

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA CIVIL**

**CAMILA DE SOUSA VIEIRA**

**APLICAÇÃO DO ACOPLAMENTO ENTRE O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
PARA A ANÁLISE BIDIMENSIONAL DA  
INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA**

**MACEIÓ**

**2009**

**CAMILA DE SOUSA VIEIRA**

**APLICAÇÃO DO ACOPLAMENTO ENTRE O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
PARA A ANÁLISE BIDIMENSIONAL DA  
INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: *Estruturas*

Orientador: Prof. Dr. Francisco Patrick Araujo Almeida

Co-orientador: Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato

**MACEIÓ**

**2009**

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

- V658a    Vieira, Camila de Sousa.  
          Aplicação do acoplamento entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos para a análise bidimensional da interação solo-estrutura / Camila de Sousa Vieira, 2009.  
          93 f. : il.
- Orientador: Francisco Patrick Araujo Almeida.  
Co-Orientador: João Carlos Cordeiro Barbirato.  
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2009.
- Bibliografia: f. 86-88.  
Apêndices: f. 89-93.
1. Estrutura (Engenharia Civil). 2. Interação solo-estrutura. 3. Método dos elementos de contorno. 4. Método dos elementos finitos. 5. Acoplamento MEC/MEF. I. Título.

CDU: 624.01



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC  
Campus A. C. Simões, Av. Lourival de Melo Mota, S/N  
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas  
Tel/Fax: (82) 3214-1276  
E-mail: [ppgec@ctec.ufal.br](mailto:ppgec@ctec.ufal.br)  
Homepage: [www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec](http://www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec)



**APLICAÇÃO DO ACOPLAMENTO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS  
DE CONTORNO E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A  
ANÁLISE BIDIMENSIONAL DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA**


**CAMILA DE SOUSA VIEIRA**

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 03 do mês de abril do ano de 2009.

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Francisco Patrick Araújo Almeida  
Orientador – CTEC/UFAL

  
Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato  
Co-orientador

  
Prof. Dr. Humberto Breves Coda  
EESC/USP

  
Profª Drª Viviane Carrilho Leão Ramos  
CTEC/UFAL

*Para Ana, Cícero, Danilo e Mirelly.*

## Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus e ao Espírito Santo por ter me iluminado nos momentos difíceis, pois sem suas bênçãos não chegaria a lugar nenhum.

Quero agradecer ao meu orientador Patrick Almeida por todo o apoio, paciência e dedicação durante o mestrado e ao meu co-orientador, João Barbirato, pelas sugestões dadas e dúvidas sanadas.

Aos professores Ângelo Mendonça e Eduardo Nobre, pelas sugestões apresentadas no exame de qualificação.

Agradeço aos meus pais, Ana e Cícero, pelo exemplo de determinação e por apoiar as minhas escolhas. Ao meu irmão, Danillo, por promover os momentos de descontração. Um agradecimento especial a minha irmã Mirelly, por servir de platéia para meus ensaios pré-apresentação e por suportar meus momentos de estresse.

Muito obrigada ao Minerva Futebol Clube, formado por minhas queridas amigas: Valkíria, Emanuella, Rosane, Cecília, Elisa, Michele, Manuella, Irene, Juliane, Rebecca, Catarina e Laís, pelos nossos treinos super divertidos e, é claro, pelo título de campeã da Copa CTEC.

Aos meus amigos e colegas de turma: Alexandre “Carlão” Barros, Diogo Cintra, Arnaldo Júnior e Humberto Carvalho, pela amizade, pela união na hora de resolver as benditas listas de Mecânica do Contínuo e pelos momentos divertidos no Cação. Agradeço também ao Clayton Aquino, contorneiro experiente, que tirou muitas dúvidas minhas.

Aos companheiros do almoço semanal: Fernanda, Karlisson, Girley, Marcílio, Alexandre, Manu, por possibilitar o aprimoramento das minhas habilidades culinárias e não reclamarem do meu tempero.

Agradeço aos colegas e professores do LCCV pela oportunidade de fazer parte de um grupo tão competente. Obrigada principalmente ao Fábio Ferreira pelas caronas.

À FAPEAL pelo suporte financeiro.

“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode  
começar agora e fazer um novo fim.”

Chico Xavier

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para analisar problemas bidimensionais de interação solo-estrutura, onde o solo é modelado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC) e as estruturas são tratadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). São implementadas as soluções fundamentais de Kelvin 2D e Melan para o MEC, onde elementos de contorno com aproximação linear são utilizados. As estruturas modeladas pelo MEF são discretizadas por elementos finitos de pórtico bidimensional. O acoplamento entre os meios é feito pela utilização da técnica de sub-regiões, onde condições de compatibilidade de deslocamentos e condições de equilíbrio de forças são aplicadas às interfaces entre as diversas sub-regiões. Tanto o solo quanto as estruturas são considerados como compostos por materiais homogêneos, isotrópicos, elásticos e lineares. Porém, a técnica de sub-regiões permite que o solo seja considerado como estratificado. A aplicação dos diversos carregamentos atuantes, na estrutura ou no solo, é considerada lenta, assim, as análises propostas são estáticas. São apresentados exemplos de aplicação do código computacional desenvolvido.

***Palavras-Chave:*** *Interação Solo-Estrutura, Método dos Elementos de Contorno, Método dos Elementos Finitos, Acoplamento MEC/MEF.*



## Abstract

This study aims the development of a computational tool used to analyze two-dimensional problems of soil-structure interaction, where soil is modeled by Boundary Element Method (BEM) and structures are treated by the Finite Element Method (FEM). Fundamental solutions of Kelvin 2D and Melan to BEM are implemented, where boundary elements with linear approximation are used. Structures modeled with FEM are discretized with two-dimensional frame finite elements. Coupling among media is done using the sub-region technique, where conditions of compatibility of displacements and equilibrium of tractions are applied to the interfaces between various sub-regions. Both soil and structures are considered as composed of homogeneous, isotropic, elastic and linear materials. However, sub-region technique allows the soil to be considered as stratified. Application for various acting loads, on structure or on soil, are considered slow, therefore the proposed analyses are statics. Examples are presented using the developed computational code.

**Keywords:** *Soil-Structure Interaction, Boundary Element Method, Finite Element Method, Coupling BEM/FEM.*

## Lista de Figuras

|   |    |
|---|----|
| Figura 1.1 – Exemplos de problemas de interação solo-estrutura. ....                    | 1  |
| Figura 3.1 – Exemplo de problema em estado plano de deformação. ....                    | 11 |
| Figura 3.2 – Exemplo de problema em estado plano de tensão. ....                        | 12 |
| Figura 3.3 – Pontos campo e fonte. ....   | 15 |
| Figura 3.4 – Cargas unitárias pontuais aplicadas dentro do semi-plano. ....             | 16 |
| Figura 3.5 – Posição do ponto fonte. ....   | 19 |
| Figura 3.6 – Funções de interpolação. ....  | 21 |
| Figura 3.7 - Componentes locais e cartesianas do vetor de forças de superfície. ....    | 26 |
| Figura 3.8 – Cilindro sob pressão interna. ....   | 31 |
| Figura 3.9 - Quatro primeiros pontos no domínio. ....                                   | 33 |
| Figura 3.10 – Deslocamentos nos pontos internos. ....                                   | 35 |
| Figura 3.11 – Tensões radiais nos pontos internos. ....                                 | 35 |
| Figura 3.12 – Deformações nos pontos internos. ....                                     | 36 |
| Figura 3.13 – Influência da distância ao contorno no cálculo dos deslocamentos. ....    | 37 |
| Figura 3.14 – Influência da distância ao contorno no cálculo das tensões. ....          | 38 |
| Figura 3.15 – Carregamento uniformemente distribuído no semi-plano. ....                | 39 |
| Figura 3.16 – Linhas formadas pelos pontos onde são calculadas as tensões. ....         | 40 |
| Figura 3.17 – Tensões verticais ao longo da linha horizontal que passa no domínio. .... | 40 |
| Figura 3.18 – Tensões verticais ao longo da linha vertical que passa no domínio. ....   | 41 |
| Figura 3.19 - Erro no cálculo das tensões ao longo da linha horizontal. ....            | 42 |
| Figura 3.20 – Erro no cálculo das tensões ao longo da linha vertical. ....              | 42 |
| Figura 4.1 – Elemento finito de pórtico bidimensional. ....                             | 47 |
| Figura 4.2 – Viga engastada com carga concentrada. ....                                 | 52 |
| Figura 4.3 – Pórtico plano com carregamento distribuído vertical. ....                  | 53 |
| Figura 5.1 - Domínio dividido em três sub-regiões. ....                                 | 56 |
| Figura 5.2 – Cavidade em meio infinito com reforço. ....                                | 58 |
| Figura 5.3 – Deslocamentos nos pontos do domínio. ....                                  | 59 |
| Figura 5.4 – Viga engastada. ....   | 60 |
| Figura 5.5 – Domínio bidimensional acoplado com estrutura reticulada. ....              | 61 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 6.1 – Fluxo de funcionamento do programa computacional. ....  | 65 |
| Figura 7.1 – Carregamento na superfície do semi-plano e contorno da vala. ....                                 | 72 |
| Figura 7.2 – Domínio do problema dividido em duas sub-regiões. ....  | 73 |
| Figura 7.3 – Comparação entre a solução analítica do problema e o acoplamento. ....                            | 73 |
| Figura 7.4 – Tensões ao longo da linha L para os diferentes materiais. ....                                    | 74 |
| Figura 7.5 - Deformações ao longo da linha L para os diferentes materiais. ....                                | 75 |
| Figura 7.6 - Tensões ao longo da linha L para os diferentes materiais, considerando seu peso-próprio. ....     | 76 |
| Figura 7.7 - Deformações ao longo da linha L para os diferentes materiais, considerando seu peso-próprio. .... | 76 |
| Figura 7.8 – Influência da consideração do peso-próprio do material da vala no valor das tensões. ....         | 77 |
| Figura 7.9 - Influência da consideração do peso-próprio do material da vala no valor das deformações. ....     | 77 |
| Figura 7.10 – Posição da cavidade com relação à superfície do semi-plano. ....                                 | 78 |
| Figura 7.11 – Deslocamentos nos pontos do domínio. ....  | 79 |
| Figura 7.12 – Porcentagem da redução dos deslocamentos. ....   | 80 |
| Figura 7.13 – Dimensões da vala e posição do carregamento. ....  | 81 |
| Figura 7.14 – Deslocamentos na direção $x_2$ . ....  | 82 |

## Lista de Tabelas

|  |    |
|--|----|
| Tabela 3.1 - Número de pontos de Gauss para integração numérica. ....  | 25 |
| Tabela 3.2 – Deslocamentos ( $10^{-3}$ mm).....  | 31 |
| Tabela 3.3 – Erro no valor do deslocamento (%).....  | 32 |
| Tabela 3.4 – Módulo das tensões radiais (Pa).....  | 32 |
| Tabela 3.5 – Erro no valor das tensões (%).....  | 32 |
| Tabela 3.6 – Deformações radiais ( $10^{-4}$ ). ....   | 32 |
| Tabela 3.7 – Erro no valor da deformação (%).....  | 32 |
| Tabela 3.8 - Deslocamentos nos pontos internos (mm). ....  | 34 |
| Tabela 3.9 - Módulos das tensões radiais nos pontos internos (Pa).....   | 34 |
| Tabela 3.10 - Deformações nos pontos internos. ....  | 34 |
| Tabela 4.1 – Propriedades dos elementos.....   | 52 |
| Tabela 4.2 – Deslocamentos nos nós da estrutura 1 (m). ....  | 53 |
| Tabela 4.3 – Reações de apoio no engaste da estrutura 1.....   | 53 |
| Tabela 4.4 – Deslocamentos nos nós da estrutura 2 (m). ....  | 54 |
| Tabela 4.5 – Reações de apoio.....   | 54 |
| Tabela 5.1 – Deslocamentos nos pontos A, B e C (cm). ....  | 60 |
| Tabela 5.2 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região $\Omega_1$ . ....                              | 61 |
| Tabela 5.3 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região $\Omega_1$ obtidos por<br>Komatsu (1995). .... | 61 |
| Tabela 5.4 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região $\Omega_2$ . ....                              | 62 |
| Tabela 5.5 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região $\Omega_2$ obtidos por<br>Komatsu (1995). .... | 62 |
| Tabela 5.6 – Deslocamentos nos nós da estrutura reticulada. ....   | 62 |
| Tabela 5.7 – Deslocamentos nos nós da estrutura reticulada obtidos por Komatsu<br>(1995). ....                         | 62 |
| Tabela 6.1 – Principais funções. ....  | 64 |
| Tabela 6.2 – Campos do arquivo de dados de entrada gerais. ....  | 66 |
| Tabela 6.3 – Campos do arquivo de dados de entrada das sub-regiões discretizadas com<br>o MEC. ....                    | 67 |

|   |    |
|---|----|
| Tabela 6.4 – Campos do arquivo de dados de entrada das sub-regiões discretizadas com o MEF..... | 68 |
| Tabela 6.5 – Campos do arquivo de dados de saída das sub-regiões discretizadas com o MEC.....   | 69 |
| Tabela 6.6 – Campos do arquivo de dados de saída das sub-regiões discretizadas com o MEF.....   | 70 |
| Tabela 7.1 – Propriedades dos materiais do exemplo 1. ....                                      | 72 |

## Lista de Abreviaturas

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| CST | <i>Constant Strain Triangle</i>   |
| DKT | <i>Discrete Kirchoff Triangle</i> |
| HSM | <i>Hybrid Stress Model</i>        |
| MDF | Método das Diferenças Finitas     |
| MEC | Método dos Elementos de Contorno  |
| MEF | Método dos Elementos Finitos      |
| RIM | <i>Radial Integration Method</i>  |

## Lista de Símbolos

|                    |   |
|--------------------|---|
| $\delta_{ij}$      | delta de Kronecker                                      |
| $\Gamma$           | contorno  |
| $\Omega$           | domínio   |
| $\sigma_{ij}$      | componentes do tensor de tensões                        |
| $\varepsilon_{ij}$ | componentes do tensor de deformações                    |
| $\nu$              | coeficiente de Poisson                                  |
| $\lambda$          | constante de Lamé                                       |
| $\phi$             | função de interpolação                                  |
| $b_i$              | força volumétrica na direção $i$                        |
| $E$                | módulo de elasticidade longitudinal                     |
| $G$                | módulo de elasticidade transversal                      |
| $n_i$              | componente do vetor normal na direção $i$               |
| $p_i$              | força de superfície na direção $i$                      |
| $r$                | distância entre o campo fonte e o ponto campo           |
| $r_i$              | componente de $r$ na direção $i$                        |
| $r_{,i}$           | componente da derivada de $r$ na direção $i$            |
| $R$                | distância entre a imagem do ponto fonte e o ponto campo |
| $R_i$              | componente de $R$ na direção $i$                        |
| $u_i$              | deslocamento na direção $i$                             |
| $\Delta^p$         | função Delta de Dirac                                   |

# Sumário

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Agradecimentos .....</b>                                   | <b>iv</b>   |
| <b>Resumo.....</b>  | <b>vi</b>   |
| <b>Abstract .....</b>   | <b>vii</b>  |
| <b>Lista de Figuras .....</b>                                 | <b>viii</b> |
| <b>Lista de Tabelas.....</b>                                  | <b>x</b>    |
| <b>Lista de Abreviaturas.....</b>                             | <b>xii</b>  |
| <b>Lista de Símbolos.....</b>                                 | <b>xiii</b> |
| <br>  |             |
| <b>1. Introdução.....</b>                                     | <b>1</b>    |
| 1.1. JUSTIFICATIVA .....                                      | 1           |
| 1.2. OBJETIVOS.....   | 2           |
| 1.3. RESUMO DOS CAPÍTULOS .....                               | 3           |
| <b>2. Revisão Bibliográfica.....</b>                          | <b>4</b>    |
| <b>3. Formulação do Método dos Elementos de Contorno.....</b> | <b>9</b>    |
| 3.1. INTRODUÇÃO .....   | 9           |
| 3.2. EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA LINEAR.....            | 9           |
| 3.3. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS .....                              | 12          |
| 3.3.1. <i>Solução fundamental de Kelvin 2D.....</i>           | <i>12</i>   |
| 3.3.2. <i>Solução fundamental de Melan.....</i>               | <i>15</i>   |
| 3.4. EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO .....                     | 17          |
| 3.4.1. <i>Equação integral para pontos no domínio .....</i>   | <i>17</i>   |
| 3.4.2. <i>Equação integral para pontos no contorno.....</i>   | <i>18</i>   |



|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 3.5.      | MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....                      | 19        |
| 3.5.1.    | <i>Discretização</i> .....                                  | 20        |
| 3.5.2.    | <i>Propriedades da matriz [H]</i> .....                     | 22        |
| 3.5.3.    | <i>Deslocamentos e tensões nos pontos do domínio</i> .....  | 24        |
| 3.5.4.    | <i>Integrações</i> .....                                    | 25        |
| 3.5.5.    | <i>Tensões em pontos do contorno</i> .....                  | 26        |
| 3.5.6.    | <i>Deformações em pontos no contorno e no domínio</i> ..... | 28        |
| 3.5.7.    | <i>Forças de domínio</i> .....                              | 28        |
| 3.6.      | APLICAÇÕES .....  | 29        |
| 3.6.1.    | <i>Barra submetida ao seu peso-próprio</i> .....            | 29        |
| 3.6.2.    | <i>Cilindro de parede espessa</i> .....                     | 30        |
| 3.6.3.    | <i>Cavidade circular em meio infinito</i> .....             | 33        |
| 3.6.4.    | <i>Carregamento distribuído em meio semi-infinito</i> ..... | 38        |
| <b>4.</b> | <b>Formulação do Método dos Elementos Finitos .....</b>     | <b>43</b> |
| 4.1.      | INTRODUÇÃO .....  | 43        |
| 4.2.      | EQUACIONAMENTO BÁSICO .....                                 | 44        |
| 4.3.      | ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO .....                      | 46        |
| 4.3.1.    | <i>Matriz de rigidez</i> .....                              | 47        |
| 4.3.2.    | <i>Vetor de forças nodais</i> .....                         | 50        |
| 4.4.      | APLICAÇÕES .....  | 52        |
| 4.4.1.    | <i>Estrutura 1</i> .....                                    | 52        |
| 4.4.2.    | <i>Estrutura 2</i> .....                                    | 53        |
| <b>5.</b> | <b>Acoplamento entre o MEC e o MEF .....</b>                | <b>55</b> |
| 5.1.      | INTRODUÇÃO .....  | 55        |
| 5.2.      | TÉCNICA DE SUB-REGIÕES .....                                | 55        |
| 5.3.      | APLICAÇÕES .....  | 58        |
| 5.3.1.    | <i>Acoplamento MEC/MEC</i> .....                            | 58        |
| 5.3.2.    | <i>Acoplamento MEF/MEF</i> .....                            | 59        |
| 5.3.3.    | <i>Acoplamento MEC/MEF</i> .....                            | 60        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>6. O Programa Computacional.....</b>                        | <b>63</b> |
| 6.1. INTRODUÇÃO .....  | 63        |
| 6.2. ENTRADA DE DADOS .....                                    | 65        |
| 6.3. SAÍDA DE DADOS.....                                       | 68        |
| <b>7. Aplicações.....</b>                                      | <b>71</b> |
| 7.1. INTRODUÇÃO .....  | 71        |
| 7.2. EXEMPLO 1 .....   | 71        |
| 7.3. EXEMPLO 2 .....   | 78        |
| 7.4. EXEMPLO 3 .....   | 80        |
| <b>8. Considerações Finais .....</b>                           | <b>83</b> |
| 8.1. CONCLUSÕES .....  | 83        |
| 8.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....                    | 85        |
| <b>A Equações complementares para o cálculo de tensão.....</b> | <b>89</b> |
| <b>B Integrais analíticas.....</b>                             | <b>90</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1. Justificativa

O problema a ser tratado neste trabalho consiste no estudo da interação entre estruturas e o solo. Este tipo de problema de engenharia é muito comum, principalmente quando se trata de obras de infra-estrutura, podendo-se citar o caso de tubulações para transporte de gás, água e esgoto, pavimentos rodoviários e túneis (Figura 1.1). Observa-se que essas obras de engenharia podem ser apropriadamente analisadas como problemas de estado plano de deformações, ou seja, problemas bidimensionais, uma vez que apresentam uma dimensão muito maior que as outras, a saber, a espessura.



(a) Tubulação para transporte de gás natural (Fonte: Santos Júnior e Vieira, 2006).



(b) Túnel (Fonte: <http://ecosul.wordpress.com>).

Figura 1.1 – Exemplos de problemas de interação solo-estrutura.

Por possuir formulação própria para meios infinitos e semi-infinitos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma técnica bastante utilizada por diversos pesquisadores (Almeida, 2003; Barbirato, 1999; Cavalcanti, 2006; Coda, 2003;

Komatsu, 1995, entre outros) para modelar o solo. Por sua vez, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica consagrada para a análise das estruturas, além dos solos. Em problemas que envolvem a interação entre estrutura e solo é vantajoso aproveitar o melhor das duas técnicas, resolvendo cada parte do problema com o método que melhor se adequa à mesma e, por fim, utilizando algum tipo de abordagem para unir os dois métodos que, neste trabalho, é a técnica de sub-regiões.

O solo é um material que apresenta um comportamento bastante complexo, porém em algumas situações pode se comportar de maneira aproximada como um material elástico, principalmente devido à carga atuante no solo ser bem inferior à carga de plastificação.

Assim, pode-se afirmar que o desenvolvimento de um programa computacional que possibilite a análise de estruturas ligadas ao solo é de grande importância para o avanço da área de métodos numéricos aplicados a problemas de engenharia, bem como para o estudo de estruturas enterradas.

## **1.2. Objetivos**

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta computacional baseada no acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos, possibilitando a análise estática bidimensional da interação entre o solo e estruturas. As análises a serem realizadas consistem basicamente na determinação de recalques do terreno e determinação do estado de tensões no conjunto solo-estrutura. Procura-se analisar, principalmente, a influência da estrutura, atuando como reforço, no solo sob carregamento. Como uma simplificação, tanto as estruturas como o solo serão considerados materiais em regime elástico linear.

Como objetivo específico, pretende-se analisar problemas baseados em casos reais semelhantes àqueles apresentados em Santos Junior e Vieira (2006), onde foram realizadas análises numéricas com o objetivo de verificar a influência do solo de aterro na distribuição de tensões e deformações no interior de uma vala.

### **1.3. Resumo dos capítulos**

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica sobre o tema proposto. É descrito um breve histórico do desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC), assim como são mostrados alguns trabalhos que utilizam o acoplamento entre o MEC e o MEF para estudar a interação solo-estrutura.

No Capítulo 3 são descritas as equações fundamentais da elastostática. Também é mostrada a formulação direta do MEC e a obtenção das soluções fundamentais de Melan e Kelvin 2D. São apresentados exemplos de aplicação, feitos com o intuito de validar o código desenvolvido.

A formulação do Método dos Elementos Finitos é apresentada no Capítulo 4, assim como a obtenção das matrizes de rigidez e de transformação do elemento finito de pórtico plano. São mostrados exemplos de aplicação da técnica.

No Capítulo 5 é mostrada a técnica de sub-regiões e sua utilização no acoplamento MEC/MEC, MEC/MEF e MEF/MEF.

No Capítulo 6 é descrito o código computacional e são apresentadas as principais funções implementadas, assim como o modo de entrada e saída de dados.

Os exemplos de aplicação do código desenvolvido são mostrados no Capítulo 7.

No Capítulo 8 são feitas as considerações finais do trabalho e as sugestões para próximos trabalhos.

## Capítulo 2

### Revisão Bibliográfica

Este capítulo tem como objetivo apresentar um breve histórico do desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno (MEC), assim como alguns trabalhos que fazem uso deste método, em conjunto com o Método dos Elementos Finitos (MEF), para analisar a interação do solo com as estruturas.

