

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS DA INDUÇÃO DO TERMO DE
CHERN-SIMONS 4D

JONATHAS DANTAS TENORIO

Maceió

2015

JONATHAS DANTAS TENORIO

Alguns aspectos teóricos da indução do termo de Chern-Simons 4D

Dissertação apresentada no Instituto
de Física da Universidade Federal de
Alagoas, como parte dos requisitos para
a obtenção do título de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Tiago Homero
Mariz do Nascimento

Maceió

2015

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

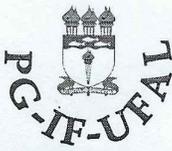
T312a Tenório, Jonathas Dantas.
Alguns aspectos teóricos da indução do termo de Chern-Simons 4D/ Jonathas Dantas Tenorio. – 2016.
78 f. : il., graf.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 65-70.
Apêndices: f. 71-78.

1. Indução radiativa. 2. Violação de simetria de Lorentz. 3. Temperatura finita. I. Título.

CDU: 530.1:537.8



PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“Alguns aspectos teóricos da indução do termo de Chern-Simons 4D”.

por

Jonathas Dantas Tenorio

A Banca Examinadora composta pelos Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, e Sandro Guedes Fernandes, do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 07 de maio de 2015


Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento


Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho


Prof. Dr. Sandro Guedes Fernandes

À MINHA FAMÍLIA

AGRADECIMENTOS

Aos meus Pais, Jogesy e Lucy, que são minhas maiores motivações, sempre me dando forças e esperanças para seguir em frente quando as dificuldades apareciam, e que com muito amor e carinho fizeram de mim a pessoa que sou hoje.

Ao professor Tiago Mariz pela excelente orientação, pela paciência nos momentos difíceis e por tudo o que me ensinou.

Ao Jefinho meu irmão e melhor amigo, parceiro de todos momentos, sempre ao meu lado me apoiando.

A minha Vó Lícia e minha tia Lúcia que me ajudaram nos momentos de dificuldade, serei sempre grato e nunca esqueceria ajuda que me deram.

Aos meus amigos José Fábio, Job e Rúbens por compartilharem comigo suas sabedorias, conhecimentos e acima de tudo suas amizade.

A todos meu amigos.

A todos os meus professores por seus ensinamentos que fizeram de mim o que sou hoje.

A CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a indução do termo de Chern-Simons 4D na Eletrodinâmica Quântica com e sem massa, nos contextos de temperatura zero e temperatura finita. Para isso, utilizamos a prescrição de 't Hooft-Veltman para as matrizes de Dirac. Discutimos a questão da ambiguidade acerca do valor do coeficiente do termo de Chen-Simons para a eletrodinâmica sem massa à temperatura zero. No cálculo de temperatura finita com massa discutimos a questão da não analiticidade com relação ao limite dos momentos externos p_0 e \vec{p} , ainda não abordada na literatura e no cálculo sem massa discutimos a restauração da simetria de inversão espacial. Por fim estudamos a indução de Chern-Simons via expansão derivativa.

Palavras-chave: Indução radiativa. Violação de simetria de Lorentz e CPT. Temperatura finita.

ABSTRACT

In the present work, we study the induction of the term of Chern-Simons 4D in mass and massless electrodynamics, at zero and finite temperature contexts. For this purpose, we use the 't Hooft-Veltman prescription to the Dirac matrices. We discuss the issue of ambiguity about the value of the Chern-Simons term coefficient for the massless electrodynamics at zero temperature. At finite temperature calculation, we discuss the issue of non-analyticity with respect to the limit of external momenta $p \rightarrow 0$ and p , not addressed in the literature and at massless calculation. We discuss the spatial symmetry restoration. Finally we study the induction Chern-Simons by derivative expansion.

Keywords: Radiative Induction. Lorentz- and CPT-violating. Finite temperature.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	4
2	VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	7
2.1	transformações de Lorentz	8
2.1.1	Transformação Passiva	10
2.1.2	Transformação Ativa	10
2.1.3	Transformação de Lorentz de Observador	12
2.1.4	Transformação de Lorentz de Partícula	12
3	ELETRODINÂMICA ESTENDIDA	14
3.1	Modelo Padrão	14
3.2	Modelo Padrão Estendido	15
3.3	Eletrodinâmica quântica estendida	17
4	INDUÇÃO DO TERMO DE CHERN-SIMONS $4D$	20
4.1	Introdução	20
4.2	Ação efetiva	22
4.3	Prescrição de 't Hooft-Veltman	26
4.4	Indução do termo de Chern-Simons	27
4.4.1	Caso com massa	38
4.4.2	Caso sem massa	39

5	INDUÇÃO À TEMPERATURA FINITA	43
5.1	Introdução	43
5.2	Chern-Simons à $T \neq 0$ com massa	44
5.3	Não Analiticidade	50
5.4	Chern-Simons à $T \neq 0$ sem massa	53
5.5	Chern-Simons Via Expansão Derivativa	56
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	62
	Referências	65
A	Álgebra das matrizes de Dirac	71
B	Integração em D dimensões	74
C	Parametrização de Feynman	77

LISTA DE FIGURAS

2.1	Transformação passiva	10
2.2	Ilustração de como obter a matriz de rotação ativa.	11
2.3	Rotação passiva de um ângulo ϕ em presença de um campo de fundo.	12
2.4	Rotação ativa de um ângulo $-\phi$ em presença de um campo de fundo.	13
5.1	Comportamento da função $F(\xi)$	49
5.2	Comportamento da função $F(K, \xi)$	61

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A teoria quântica de campos (TQC) é uma teoria quântica e relativística, pois é capaz de descrever partículas na escala subatômica, sendo tais partículas aceleradas a velocidades próximas a velocidade da luz. O modelo padrão (MP) é uma teoria de campos que descreve o comportamento das partículas elementares e três das interações fundamentais da natureza, isto é, as interações eletromagnética fraca e forte. A interação gravitacional não é inclusa no modelo padrão, pois assim a teoria não fica renormalizável. Acredita-se que o MP seja o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental, tal como teoria de cordas, onde esta forneceria um modelo quântico para a gravitação. Em outras palavras, essa teoria fundamental unificaria o modelo padrão e a interação gravitacional.

Na natureza há varias simetrias fundamentais, como por exemplo as simetrias de Lorentz e CPT. O estudo da simetria de Lorentz está diretamente relacionado com a teoria de relatividade especial, pois segundo esta as leis da física devem ser invariantes em relação a qualquer referencial inercial. Este princípio é conhecido como covariância de Lorentz. Por sua vez a simetria CPT é uma simetria fundamental das leis físicas sob as transformações simultâneas de conjugação de carga (C), inversão espacial (P), e reversão temporal (T) [1].

Estas simetrias são bem consolidadas e foram bastante estudadas ao longo dos anos. Por outro lado em algumas teorias fundamentais percebemos a ocorrência de um processo denominado quebra espontânea de simetria, que origina os efeitos de violação dessas simetrias de Lorentz e CPT [2]. Tal quebra de simetria é um processo pelo qual um sistema simétrico passa, de forma espontânea, para um estado não simétrico. Este processo, incomum na natureza física, é vital para a compreensão do modelo padrão das partículas fundamentais.

Os estudos da violação das simetrias de Lorentz e CPT em teoria de campos foram iniciados pelo trabalho de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) [3], no qual estes introduziram um termo de Chern-Simons (CS) a densidade Lagrangiana do eletromagnetismo clássico em 3+1 dimensões (4D) e mostraram que este termo viola a invariância de Lorentz e a simetria de CPT. Em seguida pelos trabalhos de Kostelecký *et al.* [4, 5], onde foi proposta uma extensão ao modelo padrão que inclui em sua lagrangiana uma extensão mínima de todos os possíveis termos com quebra de invariância de Lorentz e CPT. Esse modelo ficou conhecido como modelo padrão estendido (MPE), o qual, no setor bosônico, está incluído o termo de Chern-Simons. A motivação para se estudar o MPE está no fato de que detecções de pequenos desvios de invariância de Lorentz podem ser interpretadas como sinais indiretos de teorias fundamentais, que são difíceis de serem comprovadas experimentalmente.

Nesta dissertação temos como objetivo estudar a indução do termo de Chern-Simons 4D, na eletrodinâmica quântica (EDQ) estendida com massa e sem massa, no contexto de temperatura zero e finita. Para isso, vamos utilizar a prescrição de 't Hooft-Veltman para as matrizes de Dirac [6]. Na eletrodinâmica sem massa, iremos discutir a questão da ambiguidade acerca do valor do coeficiente do termo de Chen-Simons. Esse assunto já foi bastante discutido na eletrodinâmica com massa [7, 8]. No cálculo de temperatura finita com massa discutiremos a questão da não analiticidade com relação ao limite dos momentos externos p_0 e \vec{p} . Esse assunto já foi discutido em $3D$ [9], contudo, em $4D$ ainda não foi abordado

na literatura. Também vamos discutir o cálculo de temperatura finita sem massa, o qual constataremos a restauração da simetria de inversão espacial.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No próximo capítulo estudaremos a violação da simetria de Lorentz. Apresentaremos as transformações de Lorentz passiva e ativa, assim como as transformações de Lorentz de observador e de partícula, e mostraremos como essa simetria é quebrada na presença de uma campo de fundo constante.

O MPE, mais especificamente a EDQ estendida, serão abordados no capítulo 3. Iniciaremos estudando brevemente o MP, para então discutirmos o MPE e em seguida a EDQ estendida. Apresentaremos sua Lagrangiana e comentaremos de forma sucinta os termos presentes nesta.

No capítulo 4 estudaremos a indução radiativa do termo de Chern-Simons $4D$ com violação da simetria de lorentz e CPT, na eletrodinâmica com massa e sem massa, utilizando a prescrição de 't Hooft-Veltman para as matrizes de Dirac. Faremos uma breve introdução acerca das características clássicas e quânticas do termo de Chern-Simons, e apresentaremos os cálculos realizados para a indução do termo de Chern-Simons, onde discutiremos a questão da ambiguidade do coeficiente de CS para a EDQ sem massa.

Por sua vez, o capítulo 5 tratará da indução de Chen-Simons à temperatura finita. Primeiro apresentaremos as características gerais da TQC à temperatura finita, para em seguida apresentar os cálculos da indução com massa e sem massa. Neste capítulo discutiremos algumas questões importantes como a não analiticidade com relação ao limite dos momentos externos e a restituição da simetria de inversão espacial no limite de altas Temperaturas. Discutiremos ainda a indução do termo Chern-Simons via expansão derivativa. Por fim serão apresentadas as nossas considerações finais e perspectivas para este trabalho.

Capítulo 2

VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Nos últimos anos, os físicos tem estudado a possibilidade de que pequenas violações de simetria de Lorentz possam acontecer na física das partículas fundamentais. A motivação para esse estudo está no fato de que tais quebras de simetria pode ocorrer em teorias fundamentais como a teoria de cordas. Portanto, ao considerarmos o limite de baixas energias dessas teorias fundamentais pequenos desvios da invariância de Lorentz podem ser induzidos no modelo padrão.

A partir da década de 80 surgiram teorias que mostravam que a invariância de Lorentz pode ser quebrada em um limite de altas energias. Kostelecký e Samuel mostraram em [2,11] que há interações presentes em teoria de cordas que podem levar à quebra espontânea da simetria de Lorentz. A partir desse trabalho surgiu um grande interesse na comunidade científica em modelos de teoria de campos com violação de simetria de Lorentz, pois tais modelos podem ser vistos como o limite de baixas energias da teoria de cordas.

Veremos agora como ocorre a violação de simetria de Lorentz, iniciaremos explicando

brevemente as transformações de Lorentz passiva e ativa, e em seguida além de apresentarmos um modelo com um elétron se movendo em um campo elétrico de fundo gerado por um capacitor de placas paralelas para introduzirmos as Transformações de Lorentz de observador e de partícula.

2.1 transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz são rotações, apenas entre coordenadas espaciais, ou mudanças de velocidades (“boosts”), entre coordenadas espaciais e temporais. Além disso, essas transformações podem ser passivas e ativas. As transformações de Lorentz de observador são as transformações passivas na presença de um campo de fundo constante, ao passo que as transformações de Lorentz de partícula são ativas também na presença de um campo de fundo. A seguir discutiremos mais sobre essas transformações, destacando as suas distinções, assim como indicando em quais circunstâncias vamos ter quebra.

A teoria da relatividade restrita fundamenta-se em dois princípios: as leis da física são idênticas em qualquer referencial inercial e a velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer sistema de referência inercial. Portanto, com base nesses princípios, qualquer referencial inercial observa a luz se propagando esfericamente com velocidade c .

Vamos agora tomar dois referenciais inerciais, que no instante $t = 0$ coincidam de posição e afastam-se com velocidade \vec{v} . Dessa forma, a luz se propagando com frente de onda nos dois referenciais inerciais obedece as expressões

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (2.1)$$

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \quad (2.2)$$

Dessa forma, ao estabelecermos a igualdade

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (2.3)$$

Uma possível solução, que satisfaz a igualdade acima e relaciona somente coordenadas espaciais, as rotações, é dada por:

$$t' = t, \quad (2.4)$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi, \quad (2.5)$$

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \quad (2.6)$$

$$z' = z. \quad (2.7)$$

Outra possível solução envolve as mudanças em coordenadas espaciais e temporais são conhecidas como boost de Lorentz, pode ser escrita como:

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right), \quad (2.8)$$

$$y' = y, \quad (2.9)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.10)$$

$$z' = z, \quad (2.11)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (2.12)$$

Vamos a seguir nos deter apenas nas transformações que relacionam as coordenadas espaciais, as rotações, destacando os pontos de vista passivo e ativo. Em seguida, vamos analisar um exemplo simples no qual um elétron é colocado entre as placas paralelas de um capacitor carregado, com um campo elétrico constante.

2.1.1 Transformação Passiva

Nas transformações passivas temos dois referenciais inerciais, diferindo por um ângulo ϕ , descrevendo um mesmo ponto P (veja Fig. 2.1). Nesse caso deixamos os pontos do espaço-tempo fixos e relacionamos as bases de dois referenciais inerciais.

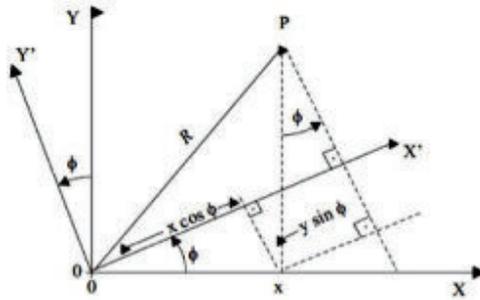


Figura 2.1: Transformação passiva
Fonte: Belich *et al.*, 2007.

Observe que a rotação descrita na Fig. 2.1 é a mesma descrita nas equações (2.4) e (2.7), ou seja, em torno do eixo z . De forma matricial, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

No caso de uma rotação infinitesimal, temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

no qual levamos em conta apenas a primeira ordem.

2.1.2 Transformação Ativa

Também podemos considerar transformações ativas, no qual temos um único referencial inercial onde a rotação é descrita através do deslocamento do ponto P (veja Fig. 2.2). Desse modo ao invés de mudarmos nosso referencial inercial, deixamos o referencial inercial fixo e quem se movimenta são os pontos do espaço-tempo.

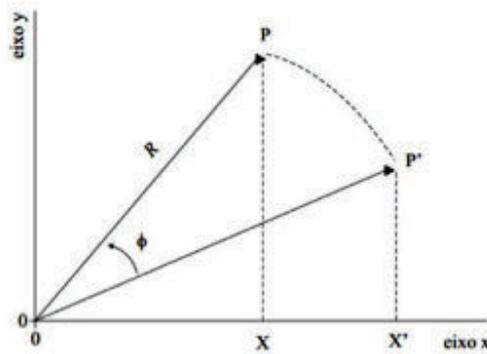


Figura 2.2: Ilustração de como obter a matriz de rotação ativa.

Fonte: Belich *et al.*, 2007.

Para essa transformação, temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

ou na sua versão infinitesimal,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi \\ \delta\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Portanto, ao compararmos as equações (2.14) e (2.16), observamos que basicamente a diferença entre as transformações está no ângulo de rotação. Enquanto que na transformação passiva a rotação é de um ângulo (ϕ) , na transformação ativa a rotação é de um ângulo $(-\phi)$.

