

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

*CAMPUS DO SERTÃO*

ENGENHARIA CIVIL

HELAEELSON DE ALMEIDA JÚNIOR

**Otimização Estrutural de Treliças Metálicas Planas Empregadas em Cobertas  
Considerando Critérios de Resistência**

DELMIRO GOUVEIA - AL

2015

HELAEELSON DE ALMEIDA JÚNIOR

**Otimização Estrutural de Treliças Metálicas Planas Empregadas em Cobertas  
Considerando Critérios de Resistência**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito final à conclusão do curso de Bacharelado em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Alagoas – UFAL, *Campus* do Sertão.

Orientador: Prof.º Dr. Márcio André Araújo Cavalcante

DELMIRO GOUVEIA – AL

2015

A447o Almeida Júnior, Helaelson de.  
Otimização estrutural de treliças metálicas plenas  
empregadas em cobertas considerando critérios de resistência /  
Helaelson de Almeida Júnior, 2015.  
74f.:il.

Monografia (Engenharia Civil) – Universidade Federal de  
Alagoas, Delmiro Gouveia, 2015.

Orientação: Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante.

1. Engenharia Civil. 2. Construção civil – treliças metálicas.

CDU 624

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Campus Sertão/  
UFAL – Delmiro Gouveia

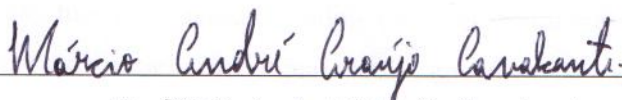
HELAELSON DE ALMEIDA JÚNIOR

**Otimização Estrutural de Treliças Metálicas Planas Empregadas em Cobertas  
Considerando Critérios de Resistência**

Trabalho de Conclusão de Curso Apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas – UFAL, *Campus* do Sertão como requisito final à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Data de aprovação:

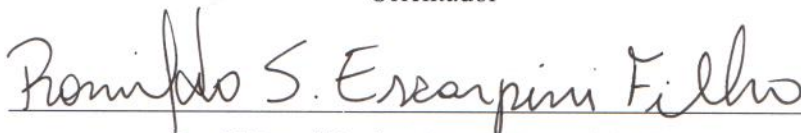
**Banca Examinadora**



Prof.º Márcio André Araújo Cavalcante

Universidade Federal de Alagoas - UFAL


Orientador



Prof.º Romildo dos Santos Escarpini Filho

Universidade Federal de Alagoas - UFAL

Examinador



Prof.º Esdras Jonathan Honorato Costa

Universidade Federal de Alagoas - UFAL

Examinador

## **DEDICATÓRIA**

Quero antes de mais nada demonstrar a minha mais profunda e genuína gratidão a Deus por ter me conferido as capacidades que me possibilitaram estar firme durante toda essa árdua trajetória, e as oportunidades que me possibilitaram concretizar meus projetos e aspirações.

Não poderia deixar de citar minha mãe, pai e irmãos, sem vocês nada disso seria possível. Obrigado pelo apoio, carinho e compreensão. Essa vitória não é só minha, é nossa!

Por fim, dedico o meu TCC para todos aqueles que ajudaram a fazer do meu sonho realidade, me proporcionando subsídio para que eu pudesse renovar minhas forças, as quais me trouxeram estabilidade para que eu não desistisse de ir atrás do que eu buscava para minha vida. Cito aqui, especialmente meus professores e mestres que não somente me inspiraram com suas trajetórias acadêmicas invejáveis, mas por possuírem índole e caráter irretocáveis constituíram grande fonte de inspiração e verdadeiros espelhos nos quais busco fundamentos para moldar minha conduta e comportamento. Muitos obstáculos foram impostos para mim durante esses últimos anos, mas graças a todos vocês eu não fraquejei, obrigado a todos.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, por acreditar que nossa existência pressupõe outra infinitamente superior.

Aos meus pais, Helaelson e Claudirene, e irmãos que acompanharam cada dia dessa trajetória.

À minha namorada, Larissa, que sempre esteve ao meu lado com toda sua doçura e paciência.

À toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

À todos aqueles que de alguma forma doaram um pouco de si para que a conclusão deste trabalho se tornasse possível.

Em especial, à Márcio André Araújo Cavalcante, orientador dedicado que com sabedoria soube dirigir meus passos e pensamentos para o alcance de meus objetivos.

## RESUMO

Na indústria da construção civil tem-se um cenário bastante competitivo e de escassez de recursos, no qual os profissionais são constantemente convidados à encontrar maneira viáveis economicamente e com o menor uso de matéria prima. Neste ínterim, faz-se necessária a otimização estrutural, que consiste em encontrar a melhor configuração da estrutura, e de preferência, de maneira racional e sistemática. Com base nessas informações, o presente trabalho objetiva empregar a otimização de forma em treliças metálicas planas utilizadas em cobertas. Para tanto, utilizou-se o método dos elementos finitos para análise dos esforços internos nas treliças; empregou-se alguns parâmetros definidores da geometria da treliça; e adotou-se o aço ASTM A36 como padrão por ser amplamente utilizado na prática. Ademais, este trabalho preocupou-se em conduzir o processo de otimização sempre atendendo à certos critérios de resistência, a saber, resistência à tração, à compressão e à flambagem elástica. Por fim, no que concerne aos resultados, o processo de otimização de forma foi efetivo em encontrar o menor volume da estrutura, tornando os modelos geométricos obtidos mais econômicos e leves quando comparados às configurações usuais.

**Palavras-chave:** Treliças Metálicas Planas. Método dos Elementos Finitos. Otimização de *Forma*. Critérios de Resistência.

## ABSTRACT

The actual construction field scenario is inherently competitive and scarce of resources, in which professionals are constantly pressured to find the best way to design structures while considering profit, time and natural resources. Hereupon, structural optimization is necessary because it consists of a systematic method to find the best structure configuration. In these terms, the present work intends to use shape optimization for the design of steel flat trusses roofs. In order to do that, the Finite Element Method was used to evaluate the internal forces acting on the trusses; some parameters that define the geometry of the structure were delineated, and the ASTM A36 steel was adopted as standard, since this steel is widely used on the construction field. In addition, this work is concerned with conducting the optimization process always meeting certain constraints, such as tension, compression and buckling. Lastly, regarding the results, the shape optimization process was effective in finding the lowest volume of the structure; consequently, the geometric models obtained were more economic and low weight than the usual configurations.

**Keywords:** Steel Flat Trusses. Finite Element Method. Shape Optimization. Strength Constraints.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Alguns tipos de treliças de cobertura.....	15
Figura 2 - Treliça de coberta tipo Belga Inclinada.....	17
Figura 3 - Treliça de coberta tipo Pratt Inclinada.....	18
Figura 4 - Treliça de coberta tipo Howe Inclinada.....	18
Figura 5 - Treliça de coberta tipo Belga Curva.....	18
Figura 6 - Treliça de coberta tipo Pratt Curva.....	19
Figura 7 - Treliça de coberta tipo Howe Curva.....	19
Figura 8 - Seções transversais adotadas neste trabalho.....	20
Figura 9 - (a) Configuração inicial; (b) Configuração otimizada. ....	23
Figura 10 - (a) Configuração inicial; (b) Configuração otimizada.....	24
Figura 11 - Ilustração de otimização topológica.....	24
Figura 12 – Barra prismática submetida à um carga axial.....	27
Figura 13 – Elongação de uma barra tracionada.....	28
Figura 14 – Deslocamentos e forças nodais do elemento.....	28
Figura 15 - Alongamento de uma barra simples com esforço axial.....	29
Figura 16 - Elemento inclinado em relação ao sistema global de coordenadas.....	30
Figura 17 - Treliça com identificadores para os elementos, nós e graus de liberdade.....	32
Figura 18 - Gráfico tensão-deformação do aço ASTM A36.....	35
Figura 19 - Distribuição de tensão na treliça.....	43
Figura 20 - Diagrama de falhas para a seção circular vazada.....	43
Figura 21 - Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.....	44
Figura 22 - Distribuição de tensão na treliça.....	47
Figura 23 - Diagrama de falhas para a seção circular vazada.....	47
Figura 24 - Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.....	48

Figura 25 - Distribuição de tensão na treliça.....	51
Figura 26 - Diagrama de falhas para a seção circular vazada.....	51
Figura 27 - Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.....	52
Figura 28 - Distribuição de tensão na treliça.....	55
Figura 29 - Diagrama de falhas para a seção circular vazada.....	55
Figura 30 - Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.....	56
Figura 31 - Distribuição de tensão na treliça.....	59
Figura 32 - Diagrama de falhas para a seção circular vazada.....	59
Figura 33 - Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.....	60
Figura 34 - Distribuição de tensão na treliça.....	63
Figura 35 - Diagrama de falhas para a seção circular vazada.....	63
Figura 36 - Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.....	64

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Classificação do aço carbono de acordo com suas propriedades mecânicas.....	21
Tabela 2 - Classificação do aço carbono de acordo com suas propriedades mecânicas.....	37
Tabela 3 - Resultados para treliça Belga Inclinação com $L = 10$ e $N = 10$ .....	41
Tabela 4 - Resultados para treliça Belga Inclinação com $L = 10$ e $N = 20$ .....	42
Tabela 5 - Resultados para treliça Pratt Inclinação com $L = 10$ e $N = 10$ .....	45
Tabela 6 - Resultados para treliça Pratt Inclinação com $L = 10$ e $N = 20$ .....	46
Tabela 7 - Resultados para treliça Howe Inclinação com $L = 10$ e $N = 10$ .....	49
Tabela 8 - Resultados para treliça Howe Inclinação com $L = 10$ e $N = 20$ .....	50
Tabela 9 - Resultados para treliça Belga Curva com $L = 10$ e $N = 10$ .....	53
Tabela 10 - Resultados para treliça Belga Curva com $L = 10$ e $N = 20$ .....	54
Tabela 11 - Resultados para treliça Pratt Curva com $L = 10$ e $N = 10$ .....	57
Tabela 12 - Resultados para treliça Pratt Curva com $L = 10$ e $N = 20$ .....	58
Tabela 13 - Resultados para treliça Howe Curva com $L = 10$ e $N = 10$ .....	61
Tabela 14 - Resultados para treliça Howe Curva com $L = 10$ e $N = 20$ .....	62
Tabela 15 - Ranking do desempenho das treliças para $L = 10$ m e $N = 10$ .....	65
Tabela 16 - Ranking do desempenho das treliças para $L = 10$ m e $N = 20$ .....	65
Tabela 17 - Ranking do desempenho das treliças para $L = 20$ m e $N = 20$ .....	66
Tabela 18 - Ranking do desempenho das treliças para $L = 20$ m e $N = 40$ . ....	67
Tabela 19 – Resultados para treliça Belga Inclinação com $L = 20$ m e $N = 20$ .....	71
Tabela 20 - Resultados para treliça Belga Inclinação com $L = 20$ m e $N = 40$ .....	71
Tabela 21 - Resultados para treliça Pratt Inclinação com $L = 20$ m e $N = 20$ .....	72

Tabela 22 - Resultados para treliça Pratt Inclinada com $L = 20$ m e $N = 40$ .....	72
Tabela 23 - Resultados para treliça Howe Inclinada com $L = 20$ m e $N = 20$ .....	73
Tabela 24 - Resultados para treliça Howe Inclinada com $L = 20$ m e $N = 40$ .....	73
Tabela 25 - Resultados para treliça Belga Curva com $L = 20$ m e $N = 20$ .....	74
Tabela 26 - Resultados para treliça Belga Curva com $L = 20$ m e $N = 40$ .....	74
Tabela 27 - Resultados para treliça Pratt Curva com $L = 20$ m e $N = 20$ .....	75
Tabela 28 - Resultados para treliça Pratt Curva com $L = 20$ m e $N = 40$ .....	75
Tabela 29 - Resultados para treliça Howe Curva com $L = 20$ m e $N = 20$ .....	76
Tabela 30 - Resultados para treliça Howe Curva com $L = 20$ m e $N = 40$ .....	76

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	14
1.1. Justificativas do Trabalho .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
1.2. Objeto de Estudo.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
1.3. Objetivos.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
1.3.1. Objetivo Geral.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
1.3.2. Objetivos Específicos.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
1.4. Propriedades dos Material.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
1.5. Otimização do Projeto Estrutural .....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
<b>2. METODOLOGIA</b> .....	26
2.1. Formulação do Método dos Elementos Finitos Aplicada à Treliças Planas .....	26
2.1.1. Matriz de Rigidez Local do Elemento de Barra da Treliça.....	27
2.1.2. Matriz de Rigidez Local Utilizando um Sistema Global de Coordenadas.....	30
2.1.3. Montagem da Matriz de Rigidez Global.....	31
2.1.4. Solução do Sistema de Equações Lineares .....	33
2.1.5. Determinação dos Esforços Internos.....	33
2.2. Cálculo do Volume Mínimo com Base nos Critérios de Resistência .....	33
2.3. Resistência à Tração ou Compressão do Material .....	34
2.4. Tensão Crítica Associada à Flambagem Elástica.....	36
2.5. Determinação das Configurações Ótimas .....	38
2.5.1. Com Base na Discretização das Variáveis de Projeto e com o Auxílio de Recursos Gráficos (Procedimento Gráfico) .....	38
2.5.2. Empregando a Toolbox de Otimização do MatLab .....	39
<b>3. RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	41
3.1. Treliça Belga Inclinada .....	41
3.2.1. Seção Ótima .....	42
3.2. Treliça Pratt Inclinada.....	44
3.2.1. Seção Ótima .....	46
3.3. Treliça Howe Inclinada.....	48
3.3.1. Seção Ótima .....	50
3.4. Treliça Belga Curva .....	52
3.4.1. Seção Ótima .....	54
3.5. Treliça Pratt Curva .....	56

3.5.1. Seção Ótima .....	58
3.6. Treliça Howe Curva.....	60
3.6.1. Seção Ótima .....	62
3.7. Discussões dos Resultados.....	64
<b>4. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>68</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>69</b>
<b>ANEXO I .....</b>	<b>71</b>
<b>ANEXO II.....</b>	<b>72</b>
<b>ANEXO III .....</b>	<b>73</b>
<b>ANEXO IV.....</b>	<b>74</b>
<b>ANEXO V .....</b>	<b>75</b>
<b>ANEXO VI.....</b>	<b>76</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Entende-se por treliça toda estrutura composta por barras retas unidas por rótulas e que são submetidas somente à esforços axiais. Assim sendo, estes elementos são projetados com geometrias que lhe conferem resistência à torção, flexão e cisalhamento desprezíveis. Neste ínterim, as únicas forças internas relevantes nas barras da treliça são as forças axiais internas, caracterizando-se assim por um comportamento mecânico análogo ao das molas (Fish e Belytschko, 2009).

O uso de treliças na construção civil remonta ao século 18, período no qual algumas pontes treliçadas foram construídas. De acordo com Pfeil e Pfeil (2009), entre 1780 e 1820 foram construídas algumas pontes treliçadas com elementos em ferro fundido. O mesmo autor destaca ainda que a utilização de treliças foi de suma importância na construção de algumas pontes ferroviárias entre 1850 e 1880.

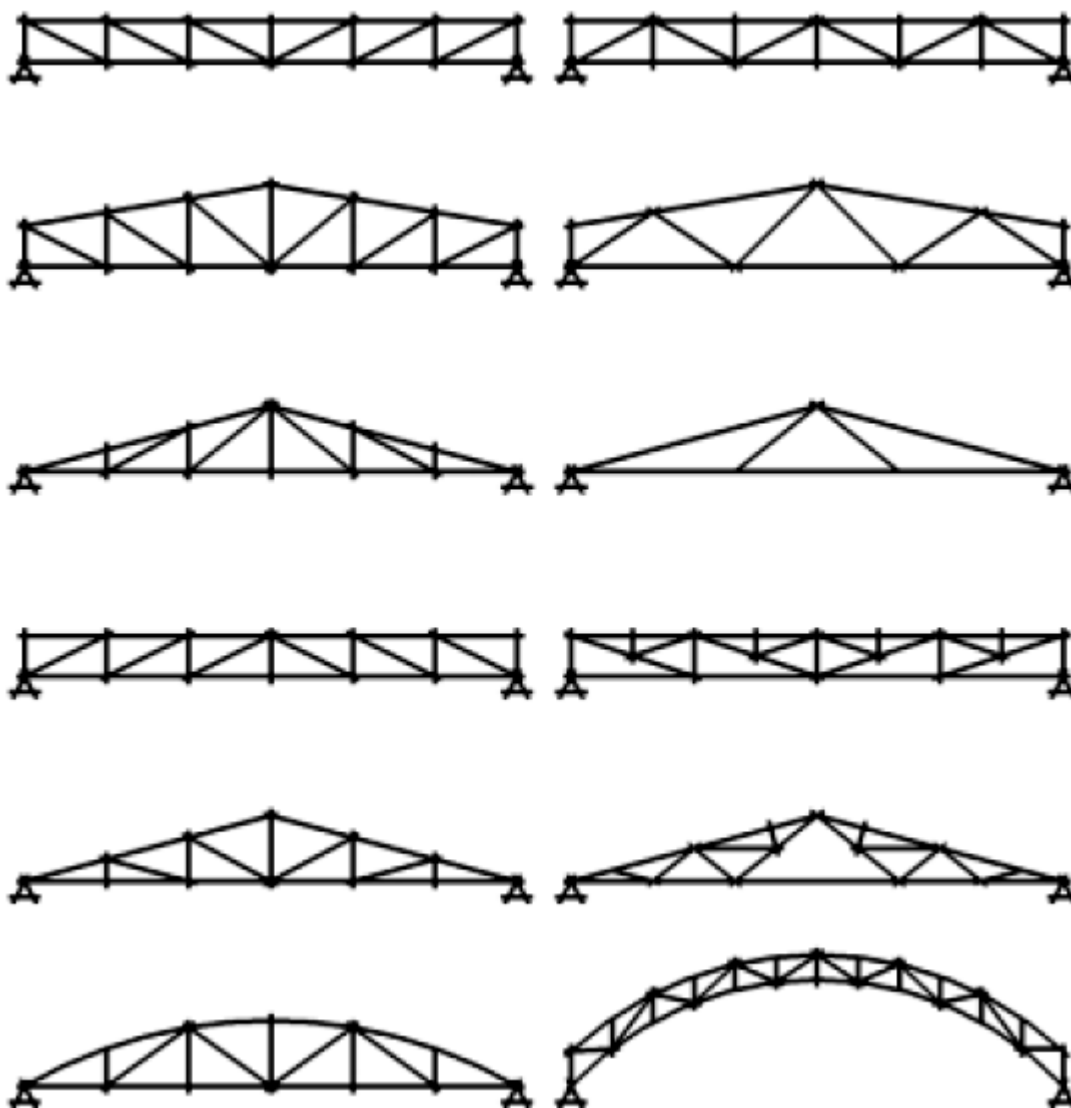
De forma geral, Souza e Rodrigues (2008) enfatizam que os principais elementos que compõem as treliças são os seguintes:

- Corda ou banzo: os elementos superiormente ou inferiormente limitantes da treliça;
- Montante: barra vertical;
- Painel: trecho compreendido entre dois alinhamentos consecutivos de montantes;
- Diagonal: barra com o eixo inclinado compondo a diagonal de um painel;
- Nó: ponto de junção das extremidades das barras;
- Tesoura: treliça de banzos não paralelos, destinada ao suporte de uma cobertura.

As treliças podem ser classificadas como planas, se todos os seus elementos estiverem contidos em um mesmo plano, ou espaciais, se seus elementos estiverem contidos em planos distintos.

As treliças de cobertura podem assumir as mais diversas geometrias, no entanto, existem os tipos de treliças mais comuns, estes são mostrados na Figura 1.

Figura 1: Alguns tipos de treliças de cobertura.



Fonte: Nogueira (2009).

As treliças apresentam diversas vantagens técnicas e econômicas quando comparadas com outras estruturas. Segundo, o uso de estruturas treliçadas permitem construir vãos grandes com um consumo de material relativamente baixo. Em adição, esclarece-se que treliças metálicas são estruturas leves, pois são compostas por elementos esbeltos, e esta característica é uma das mais almejadas quando da concepção de uma estrutura.

No entanto, treliças metálicas apresentam algumas desvantagens técnicas e econômicas. Nesse aspecto, Souza e Rodrigues (2008) frisam que estruturas metálicas apresentam limitações na



execução em fábrica devido à problemas relacionados com o transporte até o local de instalação; oxidam devido ao contato com o ar atmosférico, necessitando, portanto, de tratamento superficial; exigem mão-de-obra e equipamentos especializados para fabricação e montagem; e, por fim, mostram limitações de fornecimento de perfis estruturais.

Mesmo com alguns aspectos negativos, treliças metálicas são abrangentemente utilizadas em construções civis. Neste sentido, Paiva *et al.* (2009) salientam que estas estruturas são amplamente empregadas na engenharia civil atualmente, sendo aplicadas em cobertas, equipamentos de transporte, passarelas, pontes, dentre outras.

