

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
CENTRO DE TECNOLOGIA – CTEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL -PPGEC

**UMA FORMULAÇÃO GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DA TEORIA
PARAMÉTRICA DE VOLUMES FINITOS**

Clayton Tavares Aquino

MACEIÓ
2010

CLAYTON TAVARES AQUINO

**UMA FORMULAÇÃO GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DA TEORIA
PARAMÉTRICA DE VOLUMES FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques

Co-orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

**MACEIÓ
2010**

Catlogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A657u Aquino, Clayton Tavares.
Um formulação geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos / Clayton Tavares Aquino, 2010.
86 f. : il., tabs., graf.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.

Co-Orientador: Eduardo Nobre Lages.

Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) ó Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2010.

Bibliografia: f. 76-77.

Apêndices: f. [78]-86.

1. Formulação paramétrica da teoria de volumes finitos. 2. Materiais compósitos. 3. Não linearidade geométrica. I. Título.

CDU: 624.016



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC
Campus A. C. Simões, Av. Lourival de Melo Mota, S/N
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas
Tel/Fax: (82) 3214-1276
E-mail: ppgec@ctec.ufal.br
Homepage: www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec

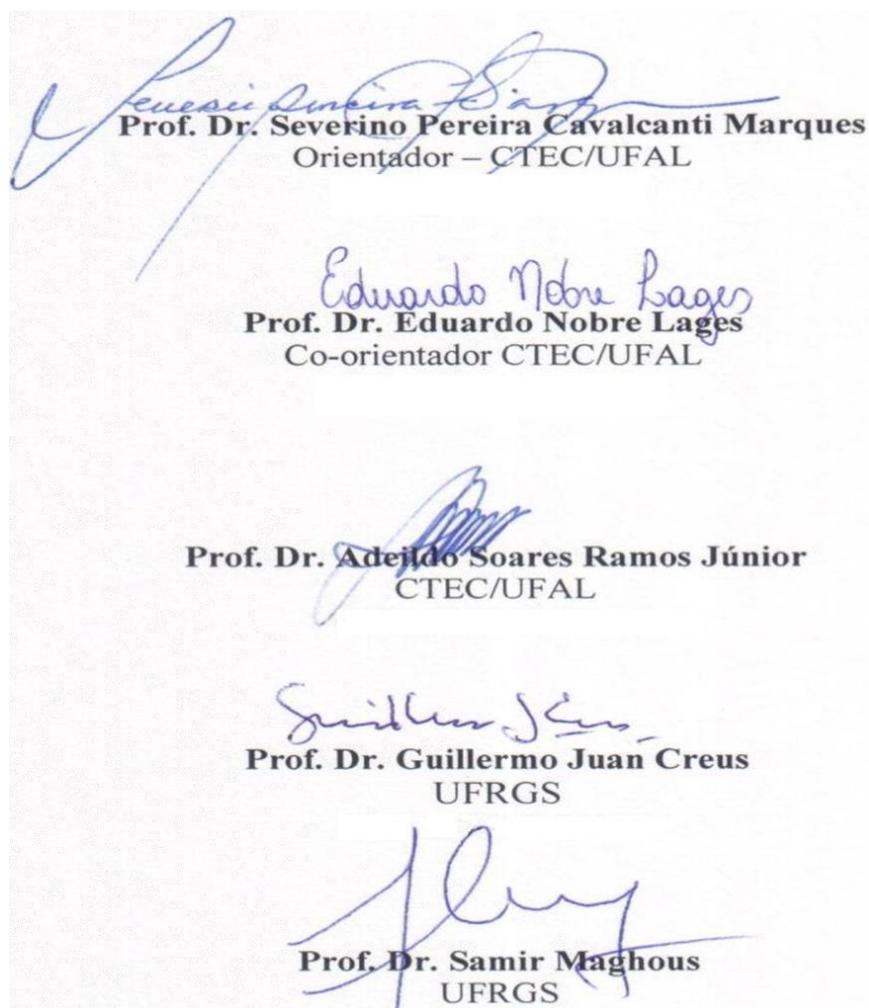


UMA FORMULAÇÃO GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DA TEORIA PARAMÉTRICA DE VOLUMES FINITOS

CLAYTON TAVARES AQUINO

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 11 do mês de maio do ano de 2010.

Banca Examinadora:



Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, principalmente à minha mãe por toda dedicação, cuidado e atenção, cuja presença foi e é importantíssima na minha vida. A Ludmilla por ter me acompanhado e incentivado nos momentos difíceis que compartilhamos.

Ao professor Severino Marques por ter depositado confiança em minha capacidade para desenvolver esta dissertação, por ter atuado lado a lado sempre com grande dedicação e entusiasmo em relação ao andamento das atividades realizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Eduardo Nobre por me fazer pensar através de caminhos alternativos, objetivando encontrar respostas para as dúvidas com as quais nos defrontamos constantemente.

Ao grande amigo Romildo por contribuir de forma direta com o desenvolvimento desta dissertação e conviver lado a lado com as dificuldades e realizações vividas nos últimos anos.

Aos professores que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFAL por fornecerem um embasamento teórico que me propiciou desenvolver este trabalho.

Aos professores Armando Awruch e Eduardo Bittencourt da UFRGS por terem contribuído para minha formação.

Aos professores Arnaldo Santos, José Adeildo e Márcio André, sempre dispostos a ajudar.

Aos amigos Fabinho e Thiago por terem me recebido em Porto Alegre da melhor forma possível.

Ao amigo Diogo Cintra pelos momentos insanos onde aplicamos os vários conceitos adquiridos na engenharia para resolver pequenos problemas do dia a dia da melhor maneira possível.

À amiga Irene por me lembrar que existe vida fora do LCCV em dias que pareciam intermináveis.

Aos funcionários do LCCV Tonny, Roseane, Raissa e Amanda que, através de suas atividades, propiciaram um excelente ambiente de trabalho.

Aos amigos do PEC Christiano, Emílio, David e todos os “pecadores” que sempre me lembram os bons momentos da graduação.

Ao professor Eduardo Setton e todos que fazem parte do LCCV.

Aos amigos de longa data Thiago, Isabela e Rheyva que estão me acompanhado de longe e de perto e me incentivando nas horas mais difíceis.

Agradeço a todos aqueles que de alguma forma colaboraram para a obtenção do título de mestre, bem como a conclusão de mais esta fase de minha vida.

*“Se fiz descobertas valiosas, foi mais por ter
paciência do que qualquer outro talento.”*

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho apresenta-se o desenvolvimento de uma nova formulação baseada na teoria paramétrica de volumes finitos, para a análise do comportamento geometricamente não linear de sólidos elásticos bidimensionais heterogêneos. A formulação é do tipo incremental e fundamentada em uma descrição cinemática Lagrangeana Total. Como medidas de tensão e de deformação são empregados o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e o tensor de Green-Lagrange, respectivamente. Com base na referida formulação, desenvolve-se um código computacional em linguagem de programação C++. Para verificar e validar o modelo proposto analisam-se diferentes problemas submetidos a grandes deslocamentos envolvendo materiais homogêneos e heterogêneos. Comparam-se os resultados obtidos com outros encontrados na literatura científica.

Palavras-Chave: *Não Linearidade Geométrica, Teoria de Volumes Finitos, Materiais Compósitos.*

Abstract

This work presents a model based on the known Parametric Finite-Volume Theory to analyze the geometrically nonlinear behavior of two-dimensional elastic structures made of heterogeneous materials. The formulation employed by the model is purely incremental and based on a kinematic Total Lagrangian description. The Second Piola-Kirchhoff tensor and Green-Lagrange tensor are used as stress and strain measurements, respectively. Based on this formulation a computer code is developed in C++ language. To verify the efficiency of the model, examples of structures with large displacements and involving heterogeneous materials, as well as homogeneous materials, were analyzed. The results for these examples are shown and compared with others published in the literature.

Keywords: *Non linearity, Finite Volume Theory, Composite Materials.*

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Vetores posição e deslocamento.	19
Figura 2.2 – Configuração de referência e deformada.	20
Figura 2.3 – Forças e tensões atuantes em um corpo.	22
Figura 2.4 – Vetor de forças nas configurações inicial e deformada.	23
Figura 2.5 – Equilíbrio de um volume infinitesimal do corpo na configuração deformada.	25
Figura 2.6 – Movimento do corpo no sistema de coordenadas cartesianas.....	26
Figura 3.1 – Subvolume quadrilateral e elemento parametrizado.	32
Figura 3.2 – Movimento do subvolume no sistema de coordenadas cartesianas.	35
Figura 3.3 – Componentes do segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff atuantes no subvolume.	46
Figura 4.1 – Inclusão circular imersa em uma matriz.	56
Figura 4.2 – (a) discretização com 376 subvolumes, (b) subvolumes avaliados.	57
Figura 4.3 – Tensão normal σ_{xx} em função do deslocamento (caso 1).....	57
Figura 4.4 – Tensão σ_{xx} na fibra no ponto ($x = 0$ e $y = 0$) em função do deslocamento para o caso 2.	58
Figura 4.5 – Tensão σ_{xx} na matriz no ponto ($x = 5\text{ cm}$ e $y = 0$) em função do deslocamento para o caso 2.	58
Figura 4.6 – Tensão normal σ_{xx} na interface matriz-fibra em função do deslocamento para o caso 2.	59
Figura 4.7 – Detalhe da discretização na região da interface da inclusão com a matriz.	60
Figura 4.8 – Tensão normal σ_{xx} na interface em função do deslocamento para as duas malhas em estudo para o caso 2.	60
Figura 4.9 – Tensão normal σ_{xx} para o caso 2.	61
Figura 4.10 – Tensão normal σ_{yy} para o caso 2.	61
Figura 4.11 – Tensão cisalhante σ_{xy} para o caso 2.	61
Figura 4.12 – Discretização utilizada no caso 3.	62

Figura 4.13 – Tensão normal σ_{xx} no subvolume próximo à interface para o caso 3.	62
Figura 4.14 – Tensão normal σ_{xx} no subvolume da matriz em ($x = 5$ cm) para o caso 3.	63
Figura 4.15 – Painel de FGM submetido a uma tensão uniaxial.	63
Figura 4.16 – Painel de com furo elíptico submetido a uma tensão uniaxial.	64
Figura 4.17 – Discretização do painel e subvolume em destaque.	65
Figura 4.18 – Variação da tensão σ_{xx} com o deslocamento horizontal em ($x = 10$ m; $y = 0$) para $p = 0$	66
Figura 4.19 – Variação do fator de concentração de tensão (FCT) com o deslocamento horizontal para $p = 0$	66
Figura 4.20 – Variação da tensão σ_{xx} com o deslocamento horizontal em ($x = 10$; $y = 0$) para $p = 0,5$	67
Figura 4.21 – Variação do fator de concentração de tensão (FCT) com o deslocamento horizontal para $p = 0,5$	67
Figura 4.22 – Variação do fator de concentração de tensão (FCT) com o expoente p	68
Figura 4.23 – Viga em balanço.	69
Figura 4.24 – Deslocamento vertical em função da carga normalizada.	69
Figura 4.25 – Deslocamento horizontal em função da carga normalizada.	70
Figura 4.26 – Influência do incremento de tensão no deslocamento vertical.	71
Figura 4.27 – Influência do incremento de tensão no deslocamento horizontal.	71
Figura 4.28 – Configuração deformada da viga para uma carga $PL/23EI = 1,2$ e deslocamento vertical $u/2L = -0,44$	72
Figura 4.29 – Arco engastado submetido a uma carga horizontal no extremo livre.	72
Figura 4.30 – Variação do deslocamento em função da carga aplicada.	73

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Algoritmo incremental da teoria de volumes finitos.	54
Tabela 4.1 – Propriedades elásticas da matriz e da inclusão.	56
Tabela 4.2 – Propriedades elásticas dos materiais.....	64

Lista de Símbolos

$\det(\mathbf{M})$	Determinante da uma matriz \mathbf{M} .
${}^0\mathcal{C}$	Configuração de referência do corpo.
${}^t\mathcal{C}$	Configuração do corpo em um tempo t .
${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$	Configuração do corpo em um tempo $t + \Delta t$.
\mathbf{u}	Vetor de incremento de deslocamento entre as configurações ${}^t\mathcal{C}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
${}^t\mathbf{u}$	Vetor deslocamento em relação à configuração ${}^0\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$	Vetor deslocamento em relação à configuração ${}^t\mathcal{C}$.
u_i	Componente do vetor deslocamento incremental entre as configurações ${}^t\mathcal{C}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
${}^t u_i$	Componente do vetor deslocamento em relação à configuração ${}^0\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t} u_i$	Componente do vetor deslocamento em relação à configuração ${}^t\mathcal{C}$.
\mathbf{u}_F	Vetor deslocamento médio incremental das faces de um subvolume.
u_{iFj}	Componente do vetor deslocamento médio incremental da face j .
\mathbf{X}	Vetor posição da configuração ${}^0\mathcal{C}$.
\mathbf{x}	Vetor posição da configuração ${}^t\mathcal{C}$.
x_i	Componente do vetor posição da configuração ${}^0\mathcal{C}$.
${}^t x_i$	Componente do vetor posição da configuração ${}^t\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t} x_i$	Componente do vetor posição da configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
$U_{i(mn)}$	Coefficiente (m n) do polinômio do campo de deslocamento incremental.
${}^t U_{i(mn)}$	Coefficiente (m n) do polinômio do campo de deslocamento da configuração ${}^t\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t} U_{i(mn)}$	Coefficiente (m n) do polinômio do campo de deslocamento da configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
η	Coordenada paramétrica.
ξ	Coordenada paramétrica.
\mathbf{E}	Tensor deformação de Green-Lagrange incremental.

$E_{i,j}$	Elemento (i, j) do tensor deformação de Green-Lagrange incremental.
${}^tE_{i,j}$	Elemento (i, j) do tensor deformação de Green-Lagrange da configuração ${}^t\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t}E_{i,j}$	Elemento (i, j) do tensor deformação de Green-Lagrange da configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
ϵ	Parcela linear do tensor deformação de Green-Lagrange incremental.
η	Parcela não linear do tensor deformação de Green-Lagrange incremental.
$\epsilon_{i,j}$	Elemento (i, j) da parcela linear do tensor deformação de Green-Lagrange incremental.
$\eta_{i,j}$	Elemento (i, j) da parcela não linear do tensor deformação incremental de Green-Lagrange.
\mathbf{S}	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff incremental.
${}^t\mathbf{S}_{\eta=\pm 1}$	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff das faces esquerda e direita na configuração ${}^t\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_{\eta=\pm 1}$	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff das faces esquerda e direita na configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
${}^t\mathbf{S}_{\xi=\pm 1}$	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff das faces inferior e superior na configuração ${}^t\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_{\xi=\pm 1}$	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff das faces inferior e superior na configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
$\tilde{\mathbf{T}}$	Primeiro vetor tensão incremental de Piola-Kirchhoff do elemento.
${}^t\tilde{\mathbf{T}}$	Primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff do elemento na configuração ${}^t\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{T}}$	Primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff do elemento na configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
\mathbf{T}	Segundo vetor tensão incremental de Piola-Kirchhoff do elemento.
${}^t\mathbf{T}$	Segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff do elemento na configuração ${}^t\mathcal{C}$.

${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}$	Segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff do elemento na configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
\mathbf{b}_v	Vetor de força volumétrica incremental.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}_v$	Vetor de força volumétrica da configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
b_{v_i}	Componente do vetor de força volumétrica incremental.
J	Matriz Jacobiana.
\bar{J}	Inversa da matriz Jacobiana média.
\bar{J}_{ij}	Elemento (i, j) da matriz Jacobiana média inversa.
\mathbf{U}	Vetor de coeficientes do campo de deslocamento incremental.
${}^t\mathbf{H}$	Matriz com as derivadas do campo de deslocamento incremental.
\mathbf{G}	Matriz que relaciona as derivadas do campo de deslocamento incremental em relação às coordenadas paramétricas e os coeficientes do polinômio desse campo.
\mathbf{C}	Matriz constitutiva que relaciona o incremento tensão de Piola-Kirchhoff com o incremento deformação linear de Green-Lagrange.
$\mathbf{N}^{(k)}$	Matriz com os componentes normais à face k .
\mathbf{F}	Tensor gradiente de deformação.
${}^t\mathbf{F}$	Tensor gradiente de deformação da configuração ${}^t\mathcal{C}$.
${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$	Tensor gradiente de deformação da configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.
\mathbf{A}	Matriz com as áreas das faces do elemento.
\mathbb{A}	Parcela linear da matriz que relaciona o segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff com os coeficientes do campo de deslocamento incremental.
${}^t\mathbb{B}$	Parcela dependente do histórico de deformação da matriz que relaciona o segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff com os coeficientes do campo de deslocamento incremental.
\mathbf{K}	Matriz de rigidez do elemento.
\mathbb{K}	Matriz de rigidez global do modelo.
—	Uma barra acima dos símbolos indica que a mesma está escrita em relação às médias nas faces.

Sumário

Capítulo 1	15
1. Introdução.....	15
1.1. OBJETIVOS	17
1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	17
Capítulo 2	18
2. Fundamentos: Não Linearidade Geométrica.....	18
2.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	18
2.2. FORMULAÇÃO NÃO LINEAR DA MECÂNICA DO CONTÍNUO ..	18
2.2.1. <i>Relações Cinemáticas</i>	18
2.2.2. <i>Medidas de Tensão e Equações Diferenciais de Equilíbrio</i>	21
2.3. RELAÇÕES INCREMENTAIS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO	26
Capítulo 3	31
3. Formulação Geometricamente Não Linear da Teoria Paramétrica de Volumes Finitos.....	31
3.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	31
3.2. TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS EM UM SUBVOLUME .	31
3.3. TEORIA BIDIMENSIONAL DE VOLUMES FINITOS COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	35
Capítulo 4	55
4. Resultados.....	55
4.1. PROBLEMA DA INCLUSÃO.....	55

4.2. ESTUDO DO FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO EM UM FURO CIRCULAR NO PAINEL DE MATERIAL COM GRADAÇÃO FUNCIONAL	63
4.3. VIGA EM BALANÇO SUJEITA A GRANDES DESLOCAMENTOS	68
4.4. ARCO ENGASTADO SUJEITO A GRANDES DESLOCAMENTOS.	72
Conclusões	74
Referências	76
Apêndice A	78
Matrizes para formulação não linear geométrica da teoria de volumes finitos	78
Apêndice B	81
Dedução das matrizes que compõem a equação de equilíbrio para um subvolume	81
Apêndice C	84
Dedução da solução analítica para uma chapa tracionada sujeita a grandes deslocamentos	84

Capítulo 1

Introdução

O rápido avanço tecnológico tem motivado uma crescente necessidade do emprego de materiais com avançado desempenho e características desejáveis em importantes áreas da ciência e nos mais diversos setores industriais. Este fato tem proporcionado um desenvolvimento substancial na tecnologia de fabricação e projeto de novos materiais e nas investigações teóricas e experimentais de seus comportamentos. Dentro de uma importante classe destes modernos materiais encontram-se aqueles que apresentam uma microestrutura heterogênea, constituída pela combinação discreta de diferentes fases. Nesta classe se enquadram, por exemplo, os compósitos reforçados por fibras e os materiais particulados, os quais são constituídos por uma matriz envolvendo fibras ou inclusões (partículas) que, normalmente, servem como materiais de reforço ou de enrijecimento. Os materiais compósitos avançados, reforçados por fibras, apresentam como principal característica as suas altas relações resistência/peso e rigidez/peso o que justifica, nas últimas décadas, o seu intenso emprego nas indústrias aeroespacial, automobilística e naval. Porém, a cada dia aumenta o leque de aplicações de tais materiais compósitos avançados. Atualmente, dentre as mais diversas aplicações, eles vêm sendo utilizados na construção civil e também nas estruturas *offshore* destinadas à exploração de petróleo e gás. Neste último caso, por exemplo, eles já são utilizados na confecção de *risers* para águas profundas, tanques, vasos de pressão, painéis e em outros elementos da plataforma, tais como: escadas, tubulações de água, vigas etc. As vantagens do emprego dos mesmos em estruturas *offshore* são: as elevadas relações resistência mecânica/peso e rigidez/peso, assim como a excelente resistência à corrosão, ao impacto e à fadiga.

