

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATERIAIS

CAMILA DE SOUSA VIEIRA

HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA E ELÁSTICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS
COM INTERFASES

MACEIÓ

2018

CAMILA DE SOUSA VIEIRA

**HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA E ELÁSTICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS
COM INTERFASES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Materiais da Universidade Federal de Alagoas como
requisito para obtenção do título de Doutor em
Materiais

Área de concentração: Materiais

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti
Marques

MACEIÓ

2018

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

V658h Vieira, Camila de Sousa.
Homogeneização térmica e elástica de compósitos periódicos com interfases /
Camila de Sousa Vieira. – 2018.
158 f. : il.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques
Tese (doutorado em Materiais) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de
Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Materiais, Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 139-149.
Apêndices: f. 150-158.

1. Compósitos periódicos – Interfase. 2. Propriedades termoelásticas efetivas.
3. Condutividade térmica efetiva. 4. Teoria de volumes finitos tridimensional.
I. Título.

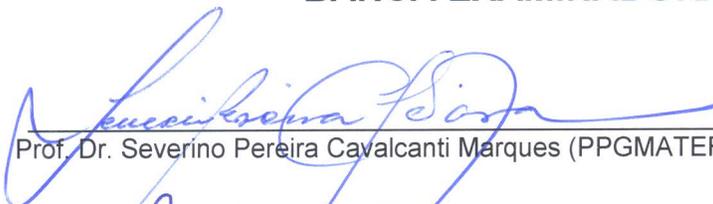
CDU: 624.016

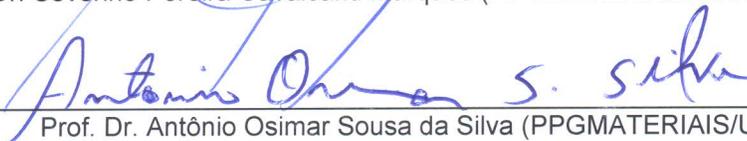
Camila de Sousa Vieira

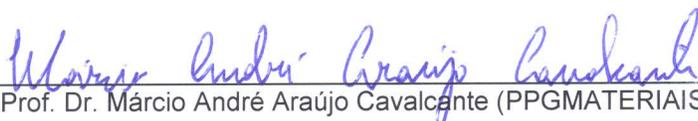
**Homogeneização térmica e elástica de compósitos periódicos
com interfaces**

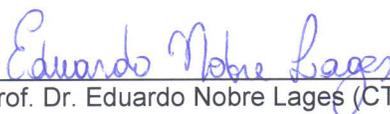
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Materiais da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 30 de Novembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques (PPGMATERIAIS/UFAL – Orientador)


Prof. Dr. Antônio Osimar Sousa da Silva (PPGMATERIAIS/UFAL)


Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante (PPGMATERIAIS/UFAL)


Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages (CTEC/UFAL)


Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros (UFMG)


Prof. Dr. José Julio de Cerqueira Pituba (UFG)



Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Severino Marques pelos ensinamentos transmitidos, assim como por sua paciência e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho.

A David Amorim, que passou de namorado a marido durante a realização deste trabalho, por seu apoio incondicional que tornou mais fácil a jornada. Obrigada por nunca deixar de me incentivar e acreditar no meu potencial.

Ao professor e amigo Romildo Escarpini Filho por toda ajuda prestada e aos professores Eduardo Nobre e Márcio Cavalcante pelas sugestões dadas.

Aos meus pais, Ana e Cícero, e aos meus irmãos, Danillo e Mirelly, que sempre torceram por mim.

Aos meus amigos Edilton Nunes, Cristiane Mainente e Gustavo Parussolo que, apesar da distância, se fazem presentes todos os dias. Obrigada por nossas conversas diárias sobre Stephen King, livros, séries, política, gatos e tudo mais. *Longos dias e belas noites, Pistoleiros!*

Aos amigos Ludmilson e Roberta pela acolhida na nova cidade.

À CAPES e à FAPEAL pelo apoio financeiro durante parte do doutorado.

Uma espada tiniu ao ser sacada.

— Faça o que quiser; vou impedi-lo, se conseguir.

— Impedir-me? Tu és tolo. Nenhum homem mortal pode me impedir!

— Mas não sou um homem mortal! Você está olhando para uma mulher. Sou Éowyn, filha de Éomund.

O Retorno do Rei - A Batalha nos Campos de Pelennor

J. R. R. Tolkien

RESUMO

No presente trabalho são apresentadas extensões tridimensionais da formulação paramétrica da Teoria de Volumes Finitos (TVF) para homogeneização térmica e termoelástica de materiais compósitos multifásicos com microestrutura periódica de arquitetura generalizada. As formulações micromecânicas propostas e implementadas visam, primordialmente, a avaliação da condutividade térmica, das propriedades elásticas e dos coeficientes de dilatação térmica efetivos dos citados materiais periódicos heterogêneos. Para verificar e validar as formulações, variados casos de compósitos reforçados por fibras longas, fibras curtas e partículas cúbicas são analisados e discutidos. Em particular, o trabalho enfatiza a presença de interfaces localizadas entre a matriz e as inclusões, uma vez que as mesmas, comprovadamente, podem exercer uma grande influência sobre o comportamento macroscópico dos compósitos reais. As análises incluem investigações a respeito das influências que diversos fatores exercem sobre a condutividade térmica e as propriedades termoelásticas dos materiais compósitos. Como fatores considerados, podem ser citados: a fração volumétrica de inclusões, razão de aspecto de fibras, tamanho de inclusões, propriedades físicas e espessura das interfaces. Os resultados dessas avaliações são comparados com outros obtidos por formulações analíticas baseadas em séries de Fourier, modelos de homogeneização que utilizam o Método dos Elementos Finitos e, quando disponíveis, ensaios experimentais. Essas comparações de resultados demonstram um bom desempenho das formulações desenvolvidas e reforçam a conclusão, já enaltecida em trabalhos anteriores, de que a Teoria de Volumes Finitos, em sua versão paramétrica, se apresenta como uma excelente ferramenta numérica para a descrição do comportamento de materiais heterogêneos e como uma simples e versátil alternativa ao tradicional Método dos Elementos Finitos. Vale também destacar que as análises aqui efetuadas para os diferentes casos de compósitos contribuem para um melhor conhecimento das relações entre os seus comportamentos macroscópicos e suas correspondentes características microestruturais.

Palavras-Chave: Compósitos periódicos; Interface; Condutividade térmica efetiva; Propriedades termoelásticas efetivas; Teoria de volumes finitos tridimensional.

ABSTRACT

This work presents three-dimensional expansions of the parametric Finite Volume Theory (FVT) for thermal and thermoelastic homogenization of multiphase composites with periodic microstructure of generalized architecture. The proposed and implemented micromechanical formulations look for, especially, the evaluation of thermal conductivity, elastic properties and thermal expansion coefficients of the mentioned periodic heterogeneous materials. To verify and validate the formulations, some cases involving composites reinforced by long fibers, short fibers and cubic particles are analyzed and discussed. In particular, the work emphasizes the presence of interphases located between the matrix and inclusions, because such interphases can strongly influence the macroscopic behavior of actual composites. The analyses involve investigations with respect to the influences of several factors on the thermal conductive and thermoelastic properties of composite materials. Among these factors, it can be cited: volume fraction of inclusions, fiber aspect ratio, inclusion size, physical properties and thickness of the interphases. The results of these evaluations are compared with others obtained by analytical formulations based on Fourier series, homogenization models that utilize Finite Element Method and, when available, experimental tests. These comparisons demonstrate a good performance of the developed formulations and strengthen the conclusion that, as already established in previous works, the Parametric Finite Volume Theory consists in an excellent numerical tool for the description of the behavior of heterogeneous materials, as well as, is a simple and versatile alternative to the traditional Finite Element Method. Also, it is worthwhile mentioning that the results of the analyses of the different cases of composites, here carried out, contribute to a best understanding about the relations between the macroscopic behaviors and the corresponding microstructural characteristics.

Keywords: Periodic composites; Interphase; Effective thermal conductivity; Effective thermoelastic properties; Three-dimensional finite volume theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Exemplos de materiais compósitos com (a) partículas distribuídas randomicamente; (b) fibras curtas com orientação aleatória; (c) fibras contínuas periódicas unidirecionais; (d) fibras curtas alinhadas distribuídas periodicamente; (e) tecido formado por fibras contínuas com distribuição periódica.	21
Figura 1.2 - Interfase e interfaces em compósito.....	22
Figura 2.1 - (a) Microestrutura estatisticamente homogênea caracterizada por um EVR e (b) microestrutura periódica caracterizada por uma CUR.	30
Figura 2.2 - Célula unitária de repetição de compósito reforçado por fibra curta.....	31
Figura 2.3 - Célula unitária de repetição de compósito reforçado por partícula cúbica.....	31
Figura 2.4 - Mapeamento do cubo de referência para o subvolume hexaédrico da microestrutura real.....	32
Figura 2.5 - Elemento de Volume Representativo e Célula Unitária de Repetição.	43
Figura 2.6 - Mapeamento do quadrado de referência para o subvolume quadrilateral da microestrutura real.....	44
Figura 2.7 - Dimensões da célula unitária de repetição.....	47
Figura 2.8 - (a) Célula unitária real e (b) célula unitária homogênea.....	49
Figura 2.9 - Substituição da interfase por uma interface imperfeita.	54
Figura 3.1 - Condutividade térmica efetiva para fração volumétrica de fibras igual a 10%. ...	58
Figura 3.2 - Condutividade térmica efetiva para fração volumétrica de fibras igual a 60%. ...	58
Figura 3.3 - (a) Seção transversal no plano y_1 - y_3 da malha de elementos finitos tetraédricos e (b) Malha bidimensional de subvolumes quadrilaterais.....	60
Figura 3.4 – Distância nas direções longitudinal dl e transversal dt entre as fibras de células unitárias vizinhas.	62
Figura 3.5 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função da fração volumétrica de fibras.	63
Figura 3.6 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função da fração volumétrica de fibras.	64
Figura 3.7 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função da fração volumétrica de fibras.	65
Figura 3.8 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função da fração volumétrica de fibras.	66
Figura 3.9 - Condutividade térmica efetiva em função do grau de anisotropia da fibra.	67

Figura 3.10 - Caso a: fibra sem interfase nas faces planas.	67
Figura 3.11 - Caso b: fibra totalmente revestida por interfase.	68
Figura 3.12 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função da condutividade da interfase.	69
Figura 3.13 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função da condutividade da interfase.	70
Figura 3.14 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal para os casos (a) e (b) de revestimento em função da razão de aspecto da fibra.	71
Figura 3.15 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal para os casos (a) e (b) de revestimento em função da razão de aspecto da fibra.	72
Figura 3.16 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função do raio da fibra.	73
Figura 3.17 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função do raio da fibra.	74
Figura 3.18 - Condutividade térmica efetiva de compósito reforçado com partículas cúbicas sem a presença de interfase em função da fração volumétrica.	75
Figura 3.19 - Condutividade térmica efetiva do compósito com inclusões cúbicas em função da condutividade da interfase.	76
Figura 3.20 - Condutividade térmica efetiva em função das dimensões da partícula.	77
Figura 3.21 - Condutividade térmica efetiva para diferentes k_f/k_m	78
Figura 3.22 - Célula unitária de repetição de um compósito de três fases discretizada em subvolumes quadrilaterais.	79
Figura 3.23 - Condutividade térmica efetiva de compósitos com interfase de baixa condutividade.	80
Figura 3.24 - Condutividade térmica efetiva de compósitos com interfase de alta condutividade.	81
Figura 3.25 - Influência do raio da fibra na condutividade térmica efetiva.	82
Figura 3.26 - Influência do raio da fibra com diferentes interfases.	83
Figura 3.27 - Influência do raio da fibra na condutividade térmica efetiva.	84
Figura 3.28 - Verificação da hipótese de interfase fina.	85
Figura 3.29 - Verificação da condição de descontinuidade de temperatura.	86
Figura 3.30 - Condutividade térmica efetiva x espessura da interfase.	87
Figura 3.31 - Compósito reforçado por fibra de carbono.	88
Figura 3.32 - Compósito reforçado por fibra de vidro.	89

Figura 3.33 - Feixe de fibras de abaca.....	90
Figura 3.34 - Seção transversal de feixe de fibras de (a) abaca e (b) bambu.	91
Figura 3.35 - Obtenção do modelo de três fases: (a) seção transversal do compósito (b) representação da distribuição periódica de feixes de fibra (c) CUR (d) modelo equivalente da CUR.....	91
Figura 3.36 - Modelo de duas fases.....	92
Figura 3.37 - Fibras de abaca.....	93
Figura 3.38 - Fibras de bambu.....	94
Figura 4.1 - Elemento de Volume Representativo submetido a uma condição de contorno homogênea.....	95
Figura 4.2 - (a) Célula unitária de repetição da microestrutura real (b) Célula unitária de repetição homogênea.	107
Figura 4.3 - Interfase substituída por uma interface.....	109
Figura 5.1 - Célula unitária de repetição.	112
Figura 5.2 - Módulo de elasticidade efetivo na direção transversal à fibra em função da fração volumétrica.....	113
Figura 5.3 - Módulo de elasticidade transversal efetivo em função da fração volumétrica de fibras.....	114
Figura 5.4 - Coeficiente de dilatação térmica efetiva na direção longitudinal em função da fração volumétrica de fibras.....	115
Figura 5.5 - Coeficiente de dilatação térmica efetiva na direção transversal em função da fração volumétrica de fibras.....	115
Figura 5.6 - Módulo de elasticidade efetivo em função da fração volumétrica fibras.....	116
Figura 5.7 - Módulo de elasticidade transversal efetivo em função da fração volumétrica de fibras.....	117
Figura 5.8 - Coeficiente de Poisson efetivo em função da fração volumétrica de fibras.....	117
Figura 5.9 - Coeficiente de dilatação térmica efetiva em função da fração volumétrica de fibras.....	118
Figura 5.10 - Módulo de elasticidade longitudinal efetivo em função da razão de aspecto da fibra.....	119
Figura 5.11 - Módulo de elasticidade transversal efetivo em função da razão de aspecto da fibra.....	120
Figura 5.12 - Coeficiente de Poisson efetivo em função da razão de aspecto da fibra.....	120

Figura 5.13 - Coeficientes de dilatação térmica efetivos em função da razão de aspecto da fibra.....	121
Figura 5.14 - Módulo de elasticidade longitudinal efetivo na direção 1 em função do raio da fibra.....	122
Figura 5.15 - Módulo de elasticidade longitudinal efetivo na direção 2 em função do raio da fibra.....	123
Figura 5.16 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 2-3 em função do raio da fibra.....	123
Figura 5.17 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 1-2 em função do raio da fibra.....	124
Figura 5.18 - Coeficiente de Poisson efetivo no plano 2-3 em função do raio da fibra.	124
Figura 5.19 - Coeficiente de Poisson efetivo no plano 1-2 em função do raio da fibra.	125
Figura 5.20 - Coeficiente de dilatação térmica efetivo na direção longitudinal em função do raio da fibra.....	125
Figura 5.21 - Coeficiente de dilatação térmica efetivo na direção transversal em função do raio da fibra.....	126
Figura 5.22 - Módulo de elasticidade efetivo na direção 1 em função da fração volumétrica.	127
Figura 5.23 - Módulo de elasticidade efetivo na direção 2 em função da fração volumétrica.	127
Figura 5.24 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 1-2 em função da fração volumétrica de fibras.	128
Figura 5.25 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 2-3 em função da fração volumétrica de fibras.	128
Figura 5.26 - Coeficiente de Poisson efetivo.....	129
Figura 5.27 - Coeficiente de Poisson efetivo.....	129
Figura 5.28 - Módulo de elasticidade efetivo.....	131
Figura 5.29 - Coeficiente de Poisson efetivo.....	132
Figura 5.30 - Módulo de elasticidade efetivo.....	133
Figura 5.31 - Coeficiente de Poisson efetivo.....	133
Figura 5.32 - Coeficiente de dilatação térmica longitudinal efetivo.	135
Figura 5.33 - Coeficiente de dilatação térmica transversal efetivo.	136

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal.....	60
Tabela 3.2 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal.....	60
Tabela 3.3 - Dimensões da CUR e da fibra (μm).	70
Tabela 3.4 - Condutividade térmica das fases.	73
Tabela 3.5 - Propriedades térmicas das fibras e da interfase.....	86
Tabela 3.6 - Condutividade térmica dos materiais para o modelo trifásico.	90
Tabela 3.7 - Condutividade térmica dos materiais para o modelo bifásico.....	92
Tabela 5.1 - Propriedades elásticas dos materiais.	113
Tabela 5.2 - Propriedades dos materiais.....	114
Tabela 5.3 - Propriedades dos materiais.....	116
Tabela 5.4 - Propriedades termomecânicas das fases.....	121
Tabela 5.5 - Propriedades mecânicas dos constituintes.....	126
Tabela 5.6 - Propriedades mecânicas dos constituintes.....	130
Tabela 5.7 - Propriedades mecânicas efetivas do compósito.	130
Tabela 5.8 - Propriedades dos materiais.....	135

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CUR	Célula Unitária de Repetição
EVR	Elemento de Volume Representativo
FVDAM	<i>Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics Theory</i>
HFGMC	<i>High-Fidelity Generalized Method of Cells</i>
HFS-FEM	<i>Hybrid Fundamental Solution Based Finite Element Method</i>
HOTFGM	<i>High-Order Theory for Functionally Graded Materials</i>
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
TVF	Teoria de Volumes Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

V	Volume do EVR
S	Superfície do EVR
T^0	Temperatura macroscópica
\mathbf{x}	Coordenadas de um ponto sobre a superfície do EVR
\mathbf{G}^0	Gradiente de temperatura macroscópico
\mathbf{y}	Coordenadas utilizadas na escala da CUR
\tilde{T}	Temperatura flutuante
$\zeta - \eta - \xi$	Coordenadas paramétricas do subvolume hexaédrico
$y_1 - y_2 - y_3$	Coordenadas dos eixos cartesianos do domínio real
N_j	Funções de formas para a parametrização do subvolume
q_i	Fluxo de calor na direção i
k_{ij}	Condutividades térmicas do material
G_j^0	Componentes do gradiente de temperatura macroscópico
\tilde{T}_{mnp}	Coefficientes do polinômio que define o campo de temperatura no subvolume hexaédrico
$\langle \tilde{T} \rangle^{(p)}$	Temperatura flutuante média na face p de um subvolume
$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta}, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta}, \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi}$	Gradientes de temperatura flutuante no sistema de coordenadas de referência
$\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \rangle^{(p)}, \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \rangle^{(p)}, \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \rangle^{(p)}$	Gradientes médios de temperatura flutuante na face p no sistema de coordenadas de referência
$\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} \rangle^{(p)}$	Gradientes médios de temperatura flutuante na face p do subvolume no sistema de coordenadas da microestrutura real
$\langle \mathbf{J} \rangle$	Média volumétrica da inversa da matriz Jacobiana
$\langle q_i \rangle$	Componente do fluxo de calor médio
$\bar{\mathbf{k}}$	Matriz das condutividades térmicas do subvolume
$\langle q_n \rangle^{(p)}$	Fluxo de calor médio na direção normal à face p

$\mathbf{n}^{(p)}$	Vetor das componentes do vetor normal unitário que aponta para fora da face p do subvolume
n_i	Componentes do vetor normal unitário que aponta para fora da face p do subvolume
k_T	Condutividade térmica do material do subvolume na direção transversal
k_L	Condutividade térmica do material do subvolume na direção longitudinal
\mathbf{B}	Matriz com propriedades geométricas do subvolume
\mathbf{K}_L	Matriz de condutividade térmica do subvolume
\mathbf{K}_G	Matriz de condutividade térmica da célula unitária de repetição
$\tilde{\mathbf{T}}_G$	Vetor das temperaturas flutuantes médias desconhecidas nas faces dos subvolumes
\mathbf{Q}_G^0	Vetor dos fluxos normais médios macroscópicos nas interfaces dos subvolumes adjacentes
\mathbf{Q}^*	Fluxo de calor efetivo
\mathbf{K}^*	Matriz de condutividade térmica efetiva
Ω	Volume da célula unitária de repetição
Ω_α	Volume da fase α
$\bar{v}_\alpha^{(r)}$	Fração volumétrica do r -ésimo subvolume com relação ao volume total da célula unitária
$\langle \mathbf{G}_\alpha \rangle^{(r)}$	Gradiente médio de temperatura do r -ésimo subvolume
$\mathbf{H}_\alpha^{(r)}$	Matriz de concentração de gradiente de temperatura para o r -ésimo subvolume
$\eta - \xi$	Coordenadas paramétricas do subvolume quadrilateral
$y_2 - y_3$	Coordenadas dos eixos cartesianos do domínio real
\tilde{T}_{mn}	Coefficientes do polinômio que define o campo de temperatura no subvolume quadrilateral
$\bar{\tilde{T}}(\xi)$	Coefficientes da série de Fourier que representa o campo de temperatura flutuante
$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y})$	Gradiente de temperatura flutuante

$\overline{\mathbf{G}}(\xi)$	Coeficientes da série de Fourier que representa o gradiente de temperatura flutuante
$\mathbf{G}^*(\mathbf{y})$	Função gradiente de transformação
$\overline{\mathbf{G}^*}(\xi)$	Coeficientes da série de Fourier que representa a função gradiente de transformação
\mathbf{K}_f	Matriz de condutividade da inclusão
\mathbf{K}_m	Matriz de condutividade da matriz
$\langle \mathbf{G}^* \rangle$	Média da função gradiente de transformação
$\langle \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \rangle$	Média do gradiente de temperatura flutuante
$g_0(\xi)$	Fator geométrico da inclusão
f_v	Fração volumétrica de fibras
J_1	Função de Bessel de primeira espécie
L_f	Comprimento da fibra
L	Comprimento da célula unitária de repetição
d	Comprimento do lado da inclusão cúbica
T_+	Temperatura na interface no lado da matriz
T_-	Temperatura na interface no lado da fibra
h	Espessura da interfase
k_m	Condutividade térmica da matriz
k_f	Condutividade térmica da fibra
k_i	Condutividade térmica da interfase
q_n	Fluxo de calor normal à interface
\tilde{T}_+	Temperatura flutuante na interface no lado da matriz
\tilde{T}_-	Temperatura flutuante na interface no lado da fibra
$\langle \tilde{T}_2 \rangle, \langle \tilde{T}_1 \rangle$	Temperaturas flutuantes médias nas faces adjacentes à interface
$\langle q_n \rangle$	Fluxo de calor normal médio através da interface
$\langle q_n \rangle^{(1)}, \langle q_n \rangle^{(2)}$	Fluxo de calor médio nas faces adjacentes à interface
\mathbf{K}_i	Matriz de condutividade térmica da interface

$v_i^{(k)}$	Fração volumétrica do subvolume k da interfase
$u_i^{(k)}$	Campo de deslocamento global dentro do subvolume k para a direção i
$\bar{\varepsilon}_{ij}$	Deformações macroscópicas
$\tilde{u}_i^{(k)}$	Campos flutuantes de deslocamentos locais no interior do subvolume k para a direção i
$W_{i(mn)}^{(k)}$	Coefficientes a determinar na direção i para o subvolume k
$t_i^{(k)}$	Tensão na direção i do subvolume k
ΔT	Variação de temperatura
$C_{ijkl}^{(k)}$	Componente da matriz constitutiva do subvolume k
$\sigma_{ij}^{\text{th}(k)}$	Componentes de tensões associadas à variação de temperatura
$\alpha_{kl}^{(k)}$	Coefficientes de dilatação térmica do subvolume k
$\langle \tilde{u}_i \rangle^{(p)}$	Deslocamentos flutuantes médios na face p na direção i
C_{ij}	Componentes da matriz de rigidez elástica do material relacionadas com as tensões normais
G_{ij}	Componentes da matriz de rigidez elástica do material relacionadas com as tensões de cisalhamento
$\langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(p)}$	Deformações médias na face p do subvolume
N	Matriz dos vetores normais às faces do subvolume
C	Matriz de rigidez elástica do material
K	Matriz de rigidez do subvolume
K^G	Matriz de rigidez da célula unitária
ΔC	Matriz constituída pelas diferenças entre as matrizes de rigidez local de subvolumes adjacentes
$\Delta \Gamma$	Vetor associado às tensões térmicas
$A^{(k)}$	Matriz de concentração de deformação de Hill do subvolume k
C^*	Matriz de rigidez homogeneizada
α^*	Vetor dos coeficientes de condutividade térmica efetivos

Γ^*	Tensor efetivo térmico
$\bar{\varepsilon}(\xi)$	Coefficientes da série de Fourier que representa as deformações do EVR
$\varepsilon^*(x)$	<i>Eigenstrain</i>
$\bar{\varepsilon}^*(\xi)$	Coefficientes da série de Fourier que representa a <i>eigenstrain</i>
C_f, C_m	Matrizes constitutivas da inclusão e da matriz
$\langle \varepsilon^* \rangle$	Médio volumétrica da <i>eigenstrain</i>
$I^{(n)}$	Matriz identidade de ordem n
λ, μ	Constantes de Lamé
$[T]$	Matriz de transformação de coordenadas
$[K_e]$	Matriz de rigidez do elemento de interface imperfeita

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Revisão bibliográfica	23
1.2	Objetivos	28
2	HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS.....	30
2.1	Formulação paramétrica tridimensional da Teoria de Volumes Finitos	31
2.1.1	Matriz de condutividade térmica efetiva de um subvolume	33
2.1.2	Matriz de condutividade térmica global	41
2.1.3	Matriz de condutividade térmica homogeneizada	41
2.2	Caso particular da homogeneização térmica de compósitos periódicos com fibras longas unidirecionais	43
2.3	Formulação analítica para a determinação da condutividade térmica efetiva	46
2.4	Elemento de interface imperfeita	54
3	EXEMPLOS DE HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS	
	57	
3.1	Teste de convergência da formulação em séries de Fourier	57
3.2	Exemplos de compósitos com fibras curtas alinhadas	59
3.3	Exemplos de compósitos com partículas cúbicas	74
3.4	Exemplos de compósitos com fibras longas unidirecionais	77
4	HOMOGENEIZAÇÃO TERMOELÁSTICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS	
	REFORÇADOS POR FIBRAS	95
4.1	Formulação Paramétrica Tridimensional da Teoria de Volumes Finitos	95
4.1.1	Matriz de rigidez do subvolume	97
4.1.2	Matriz de rigidez global.....	101
4.1.3	Matrizes homogeneizadas.....	101
4.2	Caso particular da homogeneização termoelástica de compósitos periódicos com fibras longas unidirecionais	102
4.2.1	Matriz de rigidez de um subvolume	103
4.2.2	Matriz de rigidez global.....	105
4.2.3	Matrizes homogeneizadas.....	105
4.3	Formulação analítica para cálculo de propriedades elásticas efetivas	106
4.4	Elemento de interface imperfeita	109

5	EXEMPLOS DE HOMOGENEIZAÇÃO TERMOELÁSTICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS REFORÇADOS POR FIBRAS	112
5.1	Propriedades termoelásticas de compósitos com fibras curtas	112
5.2	Propriedades termoelásticas de compósitos com fibras longas	126
6	CONCLUSÕES.....	137
	REFERÊNCIAS	139
	APÊNDICES	150

1 INTRODUÇÃO

As atuais demandas do setor de materiais exigem que os mesmos possuam características e desempenho cada vez mais avançados e, neste contexto, os compósitos têm encontrado um reconhecido lugar de destaque. Aplicações desses materiais incluem a indústria aeronáutica, aeroespacial e automobilística, a área militar, a construção civil e estruturas *offshore* destinadas à exploração de petróleo e gás.