### 1.1. Justificativas do Trabalho

A indústria da construção civil se encontra atualmente em um cenário bastante competitivo e de escassez de recursos. Neste contexto, na concepção das estruturas os profissionais deste setor são constantemente convidados à encontrar uma maneira mais economicamente viável e com o menor uso de matéria prima. Além disso, é necessário que estas estruturas atendam todos os requisitos mecânicos e de serviceabilidade, como salienta Maia (2009), quando afirma que o objetivo principal de um projeto estrutural é assegurar que a estrutura cumprirá satisfatoriamente suas incumbências durante sua vida útil.

No entanto, este processo de encontrar o melhor dimensionamento da estrutura não consiste em uma tarefa fácil. Tradicionalmente, este procedimento é conduzido baseando-se na experiência e intuição do projetista, consistindo, assim, em um processo trabalhoso e inadequado para o cenário descrito acima. À luz dessas considerações, este trabalho se justifica na necessidade de um método sistemático e eficaz no processo de encontrar a melhor configuração de um projeto estrutural. Assim sendo, este trabalho propõe metodologias que oferecem rapidez nas tomadas de decisões, na escolha da configuração geométrica ótima de treliças metálicas planas empregadas em cobertas.

### 1.2. Objeto de Estudo

Neste trabalho foram estudadas vigas treliçadas como parte da cobertura de um galpão. Santos (2010) define galpões como construções com grandes áreas, normalmente com um só pavimento, com colunas igualmente espaçadas e cobertura na parte superior, podendo ou não apresentar cobertura lateral. De acordo com Pinho (2011), a maioria das construções em aço no Brasil é composta por estruturas de um só pavimento, e no que se refere à soluções econômicas e

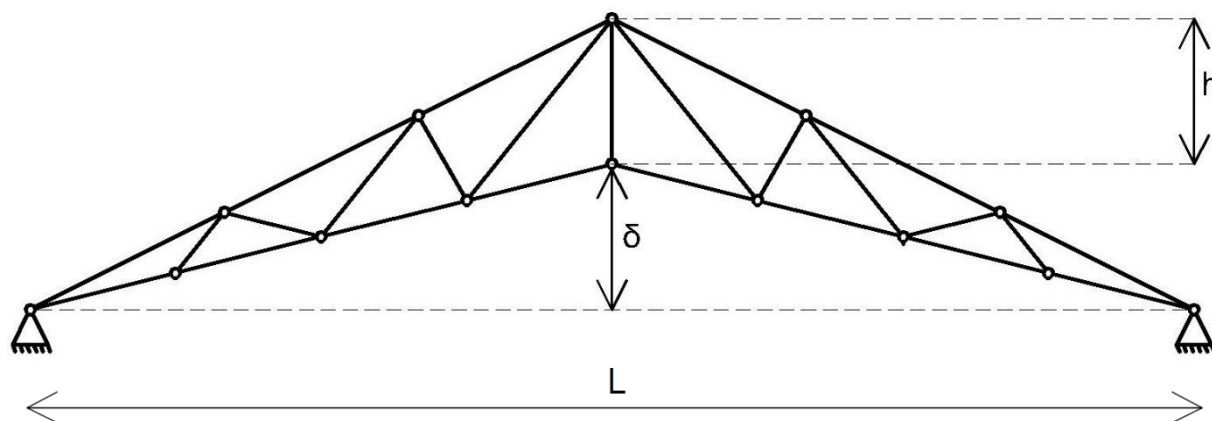
versáteis, os galpões são as melhores opções. Sua aplicação abrange diversos setores, tais como, fábricas, ginásio coberto, lojas, academias, etc.

Em virtude do uso frequente e do vasto campo de utilização no mercado, foram escolhidas para o cálculo das cargas atuantes nas treliças telhas de fibro-cimento com 8 mm de espessura. Barbosa e Cunha (2013) mencionam algumas de suas vantagens:

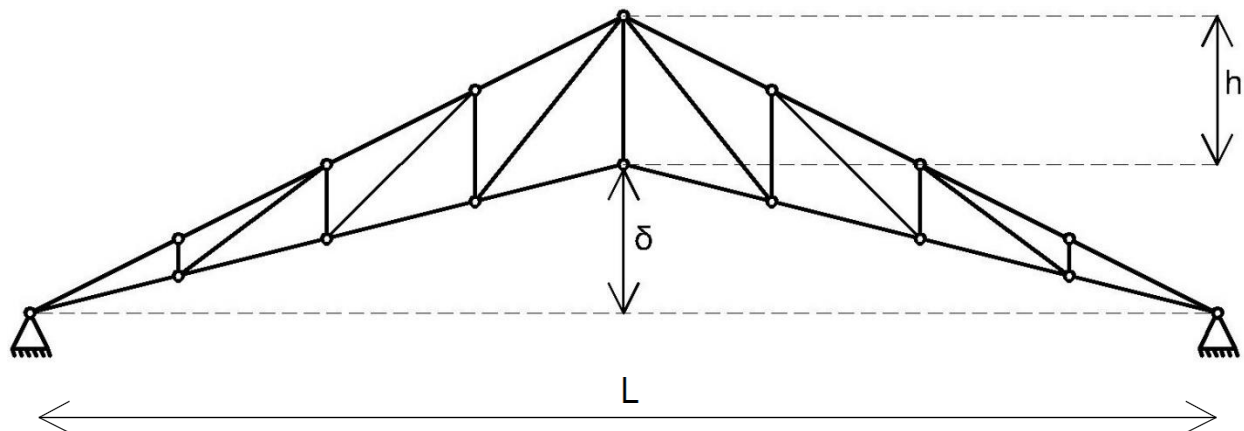
- Facilidade na instalação;
- Maior leveza;
- Menor consumo de mão-de-obra;
- Vãos maiores;
- Grande durabilidade;
- Boa Resistência.

Foram analisados vãos com 10 e 20 metros de comprimento ( $L$ ), com uma distância entre os pórticos de 10 metros. No cálculo do carregamento aplicado em cada nó do banzo superior foram considerados o peso da telha de fibro-cimento de  $0,44 \text{ kN/m}^2$  (NBR-6120:1980) e a área de influência de cada nó. O peso próprio da treliça foi desprezado e foram adotados vínculos de segundo gênero nos apoios.

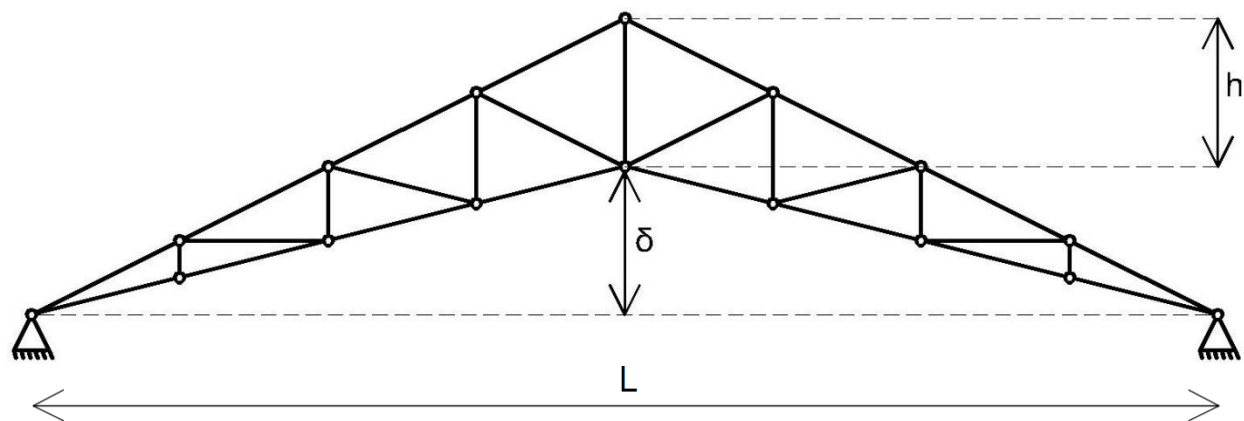
**Figura 2: Treliça de cobertura tipo Belga Inclinada.**



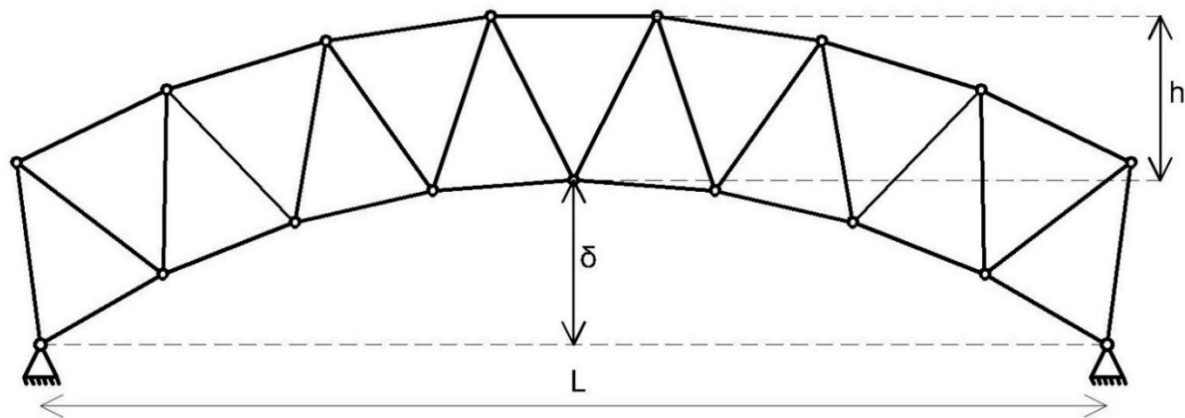
Fonte: Autorial Própria (2015).

**Figura 3: Treliza de cobertura tipo Pratt Inclinada.**

Fonte: Autorial Própria (2015).

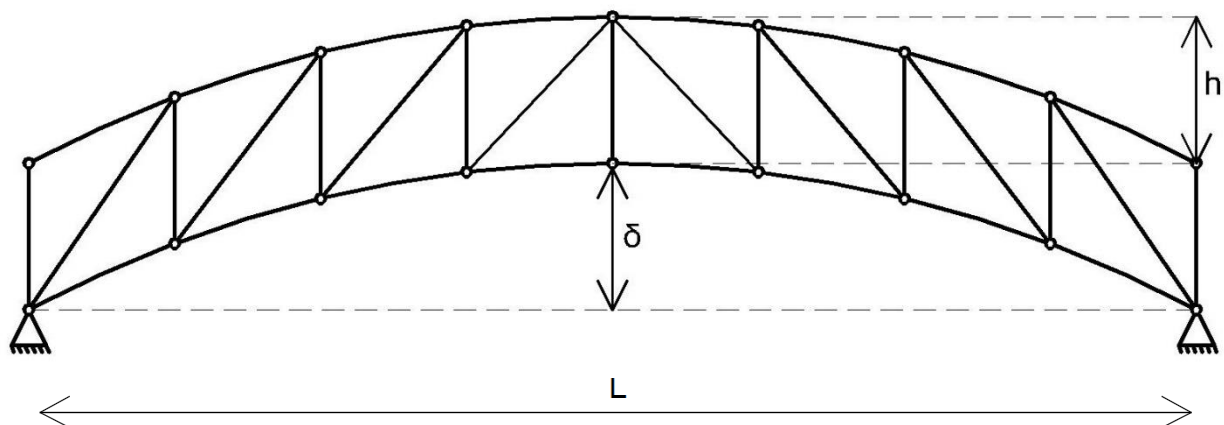
**Figura 4: Treliza de cobertura tipo Howe Inclinada.**

Fonte: Autorial Própria (2015).

**Figura 5: Treliza de cobertura tipo Belga Curva.**

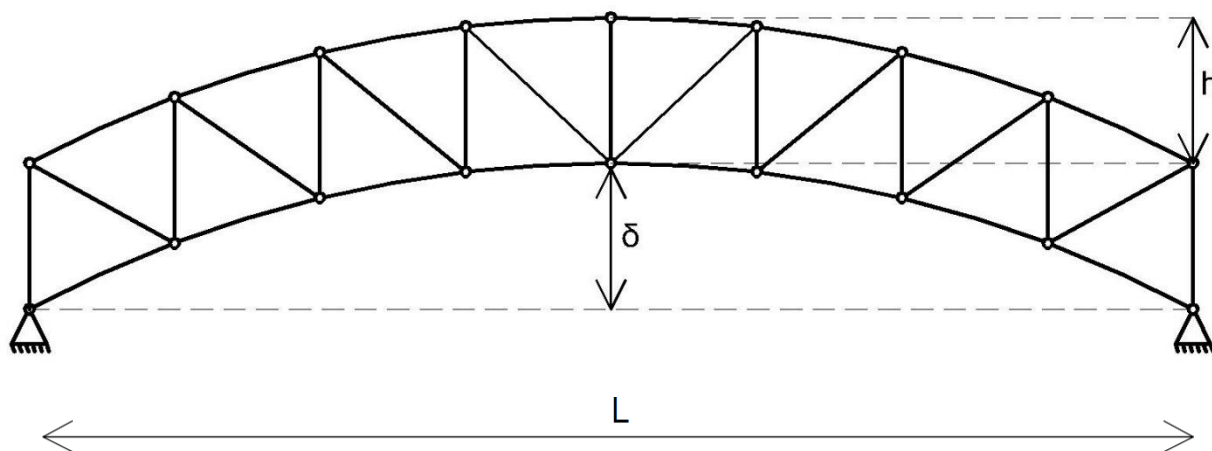
Fonte: Autorial Própria (2015).

**Figura 6: Treliça de cobertura tipo Pratt Curva.**



Fonte: Autorial Própria (2015).

**Figura 7: Treliça de cobertura tipo Howe Curva.**



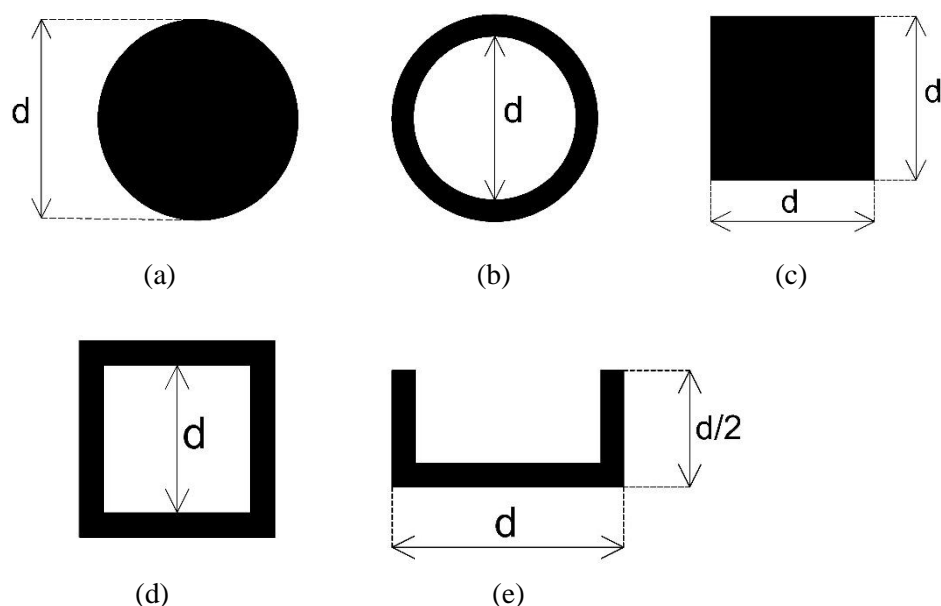
Fonte: Autorial Própria (2015).

Os modelos de treliças escolhidos para esse estudo foram: Belga inclinada, Pratt inclinada, Howe inclinada, Belga Curva, Pratt Curva e Howe Curva. As configurações e os parâmetros definidores da geometria da treliça ( $h$  e  $\delta$ ) são mostrados nas Figuras 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Outro parâmetro avaliado foi a quantidade de elementos de barras contidos na treliça, tomando como referência a quantidade no banzo inferior ( $N$ ).

No que se refere à geometria da seção transversal dos elementos de barra da treliça, foram escolhidas seções comumente encontradas na prática, são elas: circular cheia (Figura 8a), circular

vazada (Figura 8b), quadrada cheia (Figura 8c), quadrada vazada (Figura 8d) e seção em U (Figura 8e). Foi adotada uma espessura de 3 milímetros para as seções transversais vazadas, por ser um valor comumente empregado na prática. O parâmetro "d" define as dimensões características das seções transversais.

**Figura 8: Seções transversais adotadas neste trabalho.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

### 1.3. Objetivos

#### 1.3.1. Objetivo Geral

Realizar análise de otimização de forma com foco no desempenho estrutural de treliças metálicas planas empregadas em cobertas, levando-se em consideração critérios de resistência e com intuito de obter diretrizes para o projeto estrutural no que diz respeito a escolha da configuração com desempenho ótimo.

#### 1.3.2. Objetivos Específicos

- Verificar se a inclusão do parâmetro  $\delta$  na definição da configuração das treliças inclinadas permite um ganho de desempenho significativo na estrutura;
- Conferir qual tipo de falha prepondera na determinação da configuração ótima (falha à tração, compressão ou flambagem);

- Investigar a influência do tipo de seção transversal na configuração ótima;
- Examinar a influência do tamanho do elemento de barra da treliça no desempenho da mesma;
- Avaliar a distribuição dos esforços para as configurações ótimas;
- Determinar dentre as configurações analisadas qual apresenta melhor desempenho;
- Propor metodologias de análise baseadas em procedimentos gráficos ou no uso da *toolbox* de otimização do MATLAB ®.

#### 1.4. Propriedades dos Materiais

Neste trabalho, adotou-se o aço carbono ASTM A36, por se tratar do mais conhecido e utilizado para fins estruturais. De maneira geral, o aço é uma liga de ferro-carbono com teor de carbono variando entre 0,008% e 2,11%. Nesta perspectiva, o carbono aumenta a resistência do aço, entretanto, diminui sua ductilidade, o que leva a problemas na soldagem (Pfeil e Pfeil, 2009). Dependendo do seu emprego, este aço é produzido em vários tipos, formas e composições. Esta versatilidade possibilita sua adequação às demandas que vão surgindo no mercado. No que se refere à composição química dos aços utilizados com fins estruturais, Pfeil e Pfeil (2009) os classifica como: aço carbono e de baixa liga.

O primeiro apresenta em sua composição quantidades limitadas dos elementos químicos carbono, fósforo, manganês e silício (CBCA, 2013). Porém, pode-se encontrar outros elementos em quantidade residuais. O aço carbono pode ser classificado de acordo com suas propriedades mecânicas como mostra a Tabela 1.

**Tabela 1: Classificação do aço carbono de acordo com suas propriedades mecânicas.**

TIPO	LIMITE DE ESCOAMENTO MÍNIMO, MPa
Aço carbono de média resistência	195 a 259
Aço de alta resistência e baixa liga	290 a 345
Aços ligados tratados termicamente	630 a 700

Fonte: CBCA (2013)

Os aços de baixa liga, por sua vez, apresentam a adição de alguns elementos de liga para alcançar uma maior resistência. Dentre os elementos que podem ser utilizados como adição estão

o cromo colúmbio, cobre, manganês, molibdênio, níquel, fósforo, vanádio (Pfeil e Pfeil, 2009). Segundo CBCA (2013), esse tipo de aço é utilizado quando se procura:

- Aumentar a resistência mecânica;
- Melhorar a resistência ao choque e ao limite de fadiga;
- Elevar o limite de escoamento para o limite de resistência a tração, sem perda da ductilidade;
- Melhorar a resistência à corrosão atmosférica.

### 1.5.Otimização do Projeto Estrutural

Como mencionado no item 1.1, se faz necessária uma busca por uma configuração ótima, em termos de orçamento e tempo de execução. No entanto, encontrar esta configuração ótima não consiste em uma tarefa trivial. Tradicionalmente, este processo é feito por meio de um método exaustivo, conhecido como método iterativo-intuitivo. Christensen e Klarbring (2009) esclarece que este método consiste em três passos, são eles: (i) sugerir uma configuração inicial; (ii) investigar o atendimento aos requisitos baseados na função; (iii) se eles não forem satisfeitos, uma nova configuração deve ser testada, e mesmo quando os requisitos são satisfeitos, pode não ser a configuração ótima, então, sugere-se uma nova configuração; (iv) sugerir uma nova configuração e submeter à (ii). Obviamente, este processo é inadequado para o cenário inerentemente competitivo da indústria da construção civil, pois não consiste em um método sistemático e eficaz.

Diante do exposto, apresenta-se a otimização estrutural para contornar problemas desta natureza. A otimização estrutural consiste em um método sistemático pelo qual se pode obter a configuração ótima da estrutura, observando-se algumas restrições associadas ao projeto. O grande cerne da otimização estrutural consiste no fato de buscar a melhor solução por meio de um modelo matemático, onde já estão inseridos os objetivos e as restrições. Dessa forma, este método avalia diversas combinações possíveis na busca por uma solução ótima. Outrossim, a otimização estrutural permite a avaliação matemática da qualidade da solução, como salienta Fonseca (2007).