Segundo Becker (1992), Somigliana desenvolveu em 1886 uma equação integral relacionando os valores de contorno dos deslocamentos e forças de superfície. A chamada Identidade Somigliana é o cerne da formulação direta do MEC. Com relação à formulação indireta, a mesma teve sua base desenvolvida por Fredholm<sup>1</sup> (1903) *apud* Becker (1992) que usou equações integrais discretizadas em problemas potenciais.

Apesar de diversos artigos e livros sobre equações integrais terem sido publicados, tais como Kellogg<sup>2</sup> (1929), Muskhelishvili<sup>3</sup> (1953) e Kupradze<sup>4</sup> (1965) *apud* Becker (1992), as aplicações ficavam restritas a problemas simples, devido ao fato das formulações integrais serem resolvidas analiticamente.

A primeira contribuição para a solução aproximada de integrais de contorno aconteceu em 1963 quando dois artigos foram publicados por Jaswon<sup>5</sup> (1963) e Symm<sup>6</sup> (1963). Os autores discretizaram as equações integrais de problemas potenciais bidimensionais governados pela equação de Laplace em elementos retos lineares, sobre os quais as funções potenciais foram consideradas constantes em todo o elemento. Os elementos foram descritos em termos de seus valores nodais e as integrações realizadas pelo uso da regra de Simpson, exceto para algumas integrais singulares que foram avaliadas analiticamente (Becker, 1992).

---

<sup>1</sup> FREDHOLM, I. (1903). *Sur une classe d'équations fonctionnelles*. Acta Math., v. 27, p. 365-390.

<sup>2</sup> KELLOGG, O.D. (1929). *Foundations of Potential Theory*. Springer, Berlin.

<sup>3</sup> MUSKHELISHVILI, N.I. (1953). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Holland.

Rizzo<sup>7</sup> (1967) *apud* Becker (1992) foi o primeiro a publicar um artigo que fazia uso da aproximação direta utilizando deslocamentos e forças de superfície em uma equação integral aplicável ao contorno. O trabalho de Rizzo foi o primeiro a explorar a analogia entre a teoria potencial e a teoria clássica da elasticidade e criou uma aproximação numérica para a resolução do problema.

Segundo Aliabadi (2002), os trabalhos de Lachat<sup>8</sup> e Lachat e Watson<sup>9</sup> talvez contenham a mais significativa contribuição para o MEC se tornar uma técnica numérica eficaz. Eles desenvolveram uma formulação isoparamétrica similar àquela usada no Método dos Elementos Finitos e demonstraram que o MEC pode ser usado para a solução de problemas complexos.

De acordo com Brebbia e Georgiou (1979), o trabalho de Lachat<sup>10</sup>, ao desenvolver a idéia de usar funções de interpolação para definir variáveis ao longo de elementos, é importante pois permite a combinação de regiões discretizadas com o MEC e o MEF sem qualquer perda de continuidade.

A idéia de combinar o MEC e o MEF pode ser atribuída a Wexler<sup>11</sup> *apud* Brebbia e Georgiou (1979) que começou a usar a solução de equações integrais para representar problemas de campo sem contorno na década de 1970, tendo como vantagem a possibilidade de usar condições apropriadas para representar o domínio infinito. Osias<sup>12</sup> foi o primeiro a usar a combinação das duas técnicas para a elastostática.

A análise da interação do solo com as estruturas, através do acoplamento MEC/MEF, vem sendo o objeto de estudo de diversos pesquisadores. Alguns desses trabalhos são citados a seguir.

---

<sup>4</sup> KUPRADZE, O.D. (1965). *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. Daniel Davy, New York.

<sup>5</sup> JASWON, M.A. (1963). *Integral Equation Methods in Potential Theory – I*. Proc. Roy. Soc. Lond., vol. A275, pp. 23-32.

<sup>6</sup> SYMM, G.T. (1963). *Integral Equation Methods in Potential Theory – II*. Proc. Roy. Soc. Lond., vol. A275, pp. 33-46.

<sup>7</sup> RIZZO, F.J. (1967). *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*. Q. Appl. Math., vol. 25, pp. 83-95.

<sup>8</sup> LACHAT, J.C. (1975). *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*. PhD thesis, University of Southampton.

<sup>9</sup> LACHAT, J.C.; WATSON, J.O. (1976). *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 991-1005.

<sup>10</sup> LACHAT, J.C. (1975). *PhD Thesis*. Univ. Southampton.

<sup>11</sup> MCDONALD, B.H.; WEXLEY, A. (1972). *IEEE Trans. On Microwave Theory Techniques*. MTT-20, N° 12, December.

<sup>12</sup> OSIAS, J.R. *et al.* (1977). *Proc. First Symp. Numer. Analysis Appl, Eng. Sci.* Versailles, France, 23-27 May.

Em seu trabalho, Matos Filho (1999) analisou a interação estaca-solo com ou sem blocos de capeamento rígido, sujeito à carga horizontal e vertical, verificando principalmente os fatores que influenciam no deslocamento das estacas. Para tal, o maciço de solo foi modelado pelo MEC e as estacas, pelo MEF ou pelo Método das Diferenças Finitas (MDF). Uma das conclusões as quais o autor chegou foi que os deslocamentos nas estacas são influenciados diretamente por seu comprimento, rigidez do sistema e espaçamento entre as mesmas.

Almeida, F.P.A. (2003) desenvolveu um código computacional para a análise dinâmica elastoplástica de estruturas tridimensionais acopladas ao solo. Estudou-se, entre outros problemas, o caso de um reservatório apoiado sobre um semiplano, que sofre a influência de uma carga concentrada, além da ação da água nele contida. Ribeiro (2005) adicionou ferramentas ao código desenvolvido por Almeida, F.P.A. (2003), tais como o recurso de simular um número qualquer de blocos em contato com o solo.

A interação de um solo não-homogêneo com as estruturas foi objeto de estudo de Almeida, V.S. (2003), que utilizou o acoplamento MEC/MEC 3D para analisar o conjunto solo/subestrutura. Para estudar a infra e a superestrutura o autor usou elementos finitos de geometria triangular plana.

O acoplamento entre cascas e placas anisotrópicas com um meio contínuo tridimensional viscoelástico foi estudado por Paccola (2004). O acoplamento foi realizado através da técnica de matriz de rigidez equivalente, que permite uma contribuição direta das matrizes do MEC na matriz de rigidez do MEF.

Mendonça e Paiva (2005) analisaram o comportamento da interação placa-estaca-solo através do acoplamento MEC/MEF, discretizando a placa com elementos finitos DKT (*Discrete Kirchoff Triangle*) e HSM (*Hybrid Stress Model*) e o solo e a estaca com elementos de contorno, utilizando para isso a solução fundamental de Mindlin 3D.

Barbirato (1999) desenvolveu uma formulação do MEC para a análise de problemas tridimensionais de fraturamento no regime transiente, onde foram utilizadas as soluções fundamentais de Mindlin 3D e Kelvin 3D.

Cavalcanti (2006) analisou, principalmente, o comportamento de fundações de placa superficiais e enterradas, discretizando o solo com elementos de contorno triangulares planos e as placas, com elementos finitos de placa DKT e acoplando os



meios com a técnica de sub-regiões. Verificou-se a influência do tipo de carregamento atuante na placa, assim como sua espessura, na magnitude dos deslocamentos em pontos da mesma.

Segundo Iwamoto (2000), entre os modelos para a análise de interação solo-estrutura se destacam os trabalhos de Meyerhof<sup>13</sup> (1953), que propôs a viga de rigidez à flexão equivalente para estimar a contribuição da superestrutura, e Chamecki<sup>14</sup> (1956), que apresentou um processo iterativo para considerar a rigidez da superestrutura. O autor cita ainda o trabalho de Poulos<sup>15</sup> (1975), que apresenta uma formulação matricial para estimar os recalques da fundação considerando a interação solo-estrutura.

Carmo (2001) analisou o comportamento de pavimentos de edifícios por meio do MEC e MEF acoplados com o uso da técnica de sub-regiões. No referido trabalho os elementos lineares foram discretizados com o MEF enquanto os elementos planos, com o MEC.

Leite e Ventuniri (2005) usaram variações da técnica de sub-regiões usada no acoplamento MEC/MEC para o estudo de sólidos bidimensionais com inclusões. Em alguns casos foram considerados como incógnitas na interface apenas os deslocamentos, enquanto em outras situações apenas as forças de superfície na interface eram desconhecidas.

Coda (1993) utilizou o acoplamento MEC/MEF para analisar problemas da elastodinâmica transiente. O MEC foi usado para modelar sólidos tridimensionais elásticos finitos ou infinitos enquanto o MEF, para discretizar pórticos tridimensionais e cascas delgadas elástico-lineares. Dois tipos de acoplamento foram realizados, quais sejam, casca/solo e sapata rígida/solo.

---

<sup>13</sup> MEYERHOF, G.G. (1953). *Some Recent Foundation Research and its Application to Design*. The Structural Engineering, v.31, p.151-167, Londres.

<sup>14</sup> CHAMECKI, S. (1956). *Structural Rigidity in Calculating Settlements*. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, v.82, n.SM-1, p.1-19.

<sup>15</sup> POULOS, H.G. (1975). *Settlement Analysis of Structural Foundation Systems*. In: IV South – East Asian Conference on Soil Engineering, Kuala Lumpur, Malásia, Vol.IV, p.52-62.

O acoplamento de estruturas reticuladas com domínios bidimensionais é estudado por Komatsu (1995) usando uma combinação do MEC e do MEF. Neste trabalho são analisados problemas geomecânicos, tais como escavações de túneis e abertura de valas, onde o domínio infinito ou semi-infinito é tratado pelo MEC e o revestimento do túnel e das paredes de contenção das valas são consideradas como estruturas reticulares e resolvidas pelo MEF. Para resolver o sistema de equações o autor utiliza um algoritmo proposto por Crotty<sup>16</sup> (1982), que evita operações com os blocos de elementos nulos que existem nos sistemas obtidos com a técnica de acoplamento MEC/MEF, tornando a solução mais eficiente.

Almeida e Paiva (2004) apresentam uma formulação do MEC para analisar problemas de interação solo-estrutura onde é considerada a interação entre superestrutura, infra-estrutura e solo que, quando estratificado, é analisado pelo método da rigidez sucessiva. Para o acoplamento os elementos de contorno são tratados como uma parte da região discretizada pelo MEF. É demonstrado que o método da rigidez sucessiva apresenta vantagens em relação à técnica de sub-regiões, como por exemplo, a menor quantidade de operações computacionais e menor necessidade de memória para guardar as equações do sistema final do solo.

A técnica de sub-regiões foi utilizada por Monnerat (2008) para acoplar placas e chapas horizontais, verticais e inclinadas, todas discretizadas com o MEC.

---

<sup>16</sup> CROTTY, J.M. (1982). *A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method*. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 18, p.997-1017.

## Capítulo 3

# Formulação do Método dos Elementos de Contorno

### 3.1. Introdução

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste, basicamente, em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, através da solução de equações integrais sobre o contorno. Com isso, os problemas são reduzidos em uma dimensão, gerando uma menor quantidade de dados de entrada. O MEC é uma técnica que se mostra especialmente eficiente na resolução de problemas em que o domínio se estende ao infinito, isso porque é possível considerar todo o domínio sem a necessidade de truncá-lo.

Neste capítulo é apresentada a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno para o problema elástico bidimensional, bem como alguns exemplos de aplicação desta técnica. Em todo o texto deste trabalho os índices  $i$ ,  $j$ ,  $l$  e  $k$  indicam uma variação de 1 a 2, exceto quando explicitado de outra forma.

Para a elaboração deste capítulo foram consultados, principalmente, os trabalhos de Aliabadi (2002), Brebbia e Dominguez (1992) e Mase e Mase (1999).

### 3.2. Equações básicas da elastostática linear

O objetivo desta seção é apresentar conceitos básicos da teoria da elasticidade linear que são necessários para desenvolver a formulação do MEC.

Materiais que apresentam comportamento elástico linear são caracterizados por seguir duas condições, quais sejam, a tensão no material é uma função linear da deformação e, após a remoção de forças atuantes, o mesmo volta à sua forma original.

Se as propriedades elásticas do material são as mesmas para qualquer eixo de referência, em qualquer ponto, o material é chamado de isotrópico. Para esse tipo de

material, a lei de Hooke, que representa a relação entre o tensor de tensões  $\sigma_{ij}$  e o tensor de deformações  $\epsilon_{ij}$ , pode ser escrita em termos das chamadas constantes de Lamé (3.2a-b), como mostrado na seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (3.1)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.2a-b)$$

onde  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson do material e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.3)$$

Na elastostática linear, certas equações de campo precisam ser satisfeitas em todos os pontos internos do corpo elástico em consideração e, ao mesmo tempo, as variáveis de campo precisam satisfazer condições específicas no contorno. As equações de campo apropriadas para a elastostática são: equações de equilíbrio,

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (3.4)$$

onde foi considerada a simetria do tensor de tensões; relações deformação-deslocamento,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.5)$$

e Lei de Hooke (3.1); onde  $b_i$  representa as forças por unidade de volume.

É possível apresentar o problema elástico somente em termos de deslocamento com o uso das chamadas equações de Navier, representadas por:

$$u_{i,jj} + \left( \frac{1}{1-2\nu} \right) u_{j,ji} + \frac{1}{\mu} b_i = 0 \quad (3.6)$$

As equações de Navier são obtidas substituindo-se as relações deformação-deslocamento (3.5) na lei de Hooke (3.1) e, por sua vez, o resultado obtido nas equações de equilíbrio (3.4).

Existem problemas definidos no espaço tridimensional que podem ser avaliados em apenas duas dimensões devido a certas condições de carregamento e geometria do corpo em estudo. Os problemas reduzidos a duas dimensões são divididos em duas categorias: deformação plana e tensão plana.

Nos problemas de deformação plana uma das dimensões do corpo, a espessura, é muito maior que as outras duas. O carregamento é aplicado perpendicularmente ao plano formado pelas dimensões menores, sendo distribuído de maneira uniforme ao longo da espessura. Este tipo de problema é exemplificado pela seguinte figura:

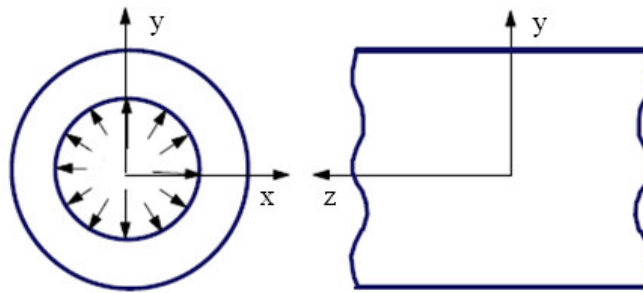


Figura 3.1 – Exemplo de problema em estado plano de deformação.

Por sua vez, os problemas de tensão plana são caracterizados por possuir uma dimensão muito menor que as outras duas. Considera-se que o carregamento é aplicado paralelamente ao plano formado pelas duas dimensões maiores, como mostrado na Figura 3.2.

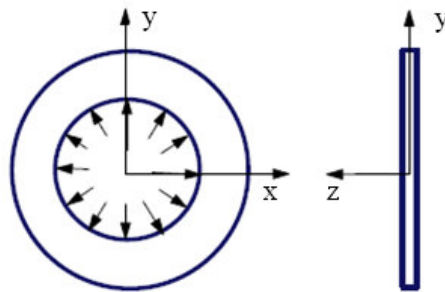


Figura 3.2 – Exemplo de problema em estado plano de tensão.

### 3.3. Soluções fundamentais

A solução fundamental representa a influência, em um ponto de um domínio infinito ou semi-infinito (ponto campo -  $q$ ), de uma carga unitária aplicada em outro ponto do mesmo domínio (ponto fonte -  $s$ ). “A utilização de uma solução fundamental, que genericamente pode ser classificada como uma desvantagem, na verdade proporciona versatilidade e precisão ao método.” (Barbirato, 1999).

A solução fundamental confere uma maior precisão ao método por, sendo uma solução exata, ser utilizada como função ponderadora na aproximação da equação governante no domínio. O fato de necessitar de uma solução fundamental para cada tipo de problema pode ser uma vantagem, por ser uma solução específica ou uma desvantagem, quando a mesma não está disponível.

Neste trabalho são utilizadas as soluções fundamentais de Kelvin, própria para domínios infinitos, e a solução fundamental de Melan, adequada para domínios semi-infinitos. Ambas as soluções fundamentais podem ser usadas para tratar domínios semi-infinitos, como no caso dos solos, sendo que a solução fundamental de Kelvin necessita de uma maior discretização, inclusive da superfície livre, para que sejam obtidos resultados satisfatórios. Esta necessidade não ocorre com o uso da solução de Melan, que exige discretização apenas da superfície carregada.

#### 3.3.1. Solução fundamental de Kelvin 2D

Segundo Love (1944) *apud* Barbirato (1999), a solução fundamental de Kelvin foi desenvolvida por Lorde Kelvin, considerando sólidos tridimensionais elásticos, isotrópicos e homogêneos, cujo domínio se estende ao infinito.

A solução de Kelvin é obtida a partir das equações de Navier (3.6) quando uma carga unitária é aplicada no ponto  $p$  na direção do vetor unitário  $e_i$ , assim:

$$b_i = \Delta^p e_i \quad (3.7)$$

onde  $\Delta^p$  representa a função Delta de Dirac.

De acordo com Brebbia e Dominguez (1992), uma forma de calcular a solução fundamental é representar os deslocamentos em termos do vetor de Galerkin  $G_i$ :

$$u_i = G_{i,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{k,ik} \quad (3.8)$$

Substituindo as expressões (3.7) e (3.8) nas equações de Navier (3.6) e simplificando, obtém-se:

$$\nabla^2(F_i) + \frac{1}{\mu} \Delta^p e_i = 0 \quad (3.9)$$

onde

$$F_i = \nabla^2 G_i \quad (3.10)$$

A solução da equação (3.9), para problemas bidimensionais é a seguinte:

$$F_i = \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_i \quad (3.11)$$

Substituindo a expressão (3.11) em (3.10) e resolvendo a equação resultante, é obtido:

$$G_i = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_i \quad (3.12)$$

Derivando a expressão (3.12) e substituindo o resultado em (3.8) tem-se como resultado a seguinte expressão:

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] e_j \quad (3.13)$$

Levando em consideração que os deslocamentos em qualquer ponto do domínio podem ser escritos como:

$$u_i = u_{ij} e_j \quad (3.14)$$

onde  $u_{ij}$  representa o deslocamento em qualquer ponto na direção  $i$  quando uma carga unitária é aplicada no ponto  $p$  na direção  $j$ , a expressão (3.13) pode ser escrita como na Equação (3.15), que representa a solução fundamental para deslocamentos no caso bidimensional.

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right] \quad (3.15)$$

Diferenciando o vetor de deslocamentos e substituindo nas equações da lei de Hooke, obtém-se a solução fundamental para forças de superfície:

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ r_{,n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right] \quad (3.16)$$

onde

$$r_{,n} = r_{,1}n_1 + r_{,2}n_2 \quad (3.17)$$



e

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r} \quad (3.18)$$

onde  $r$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo, mostrada na Figura 3.3, e  $n_i$  é componente da normal ao elemento na direção  $i$ .

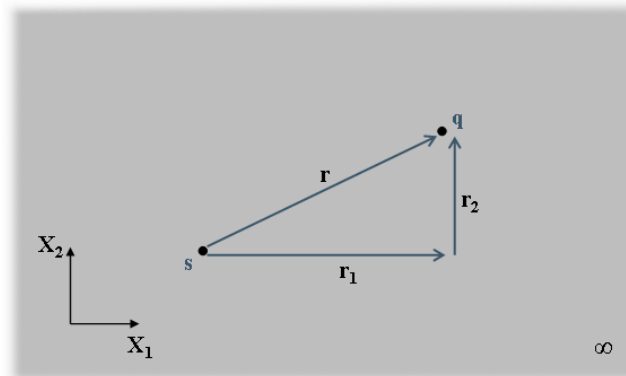


Figura 3.3 – Pontos campo e fonte.

### 3.3.2. Solução fundamental de Melan

Segundo Telles e Brebbia (1980), para resolver problemas no semi-plano seria necessário, a princípio, a utilização de um número infinito de elementos na discretização da superfície livre. Outra opção seria a utilização de elementos de contorno infinitos que diminuam o tamanho da discretização necessária mas que precisam de testes para validar as aplicações. Dessa forma, a maneira mais eficiente de tratar esse tipo de problema é a utilização da solução fundamental do semi-plano, que elimina a necessidade de discretização da superfície livre.

A solução fundamental de Melan para deslocamentos possui a seguinte forma:

$$u_{ij}^* = u_{ij}^k + u_{ij}^c \quad (3.19)$$

onde  $u_{ij}^k$  representa a solução fundamental de Kelvin e  $u_{ij}^c$  é uma parte complementar da solução fundamental, cujas componentes são explicitadas nas equações (3.20) a (3.23).



onde

$$K_d = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \quad (3.24)$$

As equações complementares para força de superfície são

$$p_{ij}^c = \sigma_{ijk}^c n_k \quad (3.25)$$

sendo as expressões complementares para tensões  $\sigma_{ijk}^c$  apresentadas no Apêndice A.

É importante salientar que as expressões complementares não apresentam singularidades quando o ponto fonte é interno ao semi-plano. Quando o ponto fonte está na superfície do semi-plano, as singularidades que surgem são da mesma ordem daquelas que aparecem na solução fundamental de Kelvin, dessa forma, a implementação da solução de Melan não apresenta dificuldades adicionais.

A solução fundamental de Melan tem como principal vantagem a necessidade de discretização somente da parte da superfície onde há carregamento atuante. No caso da existência de pontos na superfície livre os mesmos são considerados como pontos internos.

### 3.4. Equações integrais de contorno

As equações integrais para elastostática podem ser deduzidas usando considerações de resíduos ponderados. Nesta seção utiliza-se como referência, principalmente, a obra de Brebbia e Dominguez (1992).

#### 3.4.1. Equação integral para pontos no domínio

Partindo da minimização do erro que envolve a aproximação numérica das equações de equilíbrio (3.4) e utilizando como função ponderadora a solução fundamental para deslocamentos (3.15), após duas integrações por partes é obtida a Eq. (3.26).

$$\int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega - \int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega = \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (3.26)$$

A Equação (3.26) corresponde ao teorema da reciprocidade de Betti e pode ser usada para a obtenção das equações integrais de contorno do MEC.

Foi usando o teorema de Betti, segundo Barbirato (1999), que Somigliana chegou à representação integral de deslocamento, a chamada identidade Somigliana, que na ausência de forças de massa tem a seguinte forma:

$$u_l + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma \quad (3.27)$$

A identidade Somigliana permite a obtenção dos valores de deslocamentos em qualquer ponto do domínio, a partir dos valores de deslocamentos e forças no contorno, das forças que atuam no domínio, caso existam, e da solução fundamental.

### 3.4.2. Equação integral para pontos no contorno

Como a identidade Somigliana é válida apenas para pontos no domínio, é usado um artifício para que a mesma possa ser usada em pontos do contorno. Para tal, considera-se que existe uma semi-circunferência de raio  $\varepsilon$  centrada no ponto do contorno suave. Fazendo o raio tender a zero é obtida a seguinte expressão:

$$c_{lk} u_k + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (3.28)$$

Os valores das componentes da matriz  $c_{lk}$  dependem da localização do ponto fonte e da forma do contorno, podendo ser representados pelos elementos das seguintes matrizes:

$$c_{lk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

para pontos de colocação fora do domínio (Figura 3.5a);

$$c_{lk} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

para pontos de colocação no contorno suave (Figura 3.5b), e

$$c_{lk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

para pontos de colocação internos (Figura 3.5c).