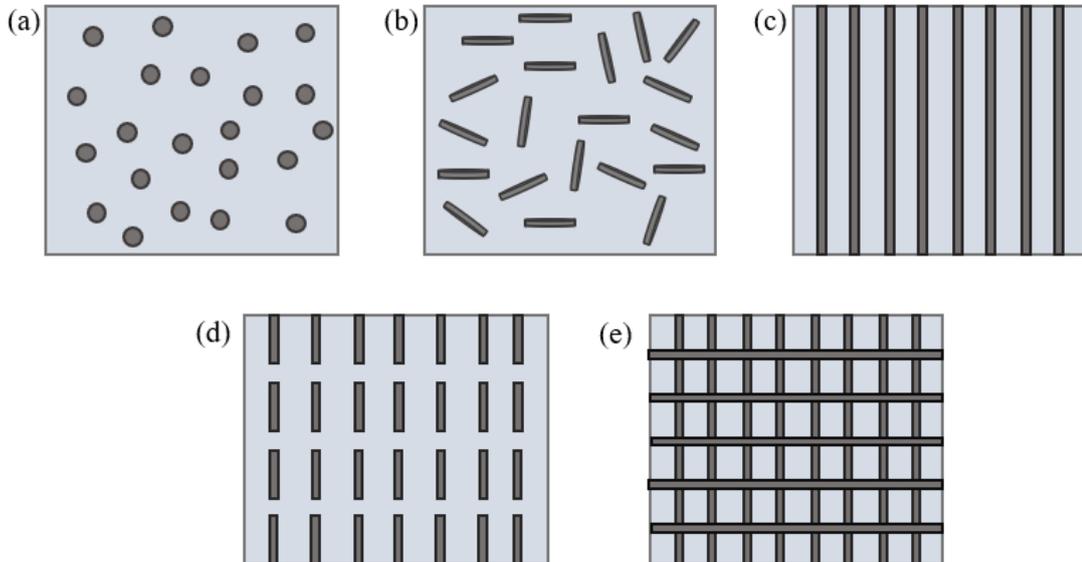
No setor da construção civil os compósitos têm sido utilizados como reforço estrutural, onde se destaca o uso de Matriz Cimentícia Reforçada com Tecido ou *Fabric-Reinforced Cementitious Matrix* (FRCM). Esses compósitos são formados por malhas de fibras e um agente cimentício que serve como matriz e ligante (AWANI; EL-MAADDAWY; ISMAIL, 2017). A utilização de compósitos FRCM como reforço é uma técnica viável para regiões com risco de deterioração severa das estruturas de concreto, tais como locais com alto risco de incêndio e zonas costeiras (EBEAD et al., 2017).

Compósitos de matriz polimérica e fibras de carbono, amplamente utilizados na indústria aeroespacial, também são utilizados na confecção de *risers* para águas profundas devido às suas características de elevada relação resistência/peso, resistência à corrosão e à fadiga (TOH et al., 2018). Na área militar, compósitos poliméricos reforçados com fibras naturais têm sido testados para utilização em coletes de proteção balística (ROHEN et al., 2015; MONTEIRO et al., 2016).

Os compósitos são criados pela combinação de dois ou mais materiais formando um produto com fases distintas e desempenho diferente daqueles exibidos pelos seus constituintes individualmente. Esses materiais são formados por uma fase contínua, chamada de matriz, e pela fase dispersa ou inclusões. A função da matriz é envolver as inclusões, mantendo-as nas posições definidas em projeto e protegendo-as dos efeitos do ambiente. Por sua vez, as inclusões são responsáveis pelas propriedades desejáveis do compósito pois, em geral, possuem características significativamente melhores do que a matriz. Em geral, as inclusões utilizadas na fabricação de compósitos são fibras ou partículas e, em casos especiais, poros.

Os compósitos podem ser classificados em periódicos e randômicos de acordo com a forma de distribuição de suas inclusões. Na Figura 1.1 são mostrados alguns tipos comuns de materiais compósitos, classificados de acordo com o tipo de inclusões e sua distribuição.

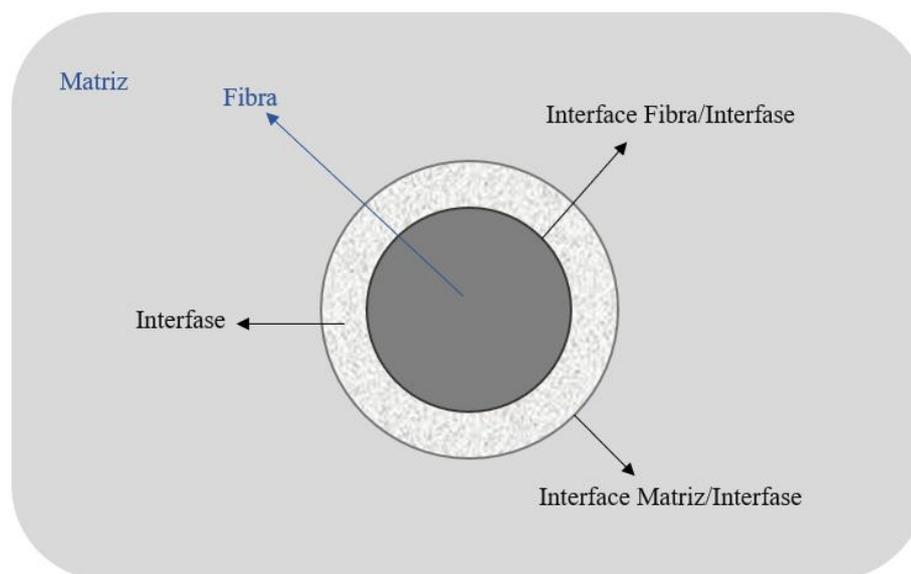
Figura 1.1 - Exemplos de materiais compósitos com (a) partículas distribuídas randomicamente; (b) fibras curtas com orientação aleatória; (c) fibras contínuas periódicas unidirecionais; (d) fibras curtas alinhadas distribuídas periodicamente; (e) tecido formado por fibras contínuas com distribuição periódica.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Quando materiais com propriedades diferentes são combinados para a criação de um novo produto é inevitável o surgimento de uma região de transição entre os mesmos. Para fins de modelagem de materiais compósitos, a região de transição pode ser tratada como uma interfase ou como uma interface.

Interface pode ser definida como a superfície formada pela fronteira entre reforço e matriz. Esta superfície mantém a ligação entre os materiais e possui propriedades físicas e mecânicas diferentes da matriz e do reforço. Por sua vez, considera-se como interfase a região de volume finito entre reforço e matriz onde as propriedades químicas, físicas e mecânicas podem variar continuamente ou de maneira discreta entre aquelas da matriz e do reforço (KIM; MAI, 1998). A Figura 1.2 mostra as regiões de interfase e interface em um compósito com fibras cilíndricas.

Figura 1.2 - Interfase e interfaces em compósito.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A influência de interfases sobre o comportamento efetivo do compósito depende de vários fatores físicos e geométricos, incluindo a fração volumétrica e as dimensões de suas inclusões. Por exemplo, interfases altamente condutivas podem aumentar significativamente a condutividade efetiva do compósito quando o tamanho da inclusão diminui e a fração volumétrica é mantida constante, demonstrando significativo efeito de tamanho (LE QUANG; PHAN; BONNET, 2011). A rigidez e a espessura da interfase influenciam, por exemplo, o comportamento macroscópico de compósitos particulados com distribuição randômica (HASSANZADEH-AGHDAM; MAHMOODI; ANSARI, 2016). Como demonstrado em Liu e Bian (2018), as propriedades da interfase e a razão de aspecto das inclusões influenciam as propriedades macroscópicas dos compósitos. Comparando resultados numéricos e experimentais, Riaño et al. (2018) perceberam uma melhora na predição do comportamento mecânico de um compósito quando a presença de interfase é levada em consideração. Devido à possibilidade de os materiais compósitos serem projetados, uma interfase apropriadamente construída pode melhorar de maneira efetiva a resistência, tenacidade e comportamento de amortecimento (XIAO; XU; ZHANG, 2018).

Com base no exposto anteriormente, os efeitos de interfase ou de interface sobre o comportamento de compósitos podem ser de extrema importância e, conseqüentemente, precisam ser incluídos nas formulações que visem proporcionar predições consistentes e realísticas. Isto constitui uma interessante e atual área de pesquisa de importância crucial para os avanços e desenvolvimento de novos materiais.

1.1 Revisão bibliográfica

As propriedades efetivas dos compósitos podem ser determinadas por técnicas analíticas e numéricas. Esses métodos de homogeneização auxiliam o desenvolvimento de novos materiais por contribuírem para a redução da quantidade de experimentos laboratoriais ao longo do processo de projeto dos compósitos, assim como melhoram a compreensão do comportamento efetivo dos mesmos.

O principal objetivo da micromecânica é prever as propriedades efetivas do compósito em função das propriedades, distribuição e frações volumétricas dos seus constituintes. Diversos modelos micromecânicos desenvolvidos para atender esse objetivo são baseados na teoria de campos médios de Eshelby (1957).

Eshelby (1957) considerou um corpo homogêneo, elástico e infinito contendo uma pequena região elipsoidal Ω do mesmo material. Ele admitiu a região Ω submetida a uma transformação geométrica tal que, na ausência de material circundante, corresponde a uma deformação arbitrária $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. O estudo comprovou que, sob a mencionada transformação geométrica, o campo de deformação resultante é constante dentro daquela região do corpo. Baseando-se neste resultado, Eshelby propôs um procedimento conhecido como método da inclusão equivalente, o qual tem servido de base para a construção de muitos modelos de homogeneização de materiais compósitos. Para o caso particular de um compósito com uma única inclusão elipsoidal, pequena em relação ao volume total do material, o modelo de homogeneização proposto por Eshelby é conhecido na literatura inglesa como *Dilute Suspension*. Considerando a condição de uma só inclusão empregada para sua dedução, o modelo *Dilute Suspension* somente produz resultados satisfatórios para homogeneização de compósitos com pequena fração volumétrica de inclusões, onde as interações entre as mesmas podem ser desprezadas.

Visando contornar a citada limitação do *Dilute Suspension*, diferentes procedimentos analíticos têm sido concebidos para levar em conta as interações entre inclusões, dando origem a uma variedade de modelos para homogeneização de materiais compósitos. Dentre estes, podem ser destacados os modelos tradicionais Auto-Consistente (HILL, 1965), Mori-Tanaka (MORI; TANAKA, 1973) e Esquema Diferencial (HASHIN, 1988).

Por sua vez, esses modelos micromecânicos tradicionais têm servido de base para a construção de muitos procedimentos de homogeneização analíticos deduzidos para casos de compósitos com diferentes comportamentos constitutivos (MOLINARI, 2002; MA; LIU; HU, 2006), assim como têm sido estendidos para homogeneização de outras propriedades físicas,

tais como, térmicas (CAO et al., 1990; CHEN; WANG, 1996), elétricas (WHITEHOUSE; WARWICK; CLYNE, 1991; TAYA, 1995) e piezoelétricas (DUNN; WIENECKE, 1997; BING; DAINING; KEHCHIH, 1997). Destaca-se o trabalho de Hatta e Taya (1986) no qual foi desenvolvida uma analogia do método da inclusão equivalente para o caso de condutividade térmica efetiva. Vale ressaltar que todos estes modelos analíticos, baseados na teoria micromecânica de campos médios introduzida por Eshelby (1957), têm como fundamento a existência de um volume elementar representativo, isto é, de um volume finito cujas propriedades macroscópicas sejam equivalentes às aquelas exibidas pelo material que o constitui (HILL, 1963).

Dentre as técnicas numéricas mais utilizadas para a formulação de modelos para avaliação de propriedades efetivas de materiais compósitos encontra-se o Método dos Elementos Finitos (MEF). Como exemplo, Islam e Pramila (1999) aplicaram um modelo micromecânico que utiliza o MEF para predição de condutividade térmica efetiva de compósitos periódicos, comparando seus resultados numéricos com outros obtidos experimentalmente. Matt e Cruz (2008) também utilizaram um procedimento de homogeneização que emprega o MEF para calcular a condutividade térmica efetiva de compósitos com microestrutura constituída por esferas, elipsoides e cilindros curtos, considerando o efeito de resistência térmica interfacial. Jiang et al. (2014), por sua vez, avaliaram o comportamento mecânico efetivo de compósitos reforçados por fibras contínuas unidirecionais, considerando a presença de interfaces imperfeitas.

No caso de compósitos reforçados por fibras curtas alinhadas, Matt e Cruz (2006) verificaram as condições em que a capacidade de condução de calor do compósito é aumentada de maneira significativa. Utilizando o MEF, os autores avaliaram parâmetros de controle tais como a fração volumétrica de fibras e a condutividade das mesmas, assim como a razão de aspecto da fibra e do elemento de volume representativo. Para esse mesmo tipo de reforço, Shokrieh e Moshrefzadeh-Sani (2016) apresentaram um elemento de volume representativo otimizado para homogeneização empregando um modelo que utiliza o MEF como ferramenta numérica.

Yang e Qin (2004) empregaram um modelo micromecânico que utiliza o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para determinar as propriedades mecânicas efetivas de compósitos reforçados por inclusões circulares rígidas. Araújo e Gray (2008) também aplicaram um procedimento de homogeneização que emprega o MEC para determinar as propriedades mecânicas efetivas de compósitos reforçados por nano-tubos de carbono. Rodrigues et al. (2017) utilizaram o MEC com uma solução fundamental anisotrópica

tridimensional para a análise elástica de compósitos reforçados por fibras curtas. Por sua vez, Fernandes et al. (2019), propuseram uma formulação em elementos de contorno para modelar o comportamento constitutivo de materiais heterogêneos considerando fenômenos dissipativos.

O método dos volumes finitos é uma técnica numérica muito utilizada para a solução de problemas da Mecânica dos Fluidos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). De acordo com Cavalcante, Pindera e Khatam (2012), este método tem sido utilizado como alternativa à abordagem em elementos finitos nos problemas de mecânica dos sólidos devido à sua simplicidade e estabilidade. Três versões dessa técnica têm sido desenvolvidas ao longo dos últimos 30 anos. Duas versões são utilizadas para modelagem de estruturas de materiais homogêneos (FRYER et al., 1991; DEMIRDZIC; MUZAFERIJA, 1994; FALLAH, 2004), enquanto a terceira tem evoluído de forma independente para a aplicação em materiais heterogêneos com microestrutura periódica e com gradação funcional (BURYACHENKO, 2007; BIRMAN; BYRD, 2007).

A Teoria de Volumes Finitos (TVF) estrutural teve origem na *High-Order Theory for Functionally Graded Materials* (HOTFGM) cujo desenvolvimento está apresentado resumidamente em Aboudi, Pindera e Arnold (1999). A versão de homogeneização desta técnica foi chamada inicialmente de *High-Order Theory for Periodic Multiphase Materials* (ABOUDI; PINDERA; ARNOLD, 2001) e, em seguida, renomeada como *High-Fidelity Generalized Method of Cells* (HFGMC) como apresentado em Aboudi, Pindera e Arnold (2002).

A técnica HFGMC sofreu diversas modificações ao longo dos anos e passou a ser denominada *Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics Theory* (FVDAM). O processo de criação do FVDAM pode ser acompanhado em Bansal e Pindera (2003; 2005; 2006), Zhong, Bansal e Pindera (2004) e Pindera e Bansal (2007). Nesta nova versão, a discretização da microestrutura dos materiais é feita com subvolumes retangulares. Em Cavalcante, Pindera e Khatam (2012) é apresentado um estudo comparativo detalhado entre HFGMC e FVDAM.

A discretização do domínio em subvolumes quadrilaterais foi introduzida na versão estrutural da Teoria de Volumes Finitos por Cavalcante (2006) e Cavalcante, Marques e Pindera (2007a; 2007b). Por sua vez, Gattu et al. (2008) incorporaram o mapeamento paramétrico no FVDAM. Esta forma de discretização possibilita uma modelagem mais eficiente de microestruturas complexas.

A modelagem realizada com a versão paramétrica do FVDAM gera resultados comparáveis com aqueles obtidos com o Método dos Elementos Finitos como apresentado em

Cavalcante, Marques e Pindera (2008) e, muitas vezes, com mais eficiência computacional. Para discretizações da estrutura ou da microestrutura com alta fidelidade, o tempo de montagem da matriz de rigidez global, etapa que consome o maior tempo de processamento, é muito menor para FVDAM em comparação com o MEF (CAVALCANTE; MARQUES; PINDERA, 2008).

Visando contornar alguns problemas decorrentes da aplicação da versão paramétrica *standard*, a formulação generalizada da teoria FVDAM foi deduzida (CAVALCANTE; PINDERA, 2014a; 2014b). Nesta versão da teoria impõe-se continuidade de deslocamentos, rotações, curvaturas e tensões nas faces em comum de subvolumes adjacentes melhorando a conformidade entre os mesmos e permitindo a obtenção de uma distribuição de tensões mais suave com relação à representação do campo de deslocamentos usada na versão anterior (CAVALCANTE; PINDERA, 2014a; 2014b; 2016).

Para fins de homogeneização, as versões *standard* e generalizada da teoria FVDAM apresentam resultados similares em geral. Logo, devido à maior complexidade e custo computacional da versão generalizada, a técnica *standard* pode ser mais interessante para a obtenção das propriedades macroscópicas dos compósitos (CAVALCANTE; MARQUES, 2014).

Extensões da versão paramétrica do FVDAM foram desenvolvidas por Cavalcante e Marques (2014) e Escarpini Filho e Marques (2016) para determinar os módulos de relaxação e funções de fluências efetivos de compósitos periódicos reforçados por fibras unidirecionais de material viscoelástico linear. Vale também ressaltar o emprego da mencionada teoria para homogeneização de compósitos com fases elastoplásticas (KHATAM; PINDERA, 2009a; CAVALCANTE; PINDERA, 2016).

Uma versão tridimensional do FVDAM para compósitos periódicos particulados foi desenvolvida por Chen et al. (2016b) e, para compósitos reforçados por tecidos, por Chen et al. (2017). Mais recentemente, uma versão paramétrica tridimensional da teoria FVDAM foi apresentada por Chen, Wang e Chen (2018) para determinar os módulos elásticos efetivos de compósitos reforçados com fibras alinhadas e, também, de compósitos com poros esféricos. E mais recentemente, Ye et al. (2018) avaliaram os módulos elásticos efetivos de compósitos particulados com interfase por meio da versão paramétrica tridimensional da FVDAM.

Em diversas aplicações, os materiais compósitos estão sujeitos a variações significativas de temperatura, como escudos térmicos (GORI; CORASANITI, 2014) e dispositivos eletrônicos (BURGER et al., 2016), tornando essencial o conhecimento do processo de transferência de calor nesses materiais. A condução de calor nos compósitos

depende fundamentalmente de sua condutividade térmica efetiva. Para compósitos poliméricos, os principais fatores que afetam essa propriedade são a condutividade do reforço, sua fração volumétrica e geometria, além da adesão entre a matriz e o reforço e das propriedades da interfase (CHEN et al., 2016a).

A condutividade térmica efetiva de compósitos considerando a presença de interfaces pode ser determinada por métodos analíticos (DASGUPTA; BHANDARKAR, 1992; BONFOH; SABAR, 2018; XIAO; XU; ZHANG, 2018) e numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos (PATHAK, 2013; YANG et al., 2014; YVONNET; HE; TOULEMONDE, 2008) e a Teoria de Volumes Finitos (ESCARPINI FILHO; MARQUES, 2014).

Dasgupta e Bhandarkar (1992) obtiveram as propriedades termoelásticas efetivas de compósitos reforçados por fibras considerando a presença de interfaces degradadas e interfaces com variação radial de suas propriedades. O modelo utilizado nas análises é baseado em um modelo de três fases proposto por Benveniste, Dvorak e Chen (1989). Xiao, Xu e Zhang (2018) avaliaram os efeitos do tamanho das fibras, do revestimento das mesmas, assim como da condutividade do revestimento, na condutividade térmica de nano compósitos, utilizando o método auto-consistente generalizado com um modelo composto por quatro cilindros concêntricos.

Pathak (2013) quantificou a condutividade térmica da interface entre matriz e fibra de uma série de compósitos de fibra de carbono utilizando o *software* ANSYS. Yvonnet, He e Toulemonde (2008) utilizaram o Método dos Elementos Finitos Estendidos para avaliar compósitos com interface imperfeita e altamente condutora.

Considerando o problema térmico, as interfaces entre matriz e fibra são consideradas perfeitas quando existe continuidade de temperatura e fluxo de calor normal às mesmas. No contexto da elasticidade, em uma interface perfeita os campos de deslocamentos e tensões são contínuos através da mesma. Qualquer interface onde estas condições não são satisfeitas é chamada de imperfeita (HASHIN, 2001; HASHIN, 2002).

Hashin (2001) demonstrou que uma interfase fina com condutividade térmica muito menor que a condutividade das outras fases pode produzir uma descontinuidade finita na temperatura entre a matriz e a fibra. Por outro lado, uma descontinuidade finita no fluxo de calor normal pode ser produzida quando a interfase possui condutividade muito maior que as outras fases. Hashin (2001) modela a interfase como uma interface imperfeita sem restrição de magnitude da condutividade térmica. Dessa forma, as condições de interface apresentam descontinuidade de temperatura e fluxo de calor normal.

O modelo de interface imperfeita desenvolvido por Hashin (2002) considera descontinuidade de deslocamentos e tensões, permitindo a avaliação de compósitos dotados de interfaces com qualquer rigidez, desde muito pequena até muito grande.

Benveniste (2006) desenvolveu um modelo geral de interface que fornece expressões para as descontinuidades de temperatura e fluxo de calor normal, no caso de condução, e de deslocamentos e tensões, no caso de elasticidade.

Considerando a presença de descontinuidade de deslocamentos na interface partícula-matriz, Yanase e Ju (2012) desenvolveram versões do método de Mori-Tanaka (MORI; TANAKA, 1973), do método alto consistente (HILL, 1965) e do esquema diferencial (HASHIN, 1988). Dessa forma, foi possível analisar os efeitos de escorregamento e separação interfacial na degradação das propriedades mecânicas efetivas de compósitos reforçados por partículas esféricas.

Wang e Quin (2015) investigaram o efeito de interfase no comportamento micro e macro mecânico de compósitos reforçados por fibras unidirecionais. A interfase foi modelada como uma fina camada de recobrimento na superfície da fibra, cujo propósito é resistir à expansão térmica radial e circunferencial. Estes últimos autores desenvolveram um elemento recobrimento/fibra que dispensa a discretização do domínio da interfase e da fibra.

Para levar em consideração os efeitos de uma interfase imperfeita nas propriedades mecânicas do compósito, Hosseini Kordkheili e Toozandehjani (2014) utilizaram um parâmetro de degradação da rigidez, dado em termos das propriedades da matriz e da interfase, em conjunto com o método da inclusão equivalente.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral o desenvolvimento de formulações para homogeneização da condutividade térmica e das propriedades termoelásticas efetivas de compósitos com microestrutura periódica que levem em consideração a influência de interfaces.

Os objetivos específicos deste trabalho são os seguintes:

- a) Desenvolver uma extensão tridimensional da formulação paramétrica da Teoria de Volumes Finitos para homogeneização térmica de compósitos periódicos;
- b) Incorporar efeitos térmicos na formulação paramétrica tridimensional da Teoria de Volumes Finitos para homogeneização termoelástica de compósitos periódicos reforçados por fibras longas ou curtas;

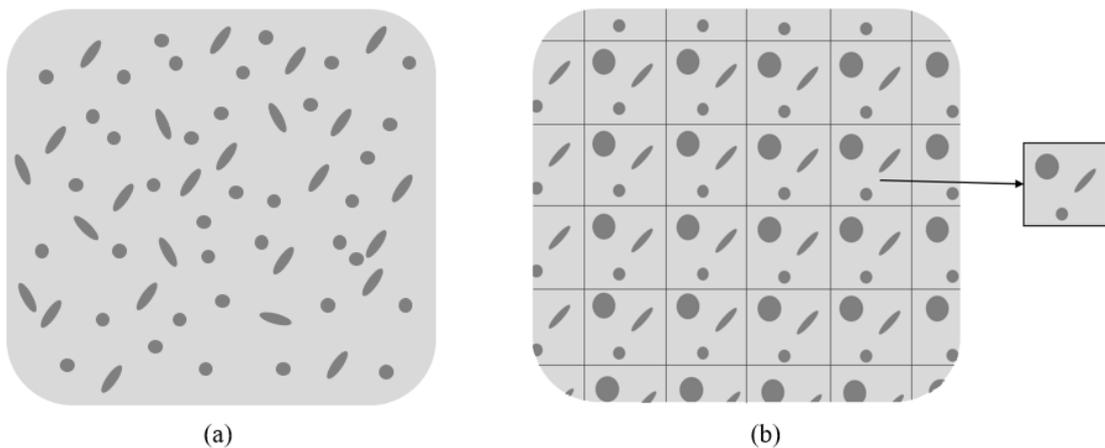
- c) Avaliar a influência de interfaces na condutividade térmica efetiva de compósitos com partículas cúbicas, fibras longas ou fibras curtas alinhadas, periodicamente distribuídas;
- d) Avaliar os efeitos de interfaces nas propriedades termoelásticas macroscópicas de compósitos com fibras longas ou curtas distribuídas periodicamente.