Dando continuidade, pode-se mencionar que de uma forma geral, o processo de otimização envolve alguns elementos, que são as funções, as variáveis e as restrições. Para a definição de um

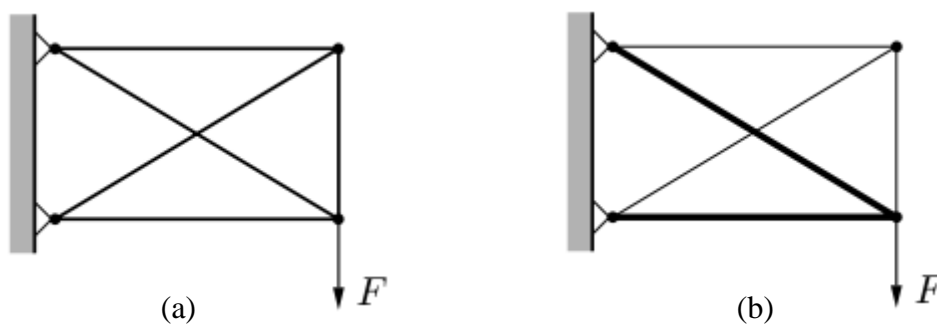
problema de otimização, Maia (2009) menciona que é necessário uma função objetivo, um conjunto de variáveis a serem analisadas e um conjunto de restrições que devem ser respeitadas.

A função objetivo é uma função ou função de várias funções que são verificadas em todo o seu domínio a procura da situação ótima. A título de ilustração, na área de estruturas, a função objetivo pode ser o peso da estrutura, os deslocamentos, as tensões, o custo, a frequência de vibração, ou ainda combinações dessas variáveis. Em uma situação prática, o profissional pode estar interessado em minimizar a função objetivo, assim como pode estar interessado em maximizá-la, no entanto, o interesse em minimização é mais comum na construção civil (Maia, 2009).

Já as variáveis de projeto são parâmetros que definem o sistema estudado. Assim sendo, estas variáveis, em estruturas, podem ser parâmetros geométricos, como o comprimento da barra ou dimensões da seção transversal e ainda as propriedades dos materiais. Em adição, vale ressaltar que estas variáveis podem ser contínuas, discretas ou inteiras, analisadas por meio de métodos computacionais inerentemente rápidos e eficazes na verificação de uma vasta quantidade de dados e combinações.

Por fim, mas não menos importante, tem-se as restrições, que são basicamente exigências que o projeto deve satisfazer. Estas restrições podem ser de desigualdade, de igualdade, laterais e, obviamente, combinações dessas restrições. Há ainda casos onde existem restrições de não-negatividade. Como ilustração, citam-se a máxima resistência de um determinado elemento ou um volume máximo da estrutura como restrições de projeto.

**Figura 9: (a) Configuração inicial; (b) Configuração otimizada.**



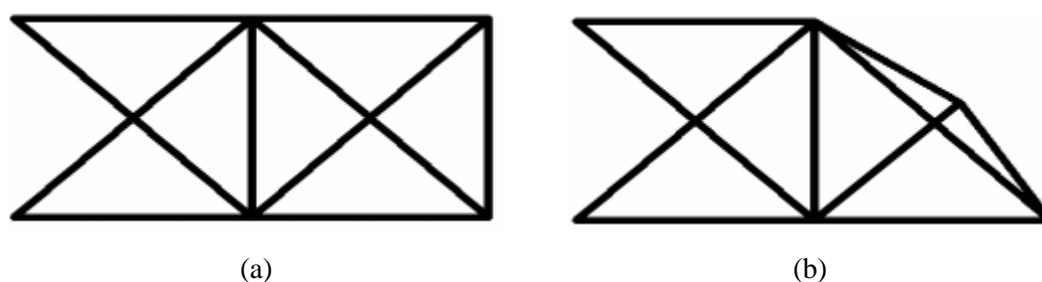
Fonte: Christensen e Klarbring (2009).



Em adição, explicita-se que existem vários tipos de otimização, no entanto, Christensen e Klarbring (2009) afirma que três tipos principais se sobressaem. Estes são, otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica. A primeira delas, otimização dimensional, busca minimizar ou maximizar a função objeto por meio da melhor distribuição geométrica, sem alterar, no entanto, a malha dos elementos da estrutura e obedecendo as restrições do problema. A Figura 9 ilustra este tipo de otimização.

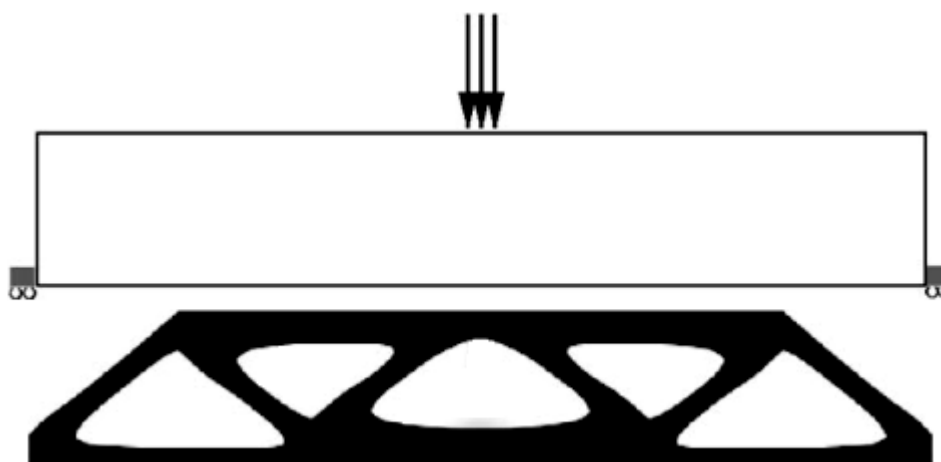
Quanto à otimização de forma, ressalta-se que o importante é encontrar a melhor forma da estrutura para uma dada função. Desta forma, em um problema contínuo, busca-se encontrar a melhor curva que define o contorno da estrutura, já em um problema discreto busca-se encontrar as coordenadas dos pontos nodais. Geralmente, esse tipo de otimização é caracteristicamente mais complexo, devido à possibilidade de distorções na malha de elementos finitos (Fonseca, 2007). Como ilustração, a Figura 10 mostra uma ideia desse tipo de otimização.

**Figura 10: (a) Configuração inicial; (b) Configuração otimizada.**



Fonte: Fonseca (2007).

**Figura 11: Ilustração de otimização topológica.**



Fonte: Christensen e Klarbring (2009).

Por fim, a otimização topológica consiste na busca pela melhor distribuição do material no domínio do projeto. No caso de estruturas discretas este tipo de otimização define a presença ou a ausência de determinados elementos, enquanto que em problemas contínuos, pode-se imaginar furos na peça estrutural. A figura 11 ilustra este tipo de otimização.

## 2. METODOLOGIA

Neste trabalho, utilizou-se o método dos elementos finitos baseado em sistemas discretos para o cálculo dos esforços internos atuantes nos elementos da treliça. A partir dos esforços internos, calcula-se a área mínima das barras da treliça de forma a atender os critérios de resistência. Baseados nestes cálculos, emprega-se um procedimento de otimização estrutural. Adiante, apresenta-se detalhadamente a metodologia empregada no processo de otimização.

### 2.1. Formulação do Método dos Elementos Finitos Aplicada à Treliças Planas

Na engenharia é comum lidar com problemas dos mais variados níveis de complexidade. Nesse aspecto, um dos grandes desafios na engenharia é a resolução destes problemas de modo a garantir não só a confiabilidade dos resultados, como também sua precisão em relação ao comportamento real do problema analisado.

Porém, na maioria das vezes, esses problemas recaem em equações diferenciais parciais cuja solução através de métodos analíticos não é trivial, sendo necessário buscar caminhos alternativos. Na área de cálculo estrutural um método bastante utilizado é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que baseia-se em aproximações numéricas e, conseqüentemente, tratando-se de soluções aproximadas.

No MEF divide-se um corpo contínuo em finitas partes, denominadas de elementos, que se conectam através dos nós para formar as malhas (Fish e Belytschko, 2009). A medida que se aumenta o número de elementos e/ou nós tem-se um maior número de incógnitas e equações, porém soluções mais precisas.

Devido aos inúmeros elementos que um corpo pode ser dividido, a depender do nível de precisão requerido, uma das principais características apresentadas pelo método é sua metodologia sistemática que possibilita o auxílio de recursos computacionais para seu processamento. Entretanto Filho (2000) enfatiza que para se obter resultados plausíveis é de suma importância o entendimento e a interpretação da natureza física do problema, visto que só assim é possível descrever seu comportamento real e chegar às equações que rege o problema.

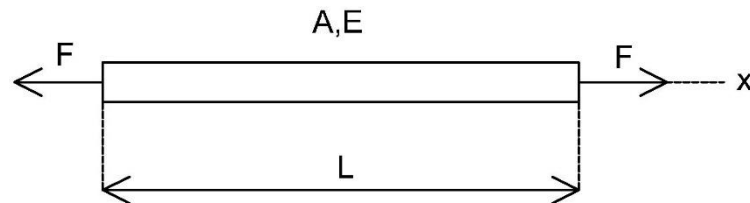
Segundo Fish e Belytschko (2009), para análise empregando-se o método dos elementos finitos tem-se os seguintes passos:

- Pré-processamento: subdivisão do domínio do problema em elementos finitos;
- Formulação dos Elementos: desenvolvimento de equações para os elementos;
- Montagem: obtenção do sistema global de equações a partir das equações individuais dos elementos;
- Resolução das equações;
- Pós-processamento: determinação de valores de interesse e a obtenção da visualização das respostas.

### 2.1.1. Matriz de Rigidez Local do Elemento de Treliça Bidimensional

Para a montagem da matriz de rigidez local, considera-se uma barra prismática com comprimento  $L$ , seção transversal  $A$  e uma força axial  $F$ , como mostra a Figura 12. No que se refere ao seu material, a barra é constituída por um material elástico linear, isotrópico e homogêneo, com comportamento mecânico definido pelo seu módulo de elasticidade  $E$ .

**Figura 12: Barra prismática submetida a uma carga axial.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

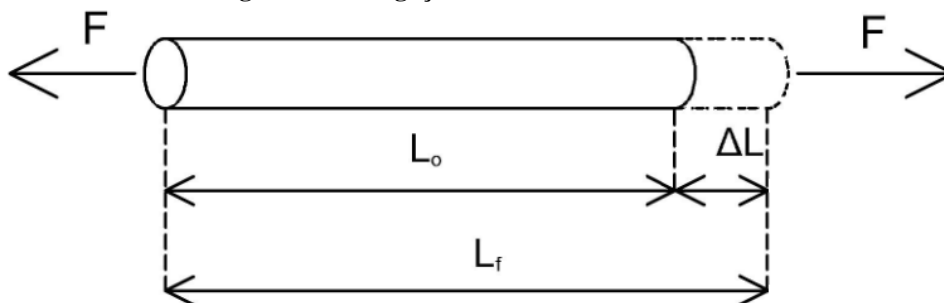
Considerando uma tensão axial  $\sigma$  constante ao longo de toda a seção transversal da barra, tem-se

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (1)$$

A deformação longitudinal  $\varepsilon_L$  de uma barra com carregamento axial, representada na Figura 13, pode ser calculada pela equação

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_F - L_0}{L_0} \quad (2)$$

Figura 13: Elongação de uma barra tracionada.



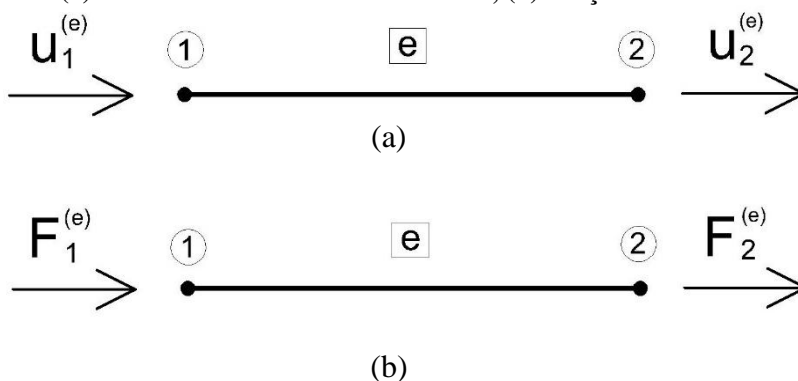
Fonte: Aatoria Própria (2015).

Uma propriedade importante nesse estudo é o comportamento elástico linear do material que compõem a barra. Essa relação, também conhecida como Lei de Hooke, pode ser expressa como

$$\sigma = E \varepsilon_L \quad (3)$$

Para cada elemento “e” de barra da treliça tem-se dois nós (1 e 2) e os respectivos deslocamentos ( $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}$ ) e forças ( $F_1^{(e)}, F_2^{(e)}$ ) nodais, como ilustra a Figura 14.

Figura 14: (a) Deslocamentos nodais do elemento; (b) Forças nodais do elemento.



Fonte: Aatoria Própria (2015).

Combinando as Equações 1, 2 e 3, chega-se a seguinte expressão para a força axial no elemento de barra da treliça:

$$F_2^{(e)} = \frac{A^{(e)} E^{(e)} \Delta L^{(e)}}{L_o^{(e)}} \quad (4)$$

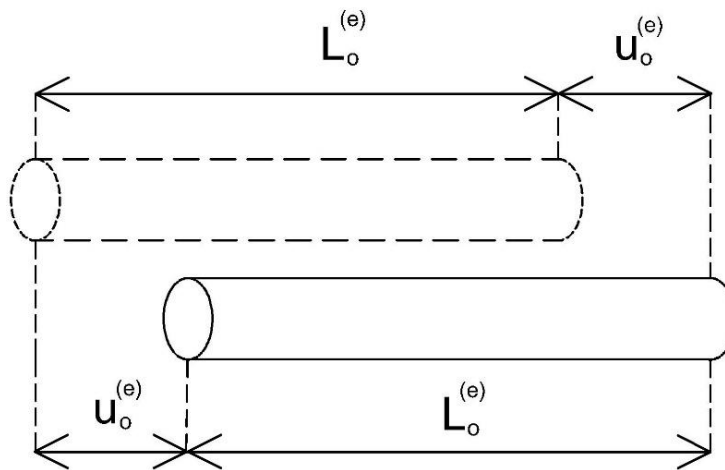
Com base na Figura 15, pode-se encontrar o alongamento no elemento de barra da treliça em função dos deslocamentos nodais:

$$L_f^{(e)} = L_o^{(e)} + u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \quad (5)$$

$$\Delta L^{(e)} = L_f^{(e)} - L_o^{(e)} \quad (6)$$

$$\Delta L^{(e)} = u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \quad (7)$$

**Figura 15: Alongamento de uma barra simples com esforço axial.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

Pode-se obter as equações que relacionam as forças nodais com os deslocamentos nodais do elemento utilizando-se a Equação 7 e impondo-se o equilíbrio da barra de treliça ( $F_1^{(e)} + F_2^{(e)} = 0$ ), chegando-se nas Equações 8 e 9.

$$F_1^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L_o^{(e)}} (u_1^{(e)} - u_2^{(e)}) \quad (8)$$

$$F_2^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L_o^{(e)}} (u_2^{(e)} - u_1^{(e)}) \quad (9)$$

Essas equações podem ser escritas na forma matricial como:

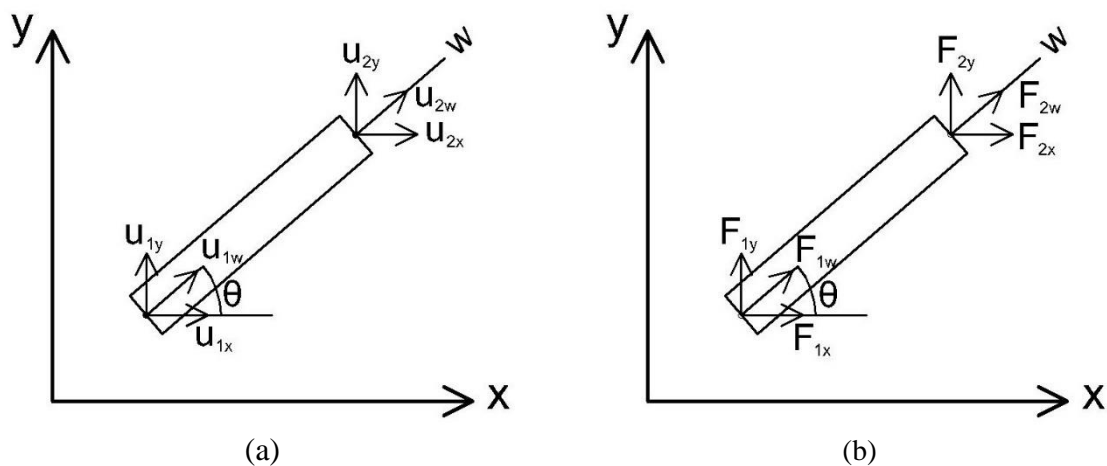
$$\begin{bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L_o^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

As forças nodais são relacionadas com os deslocamentos nodais por meio de uma matriz, denominada matriz de rigidez local do elemento de barra da treliça.

### 2.1.2. Matriz de Rigidez Local Utilizando um Sistema Global de Coordenadas

Na seção anterior foi obtida a matriz de rigidez local utilizando um sistema local de coordenadas, onde um dos eixos coincide com o eixo axial do elemento de barra. Porém, os elementos podem assumir inclinações diferentes, dessa forma, é conveniente trabalhar com um sistema global de coordenadas. Logo, deve-se considerar um elemento com eixo axial  $w$  e inclinação  $\theta$  em relação ao eixo global  $x$ , Figura 16.

**Figura 16: Elemento inclinado em relação ao sistema global de coordenadas; (a) componentes de deslocamentos nodais, (b) componentes de forças nodais.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

Os deslocamentos nodais ao longo do eixo da barra ( $w$ ) podem ser relacionados com suas componentes  $x$  e  $y$  pela expressão:

$$u_w = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \quad (11)$$

As forças axiais podem ser decompostas nas direções de  $x$  e  $y$  da seguinte forma:

$$F_x = F_w \cos(\theta) \quad (12)$$

$$F_y = F_w \text{sen}(\theta) \quad (13)$$

A relação entre os deslocamentos nodais ao longo do eixo axial  $w$  e as suas componentes em  $x$  e  $y$  podem ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} u_{1w} \\ u_{2w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

De maneira similar, pode-se encontrar a relação entre as forças nodais axiais e as suas componentes no sistema global de coordenadas, como segue:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1w} \\ F_{2w} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Substituindo as expressões 14 e 15 na Equação 10, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Realizando-se as multiplicações, chega-se a

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \text{sen} \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \text{sen} \theta \\ \cos \theta \text{sen} \theta & \text{sen}^2 \theta & -\cos \theta \text{sen} \theta & -\text{sen}^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \text{sen} \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \text{sen} \theta \\ -\cos \theta \text{sen} \theta & -\text{sen}^2 \theta & \cos \theta \text{sen} \theta & \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Logo, encontra-se a matriz de rigidez local do elemento de treliça que relaciona os deslocamentos e forças nodais de um elemento de barra com uma inclinação  $\theta$  em relação ao eixo  $x$ . De modo geral, as Equações 10 e 17 podem ser reescritas de maneira simplificada como:

$$\mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad (18)$$

onde  $\mathbf{F}^{(e)}$  é o vetor das forças locais,  $\mathbf{k}^{(e)}$  é a matriz de rigidez local do elemento e  $\mathbf{u}^{(e)}$  é o vetor de deslocamentos locais.

### 2.1.3. Montagem da Matriz de Rigidez Global

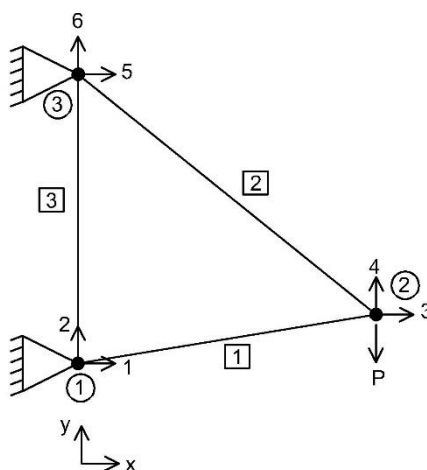
Para ilustrar o processo de montagem da matriz de rigidez global, considera-se a treliça da Figura 17. Os parâmetros que definem a geometria da treliça, entes geométricos, são os elementos



e os nós, para viabilizar o processo de montagem da matriz de rigidez global estes precisam ser identificados. Na Figura 17 os identificadores para os elementos estão dentro de quadrados e para os nós dentro de círculos. Associado a cada nó tem-se coordenadas cartesianas que os posicionam, logo, faz-se necessário definir um sistema de coordenadas global para a treliça. Ademais, cada nó apresenta dois graus de liberdade, que tem como propósito definir a cinemática ou a deformação da treliça, estes graus de liberdade também estão ilustrados na Figura 17.

No que se refere aos elementos da treliça, é imprescindível a definição de algumas características, tais como, as propriedades do material, a área da seção transversal, o seu comprimento, e, por fim, as conectividades, que permitem associar aos elementos adjacentes.