Devido à natureza heterogênea da microestrutura, os comportamentos desses materiais são mais complexos do que aqueles apresentados pelos materiais homogêneos. Dessa forma, os estudos de modelagem computacional, muitas vezes, são mais sofisticados e os modelos numéricos elaborados para estes estudos apresentam maior grau de complexidade exigindo assim maiores esforços computacionais e técnicas numéricas avançadas. Como exemplo de técnicas numéricas para solução desses problemas, podem-se citar os métodos dos elementos finitos e de contorno (Barbero, 2007; Sutradar et al., 2008). Uma técnica alternativa consiste na teoria de volumes finitos a qual tem demonstrado grande potencialidade para análise termomecânica de materiais heterogêneos, sendo sua versão “standard” conhecida como *Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics – FVDAM* (Bansal & Pindera, 2003). Mais recentemente, foi apresentada uma formulação paramétrica a qual tem sido reconhecida como um grande avanço da FVDAM (Cavalcante, 2006). Tal formulação foi desenvolvida para permitir o uso de subvolumes com faces quadrilaterais arbitrárias, o que garante resultados substancialmente melhores que aqueles obtidos com a FVDAM quando o domínio analisado ou as inclusões do material heterogêneo apresentam contornos curvos (Cavalcante et al., 2007a,b). Vale resaltar que na versão original da FVDAM os subvolumes apresentam necessariamente faces retangulares, o que motiva o aparecimento de perturbações nos campos de deslocamento e de tensões ao longo de interfaces e de bordas curvas. Aspectos de convergência e de tempo de processamento da referida formulação paramétrica, comparados com o método dos elementos finitos, são apresentados por Cavalcante et al. (2008). Esta formulação também tem sido aplicada no estudo do comportamento termo-elástico transiente de tubos constituídos por lâminas de materiais diferentes (Cavalcante et al., 2009). Todos os trabalhos relacionados com a FVDAM citados acima abordam unicamente problemas geometricamente lineares. Considerando os resultados obtidos com a formulação linear e a importância de problemas envolvendo materiais heterogêneos com grandes deslocamentos, julga-se relevante a incorporação de efeitos geometricamente não lineares na formulação paramétrica da teoria de volumes finitos.

1.1. Objetivos

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma formulação geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos para análise de estruturas de materiais hiperelásticos que apresentam microestruturas heterogêneas. A formulação escolhida é incremental e do tipo Lagrangeana Total, utilizando como medida de tensão o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e como medida de deformação o tensor deformação de Green-Lagrange.

De forma específica, o trabalho apresenta os seguintes objetivos:

- Desenvolver a formulação bidimensional geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos;
- Implementar um programa em linguagem de programação C++ baseado na formulação desenvolvida;
- Resolver problemas envolvendo materiais homogêneos e heterogêneos;
- Contribuir para o fortalecimento da linha de pesquisa de novos materiais do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas.

1.2. Organização do Trabalho

Apresentam-se inicialmente no Capítulo 2 as relações e os conceitos da formulação não linear da mecânica do contínuo empregados no desenvolvimento da formulação proposta.

No Capítulo 3, desenvolve-se a formulação bidimensional geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos, para descrição do comportamento elástico linear de sólidos heterogêneos sujeitos a grandes deslocamentos.

Ao final, no Capítulo 4, são apresentados e discutidos exemplos numéricos envolvendo a presente formulação.

Nos apêndices A e B encontram-se, respectivamente, as matrizes utilizadas no desenvolvimento da formulação e o detalhamento do equacionante para obtenção da equação de equilíbrio em função do segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff.

Capítulo 2

Fundamentos: Não Linearidade Geométrica

2.1. Considerações Iniciais

Neste capítulo apresentam-se relações e conceitos da formulação não linear da mecânica do contínuo, abordando-se aqueles relacionados com a descrição cinemática utilizada na teoria em questão. São definidas grandezas empregadas na formulação geometricamente não linear aqui proposta a exemplo do tensor gradiente de deformação e as medidas de deformação e tensão. Ao final, as relações entre os tensores são escritas em termos incrementais, baseadas em uma configuração de referência.

2.2. Formulação Não Linear da Mecânica do Contínuo

Na mecânica do contínuo as propriedades físicas e cinemáticas do corpo contínuo são avaliadas pontualmente em cada instante de tempo t , a exemplo do que se faz com a densidade, posição no espaço e velocidade. Essas grandezas são definidas com base em um sistema referencial que caracteriza o tipo de formulação utilizada na descrição do movimento. Quando a configuração inicial do corpo é assumida como referência, ou seja, as propriedades são descritas em função da posição inicial do corpo, diz-se que a descrição do movimento é *Lagrangeana Total*, a adotada neste trabalho.

2.2.1. Relações Cinemáticas

Nas análises de deformação consideram-se basicamente duas configurações do corpo, a inicial e a deformada, identificadas na Figura 2.1. Um ponto material, que na

configuração inicial é definido pelo vetor posição \mathbf{X} , desloca-se durante o movimento, apresentando um novo vetor posição \mathbf{x} , no tempo t . O vetor \mathbf{u} entre as posições inicial e atual do ponto é referido como vetor deslocamento do mesmo e dado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.1)$$

Nessa equação observa-se que o vetor deslocamento de um ponto qualquer pode ser definido em função do seu vetor posição inicial e do tempo t , ou seja, o movimento é descrito por uma função \mathcal{g} que relaciona as posições dos pontos correspondentes às configurações final e inicial. Com base nas hipóteses adotadas na mecânica do contínuo, conclui-se que \mathcal{g} é uma função inversível, isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathcal{g}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X} &= \mathcal{g}^{-1}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

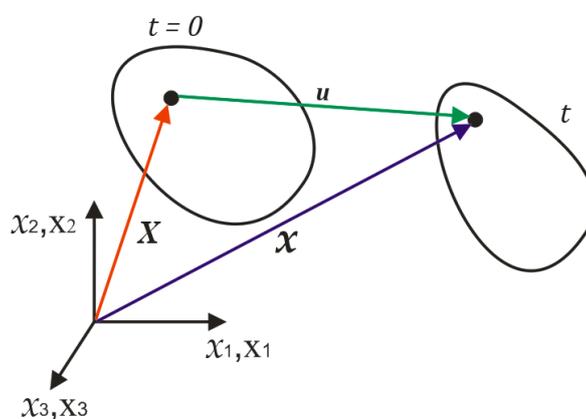


Figura 2.1 – Vetores posição e deslocamento.

A Figura 2.2 mostra dois pontos vizinhos P e Q do corpo em sua configuração inicial, cuja distância dX entre eles é dada pela norma do vetor $d\mathbf{X}$. No instante t do processo de deformação do corpo, os pontos P e Q se deslocam para as posições p e q , respectivamente, e na nova configuração esses pontos apresentam uma distância dx correspondente à norma do vetor $d\mathbf{x}$.

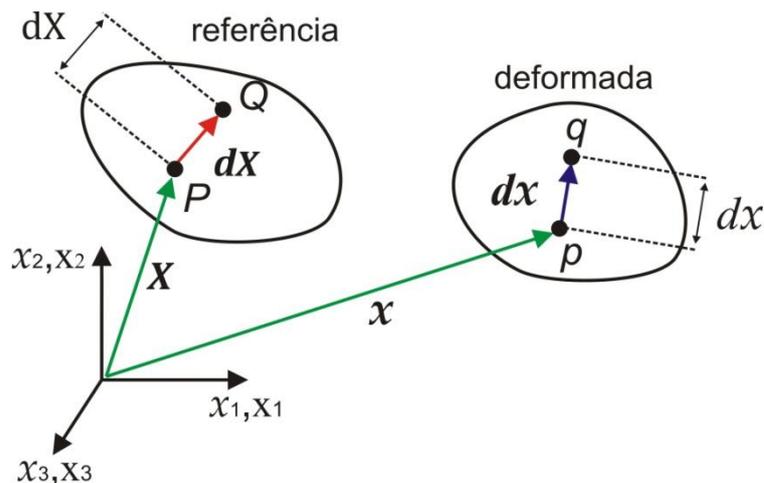


Figura 2.2 – Configuração de referência e deformada.

De acordo com a Figura 2.2, pode-se escrever

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

ou ainda

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad (2.4)$$

Substituindo-se a Equação (2.2) em (2.4), obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{F} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{F} é denominado *tensor gradiente de deformação*.

Esse tensor é uma quantidade local relacionada com a deformação do corpo em uma dada direção. Observa-se que, em geral, o tensor gradiente de deformação é não simétrico e não se caracteriza como uma medida conveniente de deformação, por poder assumir valores diferentes de zero em casos de movimentos de corpo rígido, como translações e rotações.

Substituindo-se a Equação (2.1) em (2.5), encontra-se a seguinte relação:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} \quad (2.6)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade e $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}}$ é denominado *tensor gradiente de deslocamento*.

Existem diferentes medidas de deformação propostas na literatura. Dentre tais medidas encontra-se o *tensor de deformação de Green-Lagrange*, o qual é independente dos movimentos de corpo rígido. A definição de tal tensor é feita com base na metade da diferença entre os quadrados da distância entre os pontos P e Q nas configurações final e inicial:

$$\frac{1}{2}(dx^2 - dX^2) = \frac{1}{2}(d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}) \quad (2.7)$$

Substituindo-se a Equação (2.5) na expressão (2.7), tem-se

$$\frac{1}{2}(dx_i^2 - dX_i^2) = \frac{1}{2}(d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} \quad (2.8)$$

onde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.9)$$

sendo \mathbf{E} o *tensor deformação de Green-Lagrange*, o qual é simétrico e positivo definido. Ressalta-se que esse tensor é referido à configuração inicial.

2.2.2. Medidas de Tensão e Equações Diferenciais de Equilíbrio

A Figura 2.3a mostra um corpo deformado em equilíbrio submetido à aplicação de diversas forças externas. Em seu estado deformado, existem forças internas distribuídas como mostrado na Figura 2.3b. Em um elemento de área Δa do corpo deformado, com vetor normal externo unitário \mathbf{n} , atua uma força resultante $\Delta \mathbf{f}$ (Figura

2.3c), à qual corresponde a um vetor tensão, conhecido como *vetor tensão de Cauchy* e definido por

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (2.10)$$

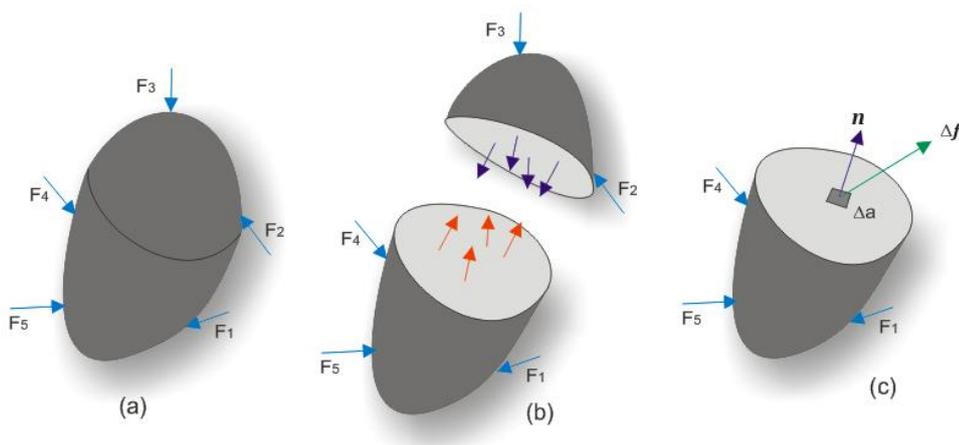


Figura 2.3 – Forças e tensões atuantes em um corpo.

Um outro vetor tensão, denominado *primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff*, é definido por

$$\tilde{\mathbf{T}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \quad (2.11)$$

onde ΔA representa o elemento de área da configuração inicial correspondente ao Δa na configuração deformada (Figura 2.4). Tais elementos de área estão relacionados pela *fórmula de Nanson*, a qual é expressa por:

$$\mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA \quad (2.12)$$

onde

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (2.13)$$

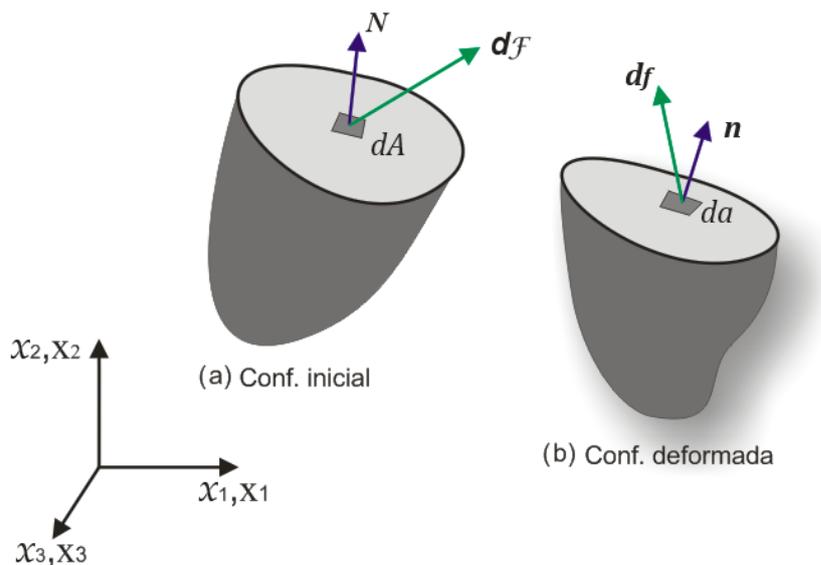


Figura 2.4 – Vetor de forças nas configurações inicial e deformada.

Impondo-se o equilíbrio de forças no ponto material, pode-se encontrar a *fórmula de Cauchy*

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (2.14)$$

ou, escrita em termos matriciais,

$$\begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

onde σ_{ij} são os componentes do tensor tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

De forma semelhante, utilizando-se o primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff e o versor normal \mathbf{N} ao elemento de área dA na configuração de referência, tem-se a seguinte relação:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^T \mathbf{N} \quad (2.16)$$

sendo \mathbf{P} o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff, o qual pode ser não simétrico.

De posse das Equações (2.10), (2.11), (2.12) e (2.16), pode-se deduzir uma relação entre os tensores de Cauchy e de Piola-Kirchhoff, como segue:

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} da = \mathbf{P}^T \mathbf{N} dA$$

donde

$$\mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.17)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{P} \quad (2.18)$$

O *segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff* \mathbf{T} pode ser definido através da relação

$$d\mathcal{F} = \mathbf{T} dA \quad (2.19)$$

onde $d\mathcal{F}$ representa uma força fictícia, a qual está relacionada com a força real $d\mathbf{f}$ pela expressão

$$d\mathcal{F} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} \quad (2.20)$$

Introduzindo as Equações (2.11) e (2.19) em (2.20), chega-se com

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.21)$$

O *segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff* \mathbf{S} é definido por

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{N} \quad (2.22)$$

Multiplicando ambos os membros da Equação (2.21) pelo versor normal \mathbf{N} , deduz-se que

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}^T \quad (2.23)$$

Substituindo-se a Equação (2.17) em (2.23), pode-se relacionar o segundo tensor de Piola-Kirchhoff com o tensor de Cauchy por

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (2.24)$$

A Figura 2.5 mostra o diagrama bidimensional de corpo livre infinitesimal com base na configuração deformada, onde estão indicadas as tensões de Cauchy nas faces limitantes da região bem como as forças volumétricas b_i .

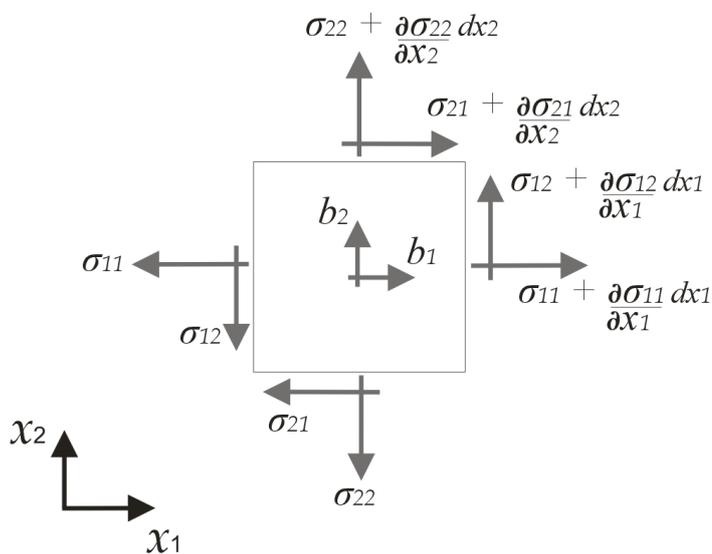


Figura 2.5 – Equilíbrio de um volume infinitesimal do corpo na configuração deformada.

Impondo-se o equilíbrio das forças atuantes no elemento nas direções x_1 e x_2 , chega-se a

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (2.25)$$

No caso do equilíbrio dos binários, chega-se à simetria do tensor tensão de Cauchy.

2.3. Relações Incrementais da Mecânica do Contínuo

A Figura (2.5) mostra um corpo em movimento no espaço bidimensional, referido ao sistema de eixos x_1 e x_2 , onde se apresentam as configurações de equilíbrio ${}^0\mathcal{C}$, ${}^t\mathcal{C}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$ correspondentes aos tempos t_0 , t e $t + \Delta t$, respectivamente, sendo Δt um pequeno incremento de tempo. A configuração ${}^0\mathcal{C}$ é tomada como referência no estudo do movimento do corpo.

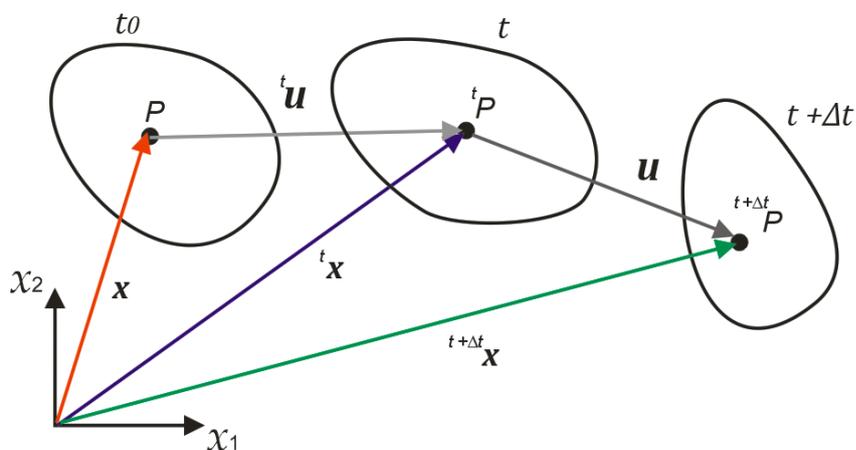


Figura 2.6 – Movimento do corpo no sistema de coordenadas cartesianas.

O vetor posição ${}^t\mathbf{x}$ de um ponto genérico P na configuração ${}^t\mathcal{C}$ pode ser escrito como

$${}^t\mathbf{x} = \mathbf{x} + {}^t\mathbf{u} \quad (2.26)$$

onde o ${}^t\mathbf{u}$ indica o vetor deslocamento em relação à configuração ${}^0\mathcal{C}$. Observa-se pela Figura 2.6 que

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \mathbf{u} \quad (2.27)$$

sendo \mathbf{u} o vetor de incremento de deslocamento entre as configurações ${}^t\mathcal{C}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$, assim como ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ é o vetor deslocamento de P em ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$ relativo à configuração ${}^0\mathcal{C}$.

Aplicando a definição do tensor gradiente de deformação, conforme a Equação (2.5), resulta de (2.26) a seguinte expressão:

$${}^t\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{d {}^t\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} \quad (2.28)$$

onde $\frac{d {}^t\mathbf{u}}{d\mathbf{x}}$ indica o tensor gradiente de deslocamento correspondente à configuração ${}^t\mathcal{C}$.

Demonstra-se que o tensor deformação de Green-Lagrange relativo a uma configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{E}$, pode ser escrito na forma incremental abaixo:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{E} = {}^t\mathbf{E} + \mathbf{E} \quad (2.29)$$

onde

${}^t\mathbf{E}$ – tensor deformação de Green-Lagrange em ${}^t\mathcal{C}$;

\mathbf{E} – incremento do tensor deformação de Green-Lagrange.