2 HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS

Neste capítulo é apresentada uma expansão tridimensional da formulação paramétrica da Teoria de Volumes Finitos para a determinação da condutividade térmica efetiva de materiais compósitos multifásicos com microestrutura periódica de arquitetura generalizada.

A predição das propriedades efetivas de compósitos pode ser feita a partir de uma porção do volume do material que representa o comportamento efetivo do mesmo. Materiais com microestrutura estatisticamente homogênea em uma escala apropriada e compósitos periódicos podem ser representados por um Elemento de Volume Representativo (EVR). No caso de compósitos periódicos, o EVR é formado por um agrupamento de células unitárias de repetição (CUR). A Figura 2.1 apresenta exemplos dos dois tipos de microestrutura.

Figura 2.1 - (a) Microestrutura estatisticamente homogênea caracterizada por um EVR e (b) microestrutura periódica caracterizada por uma CUR.

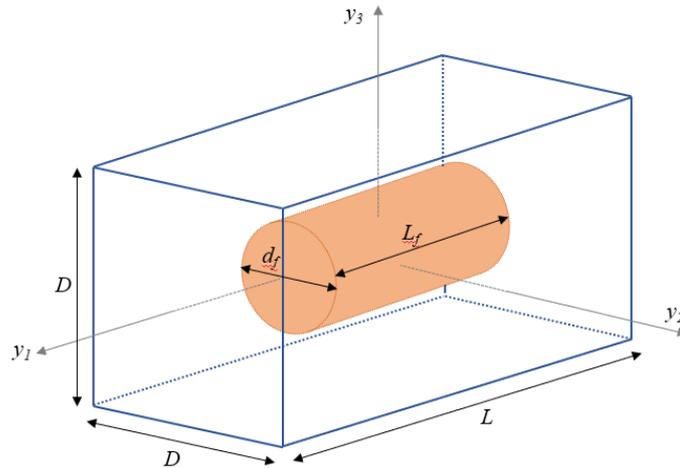


Fonte: elaborada pela autora, 2018.

As propriedades efetivas de compósitos periódicos podem ser obtidas por meio da análise de uma célula unitária de repetição. Para que a resposta da CUR corresponda àquela do EVR submetido a condições de contorno homogêneas, as condições de contorno aplicadas à célula unitária devem ser periódicas (DRAGO; PINDER, 2007).

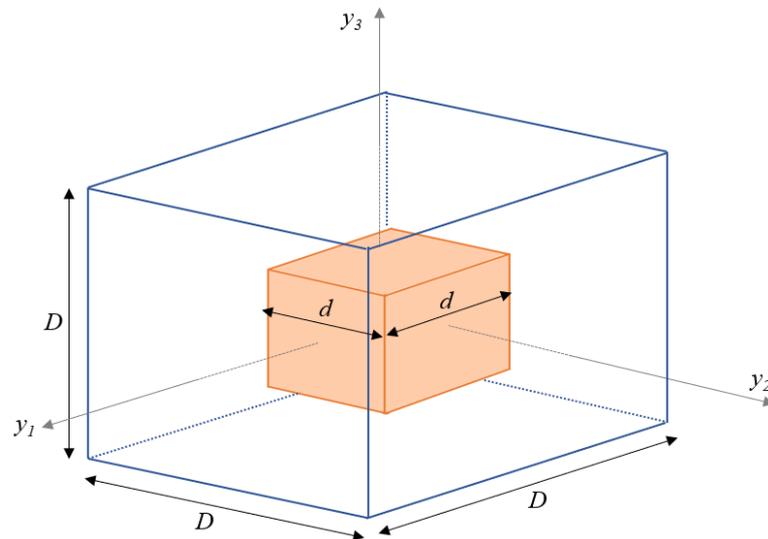
Neste trabalho são estudados compósitos periódicos multifásicos representados por células unitárias de repetição. No caso de compósitos com fibras curtas é comum a utilização de células unitárias paralelepípedicas como apresentado na Figura 2.2 onde são mostradas as dimensões da CUR e da fibra cilíndrica. Compósitos com partículas cúbicas podem ser representados por uma CUR cúbica como mostrado na Figura 2.3.

Figura 2.2 - Célula unitária de repetição de compósito reforçado por fibra curta.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 2.3 - Célula unitária de repetição de compósito reforçado por partícula cúbica.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

2.1 Formulação paramétrica tridimensional da Teoria de Volumes Finitos

Considere um elemento de volume representativo com volume V e limitado por uma superfície S sujeito à seguinte condição de contorno homogênea em temperatura:

$$T^0(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^0 \mathbf{x} \quad (2.1)$$

na qual $\mathbf{G}^0 = \partial T^0 / \partial \mathbf{x}$ é constante e \mathbf{x} representa as coordenadas de um ponto sobre o contorno S .

Considere agora que o material compósito possui distribuição periódica de inclusões, podendo ser representado por uma célula unitária de repetição. Com base em considerações da teoria micromecânica, pode-se concluir que a resposta efetiva do EVR sob condições de contorno homogêneas em temperatura coincide com a resposta de uma CUR sob adequadas condições de contorno periódicas, como mostrado em Escarpini Filho e Marques (2014).

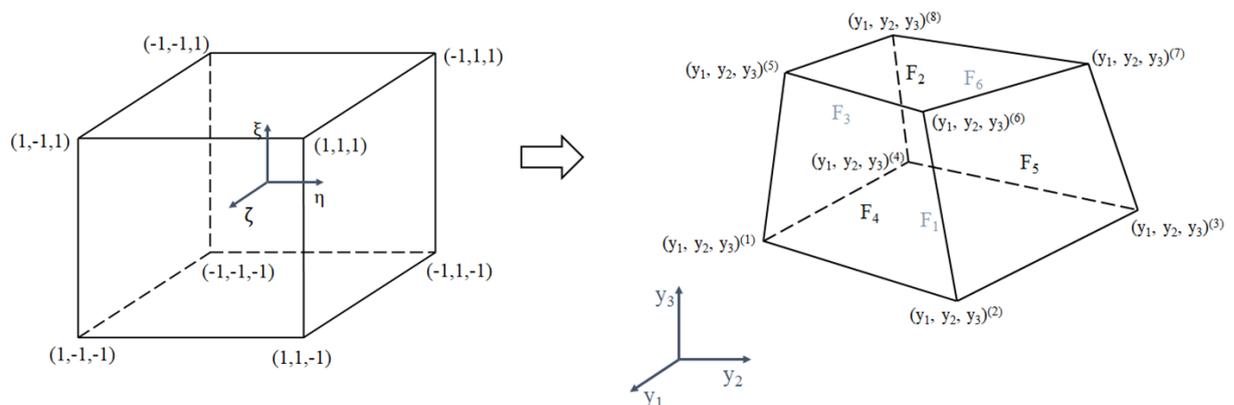
O campo de temperatura de uma CUR pode ser representado pela seguinte expressão envolvendo duas diferentes escalas:

$$T(\mathbf{y}) = T^0(\mathbf{x}) + \tilde{T}(\mathbf{y}) \quad (2.2)$$

na qual T^0 e \tilde{T} são, respectivamente, as parcelas macroscópica e flutuante da temperatura. As coordenadas locais \mathbf{y} são utilizadas na escala da CUR, enquanto as coordenadas globais \mathbf{x} são empregadas na escala do EVR.

Pela Teoria de Volumes Finitos 3D, desenvolvida neste capítulo para avaliação da condutividade térmica efetiva do compósito, a célula unitária de repetição deve ser discretizada em subvolumes hexaédricos. O desenvolvimento da formulação envolve um mapeamento de um cubo de referência em um sistema de coordenadas paramétricas ($\zeta - \eta - \xi$) para cada subvolume hexaédrico no espaço cartesiano ($y_1 - y_2 - y_3$) como mostrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 - Mapeamento do cubo de referência para o subvolume hexaédrico da microestrutura real.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Um ponto de coordenadas (ζ, η, ξ) no cubo de referência é mapeado para o ponto cartesiano (y_1, y_2, y_3) no subvolumee hexaédrico da microestrutura discretizada da seguinte maneira:

$$y_i(\zeta, \eta, \xi) = \sum_{j=1}^8 N_j(\zeta, \eta, \xi) y_i^{(j)} \quad (2.3)$$

com $i = 1, 2, 3$ e

$$\begin{aligned} N_1(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 + \zeta)(1 - \eta)(1 - \xi) \\ N_2(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 + \zeta)(1 + \eta)(1 - \xi) \\ N_3(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 - \zeta)(1 + \eta)(1 - \xi) \\ N_4(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 - \zeta)(1 - \eta)(1 - \xi) \\ N_5(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 + \zeta)(1 - \eta)(1 + \xi) \\ N_6(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 + \zeta)(1 + \eta)(1 + \xi) \\ N_7(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 - \zeta)(1 + \eta)(1 + \xi) \\ N_8(\zeta, \eta, \xi) &= \frac{1}{8} (1 - \zeta)(1 - \eta)(1 + \xi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo as Equações (2.4) funções de forma também utilizadas no Método dos Elementos Finitos.

2.1.1 Matriz de condutividade térmica efetiva de um subvolumee

As componentes de fluxo de calor local em um subvolumee homogêneo são definidas pela lei de Fourier:

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial y_j} \quad (2.5)$$

onde k_{ij} são as condutividades térmicas do material. Substituindo o campo de temperatura representado pela Equação (2.2) em (2.5), as componentes de fluxo de calor podem ser apresentadas pela expressão:

$$q_i = -k_{ij} G_j^0 - k_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} \quad (2.6)$$

na qual G_j^0 são as componentes do gradiente de temperatura macroscópico.

Na versão paramétrica tridimensional da Teoria de Volume Finitos, o campo de temperatura flutuante presente na Equação (2.2) é aproximado pela seguinte expansão polinomial de segunda ordem de Legendre usando as coordenadas paramétricas:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\zeta, \eta, \xi) = & \tilde{T}_{000} + \zeta \tilde{T}_{100} + \eta \tilde{T}_{010} + \xi \tilde{T}_{001} + \frac{1}{2} (3\zeta^2 - 1) \tilde{T}_{200} \\ & + \frac{1}{2} (3\eta^2 - 1) \tilde{T}_{020} + \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1) \tilde{T}_{002} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde \tilde{T}_{mnp} são coeficientes a determinar.

Os valores médios do campo de temperatura em cada face do subvolume são definidos e calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T} \rangle^{(1,2)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{T}(\zeta, \eta, \xi = \mp 1) d\zeta d\eta = \tilde{T}_{000} \mp \tilde{T}_{001} + \tilde{T}_{002} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3,5)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{T}(\zeta, \eta = \mp 1, \xi) d\zeta d\xi = \tilde{T}_{000} \mp \tilde{T}_{010} + \tilde{T}_{020} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4,6)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{T}(\zeta = \pm 1, \eta, \xi) d\eta d\xi = \tilde{T}_{000} \pm \tilde{T}_{100} + \tilde{T}_{200} \end{aligned} \quad (2.8)$$

nas quais os índices indicam as faces do subvoluma conforme a Figura 2.4.

Por sua vez, os gradientes de temperatura nas faces do subvoluma são determinados com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \right\rangle^{(1,2)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} d\zeta d\eta = \tilde{T}_{100} \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \right\rangle^{(3,5)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} d\zeta d\xi = \tilde{T}_{100}\end{aligned}\quad (2.9)$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \right\rangle^{(4,6)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} d\eta d\xi = \tilde{T}_{100} \pm 3\tilde{T}_{200}$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle^{(1,2)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} d\zeta d\eta = \tilde{T}_{010}$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle^{(3,5)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} d\zeta d\xi = \tilde{T}_{010} \mp 3\tilde{T}_{020}\quad (2.10)$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle^{(4,6)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} d\eta d\xi = \tilde{T}_{010}$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle^{(1,2)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} d\zeta d\eta = \tilde{T}_{001} \mp 3\tilde{T}_{002}$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle^{(3,5)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} d\zeta d\xi = \tilde{T}_{001}\quad (2.11)$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle^{(4,6)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} d\eta d\xi = \tilde{T}_{001}$$

Os gradientes médios de temperatura flutuante na face p de um subvoluma no sistema de referência podem ser relacionados com os gradientes no sistema de coordenadas da microestrutura real pela média volumétrica da matriz Jacobiana inversa:

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_1} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_3} \right\rangle \end{pmatrix}^{(p)} = \langle \bar{J} \rangle \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle \end{pmatrix}^{(p)} \quad (2.12)$$

sendo a obtenção da matriz Jacobiana e de sua inversa mostrada no Apêndice A.

O valor médio do fluxo de calor na face p do subvolume é obtido a partir da Equação (2.6) juntamente com a Equação (2.12):

$$\begin{pmatrix} \langle q_1 \rangle \\ \langle q_2 \rangle \\ \langle q_3 \rangle \end{pmatrix}^{(p)} = \bar{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} G_1^0 \\ G_2^0 \\ G_3^0 \end{pmatrix} + \bar{\mathbf{k}} \langle \bar{J} \rangle \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle \end{pmatrix}^{(p)} \quad (2.13)$$

na qual

$$\bar{\mathbf{k}} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A Equação (2.13) mostra que o fluxo de calor total médio na face p do subvolume possui uma parte macroscópica, constante e dependente dos valores de \mathbf{G}^0 , e uma parcela que depende dos gradientes médios de temperatura flutuante cujos valores são a determinar.

A componente do fluxo de calor médio normal à face p pode ser obtida por meio da expressão:

$$\langle q_n \rangle^{(p)} = \mathbf{n}^{(p)} \bar{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} G_1^0 \\ G_2^0 \\ G_3^0 \end{Bmatrix} + \mathbf{n}^{(p)} \bar{\mathbf{k}} \langle \mathbf{J} \rangle \begin{Bmatrix} \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} \rangle \\ \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \rangle \\ \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \rangle \end{Bmatrix}^{(p)} \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{n}^{(p)} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^{(p)}$, sendo n_1, n_2 e n_3 as componentes do vetor normal unitário que aponta para fora da face p do subvolume.

Utilizando as expressões (2.9) a (2.11) e (2.15), o vetor que reúne os fluxos de calor médios nas faces do subvolume pode ser escrito como

$$\begin{Bmatrix} \langle q_n \rangle^{(1)} \\ \langle q_n \rangle^{(2)} \\ \langle q_n \rangle^{(3)} \\ \langle q_n \rangle^{(4)} \\ \langle q_n \rangle^{(5)} \\ \langle q_n \rangle^{(6)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{n}^{(3)} \\ \mathbf{n}^{(4)} \\ \mathbf{n}^{(5)} \\ \mathbf{n}^{(6)} \end{Bmatrix} \bar{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} G_1^0 \\ G_2^0 \\ G_3^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \\ \mathbf{v}^{(3)} \\ \mathbf{v}^{(4)} \\ \mathbf{v}^{(5)} \\ \mathbf{v}^{(6)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{100} \\ \tilde{T}_{010} \\ \tilde{T}_{001} \\ \tilde{T}_{200} \\ \tilde{T}_{020} \\ \tilde{T}_{002} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

na qual

$$\mathbf{v}^{(p)} = \mathbf{n}^{(p)} \bar{\mathbf{k}} \langle \mathbf{J} \rangle \mathbf{a}^{(p)} \quad (2.17)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(1,2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mp 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}^{(3,5)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mp 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}^{(4,6)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para se obter uma relação entre os coeficientes da expansão polinomial (2.7) e os valores médios das temperaturas flutuantes nas faces do subvolume, a equação de balanço de

energia deve ser utilizada. Para isto, as derivadas segundas do campo de temperatura flutuantes serão determinadas, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \zeta^2} &= 3\tilde{T}_{200} \\
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2} &= 3\tilde{T}_{020} \\
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} &= 3\tilde{T}_{002} \\
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \zeta \partial \eta} &= \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta \partial \zeta} = 0 \\
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \\
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \zeta \partial \xi} &= \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi \partial \zeta} = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando a inversa da matriz Jacobiana, as derivadas segundas do campo de temperatura flutuante em relação às coordenadas cartesianas podem ser expressas como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y_1^2} &= 3[\tilde{T}_{200}(\bar{J}_{11})^2 + \tilde{T}_{020}(\bar{J}_{12})^2 + \tilde{T}_{002}(\bar{J}_{13})^2] \\
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y_2^2} &= 3[\tilde{T}_{200}(\bar{J}_{21})^2 + \tilde{T}_{020}(\bar{J}_{22})^2 + \tilde{T}_{002}(\bar{J}_{23})^2] \\
\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y_3^2} &= 3[\tilde{T}_{200}(\bar{J}_{31})^2 + \tilde{T}_{020}(\bar{J}_{32})^2 + \tilde{T}_{002}(\bar{J}_{33})^2]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Considerando a equação de balanço de fluxo de calor e assumindo que o material do subvolume é transversalmente isotrópico, ou seja, $k_{11} = k_L$, $k_{22} = k_{33} = k_T$ e $k_{13} = k_{31} = k_{12} = k_{21} = k_{23} = k_{32} = 0$, obtém-se a seguinte expressão:

$$-k_L \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y_1^2} - k_T \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y_3^2} \right) = 0 \tag{2.21}$$

a qual, pela substituição das Equações (2.20) em (2.21), torna-se

$$\begin{aligned}
 & -3k_L[\tilde{T}_{200}(\bar{J}_{11})^2 + \tilde{T}_{020}(\bar{J}_{12})^2 + \tilde{T}_{002}(\bar{J}_{13})^2] \\
 & \quad - 3k_T[\tilde{T}_{200}\{(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{31})^2\} + \tilde{T}_{020}\{(\bar{J}_{22})^2 + (\bar{J}_{32})^2\} \\
 & \quad + \tilde{T}_{002}\{(\bar{J}_{23})^2 + (\bar{J}_{33})^2\}] = 0
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

A partir das Equações (2.8) são obtidos os valores dos coeficientes \tilde{T}_{200} , \tilde{T}_{020} e \tilde{T}_{002} em função da temperatura média flutuante nas faces do subvolume por meio das expressões:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{200} &= \frac{1}{2}(\langle \tilde{T} \rangle^{(4)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(6)}) - \tilde{T}_{000} \\
 \tilde{T}_{020} &= \frac{1}{2}(\langle \tilde{T} \rangle^{(3)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(5)}) - \tilde{T}_{000} \\
 \tilde{T}_{002} &= \frac{1}{2}(\langle \tilde{T} \rangle^{(1)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(2)}) - \tilde{T}_{000}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

O coeficiente independente da expansão polinomial \tilde{T}_{000} pode, então, ser obtido com a substituição da Equação (2.23) em (2.22) pela relação:

$$\tilde{T}_{000} = \frac{1}{\lambda} [\lambda_1(\langle \tilde{T} \rangle^{(1)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(2)}) + \lambda_2(\langle \tilde{T} \rangle^{(3)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(5)}) + \lambda_3(\langle \tilde{T} \rangle^{(4)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(6)})] \tag{2.24}$$

na qual

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 2[k_L\{(\bar{J}_{11})^2 + (\bar{J}_{12})^2 + (\bar{J}_{13})^2\} \\
 & \quad + k_T\{(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{22})^2 + (\bar{J}_{23})^2 + (\bar{J}_{31})^2 + (\bar{J}_{32})^2 + (\bar{J}_{33})^2\}] \\
 \lambda_1 &= k_L(\bar{J}_{13})^2 + k_T\{(\bar{J}_{23})^2 + (\bar{J}_{33})^2\} \\
 \lambda_2 &= k_L(\bar{J}_{12})^2 + k_T\{(\bar{J}_{22})^2 + (\bar{J}_{32})^2\} \\
 \lambda_3 &= k_L(\bar{J}_{11})^2 + k_T\{(\bar{J}_{21})^2 + (\bar{J}_{31})^2\}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Substituindo-se a Equação (2.24) em (2.8) obtém-se a seguinte relação entre os coeficientes do polinômio de aproximação e as temperaturas médias nas faces do subvolume:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{T}_{100} \\ \tilde{T}_{010} \\ \tilde{T}_{001} \\ \tilde{T}_{200} \\ \tilde{T}_{020} \\ \tilde{T}_{002} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \langle \tilde{T} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(5)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(6)} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & -\lambda_1/\lambda & -\lambda_1/\lambda & \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 2\lambda_1}{\lambda} \right)^T \\ 0 & 0 & 1/2 & -\lambda_1/\lambda & -\lambda_1/\lambda & \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 2\lambda_1}{\lambda} \right) \\ 0 & -1/2 & 0 & -\lambda_2/\lambda & -\frac{1}{2} \left(\frac{2\lambda_2 - \lambda}{\lambda} \right) & -\lambda_2/\lambda \\ 1/2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{2\lambda_3 - \lambda}{\lambda} \right) & -\lambda_3/\lambda & -\lambda_3/\lambda \\ 0 & 1/2 & 0 & -\lambda_2/\lambda & -\frac{1}{2} \left(\frac{2\lambda_2 - \lambda}{\lambda} \right) & -\lambda_2/\lambda \\ -1/2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{2\lambda_3 - \lambda}{\lambda} \right) & -\lambda_3/\lambda & -\lambda_3/\lambda \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Para se determinar a relação entre o fluxo de calor médio e as temperaturas médias flutuantes nas faces do subvolume, substitui-se a Equação (2.26) em (2.16), resultando

$$\begin{Bmatrix} \langle q_n \rangle^{(1)} \\ \langle q_n \rangle^{(2)} \\ \langle q_n \rangle^{(3)} \\ \langle q_n \rangle^{(4)} \\ \langle q_n \rangle^{(5)} \\ \langle q_n \rangle^{(6)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{n}^{(3)} \\ \mathbf{n}^{(4)} \\ \mathbf{n}^{(5)} \\ \mathbf{n}^{(6)} \end{Bmatrix} \bar{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} G_1^0 \\ G_2^0 \\ G_3^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \\ \mathbf{v}^{(3)} \\ \mathbf{v}^{(4)} \\ \mathbf{v}^{(5)} \\ \mathbf{v}^{(6)} \end{Bmatrix} \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \langle \tilde{T} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(5)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(6)} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

que pode ser escrita de forma compacta:

$$\langle \mathbf{q}_n \rangle^{(p)} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{G}^0 + \mathbf{K}_L \langle \tilde{\mathbf{T}} \rangle \quad (2.29)$$

na qual \mathbf{K}_L é a matriz de condutividade térmica do subvolume, dada por $\mathbf{K}_L = \mathbf{V}\mathbf{B}$. Por sua vez, a matriz $\mathbf{V} = [\mathbf{v}^{(1)T} \ \mathbf{v}^{(2)T} \ \mathbf{v}^{(3)T} \ \mathbf{v}^{(4)T} \ \mathbf{v}^{(5)T} \ \mathbf{v}^{(6)T}]$, sendo o superíndice T indicativo de vetor transposto.

2.1.2 Matriz de condutividade térmica global

Uma vez obtida a matriz de condutividade térmica dos subvolumes, monta-se um sistema de equações globais que inclui uma matriz de condutividade térmica global \mathbf{K}_G . Na construção da matriz \mathbf{K}_G , as matrizes \mathbf{K}_L são agrupadas de acordo com as condições de compatibilidade de temperatura flutuante e fluxo de calor normal médios nas faces.

As faces de cada subvolume possuem uma numeração global, sendo que as faces internas de subvolumes adjacentes possuem o mesmo número. As faces externas dos subvolumes localizados no contorno da CUR são numeradas de acordo com as condições de periodicidade. Aplicando condições de contorno periódicas, o seguinte sistema de equações globais é obtido:

$$\mathbf{K}_G \tilde{\mathbf{T}}_G = \mathbf{Q}_G^0 \quad (2.30)$$

na qual o vetor $\tilde{\mathbf{T}}_G$ é composto pelas temperaturas flutuantes médias desconhecidas das faces, enquanto o vetor \mathbf{Q}_G^0 é constituído pelas resultantes dos fluxos normais médios macroscópicos nas interfaces dos subvolumes adjacentes.

2.1.3 Matriz de condutividade térmica homogeneizada

Na escala macroscópica, a lei de Fourier para materiais compósitos relaciona o fluxo de calor efetivo \mathbf{Q}^* com o gradiente de temperatura macroscópico \mathbf{G}^0 :

$$\mathbf{Q}^* = -\mathbf{K}^* \mathbf{G}^0 \quad (2.31)$$

na qual \mathbf{K}^* é matriz de condutividade térmica efetiva do material. Para uma célula unitária com volume Ω composta por N fases distintas, o fluxo de calor efetivo é definido como

$$\mathbf{Q}^* = \frac{1}{\Omega} \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{q}(\mathbf{y}) d\Omega_\alpha \quad (2.32)$$

onde Ω_α representa o volume da fase α e \mathbf{q} indica o fluxo local de calor. Considerando que cada fase α da célula unitária é discretizada em N_α subvolumes, a Equação (2.32) pode ser aproximada da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}^* = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{r=1}^{N_\alpha} \mathbf{k}_\alpha \bar{v}_\alpha^{(r)} \langle \mathbf{G}_\alpha \rangle^{(r)} \quad (2.33)$$

na qual \mathbf{k}_α representa a matriz de condutividade térmica da fase α , $\bar{v}_\alpha^{(r)}$ é a fração volumétrica do r -ésimo subvolume com relação ao volume total da célula unitária e $\langle \mathbf{G}_\alpha \rangle^{(r)}$ é o gradiente médio de temperatura para o subvolume mencionado.