2.1.3 Transformação de Lorentz de Observador

A fim de ilustrarmos essa transformação, vamos a seguir analisar um exemplo onde temos um elétron entre as placas paralelas de um capacitor, localizado pelo vetor posição $\vec{R} = (0, a, 0)$, imerso em um campo elétrico $\vec{E} = (0, 0, -E_z)$.

Como já foi falado no início deste capítulo, as transformações de Lorentz de observador são consideradas as transformações passivas na presença de um campo de fundo. Dessa forma vamos agora considerar uma rotação $\frac{\pi}{2}$ radianos, na qual devemos girar o referencial inercial \mathcal{O}' de $\phi = +\frac{\pi}{2}$ radianos, conforme Fig. 2.3.

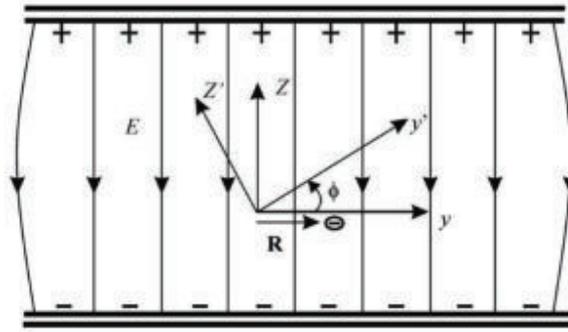


Figura 2.3: Rotação passiva de um ângulo ϕ em presença de um campo de fundo.

Fonte: Belich *et al.*, 2007.

Observe que para os dois referenciais inerciais, o vetor posição \vec{R} é sempre perpendicular ao campo de fundo ($R \perp E$). Portanto, nesta transformação não ocorre a quebra de simetria de Lorentz.

2.1.4 Transformação de Lorentz de Partícula

Agora, vamos levar em conta uma transformação de Lorentz de partícula, na qual temos uma transformação ativa na presença de um campo de fundo. Dessa forma, vamos

analisar o mesmo exemplo acima, contudo, efetuaremos uma rotação no elétron de $\phi = -\frac{\pi}{2}$ radianos, dentro do mesmo referencial \mathcal{O}' (veja Fig. 2.4).

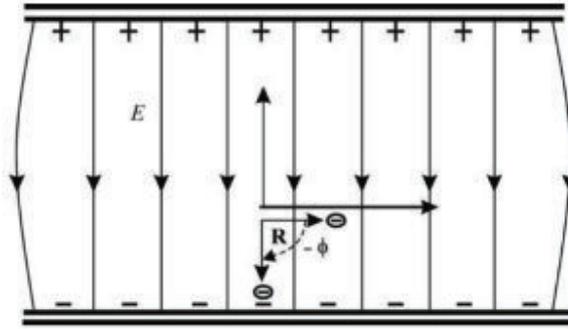


Figura 2.4: Rotação ativa de um ângulo $-\phi$ em presença de um campo de fundo.
Fonte: Belich *et al.*, 2007.

Para a nossa surpresa, observamos que o vetor posição \vec{R} , após a rotação, agora é paralelo ao campo de fundo ($R \parallel E$). Portanto, devido à presença do campo de fundo, temos uma quebra da invariância quando efetuamos uma transformação de Lorentz de partícula, ou seja, antes da transformação os vetores eram perpendiculares, ao passo que após a transformação os vetores ficam paralelos.

Capítulo 3

ELETRODINÂMICA ESTENDIDA

Neste capítulo faremos uma breve introdução sobre o modelo padrão e o modelo padrão estendido, no qual apresentaremos suas principais características. Por fim apresentaremos a eletrodinâmica quântica estendida.

3.1 Modelo Padrão

O Modelo Padrão (MP) é uma teoria de campos que descreve o comportamento das partículas elementares, foi basicamente desenvolvido durante a década de 70 e situa-se na escala de $10^{-18}m$. Este modelo é constituído pela combinação da teoria eletrofraca (interações eletromagnéticas e fracas unificadas) com a teoria da cromodinâmica (interações fortes). O modelo padrão é dividido em duas famílias de partículas. As partículas bosônicas, para os campos de interação, e partículas férmionicas, para os campos de matéria.

As partículas bosônicas (ou simplesmente bósons) do MP possuem spin 1 e não são regidos pelo princípio da exclusão de Pauli. Elas são conhecidas como partículas mediadoras,

isto é, as partículas responsáveis pela transmissão das forças. Os bósons que fazem parte do MP são: os fótons (γ), responsáveis por mediar a interação eletromagnética; os bósons W^- , W^+ e Z^0 , responsáveis pela mediação da interação fraca; os gluons (g), que mediam a interação forte; e os bósons de Higgs (H^0), que são responsáveis pela geração da massa das partículas. Observe que no Modelo Padrão a força gravitacional não está presente. Isto é devido ao fato da interação gravitacional ser muito pequena. Contudo, o principal motivo é o fato da gravitação não ser consistente quanticamente.

As partículas fermiônicas (os férmions) do Modelo Padrão por sua vez possuem spin $1/2$ e são regidos pelo princípio da exclusão de Pauli, o qual determina que férmions idênticos não podem ser encontrados no mesmo estado quântico. De modo geral, são as partículas que constituem a matéria, sendo subdivididas em duas classes de partículas elementares, os léptons e os quarks. Para os léptons temos: o elétron (e), o múon (μ), o tau (τ), o neutrino do elétron (ν_e), o neutrino do múon (ν_μ), e o neutrino do tau (ν_τ). Por sua vez os quarks são: up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) e bottom (b). Além dessas partículas, também temos as suas correspondentes antipartículas, que possuem cargas contrárias.

As partículas que possuem estrutura interna são chamadas de hádrons. Essas partículas são constituídas de quarks, os quais são mantidos juntos pela ação da força forte, similarmente como ocorre com os átomos e as moléculas que são unidas pela ação da força eletromagnética. Os hádrons são classificados em duas famílias: bárions e mésons. As partículas constituídas por três quarks ou três antiquarks são chamadas de bárions. As partículas constituídas por um quark e um antiquark são chamadas de mésons.

3.2 Modelo Padrão Estendido

Na seção anterior estudamos brevemente como o Modelo Padrão é estruturado, porém devido ao fato deste não ser capaz de descrever alguns fenômenos como, por exemplo, a interação gravitacional, ele não é aceito como uma teoria completa, desse modo foi desenvolvida uma nova teoria, a qual representa uma extensão do MP, chamada de modelo padrão estendido.

Motivados pelo pressuposto do MP ser o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental, como por exemplo a teoria de cordas, Alan Kostelecký e Stuart Samuel mostraram em 1989 que há interações presentes em teorias de cordas que podem levar à quebra espontânea da simetria de Lorentz [2]. No início dos anos 90, Kostelecký e Samuel mostram que as interações entre cordas também podem quebrar espontaneamente a simetria-CPT, quando abordada nos contextos da teoria de cordas bosônicas e da teoria de supercordas [11].

Devido ao fato de que a violação das simetrias de Lorentz e CPT surgirem de teorias mais fundamentais, em uma escala mais baixa de energia, poucas ordens de grandeza maior que a escala eletrofraca, foi desenvolvido o Modelo Padrão estendido. O MPE surgiu como um meio de facilitar as investigações experimentais acerca das simetrias de Lorentz e CPT. É uma teoria de campo efetiva que constituída pelo Modelo Padrão, a Relatividade Geral, e todos os possíveis termos que violam a simetria de Lorentz [4, 5, 17]. É importante salientar que uma quebra de simetria de CPT, ocasiona uma quebra da simetria de Lorentz, no entanto uma quebra de simetria de Lorentz, não implica em uma quebra de simetria CPT [16].

Podemos expressar o MPE matematicamente como uma Lagrangeana constituída por vários termos. Cada termo que viola a simetria de Lorentz é construído pela contração de operadores de campo padrão com coeficientes de controle chamados coeficientes de violação de Lorentz. Note que estes não são parâmetros da teoria, uma vez que podem, em princípio, ser medidos experimentalmente, desse modo os efeitos das violações de Lorentz e CPT são regidos por coeficientes relacionados à teoria mais fundamental na escala de Planck [2, 11,

18].

3.3 Eletrodinâmica quântica estendida

A eletrodinâmica quântica estendida é constituída da eletrodinâmica quântica usual, acrescida de todos os possíveis termos que incorporam as violações das simetrias de Lorentz e CPT. Em outras palavras a EDQ estendida, a qual descreve a interação entre elétrons, pósitrons e fótons, pode ser obtida a partir do Modelo Padrão Estendido [5]. Como foi mencionado na seção anterior, os termos de violação que são adicionados devem ser relativamente pequenos, para que assim sejam desprezados no limite da escala eletrofraca. A EDQ estendida é uma teoria de extrema importância tanto do ponto de vista teórico quanto do experimental, visto que esta tem sido testada com um alto grau de precisão em uma enorme variedade de sistemas físicos, além de ser utilizado para impor altas restrições nos campos de fundo que controlam a quebra da simetria de Lorentz desta EDQ estendida.

A lagrangiana da EDQ estendida, é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overbrace{(k_{AF})^\mu}^M \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{A^\nu F^{\lambda\rho}}^{M^3} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}}^{M^4} + \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi, \quad (3.1)$$

onde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$ e $M = m + M_1$, sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} \\ M_1 &= a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O primeiro termo em (3.1) representa a lagrangiana de Maxwell usual, lembrando que

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. O segundo e o terceiro termo são termos extras, sendo estes os termos de violação de simetria. Não iremos nos ater ao terceiro termo visto que ele não é relevante para nosso trabalho, no entanto a critério de informação este termo aparece como uma correção quântica não linear à teoria de Maxwell com violação de simetria de Lorentz [19].

O segundo termo é o termo de Chern-Simons (CS) $4D$. Este termo é CPT ímpar e desse modo quebra as simetrias de Lorentz e CPT. É possível observar que o coeficiente $(k_{AF})^\mu$ possui dimensão de massa $d = 1$, enquanto que o operador $A^\nu F^{\lambda\rho}$ tem dimensão de massa $d = 3$, visto que a lagrangiana tem dimensão de massa $d = 4$. Recentemente houve muito interesse no estudo da indução do termo de Chern-Simons em diversos contextos, citamos como exemplo a indução radiativa [20, 21, 22], que é o foco deste trabalho.

É importante comentar também sobre os termos extras adicionados à lagrangiana de Dirac, ou seja, no setor fermiônico da lagrangiana. Observe que os operadores contraídos com os coeficientes a_μ , b_μ , e_μ , f_μ e $g_{\lambda\nu\mu}$, violam as simetrias de Lorentz e CPT (CPT ímpar), enquanto que os operadores relacionados com os coeficientes $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$, violam apenas a simetria de Lorentz (CPT par). No entanto, ao realizarmos uma redefinição espinorial, os termos relacionados com os coeficientes a_μ , e_μ e f_μ são removidos da lagrangiana, sendo absorvidos pelos espinores ψ e $\bar{\psi}$ [23]. Apenas os coeficientes $\bar{c}_{\mu\nu}$, $\bar{d}_{\mu\nu}$, $\tilde{g}_{\lambda\nu\mu}$, b_μ e $H_{\mu\nu}$ sobrevivem. Note que os termos que contém os coeficientes b_μ e $c_{\mu\nu}$ são os únicos que geram correções quânticas no setor bosônico, desse modo,

$$(k_{AF})_\mu = C b_\mu, \quad (3.3)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} = D(g_{\mu\lambda}c_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}c_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}c_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}c_{\mu\rho}) \quad (3.4)$$

onde C e D são constantes de proporcionalidade. Note também que os coeficientes contidos em M_1 têm dimensão de massa $d = 1$, enquanto que os coeficientes contidos em Γ_1^μ são

adimensionais.

Nos próximos capítulos iremos induzir o termo de Chern-Simons na EDQ estendida a temperatura zero e temperatura finita.

Capítulo 4

INDUÇÃO DO TERMO DE CHERN-SIMONS $4D$

Neste capítulo estudaremos a indução radiativa do termo de Chern-Simons $4D$ com violação da simetria de Lorentz e CPT, na EDQ estendida com massa e sem massa. Para isso, utilizaremos a prescrição de 't Hooft-Veltman para as matrizes de Dirac. Iniciaremos fazendo uma breve introdução acerca do termo de Chern-Simons, destacando as suas características clássicas e quânticas. Nas seções seguintes apresentaremos os cálculos realizados para a indução do termo de Chern-Simons, ao efetuarmos uma decomposição nas componentes temporal e espacial dos momentos como uma preparação para o estudo do cálculo à temperatura finita. Também discutiremos a questão da ambiguidade com relação ao coeficiente do termo de Chern-Simons.

4.1 Introdução

A partir da equação (3.1) podemos escrever a lagrangiana para o setor bosônico como

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A^\nu F^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} \quad (4.1)$$

onde foram adicionados à lagrangiana de Maxwell um termo tipo Chern-Simons (CPT ímpar) e um outro termo que viola somente as simetrias de Lorentz (CPT par).

O termo de Chern Simons, que está presente na lagrangiana do setor bosônico, é de primeira ordem nas derivadas espaço-temporais, sendo modificado por uma derivada total sob uma transformação de calibre (gauge). No entanto, a ação e as equações de movimento dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})_\mu \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - (k_F)^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu F_{\lambda\rho} = 0, \quad (4.2)$$

são invariantes de gauge. Efetuando uma solução de onda plana para a equação acima, obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\omega = |\vec{k}| \pm \frac{1}{2} \left(m - \vec{p} \cdot \hat{k} \right), \quad (4.3)$$

na qual tomamos $(k_F)^{\nu\mu\lambda\rho} = 0$ e $(k_{AF})^\mu = (m, \vec{p})$. Portanto, a relação de dispersão é modificada, diferentemente, para cada polarização. Desse modo, a adição do termo tipo Chern-Simons na teoria de Maxwell prevê o efeito da birrefringência da luz no vácuo.

A causalidade dessa teoria tipo Maxwell-Chern-Simons foi estudada em [24]. Neste estudo foi observado que a componente tipo-tempo de $(k_{AF})_\mu$ provoca uma instabilidade na teoria. Enquanto que, para um $(k_{AF})_\mu$ tipo-espaço, uma quantização consistente dessa teoria parece ser possível. Entretanto, através de observações da polarização da luz de galáxias distantes foi evidenciado um limite inferior para $|k_{AF}| \sim 10^{-42} GeV$, o qual indica que esse coeficiente deve ser nulo.

Contudo, sabemos que existe a possibilidade de gerar, através de correções radiativas, um termo de Chern-Simons na ação efetiva da EDQ a partir do setor fermiônico. No entanto o único termo capaz nos levar à indução é o $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$, pois possui uma matriz γ_5 , essencial para a obtenção do tensor de Levi-Civita, assim como as mesmas transformações discretas de C, P e T do termo de Chern-Simons.

Esse assunto da indução já foi cuidadosamente investigado na literatura em diferentes contextos [4, 5, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39], onde os principais resultados obtidos são mutuamente diferentes ou nulos. Dessa forma, o valor do coeficiente do termo de Chern-Simons é finito, contudo, indeterminado, a depender do esquema de regularização utilizado [7, 8]. O comportamento da indução do termo de Chern-Simons (4D) em uma teoria quântica de campos com Violação de simetria de Lorentz e CPT, quando é levada em conta a temperatura, foi analisado em [20, 21, 40, 41]. Vamos estudar agora esta indução por meio de correções radiativa na eletrodinâmica quântica, com massa e sem massa, à temperatura zero.

4.2 Ação efetiva

Considere a densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (K_{AF})_\mu \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu F_{\lambda\rho} + \bar{\psi} (i\not{D} - m - \not{b}\gamma_5) \psi, \quad (4.4)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Nosso objetivo é induzir o termo de Chern-Simons na EDQ com e sem massa, nos contextos de temperatura zero e temperatura finita. Para isso, partiremos de (4.4) para obtermos a ação efetiva desta teoria mediante a análise do funcional gerador.