Os componentes do incremento do tensor deformação de Green-Lagrange podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial {}^t u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial {}^t u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.30)$$

sendo ${}^t u_i$ e u_i os componentes dos vetores de deslocamento e de incremento de deslocamento referidos ao sistema de eixos x_1 e x_2 .

De acordo com a Equação (2.30), o tensor incremento de deformação pode ser decomposto em uma parte linear ϵ e outra não linear η , ou seja,

$$\mathbf{E} = \epsilon + \eta \quad (2.31)$$

ou, em termos matriciais,

$$\begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{22} \\ \eta_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Os componentes lineares que figuram em (2.32) são dados por

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial {}^t u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial {}^t u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \quad (2.33)$$

enquanto que os componentes não lineares são escritos nas formas

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right] \quad (2.34)$$

A resposta do material pode ser modelada através de uma simples extensão da lei linear elástica, substituindo-se a tensão de Cauchy pelo incremento de tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} e a deformação linear pelo incremento de deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} (Belytscko et al., 2000), ou seja,

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{E} \quad (2.35)$$

onde \mathbf{C} representa o tensor constitutivo elástico linear.

Para o material isotrópico em estado bidimensional de tensão a Equação (2.35) pode ser escrita na forma

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Demonstra-se que o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, assim como o vetor a ele associado, podem ser expressos, respectivamente, nas formas

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = {}^t\mathbf{S} + \mathbf{S} \quad (2.37)$$

e

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{T} = {}^t\mathbf{T} + \mathbf{T} \quad (2.38)$$

onde

${}^t\mathbf{S}$ – segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff em ${}^t\mathcal{C}$;

\mathbf{S} – incremento do segundo tensor de Piola-Kirchhoff;

${}^t\mathbf{T}$ – segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff em ${}^t\mathcal{C}$;

\mathbf{T} – incremento do segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff.

De posse das Equações (2.37) e (2.38) pode-se escrever as expressões (2.21) e (2.22) da seguinte forma, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} {}^tT_1 \\ {}^tT_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{Bmatrix} {}^t\tilde{T}_1 \\ {}^t\tilde{T}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\begin{Bmatrix} {}^tT_1 \\ {}^tT_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \begin{Bmatrix} {}^tS_{11} \\ {}^tS_{22} \\ {}^tS_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

sendo \mathbf{N} uma matriz com os componentes normais da superfície na configuração de referência. Esta relaciona o segundo vetor tensão com o segundo tensor tensão Piola-Kirchhoff vetorizado e é dada por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 \\ 0 & N_2 & N_1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Capítulo 3

Formulação Geometricamente Não Linear da Teoria Paramétrica de Volumes Finitos

3.1. Considerações Iniciais

Neste capítulo apresenta-se uma formulação bidimensional geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos, a qual é baseada na formulação linear proposta por Cavalcante (2006). Esta última utiliza polinômios do segundo grau expressos em termos de coordenadas paramétricas como aproximação para os campos de deslocamentos em cada subvolume de uma malha composta de elementos quadriláteros planos. Com o intuito de obter os coeficientes dos campos de deslocamentos, são impostas condições de contorno e de continuidade em termos médios, relativas às tensões e aos deslocamentos, entre os subvolumes usados para discretizar o domínio do corpo deformável em análise.

A presente proposta é formulada para descrição do comportamento elástico linear de sólidos heterogêneos com deslocamentos arbitrários, usando uma formulação incremental Lagrangeana Total que emprega os tensores de Piola-Kirchhoff e de Green-Lagrange como medidas de tensão e de deformação, respectivamente.

3.2. Transformações de coordenadas em um subvolume

Como no método dos elementos finitos e também na formulação linear da teoria de volumes finitos, a formulação não linear exige a geração de uma malha constituída

por subvolumes, onde a geometria e a localização de cada subvolume são definidas pelos quatro vértices e pelas quatro faces, como mostra a Figura 3.1.

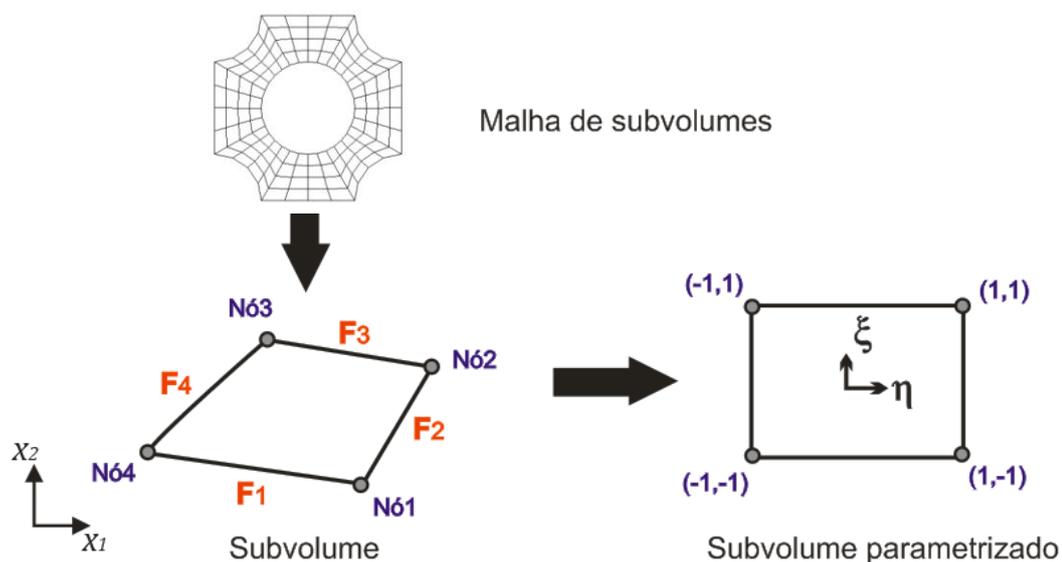


Figura 3.1 – Subvolume quadrilateral e elemento parametrizado.

Para se fazer o mapeamento de pontos dentro de um subvolume, utiliza-se uma parametrização em coordenadas generalizadas η e ξ , empregando-se as clássicas funções de interpolação bilineares utilizadas no método dos elementos finitos, dadas por

$$\begin{aligned}
 N_1(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \xi) \\
 N_2(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \xi) \\
 N_3(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi) \\
 N_4(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \xi)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Utilizando-se as funções de forma, é possível escrever as relações entre as coordenadas reais e coordenadas paramétricas de acordo com a seguinte equação:

$$x_i(\eta, \xi) = N_1(\eta, \xi)x_i^{nó1} + N_2(\eta, \xi)x_i^{nó2} + N_3(\eta, \xi)x_i^{nó3} + N_4(\eta, \xi)x_i^{nó4} \tag{3.2}$$

As derivadas do campo de deslocamento ${}^t\mathbf{u}$ em relação às coordenadas paramétricas são dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial {}^t u_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial {}^t u_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial {}^t u_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial {}^t u_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (3.3)$$

ou, escritas em termos matriciais,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^t u_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial {}^t u_i}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \eta} & \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^t u_i}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t u_i}{\partial X_2} \end{Bmatrix}\quad (3.4)$$

onde as derivadas das coordenadas reais em relação às coordenadas paramétricas são os componentes da matriz Jacobiana \mathbf{J} , na forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \eta} & \frac{\partial X_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 + i_2 \xi & i_4 + i_5 \xi \\ i_3 + i_2 \eta & i_6 + i_5 \eta \end{bmatrix}\quad (3.5)$$

sendo

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^{nó1} \\ X_1^{nó2} \\ X_1^{nó3} \\ X_1^{nó4} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_2^{nó1} \\ X_2^{nó2} \\ X_2^{nó3} \\ X_2^{nó4} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Na formulação que segue, admite-se que a matriz Jacobiana é constante em cada subvolume, que corresponde ao valor médio de cada componente, ou seja,

$$J \approx \begin{bmatrix} i_1 & i_4 \\ i_3 & i_6 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Assim, a inversa da matriz Jacobiana pode ser dada por

$$J^{-1} \approx \bar{J} = \frac{1}{i_7} \begin{bmatrix} i_6 & -i_4 \\ -i_3 & i_1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde

$$i_7 = i_1 i_6 - i_3 i_4 \quad (3.9)$$

De posse da Equação (3.8), resulta de (3.4) a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^t \bar{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t \bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^t \bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t \bar{u}_2}{\partial X_2} \end{Bmatrix} = \bar{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^t \bar{u}_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial {}^t \bar{u}_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial {}^t \bar{u}_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial {}^t \bar{u}_2}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

sendo

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \bar{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{J} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz nula com a mesma dimensão da matriz \bar{J} .

3.3. Teoria Bidimensional de Volumes Finitos com Não Linearidade Geométrica

A Figura 3.2 mostra um subvolumo em movimento no espaço bidimensional, referido ao sistema de eixos x_1 e x_2 , onde se apresentam as configurações de equilíbrio ${}^0\mathcal{C}$, ${}^t\mathcal{C}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$ correspondentes aos tempos t_0 , t e $t + \Delta t$, respectivamente.

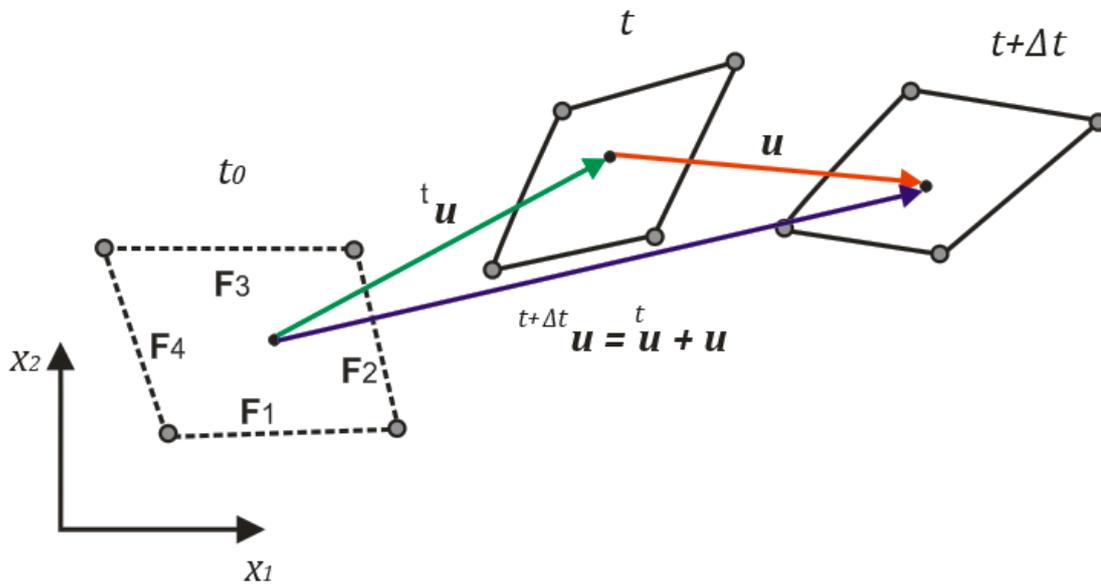


Figura 3.2 – Movimento do subvolumo no sistema de coordenadas cartesianas.

O campo de deslocamento do subvolumo em uma configuração genérica ${}^t\mathcal{C}$ é interpolado pelo polinômio

$$\begin{aligned} {}^t u_i = & {}^t U_{i(00)} + \eta {}^t U_{i(10)} + \xi {}^t U_{i(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1) {}^t U_{i(20)} \\ & + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) {}^t U_{i(02)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

enquanto que o campo incremental de deslocamentos por

$$u_i = U_{i(00)} + \eta U_{i(10)} + \xi U_{i(01)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1) U_{i(20)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1) U_{i(02)} \quad (3.13)$$

Durante o procedimento incremental, para a determinação da configuração de equilíbrio ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$, pressupõe-se que os coeficientes dos polinômios relativos à ${}^t\mathcal{C}$ são conhecidos. Com base na Equação (2.27), conclui-se que:

$${}^{t+\Delta t}U_{i(mn)} = {}^tU_{i(mn)} + U_{i(mn)} \quad (3.14)$$

As funções de interpolação do campo de deslocamento assumidas em (3.12) e (3.13) foram 1 , r , s , $\frac{1}{2}(3r^2 - 1)$ e $\frac{1}{2}(3s^2 - 1)$, as mesmas empregadas na formulação paramétrica linear (Cavalcante, 2006), onde r e s são as coordenadas paramétricas do volume finito. Observa-se que, por se tratarem de interpolações polinomiais com coeficientes generalizados, não há nenhum impedimento para se utilizar outras funções para a base de interpolação do campo de deslocamentos que envolvam termos constante, linear e quadrático puro, como, por exemplo, o polinômio dado pela Equação (3.15)

$${}^tu_i = {}^tU_{i(00)} + \eta {}^tU_{i(10)} + \xi {}^tU_{i(01)} + \eta^2 {}^tU_{i(20)} + \xi^2 {}^tU_{i(02)} \quad (3.15)$$

No desenvolvimento que segue, objetiva-se inicialmente encontrar uma relação entre o vetor de tensões médias nas faces do subvolume e o vetor de coeficientes dos polinômios. Para tal, utiliza-se o tensor de deformação de Green-Lagrange, a relação constitutiva e a relação de Cauchy.

A parte linear da deformação de Green-Lagrange, Equação (2.33), pode ser escrita matricialmente como segue:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{E}_l \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{Bmatrix} + \mathbf{E}_g \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^tu_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^tu_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^tu_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^tu_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^tu_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^tu_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^tu_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^tu_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.16)$$

onde \mathbf{E}_l e \mathbf{E}_g são matrizes constantes, dadas por

$$\mathbf{E}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E}_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Derivando-se o polinômio do campo de deslocamento ${}^t u_i$ dado pela Equação (3.12), deduz-se que

$$\frac{\partial {}^t u_i}{\partial \eta} = {}^t U_{i(10)} + 3\eta {}^t U_{i(20)} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial {}^t u_i}{\partial \xi} = {}^t U_{i(01)} + 3\xi {}^t U_{i(02)} \quad (3.20)$$

As médias de cada uma das derivadas que aparecem nas Equações (3.19) e (3.20) para cada face do subvolume são definidas por

$$\left. \frac{\partial {}^t \bar{u}_i}{\partial \eta} \right|_{\eta=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ({}^t U_{i(10)} + 3\eta {}^t U_{i(20)}) d\xi = {}^t U_{i(10)} + 3\eta {}^t U_{i(20)} \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial {}^t \bar{u}_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ({}^t U_{i(01)} + 3\xi {}^t U_{i(02)}) d\xi = {}^t U_{i(01)} \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial {}^t \bar{u}_i}{\partial \eta} \right|_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ({}^t U_{i(10)} + 3\eta {}^t U_{i(20)}) d\eta = {}^t U_{i(10)} \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial {}^t\bar{u}_i}{\partial \xi} \right|_{\xi=\pm 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ({}^tU_{i(01)} + 3\xi {}^tU_{i(02)}) d\eta = {}^tU_{i(01)} + 3\xi {}^tU_{i(02)} \quad (3.24)$$

De posse das derivadas apresentadas nas Equações (3.21)-(3.24) e a matriz com as inversas da matriz Jacobiana $\bar{\mathcal{J}}$, obtém-se as seguintes relações:

$$\left. \begin{array}{c} \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right|_{\eta=\pm 1} = \bar{\mathcal{J}} \mathbf{G}_{\eta=\pm 1} \left. \begin{array}{c} {}^tU_{1(10)} \\ {}^tU_{1(01)} \\ {}^tU_{1(20)} \\ {}^tU_{1(02)} \\ {}^tU_{2(10)} \\ {}^tU_{2(01)} \\ {}^tU_{2(20)} \\ {}^tU_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{array}{c} \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right|_{\xi=\pm 1} = \bar{\mathcal{J}} \mathbf{G}_{\xi=\pm 1} \left. \begin{array}{c} {}^tU_{1(10)} \\ {}^tU_{1(01)} \\ {}^tU_{1(20)} \\ {}^tU_{1(02)} \\ {}^tU_{2(10)} \\ {}^tU_{2(01)} \\ {}^tU_{2(20)} \\ {}^tU_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

onde as matrizes $\mathbf{G}_{\eta=\pm 1}$ e $\mathbf{G}_{\xi=\pm 1}$ são dadas por

$$\mathbf{G}_{\eta=\pm 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{G}_{\xi=\pm 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3\xi \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

De maneira semelhante, podem-se encontrar as seguintes relações entre as médias das derivadas do campo incremental de deslocamento $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ e os incrementos dos coeficientes $U_{i(mn)}$ associados ao mesmo:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right\}_{\eta=\pm 1} = \bar{\mathbf{J}} \mathbf{G}_{\eta=\pm 1} \left\{ \begin{array}{c} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right\}_{\xi=\pm 1} = \bar{\mathbf{J}} \mathbf{G}_{\xi=\pm 1} \left\{ \begin{array}{c} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Dessa forma, pode-se escrever a Equação (3.16) em termos de médias nas faces como

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{array} \right\}_{\eta=\pm 1} = (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_g {}^t\mathbf{H}_{\eta=\pm 1}) \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right\}_{\eta=\pm 1} \quad (3.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{array} \right\}_{\xi=\pm 1} = (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_g {}^t\mathbf{H}_{\xi=\pm 1}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right\}_{\xi=\pm 1} \quad (3.32)$$

onde as matrizes ${}^t\mathbf{H}_{\eta=\pm 1}$ e ${}^t\mathbf{H}_{\xi=\pm 1}$ são dadas por

$${}^t\mathbf{H}_{\eta=\pm 1} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_2} \\ 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_2} & 0 \end{array} \right]_{\eta=\pm 1} \quad (3.33)$$

$${}^t\mathbf{H}_{\xi=\pm 1} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_2} \\ 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial {}^t\bar{u}_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial {}^t\bar{u}_2}{\partial X_2} & 0 \end{array} \right]_{\xi=\pm 1} \quad (3.34)$$

Desprezando-se a parcela não linear do incremento de deformação de Green-Lagrange, a equação incremental (2.36) pode ser escrita em termos médios nas faces da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{array} \right\}_{\eta=\pm 1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{array} \right\}_{\eta=\pm 1} \quad (3.35)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{Bmatrix}_{\xi=\pm 1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix}_{\xi=\pm 1} \quad (3.36)$$

Observa-se que a linearização na deformação imposta em (3.35) e (3.36) se justifica pela consideração de pequenos incrementos de deslocamentos entre as configurações ${}^t\mathcal{C}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.

Substituindo-se as Equações (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) em (3.35) e (3.36), respectivamente, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{Bmatrix}_{\eta=\pm 1} = \mathbf{C} (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_g {}^t\mathbf{H}_{\eta=\pm 1}) \bar{\mathbf{J}} \mathbf{G}_{\eta=\pm 1} \mathbf{U} \quad (3.37)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{12} \end{Bmatrix}_{\xi=\pm 1} = \mathbf{C} (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_g {}^t\mathbf{H}_{\xi=\pm 1}) \bar{\mathbf{J}} \mathbf{G}_{\xi=\pm 1} \mathbf{U} \quad (3.38)$$

sendo

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

e \mathbf{U} é o vetor com os coeficientes do campo incremental de deslocamento a serem determinados e escrito por

$$\mathbf{U}^T = [U_{1(10)} \quad U_{1(01)} \quad U_{1(20)} \quad U_{1(02)} \quad U_{2(10)} \quad U_{2(01)} \quad U_{2(20)} \quad U_{2(02)}] \quad (3.40)$$

Assim sendo, o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff médio para cada face e correspondente à configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$ pode ser escrito como mostrado a seguir:

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{S}}_{\eta=\pm 1} = {}^t\bar{\mathbf{S}}_{\eta=\pm 1} + \mathbf{C} (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_g {}^t\mathbf{H}_{\eta=\pm 1}) \bar{\mathbf{J}} \mathbf{G}_{\eta=\pm 1} \mathbf{U} \quad (3.41)$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{S}}_{\xi=\pm 1} = {}^t\bar{\mathbf{S}}_{\xi=\pm 1} + \mathbf{C} (\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_g {}^t\mathbf{H}_{\eta=\pm 1}) \bar{\mathbf{J}} \mathbf{G}_{\xi=\pm 1} \mathbf{U} \quad (3.42)$$

onde ${}^t\bar{\mathbf{S}}_{\eta=\pm 1}$ e ${}^t\bar{\mathbf{S}}_{\xi=\pm 1}$ representam o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff médio da configuração ${}^t\mathcal{C}$ nas faces do subvolume.