Para o caso em que o contorno não é suave (Figura 3.5d), é possível calcular os coeficientes da matriz  $c_{lk}$  com a consideração de movimento de corpo rígido, como mostrado na seção 3.5.2.

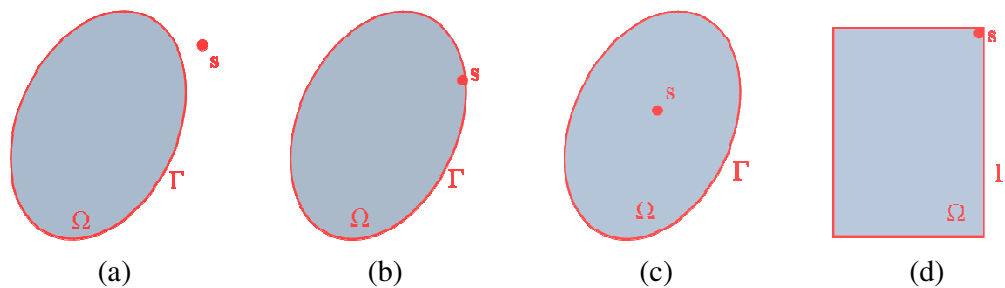


Figura 3.5 – Posição do ponto fonte.

### 3.5. Método dos Elementos de Contorno

Para resolver numericamente as equações integrais é necessário dividir o contorno em uma série de elementos, sobre os quais os deslocamentos e as forças de superfície são funções de seus valores nodais. Escrevendo a forma discretizada da Equação (3.28) para cada ponto nodal é obtido um sistema de equações algébricas lineares que é resolvido após a aplicação das condições de contorno do problema. Nesta seção as equações são escritas na forma matricial.

### 3.5.1. Discretização

Neste trabalho o contorno do domínio dos problemas é discretizado por elementos com aproximação linear. A forma discretizada da Equação (3.28), na ausência de forças de corpo, é representada por:

$$[c]\{u\} + \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma} [p^*]\{u\} d\Gamma \right\} = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma} [u^*]\{p\} d\Gamma \right\} \quad (3.32)$$

onde Ne representa o número de elementos.

Os nós dos elementos de contorno podem ser simples, quando pertence aos dois elementos que lhe são adjacentes, ou duplos. Os nós duplos são nós que possuem as mesmas coordenadas, mas pertencem a elementos diferentes. Eles são usados quando existe a necessidade de considerar descontinuidades nas forças de superfície.

Os deslocamentos e forças de superfície em cada elemento são escritos, respectivamente, em função de seus valores nodais tal como é mostrado nas equações a seguir:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

As funções de interpolação  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são definidas em termos da coordenada homogênea  $\xi$ , que varia de -1 a 1, como representadas nas expressões (3.35a-b) e mostradas na Figura 3.6.

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \phi_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi)\end{aligned}\tag{3.35a-b}$$

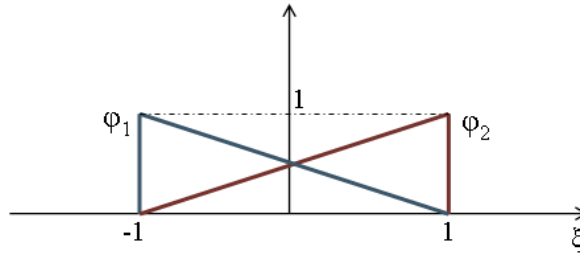


Figura 3.6 – Funções de interpolação.

Usando as funções de interpolação, a Equação (3.32) pode ser escrita da seguinte forma:

$$[c]\{u\} + \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma} [p^*] [\phi] d\Gamma \right\} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma} [u^*] [\phi] d\Gamma \right\} \{p\}^j \tag{3.36}$$

ou ainda,

$$[c]\{u\} + \sum_{j=1}^{Ne} [H_w]^{ij} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Ne} [G_w]^{ij} \{p\}^j \tag{3.37}$$

onde

$$[H_w] = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & h_{11}^2 & h_{12}^2 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 & h_{21}^2 & h_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$[G_w] = \begin{bmatrix} g_{11}^1 & g_{12}^1 & g_{11}^2 & g_{12}^2 \\ g_{21}^1 & g_{22}^1 & g_{21}^2 & g_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Escrevendo uma equação da forma (3.36) para cada ponto do contorno é obtido o seguinte sistema de equações lineares:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \quad (3.40)$$

As integrais podem ser resolvidas numericamente para os casos em que o ponto fonte não pertence ao elemento integrado. Para o caso em que o ponto fonte está no elemento integrado ocorre uma singularidade na solução fundamental, assim, as integrais são resolvidas analiticamente.

Após a aplicação das condições de contorno do problema, as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  devem ser rearranjadas de forma que todos os valores prescritos fiquem do lado direito da Equação (3.40). Multiplicando a nova matriz  $[G]$  pelo vetor que contém todos os valores prescritos de força de superfície e deslocamento é obtido um sistema de equações:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (3.41)$$

Uma vez resolvido o sistema de equações acima são obtidos os valores de força de superfície e deslocamento antes desconhecidos.

### 3.5.2. Propriedades da matriz $[H]$

Os termos da matriz  $[c]$  que devem ser somados à matriz  $[H]$  são complicados de serem obtidos quando o ponto fonte está no contorno não suave. Porém, a matriz  $[H]$  possui uma propriedade que permite o cálculo indireto desses termos. Essa propriedade deriva do movimento de corpo rígido.

O conceito de movimento de corpo rígido envolve deslocamentos na ausência de forças. Com isso, se um corpo finito se desloca no espaço sem que haja deformação, as forças resultantes são nulas. Assim, tem-se:

$$[H]\{u\} = \{0\} \quad (3.42)$$



Considerando um deslocamento unitário do corpo no sentido positivo do eixo  $x_1$ , o vetor  $u_1$  para esse caso é o seguinte:

$$\{u_1\}^T = \{1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0\} \quad (3.43)$$

Como o produto de uma linha  $i$  qualquer da matriz  $[H]$  pelo vetor  $\{u_1\}$  deve ser nulo, obtém-se a seguinte propriedade:

$$H_1^i + H_3^i + \dots + H_{(2n-1)}^i = 0 \quad (3.44)$$

Se o mesmo é feito para o eixo  $x_2$ , tem-se:

$$H_2^i + H_4^i + \dots + H_{(2n)}^i = 0 \quad (3.45)$$

No caso de corpo infinito, a integral do núcleo  $p^*$ , sobre um contorno localizado no infinito, resultará uma carga unitária na direção considerada em sentido contrário ao eixo coordenado. Assim, para o caso de linhas ímpares:

$$\begin{aligned} H_1^i + H_3^i + \dots + H_{(2n-1)}^i &= 1 \\ H_2^i + H_4^i + \dots + H_{(2n)}^i &= 0 \end{aligned} \quad (3.46a-b)$$

E para o caso de linhas pares:

$$\begin{aligned} H_1^i + H_3^i + \dots + H_{(2n-1)}^i &= 0 \\ H_2^i + H_4^i + \dots + H_{(2n)}^i &= 1 \end{aligned} \quad (3.47a-b)$$

Os termos da matriz  $[c]$ , no caso de domínios finitos, podem ser calculados percorrendo cada linha  $i$  da matriz  $[H]$  com as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
 S_1^i &= \sum_{j=1}^n \left[ \hat{H}_{(2j-1)}^i \right] \\
 S_2^i &= \sum_{j=1}^n \left[ \hat{H}_{(2j)}^i \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.48a-b}$$

Os termos da matriz [c] são:

$$\begin{aligned}
 c_1^i &= -S_1^i \\
 c_2^i &= -S_2^i
 \end{aligned}
 \tag{3.49a-b}$$

### 3.5.3. Deslocamentos e tensões nos pontos do domínio

Os deslocamentos dos pontos internos podem ser calculados por meio da Identidade Somigliana em função dos deslocamentos e forças no contorno. Para cada ponto interno é escrita a seguinte equação:

$$\{u\} = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma} [u^*] \{\phi\} d\Gamma \right\} \{p\}^j - \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma} [p^*] \{\phi\} d\Gamma \right\} \{u\}^j
 \tag{3.50}$$

As tensões nos pontos internos podem ser calculadas derivando os deslocamentos nos pontos internos e introduzindo as correspondentes deformações nas relações tensão-deformação, obtendo-se assim a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma
 \tag{3.51}$$

onde

$$D_{kij} = \frac{1}{r} \left\{ (1-2\nu) \left[ \delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{16\pi(1-\nu)}
 \tag{3.52}$$

$$S_{kij} = \frac{1}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \right. \\ \left. + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \quad (3.53)$$

### 3.5.4. Integrações

Para os casos em que o ponto fonte não pertence ao elemento integrado, é utilizado integração numérica com quadratura de Gauss. O número de pontos de Gauss utilizado para a integração varia de acordo com a distância do ponto fonte ao elemento. Na Tabela 3.1, adaptada de Beer (2001), é apresentado o número de pontos de Gauss (Ng) para cada valor limite de R/L.

Tabela 3.1 - Número de pontos de Gauss para integração numérica.

| Ng | R/L    |
|----|--------|
| 2  | 1.6382 |
| 3  | 1.6461 |
| 4  | 0.3550 |
| 5  | 0.2230 |
| 6  | 0.1490 |
| 7  | 0.1021 |
| 8  | 0.0690 |

onde R representa a distância do ponto fonte ao nó mais próximo do elemento e L é o comprimento do mesmo.

Para realizar a integração numérica é necessário, inicialmente, realizar uma mudança nos limites de integração na Eq. (3.36), que passa a ser escrita em termos da coordenada adimensional  $\xi$ :

$$[c]\{u\} + \sum_{j=1}^{Nc} \left\{ \int_{-1}^1 [p^*][\phi]Jd\xi \right\} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Nc} \left\{ \int_{-1}^1 [u^*][\phi]Jd\xi \right\} \{p\}^j \quad (3.54)$$

O jacobiano da transformação, para o caso de elementos com aproximação linear é dado por:

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{L}{2} \quad (3.55)$$

As integrais da Equação (3.54) podem ser então transformadas em somatórios:

$$[c]\{u\} + \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \sum_{k=1}^{Ng} w_k [p^*]_k [\phi]_k J \right\} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \sum_{k=1}^{Ng} w_k [u^*]_k [\phi]_k J \right\} \{p\}^j \quad (3.56)$$

onde  $Ng$  é o número de pontos de Gauss e  $w_k$  são os pesos.

Quando o ponto fonte pertence ao elemento integrado tem-se o problema de singularidade da solução fundamental, então, as integrais são resolvidas analiticamente. A solução das integrais presentes nos elementos das matrizes mostradas nas equações (3.38) e (3.39) produzem equações que são apresentadas no Apêndice B.

### 3.5.5. Tensões em pontos do contorno

As tensões no contorno podem ser obtidas diretamente a partir dos deslocamentos e das forças de superfície previamente calculadas. Para tal, define-se um sistema local de coordenadas nos pontos do contorno onde se deseja conhecer as tensões, tal como mostrado na Figura 3.7.

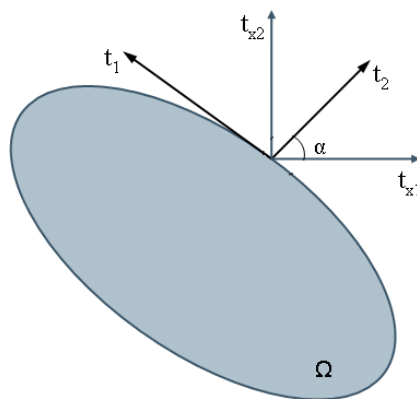


Figura 3.7 - Componentes locais e cartesianas do vetor de forças de superfície.

É possível encontrar o valor das forças de superfície no sistema local de coordenadas com o uso das relações (3.57), onde  $\alpha$  é o ângulo entre a direção  $x_1$  global e a direção normal ao elemento.

$$\begin{aligned} t_1 &= -t_{x1} \text{sen} \alpha + t_{x2} \text{cos} \alpha \\ t_2 &= t_{x1} \text{cos} \alpha + t_{x2} \text{sen} \alpha \end{aligned} \quad (3.57)$$

As tensões no sistema local são as seguintes:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \varepsilon_{11} + \left( \frac{\nu}{1-\nu} \right) t_{x2}, \\ \sigma_{22} &= t_2, \\ e \\ \sigma_{12} &= t_1, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde  $\varepsilon_{11}$  é a deformação tangencial e pode ser obtida pela equação abaixo, onde  $m_{x1}$  e  $m_{x2}$  são as componentes do vetor tangencial.

$$\varepsilon_{11}(\xi) = \frac{1}{J(\xi)} \left\{ \left[ \sum_{c=1}^2 \frac{\partial \phi_c(\xi)}{\partial \xi} (u_{x1})_c \right] m_{x1} + \left[ \sum_{c=1}^2 \frac{\partial \phi_c(\xi)}{\partial \xi} (u_{x2})_c \right] m_{x2} \right\} \quad (3.59)$$

Para transformar as tensões locais em tensões globais é usada uma matriz de transformação obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x1x1} \\ \sigma_{x2x2} \\ \sigma_{x1x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \alpha & \text{cos}^2 \alpha & -2\text{sen} \alpha \text{cos} \alpha \\ \text{cos}^2 \alpha & \text{sen}^2 \alpha & 2\text{sen} \alpha \text{cos} \alpha \\ -\text{sen} \alpha \text{cos} \alpha & \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha & (\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

O ângulo  $\alpha$  pode ser escrito em termos das componentes da normal unitária:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{n_{x2}}{n_{x1}} \right) \quad (3.61)$$

### 3.5.6. Deformações em pontos no contorno e no domínio

Calculadas as tensões em quaisquer pontos pode-se determinar as deformações nestes por meio das relações constitutivas (3.1), explicitadas em função das deformações como se segue:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x_1x_1} &= \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2)\sigma_{x_1x_1} - \nu(1+\nu)\sigma_{x_2x_2} \right] \\ \varepsilon_{x_2x_2} &= \frac{1}{E} \left[ -\nu(1+\nu)\sigma_{x_1x_1} + (1-\nu^2)\sigma_{x_2x_2} \right] \\ \varepsilon_{x_1x_2} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12}\end{aligned}\tag{3.62a-c}$$

As Equações (3.62) são válidas para o estado plano de deformações, porém podem ser utilizadas em problemas de estado plano de tensões desde que as constantes elásticas sejam modificadas de acordo com as seguintes expressões:

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}\tag{3.63}$$

$$E' = E \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right]\tag{3.64}$$

### 3.5.7. Forças de domínio

Nos casos em que as forças de domínio não podem ser desprezadas, o termo de domínio da Equação (3.28) precisa ser avaliado. Para isso existem alguns métodos tais como: discretização do domínio em células, vetor de Galerkin, integrais particulares, reciprocidade múltipla e reciprocidade dual.

Em aplicações onde a força de domínio é constante, como no caso do peso-próprio de um solo homogêneo, a integral de domínio pode ser transformada em uma integral de contorno. Uma técnica eficaz que permite essa transformação é chamada *Radial Integration Method* (RIM), que pode ser encontrada no trabalho de Gao (2002).

Com a aplicação da referida técnica e considerando o caso de peso-próprio de um material, a integral de domínio da Equação (3.28) é transformada em integral de contorno, como mostrado na seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega = \frac{\rho g}{16\pi(1-\nu)G} \int_{\Gamma} r \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (3-4\nu) \left( \frac{1}{2} - \ln r \right) \delta_{lm} + r_{,l} r_{,m} \right] \quad (3.65)$$

onde  $G$  representa o módulo de elasticidade transversal,  $\rho$  é densidade do material e  $g$ , aceleração da gravidade.

A Equação (3.51), com a qual são calculadas as tensões nos pontos internos, pode ser reescrita considerando as forças de domínio:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (3.66)$$

A integral de domínio que aparece na expressão (3.66) pode ser transformada em integral de contorno:

$$\int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega = \rho g \int_{\Gamma} r \frac{\partial r}{\partial n} D_{mij} d\Gamma \quad (3.67)$$

onde  $m = 1, 2$ .

## 3.6. Aplicações

### 3.6.1. Barra submetida ao seu peso-próprio

Como exemplo de aplicação da técnica que transforma integrais de domínio em integrais de contorno, calcula-se o deslocamento na extremidade livre de uma barra submetida apenas ao seu peso próprio. A solução técnica para este problema é obtida pela expressão (3.68).

$$u(L) = \frac{bL^2}{2E} \quad (3.68)$$

Considera-se que a força volumétrica  $b = 0,25\text{Pa/m}$  e que o comprimento da barra  $L = 4\text{m}$ . O módulo de elasticidade ( $E$ ) da barra é igual a  $80000\text{Pa}$  e o coeficiente de Poisson tem valor igual a zero.

Com os dados apresentados, o deslocamento na extremidade livre da barra é igual a  $2,5 \times 10^{-5}\text{m}$ . O valor obtido discretizando o contorno com 20 elementos foi igual a  $2,52683 \times 10^{-5}\text{m}$ , significando uma diferença de  $1,07\%$  entre as técnicas. Assim, pode-se afirmar que a técnica usada para avaliar o peso-próprio de problemas bidimensionais leva a resultados satisfatórios.

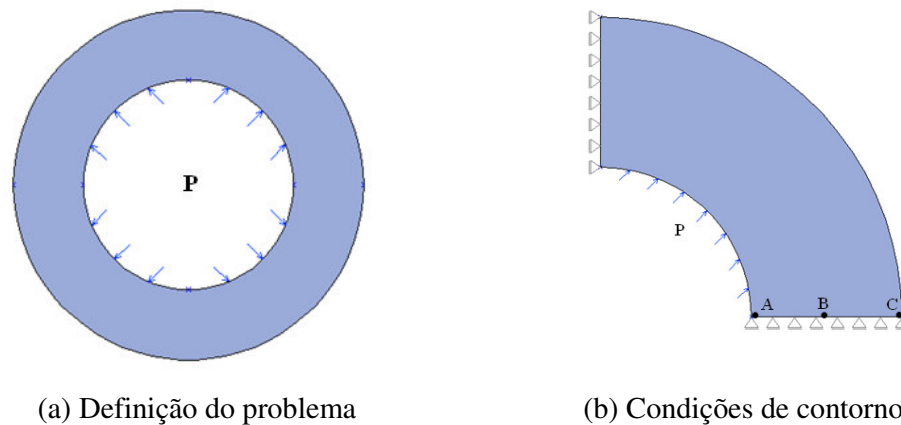
### 3.6.2. Cilindro de parede espessa

Este problema representa o caso de um cilindro de parede espessa sob pressão interna, como mostrado na Figura 3.8 onde, devido a simetria do problema, apenas um quarto do duto é discretizado. Este exemplo pode ser encontrado em Brebbia e Dominguez (1992).

Considera-se que a pressão atuante no cilindro é igual a  $p = 100\text{N/mm}^2$ , enquanto o raio interno e o externo são  $a = 10\text{mm}$  e  $b = 25\text{mm}$ , respectivamente. O módulo de elasticidade é igual a  $E = 200000\text{N/mm}^2$  e o coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,25$ .

São usadas três diferentes discretizações, dividindo-se o contorno do domínio do problema em 16, 28 e 40 elementos lineares e nos pontos de canto são usados nós duplos.





(a) Definição do problema

(b) Condições de contorno

Figura 3.8 – Cilindro sob pressão interna.

Deseja-se conhecer os deslocamentos, tensões e deformações na direção radial nos pontos A, B e C, mostrados na Figura 3.8 (b). Segundo Riley *et al* (1999), a solução analítica do problema é dada pelas seguintes expressões:

$$\sigma_r = \frac{pa^2(r^2 - b^2)}{r^2(b^2 - a^2)}$$

$$\epsilon_r = \frac{(1+\nu)pa^2}{E(b^2 - a^2)} \left[ (1-2\nu) - \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (3.69a-c)$$

$$u_r = \frac{(1+\nu)pa^2}{E(b^2 - a^2)} \left[ (1-2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right]$$

Os valores de deslocamentos, tensões e deformações para as três discretizações utilizadas são mostrados nas tabelas a seguir, assim como a porcentagem do erro cometido em relação à solução analítica do problema.

Tabela 3.2 – Deslocamentos ( $10^{-3}$ mm).

| Ponto | Sol. analítica | 16 elementos | 28 elementos | 40 elementos |
|-------|----------------|--------------|--------------|--------------|
| A     | 8,036          | 7,834        | 7,956        | 7,993        |
| B     | 5,293          | 5,129        | 5,226        | 5,257        |
| C     | 4,464          | 4,390        | 4,440        | 4,452        |

Tabela 3.3 – Erro no valor do deslocamento (%).

| Ponto | 16 elementos | 28 elementos | 40 elementos |
|-------|--------------|--------------|--------------|
| A     | 2,516        | 0,989        | 0,527        |
| B     | 3,106        | 1,266        | 0,691        |
| C     | 1,667        | 0,548        | 0,265        |

Tabela 3.4 – Módulo das tensões radiais (Pa).

| Ponto | Sol. analítica | 16 elementos | 28 elementos | 40 elementos |
|-------|----------------|--------------|--------------|--------------|
| A     | 100,00         | 56,998       | 75,762       | 83,439       |
| B     | 19,825         | 20,872       | 19,729       | 19,736       |
| C     | 0,000          | 3,076        | 1,125        | 0,744        |

Tabela 3.5 – Erro no valor das tensões (%).

| Ponto | 16 elementos | 28 elementos | 40 elementos |
|-------|--------------|--------------|--------------|
| A     | 43,002       | 24,238       | 16,561       |
| B     | -1,047       | 0,096        | 0,089        |
| C     | -3,076       | -1,125       | -0,744       |

Tabela 3.6 – Deformações radiais ( $10^{-4}$ ).

| Ponto | Sol. analítica | 16 elementos | 28 elementos | 40 elementos |
|-------|----------------|--------------|--------------|--------------|
| A     | -6,84          | -4,84        | -5,78        | -6,14        |
| B     | -1,83          | -1,85        | -1,82        | -1,82        |
| C     | -0,59          | -0,65        | -0,58        | -0,57        |

Tabela 3.7 – Erro no valor da deformação (%).

| Ponto | 16 elementos | 28 elementos | 40 elementos |
|-------|--------------|--------------|--------------|
| A     | 29,267       | 15,463       | 10,180       |
| B     | -1,012       | 0,736        | 0,439        |
| C     | -8,908       | 2,402        | 3,413        |

Os resultados obtidos são satisfatórios para o caso de deslocamentos, apresentando erros menores que 1% para a maior discretização usada, que possui 40 elementos. Com relação aos valores de tensões e deformações os erros foram significativamente grandes, principalmente nos pontos localizados nos cantos. Este fato pode ser atribuído à aproximação feita para o cálculo das tensões nos pontos de contorno, procedimento que é detalhado na seção 3.5.5.

### 3.6.3. Cavidade circular em meio infinito

O exemplo consiste em uma cavidade circular em um meio infinito elástico. A cavidade tem raio de 3m e é aplicada uma pressão interna de 100Pa. O material adotado possui  $E = 207900\text{Pa}$  e  $\nu = 0,1$ . Deseja-se calcular os deslocamentos, tensões e deformações em alguns pontos no domínio, cujos quatro primeiros são mostrados na Figura 3.9. Este exemplo pode ser encontrado, também, no trabalho de Foltran (1999).

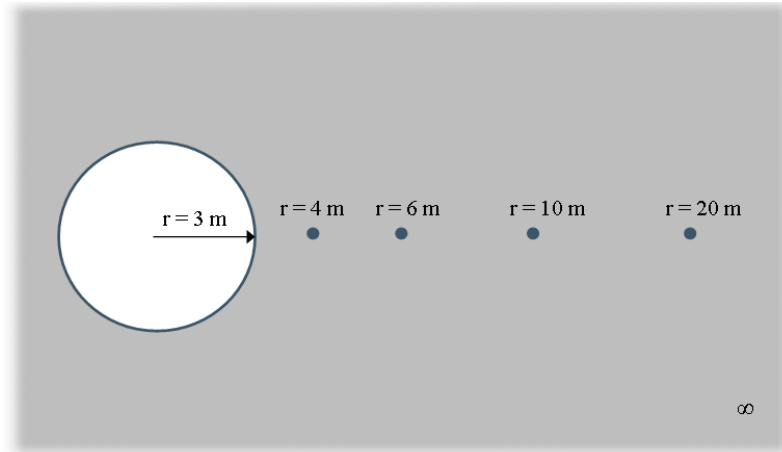


Figura 3.9 - Quatro primeiros pontos no domínio.