**Figura 17: Treliça com os identificadores para os elementos, nós e graus de liberdade.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

A montagem da matriz de rigidez global se dá pela superposição das matrizes de rigidez dos elementos de barra de acordo com sua localização e conexão dos seus nós. Nesse processo, deve ser forçada as condições de compatibilidade e de equilíbrio, sendo o mesmo conhecido na literatura como o método da rigidez direta.

Através da matriz de rigidez global do sistema ( $\mathbf{k}$ ), pode-se chegar a uma relação entre o vetor com as componentes dos deslocamentos global ( $\mathbf{u}$ ) e o vetor com as componentes de forças global ( $\mathbf{F}$ ), como segue:

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (19)$$

Para a treliça mostrada na Figura 17,  $\mathbf{k}$  é uma matriz 6x6,  $\mathbf{u} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6\}^T$  e  $\mathbf{F} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6\}^T$ .

#### 2.1.4. Solução do Sistema Global de Equações

Para a solução do sistema mostrado na seção anterior (Equação 19), pode-se utilizar o procedimento de submatrização, que consiste em separar a matriz de rigidez global de acordo com informações pertinentes aos deslocamentos desconhecidos e forças conhecidas, e vice-versa. Segue abaixo o sistema com as submatrizes, no qual os índices “C” e “D” estão relacionados aos termos conhecidos e desconhecidos, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{CD} & \mathbf{k}_{CC} \\ \mathbf{k}_{DD} & \mathbf{k}_{DC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{u}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_C \\ \mathbf{F}_D \end{Bmatrix} \quad (20)$$

A partir da Equação 20, tem-se que o vetor com as componentes dos deslocamentos desconhecidos é dado por:

$$\mathbf{u}_D = (\mathbf{k}_{DD})^{-1}(\mathbf{F}_D - \mathbf{k}_{DC} \mathbf{u}_C) \quad (21)$$

Analogamente, através da Equação 20, pode-se chegar ao vetor com as componentes de forças desconhecidas, tratando-se geralmente de reações de apoio.

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{k}_{DD} \mathbf{u}_D + \mathbf{k}_{DC} \mathbf{u}_C \quad (22)$$

Para o exemplo em questão, o vetor com as componentes dos deslocamentos global conhecido é  $\mathbf{u}_C = \{u_1 \ u_2 \ u_5 \ u_6\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$ , associados aos vínculos, o vetor com as componentes dos deslocamentos desconhecidos é  $\mathbf{u}_D = \{u_3 \ u_4\}^T$ , o vetor com as componentes das forças conhecidas é  $\mathbf{F}_C = \{F_3 \ F_4\}^T = \{0 \ -P\}^T$  e o vetor com as componentes das forças desconhecidas, reações de apoio, é  $\mathbf{F}_D = \{F_1 \ F_2 \ F_5 \ F_6\}^T$ .

#### 2.1.5. Determinação dos Esforços Internos

Calculadas as componentes de deslocamentos nodais, a partir da solução do sistema global de equações, utiliza-se a Equação 14 para avaliar os deslocamentos axiais, em seguida obtêm-se as forças axiais através da Equação 10.

### 2.2. Cálculo do Volume Mínimo com Base nos Critérios de Resistência

De posse dos esforços internos nos elementos da treliça, descritos na seção anterior, pode-se analisar alguns critérios de resistência do material para cada configuração geométrica, Figuras 2 a

7. No caso dos elementos de barra das treliças, estes critérios são a resistência à compressão e à tração do material e a resistência à flambagem elástica dos elementos. Desta forma, calcula-se a área mínima associada ao elemento mais solicitado, satisfazendo à mínima resistência desses três critérios supracitados. No mais, ressalta-se que este trabalho considera a área bruta do elemento como área útil, ou seja, desconsidera-se a redução da área devido à ligações parafusadas, assumindo-se que a ligação entre os elementos ocorrerá por meio de solda.

Uma vez calculada a área mínima do elemento mais solicitado, de forma a satisfazer os critérios de resistência, adota-se a mesma como padrão para toda a estrutura, e com isso é possível calcular os diversos valores do volume mínimo associados à cada valor de  $h$ ,  $\delta$ ,  $N$  e  $L$ , onde  $N$  seria o número de elementos de treliça no banzo inferior. A seguir, são apresentados os métodos utilizados para estes critérios de resistência.

### 2.3. Resistência à Tração ou Compressão do Material

A título de simplificação, adota-se neste trabalho que a resistência de escoamento à compressão e à tração do aço são iguais. Nesse aspecto, Pfeil e Pfeil (2009) endossa esta perspectiva quando afirma que as resistências por tração ou compressão dos aços utilizados em estruturas são iguais.

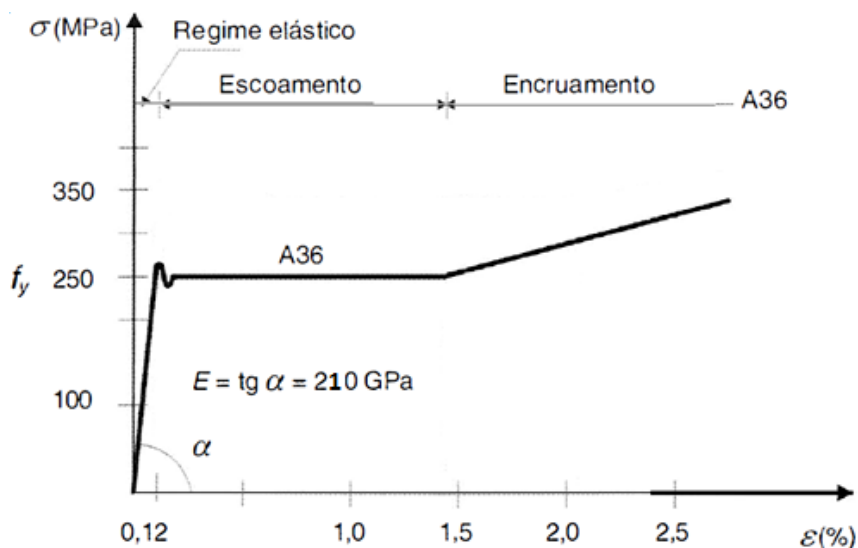
No estudo de estruturas metálicas é de fundamental importância a obtenção de algumas das propriedades mecânicas do aço empregado para definir o comportamento da estrutura quando submetida aos esforços. Um ensaio utilizado para a obtenção dessas grandezas é o ensaio de tração simples. Neste ensaio prendem-se hastes metálicas em máquinas através de garras especiais e as submetem a valores crescentes de esforços de tração, medindo-se em cada estágio o alongamento ( $\Delta L$ ) de um trecho de comprimento inicial  $L_0$ .

Quando a barra é tracionada, ela sofre uma diminuição em sua seção transversal. Para calcular a tensão real, precisa-se dividir a força atuante na haste pela área em cada estágio do ensaio. Com o intuito de simplificar este trabalho, utiliza-se a área inicial e encontra-se uma tensão convencional ( $\sigma$ ). Usa-se também o comprimento inicial no cálculo da deformação longitudinal ( $\epsilon$ ).

Para a representação do comportamento do aço sob o efeito das cargas estáticas utiliza-se o gráfico tensão-deformação, composto pelos valores da deformação longitudinal ( $\epsilon$ ) no eixo das

abscissas e os valores da tensão convencional ( $\sigma$ ) no eixo das ordenadas. Na Figura 18, observa-se o diagrama tensão-deformação para o aço ASTM A36, com escala ampliada para o eixo das abscissas.

**Figura 18: Gráfico tensão-deformação do aço ASTM A36.**



Fonte: Pfeil e Pfeil (2009).

Nota-se na Figura 18, que a lei física linear ou elástica (Lei de Hooke) se aplica até uma certa tensão. A inclinação neste trecho retilíneo é chamada de módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ). Após o regime elástico, o material apresenta um aumento de deformação para um valor constante de tensão. Essa propriedade é denominada de escoamento ou cedência e ocorre quando a tensão atinge um certo limite, denominado limite de escoamento do material ( $f_y$ ). Conforme a Figura 18, para o aço ASTM A36 utiliza-se a tensão limite de escoamento de 250 MPa e módulo elasticidade de 210 GPa.

De acordo com Pfeil e Pfeil (2009), para efeito de cálculo, geralmente são desconsideradas deformações superiores ao patamar de escoamento, tendo em vista que as mesmas correspondem a deformações exageradas.

No regime de escoamento a peça metálica apresenta uma visível deformação. Diante disso, a teoria linear elástica de dimensionamento utiliza a tensão limite de escoamento ( $f_y$ ), da qual se obtém a tensão admissível empregando-se um coeficiente de segurança. Para a determinação do coeficiente de segurança, considera-se aspectos como a variabilidade da resistência dos materiais

envolvidos, diferença entre a resistência do material no corpo-de-prova e na estrutura e os desvios gerados na construção e na fase de projeto (NBR-8800:2008).

Fundamentando-se no exposto, para o caso de falha por tração ou compressão, a área mínima ( $A_y$ ) pode ser calculada pela seguinte relação:

$$A_y = \lambda \frac{F}{f_y} \quad (23)$$

Na Equação 23, F corresponde ao maior esforço axial em módulo atuante na treliça e o fator  $\lambda$  é o coeficiente de segurança referente ao escoamento e a flambagem do aço (NBR 8800:2008), usado para garantir valores conservativos e adotado como  $\lambda = 1,1$  neste trabalho.

#### 2.4. Tensão Crítica Associada à Flambagem Elástica

Outro fenômeno importante, quanto aos critérios de resistências, consiste na flambagem elástica dos elementos. Este fenômeno caracteriza-se como a deflexão lateral que ocorre em elementos estruturais esbeltos, submetidos a esforços de compressão. Neste aspecto, as treliças metálicas apresentam elementos estruturais com as características supracitadas. Segundo Hibbeler (2010), problemas de flambagem podem levar a estrutura à falhas repentinas e dramáticas, caracterizando-se assim, como um problema que deve ser cuidado com atenção para que as estruturas sejam projetadas para não sofrerem flambagem.

Cada elemento com suas características geométricas e mecânicas tem uma carga máxima associada que pode suportar quando na eminência de flambar (Hibbeler, 2010). Esta carga é denominada de carga crítica ( $P_{cr}$ ), e determina um limite de carga que quando ultrapassado provocará flambagem no elemento. Dessa forma, este trabalho utiliza a avaliação dessa carga crítica como critério de resistência das barras das treliças, e este fenômeno é considerado como uma das restrições quando da otimização da estrutura.

Segundo Hibbeler (2010), o problema de determinação da carga crítica de flambagem elástica foi resolvido pela primeira vez pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1757, encontrando a seguinte equação:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_k}{L_k^2} \quad (24)$$

Na Equação 24,  $E$  representa o módulo de elasticidade do elemento, enquanto  $I_k$  e  $L_k$  correspondem ao momento de inércia e ao comprimento da barra  $k$ , respectivamente. Da Equação 24, deriva-se a seguinte relação:

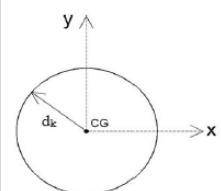
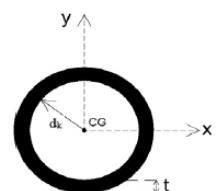
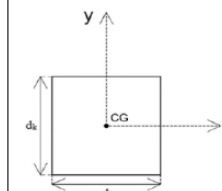
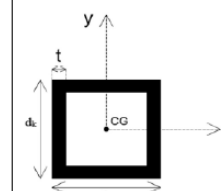
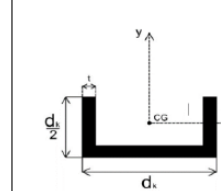
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI_k}{L_k^2 A_k} = \lambda_F \frac{F_k}{A_k} \quad (25)$$

Onde  $\lambda_F$  é o fator de segurança associado à flambagem, adotado como  $\lambda_F = 1,1$  neste trabalho, e  $F_k$  é a carga axial de compressão atuante no elemento de barra  $k$ . No procedimento de otimização, o parâmetro geométrico de interesse na Equação 25 é o momento de inércia, o qual variará de acordo com os diferentes perfis. De maneira geral, partindo da Equação 25, tem-se a seguinte equação:

$$I_k - \frac{L_k^2}{\pi^2 E} \lambda_F F_k = 0 \quad (26)$$

A partir da Equação 26, calcula-se a dimensão característica e a área mínima associada à flambagem, no entanto, esta depende do perfil adotado. A Tabela 2 mostra o momento de inércia e a área para cada seção estudada.

**Tabela 2: Classificação do aço carbono de acordo com suas propriedades mecânicas.**

		Seção				
						
<b>Momento de Inércia</b>		$\frac{\pi (d_k)^4}{4}$	$\frac{\pi}{4} [(d_k + t)^4 - (d_k)^4]$	$\frac{(d_k)^4}{12}$	$\frac{(d_k)^4 - (d_k - 2t)^4}{12}$	$\frac{5}{96} t (d_k)^3 + \frac{5}{24} t^3 (d_k) + \frac{1}{8} t^2 (d_k)^2$
<b>Área</b>		$\pi (d_k)^2$	$\pi (t^2 + 2 d_k t)$	$(d_k)^2$	$(d_k)^2 - (d_k - 2t)^2$	$2 (d_k t - t^2)$

Fonte: Autoria Própria

Calculadas as áreas mínimas que atendem aos critérios de resistência tratados acima, a área mínima que atenderá a estes critérios para todas as barras que compõem a treliça será a seguinte:

$$A_m = \max(A_y, A_{F(k)}) \quad (42)$$

A partir disso, adota-se esta área mínima  $A_m$  como a área padrão para toda a estrutura, e desta forma, calcula-se o volume mínimo ( $V_m$ ) usando-se a Equação 43.

$$V_m = A_m L_T \quad (43)$$

Onde  $L_T$  corresponde ao comprimento total ou à soma dos comprimentos de todas as barras da treliça. Por fim, ressalta-se que vários valores de  $V_m$  são calculados em função de  $h$ ,  $\delta$ ,  $N$  e  $L$  no procedimento de otimização, na busca por um volume ótimo que atenda a todos os critérios de resistência.

## 2.5. Determinação das Configurações Ótimas

### 2.5.1. Com Base na Discretização das Variáveis de Projeto e com o Auxílio de Recursos Gráficos (Procedimento Gráfico)

Como discutido acima, para cada par  $h$  e  $\delta$  tem-se um valor para o volume mínimo. Dessa forma, na procura por um volume ótimo, é necessário calcular o valor do volume mínimo para inúmeros valores de  $h$  e  $\delta$ , o que torna este processo muito custoso computacionalmente e inviável de se realizar manualmente, uma configuração por vez, utilizando-se um software comercial para avaliação dos esforços internos em treliças. Neste sentido, foi desenvolvido neste trabalho um programa computacional (in-house software) em linguagem MATLAB<sup>®</sup> para a avaliação dos esforços internos em treliças planas e determinação do volume mínimo para as diferentes configurações da treliça, de modo a automatizar e acelerar este procedimento de otimização.

No entanto, ter uma infinidade de valores numéricos armazenados não garante facilidade e agilidade quando da análise dos mesmos. Neste sentido, buscou-se facilitar a interpretação dos dados por meio de recursos gráficos. Neste trabalho, foram desenvolvidas três saídas gráficas, e estas são descritas abaixo.

- **Superfície Volume Mínimo:** consiste em uma superfície gerada com os valores dos volumes mínimos obtidos com a discretização do domínio de  $h$  e  $\delta$ . Esta superfície facilita a percepção visual do comportamento da função volume mínimo  $V(h,\delta)$ , possibilitando identificar a posição do ponto ótimo, e se o mesmo é único dentro do domínio analisado. Ademais, enfatiza-se que esse recurso permite verificar mudanças abruptas na taxa de variação da superfície, o que pode indicar que pequenas variações em  $h$  e  $\delta$  podem ser significativas para a função volume mínimo.

- **Diagrama de Falhas:** este recurso gráfico propicia a identificação do tipo de falha preponderante para um determinado domínio nas variáveis de projeto  $h$  e  $\delta$ . Este diagrama é baseado em uma representação em cores, cada cor está relacionada a um dos critérios de resistência mencionados no item 2.1. A cor verde representa a falha por tração, a cor azul a falha por compressão, e, por fim, a cor vermelha representa a falha por flambagem. Nesse sentido, facilita-se a percepção visual do tipo de falha no domínio de análise.
- **Distribuição de Tensão:** consiste em uma representação da distribuição de tensão ao longo da treliça, por meio de uma escala de cores. Assim sendo, pode-se analisar facilmente os esforços em cada barra da treliça. Os elementos são numerados em ordem crescente da esquerda para a direita, começando no banzo inferior, depois no banzo superior e, finalmente, nos elementos que compõem as diagonais e os montantes.

A luz dessas considerações, estes recursos gráficos auxiliaram no entendimento e na visualização do comportamento da função volume mínimo, dos tipos de falha ao longo do domínio de análise e da distribuição de tensão na treliça.

#### 2.5.2. Empregando a Toolbox de Otimização do MATLAB<sup>®</sup>

De acordo com Coleman *et al.* (1999), a *toolbox* de otimização consiste em uma coleção de funções que estendem a capacidade numérica do ambiente computacional do MATLAB<sup>®</sup>. Esta *toolbox* inclui rotinas numéricas para vários tipos de otimização, dentre elas, citam-se:

- Minimização não-linear sem restrições;
- Minimização não-linear com restrições;
- Programação quadrática e linear;
- Ajustes não-linear de curvas;
- Solução de sistemas de equações não-lineares.

Todas as funções da *toolbox* de otimização são arquivos MATLAB<sup>®</sup> (.m), baseados em algoritmos de otimização especializados. Esta *toolbox* permite que o usuário crie seu próprio código para ser usado na otimização.

Esta *toolbox* de otimização foi utilizada para encontrar o valor mínimo da função volume mínimo de forma precisa. Neste processo, foi usada a função **fminsearch** do acervo desta *toolbox*, a qual recebe como parâmetros de entrada a função volume mínimo  $V(h, \delta)$  e um chute inicial para



as variáveis de projeto  $h$  e  $\delta$ . Os valores deste chute inicial foram extraídos do procedimento gráfico, e estão associados ao menor volume encontrado para um determinado domínio discretizado das variáveis de projeto.






### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção discute os resultados obtidos a partir do programa desenvolvido para a análise de treliças planas e cálculo do volume mínimo. Foram analisadas seis treliças, a saber, Belga Inclinação, Pratt Inclinação, Howe Inclinação, Belga Curva, Pratt Curva e Howe Curva. A seguir, discute-se aspectos citados nos objetivos específicos, concernentes à cada uma dessas configurações adotadas para as treliças.

#### 3.1. Treliça Belga Inclinação

Notou-se que para este tipo de treliça a inclusão do parâmetro  $\delta$  possibilita uma redução significativa no volume e, conseqüentemente, no custo do material necessário à confecção da treliça. Do mesmo modo, constatou-se que para  $L = 10$  metros e  $N = 10$  barras no banzo inferior, entre as várias seções descritas em 1.1, prepondera a falha à compressão, ou seja, o critério de resistência limitante, quando da definição da área mínima, está associado ao material do elemento. A flambagem como critério de resistência limitante foi constatado nas seções cheias. Estes pontos podem ser observados na Tabela 3.

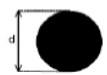
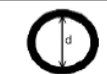

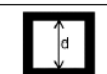
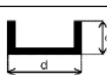
**Tabela 3: Resultados para treliça Belga Inclinação com  $L = 10$  m e  $N = 10$ .**

		TRELIÇA BELGA INCLINADA (L: 10m; N: 10)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>minor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA $\delta = 0$		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		38,00	82,01	141,11	38,10	181%	F	11 e 18	33,64	45%	150,00	50,50	30%
		56,61	126,05	206,06	21,10	100%	C	11 e 18	37,60	66%	270,00	22,80	54%
		33,29	82,01	141,11	37,30	177%	F	11 e 18	33,64	45%	150,00	49,30	30%
		47,05	110,18	185,56	21,70	103%	C	11 e 18	36,15	59%	270,00	22,80	54%
		120,00	88,80	141,62	22,30	106%	C	11 e 18	31,00	46%	270,00	22,80	54%

Fonte: Autoria Própria (2015).

Dando continuidade, a Tabela 4 mostra os resultados das seções para  $L = 10$  m e  $N = 20$ . Dessa forma, constatou-se que o acréscimo do parâmetro  $\delta$  promove uma redução considerável no volume da treliça.

**Tabela 4: Resultados para treliça Belga Inclinada com  $L = 10$  m e  $N = 20$ .**

		TRELIÇA BELGA INCLINADA (L: 10m; N: 20)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>minor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA $\delta = 0$		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		30,04	79,70	182,69	28,60	112%	C	40 e 72	40,29 m	52%	180,00	38,90	36%
		49,93	141,45	253,36	25,60	100%	C	40 e 72	51,34 m	79%	220,00	37,90	44%
		26,32	80,47	183,83	28,00	109%	C	21 e 38	40,4212	53%	180,00	38,70	36%
		38,57	141,45	253,36	25,60	100%	C	40 e 72	51,34 m	79%	220,00	37,90	44%
		85,31	135,43	248,19	25,70	100%	C	21 e 38	50,22 m	77%	220,00	37,90	44%

Fonte: Autoria Própria (2015).