O funcional gerador é, por difinição, a integração funcional dos campos presentes na

teoria, de modo que podemos representá-lo por

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi DA_\mu \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]. \quad (4.5)$$

Para induzir o termo de Chern-Simons na EDQ, iremos focar nossa atenção apenas no setor ferminônico da equação (4.4), com isso (4.5) torna-se

$$Z_\psi = \int D\bar{\psi}D\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m - \not{b}\gamma_5) \psi \right] = \text{Det} (i\partial_\mu \gamma^\mu - eA_\mu \gamma^\mu - m - \not{b}\gamma_5),$$

após calcular a integral ferminônica e fazer $\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$, ficamos com

$$Z_\psi = \text{Det} (\not{k} - m - \not{b}\gamma_5 - e\hat{A}).$$

Lembrando que $Z_\psi = e^{iS_{eff}}$, podemos escrever a ação efetiva com violação de Lorentz e CPT como

$$S_{eff} = -i \ln \text{Det} (\not{k} - m - \not{b}\gamma_5 - e\hat{A}).$$

Agora, com o auxílio da relação $\ln \text{Det} (\hat{A}) = \text{Tr} \ln(\hat{A})$, encontramos

$$\begin{aligned} S_{eff} &= -i \text{Tr} \ln [(\not{k} - m - \not{b}\gamma_5)(1 - (\not{k} - m - \not{b}\gamma_5)^{-1}e\hat{A})] \\ &= -i \text{Tr} \ln(\not{k} - m - \not{b}\gamma_5) \underbrace{- i \text{Tr} \ln(1 - (\not{k} - m - \not{b}\gamma_5)^{-1}e\hat{A})}_{S'_{eff}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde o traço, Tr , é feito sobre as matrizes de Dirac, bem como sobre os espaços das coordenadas e dos momentos. Observe que o primeiro termo em (4.6) depende apenas dos quadrivetores p_μ e b_μ , ou seja, representa a dinâmica do sistema sem interação. Por sua vez, o segundo termo possui uma dependência com o campo de calibre, A_μ . Portanto vamos nos

ater somente a esse termo, de modo que ao realizar a seguinte expansão,

$$S'_{eff} = iTr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(\not{k} - m - \not{b}\gamma_5)^{-1} e\mathbb{A}]^n, \quad (4.7)$$

vemos que o primeiro termo da expansão é nulo, enquanto que para a segunda ordem,

$n = 2$, temos

$$S'_{eff} = i\frac{e^2}{2} Tr \left[\frac{1}{\not{k} - m - \not{b}\gamma_5} \mathbb{A} \frac{1}{\not{k} - m - \not{b}\gamma_5} \mathbb{A} \right]. \quad (4.8)$$

Seja o traço de um operador dado por,

$$Tr \hat{A} = tr \int d^4x \langle x | \hat{A} | x \rangle. \quad (4.9)$$

Então substituindo (4.9) em (4.8), encontramos

$$\begin{aligned} S'_{eff} &= i\frac{e^2}{2} tr \int d^4x \left\langle x \left| \frac{1}{\not{k} - m - \not{b}\gamma_5} A_\mu \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m - \not{b}\gamma_5} A_\nu \gamma^\nu \right| x \right\rangle \\ &= i\frac{e^2}{2} tr \int d^4x \left\langle x \left| \frac{1}{\not{k} - m - \not{b}\gamma_5} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - i\partial^1 - m - \not{b}\gamma_5} \gamma^\nu A_\mu^1 A_\nu \right| x \right\rangle, \end{aligned}$$

com

$$G_b(k') = \frac{1}{\not{k} - m - \not{b}\gamma_5} \quad e \quad G_b(k' - i\partial^1) = \frac{1}{\not{k} - i\partial^1 - m - \not{b}\gamma_5},$$

sendo propagadores. Portanto

$$S'_{eff} = i\frac{e^2}{2} tr \int d^4x \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \langle x | G_b(k') \gamma^\mu G_b(k' - i\partial^1) \gamma^\nu | k' \rangle \langle k' | A_\mu^1 A_\nu | x \rangle.$$

Considerando $A_\mu^1 = A_\mu^1(x^1)$ e $A_\nu = A_\nu(x^2)$, então

$$\begin{aligned}\langle k'|A_\mu^1(x^1)A_\nu(x^2)|x\rangle &= A_\mu(x^1)A_\nu(x^2)\langle k'|x\rangle \\ \langle x|G_b(k')\gamma^\mu G_b(k' - i\partial^1)\gamma^\nu|k'\rangle &= G_b(k')\gamma^\mu G_b(k' - i\partial)\gamma^\nu\langle x|k'\rangle,\end{aligned}$$

onde $\langle x|k'\rangle = e^{i(k'\cdot x)}$, $\langle k'|x\rangle = e^{-i(k'\cdot x)}$ e $i\partial = i(-i p) = p$. Com isto

$$\begin{aligned}S'_{eff} &= i\frac{e^2}{2}\text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} G_b(k')\gamma^\mu G_b(k' - p)\gamma^\nu A_\mu(x^1)A_\nu(x^2) \Big|_{x^1=x^2=x} \\ &= i\frac{e^2}{2}\text{tr} \int d^4x \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} G_b(k')\gamma^\mu G_b(k' - p)\gamma^\nu A_\mu(x)A_\nu(x).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Vamos então usar as seguintes transformadas de Fourier para

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(p\cdot x)} \tilde{A}_\mu(p) \quad \text{e} \quad A_\nu(x) = \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-i(p'\cdot x)} \tilde{A}_\nu(p'),$$

de tal modo que (4.10) passa a ser escrita como

$$\begin{aligned}S'_{eff} &= i\frac{e^2}{2}\text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int d^4p' \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \overbrace{e^{-i(p+p')\cdot x}}^{\delta^4(p+p')} G_b(k')\gamma^\mu G_b(k' - p)\gamma^\nu \tilde{A}_\mu(p)\tilde{A}_\nu(p') \\ &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Pi^{\mu\nu} \tilde{A}_\mu(p)\tilde{A}_\nu(-p),\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu} &= \frac{e^2}{2}\text{tr} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} G_b(k')\gamma^\mu G_b(k' - p)\gamma^\nu \\ &= \frac{e^2}{2}\text{tr} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \gamma^\mu G_b(k' - p)\gamma^\nu G_b(k').\end{aligned}$$

Dada a seguinte mudança de variável: $k = k' - p \rightarrow k' = k + p$, com $dk' = dk$, temos

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\gamma^\mu G_b(k) \gamma^\nu G_b(k+p)], \quad (4.11)$$

onde

$$G_b(k) = \frac{1}{\not{k} - m - \not{p}\gamma_5} \quad \text{e} \quad G_b(k+p) = \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m - \not{p}\gamma_5}. \quad (4.12)$$

4.3 Prescrição de 't Hooft-Veltman

Nosso próximo objetivo é calcular o tensor de polarização do vácuo (4.11), usando a prescrição de 't Hooft-Veltman. Tal prescrição é um procedimento de regularização caracterizado originalmente pela generalização do espaço quadridimensional dos momentos para o espaço D -dimensional, no qual devemos identificar dois subspaços [6]. Um subspaço físico de dimensão 4, cujos momentos devem possuir só as quatro primeiras componentes arbitrárias e todas as outras componentes nulas, e um outro subspaço não físico de dimensão $D - 4$, que contém momentos com as quatro primeiras componentes nulas e todas as outras componentes arbitrárias.

Para fazer estes calculos vamos, inicialmente, estender o espaço-tempo 4-dimensional para um D -dimensional, tal que $d^4 k / (2\pi)^4$, passe a ser $\mu^{4-D} d^D \bar{k} / (2\pi)^D$, onde μ é um parâmetro arbitrário que identifica a escala de massa. Desse modo, dada a relação de anticomutação $\{\bar{\gamma}^\mu, \bar{\gamma}^\nu\} = 2\bar{g}^{\mu\nu}$, com a contração $\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\mu\nu} = D$, separamos as matrizes de Dirac, $\bar{\gamma}^\mu$, e o tensor métrico, $\bar{g}^{\mu\nu}$, D -dimensionais em duas partes, uma 4-dimensional e outra $(D - 4)$ -dimensões, isto é, $\bar{\gamma}^\mu = \underbrace{\gamma^\mu}_4 + \underbrace{\hat{\gamma}^\mu}_{D-4}$ e $\bar{g}^{\mu\nu} = \underbrace{g^{\mu\nu}}_4 + \underbrace{\hat{g}^{\mu\nu}}_{D-4}$, tal que as matrizes de Dirac satisfaçam, agora,

as seguintes relações de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\mu\} = 2\hat{g}^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^\mu, \hat{\gamma}^\mu\} = 0, \quad (4.13)$$

e conseqüentemente os tensores métricos possuem as seguintes contrações, $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$, $\hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = D - 4$ e $g_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = 0$. Além destas relações de comutação, vamos introduzir

$$[\gamma_5, \hat{\gamma}^\mu] = 0, \quad (4.14)$$

e manter

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (4.15)$$

Observe que basicamente a diferença existente nesse esquema de regularização é a introdução da relação de comutação (4.14). A seguir, no cálculo do traço do tensor de polarização, iremos descartar os resultados obtidos com e sem essa relação de comutação. Contudo, iremos levar em conta (4.14) em todos os nossos cálculos.

4.4 Indução do termo de Chern-Simons

Ao estendermos o espaço-tempo 4-dimensional para um D -dimensional em (4.11), obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{2} \mu^{4-D} \text{tr} \int \frac{d^D \bar{k}}{(2\pi)^D} [\gamma^\mu G_b(\bar{k}) \gamma^\nu G_b(\bar{k} + p)]. \quad (4.16)$$

Vamos agora utilizar o método perturbativo, ao considerarmos apenas contribuições lineares

de b_μ em $G_b(\bar{k})$ e $G_b(\bar{k} + p)$:

$$G_b(\bar{k}) = \frac{1}{\bar{k} - m - \not{b}\gamma_5} = \overbrace{\frac{1}{\bar{k} - m}}^{S(\bar{k})} + \frac{1}{\bar{k} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\bar{k} - m} + \dots \quad (4.17)$$

$$G_b(\bar{k} + p) = \frac{1}{\bar{k} + \not{p} - m - \not{b}\gamma_5} = \overbrace{\frac{1}{\bar{k} + \not{p} - m}}^{S(\bar{k}+p)} + \frac{1}{\bar{k} + \not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\bar{k} + \not{p} - m} + \dots \quad (4.18)$$

Dessa forma, escrevemos $\Pi^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_b^{\mu\nu}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} &= \frac{e^2}{2} \mu^{4-D} \text{tr} \int \frac{d^D \bar{k}}{(2\pi)^D} [S(\bar{k}) + S(\bar{k}) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k})] \gamma^\mu [S(\bar{k} - p) + S(\bar{k} - p) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k} - p)] \gamma^\nu \\ &= \frac{e^2}{2} \mu^{4-D} \text{tr} \int \frac{d^D \bar{k}}{(2\pi)^D} \left\{ S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k} - p) \gamma^\nu + S(\bar{k}) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k} - p) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k} - p) \gamma^\nu + \right. \\ &\quad \left. + S(\bar{k}) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k} - p) \gamma^\nu + S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k} - p) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k} - p) \gamma^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Note que em (4.19) o primeiro termo representa a polarização do vácuo usual, e o segundo possui ordem quadrática no termo de violação, b . Como estamos interessados na primeira ordem dessa violação, vamos continuar apenas com o terceiro e o quarto termo. Desse modo

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = e^2 \mu^{4-D} \text{tr} \int \frac{d^D \bar{k}}{(2\pi)^D} S(\bar{k}) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k} + p) \gamma^\nu \quad (4.20)$$

$$+ \Pi_b^{\mu\nu}(-p) = e^2 \mu^{4-D} \text{tr} \int \frac{d^D \bar{k}}{(2\pi)^D} S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k} + p) \not{b}\gamma_5 S(\bar{k} + p) \gamma^\nu \quad (4.21)$$

Trivialmente podemos ver que $\Pi_b^{\mu\nu}(p) = \Pi_b^{\nu\mu}(-p)$. Portanto, calcularemos apenas $\Pi_b^{\mu\nu}(p)$. Isto pode ser feito realizando o seguinte procedimento

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{k}}{(2\pi)^D} \rightarrow \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d},$$

logo, racionalizando os propagadores, $S(\bar{k})$ e $S(\bar{k} + p)$, encontramos

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = e^2 \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\bar{\vec{k}} + m)\not{b}\gamma_5(\bar{\vec{k}} + m)\gamma^\nu((\bar{\vec{k}} + \vec{p}) + m)]}{(\bar{k}^2 - m^2)^2(k_1^2 - m^2)}, \quad (4.22)$$

onde $k_1 = \bar{k} + p$. Para o calculo do traço, apresentaremos três resultados. No primeiro, R_1 apresentaremos o resultado utilizando a prescrição de 't Hooft-Veltman, onde iremos separar o momento nas partes física e não física, isto é, $\bar{\vec{k}} = \vec{k} + \hat{\vec{k}}$. No segundo, R_2 , usaremos novamente a prescrição de 't Hooft-Veltman, porém desta vez sem separar as partes física e não física. Para calcular este traço aplicaremos a propriedade da ciclicidade afim de deslocar a matriz γ_5 para o final. Por fim, em R_3 mostraremos o resultado obtido pelo método usual, no qual levaremos a γ_5 ao final passando-a por cada uma das matrizes de Dirac, respeitando as relações de anticomutação (4.15). Os traços por cada um destes métodos são

$$\begin{aligned} R_1 = & 4b_\lambda \left(-im^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma + 2i\hat{k}^\mu \epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} \bar{k}_\sigma p_\rho + 2i\hat{k}^\nu \epsilon^{\mu\lambda\sigma\rho} \bar{k}_\sigma p_\rho + ik^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho - i\hat{k}^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho + \right. \\ & \left. + 2i(k \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma + ik^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma + i\hat{k}^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma + im^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} R_2 = & 4b_\lambda \left(-im^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma + 2ik^\mu \epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} \bar{k}_\sigma p_\rho - 2i\bar{k}^\nu \epsilon^{\mu\lambda\sigma\rho} \bar{k}_\sigma p_\rho - i\bar{k}^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho + 2i(\bar{k} \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma + \right. \\ & \left. + i\bar{k}^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma + im^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$R_3 = 4i \left(-m^2 \epsilon^{\mu\nu b\sigma} \bar{k}_\sigma + \bar{k}^2 \epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho + 2(\bar{k} \cdot b) \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \bar{k}_\sigma p_\rho + \bar{k}^2 \epsilon^{\mu\nu b\sigma} \bar{k}_\sigma + m^2 \epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho \right). \quad (4.25)$$

Observe que, apesar de serem um pouco diferentes, os resultados apresentados em R_1 e R_2 são equivalentes, portanto seguiremos com R_2 , por simplicidade, pois R_1 , como citamos inicialmente, possui separação das partes física e não física.

Por simplicidade na notação usaremos $\bar{k} \rightarrow k$. Vamos então avaliar R_2 , para isso

faremos a seguinte substituição: $m^2 \rightarrow -G + (k + p)^2$, onde $G = (k + p)^2 - m^2$, desse modo

$$R_2 = 4ib_\lambda [2k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} k_\sigma p_\rho - 2k^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} k_\sigma p_\rho + 2(k \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho + p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (p^\rho - k^\rho) + G \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (k^\rho - p^\rho)].$$

Substituindo R_1 em (4.22), ficamos com

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = ib_\lambda I^{\mu\nu\lambda}(p), \quad (4.26)$$

sendo

$$I^{\mu\nu\lambda}(p) = 4e^2 b_\lambda \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{2(-k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} p_\rho k_\sigma + k^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} p_\rho k_\sigma) + 2(k \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho}{(k^2 - m^2)^2 (k_1^2 - m^2)} + \frac{p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (p^\rho - k^\rho)}{(k^2 - m^2)^2 (k_1^2 - m^2)} + \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (k^\rho - p^\rho)}{(k^2 - m^2)^2} \right]. \quad (4.27)$$

A partir de agora vamos utilizar o espaço Euclidiano. dessa forma, vamos considerar $k^2 \rightarrow -k^2$, $dk_0 \rightarrow i dk_0$, $k \cdot p \rightarrow -(k \cdot p)$ e $k^\mu \rightarrow -k^\mu$ na equação (4.27), assim obtemos

$$I^{\mu\nu\lambda}(p) = -4ie^2 \mu^{3-d} b_\lambda \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{2(k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma - k^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma) - 2(k \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho}{(k^2 + m^2)^2 ((k + p)^2 + m^2)} + \frac{p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (p^\rho - k^\rho)}{(k^2 + m^2)^2 ((k + p)^2 + m^2)} \right] + 4ie^2 b_\lambda \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (k^\rho - p^\rho)}{(k^2 + m^2)^2} \quad (4.28)$$

Nosso proximo passo é extrair a estrutura tensorial, ficando apenas com integrais escalares. Note que, para segunda contribuição em (4.28) este processo é extremamente simples de ser feito, visto que tanto a integral sobre as componentes espaciais quanto a integral sobre K_0 são antisimétricas na troca de $k \rightarrow -k$. Portanto decompondo k^ρ em

$k^\rho = \vec{k}^\rho + k_0\delta_{\rho 0}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} k^\rho}{(k^2 + m^2)^2} &= \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \vec{k}^\rho}{(k^2 + m^2)^2} + \\ &+ \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (k_0\delta_{\rho 0})}{(k^2 + m^2)^2}. \end{aligned}$$

A integral em k^ρ é nula, pois trata-se de uma integral ímpar em um intervalo simétrico.