A relação (2.40) pode ser escrita em termos médios nas faces da seguinte forma:

Face 1:

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\bar{T}_1^{(1)} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{T}_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & 0 & N_2^{(1)} \\ 0 & N_2^{(1)} & N_1^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{11} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{22} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{12} \end{Bmatrix}_{\xi=-1} \quad (3.43)$$

Face 2:

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\bar{T}_1^{(2)} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{T}_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(2)} & 0 & N_2^{(2)} \\ 0 & N_2^{(2)} & N_1^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{11} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{22} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{12} \end{Bmatrix}_{\eta=1} \quad (3.44)$$

Face 3:

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}T_1^{(3)} \\ {}^{t+\Delta t}T_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(3)} & 0 & N_2^{(3)} \\ 0 & N_2^{(3)} & N_1^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}S_{11} \\ {}^{t+\Delta t}S_{22} \\ {}^{t+\Delta t}S_{12} \end{Bmatrix}_{\xi=1} \quad (3.45)$$

Face 4:

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\bar{T}_1^{(4)} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{T}_2^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(4)} & 0 & N_2^{(4)} \\ 0 & N_2^{(4)} & N_1^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{11} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{22} \\ {}^{t+\Delta t}\bar{S}_{12} \end{Bmatrix}_{\eta=-1} \quad (3.46)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\bar{T}_1^{(k)}$ e ${}^{t+\Delta t}\bar{T}_2^{(k)}$ são os componentes nas direções x_1 e x_2 do segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff médio na configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$ para a face k .

As Equações (3.43) a (3.46) podem ser compactadas na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} t+\Delta t \bar{T}_1^{(1)} \\ t+\Delta t \bar{T}_2^{(1)} \\ t+\Delta t \bar{T}_1^{(2)} \\ t+\Delta t \bar{T}_2^{(2)} \\ t+\Delta t \bar{T}_1^{(3)} \\ t+\Delta t \bar{T}_2^{(3)} \\ t+\Delta t \bar{T}_1^{(4)} \\ t+\Delta t \bar{T}_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t+\Delta t \bar{\mathbf{S}}_{\xi=-1} \\ t+\Delta t \bar{\mathbf{S}}_{\eta=+1} \\ t+\Delta t \bar{\mathbf{S}}_{\xi=+1} \\ t+\Delta t \bar{\mathbf{S}}_{\eta=-1} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Substituindo-se as Equações (3.41) e (3.42) em (3.47), chega-se à relação entre o segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff médio com os coeficientes incrementais do campo de deslocamento, dada a seguir:

$${}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{T}} = \mathbb{N} {}^t \bar{\mathbf{S}} + \mathbb{N} \mathbb{C} (\mathbb{E}_l + \mathbb{E}_g \quad {}^t \mathbb{H}) \bar{\mathbb{J}} \mathbb{G} \mathbf{U} \quad (3.48)$$

ou, em conformidade com a Equação (2.38),

$${}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{T}} = {}^t \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}} \quad (3.49)$$

Em (3.49) tem-se

$${}^t \bar{\mathbf{T}} = \mathbb{N} {}^t \bar{\mathbf{S}} \quad (3.50)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = (\mathbb{A} + {}^t \mathbb{B}) \mathbf{U} \quad (3.51)$$

onde

$$\mathbb{A} = \mathbb{N} \mathbb{C} \mathbb{E}_l \mathbb{J} \mathbb{G} \quad (3.52)$$

$${}^t\mathbb{B} = \mathbb{N} \mathbb{C} \mathbb{E}_g \quad {}^t\mathbb{H} \mathbb{J} \mathbb{G} \quad (3.53)$$

e as matrizes \mathbb{N} , \mathbb{C} , \mathbb{E}_l , \mathbb{E}_g , ${}^t\mathbb{H}$, \mathbb{J} e \mathbb{G} encontram-se no Apêndice A.

Como o polinômio é único para cada subvolume, a utilização direta da Equação (3.51) na montagem do sistema de equações do modelo estrutural pode resultar em sistema da ordem $10 \times$ número de subvolumes, tornando sua solução inviável para malhas refinadas. Visto isso, procura-se obter uma relação entre tensões médias nas faces e deslocamentos médios nas faces fazendo-se o equilíbrio de tensões médias nas faces no subvolume, conforme segue.

Os coeficientes dos campos de deslocamentos incrementais podem ser escritos em função dos deslocamentos incrementais médios u_{iFj} nas faces do subvolume, dados por

$$u_{iF1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_i(\eta, -1) d\eta = -U_{i(01)} + U_{i(02)} + U_{i(00)} \quad (3.54)$$

$$u_{iF2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_i(1, \xi) d\xi = U_{i(10)} + U_{i(20)} + U_{i(00)} \quad (3.55)$$

$$u_{iF3} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_i(\eta, 1) d\eta = U_{i(01)} + U_{i(02)} + U_{i(00)} \quad (3.56)$$

$$u_{iF4} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_i(-1, \xi) d\xi = -U_{i(10)} + U_{i(20)} + U_{i(00)} \quad (3.57)$$

Resulta das Equações (3.54)-(3.57) a seguinte relação:

$$\begin{pmatrix} u_{iF_1} \\ u_{iF_2} \\ u_{iF_3} \\ u_{iF_4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{i(10)} \\ U_{i(01)} \\ U_{i(20)} \\ U_{i(02)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{i(00)} \\ U_{i(00)} \\ U_{i(00)} \\ U_{i(00)} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Isolando-se os coeficientes $U_{i(10)}$, $U_{i(01)}$, $U_{i(20)}$ e $U_{i(02)}$ da Equação (3.58), tem-se

$$\begin{pmatrix} U_{i(10)} \\ U_{i(01)} \\ U_{i(20)} \\ U_{i(02)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{iF_1} - U_{i(00)} \\ u_{iF_2} - U_{i(00)} \\ u_{iF_3} - U_{i(00)} \\ u_{iF_4} - U_{i(00)} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

ou, escritos na forma explícita,

$$U_{i(10)} = \frac{1}{2}(u_{iF_2} - u_{iF_4}) \quad (3.60)$$

$$U_{i(01)} = \frac{1}{2}(u_{iF_3} - u_{iF_1}) \quad (3.61)$$

$$U_{i(20)} = \frac{1}{2}(u_{iF_2} + u_{iF_4}) - U_{i(00)} \quad (3.62)$$

$$U_{i(02)} = \frac{1}{2}(u_{iF_1} + u_{iF_3}) - U_{i(00)} \quad (3.63)$$

Como restrições adicionais envolvendo os coeficientes do polinômio do campo de deslocamentos, em Cavalcante (2006) foram impostas as equações diferenciais de equilíbrio. Neste trabalho utiliza-se diretamente o equilíbrio do volume finito em função dos vetores tensão médios nas faces do mesmo, pois a utilização das equações diferenciais de equilíbrio escritas em termos de Piola-Kirchhoff torna o equacionamento mais complexo.

A Figura 3.3 mostra um subvolume na configuração ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$ submetido a tensões representadas pelo primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff médio ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{T}}^{(k)}$ e suas forças volumétricas ${}^{t+\Delta t}\mathbf{b}_v$. As tensões atuam na face k de área A_k do subvolume.

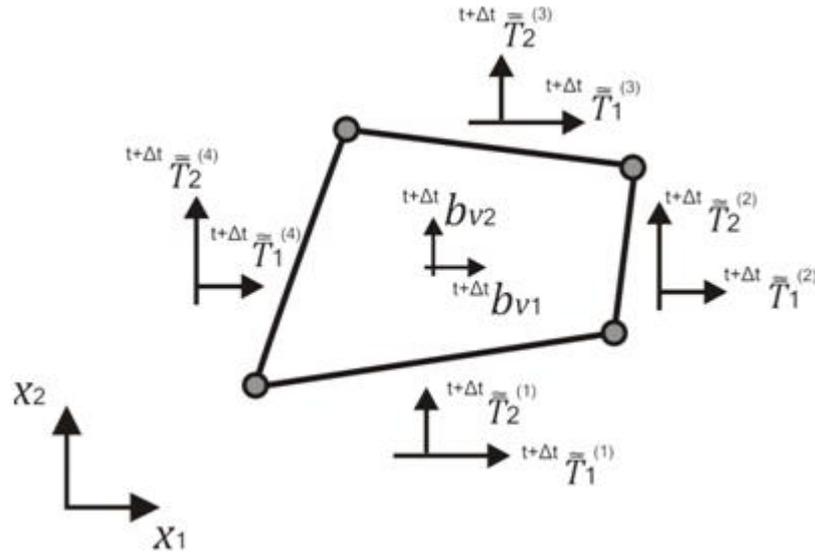


Figura 3.3 – Componentes do segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff atuantes no subvolume.

Fazendo-se a soma das forças médias para cada direção, encontra-se

$$\sum_{k=1}^4 {}^{t+\Delta t}\bar{T}_i^{(k)} A_k + {}^{t+\Delta t}b_{vi} = 0 \quad (3.64)$$

Admitindo-se que o tensor gradiente de deformação é constante no subvolume e dado por

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\bar{u}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\bar{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\bar{u}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\bar{u}_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

tem-se, de acordo com (2.39),

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{T}}^{(k)} \cong {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} \quad {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{T}}^{(k)} \quad (3.66)$$

As derivadas que figuram na Equação (3.65) são definidas pelas expressões

$$\frac{\partial {}^t\bar{u}_i}{\partial X_1} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial {}^t u_i}{\partial X_1} d\eta d\xi = \bar{J}_{11} {}^t U_{i(10)} + \bar{J}_{12} {}^t U_{i(01)} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial {}^t\bar{u}_i}{\partial X_2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial {}^t u_i}{\partial X_2} d\eta d\xi = \bar{J}_{21} {}^t U_{i(10)} + \bar{J}_{22} {}^t U_{i(01)} \quad (3.68)$$

Dessa forma, pode-se escrever a Equação (3.65) como

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} {}^t U_{1(10)} + \bar{J}_{12} {}^t U_{1(01)} & \bar{J}_{21} {}^t U_{1(10)} + \bar{J}_{22} {}^t U_{1(01)} \\ \bar{J}_{11} {}^t U_{2(10)} + \bar{J}_{12} {}^t U_{2(01)} & \bar{J}_{21} {}^t U_{2(10)} + \bar{J}_{22} {}^t U_{2(01)} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} U_{1(10)} + \bar{J}_{12} U_{1(01)} & \bar{J}_{21} U_{1(10)} + \bar{J}_{22} U_{1(01)} \\ \bar{J}_{11} U_{2(10)} + \bar{J}_{12} U_{2(01)} & \bar{J}_{21} U_{2(10)} + \bar{J}_{22} U_{2(01)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Substituindo-se as Equações (3.69) e (3.49) em (3.66) encontra-se a relação entre o primeiro e segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff médio nas faces, dada por

Face k:

$${}^{t+\Delta t} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1^{(k)} \\ \bar{\mathbf{T}}_2^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1^{(k)} \\ \bar{\mathbf{T}}_2^{(k)} \end{Bmatrix} + (\mathbf{I} + {}^t\mathbf{V} + \mathbf{V}) \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1^{(k)} \\ \bar{\mathbf{T}}_2^{(k)} \end{Bmatrix} + \mathbf{V} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{T}}_1^{(k)} \\ \bar{\mathbf{T}}_2^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

onde

$${}^t\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} {}^t U_{1(10)} + \bar{J}_{12} {}^t U_{1(01)} & \bar{J}_{21} {}^t U_{1(10)} + \bar{J}_{22} {}^t U_{1(01)} \\ \bar{J}_{11} {}^t U_{2(10)} + \bar{J}_{12} {}^t U_{2(01)} & \bar{J}_{21} {}^t U_{2(10)} + \bar{J}_{22} {}^t U_{2(01)} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11}U_{1(10)} + \bar{J}_{12}U_{1(01)} & \bar{J}_{21}U_{1(10)} + \bar{J}_{22}U_{1(01)} \\ \bar{J}_{11}U_{2(10)} + \bar{J}_{12}U_{2(01)} & \bar{J}_{21}U_{2(10)} + \bar{J}_{22}U_{2(01)} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Substituindo-se a Equação (3.70) em (3.64), tem-se

$$\sum_{k=1}^4 \left[(\mathbf{I} + {}^t\mathbf{V} + \mathbf{V}) \begin{Bmatrix} \bar{T}_1^{(k)} \\ \bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} + \mathbf{V} \begin{Bmatrix} {}^t\bar{T}_1^{(k)} \\ {}^t\bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} \right] A_{(k)} + \begin{Bmatrix} \bar{b}_{v_1} \\ \bar{b}_{v_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

sendo \bar{b}_{v_i} o incremento de forças volumétricas médio relacionado com o volume inicial.

Explicitando-se os coeficientes do campo de deslocamento incremental que implicitamente estão contidos na Equação (3.73), através de $\bar{T}_i^{(k)}$ e \mathbf{V} , encontra-se a seguinte relação, conforme descrito no Apêndice B:

$${}^t\mathbf{D} \begin{Bmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{v_1} \\ b_{v_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

onde

$${}^t\mathbf{D} = {}^t\mathbf{X} + {}^t\mathbf{Y} \quad (3.75)$$

e as matrizes ${}^t\mathbf{X}$ e ${}^t\mathbf{Y}$ encontram-se no Apêndice B.

Substituindo-se as Equações (3.60) a (3.63) em (3.74), tem-se

$${}^t\mathbf{D} \begin{Bmatrix} 0,5(u_{1F2} - u_{1F4}) \\ 0,5(u_{1F3} - u_{1F1}) \\ 0,5(u_{1F2} + u_{1F4}) - U_{1(00)} \\ 0,5(u_{1F3} + u_{1F1}) - U_{1(00)} \\ 0,5(u_{2F2} - u_{2F4}) \\ 0,5(u_{2F3} - u_{2F1}) \\ 0,5(u_{2F2} + u_{2F4}) - U_{2(00)} \\ 0,5(u_{2F3} + u_{2F1}) - U_{2(00)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{v1} \\ b_{v2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

Isolando-se os coeficientes $U_{i(00)}$ presentes na Equação (3.76), pode-se encontrar a relação entre os mesmos e os incrementos de deslocamentos médios nas faces como

$$\begin{Bmatrix} U_{1(00)} \\ U_{2(00)} \end{Bmatrix} = \Phi^{-1} \Theta \begin{Bmatrix} u_{1F2} - u_{1F4} \\ u_{1F3} - u_{1F1} \\ u_{1F2} + u_{1F4} \\ u_{1F3} + u_{1F1} \\ u_{2F2} - u_{2F4} \\ u_{2F3} - u_{2F1} \\ u_{2F2} + u_{2F4} \\ u_{2F3} + u_{2F1} \end{Bmatrix} + \Phi^{-1} \Omega \quad (3.77)$$

sendo

$$\Phi = \begin{bmatrix} D_{13} + D_{14} & D_{17} + D_{18} \\ D_{23} + D_{24} & D_{27} + D_{28} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\Theta = \frac{1}{2} {}^t\mathbf{D} \quad (3.79)$$

$$\Omega = \begin{Bmatrix} b_{v1} \\ b_{v2} \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

onde D_{ij} , são elementos da matriz ${}^t\mathbf{D}$.

De posse das Equações apresentadas em (3.59) pode-se obter a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Theta \mathbf{M} \begin{Bmatrix} u_{1F1} \\ u_{2F1} \\ u_{1F2} \\ u_{2F2} \\ u_{1F3} \\ u_{2F3} \\ u_{1F4} \\ u_{2F4} \end{Bmatrix} - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Omega \quad (3.81)$$

onde as matrizes \mathbf{P} , \mathbf{M} e \mathbf{L} encontram-se no Apêndice A.

Substituindo-se a Equação (3.81) em (3.51), tem-se a seguinte relação envolvendo incrementos de deslocamentos e de tensões médias nas faces do subvolum: e

$$\bar{\mathbf{T}} = (\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B})(\mathbf{P} - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Theta \mathbf{M}) \mathbf{u}_F - (\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) \mathbf{L} \Phi^{-1} \Omega \quad (3.82)$$

onde

$$\mathbf{u}_F = \begin{Bmatrix} u_{1F1} \\ u_{2F1} \\ u_{1F2} \\ u_{2F2} \\ u_{1F3} \\ u_{2F3} \\ u_{1F4} \\ u_{2F4} \end{Bmatrix} \quad (3.83)$$

Observa-se aqui que a utilização da Equação (3.82) para montagem do sistema de equações do modelo estrutural, impõe que a condição de contorno em tensões seja prescrita em função do segundo vetor tensão de Piola-kirchhoff. Visto que tal tensão não tem significado físico, busca-se uma relação entre o primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff e os deslocamentos médios nas faces dos subvolumes.

Derivando a Equação 2.21 em relação aos coeficientes do polinômio do campo de deslocamento, encontra-se a seguinte relação incremental

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = (\mathcal{F}(\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) + \mathcal{J}\mathcal{S}) \mathbf{U} \quad (3.84)$$

onde as matrizes \mathcal{F} , \mathcal{J} e \mathcal{S} encontram-se no Apêndice A.

Substituindo-se a Equação (3.81) em (3.84), encontra-se a relação entre o primeiro vetor tensão de Piola-Kirchhoff e os deslocamentos médios nas faces dos subvolumes

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{K} \mathbf{u}_F - \mathbf{f}_v \quad (3.85)$$

onde \mathbf{K} e \mathbf{f}_v são respectivamente a pseudo matriz de rigidez e o pseudo vetor de forças volumétricas dados por

$$\mathbf{K} = (\mathcal{F}(\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) + \mathcal{J}\mathcal{S}) (\mathbf{P} - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Theta \mathbf{M}) \quad (3.86)$$

$$\mathbf{f}_v = (\mathcal{F}(\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) + \mathcal{J}\mathcal{S}) (\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) \mathbf{L} \Phi^{-1} \Omega \quad (3.87)$$

A relação entre incrementos de deslocamentos médios nas faces \mathbb{U} e de tensões médias \mathbb{T} globais do modelo discretizado é obtida levando-se em conta as contribuições de cada subvolume, expressas através de (3.87), das condições de compatibilidade estática e cinemática interfaciais em termos médios. Tal relação é expressa pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbb{T} = \mathbb{K} \mathbb{U} - \mathbb{F}_v \quad (3.88)$$

onde \mathbb{K} e \mathbb{F}_v representam, respectivamente, a matriz de rigidez global da estrutura e o vetor de pseudo tensões globais.

A montagem da matriz \mathbb{K} e dos vetores \mathbb{T} e \mathbb{F}_v é feita com base nos oito graus de liberdade relacionados às faces da célula ($gl1, gl2, gl3, gl4, gl5, gl6, gl7, gl8$), de acordo com os procedimentos apresentados a seguir.