Definindo $\mathbf{H}_\alpha^{(r)}$ como a matriz de concentração de gradiente de temperatura para o r -ésimo subvolume, o gradiente médio de temperatura se relaciona com o gradiente de temperatura macroscópico pela relação

$$\langle \mathbf{G}_\alpha \rangle^{(r)} = \mathbf{H}_\alpha^{(r)} \mathbf{G}^0 \quad (2.34)$$

onde, finalmente, substituindo a Equação (2.33) em (2.31), juntamente com a expressão (2.34), obtém-se a matriz de condutividade térmica homogeneizada do material:

$$\mathbf{K}^* = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{r=1}^{N_\alpha} \bar{v}_\alpha^{(r)} \mathbf{k}_\alpha \mathbf{H}_\alpha^{(r)} \quad (2.35)$$

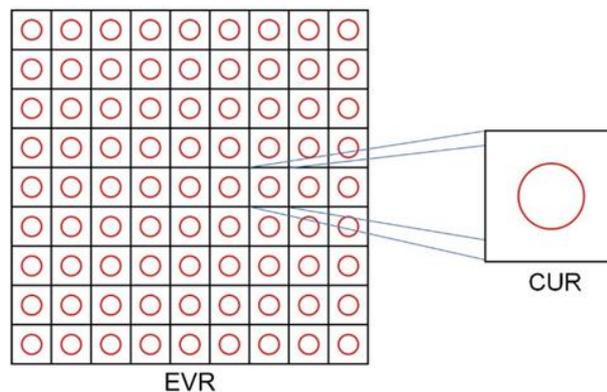
As matrizes de concentração de gradiente de temperatura $\mathbf{H}_\alpha^{(r)}$ podem ser calculadas por meio da aplicação de gradientes macroscópicos de temperatura unitários. A primeira coluna da matriz é calculada com a aplicação de $\mathbf{G}^0 = [1 \ 0 \ 0]^T$, enquanto a segunda e terceira colunas são determinadas com $\mathbf{G}^0 = [0 \ 1 \ 0]^T$ e $\mathbf{G}^0 = [0 \ 0 \ 1]^T$, respectivamente. Para cada valor adotado de \mathbf{G}^0 as temperaturas médias flutuantes são calculadas com a Equação (2.30), o que possibilita o cálculo do gradiente de temperatura em cada subvolume e, então, os

vetores $\langle \mathbf{G}_\alpha \rangle^{(r)}$. Conhecidos os gradientes médios de temperatura em cada subvolume, a Equação (2.34) é utilizada para a montagem das colunas da matriz $\mathbf{H}_\alpha^{(r)}$.

2.2 Caso particular da homogeneização térmica de compósitos periódicos com fibras longas unidirecionais

Para avaliar a condutividade térmica de compósitos periódicos reforçados por fibras longas unidirecionais, pode-se reduzir o problema para o caso bidimensional. Logo, utiliza-se a versão paramétrica bidimensional da Teoria de Volumes Finitos e considera-se o elemento de volume representativo, assim como a célula unitária de repetição, apresentados na Figura 2.5. Nesta seção são apresentados os principais pontos a respeito da formulação paramétrica bidimensional da Teoria de Volumes Finitos para o problema térmico que pode ser encontrada de forma completa em Escarpini Filho (2015).

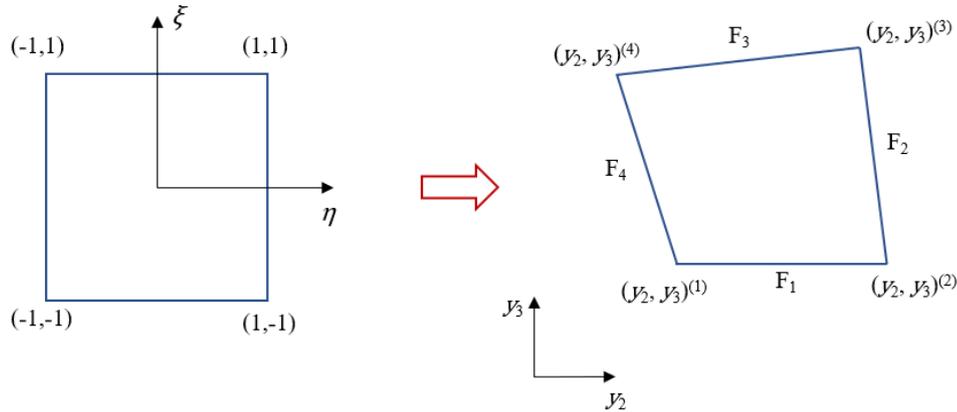
Figura 2.5 - Elemento de Volume Representativo e Célula Unitária de Repetição.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A célula unitária de repetição é discretizada usando subvolumes quadrilaterais. Na formulação paramétrica da Teoria de Volumes Finitos é feito o mapeamento de um quadrado de referência em um sistema de coordenadas paramétricas $(\eta - \xi)$ para um subvolume quadrilateral no plano cartesiano $(y_2 - y_3)$ (CAVALCANTE; MARQUES; PINDERA, 2007a), como mostrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 - Mapeamento do quadrado de referência para o subvolume quadrilateral da microestrutura real.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

O campo de temperatura flutuante é aproximado por uma expansão polinomial usando as coordenadas paramétricas:

$$\tilde{T}(\eta, \xi) = \tilde{T}_{00} + \eta\tilde{T}_{10} + \xi\tilde{T}_{01} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)\tilde{T}_{20} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)\tilde{T}_{02} \quad (2.36)$$

na qual \tilde{T}_{mn} são coeficientes a determinar. Considera-se o campo de temperatura independente de y_1 .

A partir da Equação (2.36) são calculadas as temperaturas médias e os gradientes médios de temperatura nas faces dos subvolumes. Os gradientes médios em uma face p do subvolume no sistema de referência podem ser relacionados com o sistema de coordenadas da microestrutura real pela média volumétrica da inversa da matriz Jacobiana ($\bar{\mathbf{J}}$).

O fluxo de calor normal médio em cada face p do subvolume é calculado a partir Equação (2.6) que reescreve a lei de Fourier considerando o campo de temperatura em duas escalas:

$$\begin{bmatrix} \langle q_n \rangle^{(1)} \\ \langle q_n \rangle^{(2)} \\ \langle q_n \rangle^{(3)} \\ \langle q_n \rangle^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{n}^{(3)} \\ \mathbf{n}^{(4)} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{G}^0 + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \\ \mathbf{v}^{(3)} \\ \mathbf{v}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{10} \\ \tilde{T}_{01} \\ \tilde{T}_{20} \\ \tilde{T}_{02} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde \mathbf{G}^0 é o vetor dos gradientes de temperatura macroscópicos, $\mathbf{n}^{(p)} = [n_2 \ n_3]^{(p)}$, sendo n_2 e n_3 as componentes do vetor normal unitário que apontam para fora da face p do subvolume,

$$\bar{\mathbf{k}} = - \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

e

$$\mathbf{v}^{(p)} = \mathbf{n}^{(p)} \bar{\mathbf{k}} \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle \mathbf{a}^{(p)} \quad (2.39)$$

com

$$\mathbf{a}^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mp 3 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{a}^{(2,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para subvolumes de material isotrópico, os coeficientes a determinar \tilde{T}_{mn} são calculados pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{10} \\ \tilde{T}_{01} \\ \tilde{T}_{20} \\ \tilde{T}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -\omega & 1/2 - \lambda & -\omega & 1/2 - \lambda \\ 1/2 - \omega & -\lambda & 1/2 - \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \tilde{T} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4)} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \langle \tilde{T} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4)} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

onde

$$\lambda = \frac{\langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{11}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{21}^2}{2(\langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{11}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{12}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{21}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{22}^2)} \quad (2.42)$$

$$\omega = \frac{\langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{12}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{22}^2}{2(\langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{11}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{12}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{21}^2 + \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle_{22}^2)}$$

Substituindo a Equação (2.41) em (2.37), chega-se a uma relação entre o fluxo de calor normal nas faces e as temperaturas médias flutuantes:

$$\langle \mathbf{q}_n \rangle^{(p)} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{G}^0 + \mathbf{K}_L \langle \tilde{\mathbf{T}} \rangle \quad (2.43)$$

na qual \mathbf{K}_L é a matriz de condutividade térmica local, sendo $\mathbf{K}_L = \mathbf{V}\mathbf{B}$. Por sua vez, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}^{(1)T} \ \mathbf{v}^{(2)T} \ \mathbf{v}^{(3)T} \ \mathbf{v}^{(4)T}]^T$.

Uma vez obtida a matriz de condutividade térmica dos subvolumes, monta-se um sistema de equações globais que inclui uma matriz de condutividade térmica global \mathbf{K}_G . Na construção da matriz \mathbf{K}_G , as matrizes \mathbf{K}_L são agrupadas de acordo com as condições de compatibilidade de temperatura flutuante e fluxo de calor normal médios nas faces. A solução do sistema com a aplicação de condições de contorno periódicas fornece os valores de temperatura flutuante em todas as faces que, por sua vez, permitem o cálculo dos gradientes médios de temperatura.

Com os gradientes médios de temperatura nos subvolumes podem ser montadas as matrizes de concentração de gradiente de temperatura de Hill $\mathbf{H}^{(r)}$, associadas a cada uma das fases, necessárias para o cálculo da matriz de condutividade térmica efetiva pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K}^* = \sum_{r=1}^{N_m} k_m \bar{v}_m^{(r)} \mathbf{H}_m^{(r)} + \sum_{q=1}^{N_f} k_f \bar{v}_f^{(q)} \mathbf{H}_f^{(q)} + \sum_{s=1}^{N_i} k_i \bar{v}_i^{(s)} \mathbf{H}_i^{(s)} \quad (2.44)$$

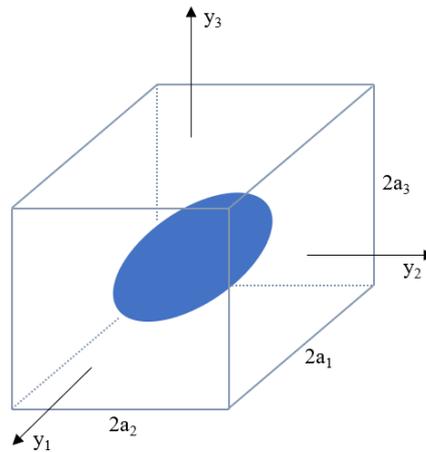
na qual k_m , k_f e k_i são a condutividade térmica da matriz, da fibra e da interfase, respectivamente.

2.3 Formulação analítica para a determinação da condutividade térmica efetiva

Nesta seção é apresentada uma formulação analítica usada para determinar a condutividade térmica efetiva de compósitos periódicos. Tal formulação consiste na extensão de uma técnica originalmente proposta para homogeneização elástica de compósitos com microestrutura periódica (NEMAT-NASSER e HORI, 1999). A formulação tem como base o método da inclusão equivalente (ESHELBY, 1957) e utiliza expansões em séries de Fourier para representação dos campos de grandezas periódicas envolvidas no processo de homogeneização da célula unitária de repetição. A incorporação desta formulação analítica neste trabalho tem como objetivo a geração de resultados que sirvam de comparação com aqueles obtidos pela Teoria de Volumes Finitos.

Considere a célula de repetição mostrada na Figura 2.7, cujo volume é $\Omega = 8a_1a_2a_3$. O volume da inclusão é Ω_f .

Figura 2.7 - Dimensões da célula unitária de repetição.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

O campo de temperatura flutuante presente na Equação (2.2) pode ser escrito na forma de série de Fourier devido à sua periodicidade:

$$\tilde{T}(\mathbf{y}) = \sum_{\xi}^{\pm\infty} \bar{T}(\xi) e^{i\xi^T \mathbf{y}} \quad (2.45)$$

sendo os coeficientes da série definidos por

$$\bar{T}(\xi) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{T}(\mathbf{y}) e^{-i\xi^T \mathbf{y}} d\Omega \quad (2.46)$$

na qual $\xi = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3]^T$ e $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T$.

As componentes do vetor ξ são calculadas com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\pi n_1}{a_1} & n_1 &= 0; \pm 1; \dots; \pm\infty \\ \xi_2 &= \frac{\pi n_2}{a_2} & n_2 &= 0; \pm 1; \dots; \pm\infty \\ \xi_3 &= \frac{\pi n_3}{a_3} & n_3 &= 0; \pm 1; \dots; \pm\infty \end{aligned} \quad (2.47)$$

Derivando a Equação (2.45) em relação às coordenadas cartesianas, obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{y}} = \sum_{\xi}^{\pm\infty} i\tilde{T}(\xi)\xi e^{i\xi^T \mathbf{y}} \quad (2.48)$$

e considerando que

$$\bar{\mathbf{G}}(\xi) = i\tilde{T}(\xi)\xi \quad (2.49)$$

a expressão (2.48) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) = \sum_{\xi}^{\pm\infty} \bar{\mathbf{G}}(\xi) e^{i\xi^T \mathbf{y}} \quad (2.50)$$

No contexto de homogeneização térmica, o método da inclusão equivalente tem como base a equivalência entre os dois sistemas mostrados na Figura 2.8, em que o sistema 1 corresponde à célula unitária real, enquanto que o sistema 2 consiste na célula unitária homogênea, constituída somente pelo material da matriz. O problema associado ao método é a determinação da função gradiente de transformação $\mathbf{G}^*(\mathbf{y})$ que imposta no domínio da inclusão no sistema 2 produza a equivalência dos dois sistemas da Figura 2.8. Tendo em vista a periodicidade de $\mathbf{G}^*(\mathbf{y})$, a seguinte expressão pode ser estabelecida:

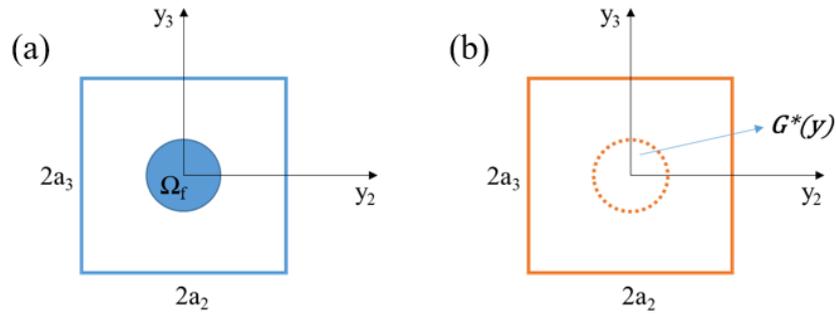
$$\mathbf{G}^*(\mathbf{y}) = \sum_{\xi}^{\pm\infty} \bar{\mathbf{G}}^*(\xi) e^{i\xi^T \mathbf{y}} \quad (2.51)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{G}}^*(\xi) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{G}^*(\mathbf{y}) e^{-i\xi^T \mathbf{y}} d\Omega \quad (2.52)$$

com $\mathbf{G}^*(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ para \mathbf{y} fora da inclusão.

Figura 2.8 - (a) Célula unitária real e (b) célula unitária homogênea.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Para \mathbf{y} pertencente ao domínio da inclusão, as seguintes expressões podem ser escritas para os sistemas 1 e 2:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = -\mathbf{K}_f \mathbf{G}(\mathbf{y}) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = -\mathbf{K}_m [\mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}^*(\mathbf{y})] \quad (2.54)$$

nas quais \mathbf{K}_m e \mathbf{K}_f são as matrizes de condutividade térmica da matriz e da inclusão, respectivamente.

A equação de consistência estabelecida pelo método da inclusão equivalente é a seguinte:

$$-\mathbf{K}_f \mathbf{G}(\mathbf{y}) = -\mathbf{K}_m [\mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}^*(\mathbf{y})] \quad (2.55)$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{K}_f [\mathbf{G}^0 + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y})] = \mathbf{K}_m [\mathbf{G}^0 + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}^*(\mathbf{y})] \quad (2.56)$$

de onde resulta, explicitando-se a função gradiente de transformação, a expressão a seguir

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{y}) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_m^{-1} \mathbf{K}_f) [\mathbf{G}^0 + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y})] \quad (2.57)$$

A Equação (2.54) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = -\mathbf{K}_m[\mathbf{G}^0 + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}^*(\mathbf{y})] \quad (2.58)$$

Substituindo a Equação (2.58) na equação de balanço de fluxo de calor, admitindo a ausência de uma fonte interna de calor, e utilizando as derivadas das expressões (2.48) e (2.51), obtém-se:

$$\bar{\tilde{T}}(\xi) = -\frac{i\xi^T \mathbf{K}_m \bar{\mathbf{G}}^*}{\xi^T \mathbf{K}_m \xi} \quad (2.59)$$

a qual é válida para $\xi \neq \mathbf{0}$. Logo, a Equação (2.49) assume a forma

$$\bar{\tilde{\mathbf{G}}}(\xi) = \frac{\xi^T \mathbf{K}_m \bar{\mathbf{G}}^*}{\xi^T \mathbf{K}_m \xi} \xi \quad (2.60)$$

e, conseqüentemente, a expressão (2.50) pode ser escrita como

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) = \sum_{\xi}^{\pm\infty} \mathbf{P}'(\xi) \mathbf{K}_m \bar{\mathbf{G}}^* e^{i\xi^T \mathbf{y}} \quad (2.61)$$

em que

$$\mathbf{P}'(\xi) = \frac{\xi \xi^T}{\xi^T \mathbf{K}_m \xi} \quad (2.62)$$

Substituindo a Equação (2.52) em (2.61) é obtida a seguinte expressão:

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) = \sum_{\xi}^{\pm\infty} \mathbf{P}'(\xi) \mathbf{K}_m \frac{\langle \mathbf{G}^* \rangle}{\Omega} \left(\int_{\Omega_f} e^{-i\xi^T \mathbf{y}} d\Omega_f \right) e^{i\xi^T \mathbf{y}} \quad (2.63)$$

em que se considerou o valor médio da função gradiente de transformação. O uso do valor médio da função de transformação consiste em uma simplificação usual, como proposto em Nemat-Nasser, Iwakuma e Hejazi (1982) na homogeneização de propriedades elásticas de

compósitos periódicos. Ressalta-se que nesta última referência são apresentadas outras propostas para avaliação da referida função.

O valor médio de $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y})$ no domínio da inclusão é definido pela relação:

$$\langle \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{\Omega_f} \int_{\Omega_f} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) d\Omega_f \quad (2.64)$$

que, considerando a Equação (2.63), resulta em

$$\langle \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{\Omega_f} \int_{\Omega_f} \sum_{\xi}^{\pm\infty} \mathbf{P}'(\xi) \mathbf{K}_m \frac{\langle \mathbf{G}^* \rangle}{\Omega} g_0(-\xi) e^{i\xi^T \mathbf{y}} d\Omega_f \quad (2.65)$$

e pode ser reescrita na forma

$$\langle \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \rangle = \sum_{\xi}^{\pm\infty} \mathbf{P}'(\xi) \mathbf{K}_m \langle \mathbf{G}^* \rangle \frac{g_0(-\xi)}{\Omega_f} \frac{g_0(\xi)}{\Omega} \quad (2.66)$$

em que

$$g_0(\xi) = \int_{\Omega_f} e^{i\xi^T \mathbf{y}} d\Omega_f \quad (2.67)$$

Sendo $f_v = \Omega_f/\Omega$ a fração volumétrica de inclusões, a Equação (2.66) pode ser escrita como

$$\langle \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \rangle = \sum_{\xi}^{\pm\infty} f_v \left[\mathbf{P}'(\xi) \mathbf{K}_m \frac{g_0(-\xi)}{\Omega_f} \frac{g_0(\xi)}{\Omega_f} \right] \langle \mathbf{G}^* \rangle \quad (2.68)$$

ou, ainda,

$$\langle \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) \rangle = \mathbf{P} \mathbf{K}_m \langle \mathbf{G}^* \rangle \quad (2.69)$$

sendo

$$\mathbf{P} = \sum_{\xi} f(\xi) \mathbf{P}'(\xi) \quad (2.70)$$

e

$$f(\xi) = f_v \frac{g_0(\xi) g_0(-\xi)}{V_{\Omega} V_{\Omega}} \quad (2.71)$$

O somatório da Equação (2.70) inclui todas as combinações de (n_1, n_2, n_3) , exceto $(0,0,0)$.

Considerando a condição de consistência em termos médios, tem-se a seguinte expressão:

$$-\mathbf{K}_f(\mathbf{G}^0 + \langle \tilde{\mathbf{G}} \rangle) = -\mathbf{K}_m(\mathbf{G}^0 + \langle \tilde{\mathbf{G}} \rangle - \langle \mathbf{G}^* \rangle) \quad (2.72)$$

que, introduzindo a Equação (2.69), resulta em

$$\mathbf{K}_f(\mathbf{G}^0 + \mathbf{P}\mathbf{K}_m\langle \mathbf{G}^* \rangle) = \mathbf{K}_m(\mathbf{G}^0 + \mathbf{P}\mathbf{K}_m\langle \mathbf{G}^* \rangle - \langle \mathbf{G}^* \rangle) \quad (2.73)$$

Usando-se a Equação (2.73), chega-se à seguinte relação:

$$\langle \mathbf{G}^* \rangle = \mathbf{K}_m^{-1} \left[(\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_f)^{-1} - \mathbf{P} \right]^{-1} \mathbf{G}^0 \quad (2.74)$$

O fluxo de calor efetivo no domínio da célula unitária de repetição é definido pela expressão:

$$\mathbf{q}_{\Omega}^* = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{y}) d\Omega \quad (2.75)$$

a qual pode ser decomposta na forma

$$\mathbf{q}_{\Omega}^* = \frac{1}{\Omega} \left[- \int_{\Omega} \mathbf{K}_m \mathbf{G}^0 d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{K}_m \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) d\Omega + \int_{\Omega_f} \mathbf{K}_m \mathbf{G}^*(\mathbf{y}) d\Omega_f \right] \quad (2.76)$$

na qual a segunda integral é nula devido a periodicidade do gradiente da temperatura flutuante. Logo, avaliando-se as integrais, a Equação (2.76) é reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_{\Omega}^* = \frac{1}{\Omega} [-\mathbf{K}_m \mathbf{G}^0 \Omega - \mathbf{K}_m \mathbf{G}^* \Omega_f] \quad (2.77)$$

Substituindo a Equação (2.31) em (2.77), obtém-se a seguinte expressão:

$$-\mathbf{K}^* \mathbf{G}^0 = -\mathbf{K}_m \mathbf{G}^0 + f_v \mathbf{K}_m \mathbf{G}^* \quad (2.78)$$

que, considerando a Equação (2.74), assume a forma

$$-\mathbf{K}^* \mathbf{G}^0 = -\mathbf{K}_m \mathbf{G}^0 + f_v \left[(\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_f)^{-1} - \mathbf{P}(\xi) \right]^{-1} \mathbf{G}^0 \quad (2.79)$$

A partir da Equação (2.79), a matriz de condutividade térmica efetiva do compósito pode ser avaliada pela relação

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_m - f_v \left[(\mathbf{K}_m - \mathbf{K}_f)^{-1} - \mathbf{P}(\xi) \right]^{-1} \quad (2.80)$$

De acordo com Nemat-Nasser, Iwakuma e Hejazi (1982), o fator geométrico $g_0(\xi)$ para o caso de inclusão cilíndrica pode ser calculado analiticamente pela expressão a seguir:

$$\frac{g_0(\xi)}{\Omega_f} = \frac{2J_1(\zeta)}{\zeta} \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{2}\chi\right)}{\frac{1}{2}\chi} \quad (2.81)$$

em que J_1 é a função de Bessel de primeira espécie. As variáveis ζ e χ têm a seguinte definição:

$$\zeta = \sqrt{\frac{4\pi f_v}{L_f/L} \sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \quad (2.82)$$

$$\chi = 2\pi \frac{L_f}{L} n_1 \quad (2.83)$$

em que f_v é a fração volumétrica de fibras, L_f e L representam o comprimento da fibra e da célula unitária, respectivamente. No caso de inclusões cúbicas, o fator geométrico é calculado da seguinte forma:

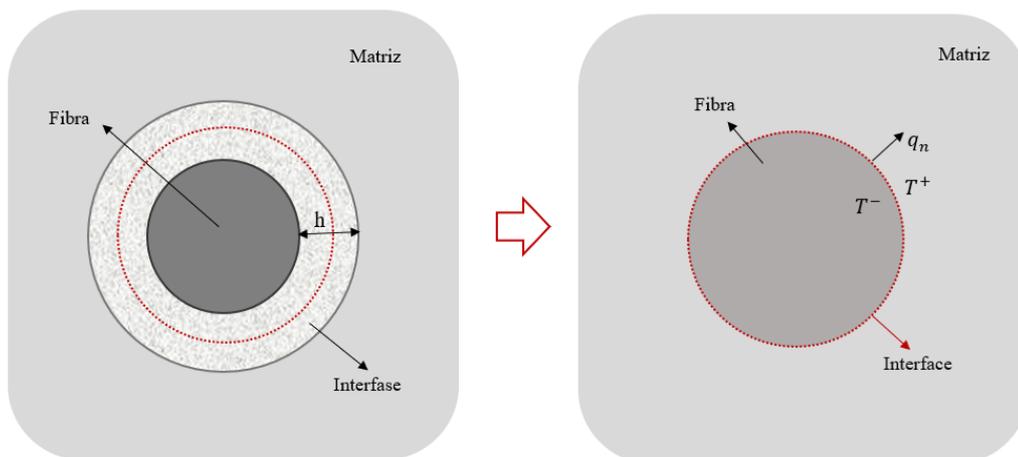
$$\frac{g_0(\xi)}{\Omega_f} = \frac{\text{sen}(d\xi_1)\text{sen}(d\xi_2)\text{sen}(d\xi_3)}{(d\xi_1)(d\xi_2)(d\xi_3)} \quad (2.84)$$

onde d representa o comprimento do lado da inclusão (NEMAT-NASSER; YU; HORI, 1993).

2.4 Elemento de interface imperfeita

O elemento de interface imperfeita utilizado nas análises bidimensionais foi apresentado por Escarpini Filho (2015) e tem como base o modelo proposto em Benveniste (2006). Nesse modelo, uma interfase fina de espessura h é substituída por uma interface imperfeita, localizada na superfície média da interfase como mostrado na Figura 2.9.

Figura 2.9 - Substituição da interfase por uma interface imperfeita.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na formulação deste elemento de interface considera-se que existe apenas descontinuidade de temperatura entre a matriz e a fibra. Hashin (2001) provou que uma interfase fina cuja condutividade é muito menor do que a condutividade das outras fases pode produzir uma descontinuidade finita no campo de temperatura. Logo, apenas interfases pouco condutoras são analisadas com a formulação aqui apresentada.

A descontinuidade de temperatura na interface é calculada pela seguinte expressão:

$$T_+ - T_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i} \right) q_n \quad (2.85)$$

em que k_m , k_f e k_i são as condutividades da matriz, fibra e interfase, respectivamente. Considerando a representação em duas escalas do campo de temperatura na CUR (Equação (2.2)) e que a descontinuidade da temperatura macroscópica é nula ao longo da interface, a Equação (2.85) toma a forma

$$\tilde{T}_+ - \tilde{T}_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i} \right) q_n \quad (2.86)$$

a partir da qual resulta

$$\langle \tilde{T}_2 \rangle - \langle \tilde{T}_1 \rangle = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i} \right) \langle q_n \rangle \quad (2.87)$$

onde $\langle \tilde{T}_2 \rangle$ e $\langle \tilde{T}_1 \rangle$ são as temperaturas flutuantes médias nas faces adjacentes à interface e $\langle q_n \rangle$ é o fluxo de calor normal médio através da interface. Vale observar que para efeito de modelagem, a interface é discretizada na forma de segmentos de retas.