Portanto, a segunda integral fica

$$-4ie^2 b_\lambda \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho}{(\vec{k}^2 + k_0 + m^2)^2} = -4ie^2 b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho I_0, \quad (4.29)$$

onde

$$I_0 = \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0 + m^2)^2}. \quad (4.30)$$

Vamos discutir agora a primeira integral em (4.28), onde analisaremos cada um dos seus quatro termos separadamente. Primeiro para implementarmos a translação, apenas as componentes espaciais do momento interno, iremos decompor k^μ em $k^\mu = \vec{k}^\mu + k_0\delta_{\rho 0}$. Em seguida realizaremos o deslocamento $\vec{k}^\mu \rightarrow \vec{k}^\mu - xp^\mu$, onde será introduzido o parâmetro de Feynman. No passo seguinte usaremos a covariância sob rotações espaciais $\vec{k}^\mu \vec{k}^\nu \rightarrow \frac{\vec{k}^2}{D}(\delta^{\mu\nu} - \delta^{\mu 0}\delta^{\nu 0})$ e por fim, quando necessário, fraremos a seguinte substituição $\vec{p}^\mu \rightarrow p^\mu - p_0\delta^{\mu 0}$.

Aplicando essas condições ao primeiro termo encontramos

$$\begin{aligned} k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma &= -2 \frac{\vec{k}^2}{d} \epsilon^{\mu\nu\lambda p} + \left(-2 \frac{\vec{k}^2}{d} + 2x^2 p_0^2 + 4xp_0 k_0 + 2k_0^2 \right) \delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda p 0} - \\ &- (2x^2 p_0 + 2xk_0) p^\mu \epsilon^{\nu\lambda p 0} + 2x \vec{k}^\mu p_0 \epsilon^{\nu\lambda p 0} - 2xp^\mu \epsilon^{\nu\lambda p \vec{k}} + 2xp_0 \delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda p \vec{k}} + \\ &+ 2\vec{k}^\mu k_0 \epsilon^{\nu\lambda p 0} + 2k_0 \delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda p \vec{k}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para o segundo termo, note que $(2k^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma)$ possui a mesma estrutura de $(2k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma)$,

logo para obtermos o segundo termo basta permutarmos ν por μ em (4.31), assim

$$\begin{aligned}
2\vec{k}^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma &= 2\frac{\vec{k}^2}{d} \epsilon^{\mu\nu\lambda p} + \left(-2\frac{\vec{k}^2}{d} + 2x^2 p_0^2 + 4xp_0 k_0 + 2k_0^2 \right) \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda p 0} - \\
&\quad - (2x^2 p_0 + 2xk_0) p^\nu \epsilon^{\mu\lambda p 0} + 2x\vec{k}^\nu p_0 \epsilon^{\mu\lambda p 0} - 2xp^\nu \epsilon^{\mu\lambda p \vec{k}} + 2xp_0 \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda p \vec{k}} + \\
&\quad + 2\vec{k}^\nu k_0 \epsilon^{\mu\lambda p 0} + 2k_0 \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda p \vec{k}}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

No terceiro termo, decompos o produto $k \cdot p = \hat{k} \cdot \hat{p} + k_0 p_0$ e fizemos o deslocamento $\vec{k} = \vec{k} - xp$. Lembrando que $\vec{p}^2 = p^2 - p_0^2$ chegamos em

$$2(k \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho = [2(\vec{k} \cdot \vec{p}) - 2xp^2 + 2xp_0^2 + 2k_0 p_0] \epsilon^{\mu\nu\lambda p}. \tag{4.33}$$

Por fim para o quarto Termo

$$p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (k^\rho - p^\rho) = -(xp^2 + p^2) \epsilon^{\mu\nu\lambda p} + (xp^2 p_0 + p^2 k_0) \epsilon^{\mu\nu\lambda 0} + p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda \vec{k}}. \tag{4.34}$$

Reunindo (4.31), (4.32), (4.33) e (4.34), temos

$$\begin{aligned}
Num &= -\frac{2\vec{k}^2}{d} \epsilon^{\mu\nu\lambda p} + \left(-\frac{2\vec{k}^2}{d} + 2x^2 p_0^2 + 4xp_0 k_0 + 2k_0^2 \right) \delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda p 0} - (2x^2 p_0 + 2xk_0) p^\mu \epsilon^{\nu\lambda p 0} - \\
&\quad - \frac{2\vec{k}^2}{d} \epsilon^{\mu\nu\lambda p} - \left(-\frac{2\vec{k}^2}{d} + 2x^2 p_0^2 + 4xp_0 k_0 + 2k_0^2 \right) \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda p 0} + (2x^2 p_0 + 2xk_0) p^\nu \epsilon^{\mu\lambda p 0} + \\
&\quad + (2xp^2 - 2xp_0^2 - 2k_0 p_0) \epsilon^{\mu\nu\lambda p} - (xp^2 + p^2) \epsilon^{\mu\nu\lambda p} + C,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
C &= (2xp_0 + 2k_0) \vec{k}^\mu \epsilon^{\nu\lambda p 0} - (2xp^\mu - 2xp_0 \delta^{\mu 0} - 2k_0 \delta^{\mu 0}) \epsilon^{\nu\lambda p \vec{k}} - (2xp_0 + 2k_0) \vec{k}^\nu \epsilon^{\mu\lambda p 0} + \\
&\quad + (2xp^\nu - 2xp_0 \delta^{\nu 0} - 2k_0 \delta^{\nu 0}) \epsilon^{\mu\lambda p \vec{k}} - 2(\vec{k} \cdot \vec{p}) \epsilon^{\mu\nu\lambda p} - p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda \vec{k}}.
\end{aligned}$$

A integral $\int d^d \vec{k}$ em C é nula, pois trata-se de uma função ímpar em um intervalo simétrico.

Dessa forma

$$\begin{aligned} Num &= 2 \left(-p_0(k_0 + xp_0) - \frac{2\vec{k}^2}{d} - \frac{1}{2}p^2(1-x) \right) \epsilon^{\mu\nu\lambda p} + \\ &+ \left(-\frac{2\vec{k}^2}{d} + 2(k_0 + xp_0)^2 \right) (\delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda p 0} - \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda p 0}) - 2x(k_0 + xp_0)(p^\mu \epsilon^{\nu\lambda p 0} - p^\nu \epsilon^{\mu\lambda p 0}) \\ &+ p^2(k_0 + xp_0) \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo primeiro por $2xp^2(k_0 + xp_0)\epsilon^{\mu\nu\lambda 0}$, e em seguida por

$\left(2(k_0 + xp_0)^2 - \frac{2\vec{k}^2}{d}\right) p_0 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}$, obtemos

$$\begin{aligned} Num &= \left(p^2(1-2x)(k_0 + xp_0) - \frac{2\vec{k}^2}{d} p_0 + 2p_0(k_0 + xp_0)^2 \right) \epsilon^{\mu\nu\lambda 0} + \\ &+ 2 \left(-p_0(k_0 + xp_0) - \frac{2\vec{k}^2}{d} - \frac{1}{2}p^2(1-x) \right) \epsilon^{\mu\nu\lambda p} - \\ &- 2x(k_0 + xp_0)(p^\mu \epsilon^{\nu\lambda p 0} - p^\nu \epsilon^{\mu\lambda p 0} - p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}) + \\ &+ \left(2(k_0 + xp_0)^2 - \frac{2\vec{k}^2}{d} \right) (\delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda p 0} - \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda p 0} - p_0 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Agora vamos realizar a parametrização de Feynman na equação (4.28). Para isso, considere a seguinte expressão

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[Ax + B(1-x)]^{\alpha+\beta}},$$

lembrando que $k = \vec{k} + k_0$ e $p = \vec{p} + p_0$, então (4.28) fica

$$\frac{1}{((k+p)^2 + m^2)(k^2 + m^2)^2} = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{[(\vec{k} + \vec{p})^2 + (k_0 + p_0)^2 + m^2]x + (k^2 + m^2)(1-x)^3}.$$

Aplicando $\vec{k} \rightarrow \vec{k} - x\vec{p}$ ao denominador e em seguida somando e subtraindo por $x^2 p_0^2$, temos

$$\frac{1}{((k+p)^2 + m^2)(k^2 + m^2)^2} = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}. \quad (4.36)$$

Substituindo (4.35), (4.36) e (4.29) em (4.28), ficamos com

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\lambda}(p) = & -4ie^2 b_\lambda \left[\epsilon^{\mu\nu\lambda 0} I_1 + \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho (2I_2 + I_0) + (p^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho 0} p^\rho - p^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho 0} p^\rho - p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}) I_3 + \right. \\ & \left. + (\delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda\rho 0} p^\rho - \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda\rho 0} p^\rho - p_0 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}) I_4 \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Onde

$$I_1 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(p^2(1-2x)(k_0 + xp_0) - \frac{2\vec{k}^2}{d} p_0 + 2p_0(k_0 + xp_0)^2 \right)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}, \quad (4.38)$$

$$I_2 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(-p_0(k_0 + xp_0) - \frac{2\vec{k}^2}{d} - \frac{1}{2} p^2(1-x) \right)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}, \quad (4.39)$$

$$I_3 = -\mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{2x(k_0 + xp_0)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}, \quad (4.40)$$

$$I_4 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(2(k_0 + xp_0)^2 - \frac{2\vec{k}^2}{d} \right)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}. \quad (4.41)$$

Vamos agora checar a gauge invariância de cada um dos quatro termos em (4.37)

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda 0} & \rightarrow \epsilon^{\mu\nu\lambda 0} p^\nu \rightarrow \epsilon^{\mu p \lambda 0} \neq 0 \\ \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho & \rightarrow \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho p^\nu \rightarrow \epsilon^{\mu p \lambda p} = 0 \\ (p^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho 0} p^\rho - p^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho 0} p^\rho - p^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}) & \rightarrow (p^2 \epsilon^{\nu\lambda p 0} - p^2 \epsilon^{\nu\lambda p 0}) = 0, \\ (\delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda\rho 0} p^\rho - \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda\rho 0} p^\rho - p_0 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}) & \rightarrow (p_0 \epsilon^{\nu\lambda p 0} - p_0 \epsilon^{\nu\lambda p 0}) = 0. \end{aligned}$$

Devemos ter em mente que os tensores devem ser transversos, ou seja, gauge invariante com relação a p^μ e p^ν . Da análise acerca da gauge invariância da equação (4.37), podemos ver que o único problema vem de I_1 , pois $\epsilon^{\mu\nu\lambda 0}$ não é gauge invariante. No entanto, podemos mostrar que $I_1 = 0$. Para isso, vamos inicialmente fazer a seguinte manipulação em (4.38)

$$\frac{p^2(1-2x)(k_0+xp_0)+2p_0(k_0+xp_0)^2}{[\vec{k}^2+(k_0+xp_0)^2+x(1-x)p^2+m^2]^3} = \frac{-(k_0+xp_0)}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{[\vec{k}^2+(k_0+xp_0)^2+x(1-x)p^2+m^2]^2} \right).$$

Dessa forma, realizando uma integração por partes ficamos com

$$\begin{aligned} I_1 &= \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{k_0}{\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2} - \\ &\quad - \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int_0^1 (k_0 - (1-2x)p_0) dx \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^2} - \\ &\quad - \frac{2p_0}{d} \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\vec{k}^2}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}. \end{aligned}$$

Para calcular as integrais D-dimensionais usaremos o método de regularização dimensional. No espaço Euclidiano as expressões gerais para a regularização dimensional são:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2}, \quad (4.42)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d\Gamma(n-d/2-1)}{2\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2-1}. \quad (4.43)$$

Aplicando as expressões acima, onde chamaremos $(k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2 = \Delta$, encontramos

$$\begin{aligned} I_1 &= \mu^{3-d} \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{k_0^2 + m^2} \right)^{2-d/2} - \\ &\quad - \mu^{3-d} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left\{ \int \frac{dk_0}{(2\pi)} [k_0 - (1-2x)p_0 + (1-x)p_0] \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} \right\}. \end{aligned}$$

A primeira integral é nula, portanto

$$I_1 = -\mu^{3-d} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{(k_0 + xp_0)}{[(k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^{2-d/2}}.$$

Usando a forma explícita das frequências de Matsubara e o fato que p_0 é discreto, temos

$$k_0 = \frac{2\pi}{\beta} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad p_0 = \frac{2\pi}{\beta} l, \quad (4.44)$$

assim

$$I_1 = -\mu^{3-d} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{2\pi}{\beta} \int_0^1 dx \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{n + 1/2 + xl}{\left[\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 (n + 1/2 + xl)^2 + x(1-x)p^2 + m^2\right]^{2-d/2}}. \quad (4.45)$$

Finalmente, tomando $n \rightarrow -n - 1 - l$ e realizando a seguinte mudança de Variável, $y = 1 - x$, obtemos

$$I_1 = \mu^{3-d} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \frac{2\pi}{\beta} \int_0^1 dy \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \frac{n + 1/2 + yl}{\left[\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 (n + 1/2 + yl)^2 + y(1-y)p^2 + m^2\right]^{2-d/2}}. \quad (4.46)$$

Note que (4.45) e (4.46) são idênticas a menos de um sinal negativo, logo

$$I_1 = -I_1 \quad \implies \quad I_1 = 0. \quad (4.47)$$

Observe que o mesmo argumento pode ser utilizado para I_3

$$I_3 = - \int_0^1 dx \, 2(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{2x(k_0 + xp_0)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}.$$

Se $n \rightarrow -n - 1 - l$, então k_0 fica

$$k_0 \rightarrow (-n - 1/2 - l) \frac{2\pi}{\beta} = -\frac{2\pi}{\beta}(n + 1/2) - \frac{2\pi}{\beta}l.$$

Considerando as relações apresentadas em (4.44) reescrevemos a equação acima como

$k_0 \rightarrow -k_0 - p_0$. Utilizando novamente a mudança de variável, $y = 1 - x$, obtemos

$$I_3 = \int_0^1 dy \, 2(1-y) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{2y(k_0 + yp_0)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + yp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}. \quad (4.48)$$

Note que (4.48) e (4.40) são idênticas a menos de um sinal negativo, logo

$$I_3 = -I_3 \quad \implies \quad I_3 = 0. \quad (4.49)$$

Vamos agora calcular I_2 e I_4 , no limite para quadrimomentos pequenos ($p \rightarrow 0$). No entanto, é importante mencionar que o cálculo destes termos são bastante delicados, pois em geral os limites $p_0 \rightarrow 0$ e $\vec{p}^2 \rightarrow 0$ não comutam. Portanto, faremos primeiro $p_0 = 0$ e depois tomaremos o limite $\vec{p}^2 \rightarrow 0$. Desse modo I_4 será

$$I_4 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(2(k_0 + xp_0)^2 - \frac{2\vec{k}^2}{d}\right)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3}.$$

Tomando $p_0 = 0$

$$I_4 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 4(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(k_0^2 - \frac{\vec{k}^2}{d}\right)}{[\vec{k}^2 + k_0^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3},$$

e realizando as integrais em D-dimensões, obtemos

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, 4(1-x) \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \left[\frac{\Gamma(3-d/2)}{2} \frac{k_0^2}{(k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2)^{3-d/2}} - \frac{\Gamma(2-d/2)}{4} \frac{1}{(k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2)^{2-d/2}} \right].$$

Por fim, integrando em k_0

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}\sqrt{\pi}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, 4(1-x) \left[\Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \frac{1}{(k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{d-3}{2}}} - \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \frac{1}{(k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{d-3}{2}}} \right] = 0. \quad (4.50)$$

Portanto, no contexto de temperatura zero temos apenas contribuição de I_2 . Vamos agora calcular esta contribuição para os casos com massa e sem massa

4.4.1 Caso com massa

Para realizarmos o cálculo à temperatura zero precisamos fazer um deslocamento em k_0 , de modo que substituimos $k_0 \rightarrow k_0 - xp_0$ em I_2 , logo