Matriz de rigidez incremental global:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K}_{gl1,gl1} &= \mathbb{K}_{gl1,gl1} + \mathbf{K}_{1,1} \\
 \mathbb{K}_{gl1,gl2} &= \mathbb{K}_{gl1,gl2} + \mathbf{K}_{1,2} \\
 &\dots \\
 \mathbb{K}_{gl8,gl8} &= \mathbb{K}_{gl8,gl8} + \mathbf{K}_{8,8}
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Vetor de tensões incrementais médias globais:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}_{gl1} &= \mathbb{T}_{gl1} + \bar{\bar{T}}_1^{(1)} \\
 \mathbb{T}_{gl2} &= \mathbb{T}_{gl2} + \bar{\bar{T}}_2^{(1)} \\
 \mathbb{T}_{gl3} &= \mathbb{T}_{gl3} + \bar{\bar{T}}_1^{(2)} \\
 \mathbb{T}_{gl4} &= \mathbb{T}_{gl4} + \bar{\bar{T}}_2^{(2)} \\
 &\dots \\
 \mathbb{T}_{gl8} &= \mathbb{T}_{gl8} + \bar{\bar{T}}_2^{(8)}
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Vetor de pseudo tensões incrementais:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_{vgl1} &= \mathbb{F}_{vgl1} + \mathbf{f}_{v1} \\
 \mathbb{F}_{vgl2} &= \mathbb{F}_{vgl2} + \mathbf{f}_{v2} \\
 &\dots \\
 \mathbb{F}_{vgl8} &= \mathbb{F}_{vgl8} + \mathbf{f}_{v8}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Para as faces que não pertencem ao contorno da estrutura, devido à compatibilidade estática interfacial, segue que

$$\mathbb{T}_{gl} = 0 \tag{3.92}$$

No caso das faces que pertencem ao contorno, têm-se as seguintes equações, a depender das condições de contorno do problema:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{gl} &= \bar{\mathbb{T}}_1^{(b)} \text{ ou } \mathbb{U}_{gl} = \bar{u}_{1b} \\ \mathbb{T}_{gl} &= \bar{\mathbb{T}}_2^{(b)} \text{ ou } \mathbb{U}_{gl} = \bar{u}_{2b} \end{aligned} \quad (3.93)$$

onde $\bar{\mathbb{T}}_i^{(b)}$ são os componentes do segundo vetor tensão de Piola-Kirchhoff e \bar{u}_{i_b} representam os componentes de deslocamentos médios prescritos.

O sistema dado em (3.90) pode ser organizado e resolvido como segue:

$$\begin{Bmatrix} \mathbb{T}_* \\ \mathbb{T}_\diamond \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{**} & \mathbb{K}_{*\diamond} \\ \mathbb{K}_{\diamond*} & \mathbb{K}_{\diamond\diamond} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbb{U}_* \\ \mathbb{U}_\diamond \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbb{F}_{v_*} \\ \mathbb{F}_{v_\diamond} \end{Bmatrix} \quad (3.94)$$

onde os símbolos (*) e (◊) indicam, respectivamente, as tensões e deslocamentos prescritos. Assim sendo, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_* &= \mathbb{K}_{**}^{-1} (\mathbb{T}_* - \mathbb{K}_{*\diamond} \mathbb{U}_\diamond + \mathbb{F}_{v_*}) \\ \mathbb{T}_\diamond &= \mathbb{K}_{\diamond*} \mathbb{U}_* + \mathbb{K}_{\diamond\diamond} \mathbb{U}_\diamond - \mathbb{F}_{v_\diamond} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Calculando-se os deslocamentos médios nas faces, pode-se obter os coeficientes do campo de deslocamento incremental utilizando-se as Equações (3.77) e (3.81).

Os procedimentos do processo da análise incremental estão sistematizados no algoritmo mostrado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Algoritmo incremental da teoria de volumes finitos.

Inicialização

Inicialização dos vetores dos coeficientes e de Piola-Kirchhoff.

$${}^t\mathbf{U}, \mathbf{U}, {}^t\mathbf{T}, \mathbf{T}$$

Processo Incremental

1. Montagem da matriz de rigidez local

$$\mathbf{K} = (\mathcal{F}(\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) + \mathcal{J}\mathcal{S}) (\mathbf{P} - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Theta \mathbf{M})$$

2. Montagem da matriz de rigidez global (*i e j de 1 até 8*)

$$\mathbb{K}_{gli,glj} = \mathbb{K}_{gli,glj} + K_{i,j}$$

3. Resolução do sistema

$$\mathbf{U}_* = \mathbb{K}_{**}^{-1} (\mathbf{T}_* - \mathbb{K}_{*o} \mathbf{U}_o + \mathbb{F}_{v_*})$$

$$\mathbf{T}_o = \mathbb{K}_{o*} \mathbf{U}_* + \mathbb{K}_{oo} \mathbf{U}_o - \mathbb{F}_{v_o}$$

4. Cálculo e atualização das informações relativas a cada subvolume

- 4.1. Atualização do segundo vetor de Piola-Kirchhoff incremental

$$\bar{\mathbf{T}} = (\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) (\mathbf{P} - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Theta \mathbf{M}) \mathbf{u}_F - (\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) \mathbf{L} \Phi^{-1} \Omega$$

- 4.2. Atualização do segundo vetor de Piola-Kirchhoff

$${}^t\mathbf{T} = {}^{t-1}\mathbf{T} + \bar{\mathbf{T}}$$

- 4.3. Atualização dos coeficientes do campo de deslocamento incremental

$$\mathbf{U} = \mathbf{P} - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Theta \mathbf{M} \mathbf{u}_F - \mathbf{L} \Phi^{-1} \Omega$$

- 4.4. Atualização dos coeficientes do campo de deslocamento

$${}^t\mathbf{U} = {}^{t-1}\mathbf{U} + \mathbf{U}$$

- 4.5. Cálculo dos deslocamentos

$${}^t u_i = {}^t U_{i(00)} + \eta {}^t U_{i(10)} + \xi {}^t U_{i(01)} + \frac{1}{2} (3\eta^2 - 1) {}^t U_{i(20)} + \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1) {}^t U_{i(02)}$$

5. Repetição dos procedimentos 1-4 até que o nível de carga seja atingido.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo são realizadas análises numéricas para verificar a potencialidade da formulação geometricamente não linear bidimensional da teoria paramétrica de volumes finitos desenvolvida neste trabalho. Para as análises comparativas com o método dos elementos finitos, desenvolve-se um código computacional empregando-se à correspondente formulação Lagrangeana Total e um algoritmo puramente incremental. Para a geração das malhas dos exemplos estudados, utiliza-se a plataforma computacional MTOOL (Lira et al., 2006).

4.1. Problema da Inclusão

Este exemplo foca o problema clássico de uma inclusão imersa em uma matriz sujeita a um campo de tensões uniforme σ ao longo da direção horizontal. Quando a matriz é infinita, a solução linear elástica exata para o chamado problema de Eshelby (1957) pode ser obtida. Nas análises que se seguem, consideram-se uma inclusão circular com diâmetro $D = 2 \text{ cm}$ e uma matriz quadrada com lado $L = 20 \text{ cm}$ (Figura 4.1).

Devido à dupla simetria do problema, modela-se apenas $\frac{1}{4}$ do domínio. Utilizam-se 65 subvolumes para discretização da inclusão e 311 para a matriz, conforme mostra a Figura 4.2(a). Com base nesta malha, admite-se que a estrutura encontra-se em estado plano de tensão e estudam-se três casos, sendo o primeiro homogêneo, o segundo heterogêneo e o terceiro considera a inclusão sendo um poro. As propriedades elásticas para cada caso são apresentadas na Tabela 4.1.

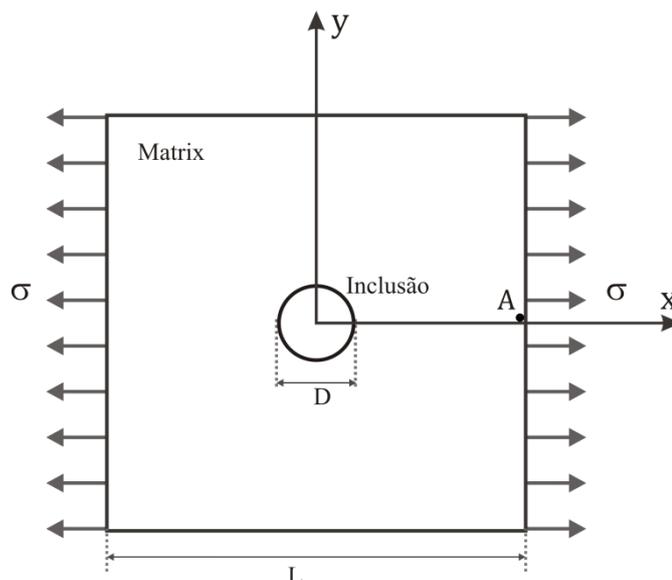


Figura 4.1 – Inclusão circular imersa em uma matriz.

Tabela 4.1 – Propriedades elásticas da matriz e da inclusão.

<i>Caso</i>	<i>Material</i>	<i>E (GPa)</i>	<i>ν</i>
1	Fibra	10	0,25
	Matriz	10	0,25
2	Fibra de vidro	64	0,20
	Matriz Epoxy	4,8	0,34
3	Matriz	20	0,2

No procedimento incremental aplicam-se incrementos de tensão até que o nível de deslocamento ultrapasse 40% do comprimento inicial (40% de $L/2$). Os resultados das análises são avaliados no centro dos subvolumes, em destaque na Figura 4.2(b). Esses pontos estão localizados na interface matriz-inclusão e na matriz a 5 cm de distância do centro da inclusão.

A seguir apresentam-se os gráficos de *tensão de Cauchy versus deslocamento horizontal* no ponto A para os casos estudados. Na Figura 4.3, tem-se a tensão normal σ_{xx} avaliada com a teoria em estudo (TVF), com o MEF e a resposta analítica (Eq.4.1) para o caso 1. Devido à homogeneidade do meio a tensão é constante em todo o domínio. Percebe-se que a solução numérica obtida com a TVF apresenta uma excelente concordância com a solução analítica e com o MEF.

$$\sigma_{xx} = \frac{E(2L^2u_x + 3Lu_x^2 + u_x^3)}{L^3 - 2u_x\nu L^2 - u_x^2\nu L} \quad (4.1)$$

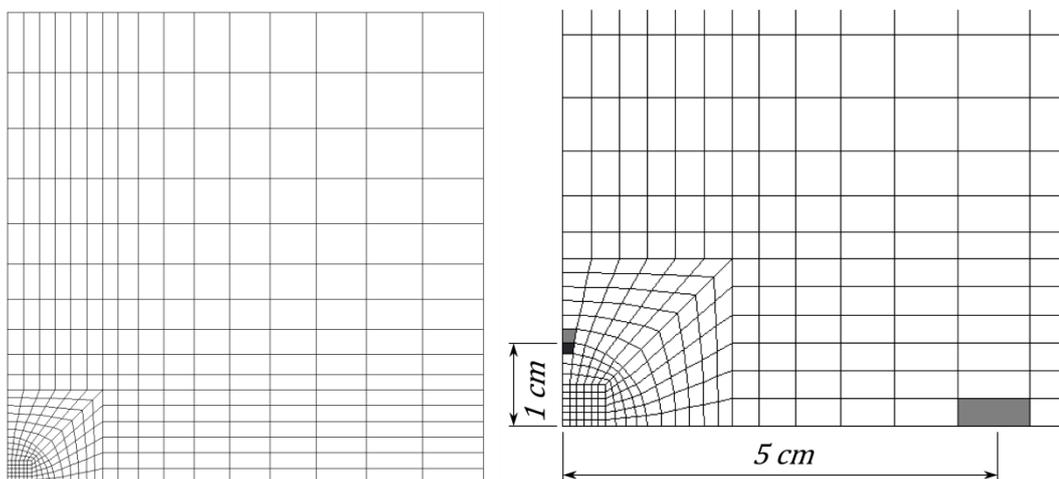


Figura 4.2 – (a) discretização com 376 subvolumes, (b) subvolumes avaliados.

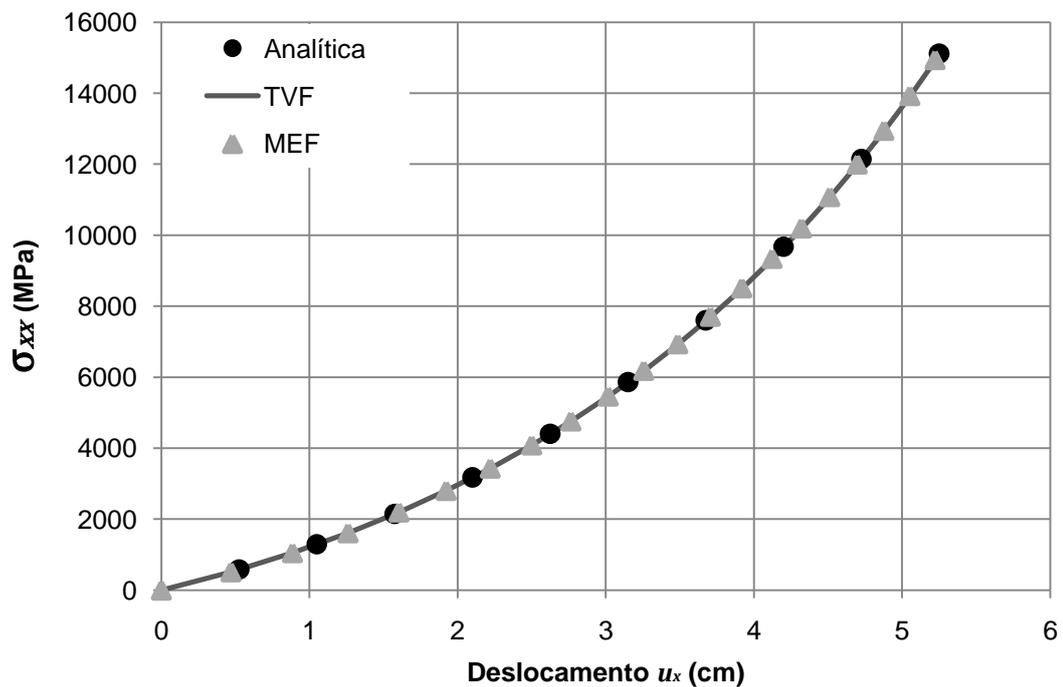


Figura 4.3 – Tensão normal σ_{xx} em função do deslocamento (caso 1).

Nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6, tem-se, respectivamente, a tensão normal σ_{xx} na fibra ($x = 0$ e $y = 0$) e na matriz ($x = 5 \text{ cm}$ e $y = 0$) em função do deslocamento horizontal para o caso 2.

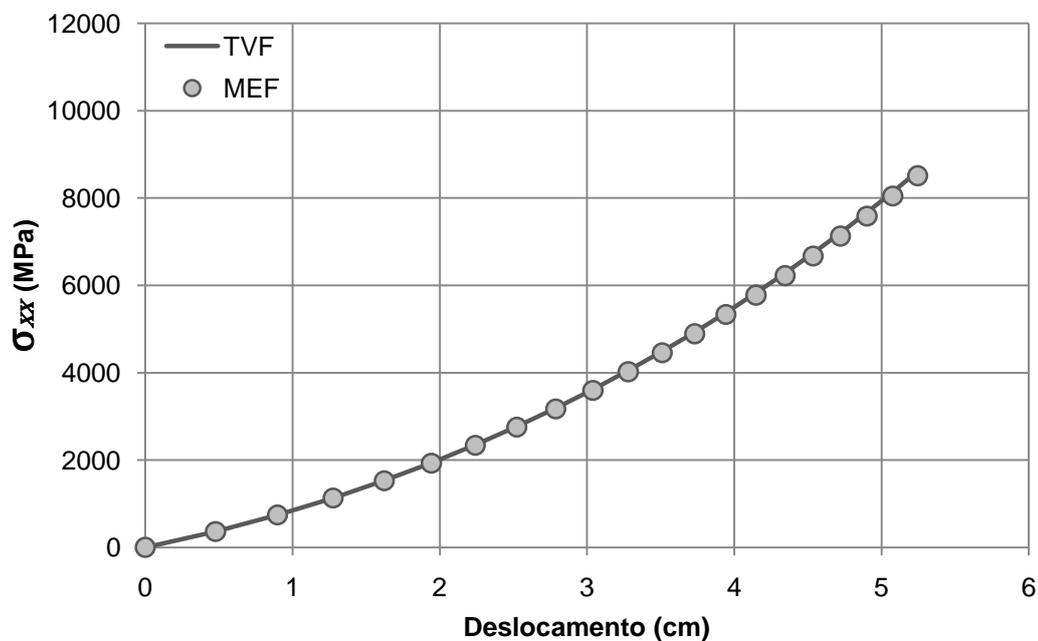


Figura 4.4 – Tensão σ_{xx} na fibra no ponto ($x = 0$ e $y = 0$) em função do deslocamento para o caso 2.

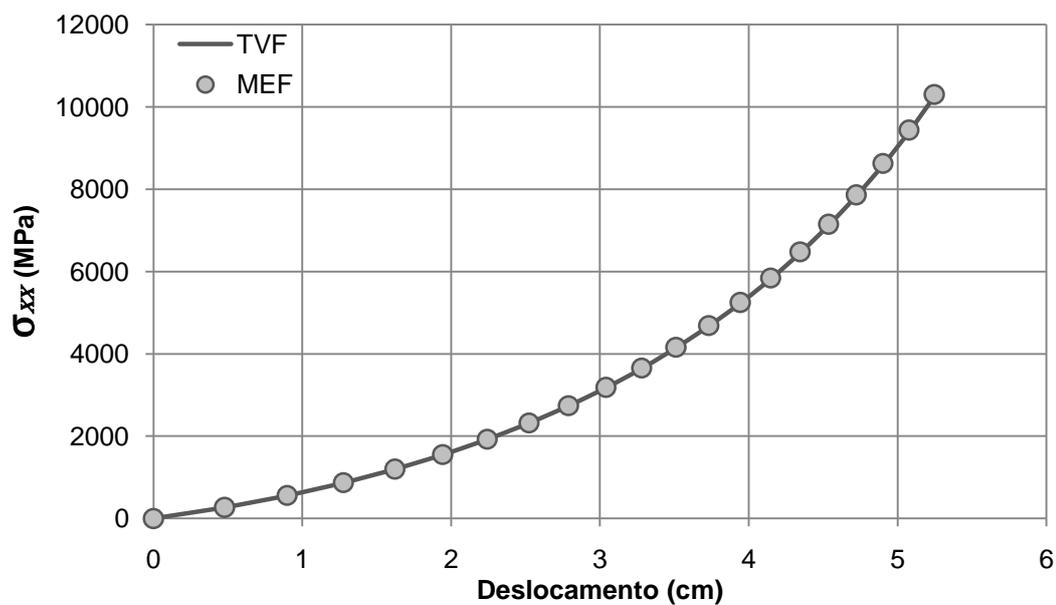


Figura 4.5 – Tensão σ_{xx} na matriz no ponto ($x = 5 \text{ cm}$ e $y = 0$) em função do deslocamento para o caso 2.

Na Figura 4.6, apresenta-se a tensão normal σ_{xx} nos dois subvolumes vizinhos a interface, correspondente à fibra e à matriz, respectivamente.

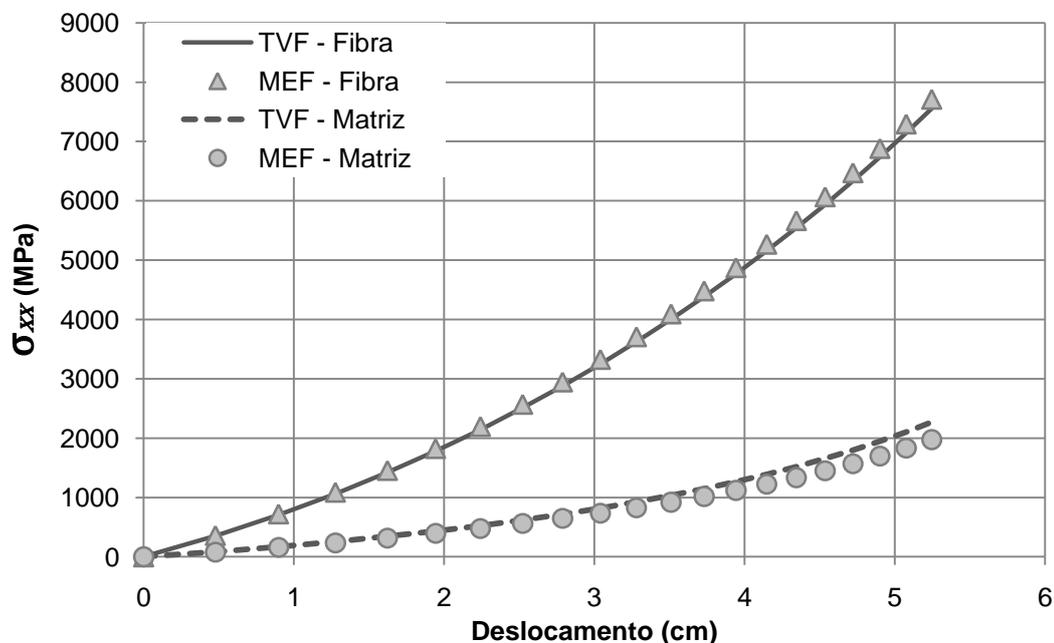


Figura 4.6 – Tensão normal σ_{xx} na interface matriz-fibra em função do deslocamento para o caso 2.