A relação entre o fluxo de calor médio nas faces adjacentes à interface é a seguinte:

$$\langle q_n \rangle^{(1)} = -\langle q_n \rangle^{(2)} = -\langle q_n \rangle \quad (2.88)$$

a qual, considerando a Equação (2.87), fornece

$$\begin{Bmatrix} \langle q_n \rangle^{(1)} \\ \langle q_n \rangle^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \tilde{T}_1 \rangle \\ \langle \tilde{T}_2 \rangle \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

em que

$$c = \frac{2}{h} \frac{1}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i}} \quad (2.90)$$

Pela Equação (2.87), conclui-se que a matriz de condutividade térmica da interface é definida por

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Para que a influência da interfase seja computada no cálculo da condutividade térmica efetiva, é necessário modificar a Equação (2.44). Logo, considerando uma célula unitária composta por matriz, fibra e interface imperfeita, a matriz de condutividade térmica homogeneizada é dada pela seguinte relação:

$$\mathbf{K}^* = \sum_{r=1}^{N_m} k_m \bar{v}_m^{(r)} \mathbf{H}_m^{(r)} + \sum_{q=1}^{N_f} k_f \bar{v}_f^{(q)} \mathbf{H}_f^{(q)} + \sum_{l=1}^{N_i} \frac{v_i^{(l)}}{2} \left[(k_i - k_m) \mathbf{H}_{im}^{(l)} + (k_i - k_f) \mathbf{H}_{if}^{(l)} \right] \quad (2.92)$$

onde N_i indica o número de elementos de interface e $v_i^{(l)}$ representa a fração volumétrica do l -ésimo subvolume da interfase.

3 EXEMPLOS DE HOMOGENEIZAÇÃO TÉRMICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS

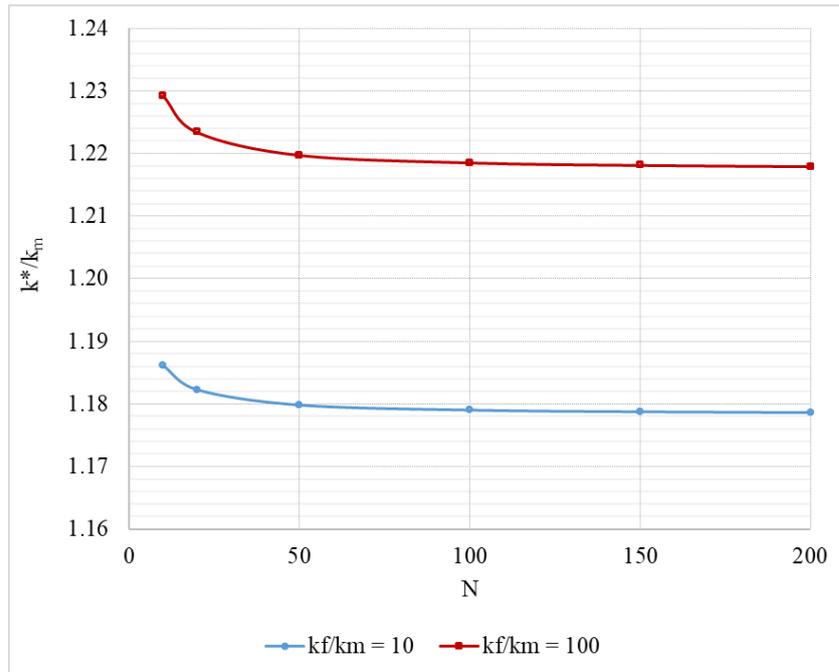
3.1 Teste de convergência da formulação em séries de Fourier

Este exemplo tem como objetivo analisar a formulação analítica apresentada na Seção 2.3 no que diz respeito à convergência de resultados em função do número de termos das séries de Fourier empregadas para representação dos campos de grandezas periódicas envolvidos no processo de homogeneização térmica. Para isso, a condutividade térmica efetiva de um compósito periódico com fibras longas é avaliada para dois valores de k_f/k_m : 10 e 100, considerando frações volumétricas de fibras (f_v) iguais a 10% e 60%.

O número total de termos de uma série de Fourier truncada é igual a $(2N + 1)$. Aqui, para avaliar a convergência dos resultados são usados os seguintes valores de N : 10, 20, 50, 100, 150 e 200.

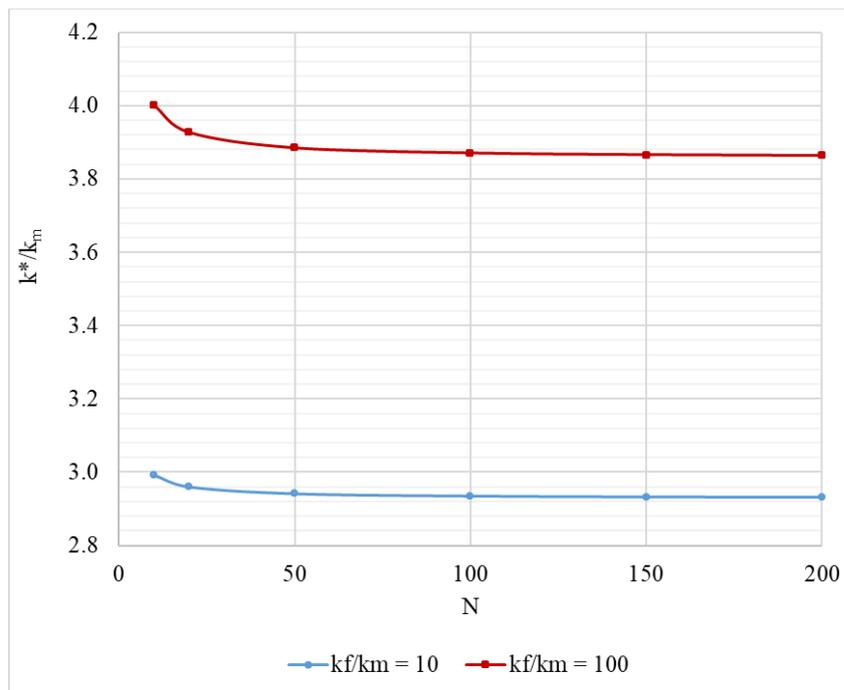
De acordo com os resultados apresentados nas Figura 3.1 e Figura 3.2, nota-se que a convergência acontece mais rapidamente quando k_f/k_m é igual a 10, ou seja, para o menor contraste entre as condutividades das fases. Percebe-se também a influência da fração volumétrica de fibras pela diferença entre os valores de k^*/k_m para cada N . Os resultados encontrados para os casos analisados sugerem que para N acima de 150 os valores da condutividade térmica efetiva apresentam uma satisfatória estabilidade, ou seja, exibem uma aceitável convergência. Com base neste resultado, nos exemplos que seguem, adota-se $N = 150$.

Figura 3.1 - Condutividade térmica efetiva para fração volumétrica de fibras igual a 10%.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 3.2 - Condutividade térmica efetiva para fração volumétrica de fibras igual a 60%.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

3.2 Exemplos de compósitos com fibras curtas alinhadas

Nesta seção são apresentados exemplos que avaliam a condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por fibras curtas alinhadas periodicamente distribuídas. Nos exemplos são estudadas as influências da fração volumétrica de fibras, da relação entre a condutividade térmica da matriz e da fibra, assim como da razão de aspecto da fibra e do grau de anisotropia das mesmas. A influência da presença e das propriedades de interfase entre matriz e fibra também é avaliada.

Nestes exemplos, a relação entre as condutividades térmicas da fibra e da matriz é denominada $\alpha = k_f/k_m$. A razão de aspecto da célula unitária é designada por $a = L/D$, em que L e D são o comprimento e a largura da CUR, respectivamente. Os dados geométricos relativos às malhas tridimensionais de subvolumes hexaédricos são gerados a partir de uma malha bidimensional de subvolumes quadrilaterais que é repetida ao longo do eixo y_1 . Por fim, os resultados são apresentados de forma adimensionalizada com relação à condutividade da matriz.

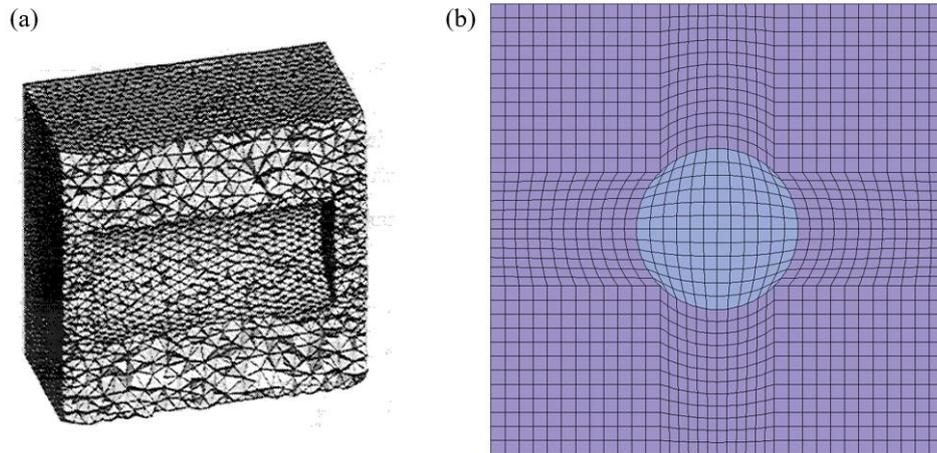
Exemplo 3.2.1 - Influência da razão de aspecto da fibra.

Neste exemplo calcula-se a condutividade térmica efetiva de um compósito cuja fração volumétrica (f_v) é igual a 10%. Deseja-se verificar a influência da razão de aspecto da fibra $\rho = L_f/d_f$, em que L_f e d_f são o comprimento e o diâmetro da fibra, respectivamente.

Considera-se uma célula unitária de repetição cúbica e dois valores de α : 2 e 100. Os resultados são comparados com aqueles obtidos por Matt e Cruz (2001) que utilizaram uma formulação micromecânica baseada no Método dos Elementos Finitos.

Na Figura 3.3 (a) é mostrada a seção transversal no plano y_1 - y_3 da malha de elementos finitos tetraédricos usada em Matt e Cruz (2001) de onde foi retirado o volume referente à fibra. Neste caso foram utilizados 106861 elementos finitos. A Figura 3.3 (b) apresenta a malha bidimensional de subvolumes quadrilaterais a partir da qual foram gerados os dados relativos a uma malha tridimensional com 54756 subvolumes hexaédricos.

Figura 3.3 - (a) Seção transversal no plano y_1 - y_3 da malha de elementos finitos tetraédricos e (b) Malha bidimensional de subvolumes quadrilaterais.



Fonte: (a) Matt e Cruz, 2001 (b) elaborada pela autora, 2018.

Na Tabela 3.1 são mostrados os valores de condutividade térmica efetiva na direção longitudinal das fibras k_L^* , enquanto a Tabela 3.2 apresenta os valores correspondentes à direção transversal k_T^* . Como observado, os erros percentuais dos resultados obtidos pela TVF em relação àqueles alcançados com o MEF são menores do que 1%. Logo, existe uma boa concordância entre os resultados obtidos com as formulações citadas.

Tabela 3.1 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal

ρ	$\alpha = 2$			$\alpha = 100$		
	MEF	TVF	Erro (%)	MEF	TVF	Erro (%)
0,5	1,070	1,069	0,09	1,249	1,241	0,64
1,0	1,079	1,079	0,00	1,420	1,408	0,85
2,5	1,095	1,096	0,09	2,913	2,891	0,76
2,802	1,100	1,100	0,00	10,900	10,873	0,25

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Tabela 3.2 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal

ρ	$\alpha = 2$			$\alpha = 100$		
	MEF	TVF	Erro (%)	MEF	TVF	Erro (%)
0,5	1,082	1,082	0,00	1,475	1,471	0,27
1,0	1,077	1,076	0,09	1,338	1,335	0,22
2,5	1,070	1,070	0,00	1,234	1,234	0,00
2,802	1,069	1,069	0,00	1,217	1,216	0,08

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Quando a razão de aspecto da fibra é igual a 2,802 as superfícies planas extremas da fibra ficam tangentes às faces da célula unitária cúbica. Dessa forma, esse caso corresponde a um compósito reforçado por fibras contínuas.

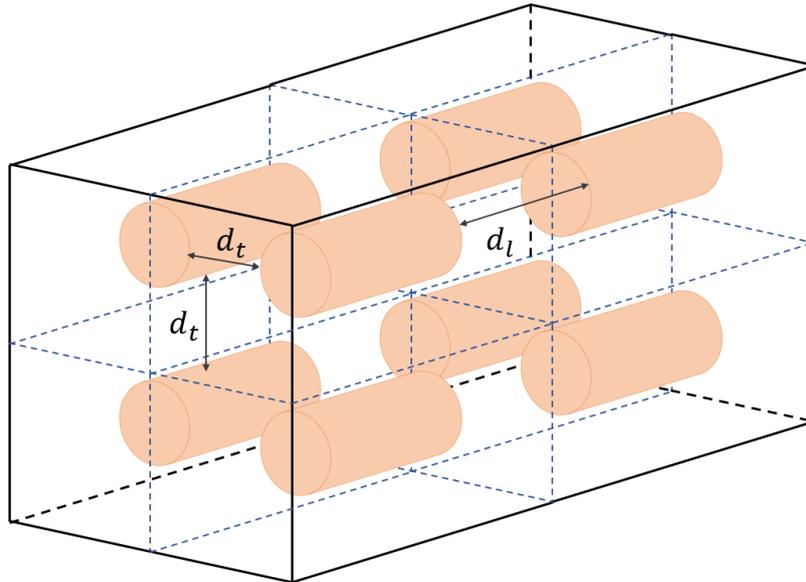
Quando α vale 2, a condutividade térmica efetiva apresenta pequena variação com o aumento da razão de aspecto da fibra. Entre os valores mínimo e máximo adotados para ρ , a condutividade efetiva aumenta aproximadamente 2,8% na direção longitudinal e diminui 1,2% na direção transversal.

Para α igual a 100, ou seja, quando a fibra é muito mais condutiva do que a matriz, a condutividade efetiva na direção longitudinal aumenta significativamente com o crescimento da razão de aspecto da fibra. Quando ρ passa de 0,5 para 2,5, a condutividade aumenta em aproximadamente 130%. Para ρ igual a 2,802, ou seja, quando a fibra passa de curta para longa, o crescimento da condutividade é igual a aproximadamente 270%. Por sua vez, a condutividade efetiva na direção transversal varia relativamente pouco, diminuindo seu valor em quase 18% no total.

Como a fração volumétrica e o raio da fibra se mantêm constantes, o crescimento de ρ implica no aumento do comprimento da fibra, o que resulta na diminuição da distância entre as fibras na direção longitudinal (d_l). Com isso, existe menos matriz entre as fibras servindo como barreira para a condutividade térmica na direção longitudinal. A Figura 3.4 mostra a distância nas direções longitudinal e transversal entre as fibras de células unitárias vizinhas.

Para manter a fração volumétrica e o raio da fibra constantes mesmo com o aumento do comprimento da mesma, os lados da CUR cúbica precisam ser aumentados. Isso corresponde ao crescimento da distância entre as fibras na direção transversal (d_t) e, então, ao aumento da quantidade de matriz entre as fibras. Dessa forma, cresce a barreira entre as fibras e, conseqüentemente, tende-se a uma diminuição da condutividade térmica na direção transversal.

Figura 3.4 – Distância nas direções longitudinal (d_l) e transversal (d_t) entre as fibras de células unitárias vizinhas.



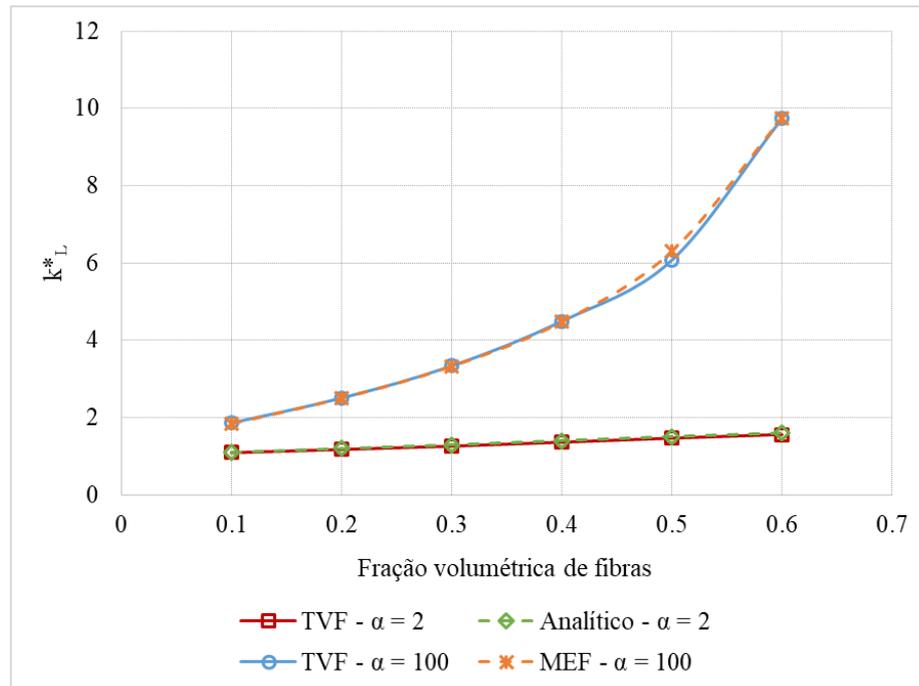
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 3.2.2 - Influência da fração volumétrica de fibras.

O objetivo deste exemplo é avaliar a influência da fração volumétrica de fibras na condutividade térmica efetiva de um compósito com fibras curtas de raio igual a $8 \mu\text{m}$ e $160 \mu\text{m}$ de comprimento. Neste caso é utilizada uma célula unitária de repetição paralelepípedica. A fração volumétrica das fibras é admitida variando entre 10% e 60% e são considerados valores de α iguais a 2 e 100. Os resultados obtidos pela TVF para $\alpha = 2$ são comparados com a formulação analítica em séries de Fourier com N igual a 150. No caso de $\alpha = 100$, a comparação é feita com os resultados apresentados por Matt e Cruz (2006), onde foi utilizada uma formulação micromecânica baseada no Método dos Elementos Finitos.

De acordo com a Figura 3.5, percebe-se que a condutividade efetiva na direção longitudinal cresce juntamente com o aumento da fração volumétrica de fibras. Para α igual a 2, a condutividade aumenta 43% no intervalo de f_v considerado, enquanto que para α igual a 100, o crescimento é de aproximadamente 420%. Os resultados obtidos com TVF são coincidentes com aqueles alcançados com formulação analítica e MEF.

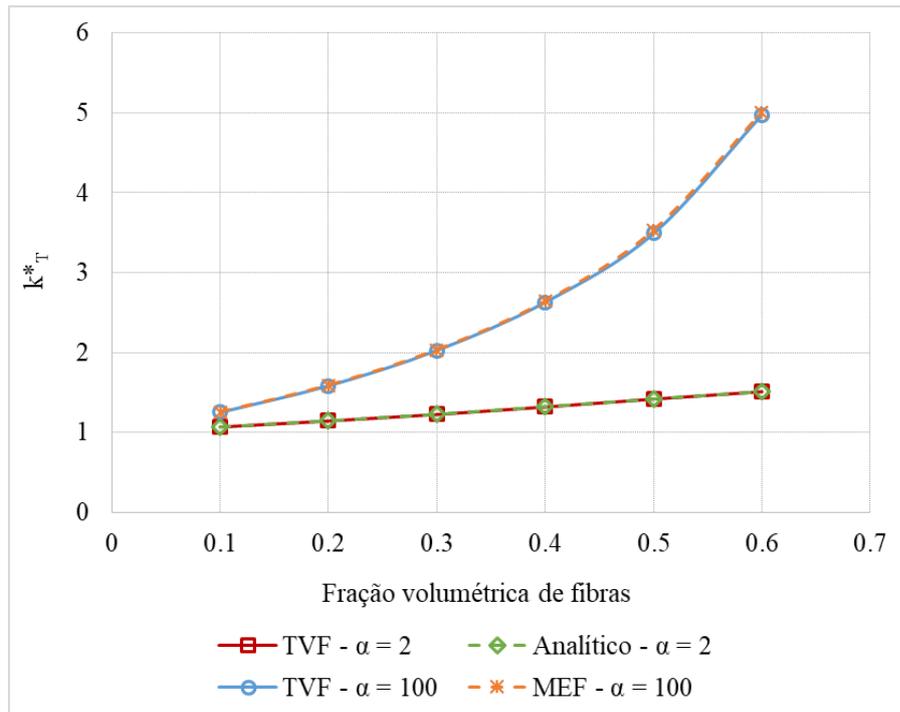
Figura 3.5 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A condutividade térmica efetiva na direção transversal é mostrada na Figura 3.6 onde nota-se seu crescimento com o aumento da fração volumétrica de fibras. Neste caso, a condutividade efetiva cresceu no total aproximadamente 40% para α igual a 2 e quase 300% para α igual a 100.

Figura 3.6 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função da fração volumétrica de fibras.



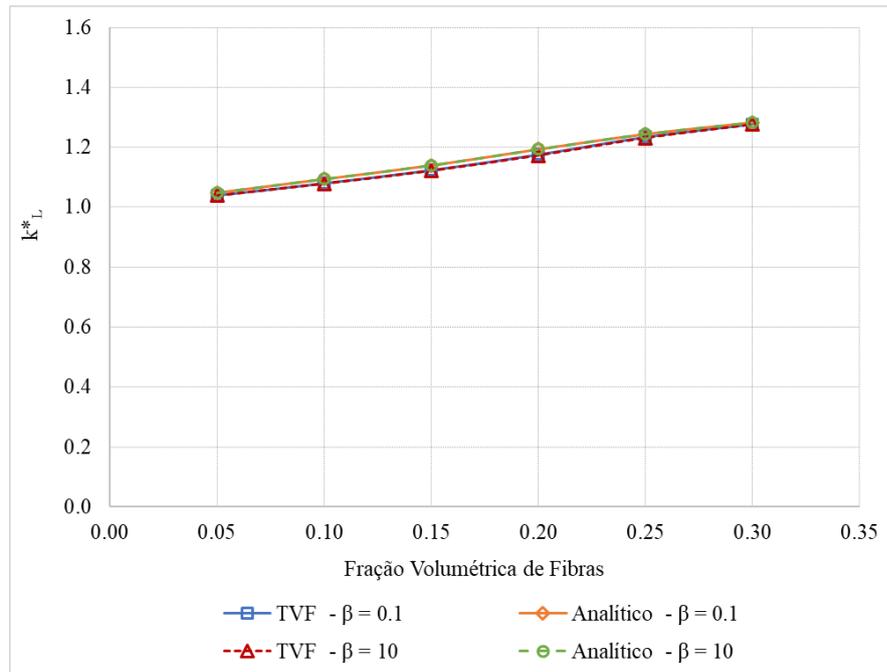
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 3.2.3 - Influência da fração volumétrica de fibras transversalmente isotrópicas.

Neste exemplo é investigado o efeito da fração volumétrica de fibras sobre a condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por fibras curtas transversalmente isotrópicas. A razão entre a condutividade da fibra na direção longitudinal $k_{f,L}$ e a condutividade na direção transversal $k_{f,T}$ é denominada $\beta = k_{f,L}/k_{f,T}$. Os seguintes valores de β são considerados: 0,1 e 10. O valor adotado para $\alpha = k_{f,L}/k_m$ é igual a 2 e a fração volumétrica de fibras é admitida variando de 5% a 30%. Os resultados gerados com a TVF são comparados com aqueles correspondentes à formulação em séries de Fourier na qual N é igual a 150.

A condutividade térmica efetiva na direção longitudinal praticamente não é afetada pela mudança de β pois apenas o valor de $k_{f,T}$ é alterado. De acordo com os resultados mostrados na Figura 3.7, k_L^* apresenta crescimento total de aproximadamente 22% e as duas técnicas utilizadas apresentam boa concordância.

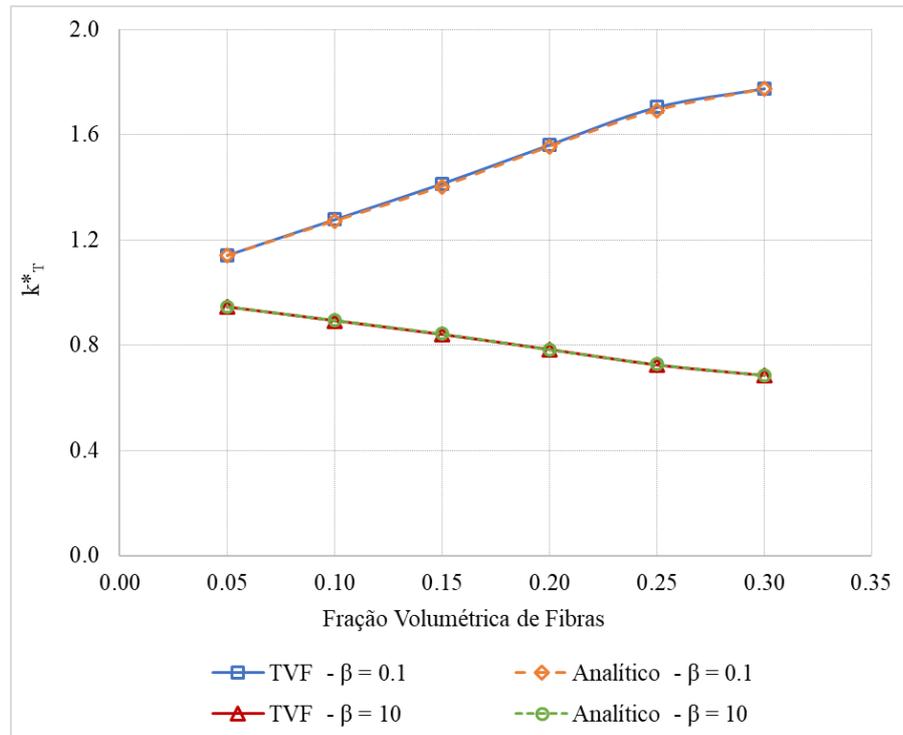
Figura 3.7 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na Figura 3.8 é mostrado como a condutividade térmica efetiva na direção transversal é fortemente afetada pela variação de β . Quando β vale 10, k_T^* diminui na medida em que decresce a fração volumétrica, pois, nesse caso, a condutividade da fibra na direção transversal é menor do que a condutividade da matriz. Para β igual a 0,1, k_T^* aumenta devido ao fato de a condutividade da fibra ser maior do que a matriz. Os resultados numéricos e analíticos apresentam boa concordância nesse caso, independentemente da fração volumétrica de fibras.