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} \int_0^1 dx \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{-16p_0k_0(1-x) - \frac{32\vec{k}^2(1-x)}{d} - \frac{8}{2}p^2(1-x)^2}{[\vec{k}^2 + k_0^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3} + \frac{4}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)^2} \right].$$

Calculando as integrais D-dimensionais,

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} 2^{2-d} \pi^{-d/2} \int_0^1 dx \int \frac{dk_0}{(2\pi)} \left[\frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left((x-1) (k_0^2 + m^2 - p^2(x-1)x) \right)^{\frac{d-6}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left(-2(d-4)k_0 p_0 + (d-4)p_0^2(x-1) + 4(k_0^2 + m^2 - p^2(x-1)x) \right) + \right. \\ \left. + 2(k_0^2 + m^2)^{\frac{d}{2}-2} \right) - (x-1)^2 \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \bar{p}^2 (k_0^2 + m^2 - p^2(x-1)x)^{\frac{d-6}{2}} \Big],$$

e em seguida a integral em k_0 , encontramos

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \int_0^1 dx \left[2m^{d-3} + 4(x-1) (m^2 - p^2(x-1)x)^{\frac{d-3}{2}} + \right. \\ \left. + (d-3)(x-1)^2 (p_0^2 + \bar{p}^2) (m^2 - p^2(x-1)x)^{\frac{d-5}{2}} \right].$$

Seja, $p_0 \rightarrow \sqrt{p^2 - \bar{p}^2}$, então

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \int_0^1 dx \left\{ 2m^{d-3} + \left(\left[4m^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (x-1)(p^2(x-1)(d-4x-3)) \right] \right) (m^2 - p^2(x-1)x)^{\frac{d-5}{2}} \right\}. \quad (4.51)$$

Tomando agora o limite $p^2 \rightarrow 0$, ficamos com

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \int_0^1 dx \left[2m^{d-3} + 4(x-1) \left(m^2 \right)^{\frac{d-3}{2}} \right].$$

Finalmente ao integrar em x , encontramos

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \left(2m^{d-3} - 2m^{d-3} \right) = 0. \quad (4.52)$$

4.4.2 Caso sem massa

Para o caso sem massa, partiremos da equação (4.51) tomando $m \rightarrow 0$, assim (4.51) passa a ser escrito como

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \int_0^1 dx (d-4x-3) \left(p^2(x-1)^2\right) \left(-p^2(x-1)x\right)^{\frac{d-5}{2}},$$

multiplicando a expressão acima por $p^2 x^2 / p^2 x^2$, obtemos

$$4(2I_2 + I_0) = \mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \int_0^1 dx (d-4x-3) \frac{(-p^2(x-1)x)^{\frac{d-1}{2}}}{p^2 x^2}.$$

Por fim integramos em x e tomamos o limite para $d \rightarrow 3$, com isso

$$4(2I_2 + I_0) = -\frac{1}{4\pi^2}. \quad (4.53)$$

Usando este resultado em (4.37) temos

$$I^{\mu\nu\lambda}(p)_{T=0} = \frac{ie^2}{4\pi^2} b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho, \quad (4.54)$$

ou seja,

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{4\pi^2} b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho. \quad (4.55)$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [\Pi_b^{\mu\nu}(p) + \Pi_b^{\nu\mu}(-p)] \\ &= -\frac{e^2}{4\pi^2} b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho \end{aligned} \quad (4.56)$$

Vamos agora calcular novamente a indução, desta vez utilizaremos a prescrição apre-

sentada em R_3 para o traço das matrizes de Dirac. Para isso, considere

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = 4ie^2\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(-m^2\epsilon^{\mu\nu bk} + k^2\epsilon^{\mu\nu bp} + 2(k \cdot b)\epsilon^{\mu\nu kp} + k^2\epsilon^{\mu\nu bk} + m^2\epsilon^{\mu\nu bp})}{(k^2 - m^2)^2[(k+p)^2 - m^2]}.$$

Tomando $m \rightarrow 0$, ficamos com

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = 4ie^2\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2\epsilon^{\mu\nu bp} + 2(k \cdot b)\epsilon^{\mu\nu kp} + k^2\epsilon^{\mu\nu bk})}{[(k+p)^2][k^2]^2},$$

onde, usando $k^\mu k_\nu = \frac{k^2}{D} g^\mu{}_\nu$, encontramos

$$\begin{aligned} (k \cdot b)\epsilon^{\mu\nu kp} &= k^\lambda b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\sigma p} k_\sigma = b_\lambda k^\lambda k_\sigma \epsilon^{\mu\nu\sigma p} \\ &= b_\lambda \frac{k^2}{D} g^\lambda{}_\sigma \epsilon^{\mu\nu\sigma p} = b_\lambda \frac{k^2}{D} \epsilon^{\mu\nu\lambda p} = \frac{k^2}{D} \epsilon^{\mu\nu bp}. \end{aligned}$$

Assim

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = 4ie^2\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(\epsilon^{\mu\nu bp} + \frac{2}{D}\epsilon^{\mu\nu bp} + \epsilon^{\mu\nu b\sigma} k_\sigma)}{[(k+p)^2][k^2]}.$$

Realizando agora a Parametrização de Feynman

$$\frac{1}{[(k+p)^2][k^2]} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \int_0^1 dx \frac{1}{[(k+p)^2 x + k^2(1-x)]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 + 2x(k \cdot p) + xp^2]^2}.$$

Desse modo

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = 4ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(\epsilon^{\mu\nu bp} + \frac{2}{D}\epsilon^{\mu\nu bp} + \epsilon^{\mu\nu b\sigma} k_\sigma)}{[k^2 + 2x(k \cdot p) + xp^2]^2},$$

aplicando o deslocamento $k \rightarrow k - xp$, obtemos

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = 4ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(\epsilon^{\mu\nu b p} + \frac{2}{D}\epsilon^{\mu\nu b p} + \epsilon^{\mu\nu b \sigma}(k_\sigma - xp_\sigma))}{[k^2 - p^2(x-1)x]^2}. \quad (4.57)$$

Observe que, a integral de $\epsilon^{\mu\nu b \sigma} k_\sigma$ em k é impar, assim (4.57) passa a ser

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = 4ie^2\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(\epsilon^{\mu\nu b p} + \frac{2}{D}\epsilon^{\mu\nu b p} - x\epsilon^{\mu\nu b \sigma} p_\sigma)}{[k^2 - p^2(x-1)x]^2}.$$

Por fim, calculando ambas as integrais e tomando o limite de $D \rightarrow 4$, temos

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{16\pi^2} b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho,$$

portanto

$$\Pi_b^{\mu\nu} = \frac{e^2}{16\pi^2} b_\lambda \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho. \quad (4.58)$$

Da equação (4.56) encontramos o resultado $C = -\frac{e^2}{4\pi^2}$ para o coeficiente do termo de Chern-Simons, tal resultado só havia sido evidenciado na literatura para o caso massivo [42,43, 44]. porém, inédito para o caso não massivo. Por outro lado, em (4.58) obtivemos $C = \frac{e^2}{16\pi^2}$, ao utilizar o método usual para o cálculo do traço das matrizes de Dirac, tal resultado pode ser visto na literatura [27,45]. Desse modo, devido a essa ambiguidade nos resultados, podemos afirmar que o coeficiente C é de fato finito, porém é indeterminado também para o caso sem massa, assim como ocorre com férmions massivos.

Capítulo 5

INDUÇÃO À TEMPERATURA FINITA

Neste capítulo iremos estudar a indução de Chern-Simons na EDQ com massa e sem massa, no contexto de temperatura finita. Discutiremos a questão da restauração da simetria de paridade, e em seguida faremos uma análise acerca da não analiticidade com relação ao limite dos momentos externos p_0 e \vec{p} .

5.1 Introdução

Os estudos em teoria quântica de campos à temperatura finita surgiu devido a problemas em cosmologia [46]. Trabalhos mais recentes aplicou esta teoria em processos de colisões de altas energia e em transições de fase [47, 48].

Quando realizamos estudos acerca da teoria quântica de campos a temperatura finita, dispomos de três formalismos bem consolidados. O primeiro, conhecido por formalismo de

tempo imaginário, ou simplesmente formalismo de Matsubara. Este formalismo foi apresentado por Matsubara na década de 1950 [49], e é utilizado quando tratamos com fenômenos em equilíbrio. O formalismo de Matsubara utiliza a relação existente entre o operador de evolução temporal da teoria quântica e a função distribuição da mecânica estatística, a variável temporal é tratada nesse método como temperatura, tornando assim, esse formalismo apropriado para descrever sistemas estatísticos em equilíbrio térmico. Nos outros dois formalismos, conhecidos como formalismos de tempo real, a variável temporal é mantida inalterada, e a temperatura é introduzida através de condições de contorno. O primeiro destes métodos foi introduzido por Schwinger [50], e ficou conhecido como caminho temporal fechado (closed time path formalism) [51, 52]. O segundo é o formalismo de dinâmica de campos térmicos (thermofield dynamics), cujo objetivo principal é obter o vácuo térmico da teoria [53, 54].

A teorias de campo à temperatura finita tem como objetivo entender o comportamento da matéria sujeita à altíssimas temperaturas, de modo que os quarks se desconfinem, ou ainda à densidade extremamente elevadas. Estas condições extremas são de importância fundamental para a compreensão de processos que aconteceram no universo primordial, que o tornaram tal como o conhecemos hoje, assim como para o estudo de colisões altamente energéticas de núcleos pesados. Seja qual for o objetivo do estudo realizado, é necessário compreender os efeitos gerados pela associação da teoria de campos usual com a termodinâmica.

5.2 Chern-Simons à $T \neq 0$ com massa

Para implementarmos a temperatura finita precisamos considerar

$$\int \frac{dk_0}{(2\pi)} = \frac{1}{\beta} \sum_n. \quad (5.1)$$

Assim como foi feito no capítulo anterior, vamos considerar $p_0 = 0$ e depois tomar o limite para $\vec{p} \rightarrow 0$, dessa forma

$$2I_2 + I_0 = \frac{2}{\beta} \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \int \frac{d^D \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(-p_0(k_0 + xp_0) - \frac{2\vec{k}^2}{d} - \frac{1}{2}p^2(1-x)\right)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^3} + \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)^2}.$$

Lembrando que $p^2 = \vec{p}^2 + p_0^2$. Tomando primeiro $p_0 = 0$, obtemos

$$2I_2 + I_0 = \frac{\mu^{3-d}}{\beta} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{\left(-\frac{2\vec{k}^2}{d}\right)}{[\vec{k}^2 + k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2]^3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\vec{p}^2(1-x)\right)}{[\vec{k}^2 + k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2]^3} \right] + \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)^2}.$$

Calculamos integrais D-dimensionais, com base nas equações (4.42) e (4.43), onde chamamos $k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2 = \Delta$, encontramos

$$2I_2 + I_0 = \frac{\mu^{3-d}}{\beta} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \left[-\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} - \frac{1}{2} (\vec{p}^2(1-x)) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(3-d/2)}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{3-d/2} + \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{k_0^2 + m^2}\right)^{2-d/2} \right].$$

Tomando agora o limite $\vec{p}^2 \rightarrow 0$, ficamos com

$$2I_2 + I_0 = -\mu^{3-d} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\beta(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \left[\left(\frac{1}{k_0^2 + m^2}\right)^{2-d/2} - \left(\frac{1}{k_0^2 + m^2}\right)^{2-d/2} \right]. \quad (5.2)$$

Na equação acima é fácil notar que $2I_2 + I_0 = 0$ para qualquer D. Vamos agora calcular a contribuição de I_4 . Para isso, vamos aplicar a condição (5.1) e tomar $p_0 = 0$, logo

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}}{\beta} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(2k_0^2 - \frac{2\vec{k}^2}{D}\right)}{[\vec{k}^2 + k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2]^3},$$

após calcular as integrais D-dimensionais ficamos com

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}}{\beta} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left[\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{k_0^2}{[k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2]^{3-\frac{d}{2}}} - \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{2} \frac{1}{[k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right].$$

Lembrando que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, então

$$\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) = \left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right). \quad (5.3)$$

Aplicando a propriedade acima, obtemos

$$I_4 = \mu^{3-d} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \left[\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{k_0^2}{[k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2]^{3-\frac{d}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{1}{[k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2 + m^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right].$$

Agora vamos somar e subtrair $M = x(1-x)\vec{p}^2 + m^2$ ao primeiro termo da equação acima, assim

$$I_4 = \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, (1-x) \sum_n \left[(3-d) \frac{1}{[k_0^2 + M]^{2-\frac{d}{2}}} + (d-4) \frac{M}{[k_0^2 + M]^{3-\frac{d}{2}}} \right]. \quad (5.4)$$

Finalmente, tomando o limite $\vec{p}^2 \rightarrow 0$ vemos que $M = m^2$, desse modo

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}}{\beta} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, (1-x) \sum_n \left[(3-d) \frac{1}{[k_0^2 + m^2]^{2-\frac{d}{2}}} + (d-4) \frac{m^2}{[k_0^2 + m^2]^{3-\frac{d}{2}}} \right]. \quad (5.5)$$

Neste ponto precisamos de uma representação explícita para a soma sobre as frequências

de Matsubara. Esta representação explícita é conhecida como somatório de Lery Ford,

$$\sum_n [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{(a^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f(a, b), \quad (5.6)$$

onde

$$f(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{[2\pi(z+ib)]} - 1} \right).$$

Tal somatório é válido quando $1/2 < \lambda < 1$. No entanto, não é possível aplicar (5.6) diretamente para o nosso caso, pois se $d = 3$ a integral em (5.6) não converge para a segunda contribuição em (5.5). Então neste caso usamos a seguinte relação

$$f_\lambda(a, b) = -\frac{1}{2a^2} \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} f_{\lambda-1}(a, b) - \frac{1}{4a^2} \frac{1}{(2 - \lambda)(1 - \lambda)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(a, b), \quad (5.7)$$

com

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^{\lambda-2}} \pi^2 \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z). \quad (5.8)$$

Usando (4.44) a primeira contribuição em (5.5) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_n [k_0^2 + m^2]^{-(2-\frac{d}{2})} &= \sum_n \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 (n + 1/2)^2 + m^2 \right]^{-(2-\frac{d}{2})} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-4} \sum_n [(n + 1/2)^2 + \xi^2]^{-(2-\frac{d}{2})}, \end{aligned}$$

onde $\xi = \frac{\beta m}{2\pi}$. Já para a segunda contribuição

$$\begin{aligned} m^2 \sum_n [k_0^2 + m^2]^{-(3-\frac{d}{2})} &= m^2 \sum_n \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 (n + 1/2)^2 + m^2 \right]^{-(3-\frac{d}{2})} \\ &= \xi^2 \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-4} \sum_n [(n + 1/2)^2 + \xi^2]^{-(3-\frac{d}{2})}. \end{aligned}$$

Dessa forma, usando (5.6) e (5.7), a expressão (5.5) será

$$I_4 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\beta(4\pi)^{d/2}} \left[(3-d) \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-4} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right)}{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) (\xi)^{3-d}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sin\left(2\pi - \frac{d\pi}{2}\right) f(\xi, 1/2) \right) + (d-4) \xi^2 \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-4} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{5-d}{2}\right)}{\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) (\xi)^{5-d}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sin\left(3\pi - \frac{d\pi}{2}\right) \left[\frac{1}{\xi^2} \frac{d-3}{d-4} f_{\lambda-1}(\xi, 1/2) - \frac{1}{2\xi^2(d-2)(d-4)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(\xi, 1/2) \right] \right] \right\}.$$

Considerando as seguintes relações

$$(3-d) = 2 \left(\frac{3-d}{2}\right), \quad (d-4) = -2 \left(2 - \frac{d}{2}\right), \\ \left(\frac{3-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5-d}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right),$$

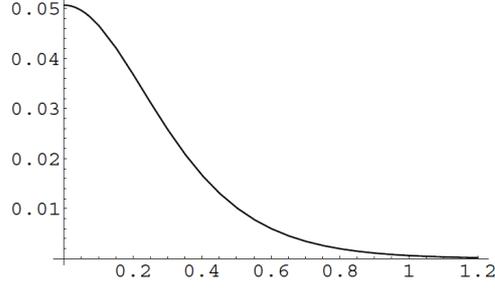
e calculando a integral em x escrevemos

$$I_4 = \mu^{3-d} \frac{\pi^{-2+d/2}}{16} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{d-3} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \sin\left(\frac{d\pi}{2}\right) \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{\text{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z)}{(z^2 - \xi^2)^{1-\frac{d}{2}}}.$$

Tomando o limite para $d \rightarrow 3$ obtemos

$$I_4 = \frac{1}{8} \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \text{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z) = \frac{1}{8} F(\xi). \quad (5.9)$$

O comportamento de $F(\xi)$ pode ser visto no gráfico abaixo.