Para a análise foram feitas três discretizações do contorno usando 32, 40 e 60 elementos lineares e 7 pontos internos. Nas Tabelas 3.8, 3.9 e 3.10 são mostrados os resultados obtidos assim como a solução analítica do problema. Esses resultados são apresentados, também, nos gráficos das Figuras 3.10 a 3.12.

Pode-se calcular a tensão radial ( $\sigma_r$ ), a deformação radial ( $\epsilon_r$ ) e o deslocamento radial ( $u_r$ ), pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{-Pa^2}{r^2} \\ \epsilon_r &= \frac{-Pa^2(1+\nu)}{Er^2} \\ u_r &= \frac{Pa^2(1+\nu)}{Er}\end{aligned}\tag{3.70a-c}$$

onde:

P – pressão interna;

a – raio da cavidade;

E – módulo de elasticidade;

$\nu$  – coeficiente de Poisson;

r – raio.

Tabela 3.8 - Deslocamentos nos pontos internos (mm).

| <b>Raio (m)</b> | <b>Sol. Analítica</b> | <b>32 elementos</b> | <b>40 elementos</b> | <b>60 elementos</b> |
|-----------------|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 4               | 1,190                 | 1,176               | 1,181               | 1,186               |
| 6               | 0,794                 | 0,784               | 0,788               | 0,791               |
| 10              | 0,476                 | 0,470               | 0,473               | 0,475               |
| 20              | 0,238                 | 0,235               | 0,236               | 0,237               |
| 50              | 0,095                 | 0,094               | 0,095               | 0,095               |
| 200             | 0,024                 | 0,024               | 0,024               | 0,024               |
| 1000            | 0,005                 | 0,005               | 0,005               | 0,005               |

Tabela 3.9 - Módulos das tensões radiais nos pontos internos (Pa).

| <b>Raio (m)</b> | <b>Sol. Analítica</b> | <b>32 elementos</b> | <b>40 elementos</b> | <b>60 elementos</b> |
|-----------------|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 4               | 56,250                | 55,829              | 55,859              | 56,058              |
| 6               | 25,000                | 24,701              | 24,808              | 24,914              |
| 10              | 9,000                 | 8,892               | 8,931               | 8,969               |
| 20              | 2,250                 | 2,223               | 2,233               | 2,242               |
| 50              | 0,360                 | 0,356               | 0,357               | 0,359               |
| 200             | 0,023                 | 0,022               | 0,022               | 0,022               |
| 1000            | 0,001                 | 0,001               | 0,001               | 0,001               |

Tabela 3.10 - Deformações nos pontos internos.

| <b>Raio (m)</b> | <b>Sol. Analítica</b> | <b>32 elementos</b> | <b>40 elementos</b> | <b>60 elementos</b> |
|-----------------|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 4               | 2,976                 | 2,954               | 2,955               | 2,966               |
| 6               | 1,323                 | 1,307               | 1,313               | 1,318               |
| 10              | 0,476                 | 0,470               | 0,473               | 0,475               |
| 20              | 0,119                 | 0,118               | 0,118               | 0,119               |
| 50              | 0,019                 | 0,019               | 0,019               | 0,019               |
| 200             | 0,001                 | 0,001               | 0,001               | 0,001               |
| 1000            | 0,000                 | 0,000               | 0,000               | 0,000               |

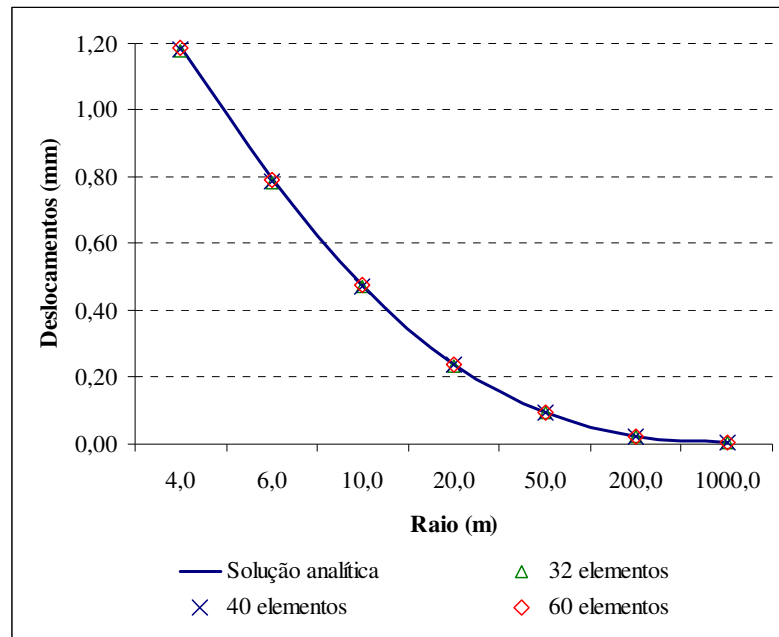


Figura 3.10 – Deslocamentos nos pontos internos.

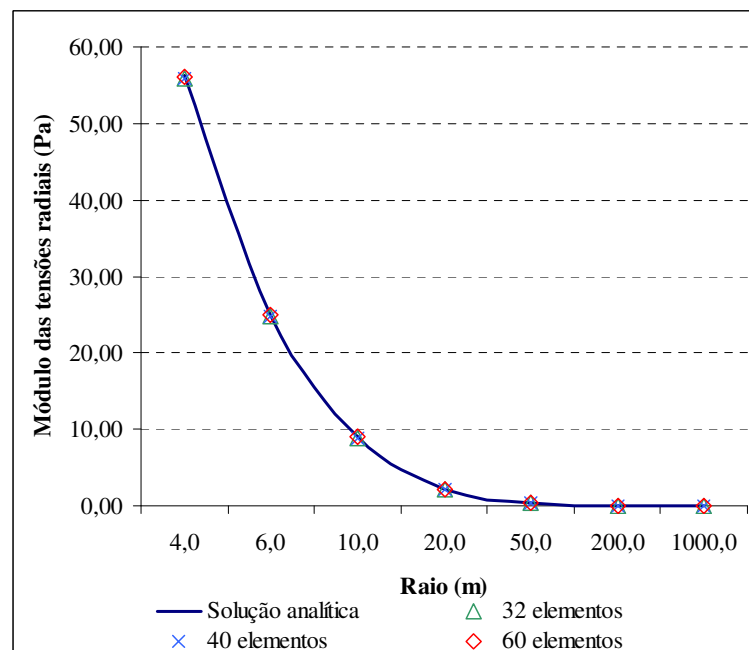


Figura 3.11 – Tensões radiais nos pontos internos.

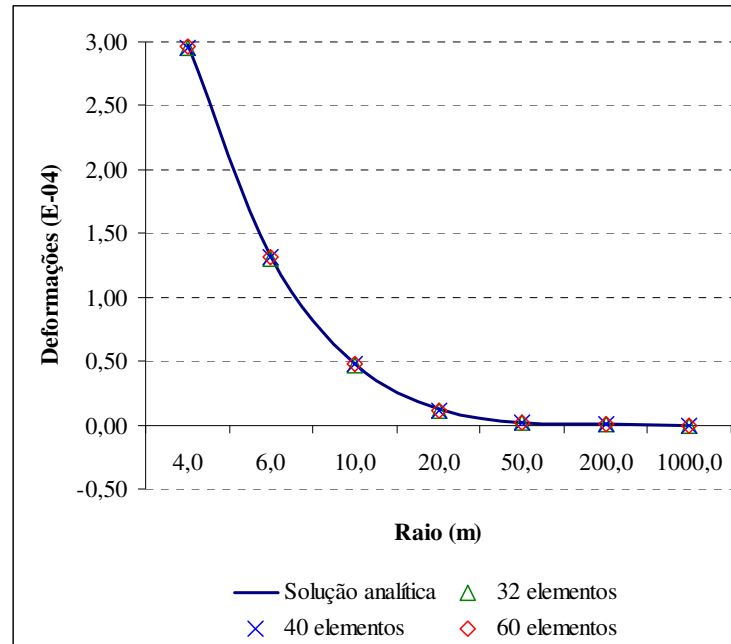


Figura 3.12 – Deformações nos pontos internos.

Como pode ser percebido nos gráficos apresentados, os resultados obtidos para as três diferentes discretizações são compatíveis com a solução analítica do problema. Neste exemplo fica evidenciada uma das vantagens do MEC que é a possibilidade de considerar todo o meio infinito discretizando apenas o contorno da escavação. Dessa forma, o problema é resolvido com uma quantidade mínima de dados e pouco esforço computacional.

A boa qualidade dos resultados no cálculo de tensões e deformações nos pontos internos é limitada pela distância do ponto ao contorno, devido à singularidade da solução fundamental e, no caso deste trabalho, devido também ao reduzido número de pontos de integração, sendo usados no máximo oito pontos. Na Figura 3.13 são mostrados os deslocamentos em pontos internos próximos ao contorno, calculados com o programa desenvolvido, assim como a solução analítica do problema. Pode-se perceber que os resultados começam a divergir a uma distância de aproximadamente 2,6cm do contorno da cavidade, chegando a uma diferença de aproximadamente 45%, com relação à solução analítica, para o ponto mais próximo do contorno.

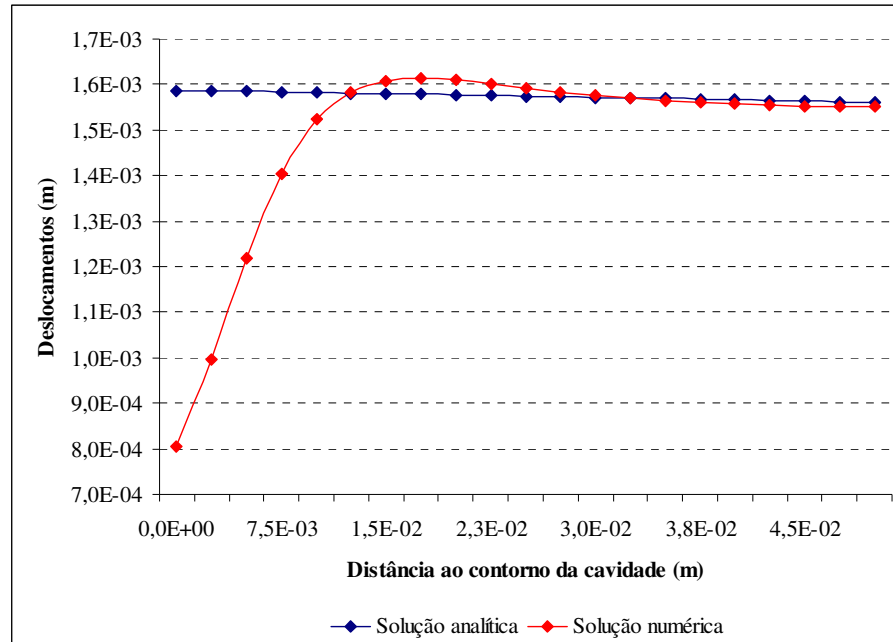


Figura 3.13 – Influência da distância ao contorno no cálculo dos deslocamentos.

O cálculo das tensões nos pontos internos sofre uma influência maior da distância ao contorno do que o cálculo dos deslocamentos, fato que pode ser visto claramente na Figura 3.14. Erros de aproximadamente 20% em relação à solução analítica ocorrem a uma distância de 10cm do contorno, chegando a mais de 100% à 5cm do contorno.

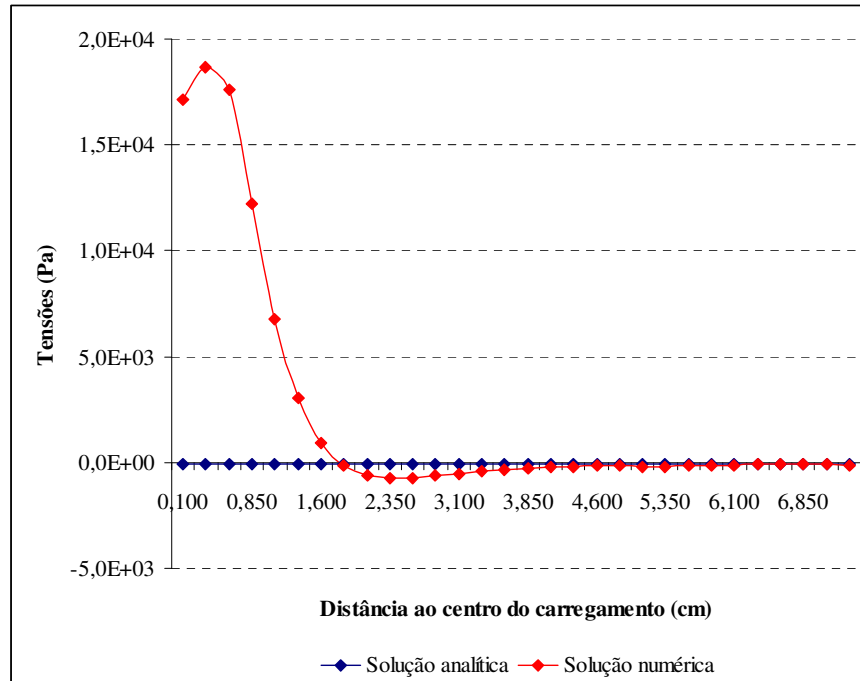


Figura 3.14 – Influência da distância ao contorno no cálculo das tensões.

### 3.6.4. Carregamento distribuído em meio semi-infinito

Neste exemplo são calculadas as tensões verticais em uma série de pontos, que formam duas linhas, no interior de um meio semi-infinito onde atua um carregamento uniformemente distribuído numa faixa de largura constante e comprimento infinito.

Devido ao uso da solução fundamental de Melan, apenas a parte da superfície do semi-plano que se encontra sob o carregamento precisa ser discretizada. Foram utilizadas três discretizações com dois, quatro e oito elementos.

Segundo Poulos e Davis (1973) as tensões nos pontos dentro do meio semi-infinito podem ser calculadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{x_1} = \frac{p}{\pi} [\alpha + \text{sen}\alpha \cos(\alpha + 2\delta)]$$

$$\sigma_{x_2} = \frac{p}{\pi} [\alpha - \text{sen}\alpha \cos(\alpha + 2\delta)] \quad (3.71a-c)$$

$$\sigma_{x_2x_1} = \frac{p}{\pi} \text{sen}\alpha \text{sen}(\alpha + 2\delta)$$



enquanto os deslocamentos nos pontos da superfície, com relação ao centro do carregamento, podem ser obtidos por:

$$\rho_{x_1}(0, x_2) - \rho_{x_2}(0, 0) = \frac{2p(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ (x_1 - b) \ln|x_1 - b| - (x_1 + b) \ln|x_1 + b| + 2b \ln b \right\} \quad (3.72)$$

As variáveis que aparecem nas Equações (3.71a-c) e (3.72) são mostradas na seguinte figura:

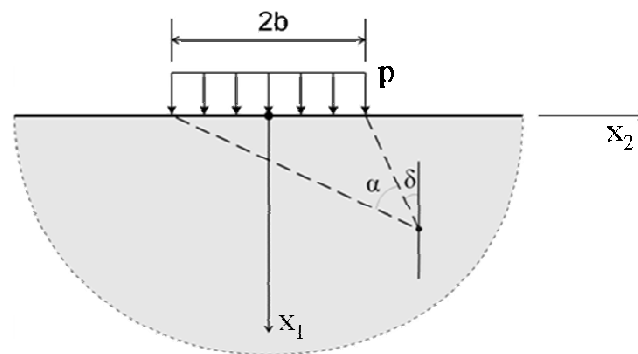


Figura 3.15 – Carregamento uniformemente distribuído no semi-plano.

Para o exemplo proposto, o carregamento ( $p$ ) aplicado na superfície tem valor igual a  $100\text{kN/m}^2$ , distribuído numa faixa de largura ( $2b$ ) igual a  $12\text{m}$ . O solo em questão possui módulo de elasticidade que vale  $2000\text{kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson igual a  $0,2$ . São calculadas as tensões verticais ao longo das linhas tracejadas mostradas na Figura 3.16.

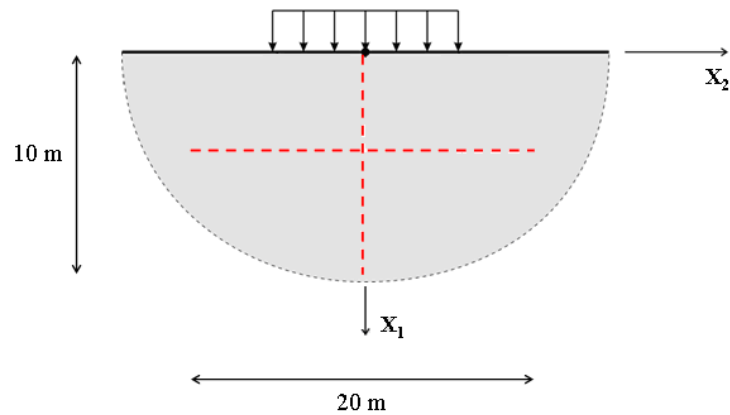


Figura 3.16 – Linhas formadas pelos pontos onde são calculadas as tensões.

Na Figura 3.17 são mostrados valores das tensões na direção  $x_1$  ao longo da linha horizontal mostrada na Figura 3.16 para as três diferentes discretizações. Pode-se notar que, em comparação com a solução analítica do problema, o uso de apenas dois elementos já apresenta resultados coerentes. O mesmo é válido para as tensões calculadas ao longo da linha vertical cujos valores são apresentados na Figura 3.18.

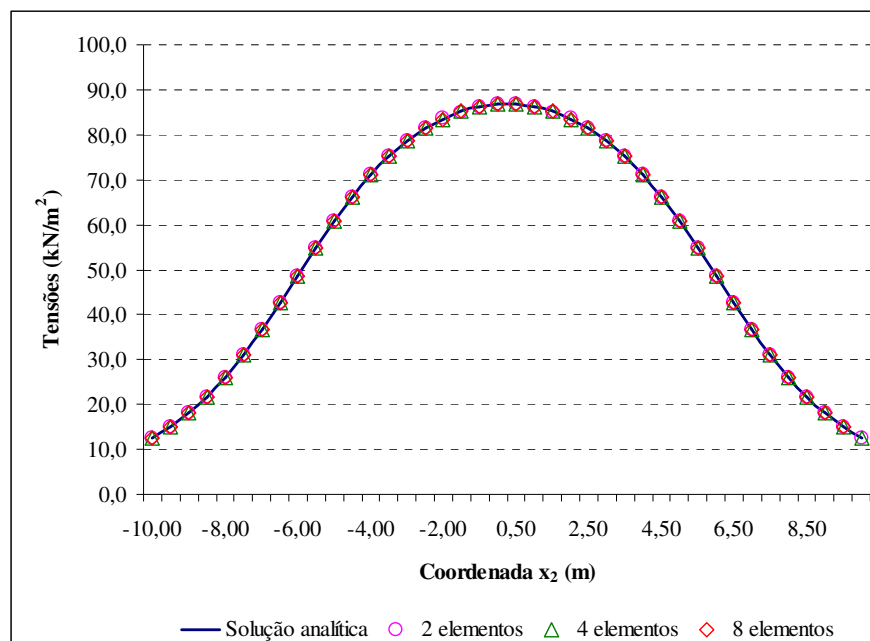


Figura 3.17 – Tensões verticais ao longo da linha horizontal que passa no domínio.

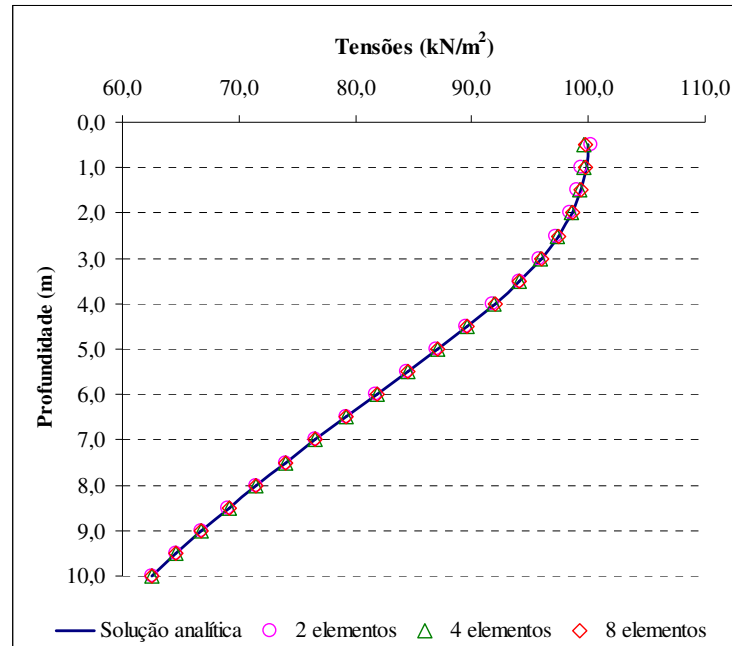


Figura 3.18 – Tensões verticais ao longo da linha vertical que passa no domínio.

Os erros cometidos no cálculo das tensões em cada ponto da linha horizontal que passa pelo domínio são mostrados na Figura 3.19, enquanto os erros relacionados à linha vertical são apresentados na Figura 3.20. Em ambos os casos os erros cometidos são menores que 0,5% para uma discretização com dois elementos e tendem a 0% com o aumento do número de elementos, como esperado.

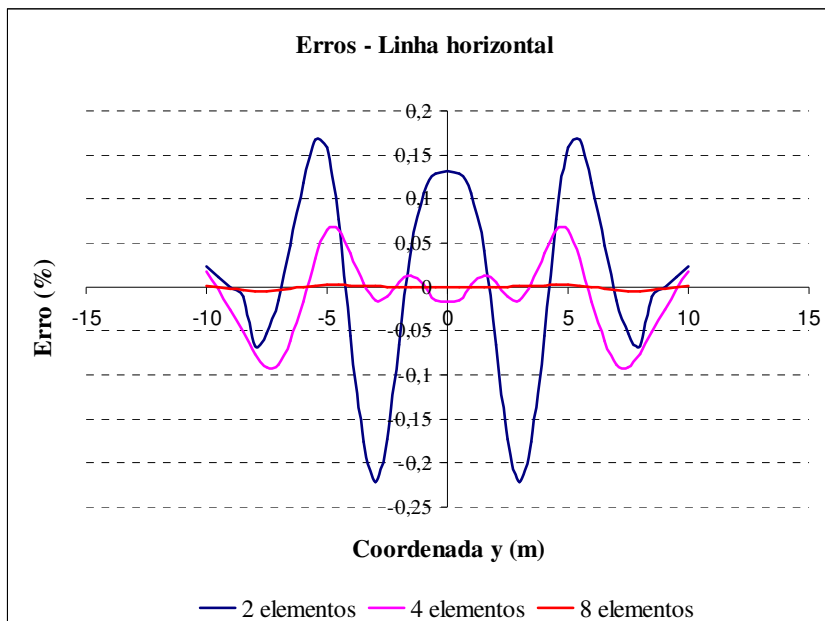


Figura 3.19 - Erro no cálculo das tensões ao longo da linha horizontal.