Figura 3.8 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função da fração volumétrica de fibras.



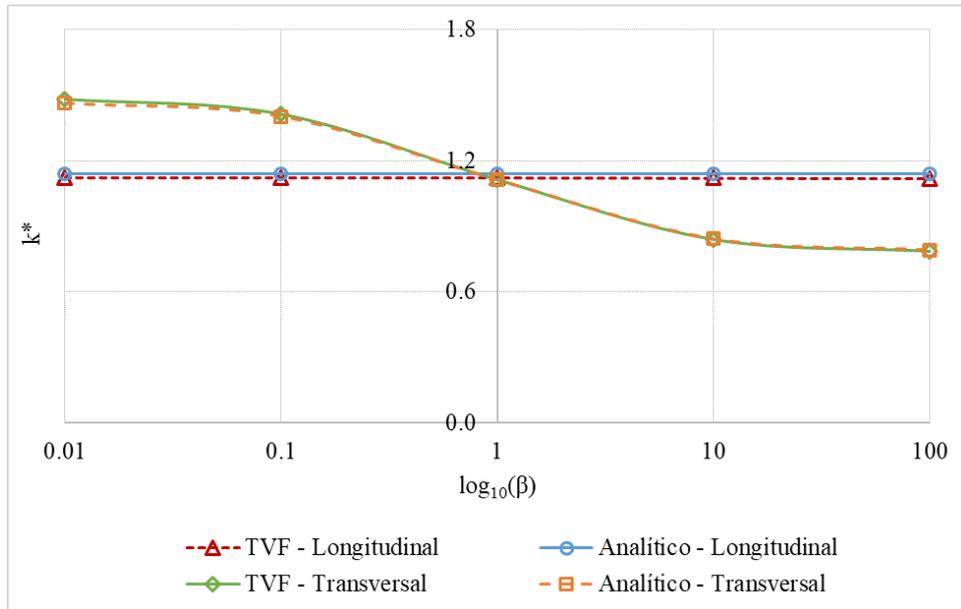
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 3.2.4 - Influência do grau de anisotropia da fibra.

O objetivo deste exemplo é avaliar a influência do grau de anisotropia da fibra na condutividade térmica do compósito. A fração volumétrica de fibras é igual a 15%, o valor de α é igual a 2 e a razão de aspecto da fibra vale 5. Consideram-se os seguintes valores de β : 0,01; 0,1; 1; 10 e 100.

Como mostrado na Figura 3.9, a condutividade térmica efetiva na direção longitudinal não é afetada pela mudança no grau de anisotropia da fibra pois apenas o valor de $k_{f,T}$ varia. A condutividade térmica efetiva na direção transversal apresenta simetria de resultados com relação à condutividade da matriz. Para β igual a 0,01 e 0,1, $k_{f,T}$ é maior do que k_m , logo a condutividade efetiva aumenta para esses casos. Quando os valores de β são 10 e 100, k_T^* diminui, pois, a condutividade da fibra na direção transversal é menor do que a condutividade da matriz.

Figura 3.9 - Condutividade térmica efetiva em função do grau de anisotropia da fibra.



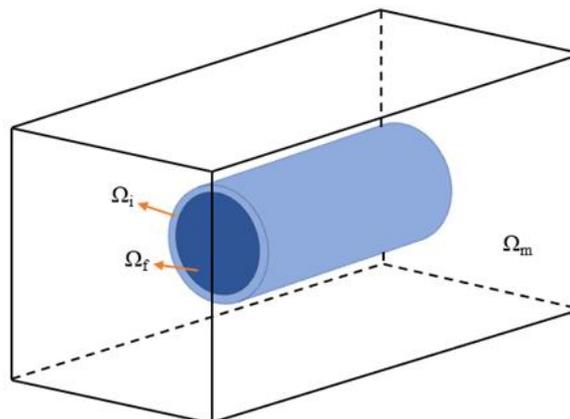
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 3.2.5 - Influência da condutividade da interfase.

Neste exemplo é avaliada a influência da condutividade da interfase na condutividade térmica efetiva de um compósito cuja fração volumétrica de fibras é igual a 25%. Considera-se que a fibra tem 80 μm de comprimento, 10 μm de raio e que a interfase tem espessura igual a 0,3 μm . A célula unitária utilizada é paralelepípedica com razão de aspecto igual a 3 e α vale 10.

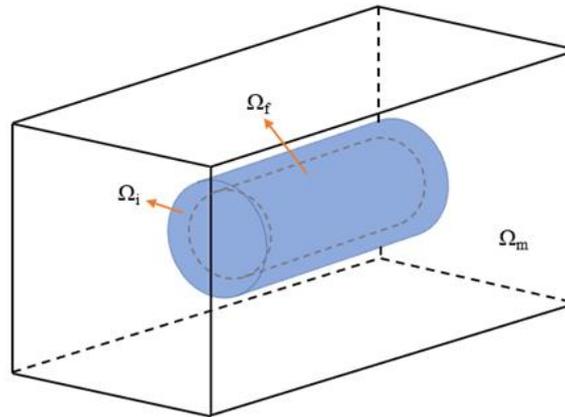
A interfase representa uma camada de revestimento da fibra e são considerados dois casos. O primeiro caso é representado na Figura 3.10 e consiste em uma fibra que não possui interfase nas faces planas. O segundo, mostrado na Figura 3.11, trata-se de fibra inteiramente revestida por interfase.

Figura 3.10 - Caso a: fibra sem interfase nas faces planas.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 3.11 - Caso b: fibra totalmente revestida por interfase.

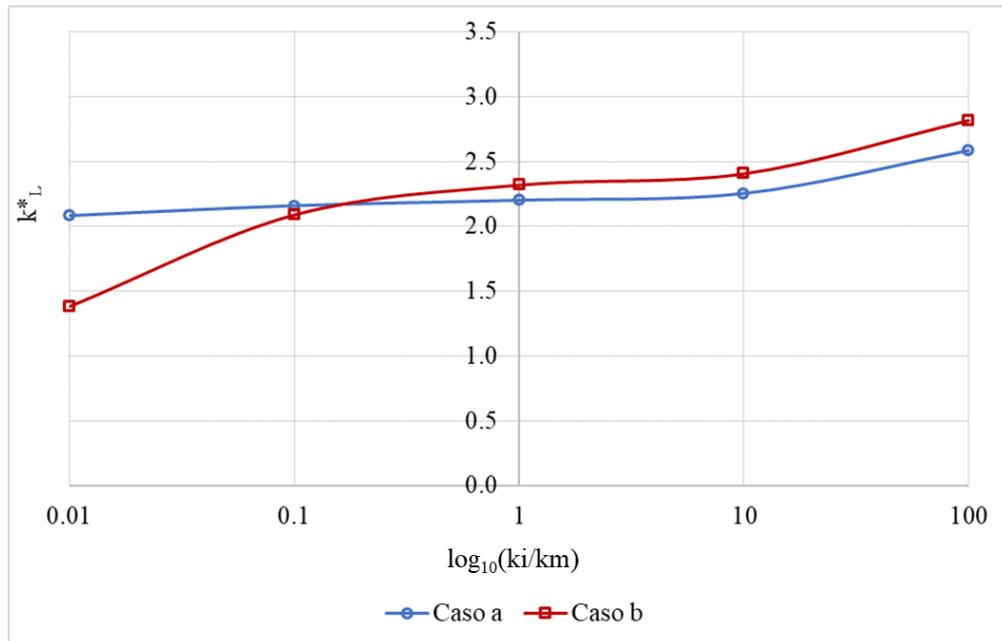


Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na Figura 3.12 é mostrada a condutividade térmica efetiva na direção longitudinal para os dois casos de revestimento da fibra em função da condutividade da interfase. O comportamento dos dois tipos de fibras é similar quando a interfase é altamente condutiva. A condutividade efetiva sofre aumento total de aproximadamente 17% no caso a de revestimento e 21%, no caso b.

No caso de interfase com baixa condutividade, k_L^* diminui juntamente com k_i , sendo esta influência maior quando a fibra é inteiramente revestida (caso b). Neste caso, a diminuição total de k_L^* é aproximadamente igual a 20%. Quando a fibra não possui revestimento nas faces planas (caso a) o decréscimo de k_L^* vale quase 8%.

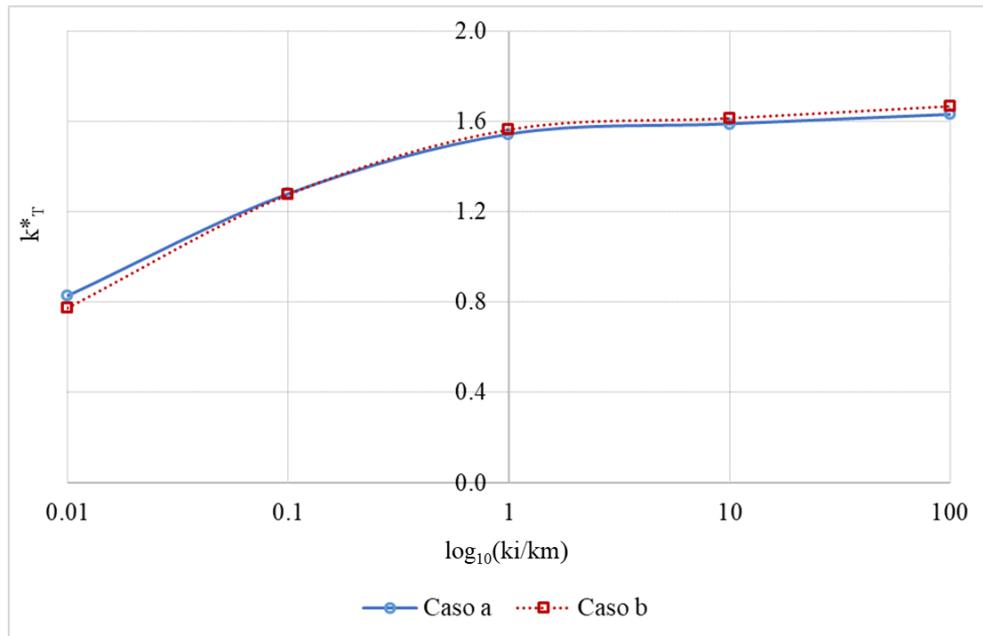
Figura 3.12 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função da condutividade da interfase.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A condutividade térmica efetiva na direção transversal é mostrada na Figura 3.13. Considerando a direção transversal, os casos (a) e (b) são praticamente idênticos, resultando em condutividade efetiva quase coincidente. Quando k_i é maior que k_m , a condutividade efetiva sofre aumento máximo de aproximadamente 6% com relação ao caso $k_i/k_m = 1$, ou seja, à situação sem interfase. No caso de interfase com baixa condutividade, k^*_T diminui juntamente com o decréscimo de k_i , chegando a uma diminuição máxima de 60%.

Figura 3.13 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função da condutividade da interfase.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 3.2.6 - Influência da razão de aspecto da fibra considerando a presença de interfase.

Neste caso estuda-se como a razão de aspecto da fibra influencia a condutividade efetiva do compósito com interfase de 1 μm de espessura. A fração volumétrica de fibras é igual a 20% e α vale 10 e 100.

As dimensões da célula unitária, assim como o comprimento da fibra para cada caso avaliado, são mostradas na Tabela 3.3. A razão de aspecto da CUR é mantida constante e igual a 3 e o raio da fibra é fixado em 10 μm .

Tabela 3.3 - Dimensões da CUR e da fibra (μm).

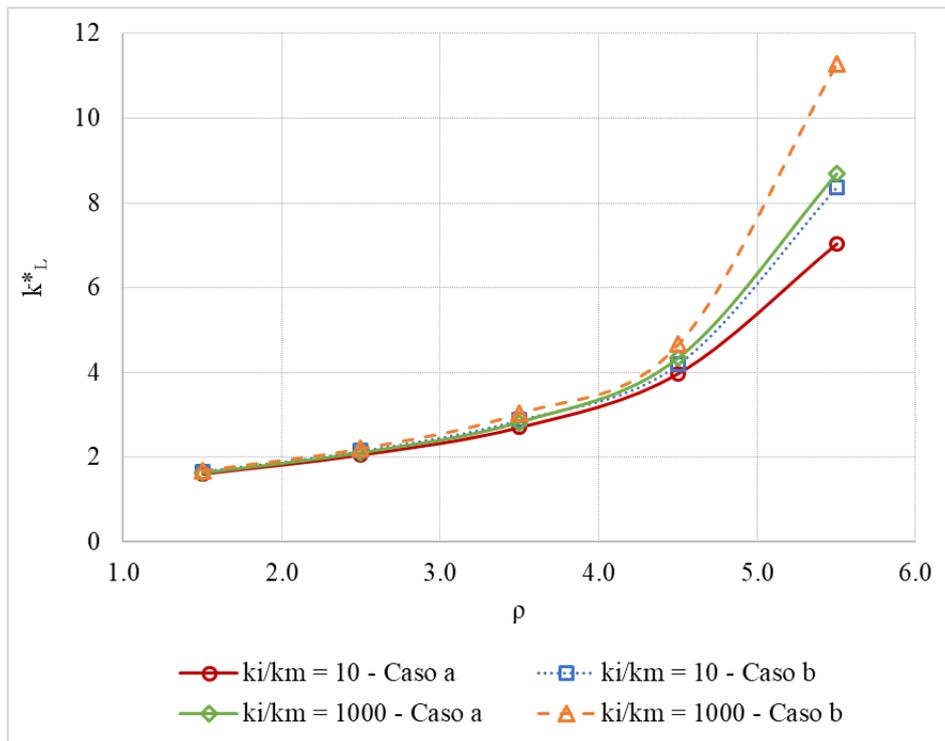
ρ	Comprimento da fibra	Largura da CUR	Comprimento da CUR
1,5	30	25,04	75,13
2,5	50	29,69	89,08
3,5	70	33,22	99,65
4,5	90	36,12	108,36
5,5	110	38,62	115,86

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na Figura 3.14 é mostrada a condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função da razão de aspecto da fibra, observando-se o aumento da condutividade efetiva com o crescimento da razão de aspecto da fibra apesar da fração volumétrica permanecer constante. Quando se considera fibra sem interfase nas faces planas (Figura 3.10), a condutividade da

interfase passa a interferir na condutividade efetiva para valores de ρ acima de 3,5. No caso de fibra totalmente revestida por interfase (Figura 3.11), a condutividade da interfase é mais relevante principalmente para o maior valor adotado para ρ .

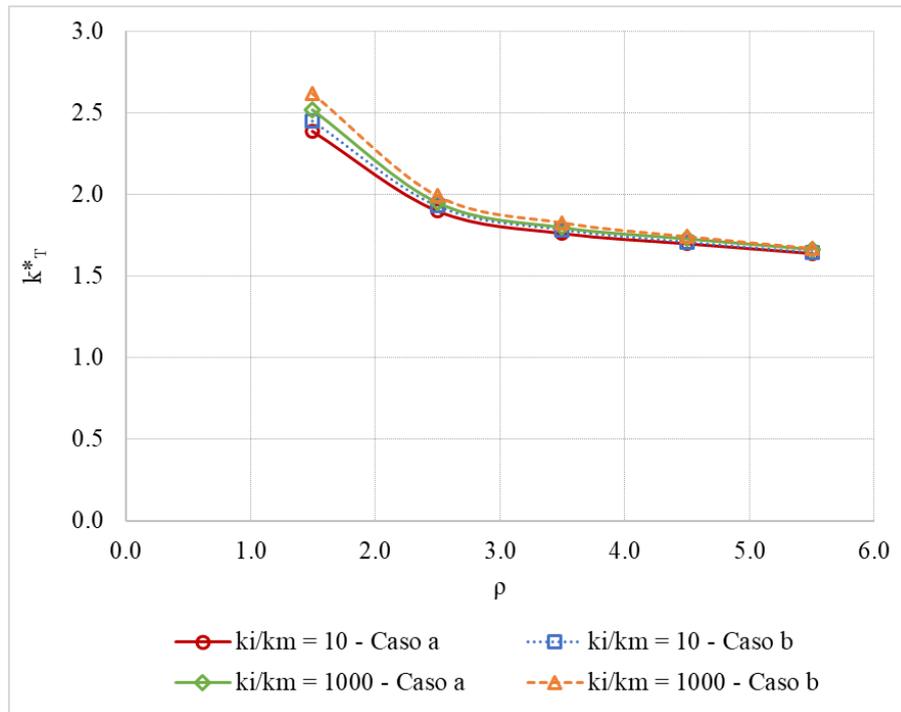
Figura 3.14 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal para os casos (a) e (b) de revestimento em função da razão de aspecto da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A Figura 3.15 apresenta a condutividade térmica efetiva na direção transversal em função da razão de aspecto da fibra considerando os dois tipos de recobrimento da fibra. Nota-se que a condutividade efetiva diminui com o aumento da razão de aspecto da fibra e sofre pouca influência da interfase, principalmente para maiores valores de ρ .

Figura 3.15 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal para os casos (a) e (b) de revestimento em função da razão de aspecto da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Considerando os dados apresentados na Tabela 3.3 percebe-se que à medida que ρ cresce, diminui a distância longitudinal entre as fibras, reduzindo o volume de matriz que atua como barreira para k_L^* . Por outro lado, quando ρ aumenta, cresce também a distância entre as fibras na direção transversal, causando diminuição de k_T^* .

Exemplo 3.2.7 - Influência do raio da fibra.

Neste exemplo verifica-se a influência do raio da fibra sobre a condutividade efetiva de compósitos com fibras curtas considerando a presença de uma interfase com 1 μm de espessura entre a matriz e a fibra. Os resultados são comparados com o caso de compósito sem interfase.

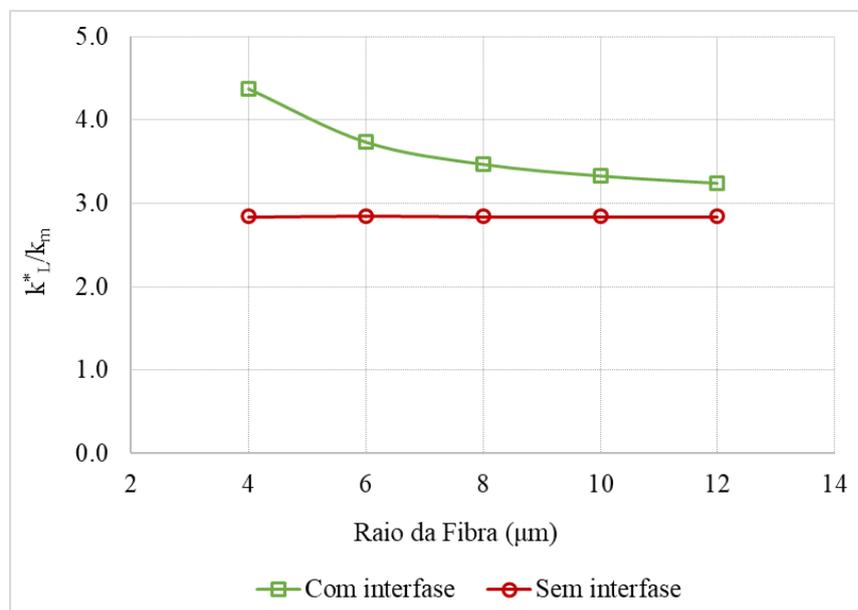
A célula unitária utilizada é paralelepípedica com razão de aspecto igual a 2. A razão de aspecto da fibra é igual a 2 e sua fração volumétrica vale 30%. A condutividade térmica dos materiais que formam o compósito é apresentada na Tabela 3.4.

Tabela 3.4 - Condutividade térmica das fases.

Material	Condutividade Térmica (W/mK)
Matriz epóxi	0,19
Fibra de Carbono	11
Interfase	5,595

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

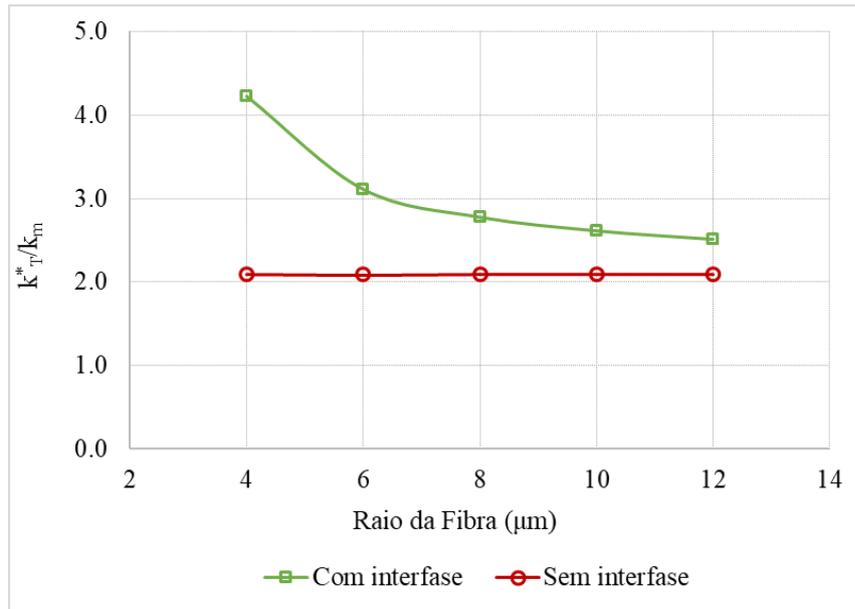
A Figura 3.16 apresenta a condutividade térmica efetiva na direção longitudinal para os raios considerados, enquanto a Figura 3.17 mostra os resultados na direção transversal. Em ambos os casos, nota-se que quando não existe interfase, a variação do raio não afeta a condutividade efetiva do compósito. Por outro lado, quando o compósito apresenta uma interfase entre matriz e fibra, a variação do raio altera a condutividade efetiva do material.

Figura 3.16 - Condutividade térmica efetiva na direção longitudinal em função do raio da fibra.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Mantendo-se a fração volumétrica constante, quanto maior o raio da fibra menor o volume total de interfase, diminuindo sua influência na condutividade efetiva. Dessa forma, fibras com raios menores apresentam k^* mais dependente de k_i . Este fato pode ser notado tanto na Figura 3.16 quanto na Figura 3.17, pois na medida em que o raio cresce, os resultados para o caso com interfase se aproximam da resposta do compósito sem interfase.

Figura 3.17 - Condutividade térmica efetiva na direção transversal em função do raio da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

3.3 Exemplos de compósitos com partículas cúbicas

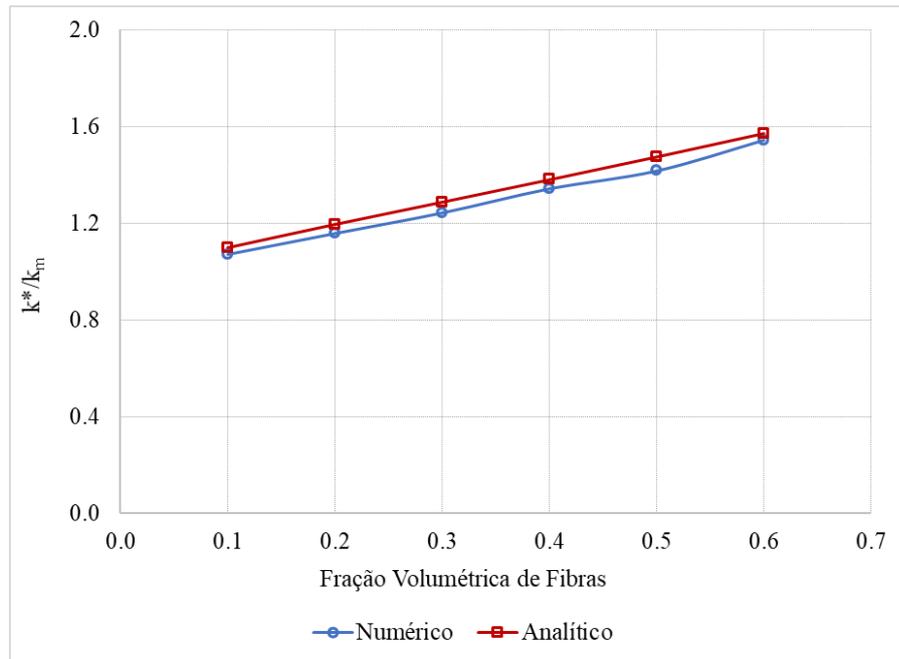
Os exemplos desta seção tratam da determinação da condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por partículas cúbicas com e sem a presença de interfase. Nos exemplos são avaliados os efeitos da fração volumétrica e do tamanho da inclusão, assim como a influência da condutividade da interfase. As células unitárias utilizadas nesta seção são cúbicas e contêm uma única inclusão.

Exemplo 3.3.1 - Influência da fração volumétrica de inclusão em compósitos sem interfase.

Neste caso, a condutividade térmica efetiva de um compósito com partículas cúbicas é calculada em função da fração volumétrica de inclusões. A inclusão possui condutividade duas vezes maior que a matriz e seus lados têm 10 μm de comprimento.

Na Figura 3.18 é mostrada a condutividade térmica efetiva calculada com TVF e com a formulação analítica em séries de Fourier.