Figura 5.1: Comportamento da função $F(\xi)$.

A equação (5.9) mostra que para $\beta \neq \infty$ ($T \neq 0$) surge um termo de violação de simetria de Lorentz e CPT. Uma vez que encontramos (5.9) podemos substituí-lo em (4.37), obtendo dessa forma

$$I^{\mu\nu\lambda}(p) = -i\frac{e^2}{2} F(\xi)(\delta^{\mu 0}\epsilon^{\nu\lambda\rho 0}p^\rho - \delta^{\nu 0}\epsilon^{\mu\lambda\rho 0}p^\rho - p_0\epsilon^{\mu\nu\lambda 0}). \quad (5.10)$$

Podemos, portanto, escrever (4.26) como

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{2} F(\xi)b_\lambda(\delta^{\mu 0}\epsilon^{\nu\lambda\rho 0}p^\rho - \delta^{\nu 0}\epsilon^{\mu\lambda\rho 0}p^\rho - p_0\epsilon^{\mu\nu\lambda 0}), \quad (5.11)$$

logo, o tensor de polarização do vácuo será

$$\Pi_b^{\mu\nu} = \frac{e^2}{2} F(\xi)b_\lambda(\delta^{\mu 0}\epsilon^{\nu\lambda\rho 0}p^\rho - \delta^{\nu 0}\epsilon^{\mu\lambda\rho 0}p^\rho - p_0\epsilon^{\mu\nu\lambda 0}). \quad (5.12)$$

Neste caso, para temperatura finita, temos apenas a presença da quebra de simetria de reversão temporal, pois $b_i \neq 0$. Observe também que quando $T = 0$ vemos que $F(\xi)$ é nulo, recuperando assim o fato de que, para este caso, não surge termo de CS com violação de CPT e Lorentz na ação efetiva.

5.3 Não Analiticidade

Nesta seção discutiremos a questão não-analiticidade com relação ao limite dos momentos externos p_0 e \vec{p} . Tal assunto já foi discutido em $3D$ [9], contudo, em $4D$ ainda não foi abordado na literatura.

Sabe-se que no contexto de temperatura finita, a auto-energia é uma função não analítica do momento e da energia. Para verificarmos a não analiticidade vamos realizar um processo inverso ao que foi feito nas seções anteriores, isto é, vamos assumir primeiro que $\vec{p} = 0$ e depois vamos tomar o limite para $p_0 \rightarrow 0$. Assim aplicando (5.1) e tomando $\vec{p} = 0$ em (4.41), temos

$$I_4 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(2(k_0 + xp_0)^2 - \frac{2\vec{k}^2}{d}\right)}{[\vec{k}^2 + (k_0 + xp_0)^2 + x(1-x)p_0^2 + m^2]^3}.$$

Calculando as integrais em D-dimensões

$$I_4 = \mu^{3-d} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \left[\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{(k_0 + xp_0)^2}{((k_0 + xp_0)^2 + M^2)^{3-\frac{d}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{1}{((k_0 + xp_0)^2 + M^2)^{2-\frac{d}{2}}} \right].$$

Vamos chamar $x(1-x)p_0^2 + m^2 = M^2$, e então somar e subtrair M^2 ao primeiro termo, com isso

$$I_4 = \mu^{3-d} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, (1-x) \sum_n \left[(3-d) \frac{1}{((k_0 + xp_0)^2 + M^2)^{2-\frac{d}{2}}} + (d-4) \frac{M^2}{((k_0 + xp_0)^2 + M^2)^{3-\frac{d}{2}}} \right].$$

Sejam $k_0 = \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2})$ e $p_0 = \frac{2\pi}{\beta}l$, então

$$I_4 = \mu^{3-d} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (1-x) \sum_n \left[(3-d) \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-4} \frac{1}{\left[\left(n + \frac{1}{2} + xl \right)^2 + \left(\frac{\beta M}{2\pi} \right)^2 \right]^{2 - \frac{d}{2}}} + (d-4) \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-6} \frac{M^2}{\left[\left(n + \frac{1}{2} + xl \right)^2 + \left(\frac{\beta M}{2\pi} \right)^2 \right]^{3 - \frac{d}{2}}} \right],$$

fazendo $\frac{\beta M}{2\pi} = a$ e $\frac{1}{2} + xl = b$, ficamos com

$$I_4 = \mu^{3-d} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx (1-x) \sum_n \left[(3-d) \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-4} \frac{1}{\left[(n+b)^2 + a^2 \right]^{2 - \frac{d}{2}}} + (d-4) \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-6} \frac{a^2}{\left[(n+b)^2 + a^2 \right]^{3 - \frac{d}{2}}} \right].$$

A partir deste ponto os cálculos são feitos usando o somatório de Lery Ford, exatamente como nas seções anteriores. No entanto devemos observar que b agora foi acrescido a quantidade xl o que irá resultar numa alteração na função trigonométrica. Assim

$$I_4 = \frac{\beta}{4} \int_0^1 dx (1-x) \int_{|a|}^{\infty} dz (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \tanh[\pi(z + i xl)] \operatorname{sech}^2[\pi(z + i xl)]. \quad (5.13)$$

A integral em x não pode ser realizada diretamente, pois sendo $M^2 = x(1-x)p_0^2 + m^2$ então

$$a = \frac{\beta M}{2\pi} = \frac{\beta}{2\pi} \sqrt{x(1-x)p_0^2 + m^2} = \sqrt{x(1-x)l^2 + \xi^2}, \quad (5.14)$$

logo ao realizar uma mudança nos limites de integração, podendo assim inverter a ordem das integrações, obtemos

$$I_4 = \frac{\beta}{4} \int_{|\xi|}^{\infty} dz \int_0^1 dx (1-x) (z^2 + x(1-x)l^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} \tanh[\pi(z + i xl)] \operatorname{sech}^2[\pi(z + i xl)]. \quad (5.15)$$

Realizando uma expansão em série em $(z^2 + x(1-x)l^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}$, encontramos

$$\begin{aligned}
(z^2 + x(1-x)l^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}} &= (z^2 - \xi^2)^{-1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) (x(1-x)l^2) + (z^2 - \xi^2)^{-3/2} \left(\frac{1}{8}\right) \times \\
&\times (x(1-x)l^2)^2 + (z^2 - \xi^2)^{-5/2} \left(-\frac{1}{16}\right) (x(1-x)l^2)^3 + \\
&+ (z^2 - \xi^2)^{-7/2} \left(\frac{5}{128}\right) (x(1-x)l^2)^4 + \dots
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Vamos agora integrar cada um dos termos da expansão. Para o primeiro temos,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx (1-x) (z^2 - \xi^2)^{-1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) (x(1-x)l^2) \tanh[\pi(z+ixl)] \operatorname{sech}[\pi(z+ixl)]^2 = \\
&= \frac{1}{4\pi^4 l^2 \sqrt{(z-\xi)(\xi+z)}} \left\{ 6 \tanh^{-1}(\coth(\pi z)) \left[-\log \left(-\frac{i(-1)^l \coth(\pi z)}{\sqrt{-\operatorname{csch}^2(\pi z)}} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -i\pi l + \log \left(-\frac{i \coth(\pi z)}{\sqrt{-\operatorname{csch}^2(\pi z)}} \right) \right] - \pi \left[\pi l^2 \tanh(\pi z) + l \left(4i \log((-1)^l \cosh(\pi z)) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. -3\pi l - 6i \log(e^{2\pi z} + 1) - 4i \log(\cosh(\pi z)) + 3\pi \right) + 3i \log((-1)^l) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Já para o segundo

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx (1-x) (z^2 - \xi^2)^{-3/2} \left(\frac{1}{8}\right) (x(1-x)l^2)^2 \tanh[\pi(z+ixl)] \operatorname{sech}[\pi(z+ixl)]^2 = \\
&= \frac{i(15\operatorname{Li}_3(-e^{2\pi z}) + \pi l(\pi l \log(e^{2\pi z} + 1) + 3i\operatorname{Li}_2(-e^{2\pi z})))}{8\pi^5 l((z-\xi)(\xi+z))^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Do terceiro termo obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx (1-x) (z^2 - \xi^2)^{-5/2} \left(-\frac{1}{16}\right) (x(1-x)l^2)^3 \tanh[\pi(z+ixl)] \operatorname{sech}[\pi(z+ixl)]^2 = \\
&= \frac{(3\pi l(15\operatorname{Li}_4(-e^{2\pi z}) + \pi l(-\pi l \operatorname{Li}_2(-e^{2\pi z}) + 10i\operatorname{Li}_3(-e^{2\pi z}))) - 315i\operatorname{Li}_5(-e^{2\pi z}))}{32\pi^7 l((z-\xi)(\xi+z))^{5/2}}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Por fim para o quarto termo

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx (1-x) (z^2 - \xi^2)^{-7/2} \left(-\frac{5}{128}\right) (x(1-x)l^2)^4 \tanh[\pi(z+ixl)] \operatorname{sech}[\pi(z+ixl)]^2 = \\
& = \frac{15i \left(\pi^4 l^4 \operatorname{Li}_3(-e^{2\pi z}) + 5\pi l (\pi l (-21\operatorname{Li}_5(-e^{2\pi z}) - 2i\pi l \operatorname{Li}_4(-e^{2\pi z})) + 21i\operatorname{Li}_6(-e^{2\pi z})) \right)}{128\pi^9 l ((z-\xi)(\xi+z))^{7/2}} + \\
& + \frac{945\operatorname{Li}_7(-e^{2\pi z})}{128\pi^9 l ((z-\xi)(\xi+z))^{7/2}}. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Substituindo estes quatro termos em (5.15), e fazendo algumas manipulações algébricas, ficamos com

$$I_4 = \frac{\beta}{4} \int_{|\xi|}^{\infty} dz \left[\frac{1}{4\pi^2} (3 - \operatorname{Tanh}[\pi z]) (z^2 - \xi^2)^{-1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\pi^{2(n+1)}} \operatorname{Li}_{2n}(-E^{2\pi z}) (z^2 - \xi^2)^{-n-1/2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\right) \right] \tag{5.21}$$

Este resultado não é satisfatório, pois ao tomarmos o limite $P_0 \rightarrow 0$, isto é, $l \rightarrow 0$, a equação diverge. Desse modo não é possível verificar a não-analiticidade da auto-energia para este caso.

5.4 Chern-Simons à $T \neq 0$ sem massa

Vamos agora calcular a indução para o caso sem massa. Para isto vamos considerar $m = 0$ e tomar $p_0 = 0$ em (4.41), de modo que

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}}{\beta} \int_0^1 dx 2(1-x) \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\left(2k_0^2 - \frac{2\vec{k}^2}{d}\right)}{[\vec{k}^2 + k_0^2 + x(1-x)\vec{p}^2]^3}.$$

Ao calcular as integrais D-dimensionais encontramos

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}}{\beta} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left[\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{k_0^2}{[k_0^2 + x(1-x)\bar{p}^2]^{3-\frac{d}{2}}} - \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{2} \frac{1}{[k_0^2 + x(1-x)\bar{p}^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right],$$

usando novamente a propriedade apresentada na eq. (5.3) e considerando $x(1-x)\bar{p}^2 = M^2$, ficamos com

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\beta(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, 2(1-x) \sum_n \left[\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{k_0^2}{[k_0^2 + M^2]^{3-\frac{d}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{1}{[k_0^2 + M^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right].$$

Somando e subtraindo o primeiro termo por M^2 encontramos

$$I_4 = \frac{\mu^{3-d}\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\beta(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \, (1-x) \sum_n \left[(3-d) \frac{1}{[k_0^2 + M^2]^{2-\frac{d}{2}}} + (d-4) \frac{M^2}{[k_0^2 + M^2]^{3-\frac{d}{2}}} \right]. \quad (5.22)$$

Aqui usaremos novamente o somatório de Lery Ford. Logo, para a primeira contribuição

$$\begin{aligned} \sum_n [k_0^2 + M^2]^{-(2-\frac{d}{2})} &= \sum_n \left[\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 (n+1/2)^2 + M^2 \right]^{-(2-\frac{d}{2})} \\ &= \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-4} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi'^2]^{-(2-\frac{d}{2})}, \end{aligned}$$

onde $\xi' = \frac{\beta M}{2\pi}$. E para a segunda contribuição

$$\begin{aligned} M^2 \sum_n [k_0^2 + M^2]^{-(3-\frac{d}{2})} &= M^2 \sum_n \left[\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 (n+1/2)^2 + M^2 \right]^{-(3-\frac{d}{2})} \\ &= \xi'^2 \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{d-4} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi'^2]^{-(3-\frac{d}{2})}. \end{aligned}$$

Sendo assim, (5.22) fica

$$I_4 = \mu^{3-d} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\beta(4\pi)^{d/2}} \left[(3-d) \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-4} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3-d}{2})}{\Gamma(2-\frac{d}{2}) (\xi')^{3-d}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sin \left(2\pi - \frac{d\pi}{2} \right) f(\xi', 1/2) \right) + (d-4) \xi'^2 \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{d-4} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{5-d}{2})}{\Gamma(3-\frac{d}{2}) (\xi')^{5-d}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sin \left(3\pi - \frac{D\pi}{2} \right) \left[\frac{1}{\xi'^2} \frac{d-3}{d-4} f_{\lambda-1}(\xi', 1/2) - \frac{1}{2\xi'^2(d-2)(d-4)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(\xi', 1/2) \right] \right] \right\}.$$

Os cálculos realizados aqui são exatamente como na seção anterior, desse modo

$$I_4 = \frac{1}{8} \int_{|\xi'|}^{\infty} dz (z^2 - \xi'^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z). \quad (5.23)$$

No entanto, ao tomarmos o limite $\vec{p}^2 \rightarrow 0$, constatamos que $M^2 = 0$ e portanto $\xi' = 0$. Com isso, reescrevemos (5.23) como

$$I_4 = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} dz z \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z) = \frac{1}{8} F(0). \quad (5.24)$$

Onde

$$F(0) = \int_0^{\infty} dz z \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z) = \frac{1}{2\pi^2}, \quad (5.25)$$

assim o tensor de polarização do vácuo será escrito como

$$\Pi_b^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi^2} b_\lambda (\delta^{\mu 0} \epsilon^{\nu\lambda\rho 0} p^\rho - \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu\lambda\rho 0} p^\rho - p_0 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}) = \frac{e^2}{4\pi^2} b_i \epsilon^{\mu\nu i \rho} p^\rho. \quad (5.26)$$

Na equação (5.26) vemos que ocorre a restauração da simetria de inversão espacial (P), pois $b_0 \rightarrow 0$, ao passo que a quebra da simetria de reversão temporal é mantida. É interessante observar também que os limites de $F(\xi)$ para $T \rightarrow \infty$ e $m \rightarrow 0$ são iguais, visto que ξ é dependente apenas da temperatura e da massa.