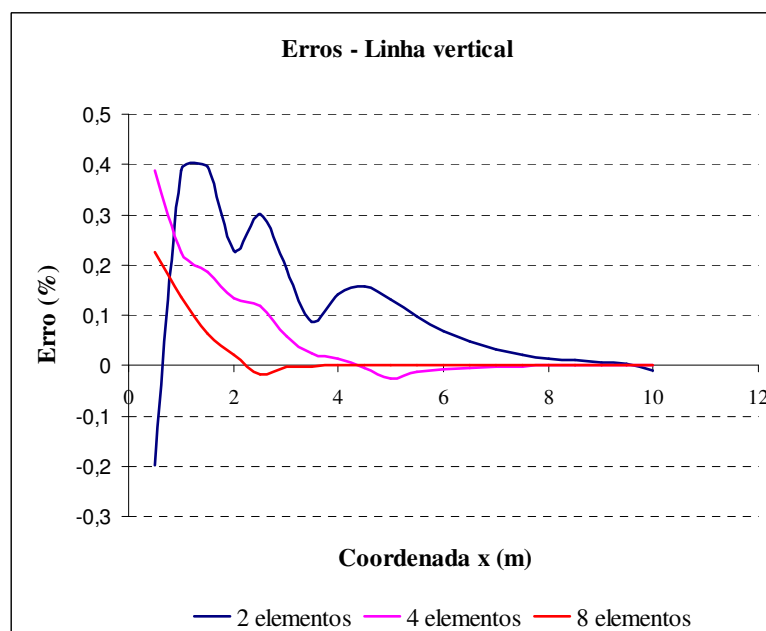


Figura 3.20 – Erro no cálculo das tensões ao longo da linha vertical.

## Capítulo 4

# Formulação do Método dos Elementos Finitos

### 4.1. Introdução

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica numérica onde o domínio do problema é dividido em um número discreto de elementos de dimensões finitas, chamados de elementos finitos, que são interligados por meio de certo número de pontos nodais.

No modelo de deslocamentos do Método dos Elementos Finitos, arbitra-se o campo de deslocamentos de cada elemento em função dos deslocamentos nodais e, então, substitui-se a interação de componentes de tensão entre elementos adjacentes pela interação de forças nodais entre elementos. O equilíbrio infinitesimal do meio contínuo é substituído pelo equilíbrio de cada elemento finito trocando-se as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas de equilíbrio do elemento como um todo. A partir das equações algébricas de cada elemento obtém-se o sistema de equações de equilíbrio da malha de elementos. Com a adição das condições de contorno pode-se, então, chegar à solução em termos de deslocamentos nodais.

Neste trabalho as estruturas são discretizadas por elementos finitos de pórtico bidimensional. Assim, neste capítulo é mostrada a formulação do referido elemento, bem como são apresentados alguns exemplos. Para a elaboração deste capítulo foram consultadas, principalmente, as seguintes referências: Bathe (1996), Cook (1995), Ribeiro (2005) e Soriano (2003).

## 4.2. Equacionamento básico

Deseja-se resolver numericamente a equação diferencial (3.4), reescrita como Eq. (4.1), que é conhecida como a equação de equilíbrio de um elemento infinitesimal. Este problema pode ser resolvido usando considerações de resíduos ponderados.

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (4.1)$$

O contorno  $\Gamma$  do corpo pode ser dividido em duas partes,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . As condições de contorno essenciais são aplicadas em  $\Gamma_1$  e as naturais, em  $\Gamma_2$ . Dessa forma é válido para  $\Gamma_1$ :

$$u_i = \bar{u}_i \quad (4.2)$$

Para  $\Gamma_2$  é válido:

$$p_i = \bar{p}_i \quad (4.3)$$

O erro gerado com a substituição da solução exata do problema por uma solução aproximada pode ser ponderado. Para tal pode ser usada como função ponderadora um deslocamento virtual  $\tilde{u}_i$ . Ponderando o erro em todo o domínio  $\Omega$ , pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \tilde{u}_i \, d\Omega = 0 \quad (4.4)$$

que pode ainda ser escrita como

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \tilde{u}_i \, d\Omega + \int_{\Omega} b_i \tilde{u}_i \, d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

Integrando a primeira parte da Eq. (4.5) por partes e substituindo o resultado na Eq. (4.4), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} b_i \tilde{u}_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i \tilde{u}_i \, d\Gamma \quad (4.6)$$

Escrevendo a expressão acima na forma matricial e aplicando as condições de contorno, é obtido:

$$\int_{\Omega} \{\tilde{\varepsilon}\}^T \{\sigma\} d\Omega = \int_{\Omega} \{\tilde{u}\}^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \{\tilde{u}\}^T \{\bar{p}\} d\Gamma \quad (4.7)$$

Para resolver a Eq. (4.7) usando o Método dos Elementos Finitos, o domínio do problema é dividido em uma série de elementos onde a equação é aplicada e a influência desses elementos é somada. Para cada elemento a equação pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_e} [\varepsilon]^T [D][\varepsilon] d\Omega = \int_{\Omega_e} \{\tilde{u}\}^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \{\tilde{u}\}^T \{\bar{p}\} d\Gamma \quad (4.8)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva.

Os campos de deslocamentos e deformações em cada elemento podem ser aproximados em função dos deslocamentos nodais do elemento usando, para isso, funções interpoladoras. Assim, o vetor de deslocamentos  $\{u\}$  e o vetor de deformações  $\{\varepsilon\}$  podem ser escritos da seguinte forma:

$$\{u\} = [\Phi] \{u^{\text{nodal}}\} \quad (4.9)$$

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u^{\text{nodal}}\} \quad (4.10)$$

onde  $\{u^{\text{nodal}}\}$  é o vetor que contém os deslocamentos nos nós do elemento e,  $[\Phi]$  e  $[B]$  são, respectivamente, matrizes de interpolação de deslocamento e da relação deslocamento-deformação.

Usando as expressões (4.9) e (4.10), a Equação (4.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{u_{\text{nodal}}\}^T \left[ \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \right] \{u_{\text{nodal}}\} = \{u_{\text{nodal}}\}^T \left[ \int_{\Omega_e} [\Phi]^T \{b\} d\Omega \right] \\ + \{u_{\text{nodal}}\}^T \left[ \int_{\Gamma_e} \{u\}^T \{\bar{p}\} d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Resolvendo-se as integrais é obtido o seguinte sistema de equações para o elemento:

$$[K_e] \{u^{\text{nodal}}\} = \{f_e\} \quad (4.12)$$

onde  $[K_e]$  é a matriz de rigidez do elemento e é expressa da seguinte forma:

$$[K_e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (4.13)$$

e  $\{f_e\}$  é o vetor de cargas nodais do elemento, que é escrito como se segue:

$$\{f_e\} = \int_{\Omega_e} [\Phi]^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \{u\}^T \{\bar{p}\} d\Gamma \quad (4.14)$$

Escrevendo a Equação (4.12) para todos os elementos é formado um sistema de equações, representado pela expressão (4.15), que após a aplicação das condições de contorno do problema, pode ser solucionado, resultando nos valores de deslocamentos de todos os nós da malha de elementos.

$$[K] \{u\} = \{f\} \quad (4.15)$$

### 4.3. Elemento finito de pórtico plano

Neste trabalho as estruturas são discretizadas com elementos finitos de pórtico bidimensional. Esses elementos possuem características de elementos de barra, que possuem um grau de liberdade por nó (deslocamento axial), e de elementos de viga, que têm dois graus de liberdade por nó (deslocamento lateral e rotação).



Na Figura 4.1 são mostrados os graus de liberdade do elemento finito onde  $u_{i1}$  representa o deslocamento longitudinal e  $u_{i2}$  e  $u_{i3}$  representam o deslocamento lateral e a rotação do nó  $i$ , respectivamente. O mesmo vale para o nó  $j$ .

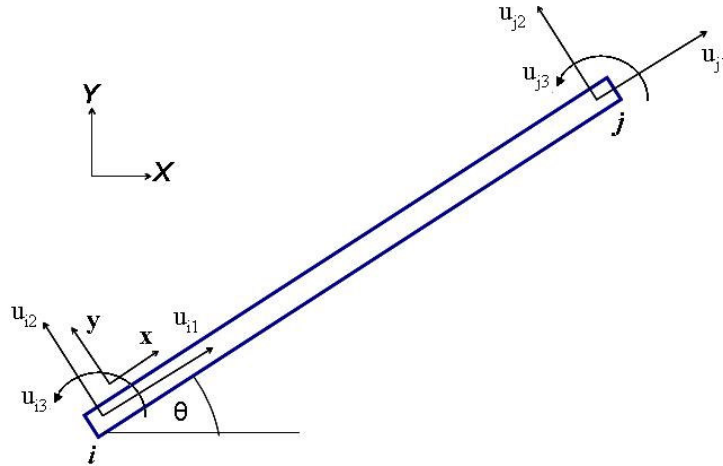


Figura 4.1 – Elemento finito de pórtico bidimensional.

#### 4.3.1. Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento de pórtico bidimensional é montada a partir das matrizes de rigidez dos elementos de barra e de viga. Essas matrizes, por sua vez, são obtidas com a aplicação da expressão (4.13).

Para obter a matriz  $[B]$  para o elemento de barra escreve-se, inicialmente, o deslocamento axial ( $u$ ) de um ponto qualquer da barra, em função dos valores nodais de deslocamento ( $u_1$  e  $u_2$ ) e considera-se uma interpolação linear:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \quad (4.16)$$

A deformação axial  $\epsilon_x$  é dada por:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = [B]\{d\} \quad (4.17)$$

onde

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

No caso do elemento de barra a matriz constitutiva  $[D]$  é simplesmente o módulo de elasticidade  $E$  do material. Assim, pode-se escrever a matriz de rigidez:

$$[K_c] = \int_0^L \begin{Bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} A dx = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde  $A$  e  $L$  são, respectivamente, área da seção transversal e o comprimento do elemento.

A forma da Equação (4.13) para elementos de viga é a seguinte:

$$[K_c] = \int_0^L [B]^T EI [B] dx \quad (4.20)$$

onde  $I$  é o momento de inércia.

Para obter a matriz  $[B]$  do elemento de viga, escreve-se o deslocamento lateral em termos das seguintes funções de forma:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (4.21a-d)$$

ou seja,

$$v = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \quad (4.22)$$

A curvatura da viga é

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} [N]\{d\} = [B]\{d\} \quad (4.23)$$

onde

$$[B] = \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \quad (4.24)$$

Substituindo a expressão (4.24) em (4.20) é obtida:

$$[K_c] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Unindo as matrizes de rigidez dos elementos de viga e barra pode-se, então, escrever a matriz de rigidez do elemento de pórtico:

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

A matriz de rigidez obtida está escrita nas coordenadas locais do elemento. Na montagem da matriz de rigidez global da estrutura, as matrizes de todos os elementos devem estar escritas no mesmo sistema de coordenadas que é o sistema global da estrutura. Para isso é usada a matriz de incidência cinemática  $[\beta]$  e a aplicação da seguinte expressão:

$$[K_c]_g = [\beta]^T [K_c] [\beta] \quad (4.27)$$

onde  $[K_c]_g$  representa a matriz do elemento no sistema global e

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde  $\theta$  é o ângulo mostrado na Figura 4.1.

#### 4.3.2. Vetor de forças nodais

O vetor de forças nodais da estrutura é formado pelas forças aplicadas diretamente nos nós, bem como pelas forças nodais equivalentes, oriundas dos carregamentos uniformemente distribuídos sobre os elementos.

Para transformar carregamentos distribuídos em forças nodais equivalentes é usada a seguinte matriz de transformação, mostrada em Leite *et al* (2003):

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7L}{20} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3L}{20} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{L^2}{20} & \frac{L}{12} & 0 & \frac{L^2}{30} & -\frac{L}{12} \\ \frac{L}{6} & 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L}{20} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7L}{20} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{L^2}{30} & -\frac{L}{12} & 0 & -\frac{L^2}{20} & \frac{L}{12} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A matriz de transformação permite que o sistema de equações gerado pela aplicação do MEF seja acoplado ao sistema obtido pelo MEC. Essa matriz é necessária porque o MEF trata de forças nodais enquanto o MEC lida com forças de superfície, sendo necessário uma compatibilização entre as variáveis presentes nos dois métodos.

O sistema de equações global pode apresentar problemas de instabilidade numérica. Este fato pode ocorrer devido aos valores dos elementos das matrizes de rigidez e transformação poderem apresentar uma grande diferença em sua magnitude. Becker (1992) trata deste tipo de problema, sendo que aplicado a sistemas de equações provenientes do MEC. Este autor sugere a aplicação de um fator de escala à matriz que apresenta os menores valores, que no caso de sistemas de equações produzidos pelo MEF é a matriz de transformação  $[C]$ . Com a aplicação do fator de escala a Eq. (4.15) é reescrita da seguinte forma:

$$[K]\{U\} = SF[C] \frac{1}{SF} \{P\} \quad (4.30)$$

O fator de escala (SF) é obtido por:

$$SF = \frac{E}{L_{\text{máx}}} \quad (4.31)$$

onde  $L_{\text{máx}}$  é a maior distância entre dois pontos quaisquer da discretização.

Após a resolução do sistema o vetor  $\{P\}$  é multiplicado pelo fator de escala para que seus valores fiquem na ordem de grandeza original.

#### 4.4. Aplicações

Nos exemplos desta seção, deseja-se calcular os deslocamentos nos pontos B e C das estruturas, cujos elementos possuem as seguintes propriedades:

Tabela 4.1 – Propriedades dos elementos.

| Propriedade               | Valor                  |
|---------------------------|------------------------|
| Módulo de elasticidade    | 10000kN/m <sup>2</sup> |
| Área da seção transversal | 0,15m <sup>2</sup>     |
| Momento de inércia        | 0,003125m <sup>4</sup> |

Os resultados obtidos com o programa desenvolvido neste trabalho são comparados com os valores obtidos com o uso do *software* FTOOL (TecGraf, 2002).

##### 4.4.1. Estrutura 1

A Figura 4.2 representa uma viga engastada de 4,0m de comprimento em cuja extremidade atua uma força concentrada no valor de 1,0kN. A viga foi discretizada com dois elementos de pórtico.

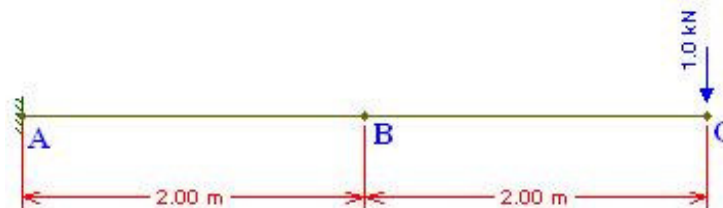


Figura 4.2 – Viga engastada com carga concentrada.

Na Tabela 4.2 são mostrados os valores dos deslocamentos verticais e horizontais nos pontos B e C da estrutura e na Tabela 4.3, as reações de apoio no ponto A, onde pode-se notar que resultados obtidos pelo presente trabalho são satisfatórios.

Tabela 4.2 – Deslocamentos nos nós da estrutura 1 (m).

|                |         | Presente trabalho | FTOOL   |
|----------------|---------|-------------------|---------|
| <b>Ponto B</b> | Desl. x | 0,000             | 0,000   |
|                | Desl. y | -0.2133           | -0,2133 |
| <b>Ponto C</b> | Desl. x | 0,000             | 0,000   |
|                | Desl. y | -0.6827           | -0,6827 |

Tabela 4.3 – Reações de apoio no engaste da estrutura 1.

|                |                       | Presente trabalho | FTOOL |
|----------------|-----------------------|-------------------|-------|
| <b>Ponto A</b> | Reação na dir. x (kN) | 0,00              | 0,00  |
|                | Reação na dir. y (kN) | 1,00              | 1,00  |
|                | Momento fletor (kN.m) | 4,00              | 4,00  |

#### 4.4.2. Estrutura 2

Este exemplo consiste em um pórtico, mostrado na Figura 4.3, onde atua um carregamento uniformemente distribuído com valor igual a 2,0kN/m. A estrutura foi discretizada com três elementos finitos.

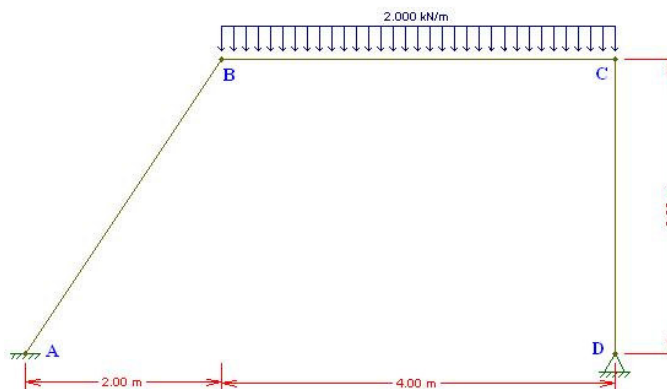


Figura 4.3 – Pórtico plano com carregamento distribuído vertical.

Os resultados obtidos para este exemplo são mostrados na Tabela 4.4 e na Tabela 4.5. Em vista dos resultados apresentados, pode-se afirmar que o programa desenvolvido para a análise de estruturas formadas por elementos de pórtico bidimensional apresenta resultados adequados.

Tabela 4.4 – Deslocamentos nos nós da estrutura 2 (m).

|                |         | <b>Presente trabalho</b> | <b>FTOOL</b> |
|----------------|---------|--------------------------|--------------|
| <b>Ponto B</b> | Desl. x | 0,1852                   | 0,1852       |
|                | Desl. y | -0,1326                  | -0,1326      |
| <b>Ponto C</b> | Desl. x | 0,1820                   | 0,1820       |
|                | Desl. y | -0,0100                  | -0,0100      |

Tabela 4.5 – Reações de apoio.

|                |                       | <b>Presente trabalho</b> | <b>FTOOL</b> |
|----------------|-----------------------|--------------------------|--------------|
| <b>Ponto A</b> | Reação na dir. x (kN) | 1,212                    | 1,212        |
|                | Reação na dir. y (kN) | 2,978                    | 2,978        |
|                | Momento fletor (kN.m) | 1,867                    | 1,867        |
| <b>Ponto D</b> | Reação na dir. x (kN) | -1,212                   | -1,212       |
|                | Reação na dir. y (kN) | 5,022                    | 5,022        |
|                | Momento fletor (kN.m) | 0,000                    | 0,000        |



## Capítulo 5

### Acoplamento entre o MEC e o MEF

#### 5.1. Introdução

Existem duas abordagens principais para se realizar o acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos. No primeiro tipo de abordagem a região discretizada em elementos de contorno é considerada como um elemento finito equivalente, onde sua rigidez é calculada e incluída na matriz de rigidez global. Por sua vez, o segundo modo de acoplamento, que segundo Brebbia e Dominguez (1992) foi proposto por Brebbia e Georgiou (1979), consiste em tratar a região de elementos finitos como um elemento de contorno equivalente, assim, suas matrizes de rigidez são determinadas e associadas às matrizes do MEC através da técnica de sub-regiões. Neste trabalho é usado o segundo tipo de acoplamento MEC/MEF.

#### 5.2. Técnica de sub-regiões

A formulação do MEC mostrada neste trabalho é aplicável apenas a domínios homogêneos, porém, em muitos casos o meio é composto por diversas zonas homogêneas que possuem propriedades diferentes entre si. Este tipo de problema pode ser analisado com a mesma formulação usada em domínios homogêneos aplicando-se a técnica de sub-regiões para acoplar as diversas zonas homogêneas.

Esta técnica consiste em reunir, em um único sistema, os sistemas de equações provenientes da aplicação do MEC a cada sub-região. Para isso são considerados o equilíbrio de forças e a compatibilidade de deslocamentos na interface entre as sub-regiões.

Considera-se o domínio mostrado na Figura 5.1, dividido em três sub-regiões.

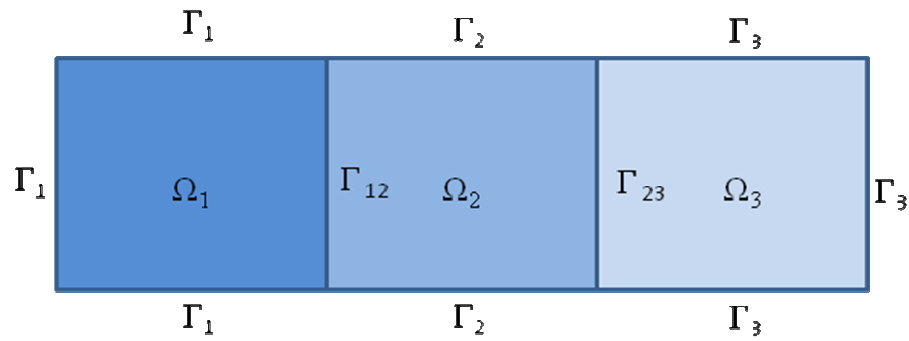


Figura 5.1 - Domínio dividido em três sub-regiões.

O sistema de equações resultante da aplicação do MEC na sub-região  $\Omega_1$  é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}]^1 & [\mathbf{H}]^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}]^1 & [\mathbf{G}]^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^1 \\ \{p\}^{12} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Para a sub-região  $\Omega_2$  é obtido,

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}]^2 & [\mathbf{H}]^{21} & [\mathbf{H}]^{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^2 \\ \{u\}^{21} \\ \{u\}^{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}]^2 & [\mathbf{G}]^{21} & [\mathbf{G}]^{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^2 \\ \{p\}^{21} \\ \{p\}^{23} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

e, por sua vez, para a sub-região  $\Omega_3$ :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}]^3 & [\mathbf{H}]^{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^3 \\ \{u\}^{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}]^3 & [\mathbf{G}]^{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^3 \\ \{p\}^{32} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

onde

$\Gamma_i$  – parte externa do contorno da região  $\Omega_i$ ;

$\Gamma_{ij}$  – contorno entre as regiões  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ ;

$\{u\}^i$ ,  $\{p\}^i$  – deslocamentos nodais e forças de superfície nos nós do contorno  $\Gamma_i$  da região  $\Omega_i$ ;

$\{u\}^{ij}$ ,  $\{p\}^{ij}$  – deslocamentos nodais e forças de superfície nos nós do contorno  $\Gamma_{ij}$  como parte da região  $\Omega_i$ ;

$[H]^i$ ,  $[G]^i$  – partes das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  obtidas para a região  $\Omega_i$  que multiplicam  $\{u\}^i$  e  $\{p\}^i$ , respectivamente;

$[H]^{ij}$ ,  $[G]^{ij}$  – partes das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  obtidas para a região  $\Omega_i$  que multiplicam  $\{u\}^{ij}$  e  $\{p\}^{ij}$ , respectivamente.

Aplicando as condições de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos, que são

$$\begin{aligned} \{u\}^{12} &= \{u\}^{21} \\ \{u\}^{23} &= \{u\}^{32} \\ \{p\}^{12} &= -\{p\}^{21} \\ \{p\}^{23} &= -\{p\}^{32} \end{aligned} \tag{5.4a-d}$$

o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [H]^1 & 0 & 0 & [H]^{12} & -[G]^{12} & 0 & 0 \\ 0 & [H]^2 & 0 & [H]^{21} & [G]^{21} & [H]^{23} & -[G]^{23} \\ 0 & 0 & [H]^{31} & 0 & 0 & [H]^{32} & [G]^{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}^1 \\ \{U\}^2 \\ \{U\}^3 \\ \{U\}^{12} \\ \{P\}^{12} \\ \{U\}^{23} \\ \{P\}^{32} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} [G]^1 & 0 & 0 & [G]^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [G]^2 & 0 & 0 & [G]^{21} & [G]^{23} & 0 \\ 0 & 0 & [G]^{31} & 0 & 0 & 0 & [G]^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}^1 \\ \{P\}^2 \\ \{P\}^3 \\ \{\bar{P}\}^{12} \\ \{\bar{P}\}^{21} \\ \{\bar{P}\}^{23} \\ \{\bar{P}\}^{32} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde  $\{\bar{P}\}^{ij}$  representa forças aplicadas na interface entre as regiões  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$ .