Com o intuito de avaliar a influência da malha na variação de tensão na interface, já que naquela região existe uma grande variação nas tensões, toma-se uma segunda discretização com 300 e 600 subvolumes na inclusão e na matriz, respectivamente, de acordo com o detalhe apresentado na Figura 4.7. A Figura 4.8 apresenta a tensão normal σ_{xx} , sobre os subvolumes destacados na Figura 4.7, em função do deslocamento horizontal no ponto A ($x = 10 \text{ cm}$ e $y = 0$) para as duas malhas utilizando a TVF. Na Figura 4.8 nota-se uma diferença entre as curvas de tensão na matriz para a malha 1 e 2. Justifica-se tal diferença pelo fato dos centros do subvolume avaliados estarem em posições diferente para cada malha e pela existência de uma grande variação nas tensões naquela região.

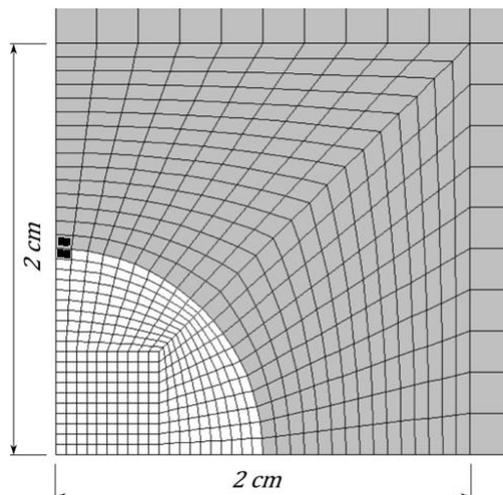


Figura 4.7 – Detalhe da discretização na região da interface da inclusão com a matriz.

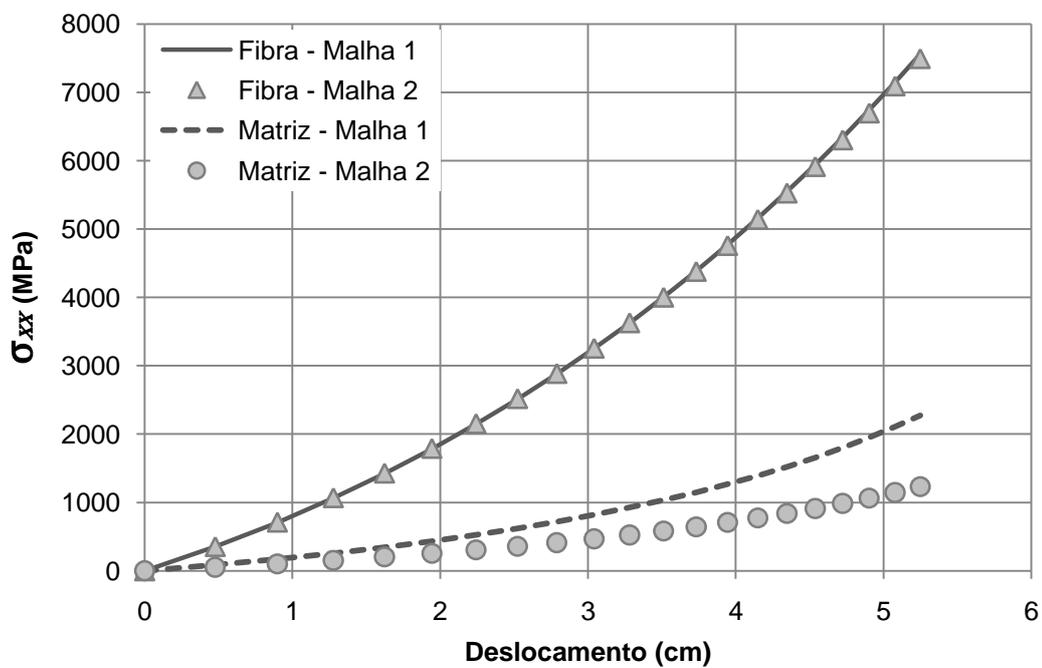


Figura 4.8 – Tensão normal σ_{xx} na interface em função do deslocamento para as duas malhas em estudo para o caso 2.

Nas Figuras 4.9, 4.10 e 4.11, tem-se, respectivamente, o campo de tensão σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} na região próxima a inclusão para o caso 2 e para uma tensão $\sigma = 9253 \text{ MPa}$, aplicada em 200 passos.

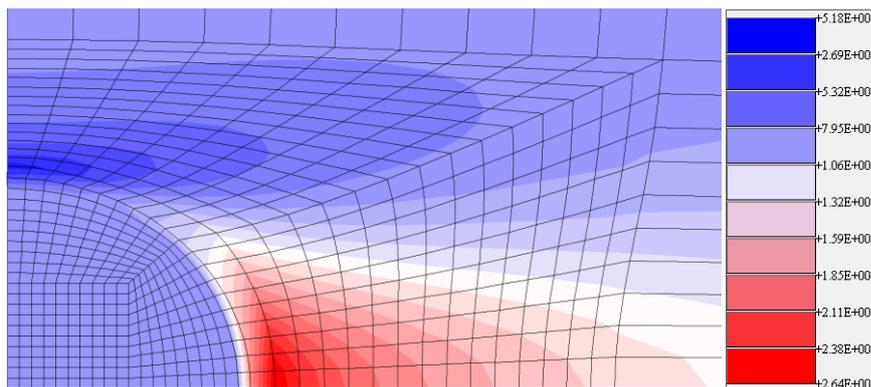


Figura 4.9 – Tensão normal σ_{xx} para o caso 2.

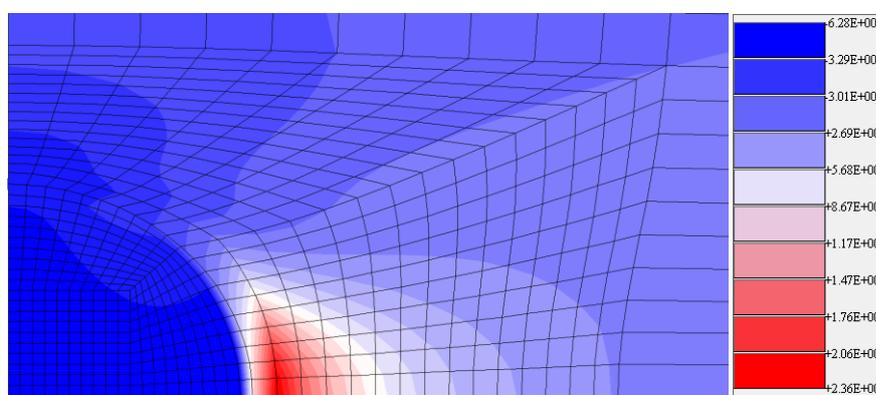


Figura 4.10 – Tensão normal σ_{yy} para o caso 2.

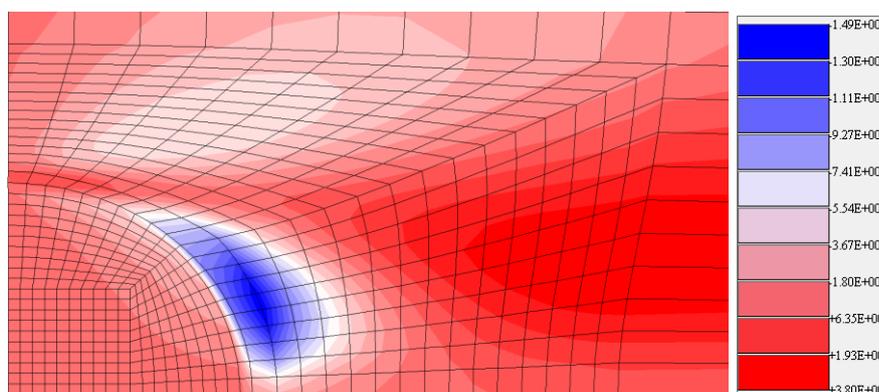


Figura 4.11 – Tensão cisalhante σ_{xy} para o caso 2.

A seguir apresentam-se os resultados para o caso 3. A malha da inclusão é eliminada para assim simular um poro e cria-se uma faixa de subvolumes com espessura de 0,05 cm nas proximidades do contorno, para obter resultados mais precisos nessa região Figura 4.12.

Nas Figuras 4.13 e 4.14 têm-se, respectivamente, a tensão normal no subvoluma próximo à interface, mostrado na Figura 4.12, e a tensão no subvoluma da matriz localizado a uma distância de 5 cm do centro do poro (ver Figura 4.2(a)). Observa-se que com o emprego da TVF, pode-se obter níveis de tensão bastante elevados e deslocamento da ordem de 52% do comprimento inicial, enquanto que com a utilização do MEF chega-se em 42%.

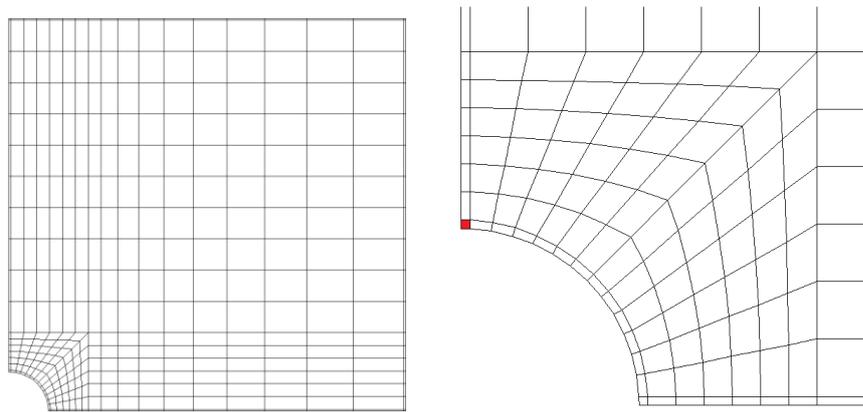


Figura 4.12 – Discretização utilizada no caso 3.

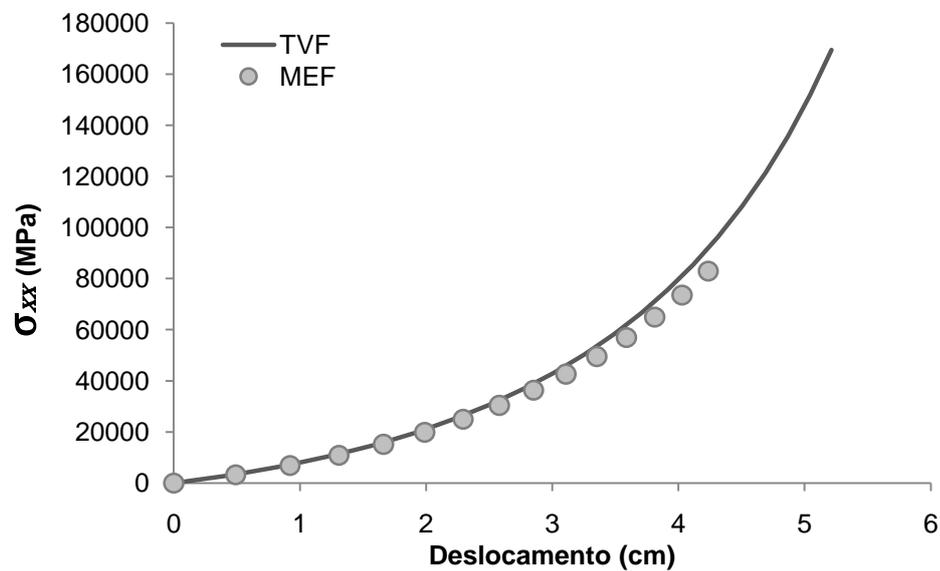


Figura 4.13 – Tensão normal σ_{xx} no subvoluma próximo à interface para o caso 3.

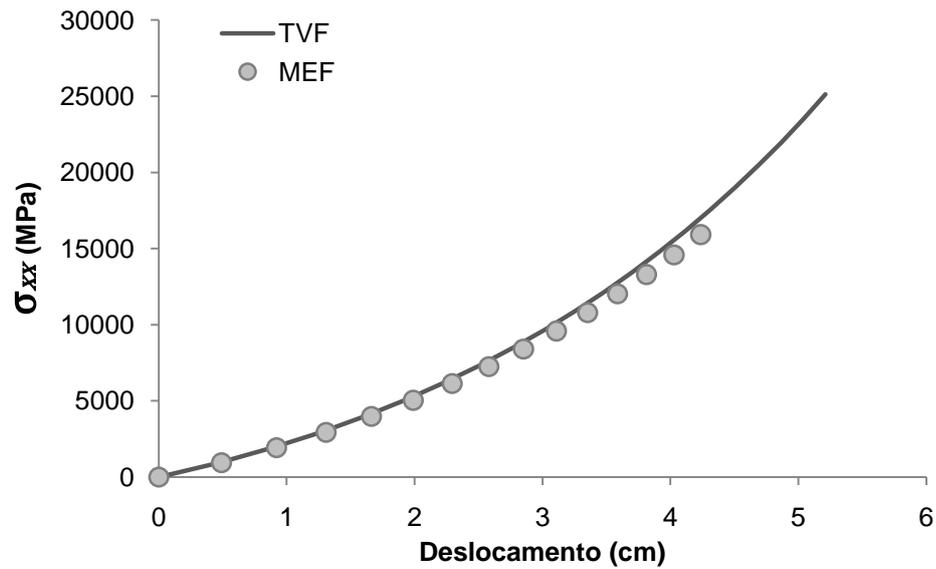


Figura 4.14 – Tensão normal σ_{xx} no subvolume da matriz em ($x = 5 \text{ cm}$) para o caso 3.

4.2. Estudo do Fator de Concentração de Tensão em um Furo Circular no Pannel de Material com Gradação Funcional

Este exemplo apresenta um estudo do fator de concentração de tensão em um furo circular de um pannel heterogêneo constituído por um material com gradação funcional, submetido a uma tensão uniaxial σ_0 . O pannel tem um furo circular de diâmetro $D = 2 \text{ cm}$ na região central e lado $L = 20 \text{ cm}$ (Figura 4.15).

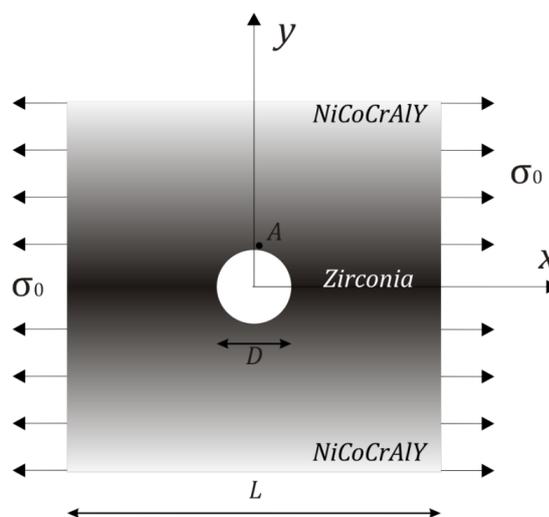


Figura 4.15 – Pannel de FGM submetido a uma tensão uniaxial.

O material é assumido linear elástico e isotrópico e a gradação é incorporada através do modelo da regra da mistura com uma variação espacial na direção y dada pela expressão

$$E_{fgm}(y) = \left[1 - \left(\frac{y}{10} \right)^p \right] E_c + \left(\frac{y}{10} \right)^p E_m \quad (4.2)$$

onde E_c e E_m representam os módulos de elasticidade das fases cerâmica e metal, respectivamente, e p indica um parâmetro da gradação. As propriedades elásticas para as fases cerâmica (Zircônia) e metal (NiCoCrAlY) estão na Tabela 4.2, sendo estas tomadas no centro de cada subvolume e admitidas como constantes no mesmo.

Tabela 4.2 – Propriedades elásticas dos materiais.

<i>Material</i>	<i>E(GPa)</i>	<i>ν</i>
Cerâmica (Zircônia)	70	0,24
Metal (NiCoCrAlY)	170	0,24

O fator de concentração de tensão (FCT) é definido como a razão entre a tensão σ_{xx} avaliada no ponto A e a tensão aplicada σ_0 . Segundo Anderson (1994), pode-se avaliar o FCT, para problemas lineares de materiais homogêneos com furos elípticos, tendo $L \gg a$ e $L \gg b$ (Figura 4.16), através da expressão

$$\sigma_A = \sigma_0 \left[1 + \left(\frac{2a}{b} \right) \right] \quad (4.3)$$

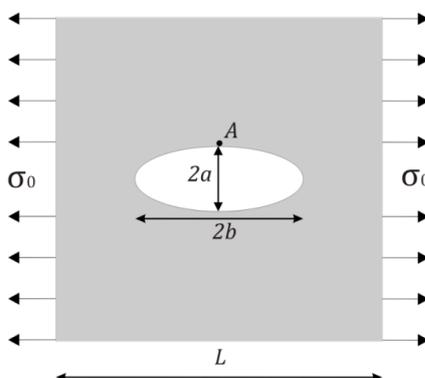


Figura 4.16 – Painel de com furo elíptico submetido a uma tensão uniaxial.

Devido à dupla simetria do sistema estrutural, modela-se apenas $\frac{1}{4}$ do painel, utilizando-se para tal um total de 373 subvolumes em sua discretização, conforme Figura 4.17. Para esta malha tomou-se o FCT no ponto A ($x = 0,025 \text{ m}; y = 1,025 \text{ m}$), localizado no centro do subvolume em destaque.

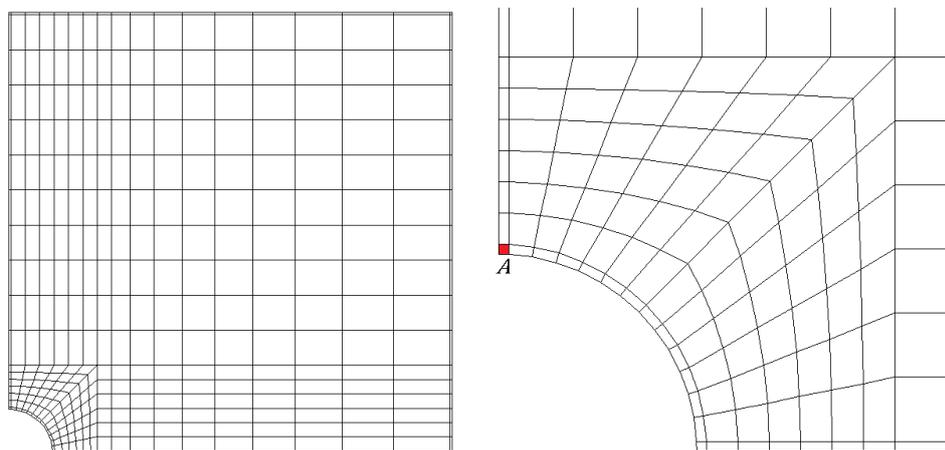


Figura 4.17 – Discretização do painel e subvolume em destaque.

Santos Júnior et al. (2009) realizaram um estudo do FCT em um painel com furo circular constituído por material elástico linear, isotrópico e com gradação funcional. Para modelagem numérica foi utilizado um elemento finito gradado e modelos micromecânicos como Auto-Consistente e Mori-Tanaka. Santos Júnior et al. (2009) mostraram que o expoente p da lei de gradação tem uma grande influência no FCT, existindo um valor particular que torna o FCT mínimo. Com base nos estudos realizados por Santos Júnior et al. (2009), adota-se $p = 0$ e $p = 0,5$ na função de gradação E_{fgm} e estuda-se o FCT para vários níveis de tensão.

As Figuras 4.18, 4.19 e 4.20 apresentam respectivamente a tensão σ_{xx} e a variação do FCT no ponto A, obtidas com a presente teoria (FVT), com o método dos elementos finitos (MEF) e calculadas através da Equação (4.3), para o caso $p = 0$. Usando-se esta última equação, duas situações foram consideradas: a primeira atualizando-se apenas a tensão aplicada σ_0 (MFLE-T) e a outra atualizando-se simultaneamente a tensão e a geometria (MFLE-TG).