5.5 Chern-Simons Via Expansão Derivativa

Vamos agora calcular o termo de Chern-Simons utilizando o método da expansão derivativa, para eliminar a necessidade de fazermos a parametrização de Feynman. Para isso, utilizamos o método perturbativo, ao considerarmos apenas contribuições lineares de b_μ em $S(\bar{k} - p)$ da equação (4.19), assim encontramos

$$S(\bar{k} - p) = \frac{1}{\bar{k} - \not{p} - m} = \overbrace{\frac{1}{\bar{k} - m}}^{S(\bar{k})} + \frac{1}{\bar{k} - m} \not{p} \frac{1}{\bar{k} - m} + \dots \quad (5.27)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} = & \frac{e^2}{2} \text{tr} \int \frac{d^D \bar{k}}{(2\pi)^D} \left\{ S(\bar{k}) \not{b} \gamma_5 S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k}) \not{p} S(\bar{k}) \gamma^\nu + S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k}) \not{b} \gamma_5 S(\bar{k}) \not{p} S(\bar{k}) \gamma^\nu + \right. \\ & \left. + S(\bar{k}) \gamma^\mu S(\bar{k}) \not{p} S(\bar{k}) \not{b} \gamma_5 S(\bar{k}) \gamma^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Racionalizando $S(\bar{k})$,

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} = & \frac{e^2}{2\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 - m^2)^4} \left\{ \text{tr} [(\vec{k} + m) \not{b} \gamma_5 (\vec{k} + m) \gamma^\mu (\vec{k} + m) \not{p} (\vec{k} + m) \gamma^\nu] \right. \\ & + \text{tr} [(\vec{k} + m) \gamma^\mu (\vec{k} + m) \not{b} \gamma_5 (\vec{k} + m) \not{p} (\vec{k} + m) \gamma^\nu] + \\ & \left. + \text{tr} [(\vec{k} + m) \gamma^\mu (\vec{k} + m) \not{p} (\vec{k} + m) \not{b} \gamma_5 (\vec{k} + m) \gamma^\nu] \right\}. \end{aligned}$$

Para o cálculo do traço apresentaremos novamente os resultados obtidos pelos três métodos

que utilizamos no capítulo anterior:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 4i b_\lambda \left((k^2 - m^2)(-3k^2 - 2\hat{k}^2 + 3m^2)\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho + 4(-k^2 - \hat{k}^2 + m^2) \times \right. \\
&\quad \left. \times (k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} k_\sigma p_\rho - k^\nu \epsilon^{\nu\lambda\sigma\rho} k_\sigma p_\rho + (k \cdot p)\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} k_\sigma) \right), \\
T_2 &= 4i(\bar{k}^2 - m^2)b_\lambda \left[-3(\bar{k}^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho - 4\bar{k}^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} p_\rho \bar{k}_\sigma + 4\bar{k}^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} p_\rho \bar{k}_\sigma + 4(\bar{k} \cdot p)\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{k}_\sigma \right], \\
T_3 &= 4i(\bar{k}^2 - m^2) \left((\bar{k}^2 + 3m^2)\epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho + 4(\bar{k} \cdot b)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \bar{k}_\sigma \right).
\end{aligned}$$

Vamos inicialmente utilizar o resultado obtido em T_3 (método usual), para confirmar o resultado obtido na equação (4.58). Note que este cálculo é realizado no contexto de temperatura zero, visto que o resultado que estamos interessados foi obtido desta forma.

Assim

$$\Pi_b^{\mu\nu} = 2ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2)^4} \left\{ (k^2 - m^2) \left((k^2 + 3m^2)\epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho + 4(k \cdot b)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho k_\sigma \right) \right\},$$

tomando $m \rightarrow 0$ e lembrando que $(k \cdot b)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\sigma = \frac{k^2}{D}\epsilon^{\mu\nu\rho b}$, então

$$\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu} &= 2ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2)^4} \left\{ (k^2)^2 \left(\epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho - \frac{4}{D}\epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho \right) \right\} \\
&= 2ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \left(\frac{1}{(k^2)^2} - \frac{4}{D} \frac{1}{(k^2)^2} \right) \epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho \right\}.
\end{aligned}$$

Vamos acrescentar um fator $\Delta = 0$ ao numerador afim de realizar as integrais D-dimensionais, desse modo

$$\Pi_b^{\mu\nu} = 2ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \left(\frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} - \frac{4}{D} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} \right) \epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho \right\}.$$

Calculando as integrais obtemos

$$\Pi_b^{\mu\nu} = \mu^{4-D} \frac{2^{2-D} \pi^{-\frac{D}{2}} e^2 (-\Delta)^{\frac{D-4}{2}} \Gamma(3 - \frac{D}{2})}{D} \epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho.$$

No limite de $D \rightarrow 4$

$$\Pi_b^{\mu\nu} = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu b\rho} p_\rho. \quad (5.29)$$

Observe que o coeficiente do termo de Chern-Simons que encontramos em (5.29), isto é, $C = \frac{1}{16\pi^2}$ é exatamente o mesmo que obtivemos no capítulo anterior, em (4.58).

Agora, vamos calcular o termo de Chern-Simons via expansão derivativa à temperatura finita. Para isso, vamos utilizar o resultado obtido em T_2 . Uma vez que não vamos separar as partes físicas e não físicas. Novamente iremos considerar $\vec{k} \rightarrow k$ por simplicidade na notação. Desse modo

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} = & b_\lambda \frac{e^2}{2\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{4i}{(k^2 - m^2)^3} \left[-3(k^2 - m^2) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p_\rho - 4k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} p_\rho k_\sigma + \right. \\ & \left. + 4k^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} p_\rho k_\sigma + 4(k \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} k_\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Usando as relações apresentadas no capítulo anterior, passamos a equação (5.30) para o espaço Euclidiano, obtendo dessa forma

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} = & 4b_\lambda \frac{e^2}{2\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2)^3} \left[3(k^2 + m^2) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho + 4k^\mu \epsilon^{\nu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma - \right. \\ & \left. - 4k^\nu \epsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} p^\rho k^\sigma - 4(k \cdot p) \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \vec{k}^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Vamos agora fazer um procedimento semelhante ao da seção (5.2), faremos uma decomposição, $k^\mu = \vec{k}^\mu + k_0 \delta^{\mu 0}$, e em seguida usaremos a relação $\vec{k}^\alpha \vec{k}^\beta = \frac{\vec{k}^2}{d} (\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0} \delta^{\beta 0})$ em

todos os quatro termos de (5.31). Sendo assim

$$\begin{aligned}\Pi_b^{\mu\nu} &= 4b_\lambda \frac{e^2}{2\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)^3} \left[3 \left(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2 \right) - 12 \frac{\vec{k}^2}{d} \right] \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho + \\ &\quad + 4 \left(\frac{\vec{k}^2}{d} - k_0^2 \right) \left(\delta^{\mu 0} \epsilon^{0\nu\lambda\rho} p^\rho + \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0\lambda\rho} p^\rho + p_0 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0} \right) \Big] \\ &= b_\lambda \frac{e^2}{2} \left(I_1 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} p^\rho + I_2 (\delta^{\mu 0} \epsilon^{0\nu\lambda\rho} p^\rho + \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0\lambda\rho} p^\rho + p_0 \epsilon^{\mu\nu\lambda 0}) \right),\end{aligned}\quad (5.32)$$

onde

$$I_1 = \frac{4}{\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{3}{(\vec{k}^2 + k_0 + m^2)^2} - 12 \frac{\vec{k}^2}{d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)^3} \right], \quad (5.33)$$

$$I_2 = \frac{16}{\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \left(\frac{\vec{k}^2}{d} - k_0^2 \right) \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)^3}. \quad (5.34)$$

A integral D-dimensional de I_1 é nula, portanto teremos somente a contribuição de I_2 . Com isso,

$$I_2 = 2^{2-d} \pi^{-d/2} \Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) \mu^{d-3} \frac{1}{\beta} \sum_n \left[(3-d) \frac{1}{(k_0^2 + m^2)^{2-\frac{d}{2}}} + (d-4) \frac{m^2}{(k_0^2 + m^2)^{3-\frac{d}{2}}} \right].$$

Observe que esta expressão é similar a que calculamos em (5.5), então usando novamente o somatório de Lery Ford obtemos

$$I_2 = \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z) = F(\xi). \quad (5.35)$$

Tomando o limite de $m \rightarrow 0$, ou seja, $\xi = \frac{\beta m}{2\pi} = 0$ encontramos

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{4\pi^2} (\delta^{\mu 0} \epsilon^{0\nu b p} + \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b p} + p_0 \epsilon^{\mu\nu b 0}). \quad (5.36)$$

Uma análise interessante que pode ser feita neste contexto é realizar o somatório so-

bre a componente temporal do momento interno antes da integral sobre suas componentes espaciais. O objetivo desta análise é mostrar que a função obtida terá o mesmo comportamento que a função $F(\xi)$ em (5.9). Mostraremos que com esse procedimento conseguimos recuperar o gráfico da figura (5.1). Para isso, vamos usar a forma explícita das frequências de Matsubara e aplicar a mudança de variável $K = \frac{\beta \vec{k}}{2\pi}$. Considerando seguinte relação

$$\int d^d k f(k) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty dk k^{d-1} f(k), \quad (5.37)$$

então (5.33) e (5.34) passam a ser

$$\begin{aligned} I_1 &= \mu^{3-d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{4-d} \int_0^\infty dK \sum_n \left[\frac{12}{\beta} \left(\frac{K^{d-1}}{(K^2 + (n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2)^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{4}{d} \frac{K^{d+1}}{(K^2 + (n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2)^3} \right) \right] \\ I_2 &= -\mu^{3-d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{4-d} \int_0^\infty dK \sum_n \left[\frac{16}{\beta} \left(\frac{(n + \frac{1}{2})^2 K^{d-1}}{(K^2 + (n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2)^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{d} \frac{K^{d+1}}{(K^2 + (n + \frac{1}{2})^2 + \xi^2)^3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Calculando o somatório em I_1 , temos

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\mu^{3-d} 3\pi^{\frac{d}{2}-3} \beta^{3-d} K^{d-1}}{4 d \Gamma(\frac{d}{2}) (K^2 + \xi^2)^{5/2}} \left[((d-3)K^2 + d\xi^2) \tanh\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) + \pi \operatorname{sech}^2\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(2\pi K^2 (K^2 + \xi^2) \tanh\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) - \sqrt{K^2 + \xi^2} ((d-3)K^2 + d\xi^2) \right) \right]. \quad (5.38) \end{aligned}$$

Tomando o limite para $d \rightarrow 3$ e integrando em K , encontramos $I_1 = 1/2\pi^2$. Já para o somatório em I_2 ,

$$\begin{aligned}
S_2 = & \frac{\mu^{3-d}\pi^{\frac{d}{2}-3}\beta^{3-d}K^{d-1}}{16 d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)(K^2 + \xi^2)^{5/2}} \operatorname{sech}^3\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) \left\{ ((d-3)K^2 + d\xi^2) \sinh\left(3\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) - \right. \\
& - 4\pi\sqrt{K^2 + \xi^2} ((d-3)K^2 + d\xi^2) \cosh\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) + \left[(\xi^2(8\pi^2(2d+1)K^2 + d) + \right. \\
& \left. \left. + K^2(8\pi^2(d+1)K^2 + d-3) + 8\pi^2d\xi^4 \right) \sinh\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) \right\}. \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Vamos agora traçar o gráfico de (5.39), o qual deve ter o mesmo comportamento do gráfico da função $F(\xi)$. Para isso, vamos tomar o limite $d \rightarrow 3$ em (5.39), assim

$$\begin{aligned}
S_2 = & \frac{K^2 \operatorname{sech}^2\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right)}{12\pi^2(K^2 + \xi^2)^{5/2}} \left\{ \left(4\pi^2(K^2 + \xi^2)(4K^2 + 3\xi^2) + 3\xi^2 \cosh\left(2\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3\xi^2 \right) \tanh\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) - 6\pi\xi^2\sqrt{K^2 + \xi^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
I_2 = f(K, \xi) = & \int_0^\infty dK \frac{K^2 \operatorname{sech}^2\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right)}{12\pi^2(K^2 + \xi^2)^{5/2}} \left\{ \left(4\pi^2(K^2 + \xi^2)(4K^2 + 3\xi^2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3\xi^2 \cosh\left(2\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) + 3\xi^2 \right) \tanh\left(\pi\sqrt{K^2 + \xi^2}\right) - 6\pi\xi^2\sqrt{K^2 + \xi^2} \right\}.
\end{aligned}$$

O comportamento da função $f(K, \xi)$ pode ser visto no gráfico abaixo, note que este é equivalente ao da figura 5.1.

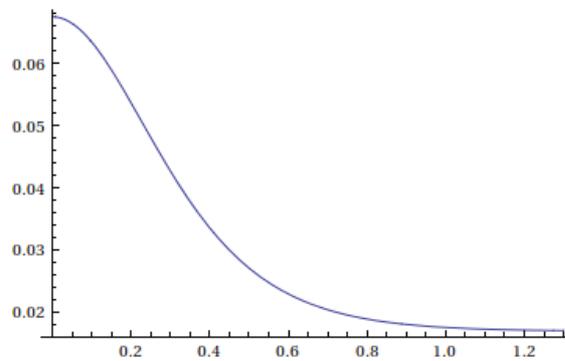


Figura 5.2: Comportamento da função $F(K, \xi)$.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Neste trabalho investigamos a indução radiativa de um termo de violação de simetria de Lorentz e CPT com uma estrutura tipo Chern-Simons $4D$ na eletrodinâmica quântica com massa e sem massa, nos contextos de temperatura zero e temperatura finita, utilizando a prescrição de 't Hooft-Veltman para as matrizes de Dirac. A indução do termo de Chern-Simons vem recebendo muita atenção ultimamente, pois modelos que tratam com violação de simetria de Lorentz e CPT são tratado com limite de baixas energias para uma teoria mais fundamental, como teoria de cordas. Para esta investigação usamos a EDQ do modelo padrão estendido, com ênfase nas correções radiativas que sugem devido ao acoplamento da corrente $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$, com um quadrivetor constante b_μ , que causa a violação de simetria de Lorentz e CPT.

Ao longo do trabalho foram discutidos vários temas importantes. No capítulo 2 tratamos da violação de simetria de Lorentz e CPT, onde apresentamos as transformações de Lorentz na presença de um campo de fundo. No capítulo 3 estudamos os aspectos gerais

do modelo padrão e do modelo padrão estendido, em seguida discutimos a EDQ estendida e apresentamos a lagrangiana deste modelo, onde comentamos brevemente sobre seus termos.

No capítulo 4 estudamos a indução do termo tipo Chern-Simons na EDQ com massa e sem massa, no contexto de temperatura zero. Para isto utilizamos a prescrição de 't Hooft-Veltman para as matrizes de Dirac. Na EDQ sem massa discutimos a questão da ambiguidade do coeficiente de Chern-Simons, onde apresentamos os resultados obtidos ao utilizar duas prescrições para o cálculo do traço das matrizes de Dirac. Vimos que ao utilizar a prescrição de 't Hooft Veltman o resultado obtido, $C = -\frac{1}{4\pi^2}$, ainda não havia sido observado na literatura para o caso não massivo. Além disso, este resultado mostrou-se diferente do encontrado ao utilizarmos o método usual para o cálculo das matrizes de Dirac, $C = \frac{1}{16\pi^2}$. Dessa forma concluímos que o coeficiente de Chern-Simons é de fato finito, no entanto também é indeterminado para o caso sem massa, assim como ocorre com o caso massivo.

Por fim, no capítulo 5, calculamos o termo de Chern-Simons à temperatura finita. Vimos que para o caso com massa temos apenas violação da simetria de reversão temporal. Em seguida analisamos o problema da não analiticidade, onde vimos que para o caso estudado não foi possível obter uma expressão válida para este problema, pois a equação obtida diverge no limite $l \rightarrow 0$. Isto deve-se principalmente ao fato da variável x estar acoplada a componente temporal do momento externo, p_0 . Para o caso sem massa constatamos que ocorre a restauração da simetria de inversão espacial, ao passo que a quebra da simetria de reversão temporal é mantida. Mostramos ainda que ao fazermos o somatório sobre a componente temporal do momento interno antes da integral nas suas componentes espaciais, a função obtida comporta-se exatamente como a função $F(\xi)$, visto que seus gráficos são equivalentes.

Temos como perspectiva realizar estes cálculos por meio de outras abordagens, a fim de encontrarmos um resultado satisfatório para esse problema da não analiticidade. Uma

possível forma de obtermos este resultado é calcular o somatório sobre a componente temporal do momento interno antes da integral das suas componentes espaciais, porém desta vez no contexto de parametrização de Feynman. Também estamos interessados em estudar a EDQ sem massa, no contexto dos semimetais de Weyl. Em especial, os resultados (4.56) e (5.26), os quais reproduzem exatamente o comportamento da condutividade desses sistemas de matéria condensada [42].

Referências Bibliográficas

- [1] V. A. Kostelecky, “The Status of CPT,” IUHET-397 [arXiv:hep-ph/9810365] (1998).
- [2] V. A. Kostelecky e S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” Phys. Rev. D 39, 683 (1989).
- [3] S. M. Carrol, G.B Field, R. Jackiw, “Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics,” Phys. Rev. D 41, 1231 (1990)
- [4] D. Colladay e V. A. Kostelecky, “CPT Violation and the Standard Model,” Phys. Rev. D 55, 6760 (1997).
- [5] D. Colladay e V. A. Kostelecky, “Lorentz-violating Extension of the Standard Model,” Phys. Rev. D 58, 116002 (1998).
- [6] G. t’Hooft and M. Veltman, “Regularization and Renormalization of Gauge Fields,” Nuc. Phys. B 44, pp. 189-213 (1972)
- [7] R. Jackiw, “When radiative corrections are finite but undetermined,” Int. J. Mod. Phys. B 14, 2011 (2000) [hep-th/9903044].
- [8] M. Perez-Victoria, “Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT violation in QED,” JHEP 0104, 032 (2001) [hep-th/0102021].