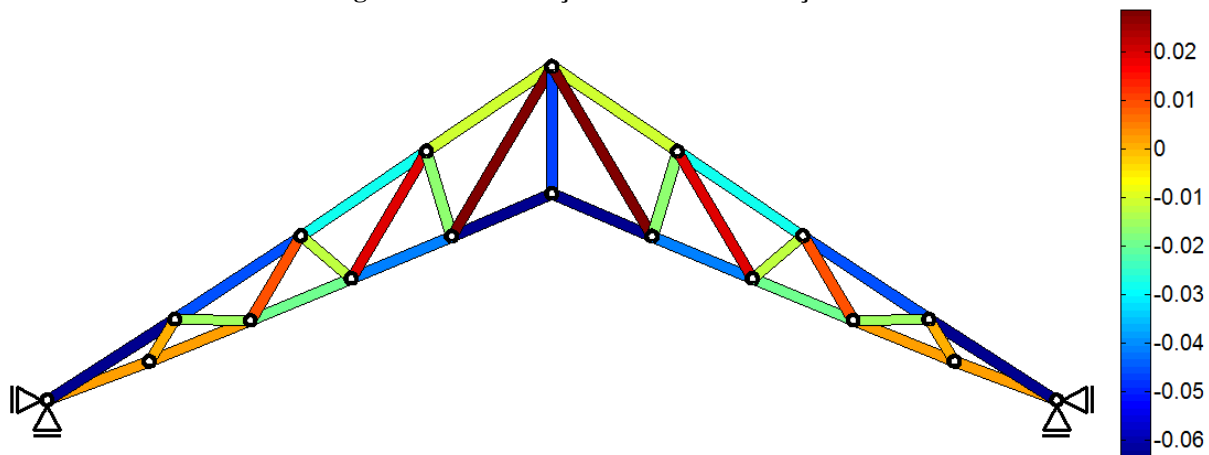
Outro aspecto importante, consiste na influência de  $N$  no tipo de falha predominante, como pode ser observado na Tabela 4, quando comparada à Tabela 3, o aumento de  $N$  ocasiona uma mudança no tipo de falha predominante. Na Tabela 3 observa-se que a falha por flambagem ocorre em duas seções, enquanto na Tabela 4, não há falhas associadas à flambagem, pois um aumento em  $N$  implica em uma diminuição do comprimento dos elementos.

### 3.1.1. Seção Ótima

Verificou-se que, para  $L = 10$  m e  $N = 10$ , a seção circular vazada apresenta o melhor desempenho em relação às outras seções. As saídas gráficas mencionadas em 2.2.1 foram geradas para esta seção. A Figura 19 mostra os níveis de tensão na treliça. Observa-se que nos banzos prevalece esforços de compressão, enquanto que nas diagonais predomina esforços de tração.

Ainda analisando a Figura 19, observa-se que os elementos mais solicitados e que definem a área mínima são os elementos 11 e 18, pois apresentam um elevado nível de compressão.

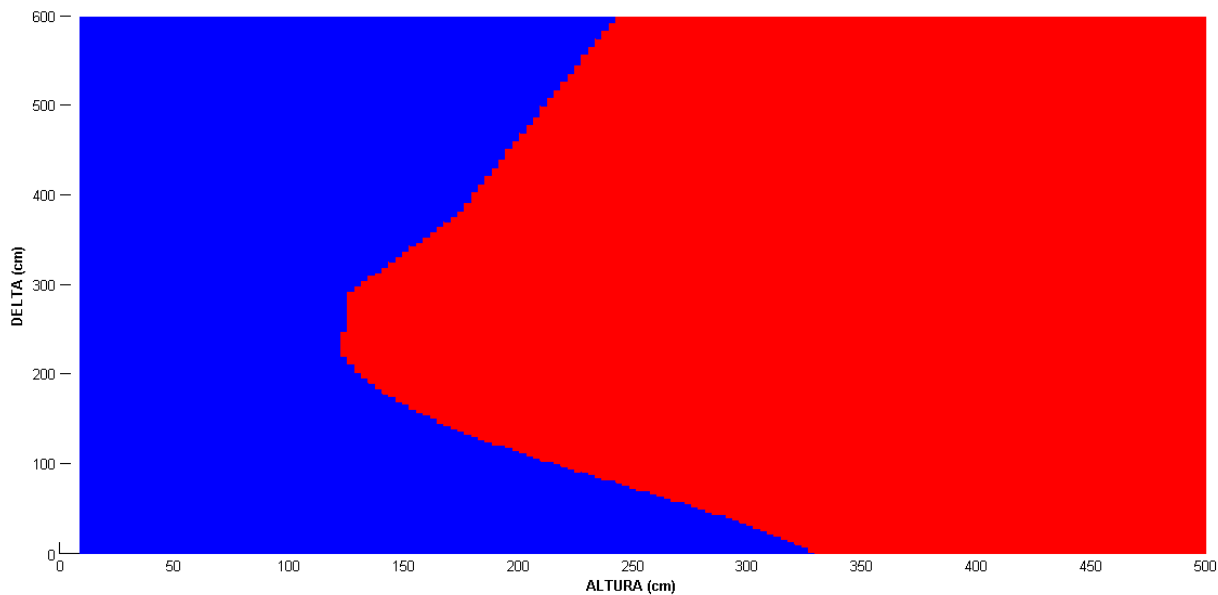
**Figura 19: Distribuição de tensão na treliça.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

Além disso, tem-se o diagrama de falhas relacionado à este tipo de seção, que pode ser visto na Figura 20.

**Figura 20: Diagrama de falhas para a seção circular vazada.**

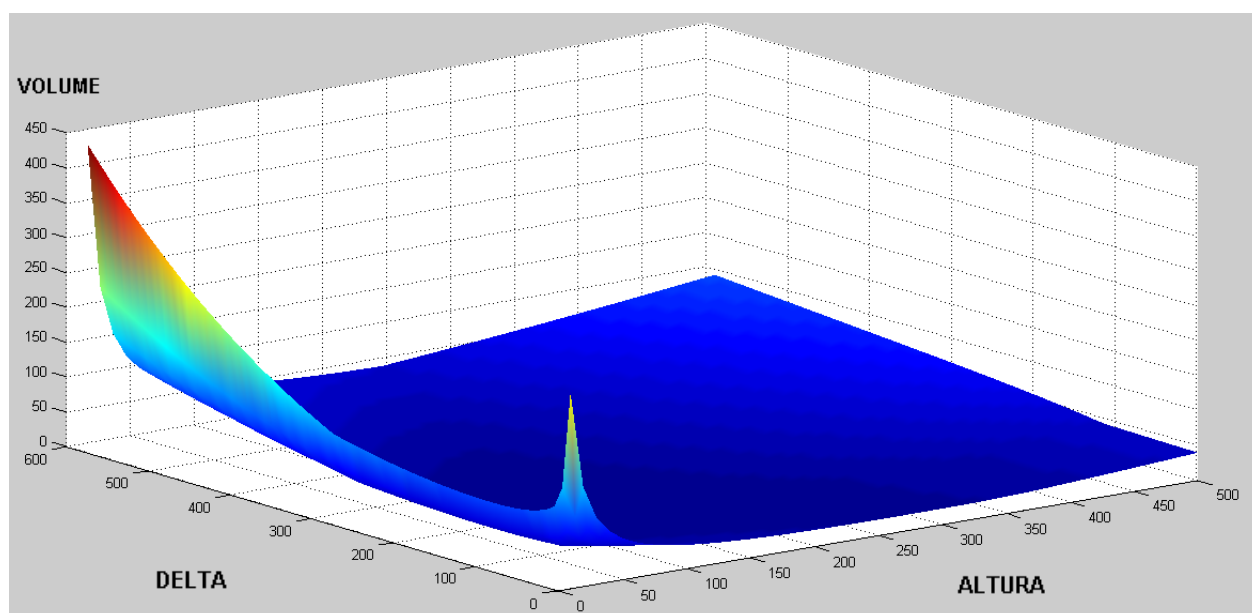


Fonte: Autoria Própria (2015).

Neste diagrama, para a seção ótima mostrada na Tabela 3, constata-se a falha à compressão (cor azul). Ademais, percebe-se que para valores altos de  $h$ , tem-se uma predominância de falha na flambagem (cor vermelha). Além disso, para esta seção, em todo o domínio de análise, a tração não consiste em um critério limitante de resistência.

Por fim, outra saída gráfica é a superfície volume mínimo associada à esta seção ótima, que é mostrada na Figura 21.

**Figura 21: Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.**



Fonte: Autoria Própria (2015).






De acordo com este gráfico, pode-se visualizar que o ponto ótimo mostrado na Tabela 3 está contido no domínio de análise, e situa-se em um vale presente na superfície. Em adição, à medida que  $\delta$  e  $h$  aumentam, a função volume mínimo apresenta uma taxa de variação cada vez menor, ou seja, para valores crescentes de  $\delta$  e  $h$ , não há acréscimos relevantes no volume mínimo.

### 3.2. Treliça Pratt Inclinada

Notou-se que para este tipo de treliça a inclusão do parâmetro  $\delta$  possibilita uma redução significativa no volume mínimo e, conseqüentemente, no custo do material necessário à confecção da treliça. Do mesmo modo, constatou-se que para  $L = 10$  metros e  $N = 10$  barras, entre as várias seções descritas em 1.1, prepondera a falha à compressão, ou seja, o critério de resistência limitante, quando da definição da área mínima, está associado ao material do elemento. A

flambagem como critério de resistência limitante foi verificada nas seções cheias. Estes pontos podem ser observados na Tabela 5.

**Tabela 5: Resultados para treliça Pratt Inclinada com L = 10 m e N = 10.**

		TRELIÇA PRATT INCLINADA (L: 10m; N: 10)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA $\delta = 0$		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		36,53	75,35	135,19	37,00	195%	F	11,12,19 E 20	35,27	42%	140,00	44,20	28%
		40,11	156,22	239,59	19,00	100%	C	11,12,19 E 20	46,64	79%	270,00	25,80	54%
		32,00	75,35	135,19	36,10	190%	F	11,12,19 E 20	35,27	42%	140,00	43,20	28%
		31,95	149,22	227,68	19,10	101%	C	11,12,19 E 20	45,47	75%	270,00	25,80	54%
		77,76	125,19	204,27	19,70	104%	C	11,12,19 E 20	42,14	66%	270,00	25,80	54%

Fonte: Autoria Própria (2015).

Dando continuidade, a Tabela 6 mostra os resultados das seções para L = 10 m e N = 20. Dessa forma, constatou-se que o acréscimo do parâmetro  $\delta$  promove uma redução considerável no volume mínimo da treliça.

Outro aspecto importante, consiste na influência de N no tipo de falha predominante, como pode ser observado na Tabela 6, quando comparada à Tabela 5, o aumento de N ocasiona uma mudança no tipo de falha predominante. Na Tabela 5 observa-se que a falha por flambagem ocorre em duas seções, enquanto na Tabela 6, há apenas uma falha associada à flambagem, pois um aumento em N implica em uma diminuição do comprimento dos elementos.

Tabela 6: Resultados para treliça Pratt Inclinada com  $L = 10$  m e  $N = 20$ .

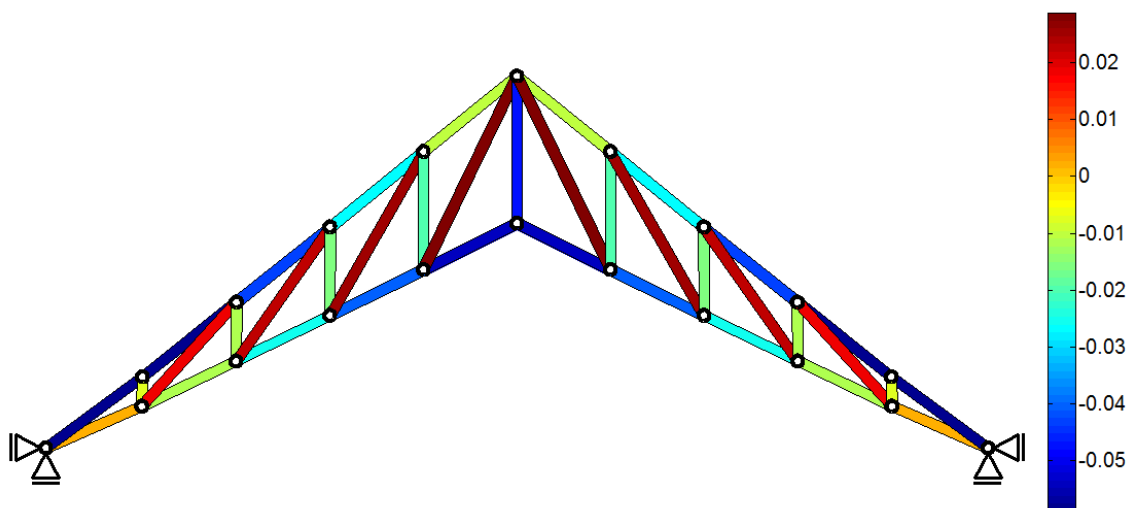
		TRELIÇA PRATT INCLINADA (L: 10m; N: 20)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA $\delta = 0$		
										ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)	
SEÇÃO		28,45	81,13	179,08	28,70	104%	F	59	45,18	52%	170,00	41,80	34%
		46,64	139,51	242,47	27,70	100%	C	21,22,39 e 40	59,26	76%	220,00	40,70	44%
		25,08	82,34	180,72	28,60	103%	C	21,22,39 e 40	45,47	53%	180,00	41,40	36%
		35,99	139,51	242,47	27,70	100%	C	21,22,39 e 40	59,26	76%	220,00	40,70	44%
		78,23	138,70	241,80	27,70	100%	C	21,22,39 e 40	59,07	76%	220,00	40,70	44%

Fonte: Autoria Própria (2015).

### 3.2.1. Seção Ótima

Verificou-se que, para  $L = 10$  m e  $N = 10$ , a seção circular vazada apresenta um melhor desempenho em relação às outras seções. As saídas gráficas mencionadas em 2.2.1 foram geradas para esta seção. A Figura 22 mostra os níveis de tensão na treliça. Observa-se que nos banzos prevalece esforços de compressão, enquanto que nas diagonais predomina esforços de tração. Nesta configuração, tem-se barras verticais (montantes), e estas estão comprimidas. Ainda analisando a Figura 22, observa-se que os elementos mais solicitados e que definem a área mínima são os elementos 11, 12, 19 e 20, pois apresentam um elevado nível de compressão.

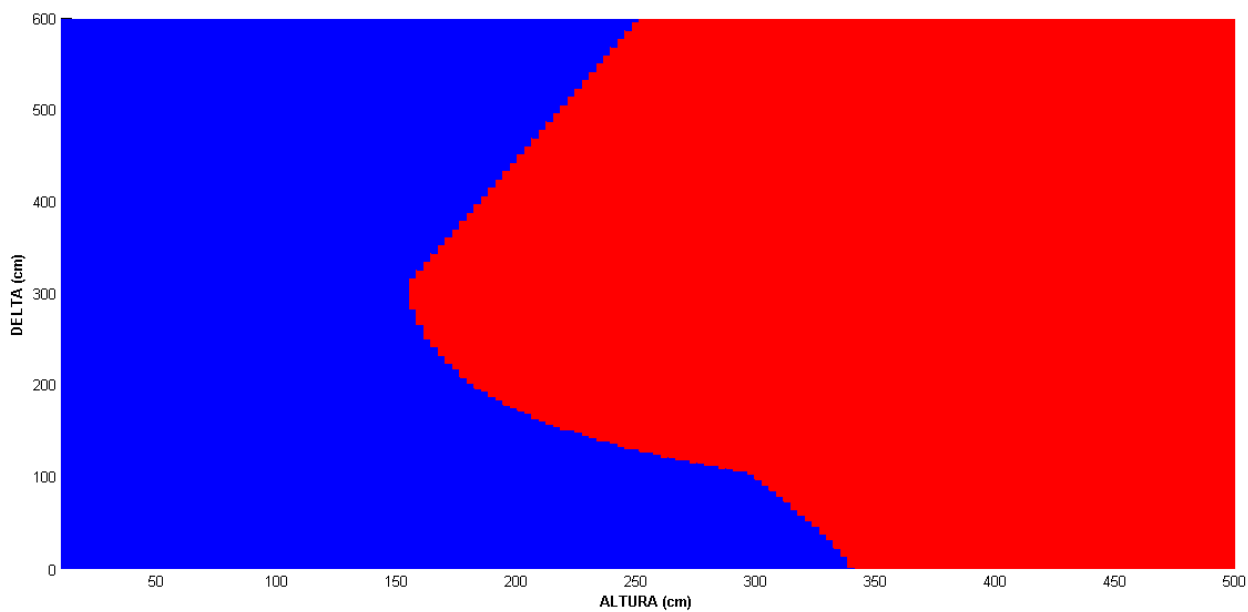
**Figura 22: Distribuição de tensão na treliça.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

Além disso, tem-se o diagrama de falhas relacionado a este tipo de seção, que pode ser visto na Figura 23.

**Figura 23: Diagrama de falhas para a seção circular vazada.**



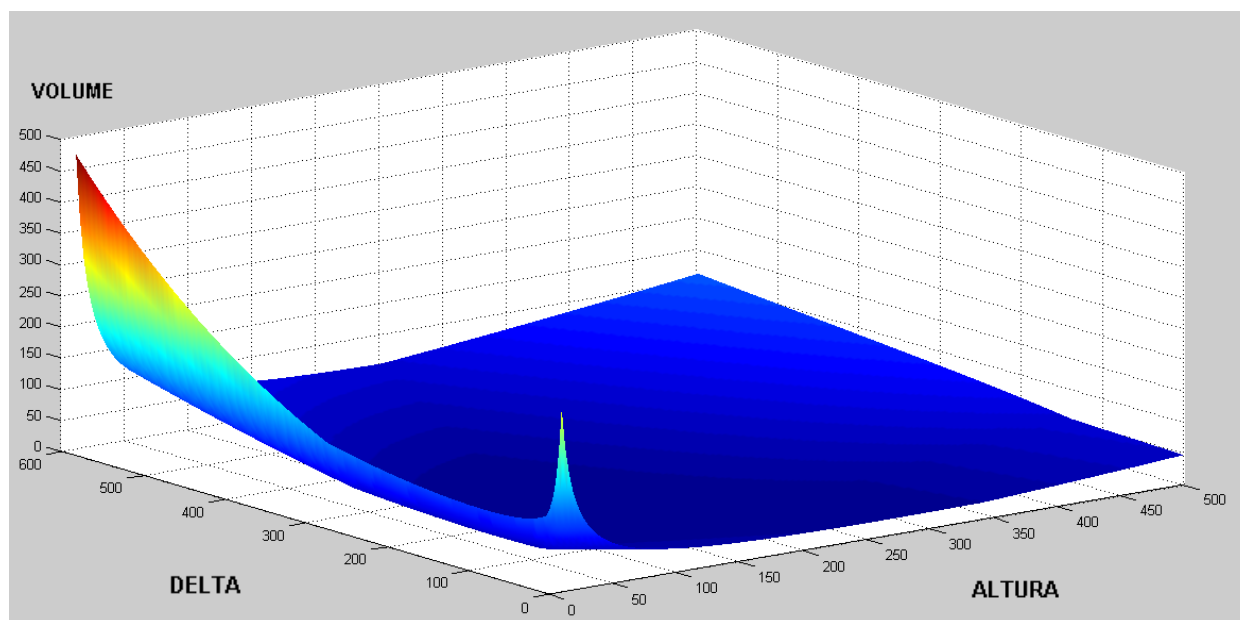
Fonte: Autoria Própria (2015).



Neste diagrama, para a seção ótima mostrada na Tabela 4, constata-se a falha à compressão (cor azul). Ademais, percebe-se que para valores altos de  $h$ , tem-se, predominantemente, falhas por flambagem (cor vermelha). Afora, para esta seção, em todo o domínio de análise, a tração não consiste em um critério limitante de resistência.

Por fim, outra saída gráfica é a superfície volume mínimo associada à esta seção ótima, a qual é mostrada na Figura 24.

**Figura 24: Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.**



Fonte: Autoria Própria (2015).


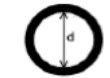

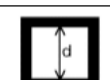
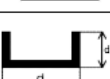
De acordo com este gráfico, pode-se visualizar que o ponto mínimo mostrado na Tabela 5 está contido no domínio de análise, e situa-se em um vale presente na superfície. Em adição, à medida que  $\delta$  e  $h$  aumentam, a função volume mínimo apresenta uma taxa de variação cada vez menor, ou seja, para valores crescentes de  $\delta$  e  $h$ , não há acréscimos relevantes no volume mínimo.