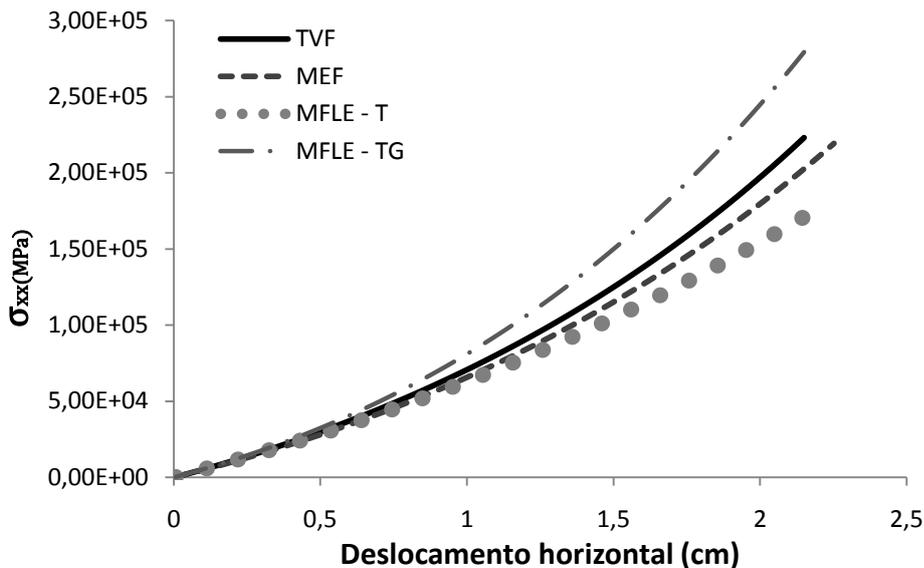


Figura 4.18 – Variação da tensão σ_{xx} com o deslocamento horizontal em ($x = 10\text{ m}; y = 0$) para $p = 0$.

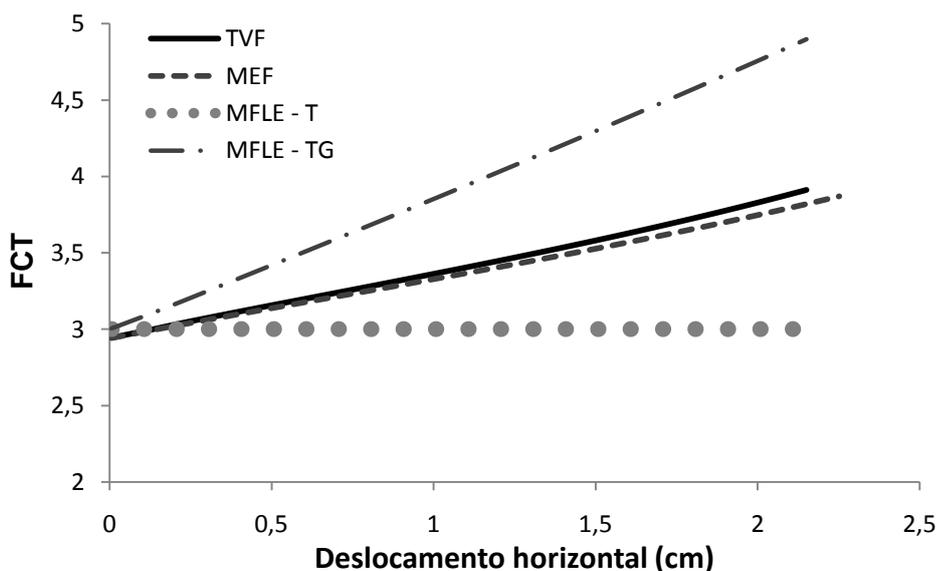


Figura 4.19 – Variação do fator de concentração de tensão (FCT) com o deslocamento horizontal para $p = 0$.

Observa-se que a utilização da Equação (4.3), para um material homogêneo ($p = 0$), conduz a valores de FCT bastante diferentes daqueles encontrados com emprego da TVF e do MEF para o caso de grandes deslocamentos.

As Figuras 4.20 e 4.21 apresentam, respectivamente, a tensão σ_{xx} e a variação do FCT no ponto A para $p = 0,5$, obtidas através da TVF e MEF.

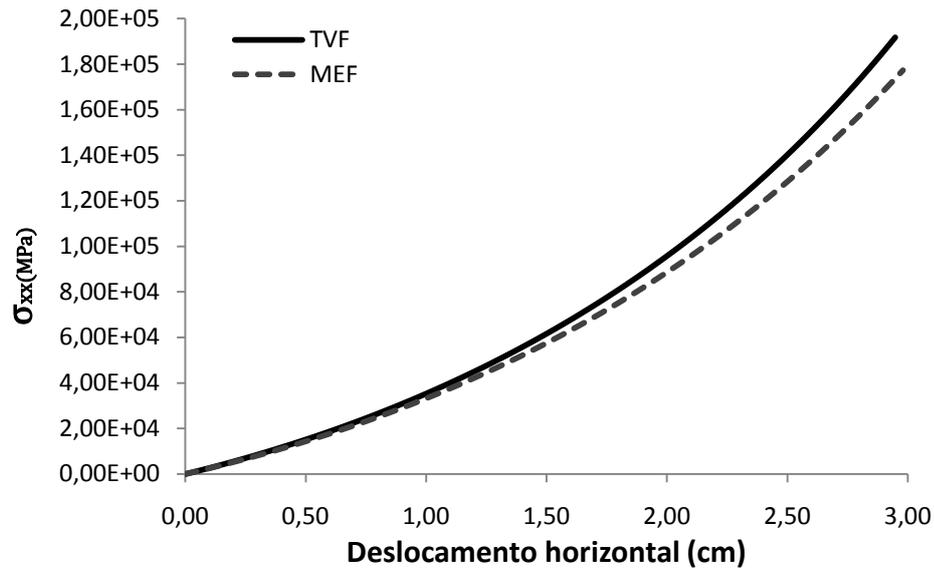


Figura 4.20 – Variação da tensão σ_{xx} com o deslocamento horizontal em ($x = 10$; $y = 0$) para $p = 0,5$.

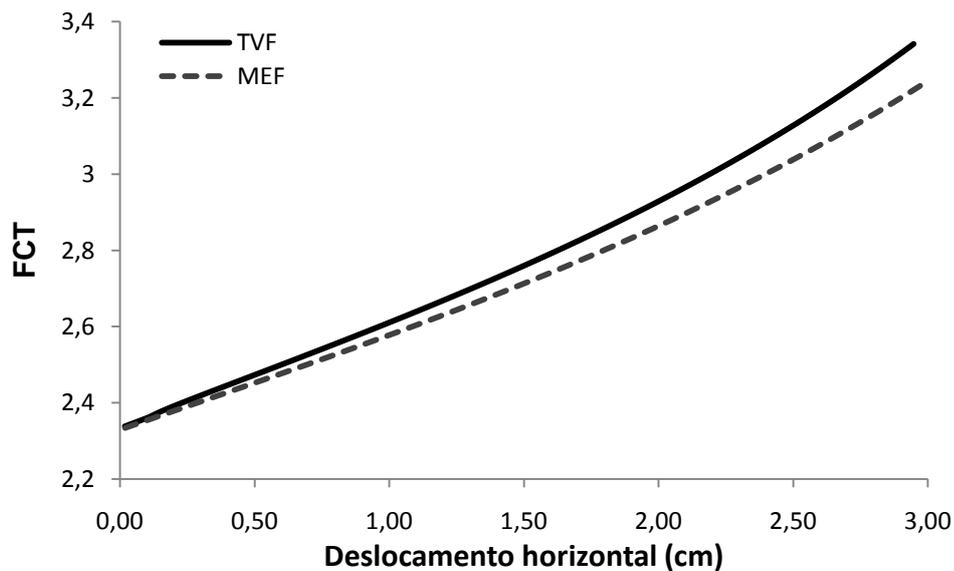


Figura 4.21 – Variação do fator de concentração de tensão (FCT) com o deslocamento horizontal para $p = 0,5$.

A Figura 4.22 mostra a variação do FCT em função do expoente p para três níveis de tensão: $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_0 \approx 26800 \text{ MPa}$ e $\sigma_0 \approx 57030 \text{ MPa}$. Ressalta-se que para $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$, o sistema está em regime de pequenos deslocamentos, enquanto que para os valores $\sigma_0 \approx 26800 \text{ MPa}$ e $\sigma_0 \approx 57030 \text{ MPa}$, a estrutura apresenta deslocamentos longitudinais da ordem de 35% e 60% do comprimento

inicial, respectivamente. Observa-se que os resultados apresentados estão em boa concordância com aqueles encontrados por Santos Júnior et al. (2009) para o caso de pequenos deslocamentos. Salienta-se também que os resultados mostram a existência de um expoente p que minimiza o fator de concentração de tensão. Nos casos analisados, o valor ótimo de p encontra-se no intervalo $0,5 \leq p \leq 0,7$.

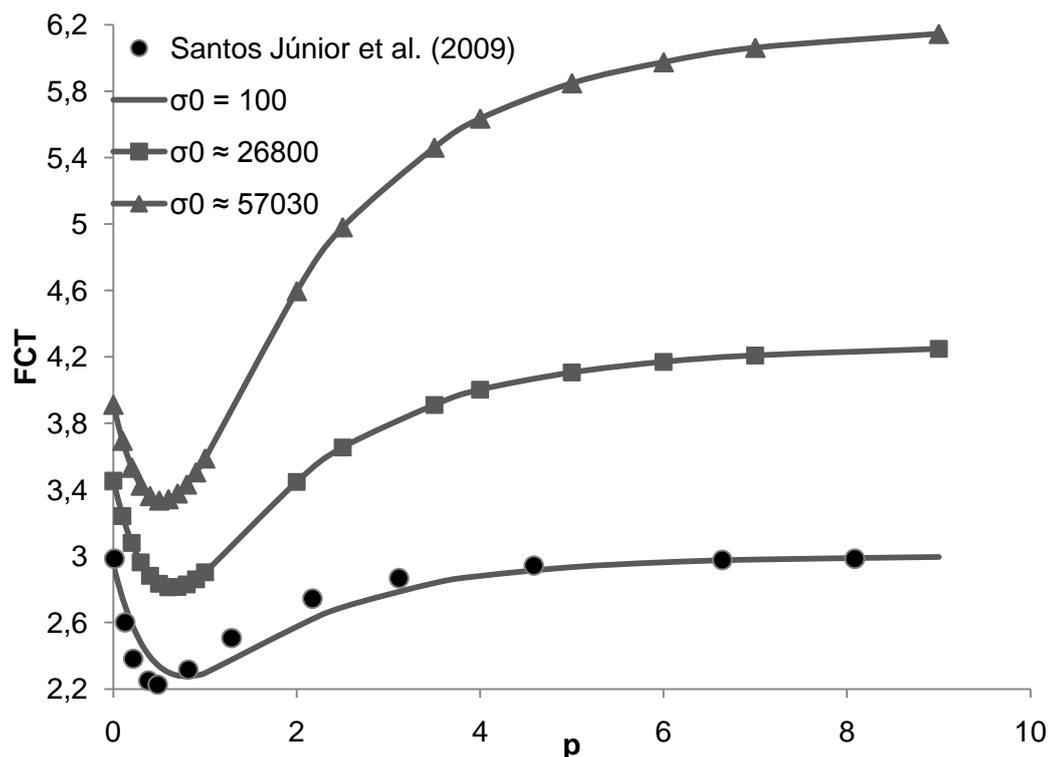


Figura 4.22 – Variação do fator de concentração de tensão (FCT) com o expoente p .

4.3. Viga em Balanço Sujeita a Grandes Deslocamentos

A Figura 4.23 mostra uma viga em balanço de comprimento $L = 10$, com seção transversal quadrada de lado $L/10$, submetida a uma carga parabólica vertical q , aplicada na extremidade livre e com resultante P . Admite-se que o material é elástico linear com módulo de elasticidade $E = 210000$ e coeficiente de Poisson nulo. Utiliza-se para discretização do modelo numérico uma malha com 140 subvolumes (14×10) de mesmo tamanho e distribuídos em 10 camadas verticais.

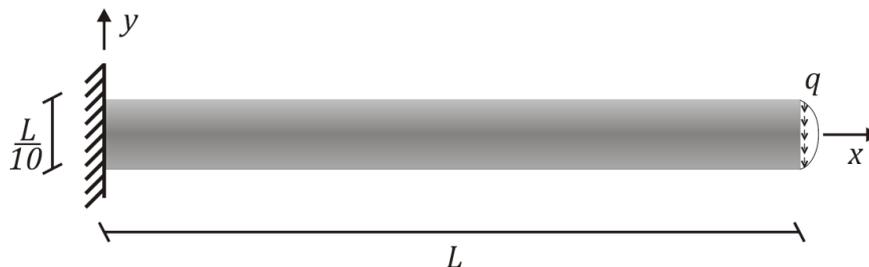


Figura 4.23 – Viga em balanço.

As Figuras 4.24 e 4.25 mostram, respectivamente, a variação do deslocamento vertical e horizontal em função da carga aplicada. Ao todo foram 287 passos com um incremento de força $P = 0,1$ e carga total definida por $\frac{PL^2}{EI} = 16,4$. Os deslocamentos vertical e horizontal finais do ponto médio da seção transversal extrema livre foram $u_2 = -0,878$ e $u_1 = -0,67$, respectivamente.

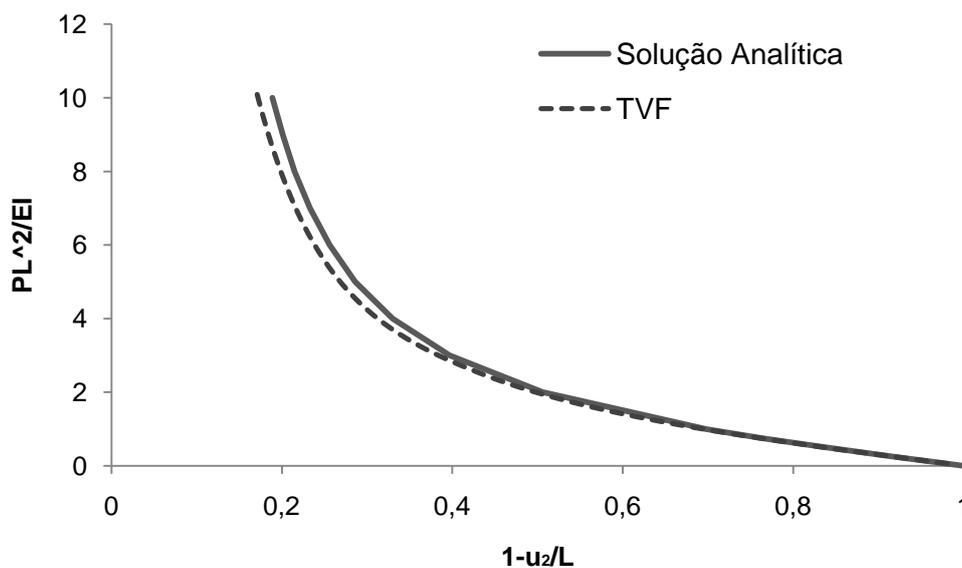


Figura 4.24 – Deslocamento vertical em função da carga normalizada.

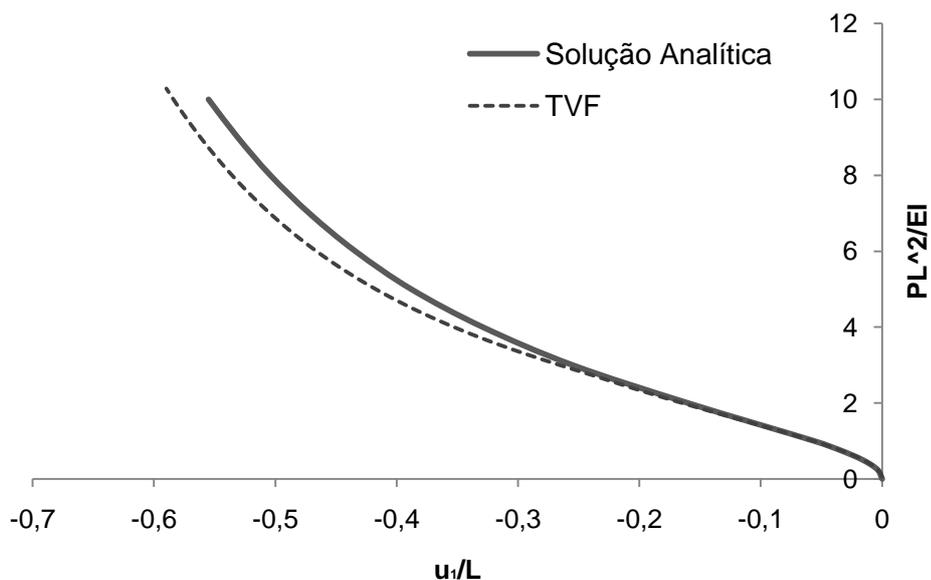


Figura 4.25 – Deslocamento horizontal em função da carga normalizada.

Vale ressaltar que em um estudo da influência do incremento de carga ΔP sobre as respostas, mudanças inesperadas na trajetória carga *versus* deslocamento são observadas para valores particulares de ΔP . As Figuras 4.26 e 4.27 apresentam tais desvios de comportamento para $\Delta P = 0,1$. A explicação para justificar a causa geradora destes desvios exige um estudo mais aprofundado das bases da formulação numérica não linear utilizada.

A Figura 4.28 exhibe a configuração deformada da viga para uma carga normalizada de $\frac{PL^2}{3EI} = 1,2$ e um deslocamento vertical $\frac{u_2}{L} = -0,44$. Tal configuração é gerada a partir dos deslocamentos dos vértices dos subvolumes, sendo estes calculados através da interpolação bilinear dos deslocamentos médios das faces.

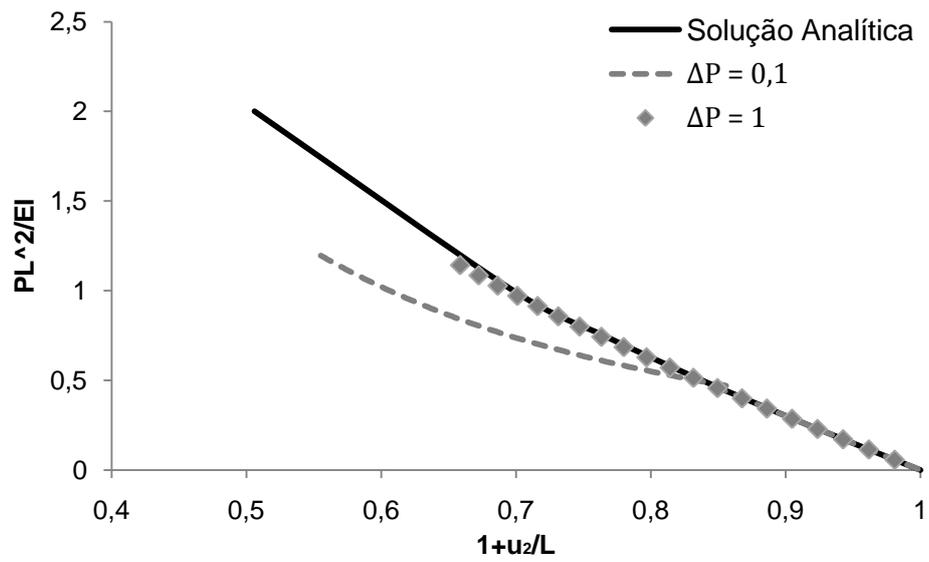


Figura 4.26 – Influência do incremento de tensão no deslocamento vertical.