- [9] Y. Kao and M. Yang, “Radiatively induced Chern-Simons terms at finite temperature,” *Phys. Rev. D* **47**, 730 (1993) [DOI:10.1103/PhysRevD.47.730]
- [10] H. Belich; T. Costa-Soares; M. A. Santos; M. T. D. Santos, “Violação da Simetria de Lorentz,” *Rev. Bras. de Ens. de Fis.*, v. 29, n. 1, p. 57-64 (2007).
- [11] V. A. Kostelecky e R. Potting, “CPT and Strings,” *Nucl. Phys. B* 359, 545 (1991).
- [12] J. Schwinger, “The Theory of Quantized Fields I,” *Phys. Rev.* 82 (6). p. 914. (1951).
- [13] S. Weinberg, “The Quantum Theory Of Fields,vol. I,” *Illinois, USA: Cambridge Univ. Press, New York (1995)*.
- [14] W. Greenberg, “Why is CPT Fundamental,” *Found. of Phys.* 36, 1535 (2002).
- [15] C. Itzykson and J.B. Zuber, “Quantum Field Theory,” *New York, USA: Dover, New York, (2005)*.
- [16] O. Greenberg, “CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance,” *Phys. Rev. Lett.* 89, 231602 (2002).
- [17] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz Violation, and the Standard Model,” *Phys. Rev. D* 69, 105009 (2004).
- [18] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Testing noncommutative QED, constructing noncommutative MHD,” *Phys. Lett. B* **517**, 450 (2001) [hep-th/0106044].
- [19] FURTADO, J. Ação de Euler-Heisenberg no contexto de violação de simetria de Lorentz. 2013. 71 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Alagoas. 2013

- [20] J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, N. F. Svaiter, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED at finite temperature,” arXiv:hep-th/0012039
- [21] L. Cervi; L. Griguolo; D. Seminara, “The structure of radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED at finite temperature,” *Phys.Rev. D* 64, 105003 (2001).
- [22] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 3572 [hep-ph/9901358].
- [23] D. Colladay and P. McDonald, “Redefining spinors in Lorentz violating QED,” *J. Math. Phys.* 43, 3554 (2002) [hep-ph/0202066].
- [24] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons like term,” *Nucl. Phys. B* 607, 247 (2001) [hep-ph/0101087].
- [25] S. Coleman and S. L. Glashow, “High-energy tests of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. D* 59, 116008 (1999) [hep-ph/9812418].
- [26] R. Jackiw and V.A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* 82, 3572 (1999) [hep-ph/9901358].
- [27] M. Perez-Victoria, “Exact calculation of the radiatively-induced Lorentz and CPT violation in QED,” *Phys. Rev. Lett.* 83, 2518 (1999) [hep-th/9905061].
- [28] J. M. Chung and P. Oh, “Lorentz and PCT violating Chern-Simons term in the derivative expansion of QED,” *Phys. Rev. D* 60, 067702 (1999) [hep-th/9812132].
- [29] J. M. Chung, “Radiatively-induced Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in QED,” *Phys. Lett. B* 461, 138 (1999) [hep-th/9905095].
- [30] W. F. Chen, “Understanding radiatively induced Lorentz-CPT violation in differential regularization,” *Phys. Rev. D* 60, 085007 (1999) [hep-th/9903258].

- [31] J. M. Chung, “Radiatively-induced Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in QED,” *Phys. Lett. B* 461, 138 (1999) [hep-th/9905095].
- [32] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Causality and radiatively induced CPT violation,” *Phys. Lett. B* 513, 245 (2001) [hep-th/0105037].
- [33] G. Bonneau, “Regularization: Many recipes, but a unique principle: Ward identities and normalization conditions. The case of CPT violation in QED,” *Nucl. Phys. B* 593, 398 (2001) [hep-th/0008210].
- [34] [103] Yu. A. Sitenko, “One-loop effective action for the extended spinor electrodynamics with violation of Lorentz and CPT symmetry,” *Phys. Lett. B* 515, 414 (2001) [hep-th/0103215].
- [35] [104] M. Chaichian, W.F. Chen, and R. Gonzalez Felipe, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in Schwinger constant field approximation,” *Phys. Lett. B* 503, 215 (2001) [hep-th/0010129].
- [36] [105] J. M. Chung and B.K. Chung, “Induced Lorentz- and CPT-violating Chern-Simons term in QED: Fock-Schwinger proper time method,” *Phys. Rev. D* 63, 105015 (2001) [hep-th/0101097].
- [37] [106] A. A. Andrianov, P. Giacconi, and R. Soldati, “Lorentz and CPT violations from Chern-Simons modifications of QED,” *JHEP* 0202, 030 (2002) [hep-th/0110279].
- [38] D. Bazeia, T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, “Lorentz and CPT symmetries in commutative and noncommutative spacetime,” *J. Phys. A* 36, 4937 (2003) [hep-th/0303122].
- [39] Y. L. Ma and Y. L. Wu, “On the radiatively induced Lorentz and CPT violating Chern-Simons term,” hep-ph/0611199.

- [40] J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, N. F. Svaiter, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED at finite temperature,” arXiv:hep-th/0012039
- [41] J. Leite, T. Mariz, “Induced Lorentz-violating terms at finite temperature,” *Europhys.Lett.* 99, 21003 (2012).
- [42] P. Goswami, S.Tewari, “Axion field theory and anomalous non-dissipative transport properties of (3+1)-dimensional Weyl semi-metals and Lorentz violating spinor electrodynamics,” *Phys. Rev. B* 88, 245107 (2013).
- [43] A. G. Grushin, “Consequences of a condensed matter realization of Lorentz violating QED in Weyl semi-metals,” *Phys. Rev. D* 86, 045001 (2012).
- [44] J. F. Assunção and T. Mariz, “Radiatively induced CPT-odd Chern-Simons term in massless QED,” No prelo 2015
- [45] F. A. Brito, L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes, E. Passos and C. Wotzasek, *Phys. Rev. D* 78, 125023 (2008) [arXiv:0810.3180 [hep-th]].
- [46] D.A. Kirznits, “Weinberg model in the hot universe,” *JETP Lett.* 15, 529-531 (1972).
- [47] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* 9 (1974) 3357
- [48] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* 9 (1974) 3320.
- [49] Matsubara, T., *Prog. Theor. Phys.* 14, 351 (1955).
- [50] Schwinger, J., *J.Math. Physics* 2(1961) 407.
- [51] Aurenche, P and T. Becherrawy, *Nuc. Phys.* B379 (1993)259.
- [52] Bakshi, P.M and K.T. Mahanthappa, *J. Math. Phys.* 4 (1963)1.

-
- [53] Takahashi, Y and Umezawa, H, *Collective Phenomena* 2(1975)55.
- [54] Umezawa, H, H Matsumoto and M. Tachiki, “*Thermofield Dynamics and Condensed States*,” North-Holland (1982).
- [55] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “*An Introduction To Quantum Field Theory*,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [56] L. H. Ryder, “*Quantum Field Theory*,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p

Apêndice A

Álgebra das matrizes de Dirac

Neste apêndice apresentaremos algumas noções básicas acerca da álgebra das matrizes de Dirac. As matrizes de Dirac são definidas da seguinte forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula, $\mathbf{1}$ é a matriz identidade e σ_i são as matrizes de Pauli, definidas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

É fácil ver por [55] e [56] que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

e a partir desta relação extraímos que $(\gamma^0)^2 = 1$ e $(\gamma^i)^2 = -1$. Agora mostraremos algumas propriedades do traço envolvendo as matrizes de Dirac, que foram usadas em todo o desenvolvimento deste trabalho, tais como:

$$\begin{aligned}
tr[\not{a}\not{b}] &= tr[a_\mu\gamma^\mu b_\nu\gamma^\nu] \\
&= tr[a_\mu b_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu] \\
&= \frac{1}{2}tr[a_\mu b_\nu\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}] \\
&= a \cdot b tr\mathbf{1} = 4a \cdot b.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Definindo agora a matriz $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e munidos das seguintes propriedades $(\gamma^5)^2 = 1$ e $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, mostraremos que o traço de um número ímpar de matrizes de Dirac resulta em zero. Assim,

$$\begin{aligned}
tr[q_1q_2\cdots q_n] &= tr[q_1q_2\cdots q_n\gamma^5\gamma^5] \\
&= tr[\gamma^5q_1q_2\cdots q_n\gamma^5],
\end{aligned} \tag{A.5}$$

onde acima usamos a ciclicidade do traço. Agora, movemos o γ^5 a esquerda até que este encoste no γ^5 que encontra-se a direita, sabendo que a cada passagem por uma matriz γ^μ o traço muda de sinal, de modo que,

$$tr[q_1q_2\cdots q_n] = (-1)^n tr[q_1q_2\cdots q_n\gamma^5\gamma^5]. \tag{A.6}$$

Logo, vemos que se n for ímpar o traço será nulo, como queríamos demonstrar. Neste trabalho usaremos ostensivamente o fato de que

$$tr[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}] = 4(g^{\mu_3\mu_4}g^{\mu_1\mu_2} - g^{\mu_3\mu_1}g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_3\mu_2}g^{\mu_1\mu_4}) \tag{A.7}$$

e

$$\begin{aligned}
tr[\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\mu_5}\gamma^{\mu_6}] &= 4(g^{\mu_3\mu_5}g^{\mu_4\mu_1}g^{\mu_2\mu_6} - g^{\mu_3\mu_1}g^{\mu_5\mu_4}g^{\mu_2\mu_6} - g^{\mu_3\mu_4}g^{\mu_5\mu_1}g^{\mu_2\mu_6} + \\
&- g^{\mu_3\mu_5}g^{\mu_4\mu_6}g^{\mu_1\mu_2} - g^{\mu_3\mu_5}g^{\mu_4\mu_2}g^{\mu_1\mu_6} + g^{\mu_3\mu_6}g^{\mu_5\mu_4}g^{\mu_1\mu_2} + \\
&+ g^{\mu_3\mu_4}g^{\mu_5\mu_6}g^{\mu_1\mu_2} + g^{\mu_3\mu_2}g^{\mu_5\mu_4}g^{\mu_1\mu_6} + g^{\mu_3\mu_4}g^{\mu_5\mu_2}g^{\mu_1\mu_6} + \\
&- g^{\mu_3\mu_6}g^{\mu_5\mu_2}g^{\mu_4\mu_1} + g^{\mu_3\mu_2}g^{\mu_5\mu_6}g^{\mu_4\mu_1} + g^{\mu_3\mu_6}g^{\mu_5\mu_1}g^{\mu_4\mu_2} + \\
&- g^{\mu_3\mu_1}g^{\mu_5\mu_6}g^{\mu_4\mu_2} - g^{\mu_3\mu_2}g^{\mu_5\mu_1}g^{\mu_4\mu_6} + g^{\mu_3\mu_1}g^{\mu_5\mu_2}g^{\mu_4\mu_6}) \quad (A.8)
\end{aligned}$$

Apêndice B

Integração em D dimensões

Trabalhando em um espaço de Minkowski em D dimensões, sendo uma tipo-tempo e $(D - 1)$ tipo-espaço, nós buscamos a solução para integrais do tipo

$$I_D(q) = \int \frac{d^D p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} \quad (\text{B.1})$$

onde $p = (p_0, \mathbf{r})$. Introduzindo então coordenadas polares em D dimensões temos que $p = (p_0, r, \phi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-3})$, e então

$$\begin{aligned} d^D p &= dp_0 r^{D-2} dr d\phi \text{sen} \theta_1 d\theta_1 \text{sen}^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \text{sen}^{D-3} \theta_{D-3} d\theta_{D-3} \\ &= dp_0 r^{D-2} dr d\phi \prod_{k=1}^{D-3} \text{sen}^k \theta_k d\theta_k. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Obviamente, $p_0 \in [-\infty, \infty]$, $r \in [0, \infty]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ e $\theta_i \in [0, \pi]$. Então,

$$I_D(q) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} r^{D-2} dr \int_0^\pi \frac{\prod_{k=1}^{D-3} \text{sen}^k \theta_k d\theta_k}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{B.3})$$

Agora usando o seguinte fato:

$$\int_0^{\pi/2} (\text{sen}\theta)^{2n-1} (\text{cos}\theta)^{2m-1} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \quad (\text{B.4})$$

pondo $m = 1/2$

$$\int_0^{\pi} (\text{sen}\theta)^k d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \quad (\text{B.5})$$

portanto B.3 fica reescrita como

$$I_D(q) = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} \frac{r^{D-2} dr}{(p_0^2 - r^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{B.6})$$

Esta integral é invariante de Lorentz, então a calcularemos em um cenário onde $q_\mu = (\mu, 0)$, de modo que, $p_0'^2 - q^2 = p_0^2 + 2\mu p_0$. Assim temos:

$$I_D(q) = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0' \int_0^{\infty} \frac{r^{D-2} dr}{[p_0'^2 - r^2 - (q^2 + m^2)]^\alpha}. \quad (\text{B.7})$$

A função beta de Euler é definida como

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^{\infty} dt t^{2x-1} (1+t^2)^{-x-y}, \quad (\text{B.8})$$

que é válida se as partes reais de x e y forem positivas. Então se pormos

$$x = \frac{1+\beta}{2}, \quad y = \alpha - \frac{1+\beta}{2}, \quad t = \frac{s}{M} \quad (\text{B.9})$$

com $\beta = D - 2$, $M^2 = -p_0'^2 + q^2 + m^2$, B.7 ficará,

$$I_D(q) = (-1)^{2\alpha+(D-1)/2} \pi^{(D-1)/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0'}{[p_0'^2 - (q^2 + m^2)]^{\alpha-(D-1)/2}}, \quad (\text{B.10})$$

e a integração remanescente é solucionada fazendo uso da função beta de Euler acima definida em B.8, e finalmente obtemos a solução para $I_D(q)$

$$I_D(q) = (-1)^\alpha i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha - D/2}}. \quad (\text{B.11})$$

Uma generalização por diferenciação direta sobre q^μ em ambos os lados da equação pode ser facilmente obtida, e portanto poremos apenas os demais resultados das integrais que utilizamos ao longo deste trabalho.

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha - D/2} \quad (\text{B.12})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^{\alpha-1}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha - D/2 - 1} \quad (\text{B.13})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^{\alpha-1}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha - D/2 - 1} \quad (\text{B.14})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^4}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D(D+2)}{4} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha - D/2 - 2} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\mu p^\nu p^\lambda p^\rho}{(p^2 - m^2)^\alpha} &= \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha - D/2 - 2} \times \\ &\times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Parametrização de Feynman

Frequentemente usamos representações paramétricas de elementos do integrando de uma integral de Feynman, particularmente de propagadores. As representações desse tipo mais conhecidas se devem a Schwinger e a Feynman, e são de grande utilidade no cálculo de regularização dimensional dos diagramas de Feynman.

Em alguns casos é necessário reescrever o denominador de uma fração de modo que a integração seja possível, para tal, suporemos um caso geral simples e óbvio para começar.

Considere

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \int_A^B dz \frac{1}{z^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2}. \quad (\text{C.1})$$

Um generalização direta por diferenciação nos mostra que

$$\frac{1}{A^a B^b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dx \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{[Ax + B(1-x)]^{a+b}}. \quad (\text{C.2})$$

Analogamente, no entanto mais geral, com mais termos no denominador, temos

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1-x_1+\cdots+x_n)}{(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)^n}, \quad (\text{C.3})$$

que pode ser facilmente provada por indução. Diferenciando ambos os lados a_i vezes com relação a A_i nós encontramos

$$\frac{1}{A_1^{a_1} \cdots A_n^{a_n}} = \frac{\Gamma(a_1 + \cdots + a_n)}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_n)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1 - x_1 + \cdots + x_n) x_1^{a_1-1} \cdot x_n^{a_n-1}}{(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)^{a_1 + \cdots + a_n}}, \quad (\text{C.4})$$

que pode ser escrito mais convenientemente como

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^{a_1} \cdots A_n^{a_n}} &= \frac{\Gamma(a_1 + \cdots + a_n)}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_n)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \times \\ &\times \frac{x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})^{a_n-1}}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + (1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})]^{a_1 + \cdots + a_n}} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$