Figura 3.18 - Condutividade térmica efetiva de compósito reforçado com partículas cúbicas sem a presença de interfase em função da fração volumétrica.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

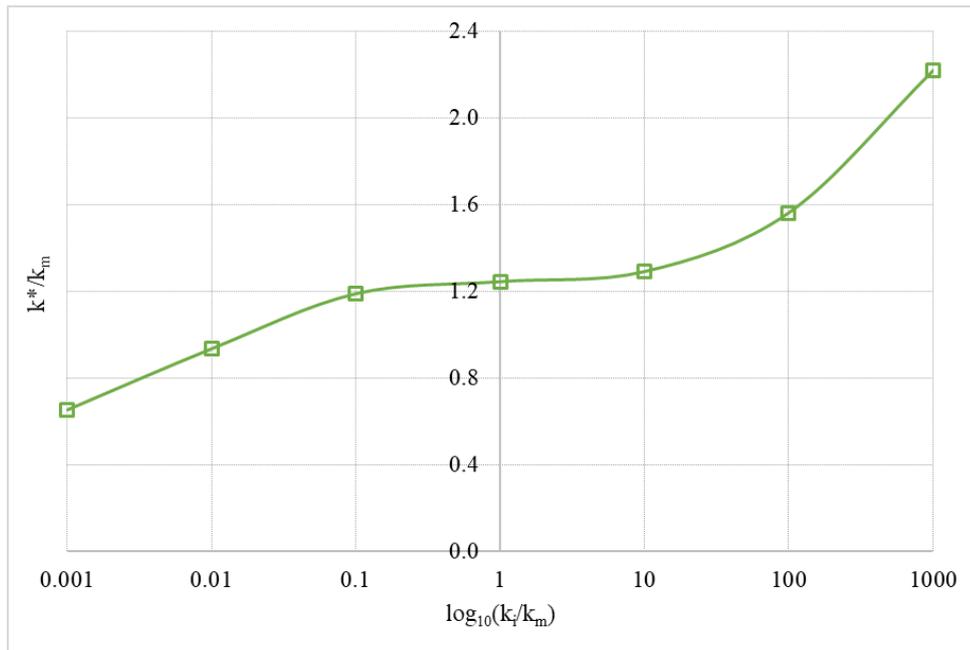
De acordo com Figura 3.18, a condutividade efetiva do compósito aumenta juntamente com a fração volumétrica de inclusões. Nota-se, também, boa concordância entre os resultados numéricos e analíticos.

Exemplo 3.3.2 - Influência da condutividade da interfase.

Neste exemplo é investigado o efeito de uma interfase com 50 nm de espessura na condutividade efetiva do compósito. A inclusão cúbica possui 10 μm de lado e sua fração volumétrica vale 30%. A relação entre as condutividades da inclusão e da matriz vale 2.

A condutividade efetiva é apresentada na Figura 3.19 para valores de k_i/k_m que variam de 0,001 até 1000.

Figura 3.19 - Condutividade térmica efetiva do compósito com inclusões cúbicas em função da condutividade da interfase.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

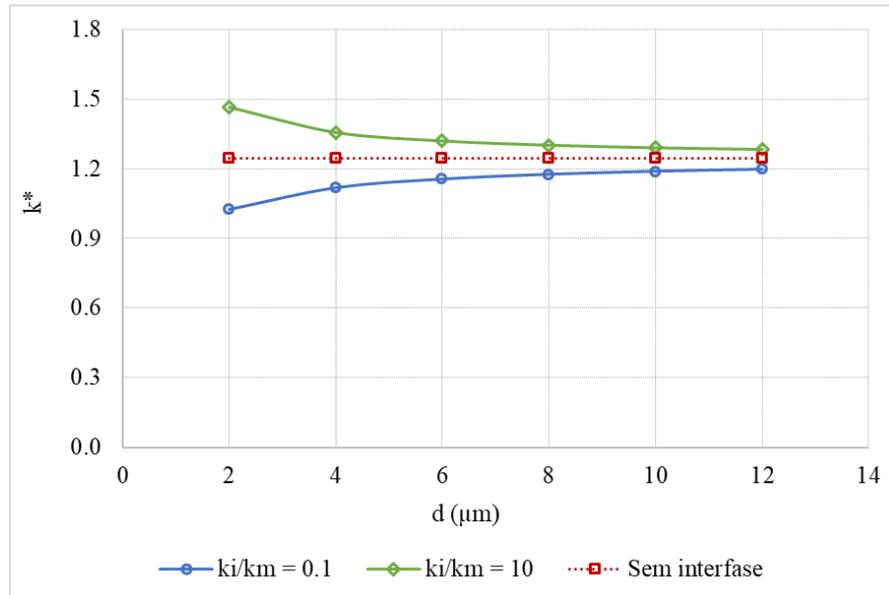
Conforme apresentado na Figura 3.19, a condutividade da interfase afeta diretamente a condutividade efetiva do compósito. Para k_i/k_m igual a 0,001, k^* é aproximadamente 48% menor em comparação com o caso sem interfase. Por outro lado, quando k_i/k_m vale 1000, k^* sofre aumento de aproximadamente 78% em relação ao caso de $k_i = k_m$.

Exemplo 3.3.3 - Influência do tamanho da inclusão considerando a presença de interfase.

Este exemplo consiste na verificação do efeito de tamanho da inclusão quando se considera a presença de uma interfase com 50 nm de espessura. Neste caso, a relação entre a condutividade da matriz e da fibra é igual a 2, enquanto k_i/k_m assume dois valores: 0,1 e 10. A fração volumétrica de inclusão é igual a 30%. O comprimento do lado da inclusão cúbica d é admitido variando de 2 μm a 12 μm .

A condutividade térmica efetiva em função do tamanho da inclusão é mostrada na Figura 3.20, onde nota-se o efeito da presença de uma interfase. Quanto maior o tamanho da inclusão menor é o volume total de interfase e, conseqüentemente, menor sua influência na condutividade efetiva.

Figura 3.20 - Condutividade térmica efetiva em função das dimensões da partícula.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Percebe-se na Figura 3.20 que, na medida em que as dimensões da inclusão aumentam, os resultados para os casos com interfase convergem para o caso sem interfase. Por outro lado, quando não há interfase, k^* não é influenciado pelo tamanho da inclusão.

3.4 Exemplos de compósitos com fibras longas unidirecionais

Nesta seção são apresentados exemplos que avaliam a condutividade térmica efetiva de compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais com e sem a presença de interface ou interfase. Nos exemplos são estudadas as influências da fração volumétrica de fibras, da relação entre a condutividade da matriz e da fibra e da espessura da interfase.

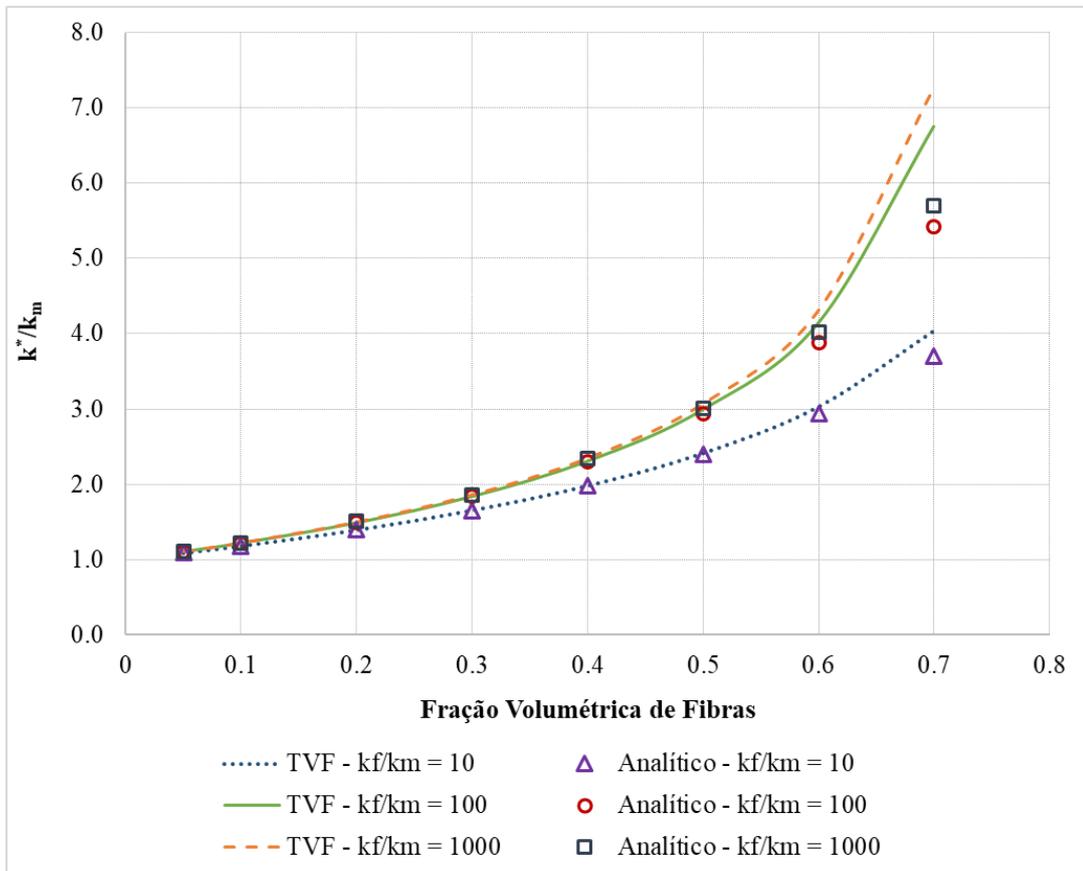
Exemplo 3.4.1 - Influência da fração volumétrica de fibras em compósitos sem interfase.

Este caso trata de um compósito unidirecional de duas fases, com distribuição periódica de fibras e interface perfeita entre matriz e fibra. O objetivo é investigar a influência da fração volumétrica de fibras na condutividade térmica efetiva, considerando diferentes relações entre a condutividade da fibra k_f e da matriz k_m . O modelo utilizado consiste em uma célula de repetição unitária quadrada.

A condutividade térmica da matriz é igual a 300 W/(mK) e a fibra possui raio de 10 μm. Considerou-se a presença de fibras mais condutoras do que a matriz com fração volumétrica variando de 5% a 70%.

Na Figura 3.21 é apresentada a condutividade térmica efetiva para fibras com condutividades iguais a $10k_m$, $100k_m$ e $1000k_m$. Nesta figura são mostrados os resultados obtidos com a formulação paramétrica bidimensional da teoria de volumes finitos e com a formulação analítica baseada em séries de Fourier.

Figura 3.21 - Condutividade térmica efetiva para diferentes k_f/k_m .



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

De modo geral, a condutividade térmica efetiva do compósito aumentou com o acréscimo de fibras, devido à presença de reforço mais condutivo do que a matriz. Para frações volumétricas até 40%, aumentar a condutividade da fibra de $10k_m$ para $100k_m$ gera um aumento máximo na condutividade efetiva de aproximadamente 15%. Para a fração volumétrica máxima considerada, esse acréscimo é aproximadamente 40%.

Para o caso de aumentar a condutividade da fibra de $100k_m$ para $1000k_m$, o acréscimo na condutividade efetiva é menor do que 2% para frações volumétricas até 40%. Para a fração volumétrica de 70%, esse acréscimo é aproximadamente 7%.

Com base na Figura 3.21, percebe-se que a formulação analítica em séries de Fourier apresenta resultados coincidentes com aqueles obtidos por TVF para fração volumétrica de

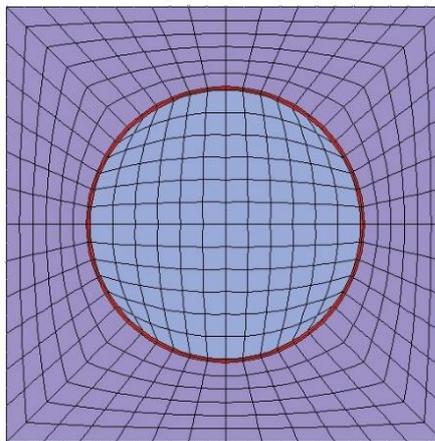
fibras até aproximadamente 40%. Exceto para o caso onde $k_f/k_m = 10$, onde os resultados são coincidentes até a fração volumétrica de 50%. Nota-se que os resultados divergem mais quanto maior o contraste entre as condutividades das fases. Essa divergência pode ser atribuída à simplificação adotada para a função gradiente de transformação na Equação (2.63).

Dessa forma, considerando o intuito de obter um compósito condutivo, percebe-se que para o caso em estudo não é necessário o uso de fibras com condutividade muito maior do que a matriz para obter ganhos significativos na condutividade efetiva.

Exemplo 3.4.2 - Influência da fração volumétrica de fibras em compósitos com interfase.

Neste caso é analisado um compósito unidirecional de três fases, distribuição periódica de fibras, interface perfeita entre matriz e interfase assim como entre interfase e fibra. O modelo utilizado consiste em uma célula de repetição unitária quadrada (Figura 3.22).

Figura 3.22 - Célula unitária de repetição de um compósito de três fases discretizada em subvolumes quadriláteros.



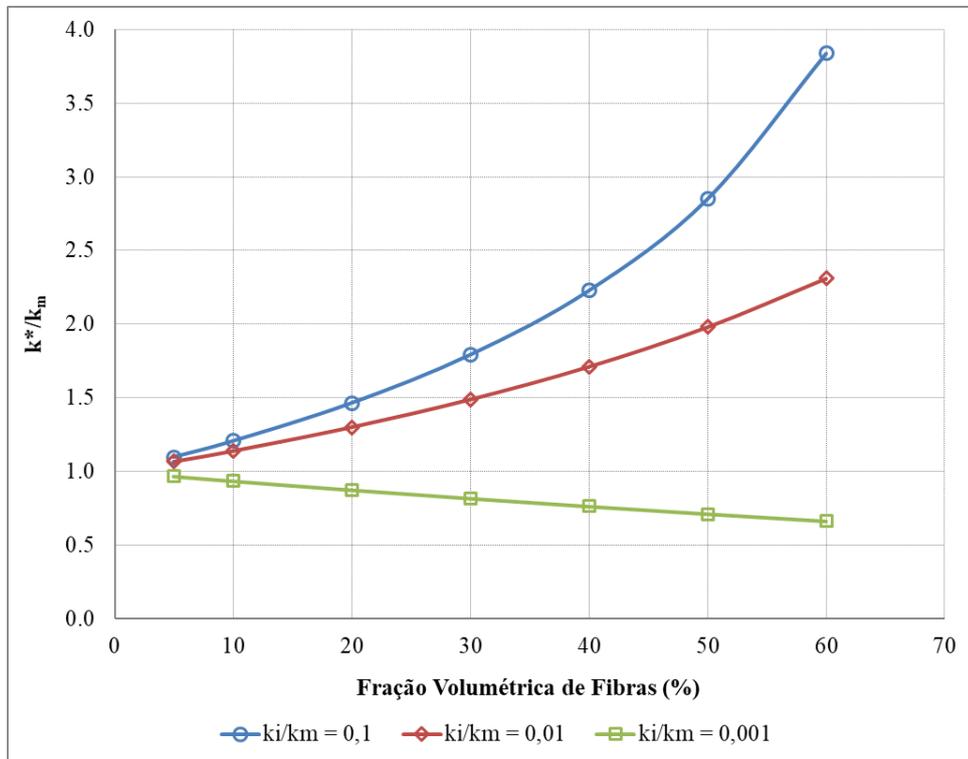
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

O objetivo do exemplo é verificar a influência da fração volumétrica de fibras na condutividade térmica efetiva considerando a presença de uma interfase de 20 nm de espessura. Considerou-se que a fração volumétrica varia de 5% a 60%.

A condutividade térmica da matriz é igual a 0,3 W/(mK), a fibra tem 10 μm de raio e sua condutividade térmica vale 300 W/(mK). No primeiro caso analisado, a interfase possui condutividade k_i menor do que a matriz k_m , apresentando os seguintes valores: $0,1k_m$, $0,01k_m$ e $0,001k_m$. No segundo, a condutividade da interfase possui alta condutividade e são considerados os seguintes valores: $10k_m$, $100k_m$ e $1000k_m$.

A condutividade térmica efetiva dos compósitos cujas interfaces são pouco condutivas é apresentada na Figura 3.23, enquanto os compósitos com interfaces altamente condutivas tem sua condutividade efetiva mostrada na Figura 3.24.

Figura 3.23 - Condutividade térmica efetiva de compósitos com interface de baixa condutividade.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

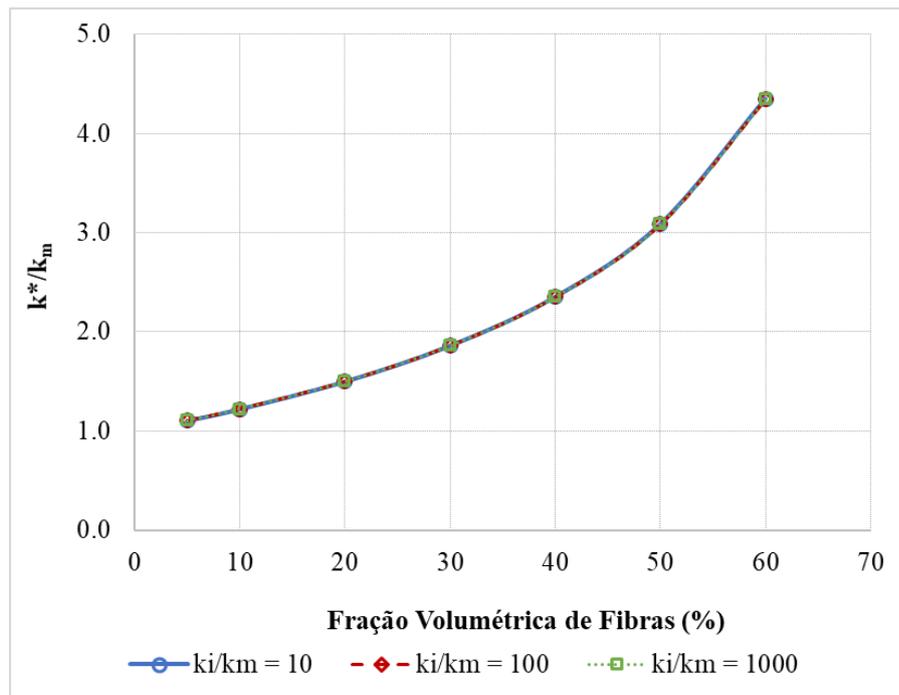
Como mostrado na Figura 3.23, a condutividade térmica efetiva aumenta juntamente com a fração volumétrica para os casos em que k_i é igual a $0,1k_m$ e $0,01k_m$. Mesmo com a presença de uma interface pouco condutiva, a alta condutividade térmica da fibra permitiu um aumento na condutividade efetiva.

Apesar do ganho de condutividade efetiva, nota-se a influência da interface no fato de k^* aumentar de forma menos acentuada para k_i igual a $0,01k_m$. Na média, a condutividade efetiva aumenta 17% menos quando k_i passa de $0,1k_m$ para $0,01k_m$.

Para o caso de interface com condutividade extremamente baixa, k_i igual a $0,001k_m$, a condutividade efetiva diminui mesmo com a presença de fibras altamente condutivas.

Percebe-se que quanto maior a fração volumétrica de fibras, maior é a influência da interface na condutividade efetiva do compósito.

Figura 3.24 - Condutividade térmica efetiva de compósitos com interfase de alta condutividade.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Neste exemplo, o raio da fibra é constante, então o crescimento da fração volumétrica implica em aumento da proporção interfase/matriz. Logo, a presença de interfases com condutividade maior do que a matriz causa o aumento da condutividade térmica efetiva em conjunto com a fração volumétrica, como mostrado na Figura 3.24. Para o caso de interfase altamente condutiva, percebe-se que k^* independe da relação k_i/k_m .

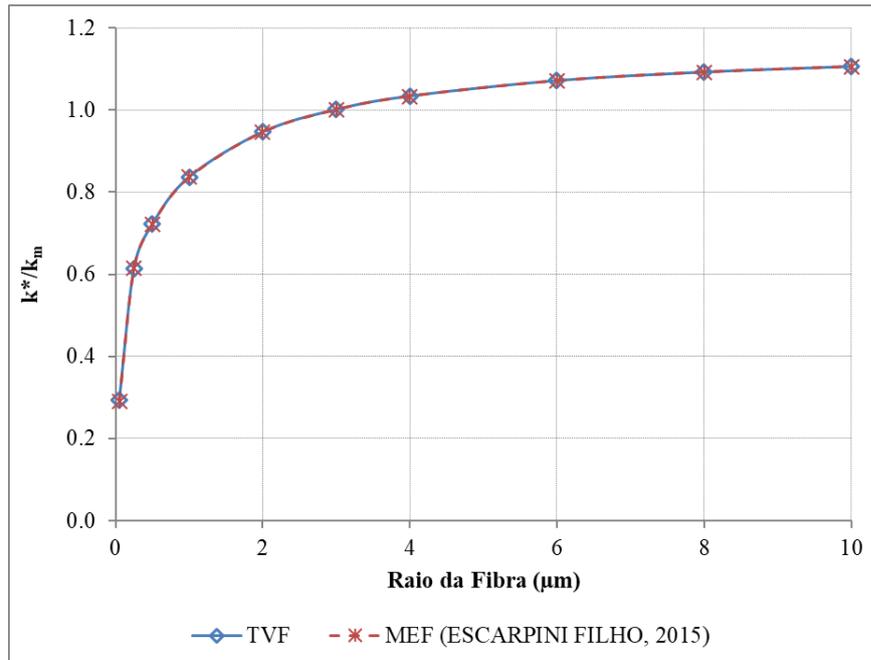
Exemplo 3.4.3 - Influência do tamanho da inclusão.

Neste exemplo é estudado um compósito unidirecional de duas fases, distribuição periódica de fibras e interfase entre matriz e fibra. Para as análises foi utilizada uma célula de repetição unitária quadrada.

O objetivo do exemplo é avaliar a influência do tamanho da inclusão na condutividade térmica efetiva levando em conta a presença de uma interfase fina pouco condutora. Os resultados são comparados com os obtidos por Escarpini Filho (2015) com o Método dos Elementos Finitos.

O raio da fibra varia de $0,05 \mu\text{m}$ a $10 \mu\text{m}$ e a condutividade térmica da mesma é igual a $300 \text{ W}/(\text{mK})$. A condutividade térmica da matriz é igual a $178 \text{ W}/(\text{mK})$. A interfase tem 20 nm de espessura e condutividade térmica igual a $2,918 \text{ W}/(\text{mK})$.

Figura 3.25 - Influência do raio da fibra na condutividade térmica efetiva.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Como mostrado na Figura 3.25, os resultados obtidos com TVF e com MEF são idênticos. A condutividade térmica efetiva cresce com o aumento do raio da fibra, sendo que este crescimento é mais acentuado para raios menores.

Exemplo 3.4.4 - Influência do raio da fibra variando a condutividade da interfase.

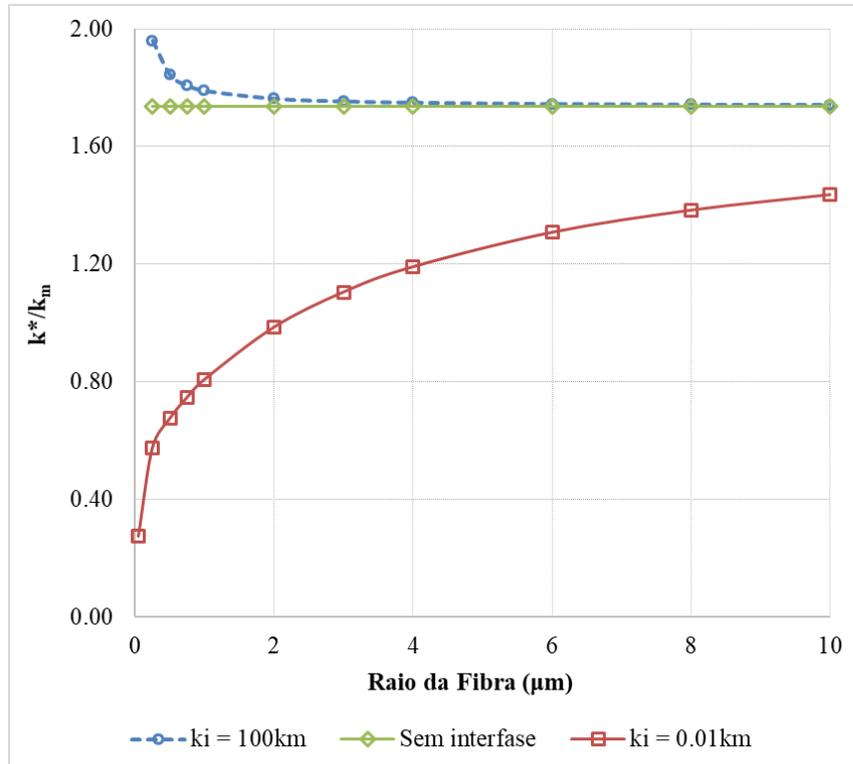
Neste exemplo é investigada a influência do raio da fibra na condutividade térmica efetiva do compósito considerando a presença de uma interfase com 20 nm de espessura. São considerados dois casos para a interfase: a) altamente condutiva com condutividade térmica igual a $100k_m$ W/(mK) e b) fracamente condutiva com condutividade térmica de $0,01k_m$ W/(mK).

A condutividade térmica da fibra é igual a $3,5$ W/(mK), o raio da mesma varia de $0,05$ µm a 10 µm e a fração volumétrica vale 30%. Por sua vez, a condutividade térmica da matriz vale $0,19$ W/(mK).

Considerando a Figura 3.26, percebe-se que o raio da fibra não tem influência na condutividade efetiva quando não se considera a presença de interfase. Por outro lado, observa-se claramente o efeito de tamanho da fibra quando se considera a presença da interfase. No caso em estudo, a condutividade efetiva cresce na medida em que aumenta o raio da fibra, pois a interfase possui condutividade menor que a matriz. Isso acontece porque, mantendo-se a fração volumétrica constante, quanto maior o raio da fibra menor o volume

total de interfase, diminuindo sua influência na condutividade efetiva. O efeito da dependência do tamanho da inclusão na condutividade térmica efetiva é conhecido como efeito Kapitza (KAPITZA, 1941).