### 5.3. Aplicações

A seguir são apresentados exemplos de acoplamento entre sub-regiões discretizadas por métodos diferentes (MEC/MEF) e, também, pelo mesmo método (MEC/MEC e MEF/MEF). Com isso é mostrado que a técnica de sub-regiões é uma ferramenta eficiente de acoplamento.

#### 5.3.1. Acoplamento MEC/MEC

A cavidade circular reforçada da Figura 5.2 está submetida a uma pressão uniforme igual a  $1000\text{kN/m}^2$ . Deseja-se calcular os deslocamentos nos pontos indicados do domínio infinito considerando diferentes espessuras da camada de reforço.

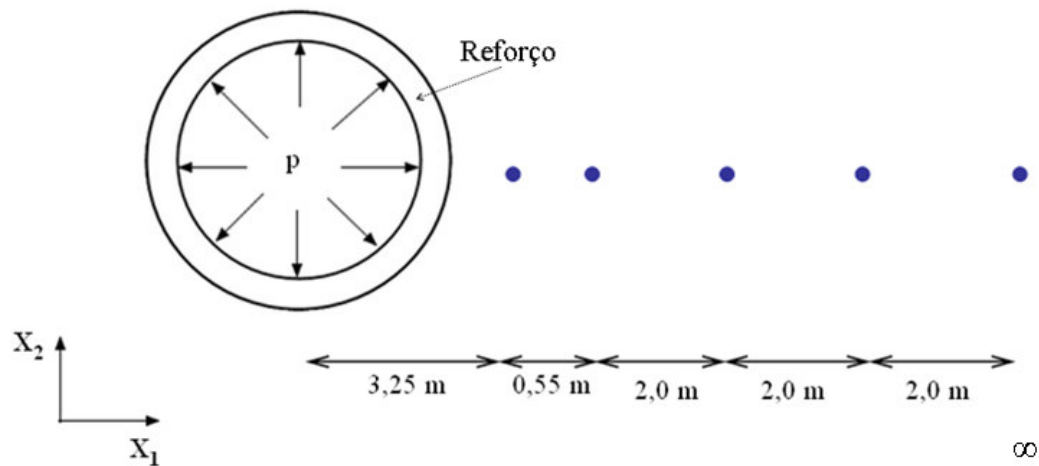


Figura 5.2 – Cavidade em meio infinito com reforço.

A camada de reforço possui módulo de elasticidade igual a  $25700000\text{kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson igual a 0,15. Por sua vez, o solo circundante tem módulo de elasticidade que vale  $12850000\text{kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson igual a 0,20.

O contorno da cavidade foi discretizado com 40 elementos lineares e o contorno do reforço com 80 elementos lineares, todos distribuídos uniformemente ao longo do perímetro.

Na Figura 5.3 são mostrados os deslocamentos nos pontos internos para espessuras de reforço iguais a 10cm, 20cm e 30cm. Também são apresentados os

valores de deslocamentos para o caso de não existir reforço, obtidos com a solução analítica e, também, com o MEC.

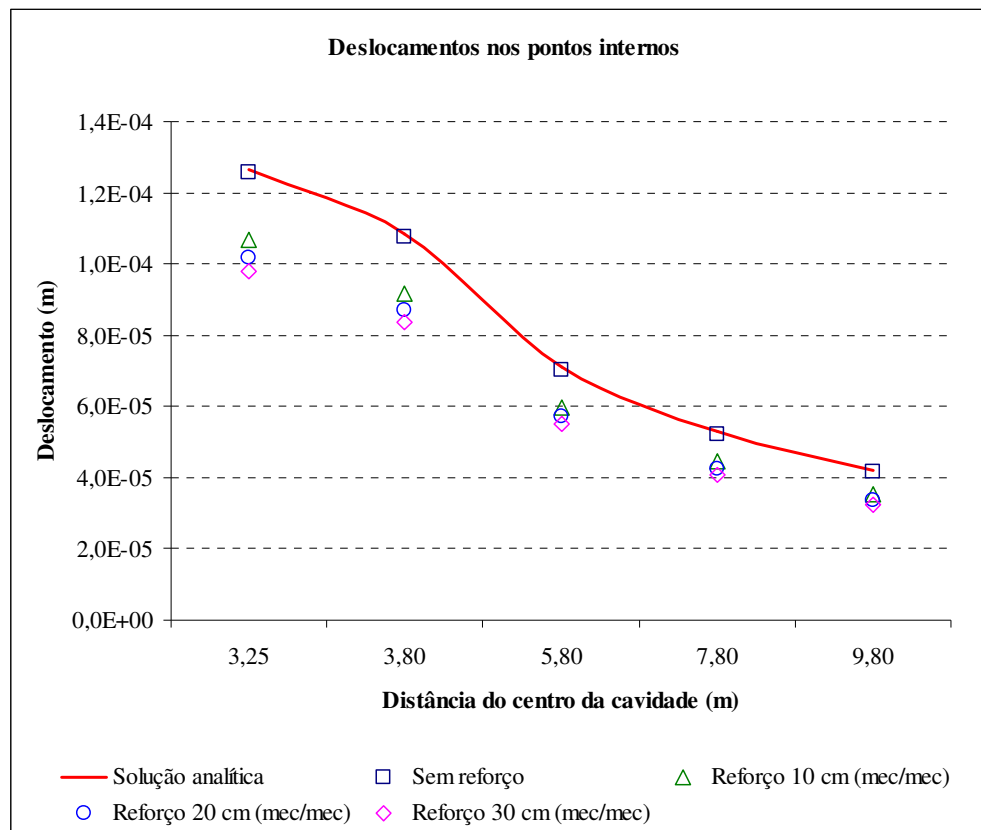


Figura 5.3 – Deslocamentos nos pontos do domínio.

Pode-se notar pelo gráfico que, como esperado, os deslocamentos ficam menores à medida que aumenta a espessura da camada de reforço, sendo que esta diminuição é menos acentuada à medida que se afasta do local de aplicação do carregamento.

### 5.3.2. Acoplamento MEF/MEF

O exemplo consiste em uma viga de 4m, engastada em uma extremidade, submetida a um carregamento igual a 0,2kN/m, uniformemente distribuído em todo o vão, como mostrado na Figura 5.4. A área da seção transversal tem  $0,3\text{m}^2$  e momento de inércia igual a  $0,01406\text{m}^4$ . O módulo de elasticidade do material é  $10000\text{kN/m}^2$ .

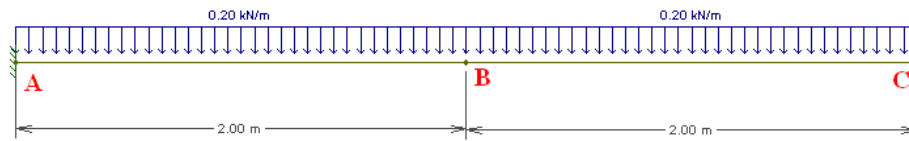


Figura 5.4 – Viga engastada

A viga foi analisada de duas formas distintas, quais sejam, considerando a mesma formada por apenas uma sub-região e por duas sub-regiões, que consistem em metade da viga, que possuem as mesmas propriedades. Na Tabela 5.1 são mostrados os valores de deslocamentos, em centímetros, nos pontos A, B e C para cada caso.

Tabela 5.1 – Deslocamentos nos pontos A, B e C (cm).

| Nó | 1 sub-região |        |        | 2 sub-regiões |        |        |
|----|--------------|--------|--------|---------------|--------|--------|
|    | dx           | dy     | dz     | dx            | dy     | dz     |
| A  | 0,000        | 0,000  | 0,000  | 0,000         | 0,000  | 0,000  |
| B  | 0,000        | -1,612 | -1,327 | 0,000         | -1,612 | -1,327 |
| C  | 0,000        | -4,552 | -1,517 | 0,000         | -4,552 | -1,517 |

O valor calculado do deslocamentos nos pontos escolhidos foi o mesmo, quer seja considerando uma ou duas sub-regiões. Dessa forma pode-se afirmar que a utilização da técnica de sub-regiões não agrega erros significativos aos resultados.

### 5.3.3. Acoplamento MEC/MEF

Este exemplo tem como objetivo verificar o acoplamento MEC/MEF. O problema consiste em uma chapa formada por duas sub-regiões ( $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ ), que são discretizadas pelo MEC, acopladas a uma estrutura reticulada formada por quatro barras, como é mostrado na Figura 5.5. São calculados os deslocamentos e as forças de superfície nos nós das sub-regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , assim como os deslocamentos nos nós da estrutura reticulada. Este problema é encontrado em Komatsu (1995) e os valores aqui calculados são comparados com os resultados obtidos pelo referido autor.

A chapa possui módulo de elasticidade igual a 1,0 e coeficiente de Poisson igual a 0. Por sua vez, a estrutura reticulada tem módulo de elasticidade igual a 1,0, área da seção transversal e o momento de inércia são iguais a 1,0 e 0,083333, respectivamente.

A barra 1 da estrutura reticulada está submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $p$  que vale 1. Todas as unidades utilizadas são compatíveis.

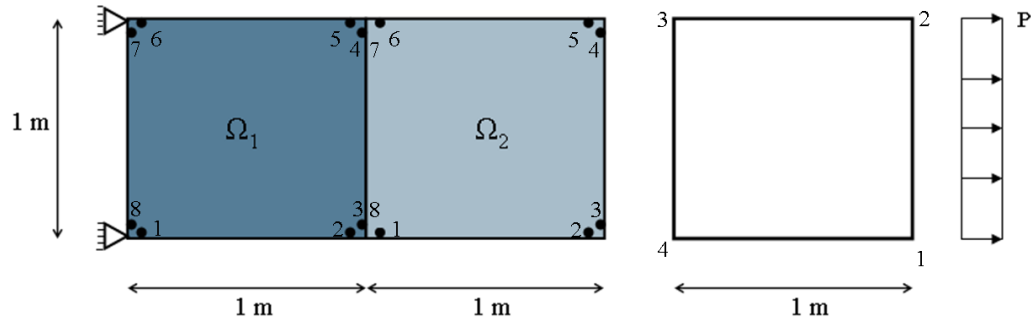


Figura 5.5 – Domínio bidimensional acoplado com estrutura reticulada.

Tabela 5.2 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região  $\Omega_1$ .

| Pto | Desl. x  | Desl. y   | Força sup. x | Força sup. y |
|-----|----------|-----------|--------------|--------------|
| 1   | 0,000000 | 0,000000  | 0,000000     | 0,000000     |
| 2   | 1,000348 | 0,000096  | 0,000000     | 0,000000     |
| 3   | 1,000348 | 0,000096  | 0,999984     | -0,000003    |
| 4   | 1,000348 | -0,000096 | 0,999984     | 0,000003     |
| 5   | 1,000348 | -0,000096 | 0,000000     | 0,000000     |
| 6   | 0,000000 | 0,000000  | 0,000000     | 0,000000     |
| 7   | 0,000000 | 0,000000  | -1,000003    | 0,000239     |
| 8   | 0,000000 | 0,000000  | -1,000003    | -0,000239    |

Tabela 5.3 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região  $\Omega_1$  obtidos por Komatsu (1995).

| Pto | Desl. x  | Desl. y   | Força sup. x | Força sup. y |
|-----|----------|-----------|--------------|--------------|
| 1   | 0,000000 | 0,000000  | 0,000000     | 0,000000     |
| 2   | 0,999998 | -0,000000 | 0,000000     | 0,000000     |
| 3   | 0,999998 | -0,000001 | 0,999998     | -0,000000    |
| 4   | 1,000001 | -0,000000 | 1,000001     | 0,000000     |
| 5   | 1,000000 | -0,000000 | 0,000000     | 0,000000     |
| 6   | 0,000000 | 0,000000  | 0,000000     | 0,000000     |
| 7   | 0,000000 | 0,000000  | -1,000000    | -0,000000    |
| 8   | 0,000000 | 0,000000  | -0,999999    | 0,000000     |

Tabela 5.4 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região  $\Omega_2$ .

| Pto | Desl. x  | Desl. y   | Força sup. x | Força sup. y |
|-----|----------|-----------|--------------|--------------|
| 1   | 1,000348 | 0,000096  | 0,000000     | 0,000000     |
| 2   | 2,000693 | 0,000015  | 0,000000     | 0,000000     |
| 3   | 2,000693 | 0,000015  | 1,000000     | -0,000197    |
| 4   | 2,000693 | -0,000015 | 1,000000     | 0,000197     |
| 5   | 2,000693 | -0,000015 | 0,000000     | 0,000000     |
| 6   | 1,000348 | -0,000096 | 0,000000     | 0,000000     |
| 7   | 1,000348 | -0,000096 | -0,999984    | -0,000003    |
| 8   | 1,000348 | 0,000096  | -0,999984    | 0,000003     |

Tabela 5.5 – Deslocamentos e forças de superfície nos nós da sub-região  $\Omega_2$  obtidos por Komatsu (1995).

| Pto | Desl. x  | Desl. y   | Força sup. x | Força sup. Y |
|-----|----------|-----------|--------------|--------------|
| 1   | 0,999998 | -0,000000 | 0,000000     | 0,000000     |
| 2   | 1,999996 | -0,000004 | 0,000000     | 0,000000     |
| 3   | 1,999996 | -0,000004 | 1,000001     | 0,000000     |
| 4   | 2,000002 | -0,000004 | 0,999998     | 0,000000     |
| 5   | 2,000002 | -0,000004 | 0,000000     | 0,000000     |
| 6   | 1,000001 | -0,000000 | 0,000000     | 0,000000     |
| 7   | 1,000001 | -0,000000 | -1,000001    | -0,000000    |
| 8   | 0,999998 | -0,000001 | 0,999998     | 0,000000     |

Tabela 5.6 – Deslocamentos nos nós da estrutura reticulada.

| Pto | Desl. x  | Desl. y   | Rotação z |
|-----|----------|-----------|-----------|
| 1   | 2,500693 | 0,000001  | -0,25001  |
| 2   | 2,500693 | -0,000001 | 0,25001   |
| 3   | 2,000693 | -0,000015 | -0,24999  |
| 4   | 2,000693 | 0,000015  | 0,24999   |

Tabela 5.7 – Deslocamentos nos nós da estrutura reticulada obtidos por Komatsu (1995).

| Pto | Desl. x  | Desl. y   | Rotação z |
|-----|----------|-----------|-----------|
| 1   | 2,500002 | 0,000001  | -0,249993 |
| 2   | 2,499996 | 0,000001  | 0,250006  |
| 3   | 1,999996 | -0,000004 | -0,249993 |
| 4   | 2,000002 | -0,000004 | 0,250006  |

Os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 5.2, 5.4 e 5.6, e são compatíveis com os valores apresentados por Komatsu, reproduzidos nas Tabelas 5.3, 5.5 e 5.7. Assim, pode-se afirmar que o procedimento de acoplamento MEC/MEF apresenta bons resultados.



## Capítulo 6

# O Programa Computacional

### 6.1. Introdução

Com base nas formulações do Método dos Elementos de Contorno e do Método dos Elementos Finitos foi desenvolvido um código computacional para, entre outras aplicações, realizar a análise de problemas de interação entre o solo e estruturas reticuladas. O programa foi desenvolvido em linguagem de programação C.

Inicialmente as duas técnicas numéricas foram implementadas separadamente, criando-se assim dois programas distintos, os quais foram usados para estudar os casos apresentados nos Capítulos 3 e 4. Posteriormente foi criado um único programa que contém todos os arquivos fontes presentes nos dois programas e alguns arquivos complementares, usados para realizar o acoplamento entre os métodos.

O código é dividido em diversos arquivos fontes onde estão escritas as funções que são chamadas pelo programa principal. As funções mais importantes são apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Principais funções.

| <b>Função</b> | <b>Descrição</b>  |
|---------------|---|
| Main          | Função principal onde é feita a leitura dos arquivos de entrada, chamada das funções e impressão dos resultados.  |
| GH            | Monta o sistema de equações das sub-regiões discretizadas com o MEC.  |
| AllocM        | Aloca, nas matrizes globais, as matrizes provenientes das diversas sub-regiões que, no caso do MEC, são as matrizes de influência [G] e [H]. Para o MEF, são as matrizes de rigidez [K] e de transformação [C]. |
| AllocV        | Aloca, no vetor global, os vetores de valores prescritos de cada sub-região.  |
| StiffMat      | Monta a matriz de rigidez global [K] das estruturas reticuladas.  |
| MatrixGNeq    | Monta a matriz de transformação global [C] das estruturas reticuladas.  |
| VRes          | Separa por sub-região os resultados obtidos pela resolução do sistema de equações global.   |
| FirstNode     | Realiza a integração analítica, necessária na montagem das matrizes [G] e [H], para o caso do ponto fonte ser o primeiro nó do elemento.  |
| SecondNode    | Realiza a integração analítica, necessária na montagem das matrizes [G] e [H], para o caso do ponto fonte ser o segundo nó do elemento.   |
| IntNum        | Realiza a integração numérica, necessária na montagem das matrizes [G] e [H].   |
| MatHc         | Acrescenta à matriz global [H], através de consideração de movimento de corpo rígido, as sub-matrizes [c].  |
| BStress       | Calcula as tensões nos pontos do contorno.  |
| CoordGauss    | Informa os pesos e coordenadas dos pontos de Gauss usados na integração numérica.   |
| NumGauss      | Calcula o número de pontos de Gauss necessários para realizar a integração numérica.  |
| Kelvin        | Calcula a solução fundamental de Kelvin 2 D.  |
| Melan         | Calcula a solução fundamental de Melan.   |

Os dados são passados ao programa por meio de arquivo com extensão .txt cujo formato é baseado no modelo de arquivo neutro (*Neutral File*) gerado por pré-processadores usados para resolver problemas que envolvem o MEF. O *Neutral File* é um formato de arquivo criado com os objetivos de conter todas as informações necessárias para os programas de pré, pós e análise por elementos finitos, ser facilmente legível para programas em FORTRAN ou C e ter uma estrutura muito simples (TecGraf, 2008). O programa realiza a análise seguindo os passos mostrados no fluxograma da Figura 6.1.



Figura 6.1 – Fluxo de funcionamento do programa computacional.

## 6.2. Entrada de dados

Para a entrada de dados é necessário um arquivo para cada sub-região e um arquivo com dados gerais sobre o problema a ser resolvido. O arquivo geral, chamado `nf_geral.txt`, contém as informações básicas do problema, tais como número de sub-regiões e de interfaces, que são detalhadas na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Campos do arquivo de dados de entrada gerais.

| <b>Campo</b>     | <b>Descrição</b>   |
|------------------|--|
| %NUM.SUBREGIONS  | Número de sub-regiões.   |
| %NUM.INTERFACES  | Número de interfaces.  |
| %NUM.DOF         | Número de graus de liberdade.  |
| %NUM.DOF.COUPLED | Número de graus de liberdade acoplados.  |
| %NUM.DOF.FREE    | Número de graus de liberdade não-acoplados.  |
| %DOF.COUPLED     | Pares de graus de liberdade acoplados por interface.   |
| %INFO.SUBREGIONS | Informações de cada sub-região: número de graus de liberdade, número de nós e número de graus de liberdade acoplados.                              |
| %INFO.INTERFACES | Informações de cada interface: número de graus de liberdade acoplados, identificador da primeira sub-região e identificador da segunda sub-região. |
| %END             | Fim do arquivo.  |

Para cada sub-região discretizada com o MEC é necessário um arquivo de dados que informa, por exemplo, se a sub-região é finita ou infinita e quais graus de liberdade da mesma estão acoplados. Na Tabela 6.3 são mostrados todos os dados necessários para a análise destas sub-regiões.

Tabela 6.3 – Campos do arquivo de dados de entrada das sub-regiões discretizadas com o MEC.

| <b>Campo</b>              | <b>Definição</b>   |
|---------------------------|--|
| %HEADER.ANALYSIS          | Tipo de análise: estado plano de tensão ou estado plano de deformação.       |
| %DOMAIN                   | Tipo de domínio: finito ou infinito.   |
| %FUNDAMENTAL.SOLUTION     | Tipo de solução fundamental: Kelvin ou Melan.                                |
| %NODE                     | Número de nós.   |
| %NODE.COORD               | Coordenadas dos nós.   |
| %INTERIOR.NODE            | Número de pontos internos.   |
| %INTERIOR.NODE.COORD      | Coordenadas dos pontos internos.   |
| %ELEMENT                  | Número de elementos.   |
| %ELEMENT.CONECTIVITY      | Conectividade dos elementos.   |
| %MATERIAL.PROPERTY        | Propriedades dos materiais: módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. |
| %BODY.FORCE               | Força volumétrica.   |
| %NODAL.FORCE.VALUE        | Forças prescritas.   |
| %NODAL.DISPLACEMENT.VALUE | Deslocamentos prescritos.  |
| %DOF.COUPLED              | Graus de liberdade acoplados.  |
| %END                      | Fim do arquivo.  |

Assim como para as sub-regiões discretizadas pelo MEC, as discretizadas com o MEF precisam de um arquivo de entrada de dados para cada sub-região. Os dados necessários para a análise do problema são os seguintes:

Tabela 6.4 – Campos do arquivo de dados de entrada das sub-regiões discretizadas com o MEF.

| <b>Campo</b>        | <b>Definição</b>  |
|---------------------|---|
| %NODE               | Número de nós.  |
| %NODE.COORD         | Coordenadas dos nós.  |
| %ELEMENT            | Número de elementos.  |
| %ELEMENT.CONEC      | Conectividade dos elementos.  |
| %MATERIAL           | Propriedades dos materiais: módulo de elasticidade, área da seção transversal e momento de inércia. |
| %NODAL.LOAD         | Forças aplicadas nos nós.   |
| %LINEAR.LOAD        | Carregamentos linearmente distribuídos nos elementos.   |
| %NODAL.DISPLACEMENT | Deslocamentos prescritos.   |
| %DOF.COUPLED        | Graus de liberdade acoplados.   |
| %ELEMENT.M          | Elementos que estão na interface ou que possuem carregamentos distribuído.                          |
| %END                | Fim do arquivo.   |

### 6.3. Saída de dados

Os resultados obtidos são impressos em arquivos com extensão .txt, separados por sub-região. Os dados do arquivo de saída para sub-regiões resolvidas pelo MEC são divididos em duas partes, quais sejam, para pontos que estão no contorno e para pontos internos (Tabela 6.5).

Tabela 6.5 – Campos do arquivo de dados de saída das sub-regiões discretizadas com o MEC.

| <b>Campo</b>                         | <b>Definição</b>   |
|--------------------------------------|--|
| Boundary points                      | Parte do arquivo que contém os resultados relativos aos pontos do contorno.                                |
| Displacements<br>Node - ux - uy      | Informa o número do nó e os valores de deslocamento nas direções x e y.                                    |
| Forces<br>Node - fx - fy             | Informa o número do nó e os valores de força de superfície nas direções x e y.                             |
| Stresses<br>Node - Sxx - Sxy - Syy   | Informa o número do nó e os valores de tensão nas direções xx, xy e yy.                                    |
| Strains<br>Node - Dxx - Dxy -Dyy     | Informa o número do nó e os valores de deformação nas direções xx, xy e yy.                                |
| Stresses: elements                   | Parte do arquivo que contém os valores de tensão por elemento de contorno.                                 |
| First node:<br>N° - Sxx - Sxy - Syy  | Informa o número do elemento e os valores de tensão, no primeiro nó do elemento, nas direções xx, xy e yy. |
| Second node:<br>N° - Sxx - Sxy - Syy | Informa o número do elemento e os valores de tensão, no segundo nó do elemento, nas direções xx, xy e yy.  |
| Internal points                      | Parte do arquivo que contém os resultados relativos aos pontos internos.                                   |
| Displacements<br>Node - ux - uy      | Informa o número do ponto interno e os valores de deslocamento nas direções x e y.                         |
| Stresses<br>Node - Sxx - Sxy - Syy   | Informa o número do ponto interno e os valores de tensão nas direções xx, xy e yy.                         |
| Strains<br>Node - Dxx - Dxy -Dyy     | Informa o número do ponto interno e os valores de deformação nas direções xx, xy e yy.                     |

Na Tabela 6.6 são mostrados os dados de saída para sub-regiões discretizadas com o MEF.