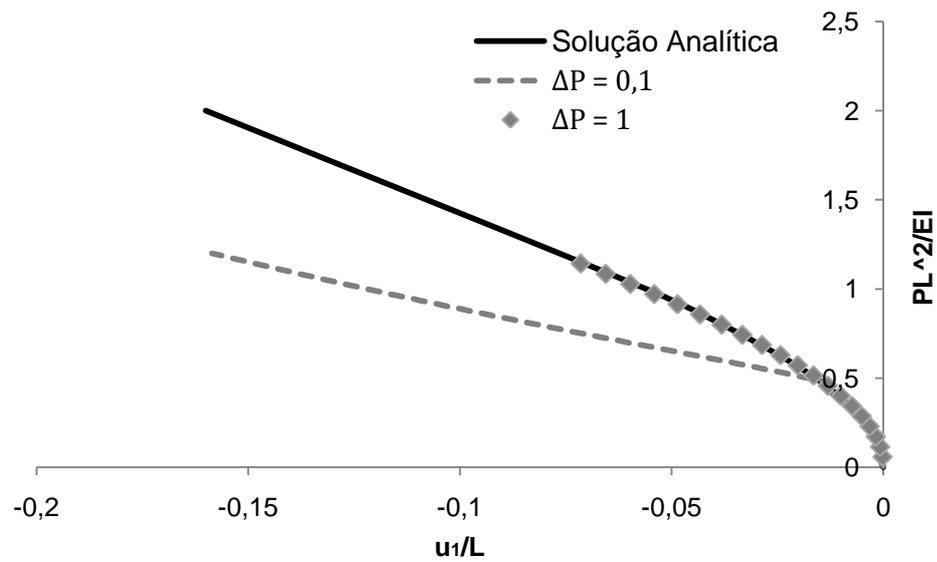


Figura 4.27 – Influência do incremento de tensão no deslocamento horizontal.

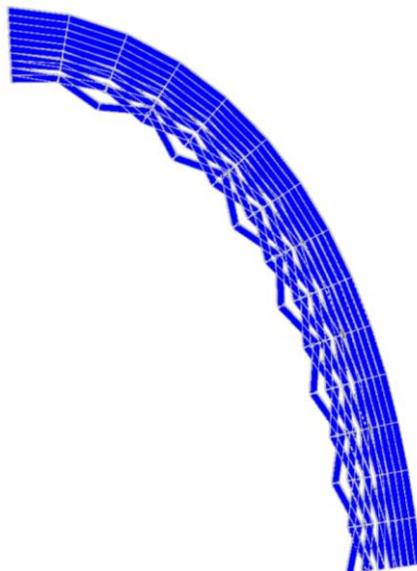


Figura 4.28 – Configuração deformada da viga para uma carga $\frac{PL^2}{3EI} = 1,2$ e deslocamento vertical $\frac{u_2}{L} = -0,44$.

4.4. Arco Engastado Sujeito a Grandes Deslocamentos

Neste exemplo, estuda-se o comportamento pré-flambagem do arco circular com raio interno $R = 100$ e seção transversal retangular com largura $e = 1$ e altura $c = 10$, conforme indicado na Figura 4.29. O material considerado é isotrópico com módulo de elasticidade $E = 12000$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

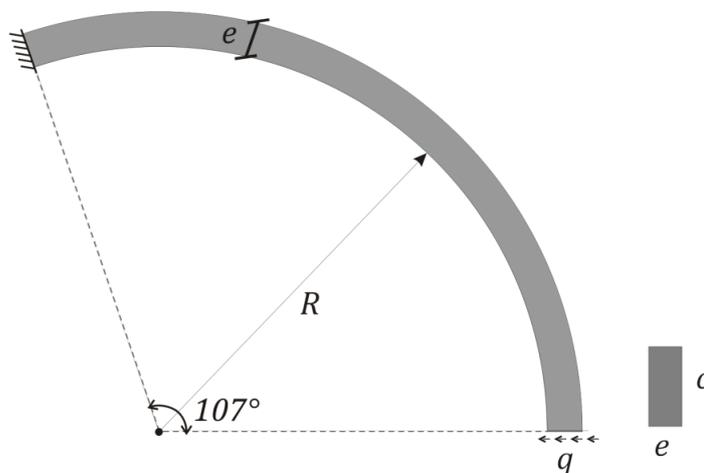


Figura 4.29 – Arco engastado submetido a uma carga horizontal no extremo livre.

Para modelagem do arco utilizam-se 246 subvolumes, subdivididos em 6 camadas na direção radial e 41 na direção circunferencial.

Conforme mostrado na Figura 4.30, os resultados obtidos com a TVF para os deslocamentos horizontais no ponto médio da seção transversal livre são aproximados daqueles obtidos por Jiang e Chernuka (1994), os quais empregaram elementos finitos de casca com abordagem co-rotacional. A Figura 4.30 também apresenta os resultados encontrados por Duarte Filho (2002) e correspondentes a um modelo de elementos finitos hexaédricos de oito nós com um ponto de integração.

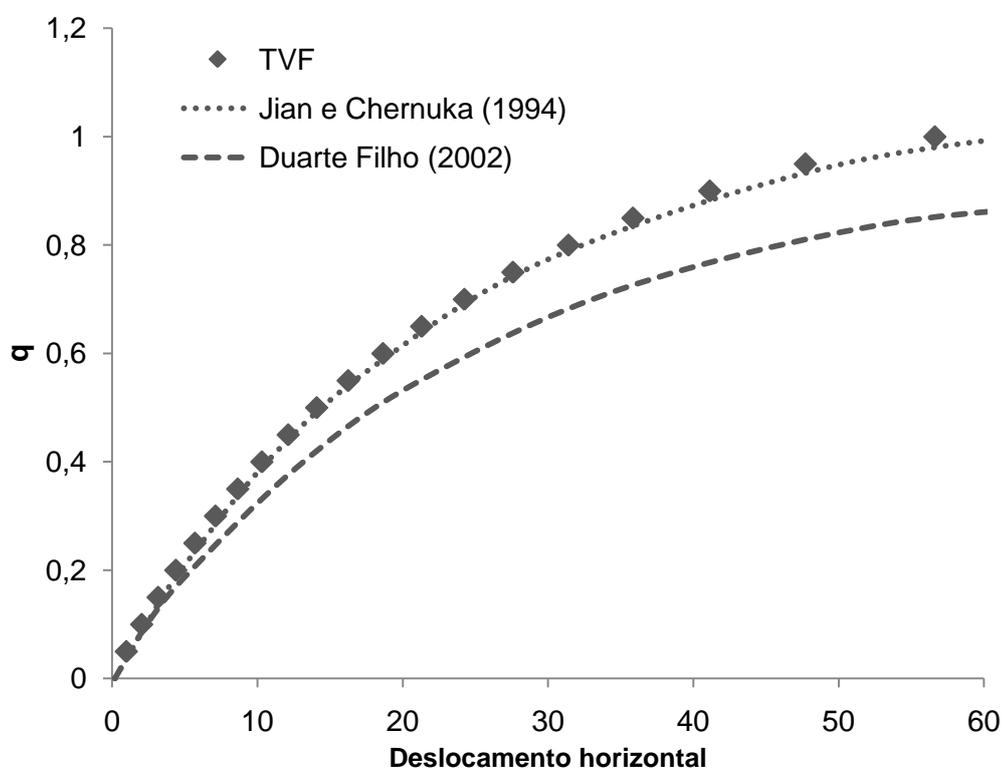


Figura 4.30 – Variação do deslocamento em função da carga aplicada.

Salienta-se que neste caso também são observados desvios inesperados na trajetória carga *versus* deslocamento para valores particulares do incremento de carga.

Conclusões

Neste trabalho apresentou-se uma formulação geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos para análise de estruturas e materiais com comportamento elástico linear e com microestrutura heterogênea. O modelo tem como base a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos e uma descrição cinemática do tipo Lagrangeano Total que utiliza os tensores de Green-Lagrange e de Piola-Kirchhoff.

Diversos exemplos numéricos foram apresentados, envolvendo casos de materiais com microestrutura homogênea e heterogênea. Os problemas analisados incluem matrizes de material homogêneo e com gradação funcional contendo inclusões ou poros circulares. Vigas de eixos reto e curvo de material homogêneo também foram estudadas. Os resultados dos exemplos foram comparados com soluções obtidas analiticamente e com o método dos elementos finitos.

Em todos os casos analisados, pode-se constatar uma satisfatória concordância entre os resultados fornecidos pela presente formulação e aqueles encontrados pelo código baseado no método dos elementos finitos. O mesmo pode ser concluído para os exemplos cujos resultados foram confrontados com soluções analíticas.

É importante destacar que em todos os problemas correspondentes a painéis predominantemente tracionados, a formulação permitiu a descrição do comportamento até deformações superiores a 60% da geometria inicial. No entanto, para casos envolvendo níveis de tensões de compressão consideráveis foram observados inesperados efeitos locais que se manifestam sob a forma de interpenetração de subvolumes adjacentes, motivando desvios nas trajetórias de equilíbrio. Tais efeitos, por implicar em uma limitação da formulação apresentada, merecem ser estudados de forma mais detalhada. Admite-se que eles, inclusive, podem estar relacionados com o tratamento de variáveis através de seus valores médios, o qual é inerente à teoria de volumes finitos. Vale ressaltar também que os referidos efeitos locais estão relacionados

com o valor do incremento de carga, o que foi claramente constatado nos casos das vigas analisadas.

Considerando-se que o presente estudo trata de um primeiro modelo geometricamente não linear da formulação paramétrica da teoria de volumes finitos, pode-se concluir que os resultados são satisfatórios. Desta forma, sugere-se fortemente que os estudos sobre a formulação proposta sejam continuados e que o modelo possa ser aprimorado, permitindo a análise de problemas envolvendo grandes deslocamentos sem as restrições acima mencionadas. A incorporação de um procedimento incremental-iterativo também é recomendável.

Referências

- Anderson, T. L. (1994) *Fracture Mechanics: fundamentals and applications*. CRC Press.
- Bansal, Y.; Pindera, M-J. (2003) Efficient reformulation of the thermoelastic higher order theory for FGMs. *J. Thermal Stresses* 26(11/12), 1055-1092.
- Barbero, E. J. (2007) *Finite Element Analysis of Composite Materials*. CCR Press Taylor & Francis LLC.
- Belytschko, T.; Liu W. K.; Moran, B. (2000) *Nonlinear Finite elements for Continua and Structures*. J. Wiley.
- Cavalcante, M. A. A. (2006) *Modelagem do Comportamento Termo-Mecânico Transiente de Estruturas de Materiais Compósitos pela Teoria de Volumes Finitos*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – UFAL.
- Cavalcante, M. A. A.; Marques, S. P. C.; Pindera, M. J. (2007a) Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials—Part I: Analysis. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 74, 935-945.
- Cavalcante, M. A. A.; Marques, S. P. C.; Pindera, M. J. (2007b) Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials—Part II: Numerical Results. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 74, 946-957.
- Cavalcante, M. A. A.; Marques, S. P. C.; Pindera, M.-J. (2008) Computational aspects of the parametric finite-volume theory for functionally graded materials. *Computational Materials Science*, v. 44, p. 422 - 438.
- Cavalcante, M. A. A.; Marques, S. P. C.; Pindera, M. J. (2009) Transient Thermomechanical Analysis of a Layered Cylinder by the Parametric Finite-Volume Theory. Submitted to *Journal of Thermal Stresses*.

Duarte Filho, A. (2002) Análise Estática e Dinâmica, Linear e Não-Linear Geométrica, Através de Elementos Hexaédricos de Oito nós com um Ponto de Integração. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Eshelby, J. D. (1957) The determination of the Elastic Field of an ellipsoidal Inclusion and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society*, v.A241, p. 376-396.

Jiang, L.; Chernuka, M. W. (1994) A Simple Four-Node Corotational Shell Element for Arbitrarily Large Rotation, *Computers & Structures*, vol. 53, pp. 1123-1132.

Lira, W. W. M.; Arruda, M.; Miranda, A. C. O.; Martha, L. F. C. R. (2006) Mtool – Two Dimensional Mesh Tool. Software sem registro ou patente.

Santos Júnior, A.; Marques, S. P. C; Cavalcante, M. A. A. (2009) A Study on Stress Concentration Around Circular Hole in Panel of Functionally Graded. XXX CILAMCE - Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering.

Sutradar A. S.; Paulino, G. H.; Gray, L. J. (2008) *Symmetric Galerkin Boundary Element Method*. Springer.

Apêndice A

Matrizes para formulação não linear geométrica da teoria de volumes finitos

As matrizes apresentadas a seguir fazem parte da formulação não linear da teoria de volumes finitos para o cálculo da matriz de rigidez local de subvolumes bidimensionais. Abaixo $\mathbf{0}$ representa uma matriz nula.

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbb{E}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_l \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbb{E}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_g \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\mathbb{J}} = \begin{bmatrix} \bar{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{J} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\xi=-1} \\ \mathbf{G}_{\eta=+1} \\ \mathbf{G}_{\xi=+1} \\ \mathbf{G}_{\eta=-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$${}^t\mathbb{H} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{H}_{\xi=-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t\mathbf{H}_{\eta=+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t\mathbf{H}_{\xi=+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t\mathbf{H}_{\eta=-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathbf{M} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} {}^tT_1^{(1)} & {}^tT_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tT_1^{(1)} & {}^tT_2^{(1)} \\ {}^tT_1^{(2)} & {}^tT_2^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tT_1^{(2)} & {}^tT_2^{(2)} \\ {}^tT_1^{(3)} & {}^tT_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tT_1^{(3)} & {}^tT_2^{(3)} \\ {}^tT_1^{(4)} & {}^tT_2^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tT_1^{(4)} & {}^tT_2^{(4)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Apêndice B

Dedução das matrizes que compõem a equação de equilíbrio para um subvolume

Neste apêndice encontra-se a dedução da Equação (3.73), objetivando-se isolar os coeficientes do campo de deslocamento incremental a serem determinados.

$$\sum_{k=1}^4 \left[(I + {}^tV) \begin{Bmatrix} \bar{T}_1^{(k)} \\ \bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} + V \begin{Bmatrix} \bar{T}_1^{(k)} \\ \bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} + V \begin{Bmatrix} {}^t\bar{T}_1^{(k)} \\ {}^t\bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} \right] A^{(k)} + \begin{Bmatrix} b_{v1} \\ b_{v2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Na dedução que segue cada parcela da somatória é desenvolvida separadamente de acordo com as seguintes equações:

$$\sum_{k=1}^4 \left[(I + {}^tV) \begin{Bmatrix} \bar{T}_1^{(k)} \\ \bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} A^{(k)} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{k=1}^4 \left[V \begin{Bmatrix} \bar{T}_1^{(k)} \\ \bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} A^{(k)} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{k=1}^4 \left[V \begin{Bmatrix} {}^t\bar{T}_1^{(k)} \\ {}^t\bar{T}_2^{(k)} \end{Bmatrix} A^{(k)} \right] \quad (\text{B.7})$$

A Primeira parcela da somatória, dada pela Equação (B.5), pode ser escrita matricialmente da seguinte forma:

$$(I + {}^tV) \mathbf{A} \begin{pmatrix} \bar{T}_1^{(1)} \\ \bar{T}_2^{(1)} \\ \bar{T}_1^{(2)} \\ \bar{T}_2^{(2)} \\ \bar{T}_1^{(3)} \\ \bar{T}_2^{(3)} \\ \bar{T}_1^{(4)} \\ \bar{T}_2^{(4)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

onde \mathbf{A} é uma matriz com as áreas das faces do subvolume, dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_3 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_3 & 0 & A_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo-se a Equação (3.51) em (B.8), chega-se em:

$${}^t\mathbb{X} \begin{pmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

onde \mathbb{X} é uma matriz dada por:

$${}^t\mathbb{X} = (I + {}^tV) \mathbf{A} (\mathbb{A} + {}^t\mathbb{B}) \quad (\text{B.11})$$

Despreza-se a segunda parcela da somatória (B.6). Esta está relacionada com os termos não lineares das equações de equilíbrio. Observa-se que a linearização do

deslocamento atribuída a (B.4) é justificada pela consideração de pequenos incrementos de deslocamentos entre as configurações ${}^t\mathcal{C}$ e ${}^{t+\Delta t}\mathcal{C}$.

A Equação (B.7) pode ser escrita na forma matricial da seguinte forma:

$$\mathbf{VA}\{ {}^t\bar{T}_1^{(1)} \quad {}^t\bar{T}_2^{(1)} \quad {}^t\bar{T}_1^{(2)} \quad {}^t\bar{T}_2^{(2)} \quad {}^t\bar{T}_1^{(3)} \quad {}^t\bar{T}_2^{(3)} \quad {}^t\bar{T}_1^{(4)} \quad {}^t\bar{T}_2^{(4)} \}^T \quad (\text{B.12})$$

e expressa em função dos incrementos dos coeficientes, de acordo com:

$${}^t\mathbb{Y} \begin{pmatrix} U_{1(10)} \\ U_{1(01)} \\ U_{1(20)} \\ U_{1(02)} \\ U_{2(10)} \\ U_{2(01)} \\ U_{2(20)} \\ U_{2(02)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

onde ${}^t\mathbb{Y}$ é uma matriz dada por:

$${}^t\mathbb{Y} = c_1 \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{11} & J_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & J_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

sendo

$$c_i = \sum_{k=1}^4 A_k {}^t\bar{T}_i^{(k)} \quad (\text{B.15})$$

Apêndice C

Dedução da solução analítica para uma chapa tracionada sujeita a grandes deslocamentos

A Figura (A.1)(2.5) mostra uma chapa tracionada de lado L e altura H no espaço tridimensional, referido ao sistema de eixos x_1 , x_2 e x_3 .

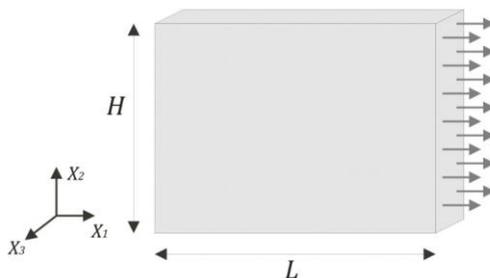


Figura A.1 – Chapa tracionada.

Considera-se o seguinte campo de deslocamento por direção (Eq. C.1), sendo que o deslocamento na direção 3 respeita a mesma deformação da direção 2.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\Delta_1 X_1}{L} \\
 u_2 &= \frac{\Delta_2 X_2}{H} \\
 u_3 &= \frac{\Delta_2 X_3}{H}
 \end{aligned}
 \tag{C.1}$$

onde Δ_1 e Δ_2 representam a deformação na direção 1 e 2, respectivamente.

De posse dos campos dos campos de deslocamentos encontra-se o tensor gradiente de deformação (C.2) e seu determinante (C.3).

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + 1 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{L} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{H} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_2}{H} + 1 \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$$J = \frac{(L + \Delta_1)(H + \Delta_2)^2}{LH^2} \quad (C.3)$$

Matriz constitutiva linear elástica para a relação tensão deformação (C.4).

$$C = \frac{ME(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

De acordo com as Equações (2.9) e (2.35), pode-se obter o tensor deformação de Green-Lagrange (C.5) e o segundo tensor de Piola-Kirchhoff vetorizado (C.6)

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_1}{L} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2}{H} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2}{H} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ME(-2\Delta_1 H^2 L - \Delta_1^2 H^2 + 2\nu\Delta_1 H^2 L + \nu\Delta_1^2 H^2 - 4\nu\Delta_2 L^2 H - 2\nu\Delta_2 L^2)}{2(1+\nu)(2\nu-1)L^2 H^2} \\ \frac{-ME(2\nu\Delta_1 H^2 L + \nu\Delta_1^2 H^2 + 2\Delta_2 L^2 H + \Delta_2^2 L^2)}{2(1+\nu)(2\nu-1)L^2 H^2} \\ \frac{-ME(2\nu\Delta_1 H^2 L + \nu\Delta_1^2 H^2 + 2\Delta_2 L^2 H + \Delta_2^2 L^2)}{2(1+\nu)(2\nu-1)L^2 H^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

Para que só haja tensões longitudinais os componentes S_{22} e S_{33} do segundo tensor de Piola-Kirchhoff são nulos. Dessa forma, pode-se determinar o valor do deslocamento transversal Δ_2 em função do longitudinal resolvendo o sistema com $S_{22} = 0$ e $S_{33} = 0$.

$$\Delta_2 = \frac{(-L + \sqrt{L^2 - 2\nu\Delta_1 L - \Delta_1 \nu})H}{L} \quad (C.7)$$

Retornando a Equação (C.6) e (2.24) encontra-se, respectivamente, os componentes longitudinais do segundo tensor de Piola-Kirchhoff (C.8) e tensor de Cauchy (C.9).

$$S_{11} = \frac{ME\Delta_1(2L + \Delta_1)}{2L^2} \quad (C.8)$$

$$\sigma_{11} = \frac{(L + \Delta_1)ME\Delta_1(2L + \Delta_1)}{L(L^2 - 2\nu\Delta_1 L - \Delta_1^2 \nu)} \quad (C.9)$$