### 3.3. Treliça Howe Inclinada

Notou-se que para este tipo de treliça a inclusão do parâmetro  $\delta$  possibilita uma redução significativa no volume mínimo e, conseqüentemente, no custo do material necessária à confecção da treliça. Do mesmo modo, constatou-se que para  $L = 10$  metros e  $N = 10$  barras, entre as várias seções descritas em 1.1, prepondera a falha por flambagem, ou seja, o critério de resistência

limitante, quando da determinação da área mínima, está associado à geometria do elemento (Tabela 7).

**Tabela 7: Resultados para treliça Howe Inclinada com L = 10 m e N = 10.**

		TRELIÇA HOWE INCLINADA (L: 10m; N: 10)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA $\delta = 0$		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		35,60	90,52	150,14	34,20	212%	F	11 e 20	34,31	48%	150,00	42,50	30%
		37,71	174,56	251,73	16,10	100%	F	11 e 20	42,08	85%	280,00	24,10	56%
		31,19	90,52	150,14	33,40	207%	F	11 e 20	34,31	48%	150,00	41,60	30%
		30,34	156,69	235,07	16,50	102%	C	11 e 20	40,39	78%	280,00	24,10	56%
		76,84	120,32	196,72	17,10	106%	C	11 e 20	37,04	63%	280,00	24,10	56%

Fonte: Autoria Própria (2015).

Dando continuidade, a Tabela 8 mostra os resultados das seções para L = 10 m e N = 20. Dessa forma, constatou-se que o acréscimo do parâmetro  $\delta$  promove uma redução considerável no volume mínimo da treliça.

Outro aspecto importante, consiste na influência de N no tipo de falha predominante, como pode ser observado na Tabela 7, quando comparada à Tabela 8, o aumento de N ocasiona uma mudança no tipo de falha predominante. Na Tabela 7 observa-se que a falha por flambagem ocorre em duas seções, enquanto na Tabela 8, não há falha associada à flambagem, pois um aumento em N implica em uma diminuição do comprimento dos elementos.

Tabela 8: Resultados para treliça Howe Inclinada com  $L = 10$  m e  $N = 20$ .

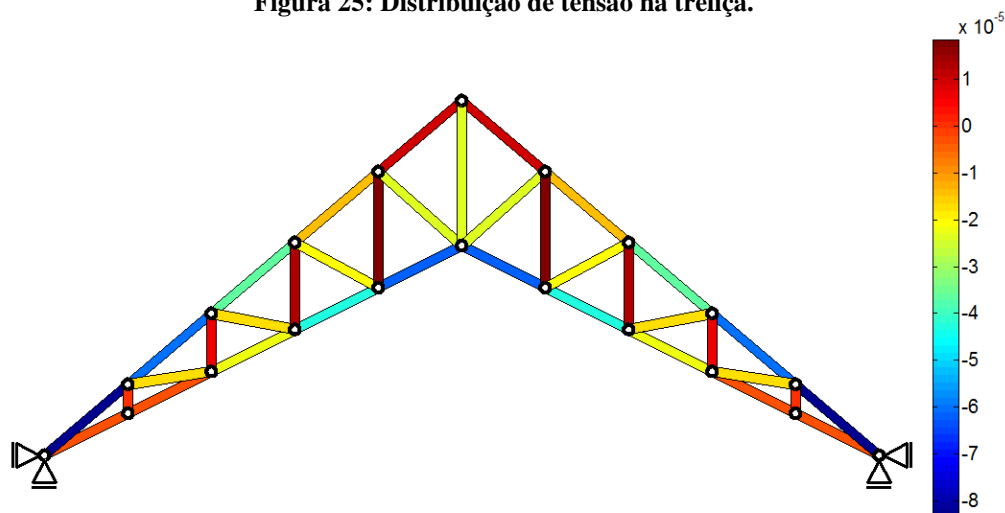
TRELIÇA HOWE INCLINADA (L: 10m; N: 20)												
SEÇÃO	DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA $\delta = 0$		
										ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
	26,14	110,88	211,62	24,50	104%	C	21 e 40	45,61	64%	171,00	40,00	34%
	42,33	159,71	290,03	23,50	100%	C	21 e 40	55,05	90%	231,00	38,60	46%
	22,78	120,76	208,37	24,50	104%	C	21 e 40	47,26	66%	171,00	40,00	34%
	32,57	159,71	290,03	23,50	100%	C	21 e 40	55,05	90%	231,00	38,60	46%
	71,14	159,71	290,03	23,50	100%	C	21 e 40	55,05	90%	231,00	38,60	46%

Fonte: Autoria Própria (2015).

### 3.3.1. Seção Ótima

Verificou-se que, para  $L = 10$  m e  $N = 10$ , a seção circular vazada apresenta um melhor desempenho em relação às outras seções. As saídas gráficas mencionadas em 2.2.1 foram geradas para esta seção. A Figura 25 mostra os níveis de tensão na treliça. Observa-se que no banzo superior os esforços variam da tração à compressão, no sentido do centro da treliça para os vínculos. Além disso, nota-se que os valores de compressão são maiores que os de tração. Diferentemente, o banzo inferior apresenta esforços variando de compressão à tração, no mesmo sentido. Em adição, nas barras verticais preponderam os esforços de tração, enquanto que nas diagonais predominam esforços de compressão. Ainda analisando a Figura 25, observa-se que os elementos mais solicitados e que definem a área mínima são os elementos 11 e 20, pois apresentam um elevado nível de compressão.

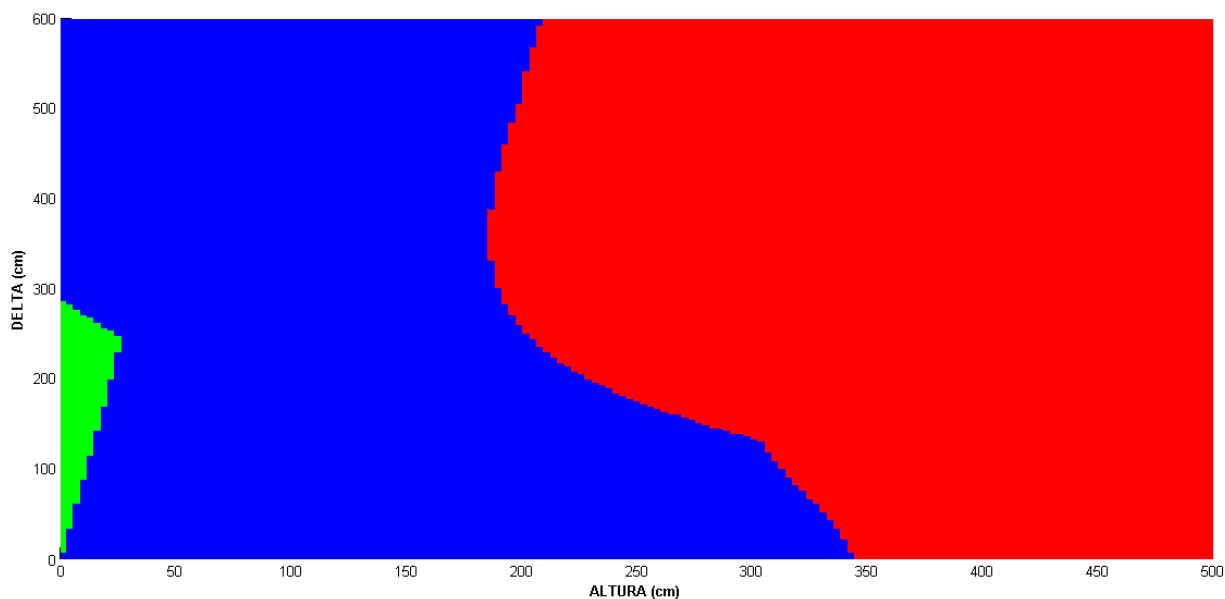
**Figura 25: Distribuição de tensão na treliça.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

Além disso, tem-se o diagrama de falhas relacionado à este tipo de seção, que pode ser visto na Figura 26.

**Figura 26: Diagrama de falhas para a seção circular vazada.**

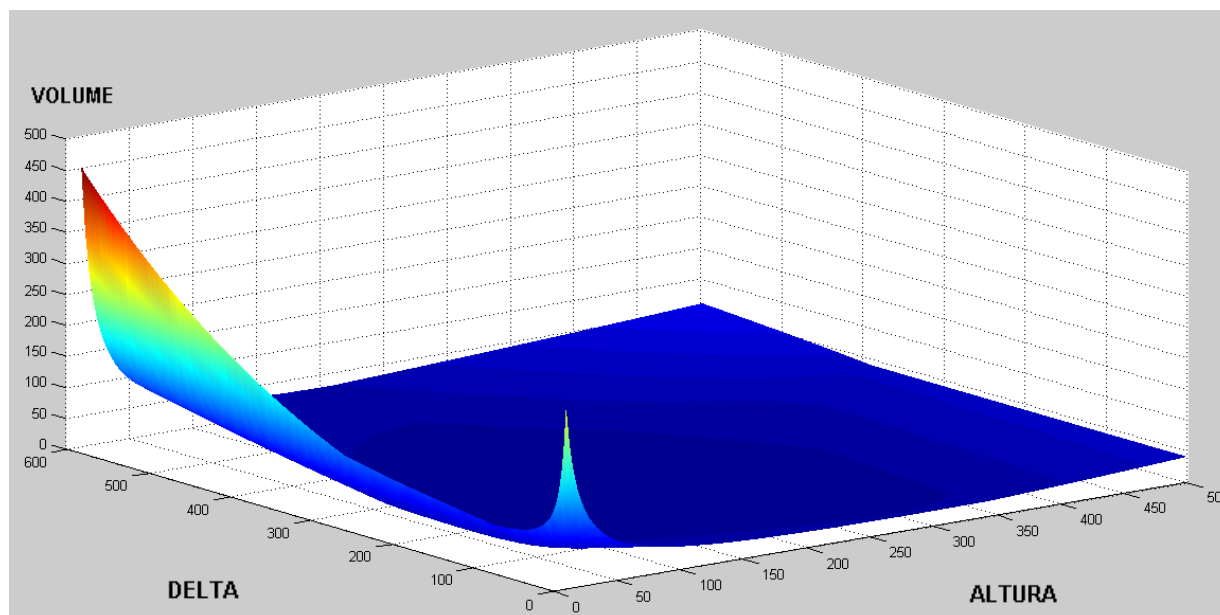


Fonte: Autoria Própria (2015).

Neste diagrama, para a seção ótima mostrada na Tabela 7, constata-se a falha à compressão (cor azul). Ademais, percebe-se que para valores altos de  $h$ , tem-se, predominantemente, falha por flambagem (cor vermelha). Afora, verifica-se uma pequena área em verde, o que indica que em algumas regiões da treliça o esforço de tração consiste em um critério de resistência limitante.

Por fim, outra saída gráfica é a superfície volume mínimo associada à esta seção ótima, a qual é mostrada na Figura 27.

**Figura 27: Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.**




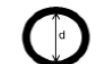

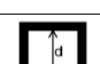
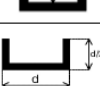
Fonte: Autoria Própria (2015).

De acordo com esta superfície, pode-se visualizar que o ponto mínimo mostrado na Tabela 7 está contido no domínio de análise. Em adição, à medida que  $\delta$  e  $h$  aumentam, a função volume apresenta uma taxa de variação cada vez menor, ou seja, para valores crescentes de  $\delta$  e  $h$ , não há acréscimos relevantes no volume mínimo.

### 3.4 Treliça Belga Curva

Constatou-se que para  $L = 10$  metros e  $N = 10$  barras, entre as várias seções descritas em 1.1, prepondera a falha por flambagem, ou seja, o critério de resistência limitante, quando da avaliação da área mínima, está associado à geometria do elemento. A compressão como critério de resistência limitante foi constatada na seção circular vazada. Estes pontos podem ser observados na Tabela 9.

Tabela 9: Resultados para treliça Belga Curva com  $L = 10$  m e  $N = 10$ .






		TRELIÇA BELGA CURVA(L: 10m; N: 10)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		31,58	21,97	169,20	25,40	227%	F	1 e 10	32,40
		31,55	28,81	213,54	11,20	100%	C	1 e 10	34,40
		27,67	21,97	169,20	24,80	221%	F	1 e 10	32,40
		26,07	21,69	184,09	11,40	102%	F	1 e 10	32,78
		66,48	16,09	156,94	12,60	113%	F	1 e 10	31,60

Fonte: Autoria Própria (2015).

Dando continuidade, a Tabela 10 mostra os resultados das seções para  $L = 10$  m e  $N = 20$ . Dessa forma, constatou-se que o acréscimo do parâmetro  $\delta$  promove uma redução considerável no volume mínimo da treliça.

Outro aspecto importante, consiste na influência de  $N$  no tipo de falha predominante, como pode ser observado na Tabela 10, quando comparada à Tabela 9, o aumento de  $N$  ocasiona uma mudança no tipo de falha predominante. Na Tabela 9 observa-se que a falha por flambagem predomina, enquanto na Tabela 10, há apenas duas falhas associada à flambagem, pois um aumento em  $N$  implica em uma diminuição do comprimento dos elementos.

Tabela 10: Resultados para treliça Belga Curva com  $L = 10$  m e  $N = 20$ .

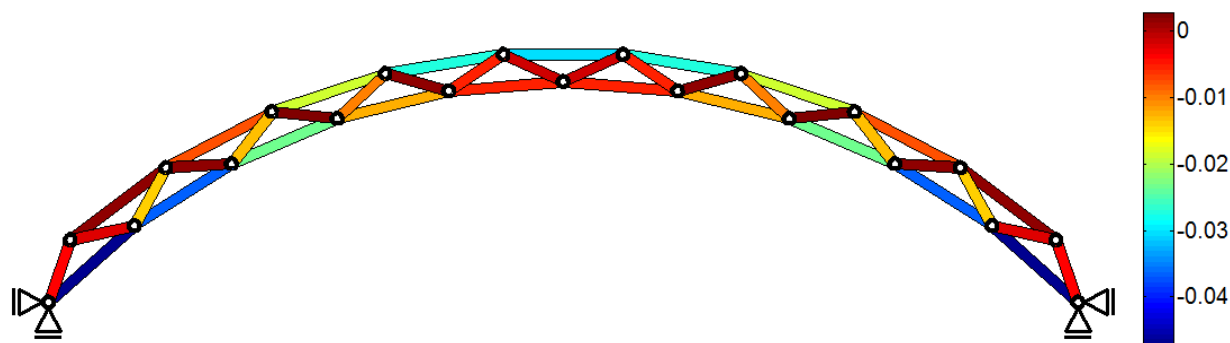
		TRELIÇA BELGA CURVA(L: 10m; N: 20)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	$V / V_{\text{menor}}$ (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		23,19	10,23	168,49	13,80	109%	F	1 e 20	32,62
		32,67	21,41	252,81	12,70	100%	C	2 e 19	37,64
		20,36	10,23	168,49	13,50	106%	F	1 e 20	32,62
		24,56	21,41	252,81	12,70	100%	C	2 e 19	37,64
		56,02	21,41	252,81	12,70	100%	C	2 e 19	37,64

Fonte: Autoria Própria (2015).

### 3.4.1. Seção Ótima

Verificou-se que, para  $L = 10$  m e  $N = 10$ , a seção circular vazada apresenta um melhor desempenho em relação às outras seções. As saídas gráficas mencionadas em 2.2.1 foram geradas para esta seção. A Figura 28 mostra os níveis de tensão na treliça. Observa-se que no banzo superior os esforços variam da compressão à tração, no sentido do centro da treliça para os vínculos. Além disso, nota-se que os valores de compressão são maiores que os de tração. Diferentemente, o banzo inferior apresenta esforços variando de tração à compressão, no mesmo sentido, com valores de compressão mais significativos que os de tração. Outrossim, percebe-se que as barras diagonais estão sendo pouco solicitadas. Ainda analisando a Figura 28, observa-se que os elementos mais solicitados e que definem a área mínima são os elementos 1 e 10, pois apresentam um elevado nível de compressão.

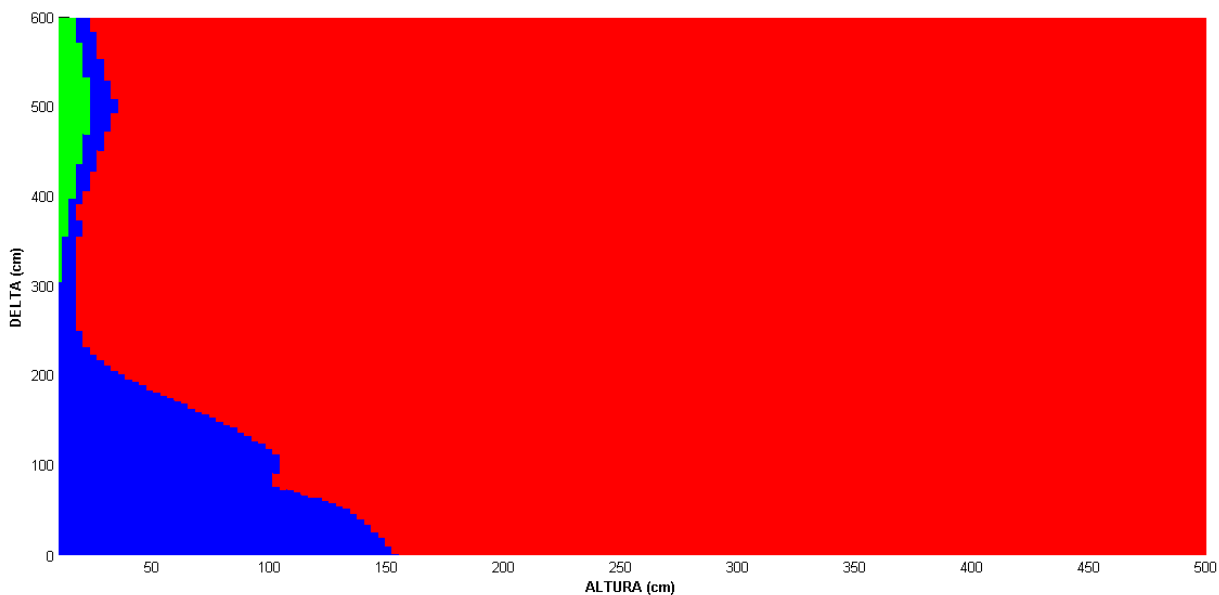
**Figura 28: Distribuição de tensão na treliça.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

Além disso, tem-se o diagrama de falhas relacionado à este tipo de seção, que pode ser visto na Figura 29.

**Figura 29: Diagrama de falhas para a seção circular vazada.**



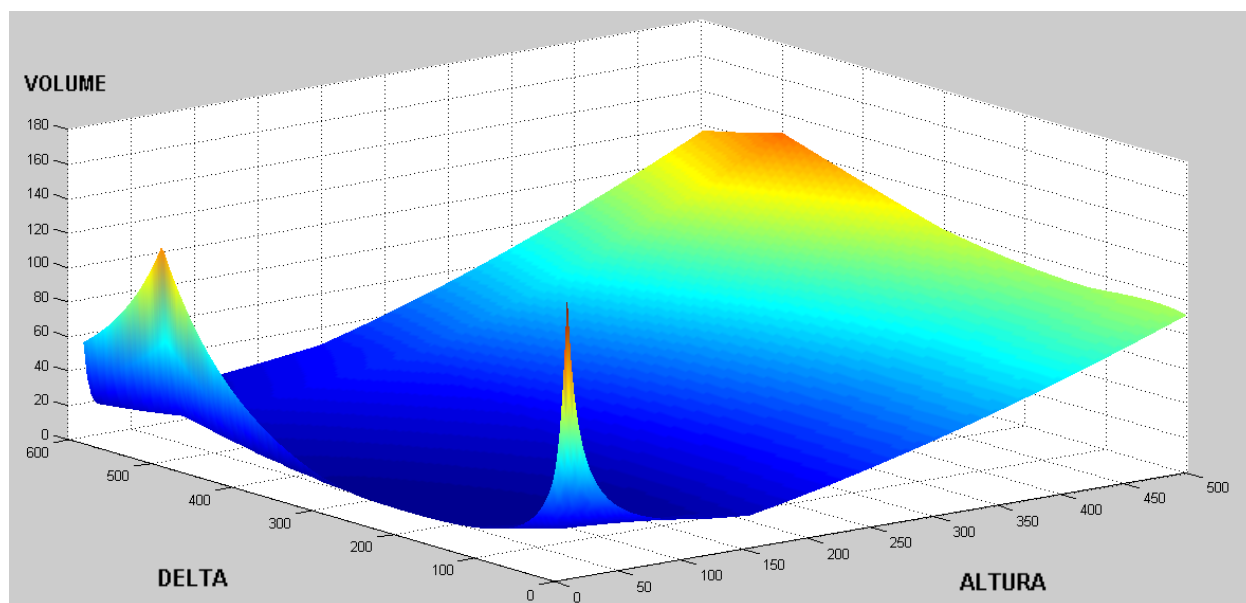
Fonte: Autoria Própria (2015).

Neste diagrama, para a seção ótima mostrada na Tabela 9, constata-se a falha à compressão (cor azul). Ademais, percebe-se que para valores altos de  $h$  tem-se, predominantemente, falha por flambagem (cor vermelha). Afora, verifica-se uma pequena área em verde, o que indica que em algumas regiões da treliça, o esforço de tração consiste em um critério de resistência limitante.