Tabela 6.6 – Campos do arquivo de dados de saída das sub-regiões discretizadas com o MEF.

| <b>Campo</b>                                     | <b>Definição</b>   |
|--|--|
| Displacements<br>Node - ux - uy - uz             | Informa o número do nó e os valores de deslocamento nas direções x e y e a rotação.  |
| Forces<br>Node - fx - fy - fz                    | Informa o número do nó e os valores de força nas direções x e y e o momento.   |
| Esforços<br>Num - N1 - Q1 - M1<br>- N2 - Q2 - M2 | Informa o número do elemento e os valores de esforço normal, esforço cortante e o momento fletor para os dois nós do elemento. |



# Capítulo 7

## Aplicações

### 7.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados três exemplos que fazem uso da técnica de sub-regiões, seja para acoplamento MEC/MEC ou para acoplamento MEC/MEF. Procura-se analisar a influência de estruturas de reforço na massa de solo sob a qual atua um carregamento.

### 7.2. Exemplo 1

Este exemplo representa o caso de um carregamento uniformemente distribuído na superfície de um semi-plano. Sob parte do carregamento existe uma vala preenchida com material de características diferentes do meio circundante, cujas dimensões são mostradas na Figura 7.1.

Deseja-se verificar a distribuição de tensões e deformações ao longo da linha vertical que passa no centro da vala ( $L$ ), considerando dois tipos diferentes de material de preenchimento da vala, cujas propriedades são apresentadas na Tabela 7.1.

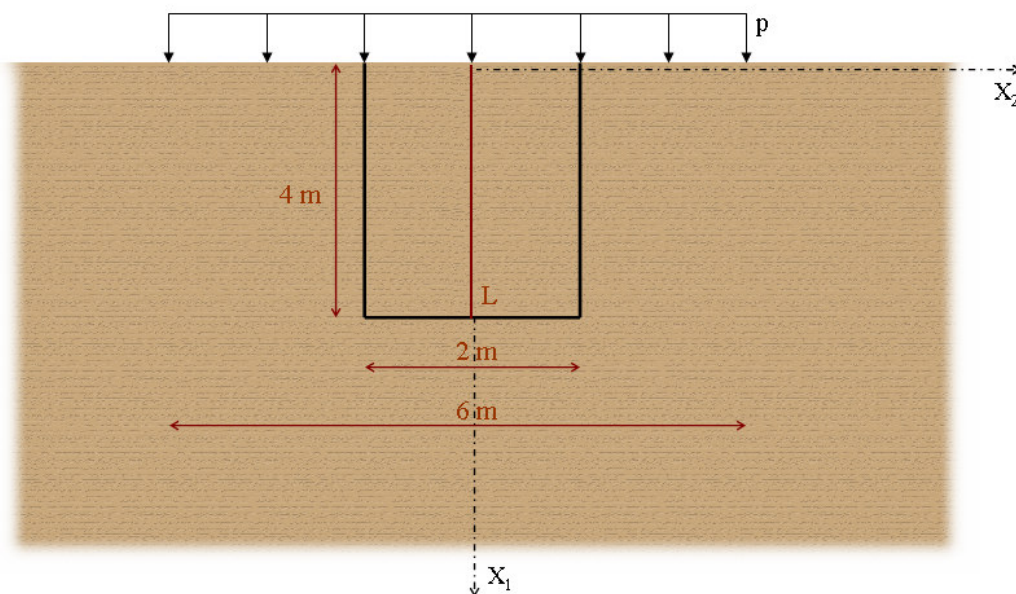


Figura 7.1 – Carregamento na superfície do semi-plano e contorno da vala.

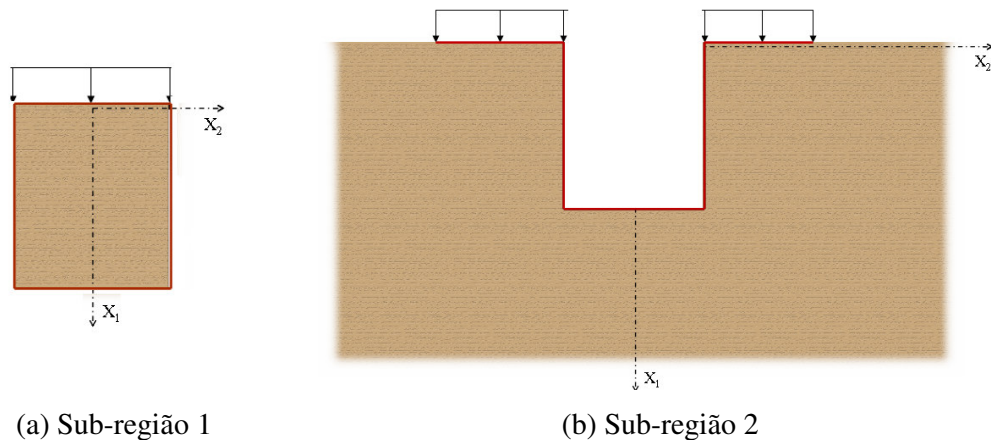
As propriedades dos materiais apresentadas na Tabela 7.1 são as mesmas usadas por Santos Júnior e Vieira (2006). O material 1 equivale ao solo que forma o meio semi-infinito, enquanto os materiais 2 e 3 representam o solo usado no aterro da vala. O material 2 representa o caso de um aterro compacto e o material 3, por sua vez, de um aterro fofo.

Tabela 7.1 – Propriedades dos materiais do exemplo 1.

| Material | Módulo de elasticidade<br>(kN/m <sup>2</sup> ) | Coefficiente de Poisson | Peso específico<br>(kN/m <sup>3</sup> ) |
|----------|--|-------------------------|---|
| 1        | 80000,0  | 0,25                    | 18,0                                    |
| 2        | 70600,0  | 0,25                    | 18,0                                    |
| 3        | 8800,0   | 0,25                    | 15,0                                    |

Inicialmente é considerado o caso em que o material que preenche a vala é o mesmo do meio semi-infinito. Comparam-se os valores de tensões verticais ao longo da linha L com a solução analítica do problema, obtida pela Equação (3.71a-c). Para isso o domínio é dividido em duas sub-regiões, uma finita e outra semi-infinita, como apresentado na Figura 7.2, onde as linhas vermelhas representam a parte do contorno

que é discretizado. A sub-região 1 foi discretizada com 48 elementos lineares e a sub-região 2 com 56 elementos. Este procedimento é feito para verificar se a consideração de duas sub-regiões causa diferenças significativas nos valores de tensão calculados.



(a) Sub-região 1

(b) Sub-região 2

Figura 7.2 – Domínio do problema dividido em duas sub-regiões.

Como pode ser observado na Figura 7.3, os valores de tensão calculados com a consideração descrita anteriormente são compatíveis com a solução analítica do problema, apresentando um erro médio de 0,48%. Com isso se tem mais um indicativo que o procedimento de acoplamento MEC/MEC é também eficiente para o caso de acoplamento entre regiões finitas e semi-infinitas.

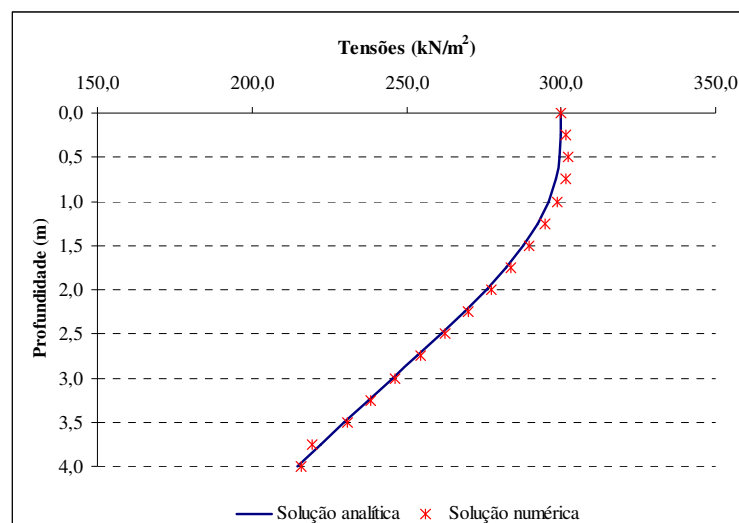


Figura 7.3 – Comparação entre a solução analítica do problema e o acoplamento.

No gráfico mostrado na Figura 7.4 são mostrados os valores de tensões verticais ao longo da linha L para diferentes tipos de material da vala. Nota-se que a maior variação nos valores de tensão ao longo da profundidade ocorre no caso de o material que representa o solo fofo estar presente na vala.

Nos casos em que o material presente na vala é o material 1, o valor da tensão no fundo da vala é aproximadamente 28% menor do que a tensão na superfície. Para a situação em que existe o material 2, essa redução no valor da tensão é aproximadamente igual ao caso anterior, sendo por volta de 30%.

Quando o material que preenche a vala é o material 3 somente 34% da tensão aplicada na superfície chega ao fundo da vala.

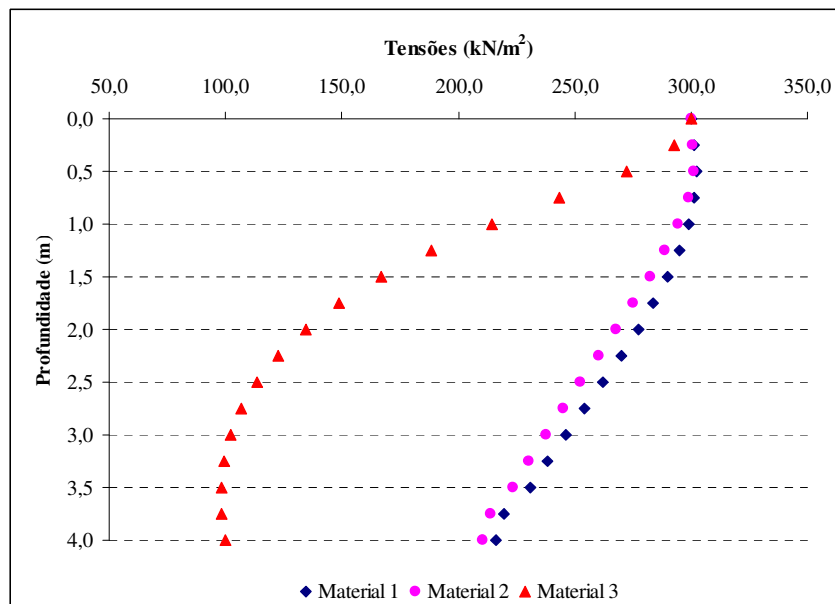


Figura 7.4 – Tensões ao longo da linha L para os diferentes materiais.

Na Figura 7.5 são mostradas as deformações, ao longo da linha L, para os diferentes materiais presentes na vala. Com relação às deformações na superfície, pode-se notar que o caso em que na vala está presente o material 3 ocorre o maior valor de deformação. Em comparação a este valor, as deformações são aproximadamente 72% menores, quando na vala existe o material 2. No caso em que o material 1 está presente a diferença é de aproximadamente 75%, não diferindo muito dos valores encontrados com

o uso do material 2, visto que ambos possuem módulo de elasticidade não muito diferentes.

A redução no valor das deformações ao longo da profundidade da vala foi maior no caso do material 3, sendo da ordem de 74%. No caso dos materiais 1 e 2 essa redução foi de aproximadamente 39% e 42%, respectivamente.

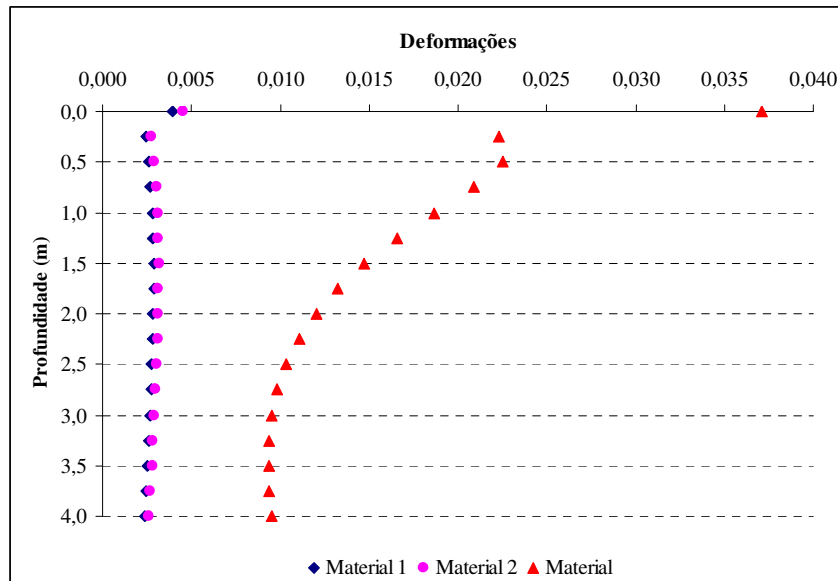


Figura 7.5 - Deformações ao longo da linha L para os diferentes materiais.

Foi estudado também o caso em que se considera o peso-próprio do material presente na vala. Para isso foi usada a técnica de integração radial (RIM) descrita no capítulo 3, que pode ser usada para domínios homogêneos sem necessidade de discretização do mesmo.

O gráfico da Figura 7.6 mostra os valores de tensões ao longo da linha L para os três diferentes materiais que podem estar contidos na vala. Percebe-se que o comportamento é praticamente o mesmo com relação ao caso em que o peso-próprio não é considerado, ocorrendo o mesmo para as deformações, mostradas na Figura 7.7.

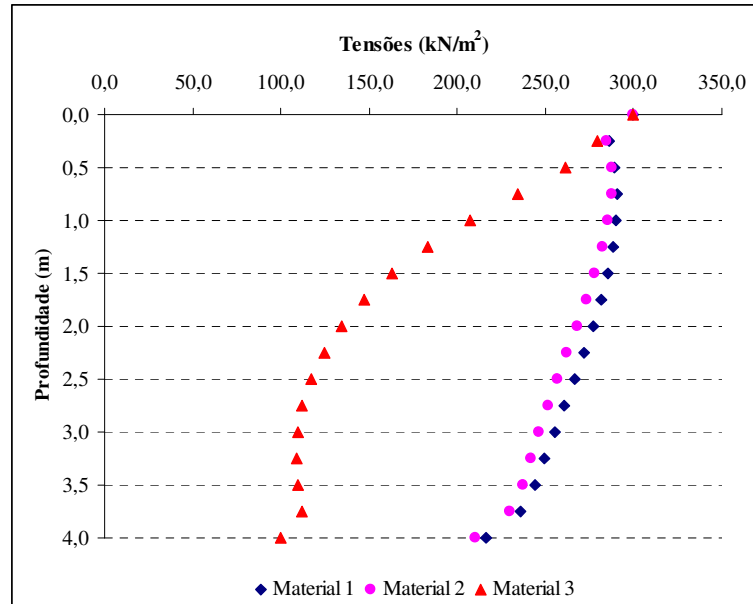


Figura 7.6 - Tensões ao longo da linha L para os diferentes materiais, considerando seu peso-próprio.

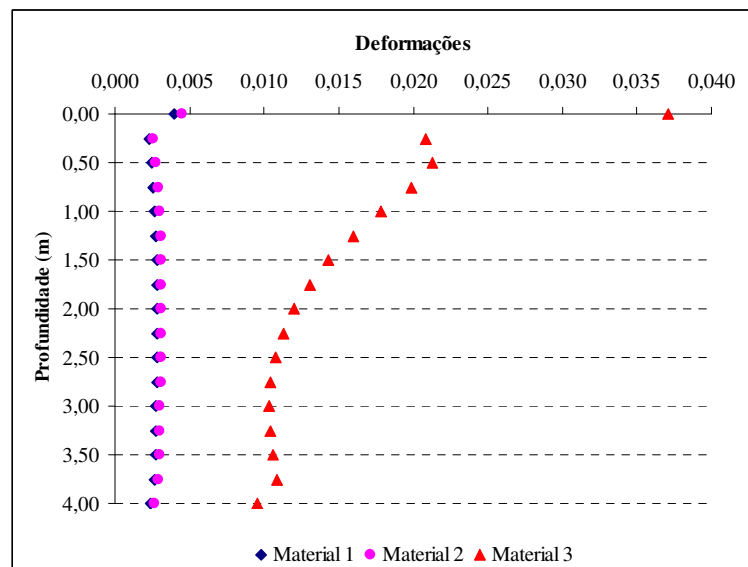


Figura 7.7 - Deformações ao longo da linha L para os diferentes materiais, considerando seu peso-próprio.

A influência da consideração do peso-próprio dos materiais nos valores de tensões e deslocamentos pode ser visto mais claramente na Figura 7.8, para tensões, e na Figura 7.9, para deformações.

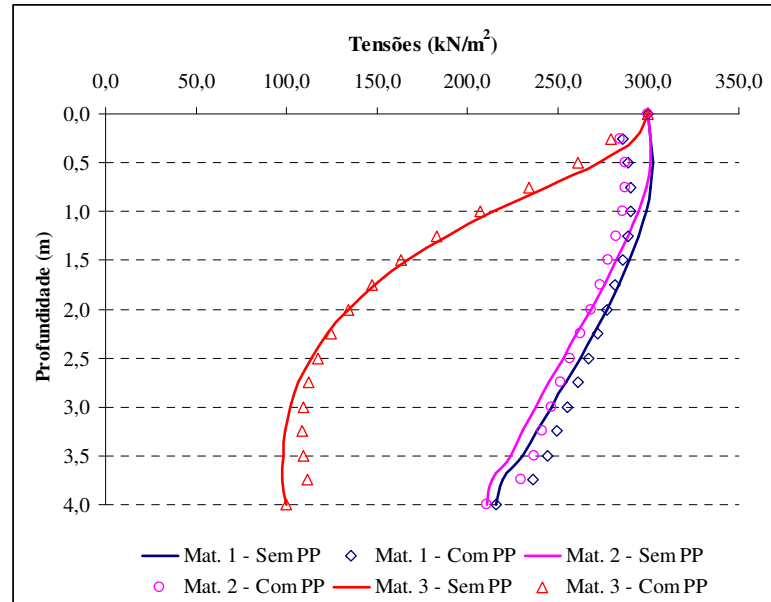


Figura 7.8 – Influência da consideração do peso-próprio do material da vala no valor das tensões.

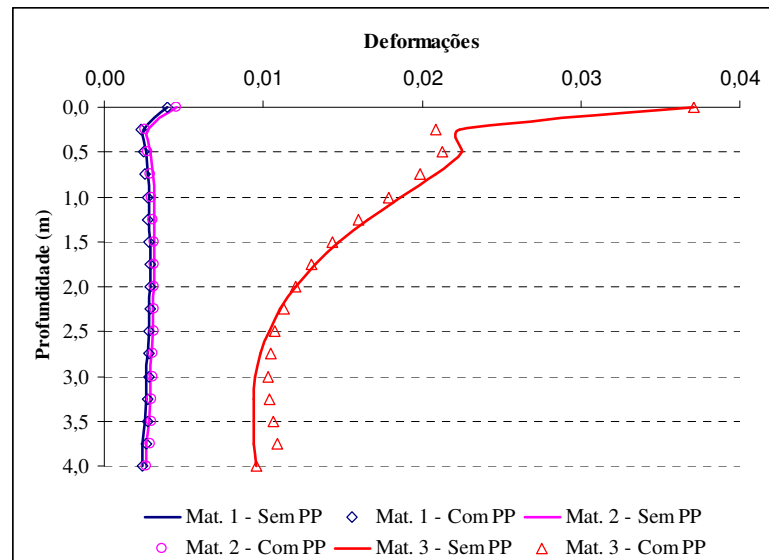


Figura 7.9 - Influência da consideração do peso-próprio do material da vala no valor das deformações.

### 7.3. Exemplo 2

Considera-se o caso de uma cavidade circular em um meio semi-infinito, cujo centro dista 3m da superfície e que está submetida à pressão interna de  $300\text{kN/m}^2$ . O módulo de elasticidade do material é igual a  $80000\text{kN/m}^2$  e o coeficiente de Poisson, 0,25. O objetivo é verificar a influência da colocação de um reforço com espessura de 10cm no contorno da cavidade pressurizada. Para isso são calculados os deslocamentos, na direção radial, de vinte pontos localizados ao longo da linha tracejada L (Figura 7.10) para os casos de haver ou não o reforço.

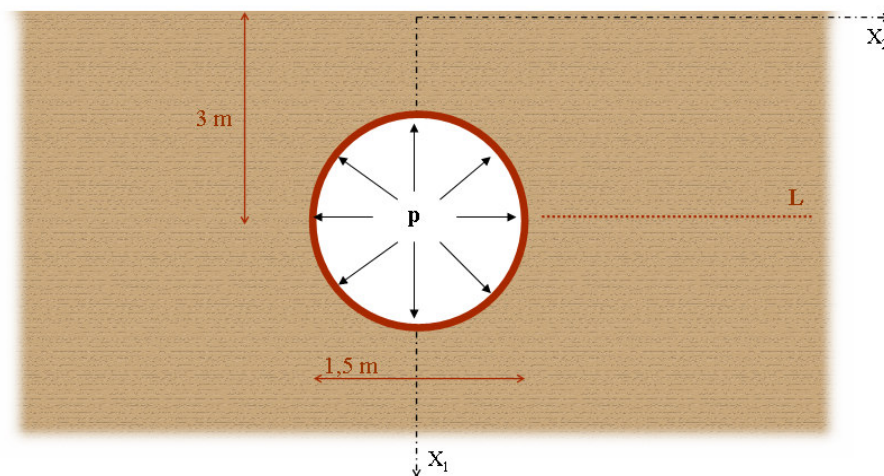


Figura 7.10 – Posição da cavidade com relação à superfície do semi-plano.

O meio semi-infinito é discretizado com o MEC, usando a solução fundamental de Melan, que exige a discretização apenas do contorno da cavidade. O reforço, representado pela linha vermelha da Figura 7.10, é discretizado com o MEF, cujos elementos possuem módulo de elasticidade igual a  $360000\text{kN/m}^2$ . O contorno da cavidade e o reforço foram discretizados com 24 elementos.

No gráfico da Figura 7.11 são mostrados os valores de deslocamento nos pontos localizados ao longo da linha L, para os casos em que existe ou não o reforço. Como esperado, os deslocamentos diminuem com o aumento da distância ao ponto onde o carregamento é aplicado. No caso em que não existe reforço, o deslocamento no ponto



mais distante da cavidade é aproximadamente 66% menor que o deslocamento do ponto mais próximo.

A colocação de um reforço no contorno da cavidade acarreta uma diminuição nos valores dos deslocamentos, como pode ser visto na Figura 7.11. O comportamento dos deslocamentos ao longo da linha L é o mesmo para o caso em que não há reforço, ou seja, uma diminuição nos seus valores com o aumento da distância à cavidade. Neste caso, a diferença entre o deslocamento do último ponto em relação ao primeiro é por volta de 57%, ou seja, 9% menor do que no caso em que não existe a camada de reforço.

