Plástica de Estruturas Reticuladas***. 44f. Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial. Faculdade de Engenharia. Universidade do Porto. Portugal, 2001.

Jorge, R. M.; Dinis, J. S. ***Teoria da Plasticidade***. 65f. Material de Apoio à Disciplina de Teoria da Plasticidade, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. Portugal, 2005.

Júnior, H. A. ***Otimização Estrutural de Treliças Metálicas Planas Empregadas em Cobertas Considerando Critérios de Resistência***. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Universidade Federal de Alagoas. Delmiro Gouveia, 2015.

MathWorks, 2016. ***MATLAB R2016b Quick Start***. MATLAB Primer, COPYRIGHT 1984–2016 by The MathWorks, Inc.

Mendelson, A. ***Plasticity: Theory and Application***. McMillan. Edição Original. New York, 1968.

Moy, S.S.J. ***Plastic Methods for Steel and Concrete Structures***. The MacMillan Press Ltd – London, 1981.

Neal, B.G. ***The Plastic Methods of Structural Analysis, 3rd ed.*** John Wiley & Sons. New York, 1977.

Noronha, M. V., Cavalcante, M. A.A., 2015. ***Procedimento para Avaliação de Deslocamentos de Vigas de Concreto Armado.*** In: XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, 2015.

Pfeil, W; Pfeil, M. ***Estruturas de Aço: Dimensionamento Prático***. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

Santos, D. S., Cavalcante, M. A.A., 2015. ***Semi-analitical Aproach for Elastoplastic Analisys of Steel Beams.*** In: XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília – DF, 2016.

Shames, I. H.; Cozzarelli, F.A. ***Elastic and Inelastic Stress Analysis***. 3. Ed. Boca Raton, 2014.

Silva, V. D. ***Mecânica e Resistência dos Materiais.*** 3. Ed. Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra. Setembro de 2004.