Por fim, outra saída gráfica é a superfície volume mínimo associada à esta seção ótima, a qual é mostrada na Figura 30.



**Figura 30: Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

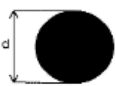


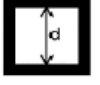
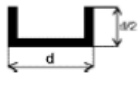
De acordo com este gráfico, pode-se visualizar que o ponto mínimo mostrado na Tabela 9 está contido no domínio de análise, e situa-se em um vale presente na superfície. Em adição, à medida que  $\delta$  e  $h$  aumentam, observa-se uma taxa de variação considerável na função volume mínimo, ou seja, para valores crescentes de  $\delta$  e  $h$ , percebe-se que a função apresenta uma taxa de variação crescente.

### 3.5. Treliza Pratt Curva

Constatou-se que para  $L = 10$  metros e  $N = 10$  barras, entre as várias seções descritas em 1.1, a falha por flambagem é constatada para todos os perfis, ou seja, o critério de resistência limitante, quando da definição da área mínima, está associado à geometria do elemento (Tabela 11).

Dando continuidade, a Tabela 12 mostra os resultados das seções para  $L = 10$  m e  $N = 20$ . Dessa forma, constatou-se que o acréscimo do parâmetro  $\delta$  promove uma redução considerável no volume mínimo da treliza.

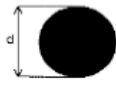
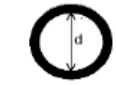

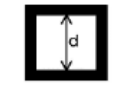
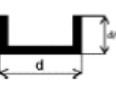
Tabela 11: Resultados para treliça Pratt Curva com  $L = 10$  m e  $N = 10$ .

		TRELIÇA PRATT CURVA (L: 10m; N: 10)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		31,38	21,97	169,20	25,10	237%	F	1 e 10	32,40
		30,90	23,70	192,87	10,60	100%	F	1 e 10	33,23
		27,49	21,97	169,20	24,50	231%	F	1 e 10	32,40
		25,82	19,22	172,93	11,20	106%	F	1 e 10	32,26
		65,98	16,09	156,95	12,50	118%	F	1 e 10	31,60

Fonte: Autoria Própria (2015).

Outro aspecto importante, consiste na influência de  $N$  no tipo de falha predominante, como pode ser observado na Tabela 12, quando comparada à Tabela 10, o aumento de  $N$  ocasiona uma mudança no tipo de falha predominante. Na Tabela 10 observa-se que a falha por flambagem é unânime, enquanto na Tabela 12, há apenas duas falhas por flambagem elástica, pois um aumento em  $N$  implica em uma diminuição do comprimento dos elementos.

Tabela 12: Resultados para treliça Pratt Curva com  $L = 10$  m e  $N = 20$ .

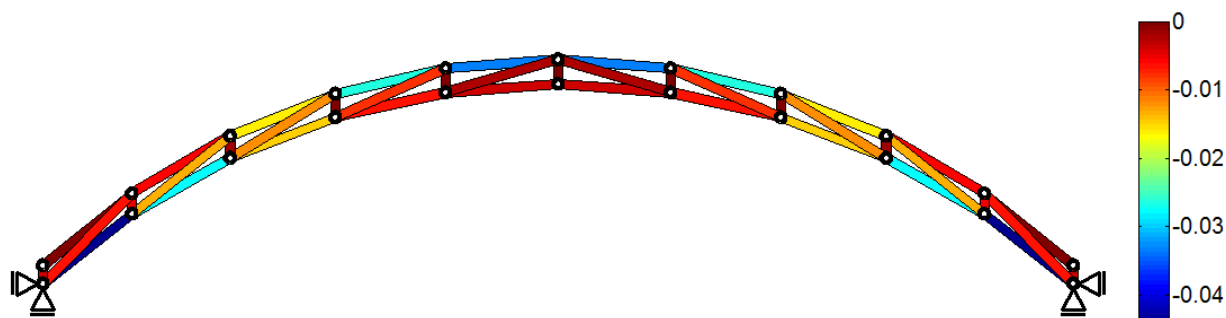
		TRELIÇA PRATT CURVA (L: 10m; N: 20)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		23,08	10,23	168,49	13,60	113%	F	1 e 20	32,62
		30,98	21,30	252,28	12,00	100%	C	1 e 20	37,59
		20,19	10,23	168,48	13,30	111%	F	1 e 20	32,62
		23,69	21,30	252,28	12,00	100%	C	1 e 20	37,59
		53,37	21,30	252,28	12,00	100%	C	1 e 20	37,59

Fonte: Autoria Própria (2015).

### 3.5.1 Seção Ótima

Verificou-se que, para  $L = 10$  m e  $N = 10$ , a seção circular vazada apresenta um melhor desempenho em relação às outras seções. As saídas gráficas mencionadas em 2.2.1 foram geradas para esta seção. A Figura 31 mostra os níveis de tensão na treliça. Observa-se que todos os elementos da treliça estão sob efeitos de compressão. Ainda analisando a Figura 31, observa-se que os elementos mais solicitados e que definem a área mínima são os elementos 1 e 10, pois apresentam um elevado nível de compressão.

**Figura 31: Distribuição de tensão na treliça.**



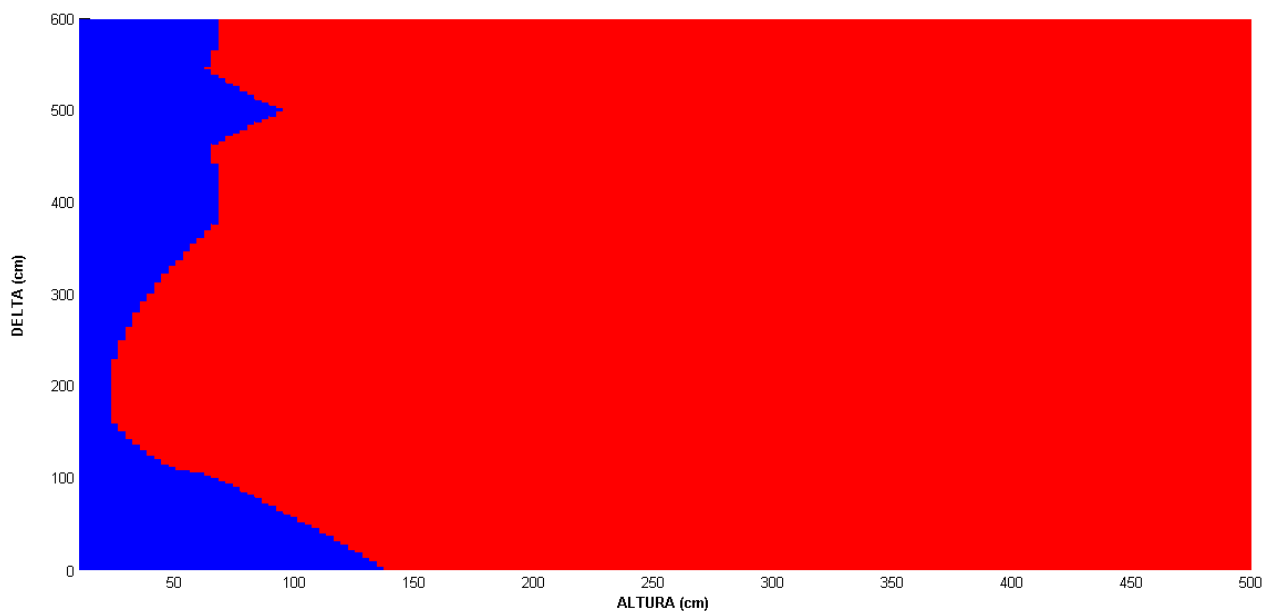
Fonte: Autoria Própria (2015).

Além disso, tem-se o diagrama de falhas relacionado à este tipo de seção, que pode ser visto na Figura 32.

Neste diagrama, para a seção ótima mostrada na Tabela 11, constata-se a falha à compressão (cor azul). Ademais, percebe-se que para valores altos de  $h$  tem-se, predominantemente, falha por flambagem (cor vermelha). Além disso, para esta seção, em todo o domínio de análise, a tração não consiste em um critério limitante de resistência.

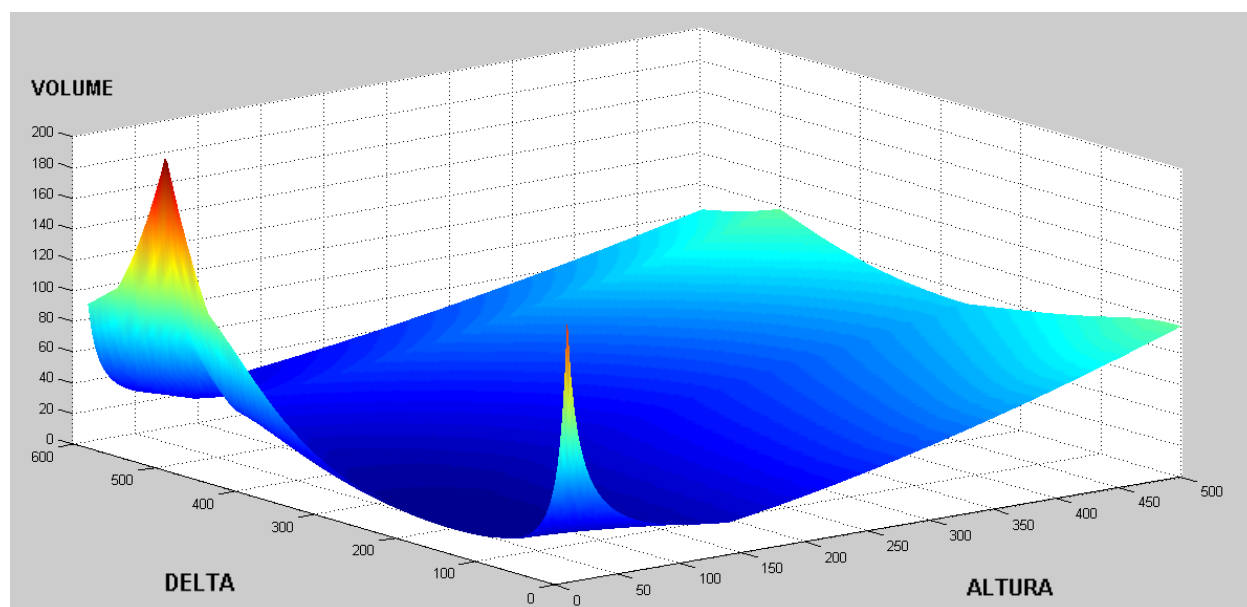
Por fim, outra saída gráfica é a superfície volume mínimo associada à esta seção ótima, a qual é mostrada na Figura 33.

**Figura 32: Diagrama de falhas para a seção circular vazada.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

**Figura 33: Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.**




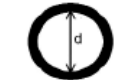

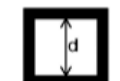

Fonte: Autoria Própria (2015).

De acordo com este gráfico, pode-se visualizar que o ponto mínimo mostrado na Tabela 11 está contido no domínio de análise, e situa-se em uma vale contido na superfície. Em adição, à medida que  $\delta$  e  $h$  aumentam, observa-se uma taxa de variação considerável na função volume mínimo, ou seja, para valores crescentes de  $\delta$  e  $h$ , percebe-se que a função apresenta uma taxa de variação crescente.

### 3.6. Treliça Howe Curva

Constatou-se que para  $L = 10$  metros e  $N = 10$  barras, entre as várias seções descritas em 1.1, prepondera a falha por flambagem, ou seja, o critério de resistência limitante, quando da definição da área mínima, está associado à geometria do elemento. A compressão como critérios de resistência limitante foi constatada nas seções circular e quadrada vazadas. Estes pontos podem ser observados na Tabela 13.

Tabela 13: Resultados para treliça Howe Curva com  $L = 10$  m e  $N = 10$ .

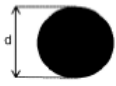
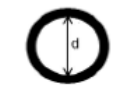

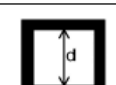
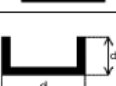
		TRELIÇA HOWE CURVA (L: 10m; N: 10)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>memor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		31,54	21,97	169,20	25,30	226%	F	1 e 10	32,40
		31,52	28,59	212,66	11,20	100%	C	1 e 10	34,35
		27,63	21,97	169,20	24,70	221%	F	1 e 10	32,40
		56,65	21,52	183,34	11,40	102%	C	1 e 10	32,75
		90,85	16,09	156,94	12,60	113%	F	1 e 10	31,60

Fonte: Autoria Própria (2015).

Dando continuidade, a Tabela 14 mostra os resultados das seções para  $L = 10$  m e  $N = 20$ . Dessa forma, constatou-se que o acréscimo do parâmetro  $\delta$  promove uma redução considerável no volume da treliça.

Outro aspecto importante, consiste na influência de  $N$  no tipo de falha predominante, como pode ser observado na Tabela 14, quando comparada à Tabela 13, o aumento de  $N$  ocasiona uma mudança no tipo de falha predominante. Na Tabela 13 observa-se que a falha por flambagem predomina, enquanto na Tabela 14, há apenas duas falhas associadas à flambagem, pois um aumento em  $N$  implica em uma diminuição do comprimento dos elementos.

Tabela 14: Resultados para treliça Howe Curva com  $L = 10$  m e  $N = 20$ .

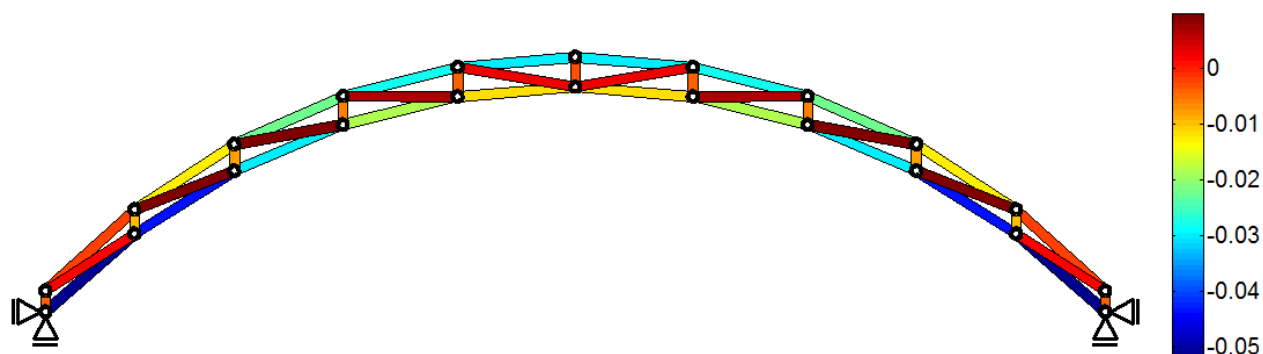
		TRELIÇA HOWE CURVA (L: 10m; N: 20)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		23,13	10,23	168,49	13,70	110%	F	2 e 19	32,62
		31,85	21,41	252,81	12,40	100%	C	2 e 19	37,64
		20,30	10,23	168,49	13,40	108%	F	2 e 19	32,62
		53,23	21,41	252,81	12,40	100%	C	2 e 19	37,64
		74,98	21,41	252,81	12,40	100%	C	2 e 19	37,64

Fonte: Autoria Própria (2015).

### 3.6.1 Seção Ótima

Verificou-se que, para  $L = 10$  m e  $N = 10$ , a seção circular vazada apresenta um melhor desempenho em relação às outras seções. As saídas gráficas mencionadas em 2.2.1 foram geradas para esta seção. A Figura 34 mostra os níveis de tensão na treliça. Observa-se que nos banzos prevalecem esforços de compressão, enquanto que nas diagonais e nos montantes predominam esforços de tração. Ainda analisando a Figura 34, observa-se que os elementos mais solicitados e que definem a área mínima são os elementos 1 e 10, pois apresentam um elevado nível de compressão.

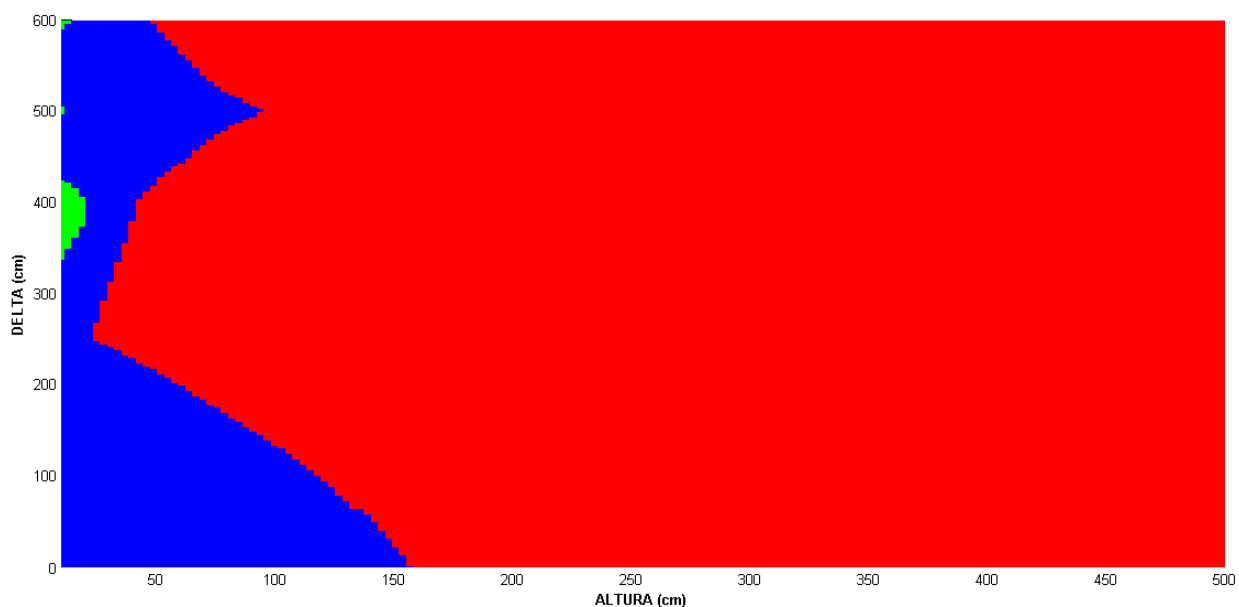
**Figura 34: Distribuição de tensão na treliça.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

Além disso, tem-se o diagrama de falhas relacionado à este tipo de seção, que pode ser visto na Figura 35.

**Figura 35: Diagrama de falhas para a seção circular vazada.**



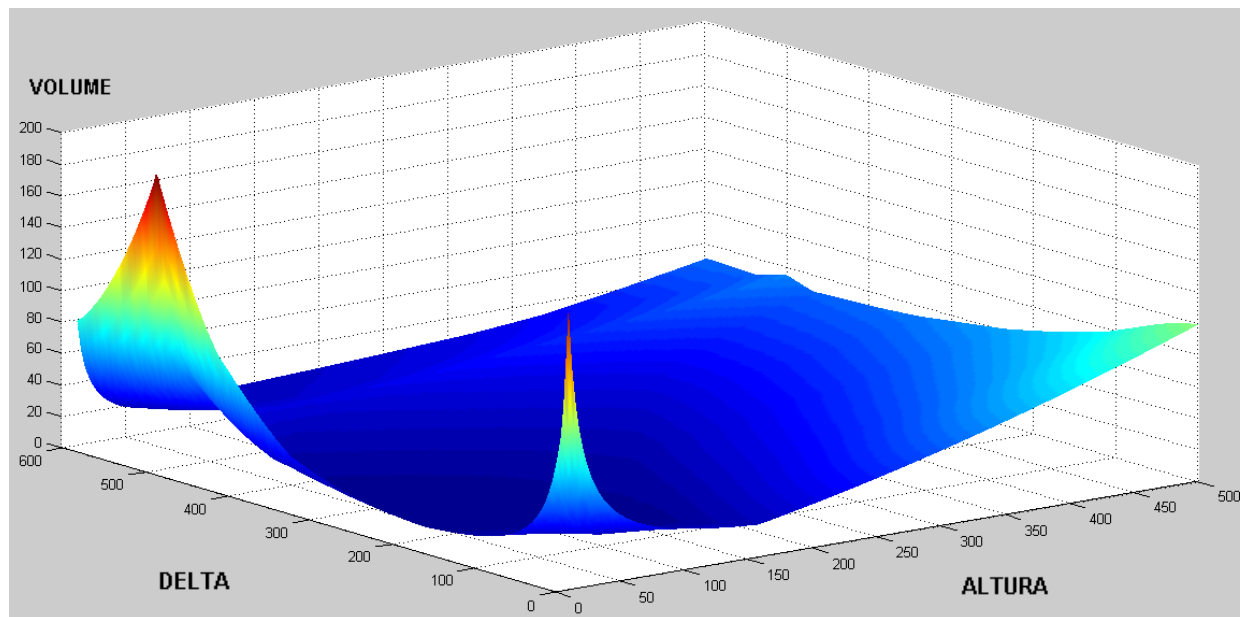
Fonte: Autoria Própria (2015).