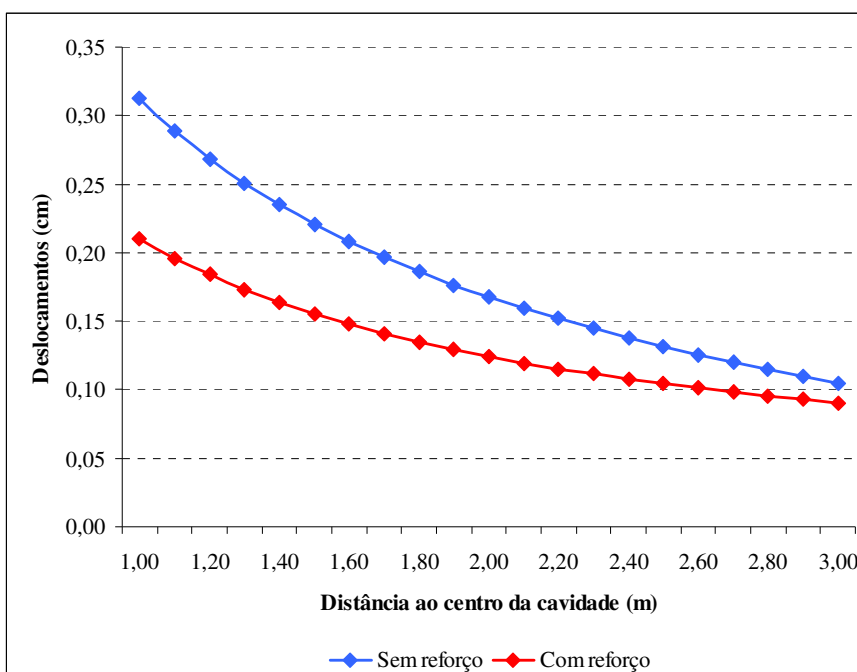


Figura 7.11 – Deslocamentos nos pontos do domínio.

Na Figura 7.12 pode ser visto mais claramente a influência da camada de reforço na magnitude dos deslocamentos. Para o ponto mais próximo do contorno da escavação, ou seja, do ponto de aplicação do carregamento, a redução no valor do deslocamento é de 33%. À medida que os pontos ficam mais distantes do contorno da cavidade a influência da camada de reforço diminui, assim, para o último ponto que está a 3m do contorno, o deslocamento é reduzido em apenas 14%.

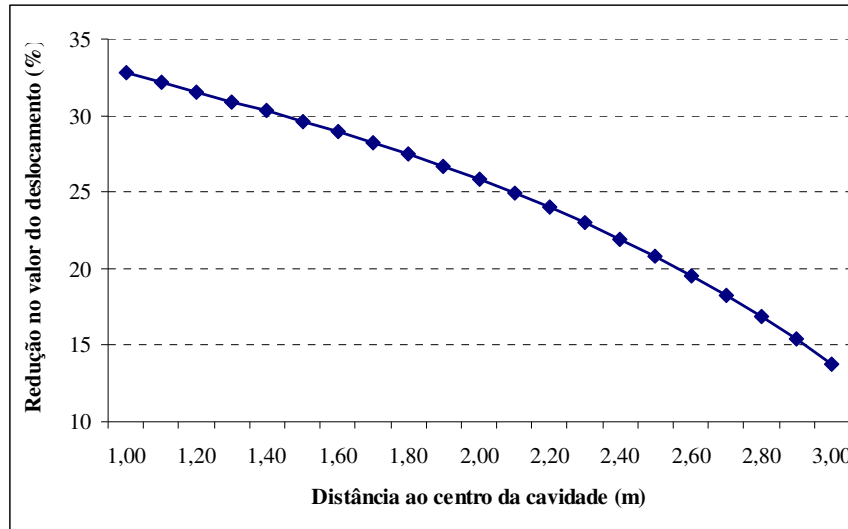


Figura 7.12 – Porcentagem da redução dos deslocamentos.

#### 7.4. Exemplo 3

Este exemplo é baseado em um caso apresentado no trabalho de Barbirato (1999). O caso consiste em um carregamento uniforme na superfície de um semi-espço, distribuído em uma faixa de comprimento finito, localizado próximo a uma escavação. São medidos os deslocamentos ao longo da parede mais próxima à escavação.

Neste trabalho o problema representa o caso em que o carregamento é distribuído em uma faixa de comprimento infinito e que a escavação também tem comprimento infinito. Desta forma, o problema pode ser analisado com um caso de estado plano de deformação.

Além de calcular os deslocamentos ao longo da parede da vala deseja-se verificar qual a influência, na magnitude destes deslocamentos, de uma camada de reforço com 10cm de espessura e módulo de elasticidade igual a  $160000\text{kN/m}^2$ , colocada sob o carregamento  $p = 300\text{kN/m}^2$ . As dimensões da escavação e sua posição com relação ao carregamento são mostradas na Figura 7.13. O meio semi-infinito possui módulo de elasticidade igual a  $80000\text{kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson igual a 0,25.

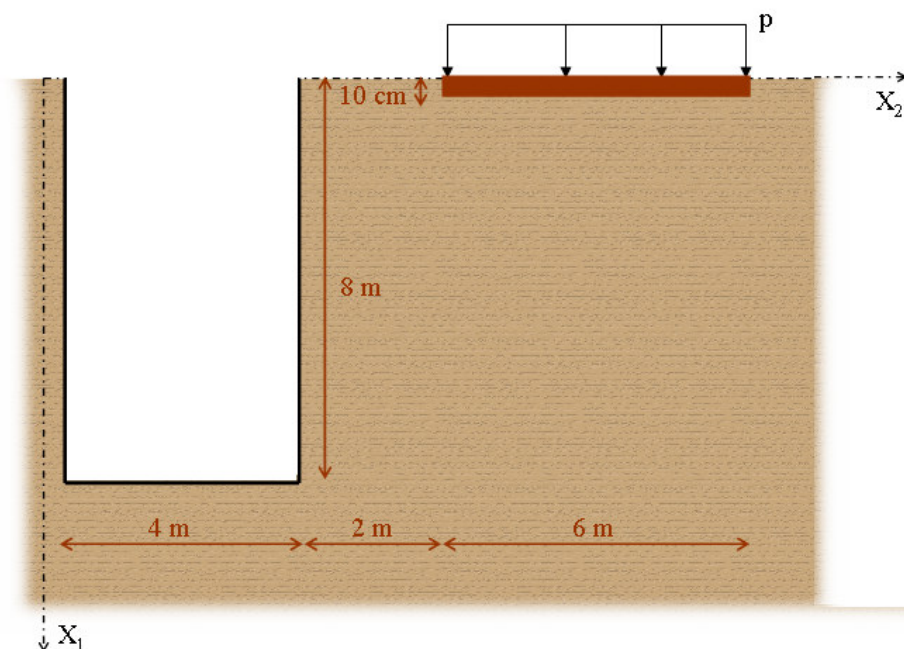
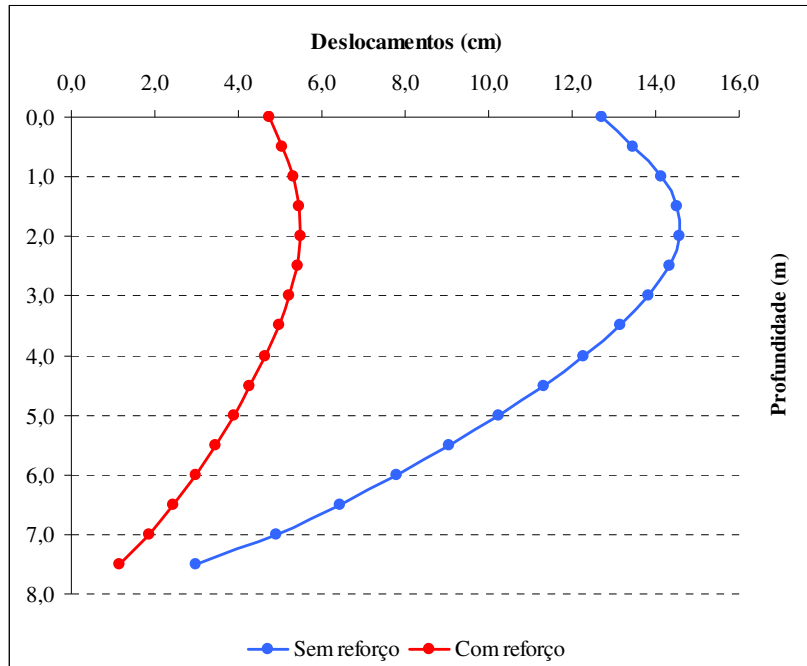


Figura 7.13 – Dimensões da vala e posição do carregamento.

O contorno da escavação foi discretizado com 40 elementos de contorno lineares e a parte da superfície sob o carregamento, com 6 elementos. Por sua vez, o reforço foi discretizado com 6 elementos finitos.

No gráfico da Figura 7.14 são mostrados os deslocamentos, na direção  $X_2$ , ao longo da parede mais próxima ao carregamento, para as situações com e sem reforço.

A utilização da camada de reforço sob o carregamento causa uma diminuição média de aproximadamente 62% na magnitude dos deslocamentos, na direção  $X_2$ , ao longo da parede mais próxima do carregamento. A maior redução acontece no topo da parede e é igual a 62,65%, a menor acontece na base sendo igual a 61,37%.

Figura 7.14 – Deslocamentos na direção  $x_2$ .

## Capítulo 8

### Considerações Finais

#### 8.1. Conclusões

O acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos é uma alternativa muito eficaz para analisar problemas de interação entre solo e estruturas. O solo, sendo um meio semi-infinito, pode ser analisado de forma bastante simplificada com a utilização da solução fundamental de Melan, devido à necessidade de discretização apenas da superfície sob carregamento. Com uma quantidade relativamente pequena de dados provenientes da sub-região que representa o solo, é diminuído o esforço computacional necessário para resolver o problema.

A técnica de sub-regiões, utilizada para promover o acoplamento entre os dois métodos citados é bastante eficiente. Consistindo basicamente em manipulação e alocação de matrizes, a técnica é capaz de realizar o acoplamento entre métodos iguais (MEC/MEC e MEF/MEF) e diferentes (MEC/MEF).

O MEC se mostrou bastante eficiente, principalmente em problemas envolvendo meios infinitos e semi-infinitos, como no caso de cavidades pressurizadas presentes nestes meios. Com discretizações não muito refinadas foram obtidos resultados compatíveis com as soluções analíticas dos problemas como, por exemplo, no caso de carregamento uniformemente distribuído na superfície, onde com apenas dois elementos de contorno foram obtido resultados muito satisfatórios.

Uma das limitações do MEC aparece quando os pontos internos se encontram muito próximos do contorno, pois com o raio tendendo a zero, ocorre singularidade da solução fundamental. Com isso os valores de deformação e, principalmente, de tensão diferem bastante da solução exata com a proximidade do contorno. Esses resultados divergentes são devidos, também, à utilização de poucos pontos de integração, assim

utilizando uma maior quantidade de pontos na integração numérica ou utilizando integração analítica, poderiam ser obtidos melhores resultados.

A análise de sub-regiões muito estreitas, ou seja, que possuem um contorno muito extenso e domínio reduzido, se torna inviável por conta da proximidade dos pontos aos elementos de contorno. Este fato foi observado quando da tentativa de modelar a vala presente no estudo de caso de Santos Júnior e Vieira (2006), a qual não foi possível devido à suas dimensões.

O elemento finito escolhido para representar as estruturas se mostrou adequado para os exemplos analisados, onde representou um reforço colocado sob o carregamento. Porém o elemento limitou o tipo de exemplos que podem analisados, isso devido à relação entre área da seção transversal e o comprimento do elemento que deve ser mantida dentro de certos limites, para que o mesmo possa ser caracterizado como barra. Assim, pode-se afirmar que para tornar a ferramenta desenvolvida mais eficiente é necessária a inclusão de outros elementos finitos no programa computacional.

O sistema resultante do acoplamento entre os métodos pode apresentar problemas de mau condicionamento, pois pode conter valores com ordem de grandeza muito diferente entre si. Este problema foi contornado com a adoção de um fator de escala, aplicado na matriz de transformação [C] do MEF.

A análise do problema de uma vala com diferentes materiais de aterro e submetida a uma carregamento uniformemente distribuído pôde ser analisada de forma eficiente com a utilização do acoplamento MEC/MEC. A solução fundamental de Melan permitiu que fosse discretizada apenas a parte da superfície sob a carga e o contorno da escavação. A utilização da técnica de integração radial permitiu a consideração do peso-próprio do material da vala sem necessidade de discretização do domínio. Com base nas análises pode-se afirmar que a colocação do material de menor módulo de elasticidade dentro da vala leva a grandes deformações, principalmente na superfície. Se for considerado o caso em que este exemplo represente o caso de uma vala feita em uma rua para a colocação de tubulações, essas deformações podem levar a problemas na pavimentação da rua como fissuração do mesmo.

O elemento finito de pórtico se mostrou eficiente para modelar reforços localizados sobre uma camada de solo onde atua um carregamento. A utilização do reforço possibilitou uma redução significativa nos deslocamentos que ocorrem na massa

de solo. Essa redução chega a mais de 60% para os deslocamentos na parede de vala próxima a um carregamento.

Assim, pode-se afirmar que os resultados obtidos com a utilização do código desenvolvido foram bastante satisfatórios.

## **8.2. Sugestões para trabalhos futuros**

Uma das principais melhorias a serem feitas no programa desenvolvido é a adição de outros elementos finitos para que possa ser analisada uma maior variedade de problemas, tais como o elemento triangular de três nós (T3) e o elemento de arco, que melhor se ajustaria ao caso de reforço de cavidades circulares.

Sugere-se a implementação do cálculo das tensões no contorno por meio das equações integrais para substituir o método aproximado que é mais comumente usado.

É indicada a expansão do código para possibilitar a análise transiente e elastoplástica, assim como o estudo de problemas tridimensionais. Para isso, seria importante a mudança do código para a linguagem de programação C++, usando a idéia de programação orientada a objetos, que facilitaria a adição de novas funcionalidades ao código.

Por fim, sugere-se a implementação do acoplamento do Método dos Elementos de Contorno com outros métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Discretos.

## Referências bibliográficas

- ALIABADI, M.H. (2002). **The Boundary Element Method**. V.2. John Wiley & Sons.
- ALMEIDA, F.P.A. (2003). **Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estruturas**. 285p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- ALMEIDA, V.S. (2003). **Análise da Interação Solo Não-Homogêneo/Estrutura Via Acoplamento MEC/MEF**. 192p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- ALMEIDA, V.S.; PAIVA, J.B. (2004). **A mixed BEM-FEM formulation for layered soil-structure interaction**. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 28, pp. 1111-1121.
- BARBIRATO, J.C.C. (1999). **Método dos Elementos de Contorno Com a Reciprocidade Dual para a Análise Transiente Tridimensional da Mecânica do Fraturamento**. 246p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BATHE, K.J. (1996). **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall International Editions.
- BECKER, A.A. (1992). **The Boundary Element Method in Engineering – A Complete Course**. McGraw-Hill.
- BEER, G. (2001). **Programming the Boundary Element Method – An Introduction for Engineers**. John Wiley & Sons.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. (1992). **Boundary Elements – An Introductory Course**. McGraw-Hill Book Company.
- BREBBIA, C.A.; GEORGIU, P. (1979). **Combination of boundary and finite element method in elastostatics**. Appl. Math. Modelling, Vol. 3, pp. 212-220.
- CARMO, R.M.S. (2001). **Determinação de Rigidez de Estruturas de Pavimentos Através dos Métodos dos Elementos de Contorno e Finitos**. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CAVALCANTI, D.J.H. (2006). **Análise da Interação Solo-Estrutura Através do Emprego Conjunto dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) e dos**



**Elementos Finitos (MEF).** 137p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

CODA, H.B. (1993). **Análise Tridimensional Transiente de Estruturas Pela Combinação Entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos.** Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

COOK, R.D. (1995). **Finite Element Modeling for Stress Analysis.** John Wiley & Sons.

FOLTRAN, C.E. (1999). **Análise de Problemas Planos em Regime Elasto-plástico pelo Método dos Elementos de Contorno.** Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

GAO, XW. (2002). **The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization.** Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 26, pp. 905-916.

Instituto Ambiental ECOSUL. Disponível em: <<http://ecosul.wordpress.com>>. Acesso em: 17 ago. 2008.

IWAMOTO, R.K. (2000). **Alguns Aspectos dos Efeitos da Interação Solo-Estrutura em Edifícios de Múltiplos Andares com Fundação Profunda.** Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

KOMATSU, J.S. (1995). **Estudo de Problemas de Escavação Através da Combinação Elementos de Contorno e Elementos Finitos.** Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

LEITE, L.G.S.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (2003). **Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method.** Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 27, pp. 193-201.

LEITE, L.G.S.; VENTURINI, W.S. (2005). **Boundary Element Formulation for 2D Solids with Stiff and Soft Thin Inclusions.** Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 29, pp. 257-267.

MASE, G.T; MASE, G.E. (1999). **Continuum Mechanics For Engineers.** CRC Press.

MATOS FILHO, R.F. (1999). **Análise da Interação Estaca-Solo Via Combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno.** 116p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MENDONÇA, A.V.; PAIVA, J.B. (2005). **Análise de Radiês Simples e Estaqueados Via Combinação Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, Vol. 7, n. 22, pp. 1-28. São Carlos.

MONNERAT, D.D. (2008). **Análise de Estruturas Formadas Pela Associação de Placas e Chapas Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

PACCOLA, R.R. (2004). **Análise Não Linear Física de Placas e Cascas Anisotrópicas Laminadas Acopladas ou Não Com Meio Infinito Tridimensional Viscoelástico Através da Combinação Entre o MEC e o MEF**. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. (1973). **Elastic solutions for soil and rock mechanics**. New York. John Wiley & Sons, 411p.

RIBEIRO, D.B. (2005). **Análise da Interação Solo-Estrutura Via Acoplamento MEC-MEF**. 121p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

RILEY, W.F.; STURGES, L.D.; MORRIS, D.H. (1999). **Mecânica dos Materiais**. Editora LTC.

SANTOS JUNIOR, A.; VIEIRA, C.S. (2006). **Avaliação de Aspectos Geotécnicos Relativos à Instalação de Dutos Enterrados Utilizados na Distribuição de Gás Natural**. 91p. Monografia de conclusão de curso – Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

SORIANO, H.L. (2003). **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Editora da Universidade de São Paulo.

TECGRAF (2002). **FTOOL – Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas**. Versão Educacional 2.11. Manual do usuário.

TECGRAF (2008). **Ferramentas de Desenvolvimento de Programas. Tecnologia em Computação Gráfica**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://www.tecgraf.puc-rio.br>>

TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1980). **Boundary Element Solution For Half-Plane Problems**. International Journal of Solids and Structures, Vol. 17, pp. 1149-1158.

## Apêndice A

### Equações complementares para o cálculo de tensão

São apresentadas as equações complementares, presentes na equação (3.25), para o cálculo das tensões nos pontos internos usando a solução fundamental de Melan. Estas expressões podem ser encontradas em Telles e Brebbia (1980).

$$\sigma_{111}^c = -K_s \left\{ \frac{(3\bar{x} + c)(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2R_1(R_1^2 + 2c\bar{x}) - 4\bar{x}r_2^2(1 - 2\nu)}{R^4} - \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{121}^c = -K_s r_2 \left\{ -\frac{(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2[\bar{x}^2 - 2c\bar{x} - c^2 + 2\bar{x}R_1(1 - 2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{221}^c = -K_s \left\{ \frac{(\bar{x} + 3c)(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2[R_1(r_2^2 + 2c^2) - 2cr_2^2 + 2\bar{x}r_2^2(1 - 2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{112}^c = -K_s r_2 \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{R^2} - \frac{2[c^2 - \bar{x}^2 + 6c\bar{x} - 2\bar{x}R_1(1 - 2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}r_2^2}{R^6} \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_{122}^c = -K_s \left\{ \frac{(3\bar{x} + c)(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2[(2c\bar{x} + r_2^2)R_1 - 2\bar{x}R_1(1 - 2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{222}^c = -K_s r_2 \left\{ \frac{3(1 - 2\nu)}{R^2} + \frac{2[r_2^2 - 4c\bar{x} - 2c^2 - 2\bar{x}R_1(1 - 2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\} \quad (\text{A.6})$$

## Apêndice B

### Integrais analíticas

São apresentadas as expressões resultantes das integrais singulares que aparecem no cálculo das soluções fundamentais para deslocamento e força de superfície.

No caso do ponto fonte ser o primeiro nó do elemento integrado, as componentes da matriz  $[G_w]$ , representadas na Eq. (3.39), são as expressões (B.1) a (B.9). O índice superior  $i$  se refere ao primeiro nó do elemento e o índice  $j$ , ao segundo nó do elemento.

$$g_{11}^i = K_1 \left[ (3 - 4\nu) \left( \frac{3}{2} - \ln L \right) + r_{,1}^2 \right] \quad (\text{B.8.1})$$

$$g_{12}^i = K_1 r_{,1} r_{,2} \quad (\text{B.8.2})$$

$$g_{13}^i = K_1 \left[ (3 - 4\nu) \left( \frac{1}{2} - \ln L \right) + r_{,1}^2 \right] \quad (\text{B.8.3})$$

$$g_{14}^i = g_{12}^i \quad (\text{B.8.4})$$

$$g_{21}^i = g_{12}^i \quad (\text{B.8.5})$$

$$g_{22}^i = K_1 \left[ (3 - 4\nu) \left( \frac{3}{2} - \ln L \right) + r_{,2}^2 \right] \quad (\text{B.8.6})$$

$$g_{23}^i = g_{12}^i \quad (\text{B.8.7})$$

$$g_{24}^i = K_1 \left[ (3-4\nu) \left( \frac{1}{2} - \ln L \right) + r_{,2}^2 \right] \quad (\text{B.8.8})$$

onde

$$K_1 = \frac{L}{16\pi G(1-\nu)} \quad (\text{B.8.9})$$

Os elementos da matriz  $[H_w]$ , mostradas na Eq. (3.38), são calculados usando as seguintes expressões:

$$h_{11}^i = 0 \quad (\text{B.8.10})$$

$$h_{12}^i = K_2 (\ln L - 1) \quad (\text{B.8.11})$$

$$h_{13}^i = 0 \quad (\text{B.8.12})$$

$$h_{14}^i = K_2 \quad (\text{B.8.13})$$

$$h_{21}^i = -K_2 (\ln L - 1) \quad (\text{B.8.14})$$

$$h_{22}^i = 0 \quad (\text{B.8.15})$$

$$h_{23}^i = -K_2 \quad (\text{B.8.16})$$

$$h_{24}^i = 0 \quad (\text{B.8.17})$$

onde

$$K_2 = -\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \quad (\text{B.8.18})$$

Quando o ponto fonte coincide com o segundo nó do elementos as expressões para os elementos das matrizes  $[H_w]$  e  $[G_w]$  são os seguintes:

$$g_{11}^j = K_1 \left[ (3-4\nu) \left( \frac{1}{2} - \ln L \right) + r_{,1}^2 \right] \quad (\text{B.8.19})$$

$$g_{12}^j = K_1 r_{,1} r_{,2} \quad (\text{B.8.20})$$

$$g_{13}^j = K_1 \left[ (3-4\nu) \left( \frac{3}{2} - \ln L \right) + r_{,1}^2 \right] \quad (\text{B.8.21})$$

$$g_{14}^j = g_{12}^j \quad (\text{B.8.22})$$

$$g_{21}^j = g_{12}^j \quad (\text{B.8.23})$$

$$g_{22}^j = K_1 \left[ (3-4\nu) \left( \frac{1}{2} - \ln L \right) + r_{,2}^2 \right] \quad (\text{B.8.24})$$

$$g_{23}^j = g_{12}^j \quad (\text{B.8.25})$$

$$g_{24}^j = K_1 \left[ (3-4\nu) \left( \frac{3}{2} - \ln L \right) + r_{,2}^2 \right] \quad (\text{B.8.26})$$

$$h_{11}^j = 0 \quad (\text{B.8.27})$$

$$h_{12}^j = K_2 \quad (\text{B.8.28})$$

$$h_{13}^j = 0 \quad (\text{B.8.29})$$

$$h_{14}^j = K_2(\ln L - 1) \quad (\text{B.8.30})$$

$$h_{21}^j = -K_2 \quad (\text{B.8.31})$$

$$h_{22}^j = 0 \quad (\text{B.8.32})$$

$$h_{23}^j = -K_2(\ln L - 1) \quad (\text{B.8.33})$$

$$h_{24}^j = 0 \quad (\text{B.8.34})$$