Neste diagrama, para a seção ótima mostrada na Tabela 13, constata-se a falha à compressão (cor azul). Ademais, percebe-se que para valores altos de  $h$  tem-se, predominantemente, falha por flambagem (cor vermelha). Afora, verifica-se uma pequena área em verde, o que indica que em algumas regiões da treliça, o esforço de tração consiste em um critério de resistência limitante.



Por fim, outra saída gráfica é a superfície volume mínimo associada à esta seção ótima, a qual é mostrada na Figura 36.

**Figura 36: Superfície volume mínimo para a seção circular vazada.**



Fonte: Autoria Própria (2015).

De acordo com este gráfico, pode-se visualizar que o ponto ótimo mostrado na Tabela 13 está contido no domínio de análise, e situa-se em um vale contido na superfície. Em adição, à medida que  $\delta$  e  $h$  aumentam, observa-se uma taxa de variação considerável na função volume mínimo, ou seja, para valores crescentes de  $\delta$  e  $h$ , percebe-se que a função apresenta uma taxa de variação crescente.

### 3.7. Discussões dos Resultados

Para início, vale ressaltar que todos os procedimentos apresentados nas seções 3.1 à 3.6 foram repetidos para  $L = 20$  m, com  $N = 20$  e  $N = 40$ , como pode ser observado nos Anexos.

De maneira geral, a inserção do parâmetro  $\delta$  para as treliças inclinadas consistiu em uma redução em seus respectivos volumes ótimos. Igualmente, averiguou-se que para todas as configurações de treliça, que o aumento em  $N$  ocasiona mudanças no critério de resistência limitante. Esta mudança ocorre, geralmente, de flambagem para compressão, como esperado, pois o aumento em  $N$  representa uma redução no comprimento das barras. Além disso, constatou-se

que para  $N = 10$ , quando comparado a  $N = 20$ , tem-se um melhor desempenho, no que se refere à obtenção de uma solução ótima.

Outrossim, dentre as diversas treliças estudadas para  $L = 10$  m, a seção transversal que apresentou melhor desempenho foi a circular vazada, enquanto que para  $L = 20$  m, houve mais de uma seção ótima, como mostrado nos Anexos, estas seções foram: (i) seção circular vazada, (ii) seção quadrada vazada e (iii) seção em U.

Dando continuidade, de modo a viabilizar uma comparação entre os desempenhos das treliças, foi desenvolvido um ranking, no qual se classifica as treliças de acordo com a forma (curva ou inclinada) e com a configuração (tipo). A Tabela 15 expõe o ranking para  $L = 10$  m e  $N = 10$ .

**Tabela 15: Ranking do desempenho das treliças para  $L = 10$  m e  $N = 10$ .**

DESEMPENHO	TIPO	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	TIPO DE FALHA	V / V <sub>menor</sub> (%)	SEÇÃO
1º	Pratt Curva	10.6	F	100%	Circular Vazada
2º/3º	Howe Curva	11.2	C	106%	Circular Vazada
2º/3º	Belga Curva	11.2	C	106%	Circular Vazada
4º	Howe Inclinada	16.1	F	152%	Circular Vazada
5º	Pratt Inclinada	19.0	C	179%	Circular Vazada
6º	Belga Inclinada	21.1	C	199%	Circular Vazada

Fonte: Autoria Própria (2015)

**Tabela 16: Ranking do desempenho das treliças para  $L = 10$  m e  $N = 20$ .**

DESEMPENHO	TIPO	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	TIPO DE FALHA	V / V <sub>menor</sub> (%)	SEÇÃO
1º	Pratt Curva	12.0	C	100%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
2º	Howe Curva	12.4	C	103%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
3º	Belga Curva	12.7	C	106%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
4º	Howe Inclinada	23.5	C	196%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
5º	Belga Inclinada	25.6	C	213%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
6º	Pratt Inclinada	27.7	C	231%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U

Fonte: Autoria Própria (2015)

De acordo com a Tabela 15, evidencia-se que as treliças curvas apresentam um melhor desempenho em relação às treliças inclinadas. Em adição, constata-se que para a forma inclinada a treliça Howe apresentou melhor desempenho, enquanto que para a forma curva a treliça Pratt se sobressaiu. Por fim, observa-se que a treliça com o pior desempenho, para as considerações deste trabalho, foi a treliça Belga Inclinada.

A Tabela 16 exibe o ranking para  $L = 10$  m e  $N = 20$ . Conforme os dados da Tabela 16, verifica-se que as treliças curvas apresentam um melhor desempenho em relação às treliças inclinadas. Em adição, constata-se que para a forma inclinada a treliça Howe apresentou melhor desempenho, enquanto que para a forma curva a treliça Pratt se sobressaiu. Por fim, observa-se que a treliça com o pior desempenho, para as considerações deste trabalho, foi a treliça Pratt Inclinada.

**Tabela 17: Ranking do desempenho das treliças para  $L = 20$  m e  $N = 20$ .**

DESEMPENHO	TIPO	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	TIPO DE FALHA	V / V <sub>menor</sub> (%)	SEÇÃO
1º	Pratt Curva	47.9	C	100%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
2º	Howe Curva	49.4	C	103%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
3º	Belga Curva	50.3	C	105%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
4º	Howe Inclinada	93.6	C	195%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
5º	Belga Inclinada	102.9	C	215%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
6º	Pratt Inclinada	109.9	C	229%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U

Fonte: Autoria Própria (2015).

A Tabela 17 exibe o ranking para  $L = 20$  m e  $N = 20$ . Segundo os dados da Tabela 17, nota-se que as treliças curvas apresentam um melhor desempenho em relação às treliças inclinadas. Em adição, constata-se que para a forma inclinada a treliça Howe apresentou melhor desempenho, enquanto que para a forma curva a treliça Pratt se sobressaiu. Por fim, observa-se que a treliça com o pior desempenho, para as considerações deste trabalho, foi a treliça Pratt Inclinada.

A Tabela 18 exibe o ranking para  $L = 20$  m e  $N = 40$ . Segundo os dados da Tabela 18, percebe-se que as treliças curvas apresentam um melhor desempenho em relação às treliças

inclinadas. Em adição, constata-se que para a forma inclinada a treliça Howe apresentou melhor desempenho, enquanto que para a forma curva a treliça Pratt se sobressaiu. Por fim, observa-se que a treliça com o pior desempenho, para as considerações deste trabalho, foi a treliça Pratt Inclinada.

**Tabela 18: Ranking do desempenho das treliças para L = 20 m e N = 40.**

DESEMPENHO	TIPO	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	TIPO DE FALHA	V / Vmenor (%)	SEÇÃO
1º	Pratt Curva	55.5	C	100%	Todas
2º	Howe Curva	56.6	C	102%	Todas
3º	Belga Curva	56.9	C	103%	Todas
4º	Howe Inclinada	141.6	C	255%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
5º	Belga Inclinada	147.8	C	266%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U
6º	Pratt Inclinada	162.7	C	293%	Circular Vazada/Quadrada Vazada/Seção em U

Fonte: Aatoria Própria (2015)

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi abordado assuntos referentes à otimização estrutural de treliças metálicas planas empregadas em cobertas. Em suma, a otimização estrutural se faz necessária no cenário atual da indústria da construção civil, onde cada minuto e centavo fazem a diferença. Assim sendo, este trabalho busca oferecer mais rapidez nas tomadas de decisões e na escolha do melhor tipo de coberta, assim como permitir a ampliação dos conceitos ligados à otimização estrutural e sua aplicação na construção civil.

Neste aspecto, considera-se que este trabalho alcançou os objetivos detalhados em 1.2, pois os programas foram implementados em ambiente computacional, o que possibilitou a análise de diversas configurações geométricas para treliças quando da procura pelo par  $\delta$  e  $h$  que fornece o volume ótimo. Além disso, foram geradas saídas gráficas que tornaram esta análise mais visual e intuitiva. Em adição, ressalta-se que a inserção do parâmetro  $\delta$  nas treliças inclinadas propiciou uma redução expressiva no volume ótimo em comparação com a configuração usual, onde adota-se  $\delta = 0$ . Desta forma, a adição de  $\delta \neq 0$  consiste em um aspecto importante deste trabalho, visto que a presença deste parâmetro não é comum na prática. Outra característica positiva do acréscimo de  $\delta$  nas treliças inclinadas é que o mesmo proporciona um ambiente interior mais amplo.

Ademais, este trabalho concluiu que, dentre os tipos de treliças estudadas, a treliça que apresenta melhor desempenho é a Pratt. Igualmente, verificou-se que as treliças curvas apresentam um desempenho superior às treliças inclinadas. Do mesmo modo, constatou-se que a seção transversal ótima predominante foi a circular vazada.

À luz dessas considerações, este trabalho pode contribuir com o processo de tomada de decisões, quando do dimensionamento de treliças por profissionais da área.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120:1980**. Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações. Rio de Janeiro: ABNT, 1980.

**NBR 8800:2008**. Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço.

BARBOSA, C. O.; CUNHA, R. E. **Dimensionamento de Treliças Metálicas Usuais Padronizadas, com Auxílio de uma Ferramenta Computacional e Cálculos Manuais**. 2013. 85p. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade da Amazônia, Belém – PA.

CENTRO BRASILEIRO DA CONSTRUÇÃO EM AÇO - CBCA. Disponível em: <<http://www.cbca-acobrasil.org.br/construcao-em-aco-acos-estruturais.php>>. Acesso em 02 de fevereiro de 2015.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. 2009 Edition. Linköping, Suécia, 2008.

COLEMAN, T.; BRANCH, M. A.; GRACE, A. **Optimization Toolbox for Use with MATLAB**. User's Guide, version 2. Maryland, USA. 1999.

FILHO, A. A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 7ed. São Paulo: Perspectiva, 2000.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Perspectiva, 2009.

FONSECA, M. **Otimização de Estruturas Treliçadas Planas e Espaciais sob Carregamentos Estáticos e Dinâmicos, Usando Algoritmos Genéticos e Redes Neurais**. 2007. 212p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto – MG.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MAIA, J. P. R. **Otimização Estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta Solver**. 2009. 83p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP.

NOGUEIRA, G. S. **Avaliação de Soluções Estruturais para Galpões Compostos por Perfis de Aço Formados a Frio**. Ouro Preto: Editora da Universidade – UFOP, 2009.

PAIVA, A. P. *et al.* **Análise Teórica e Experimental das Treliças Planas: Determinação da Influência de Imperfeições Construtivas no Comportamento Estrutural**. In: Congresso Brasileiro de Ensino em Engenharia – COBENGE, 37, 2009, Recife **Anais**. Pernambuco: UFPE, 2009.

PFEIL, W; PFEIL, M. **Estruturas de Aço: Dimensionamento Prático**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.






PINHO, F. O. **Galpões em Pórticos de Aço**. GERDAU Açominas, 2011.

SANTOS, A. P. **Análise Estrutural de Galpões Atirantados de Concreto Pré-moldado**. 2010. 190p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SOUZA, M. F.; RODRIGUES, R. B. **Sistemas Estruturais de Edificações e Exemplos**. 2008. 93 f. Relatório Final de Pesquisa Científica – Departamento de Estruturas, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), São Paulo.






## ANEXO I

Tabela 19: Resultados para treliça Belga Inclinada com L = 20 m e N = 20.

		TRELIÇA BELGA INCLINADA (L: 20m; N: 20)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA δ = 0		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		47,04	116,85	262,43	127,50	124%	C	21 e 38	73,35	38%	240,00	177,70	24%
		103,31	282,90	506,72	102,90	100%	C	40 e 72	102,68	79%	450,00	151,70	45%
		41,69	116,85	262,43	127,50	124%	C	21 e 38	73,35	38%	250,00	174,30	25%
		80,50	282,90	506,72	102,90	100%	C	40 e 72	102,68	79%	450,00	151,70	45%
		172,51	268,08	491,72	103,40	100%	C	21 e 38	99,91	76%	450,00	151,70	45%

Fonte: Os Autores (2015)

Tabela 20: Resultados para treliça Belga Inclinada com L = 20 m e N = 40.

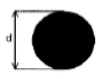

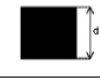
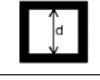
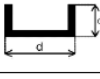
		TRELIÇA BELGA INCLINADA (L: 20m; N: 40)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA δ = 0		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		45,65	124,85	371,80	157,10	106%	C	80 e 152	95,98	50%	290,00	263,00	29%
		125,25	196,31	484,20	147,80	100%	C	80 e 152	122,30	68%	360,00	259,10	36%
		40,23	126,65	375,37	156,40	106%	C	41 e 78	96,62	50%	290,00	263,00	29%
		97,73	196,31	484,20	147,80	100%	C	80 e 152	122,30	68%	360,00	259,10	36%
		201,45	196,31	484,20	147,80	100%	C	80 e 152	122,30	68%	360,00	259,10	36%

Fonte: Os Autores (2015)




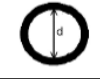
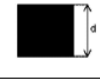
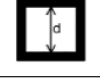
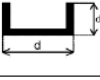
## ANEXO II

Tabela 21: Resultados para treliça Pratt Inclinada com L = 20 m e N = 20.

		TRELIÇA PRATT INCLINADA (L: 20m; N: 20)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA δ = 0		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		46,44	110,44	249,16	131,40	120%	F	21,22,39 e 40	77,57	36%	290,00	174,80	29,00%
		95,42	279,01	484,94	109,90	100%	C	21,22,39 e 40	118,52	76%	440,00	162,80	44,00%
		40,54	113,56	254,39	128,60	117%	F	21,22,39 e 40	78,26	37%	300,00	173,00	30,00%
		74,30	279,01	484,94	109,90	100%	C	21,22,39 e 40	118,52	76%	440,00	162,80	44,00%
		156,84	272,08	479,17	110,00	100%	C	21,22,39 e 40	116,85	75%	440,00	162,80	44,00%

Fonte: Os Autores (2015)






Tabela 22: Resultados para treliça Pratt Inclinada com L = 20 m e N = 40.

		TRELIÇA PRATT INCLINADA (L: 20m; N: 40)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA δ = 0		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
SEÇÃO		44,29	127,25	355,77	166,20	102%	C	41,42,79 e 80	107,93	48%	290,00	273,80	29%
		120,38	198,20	460,97	162,70	100%	C	41,42,79 e 80	139,92	66%	360,00	269,80	36%
		39,09	129,23	359,38	166,30	102%	C	41,42,79 e 80	108,82	49%	290,00	273,80	29%
		93,90	198,20	460,97	162,70	100%	C	41,42,79 e 80	139,92	66%	360,00	269,80	36%
		193,81	198,20	460,97	162,70	100%	C	41,42,79 e 80	139,92	66%	360,00	269,80	36%

Fonte: Os Autores (2015)

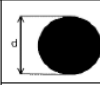
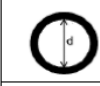

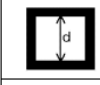
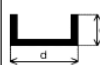
## ANEXO III

Tabela 23: Resultados para treliça Howe Inclinada com L = 20 m e N = 20.

SEÇÃO		TRELIÇA HOWE INCLINADA (L: 20m; N: 20)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>minor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA δ=0		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
		45,28	128,49	292,64	121,20	129%	F	21 e 40	75,28	42,11%	281,00	169,50	28,10%
		87,20	319,43	580,06	93,60	100%	C	21 e 40	110,11	89,95%	391,00	156,20	39,10%
		39,66	128,49	292,64	118,40	126%	F	21 e 40	75,28	42,11%	291,00	167,40	29,10%
		67,81	319,43	580,06	93,60	100%	C	21 e 40	110,11	89,95%	461,00	154,60	46,10%
		141,62	319,43	580,06	93,60	100%	C	21 e 40	110,11	89,95%	461,00	154,60	46,10%

Fonte: Os Autores (2015)

Tabela 24: Resultados para treliça Howe Inclinada com L = 20 m e N = 40.

SEÇÃO		TRELIÇA HOWE INCLINADA (L: 20m; N: 40)											
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>minor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)	INCLINAÇÃO (%)	PARA δ=0		
											ALTURA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	INCLINAÇÃO (%)
		41,60	156,57	419,65	146,00	103%	C	41 e 80	107,40	58%	291,00	265,60	29%
		114,68	209,35	547,58	141,60	100%	C	41 e 80	127,66	76%	371,00	261,00	37%
		36,70	158,50	425,39	145,60	103%	C	41 e 80	108,13	58%	291,00	265,60	29%
		89,39	209,35	547,58	141,60	100%	C	41 e 80	127,66	76%	371,00	261,00	37%
		184,78	209,35	547,58	141,60	100%	C	41 e 80	127,66	76%	371,00	261,00	37%

Fonte: Os Autores (2015)

## ANEXO IV

Tabela 25: Resultados para treliça Belga Curva com L = 20 m e N = 20.

		TRELIÇA BELGA CURVA (L: 20m; N: 20)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		38,95	20,46	336,97	77,80	155%	F	1 e 20	65,24
		67,92	42,59	504,56	50,30	100%	C	1 e 20	75,19
		34,13	20,46	336,97	76,00	151%	F	1 e 20	65,24
		52,70	42,59	504,56	50,30	100%	C	1 e 20	75,19
		111,41	42,59	504,56	50,30	100%	C	1 e 20	75,19

Fonte: Os Autores (2015)






Tabela 26: Resultados para treliça Belga Curva com L = 20 m e N = 40.

		TRELIÇA BELGA CURVA (L: 20m; N: 40)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		30,96	26,79	422,48	56,90	100%	C	2,3,38 e 39	75,54 m
		76,88	26,79	422,48	56,90	100%	C	2,3,38 e 39	75,54 m
		27,44	26,79	422,48	56,90	100%	C	2,3,38 e 39	75,54 m
		59,74	26,79	422,48	56,90	100%	C	2,3,38 e 39	75,54 m
		125,47	26,79	422,48	56,90	100%	C	2,3,38 e 39	75,54 m

Fonte: Os Autores (2015)






## ANEXO V

Tabela 27: Resultados para treliça Pratt Curva com  $L = 20$  m e  $N = 20$ .

		TRELIÇA PRATT CURVA (L: 20m; N: 20)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	$V / V_{\text{menor}}$ (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		38,71	20,46	336,97	76,80	160%	F	1 e 20	65,24
		64,59	42,59	504,56	47,90	100%	C	1 e 20	75,19
		33,92	20,46	336,97	75,10	157%	F	1 e 20	65,24
		50,09	42,59	504,56	47,90	100%	C	1 e 20	75,19
		106,17	42,59	504,56	47,90	100%	C	1 e 20	75,19

Fonte: Os Autores (2015)

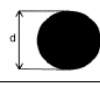
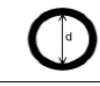
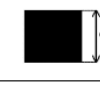
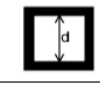
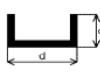
Tabela 28: Resultados para treliça Pratt Curva com  $L = 20$  m e  $N = 40$ .

		TRELIÇA PRATT CURVA (L: 20m; N: 40)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	$V / V_{\text{menor}}$ (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		30,59	26,79	422,47	55,50	100%	C	2 e 39	75,54
		74,99	26,79	422,47	55,50	100%	C	2 e 39	75,54
		27,11	26,79	422,47	55,50	100%	C	2 e 39	75,54
		58,25	26,79	422,47	55,50	100%	C	2 e 39	75,54
		122,51	26,79	422,47	55,50	100%	C	2 e 39	75,54

Fonte: Os Autores (2015)

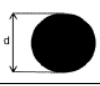
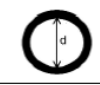
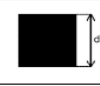
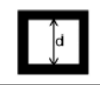

## ANEXO VI

Tabela 29: Resultados para treliça Howe Curva com L = 20 m e N = 20.

		TRELIÇA HOWE CURVA (L: 20m; N: 20)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		38,89	20,46	336,97	77,50	157%	F	2 e 19	65,24
		66,69	42,82	505,62	49,40	100%	C	2 e 19	75,28
		34,07	20,46	336,97	75,70	153%	F	2 e 19	65,24
		51,89	42,82	505,62	49,40	100%	C	2 e 19	75,28
		109,77	42,82	505,62	49,40	100%	C	2 e 19	75,28

Fonte: Os Autores (2015)

Tabela 30: Resultados para treliça Howe Curva com L = 20 m e N = 40.

		TRELIÇA HOWE CURVA (L: 20m; N: 40)							
		DIMENSÃO CARACTERÍSTICA (mm)	ALTURA (cm)	DELTA (cm)	VOLUME (dm <sup>3</sup> )	V / V <sub>menor</sub> (%)	TIPO DE FALHA	ELEMENTOS QUE FALHAM	COMPRIMENTO TOTAL (m)
SEÇÃO		30,87	26,79	422,48	56,60	100%	C	2 e 39	75,54
		76,43	26,79	422,48	56,60	100%	C	2 e 39	75,54
		27,36	26,79	422,48	56,60	100%	C	2 e 39	75,54
		59,15	26,79	422,48	56,60	100%	C	2 e 39	75,54
		124,30	26,79	422,48	56,60	100%	C	2 e 39	75,54

Fonte: Os Autores (2015)