Figura 3.26 - Influência do raio da fibra com diferentes interfases.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

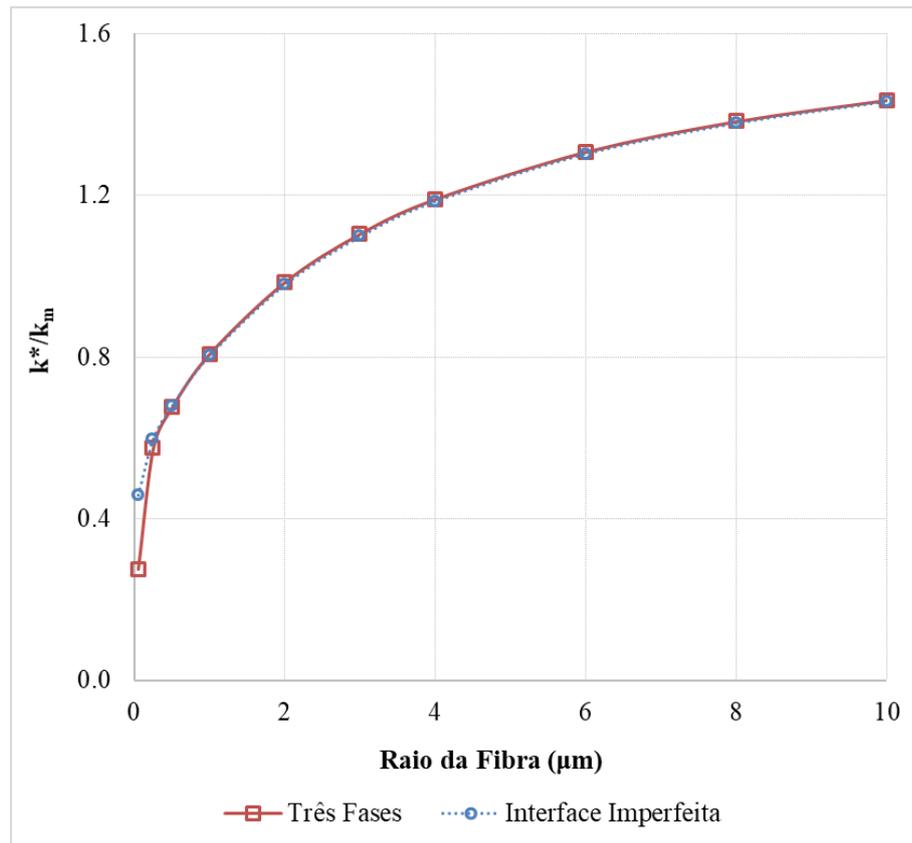
Para o compósito com interfase altamente condutiva, percebe-se que a condutividade efetiva diminui com o aumento do raio da fibra. A condutividade efetiva do compósito com interfase altamente condutiva se aproxima mais rapidamente da condutividade efetiva do compósito sem interfase, na medida em que cresce o raio, do que no caso onde o compósito tem interfase com baixa condutividade.

Exemplo 3.4.5 - Substituição da interfase por uma interface imperfeita.

Neste exemplo são consideradas as mesmas propriedades dos constituintes apresentadas no Exemplo 3.4.3. O objetivo é verificar o desempenho da metodologia que busca substituir a interfase entre matriz e fibra por uma interface imperfeita.

A condutividade térmica efetiva foi calculada usando um modelo com três fases e um modelo com duas fases e interface imperfeita. Como pode ser visto na Figura 3.27, os resultados obtidos com os dois modelos coincidem a partir de raio igual a $0,5 \mu\text{m}$.

Figura 3.27 - Influência do raio da fibra na condutividade térmica efetiva.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Para os raios iguais a $0,05 \mu\text{m}$ e $0,25 \mu\text{m}$, os resultados obtidos com os dois modelos divergem, ou seja, não é mais possível substituir a interfase por uma interface. Isso acontece porque nesses dois casos não é atendida a hipótese de interfase fina adotada na formulação da interface imperfeita.

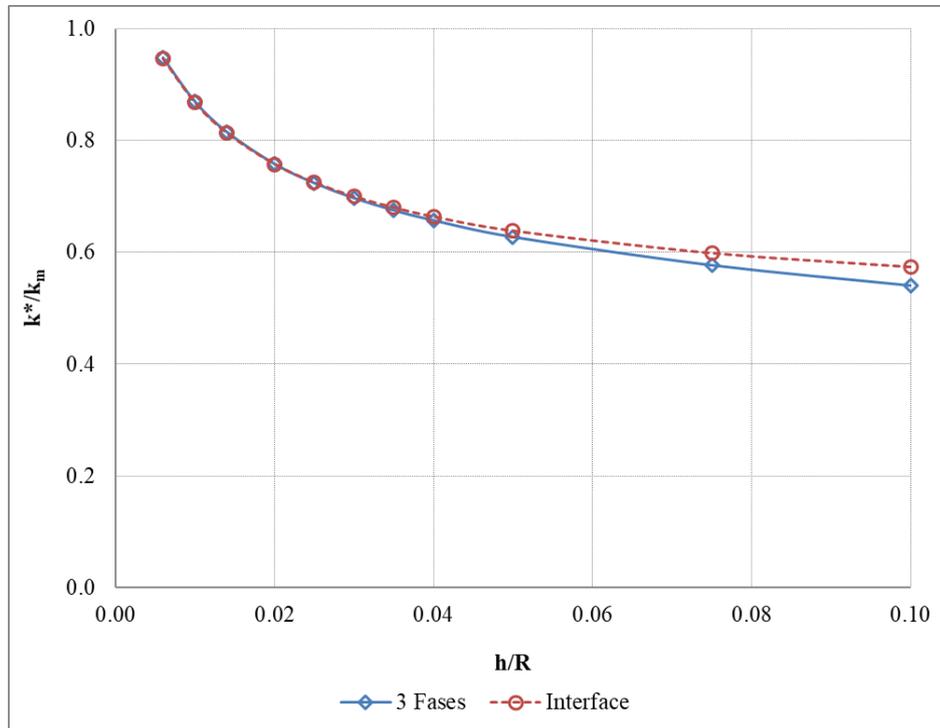
Exemplo 3.4.6 - Avaliação da condição de interfase fina.

Como mencionado na Seção 2.4, a formulação da interface imperfeita adota a hipótese de a interfase ser fina. O objetivo deste exemplo é verificar até qual espessura uma interfase pode ser considerada fina para a formulação apresentada.

Para esse fim, calculou-se a condutividade térmica efetiva com um modelo de três fases e com um modelo de duas fases com interface imperfeita. Mantendo fixo o valor do raio da fibra (R) e variando a espessura da interface (h), foram obtidos os resultados mostrados na Figura 3.28.

Considerando a formulação apresentada na Seção 2.4 e para este caso, percebe-se que uma interfase pode ser substituída por uma interface imperfeita se a relação h/R for menor do que 0,04.

Figura 3.28 - Verificação da hipótese de interfase fina.



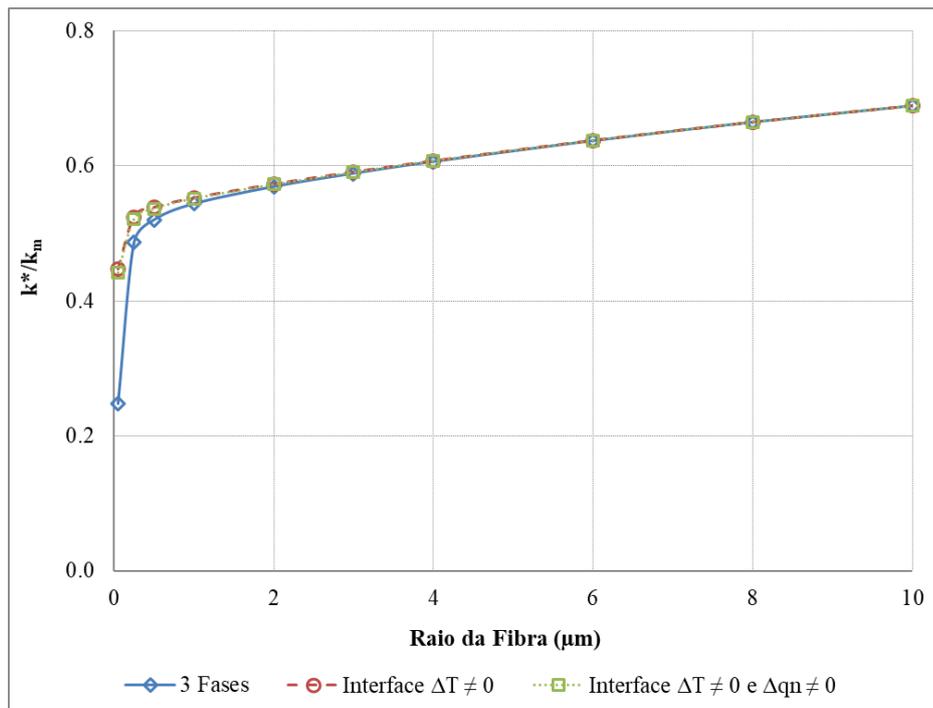
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 3.4.7 - Verificação da condição de descontinuidade de temperatura e continuidade de fluxo de calor normal.

No desenvolvimento da formulação da interface imperfeita foi considerada somente a descontinuidade de temperatura. Neste exemplo verifica-se a validade dessa consideração para o caso de interface pouco condutiva, comparando os resultados com outros obtidos com uma formulação que considera descontinuidade de temperatura e do fluxo de calor normal. Os resultados também são confrontados com os obtidos com um modelo de três fases.

Para realizar a mencionada verificação foi desenvolvida uma nova matriz de condutividade térmica para o elemento de interface, apresentada no Apêndice B.

Como mostrado na Figura 3.29, desconsiderar a descontinuidade de fluxo de calor normal à interface, praticamente, não influencia a condutividade efetiva para interfaces pouco condutoras.

Figura 3.29 - Verificação da condição de descontinuidade de temperatura.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 3.4.8 - Influência de interfases espessas.

Neste exemplo investiga-se a influência da espessura da interfase na condutividade térmica efetiva de compósito com matriz epóxi. Foram considerados dois tipos de fibra, carbono e vidro, cujas propriedades são mostradas na Tabela 3.5. A fração volumétrica de fibra é 10% e a condutividade térmica da matriz é igual a 0,19 W/mK.

Tabela 3.5 - Propriedades térmicas das fibras e da interfase.

Tipo de Fibra	Raio (μm)	Condutividade Térmica da Fibra (W/mK)	Condutividade Térmica da Interfase (W/mK)
Carbono	3,5	11	5,595
Vidro	10	1,3	0,745

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

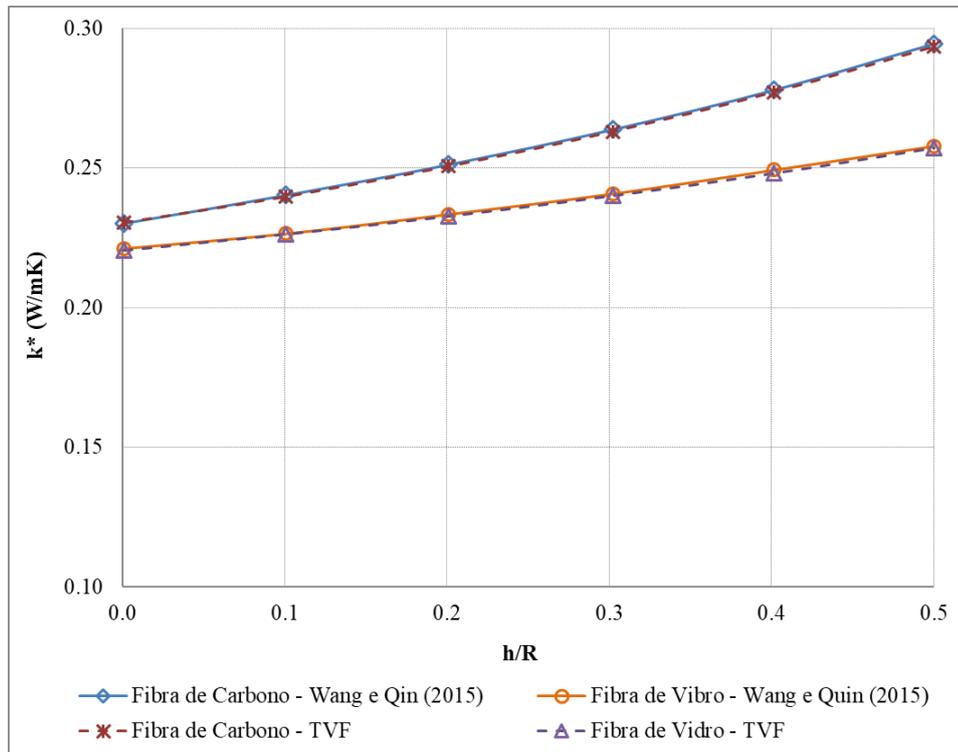
São comparados os resultados apresentados por Wang e Qin (2015) com aqueles obtidos com TVF considerando um modelo de três fases.

Para avaliar a influência da interfase nas propriedades térmicas efetivas de compósitos, Wang e Qin (2015) desenvolveram um elemento revestimento/fibra a partir do método híbrido de elementos finitos baseado em solução fundamental (HFS-FEM). Considerando a

solução fundamental para fibra circular imersa em matriz infinita, o elemento criado dispensa a discretização do domínio da interfase e da fibra.

Considerando a Figura 3.30, nota-se uma boa concordância entre os resultados para ambos os tipos de fibras. Percebe-se que a condutividade efetiva aumenta juntamente com a espessura da interfase, visto que esta possui condutividade maior do que a matriz.

Figura 3.30 - Condutividade térmica efetiva x espessura da interfase.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Também foi avaliada a influência da condutividade térmica da interfase k_i variando sua espessura. Para o compósito reforçado com fibras de carbono foram avaliadas interfases com $0,35 \mu\text{m}$, $0,7 \mu\text{m}$ e $1,05 \mu\text{m}$. Variando a relação k_i/k_m de 0,001 a 1000, foram obtidos os resultados mostrados na Figura 3.31.

Para interfase com alta condutividade, ou seja, para k_i variando de $10k_m$ a $1000k_m$, percebe-se que não ocorre aumento significativo de condutividade efetiva. Nessa faixa de valores de k_i , o acréscimo de condutividade térmica efetiva foi de aproximadamente 2,5% para a interfase mais espessa e de menos de 1% para a interfase mais fina.

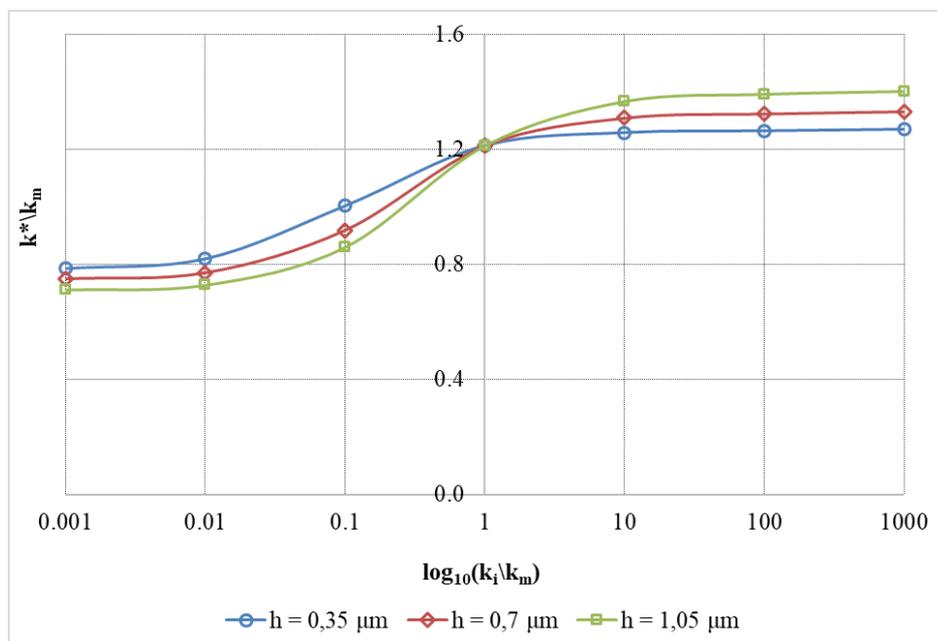
Comparando o caso de interfase altamente condutora com aquele sem interfase, ou seja, k_i igual k_m , o compósito com interfase de espessura igual a $1,05 \mu\text{m}$ apresenta o maior acréscimo de condutividade efetiva, aproximadamente de 13%. O compósito cuja interfase

tem $0,7 \mu\text{m}$ de espessura apresenta aumento de 9% na condutividade efetiva, aproximadamente o dobro do caso em que a interfase tem $0,35 \mu\text{m}$.

Para o caso de interfase com baixa condutividade, alterações mais significativas na condutividade térmica efetiva são verificadas. O compósito cuja interfase possui $1,05 \mu\text{m}$ de espessura e condutividade térmica igual a $0,1k_m$ apresenta condutividade térmica efetiva 40% menor comparado com o compósito sem interfase. Para o compósito com interfase de $0,7 \mu\text{m}$ de espessura, a condutividade efetiva diminui 32%. Por sua vez, o compósito cuja interfase é igual a $0,35 \mu\text{m}$ apresenta condutividade efetiva 20% menor.

A medida que a condutividade térmica da interfase diminui, a diferença entre a condutividade térmica efetiva dos compósitos avaliados decresce. Esse fato demonstra que, para interfaces muito pouco condutoras, a espessura das mesmas deixa de ser um fator importante, sendo mais preponderante o valor da condutividade da interfase.

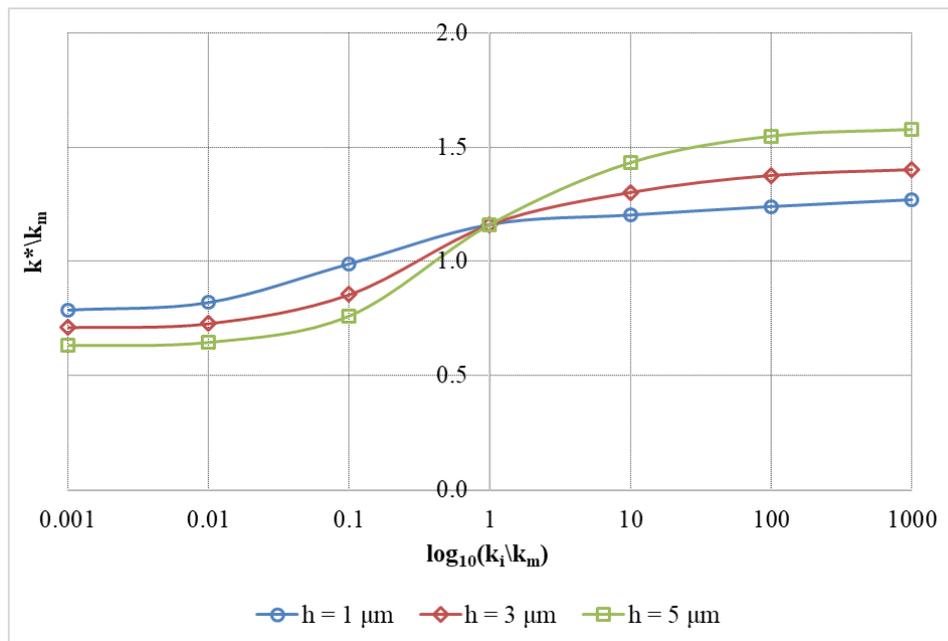
Figura 3.31 - Compósito reforçado por fibra de carbono.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Para o compósito reforçado com fibras de vidro foram avaliadas interfaces com $1 \mu\text{m}$, $3 \mu\text{m}$ e $5 \mu\text{m}$. Variando a relação k_i/k_m de 0,001 a 1000, foram obtidos os resultados mostrados na Figura 3.32.

Figura 3.32 - Compósito reforçado por fibra de vidro.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

O compósito com interface de espessura igual a $5 \mu\text{m}$ apresenta a maior variação de condutividade térmica efetiva quando a condutividade da interface é modificada. Considerando interfaces altamente condutivas, esse compósito apresenta um acréscimo de 26% na condutividade efetiva. Para o caso de interface com baixa condutividade, o decréscimo é igual a 45%.

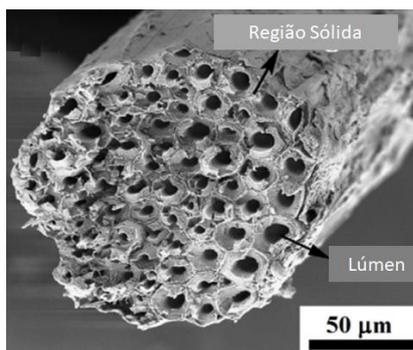
No caso do compósito cuja interface tem $3 \mu\text{m}$, a condutividade térmica efetiva aumenta em 18% quando $k_i = 1000k_m$ e diminui em 38% para $k_i = 0,001k_m$.

Por fim, o compósito com interface de espessura igual a $1 \mu\text{m}$ apresenta as menores variações na condutividade efetiva em comparação com o compósito sem interface. Para o caso de interface com baixa condutividade, o decréscimo na condutividade térmica efetiva é igual a 32%. Para interface altamente condutiva, a condutividade efetiva aumenta 8%.

Exemplo 3.4.9 - Condutividade térmica de compósitos com fibras vegetais.

Neste exemplo é estudada a condutividade térmica efetiva transversal de compósitos reforçados por fibras vegetais unidirecionais por meio de métodos numéricos e analíticos. Os resultados obtidos são confrontados com experimentos realizados por Liu et al. (2012b).

As fibras vegetais são geralmente ocas, sendo os espaços vazios denominados lúmen. A Figura 3.33 mostra um feixe de fibras de abaca onde é destacada a região sólida e o lúmen.

Figura 3.33 - Feixe de fibras de abaca.

Fonte: LIU; TAKAGI; YANG, 2011 (adaptada).

Liu et al. (2012b) determinaram experimentalmente a condutividade térmica de dois tipos de compósitos, um reforçado com fibras de abaca e outro com fibras de bambu, ambos com matriz epóxi. A condutividade térmica da região sólida das fibras, assim como da matriz são apresentadas na Tabela 3.6.

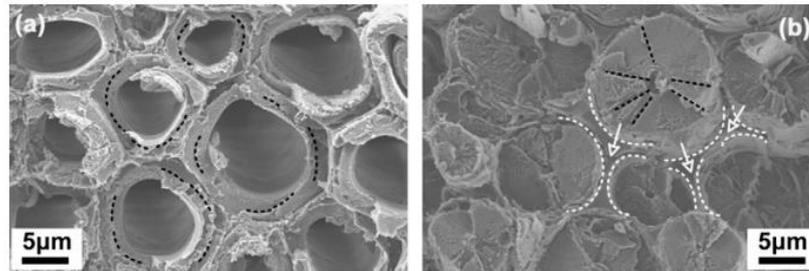
Tabela 3.6 - Condutividade térmica dos materiais para o modelo trifásico.

Material	Condutividade Térmica (W/mK)
Matriz epóxi	0,298
Fibra de Abaca	0,430
Fibra de Bambu	0,350
Lúmen (ar)	0,026

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Os feixes de fibras de abaca e bambu apresentam diferença significativa com relação à quantidade e tamanho do lúmen (Figura 3.34). Liu et al. (2012b) representam a fração volumétrica de lúmen com relação ao feixe de fibras (v_l) com o coeficiente $\alpha = r_l/r_f = \sqrt{v_l}$, onde r_l e r_f são os raios do lúmen e da região sólida, respectivamente. Para a fibra de abaca, $\alpha = 0,67$ e para a fibra de bambu, $\alpha = 0,12$.

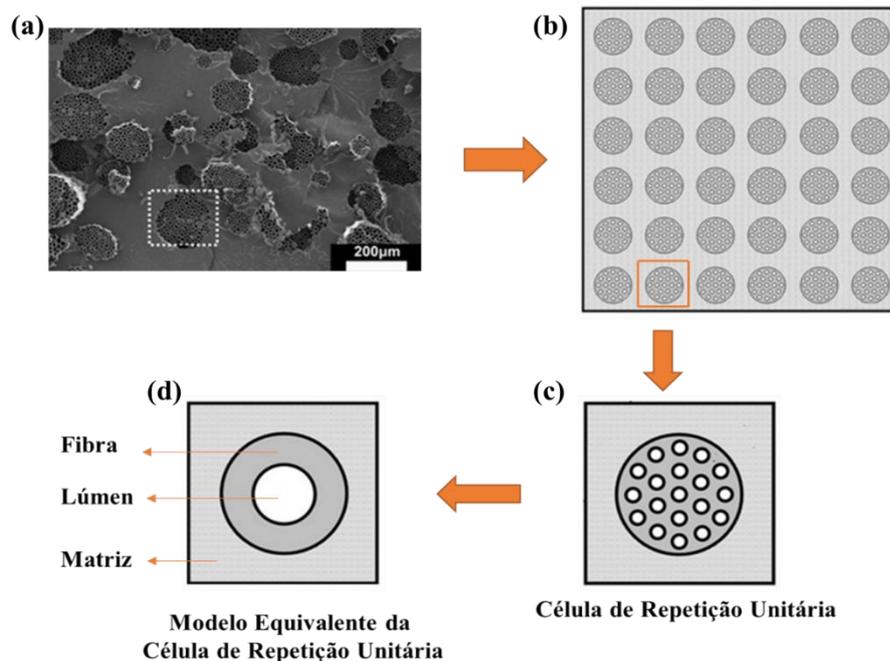
Figura 3.34 - Seção transversal de feixe de fibras de (a) abaca e (b) bambu.



Fonte: Liu et al., 2012b (adaptada).

Para possibilitar o cálculo da condutividade térmica efetiva do compósito por meio da TVF é necessário escolher uma CUR adequada. A Figura 3.35 mostra a seção transversal do compósito (a) e sua representação simplificada com distribuição periódica dos feixes de fibra (b). Desta distribuição periódica é escolhida uma célula de repetição unitária (c) cujo feixe de fibras apresenta diversos lúmens. Esta célula pode ser transformada em um modelo equivalente (d) onde os lúmens são agrupados, formando assim um modelo trifásico.

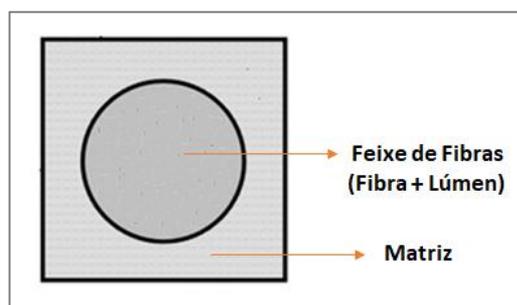
Figura 3.35 - Obtenção do modelo de três fases: (a) seção transversal do compósito (b) representação da distribuição periódica de feixes de fibra (c) CUR (d) modelo equivalente da CUR.



Fonte: Liu et al., 2012a (adaptada).

Um modelo de duas fases foi utilizado para determinar a condutividade térmica efetiva com a formulação analítica apresentada na Seção 2.3. Dessa forma, a CUR é formada pela matriz e por um feixe de fibras (Figura 3.36).

Figura 3.36 - Modelo de duas fases.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A condutividade térmica dos feixes, formados pelas fibras e pelo lúmen, foi determinada por Liu *et al.* (2012b) e são apresentadas na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 - Condutividade térmica dos materiais para o modelo bifásico.

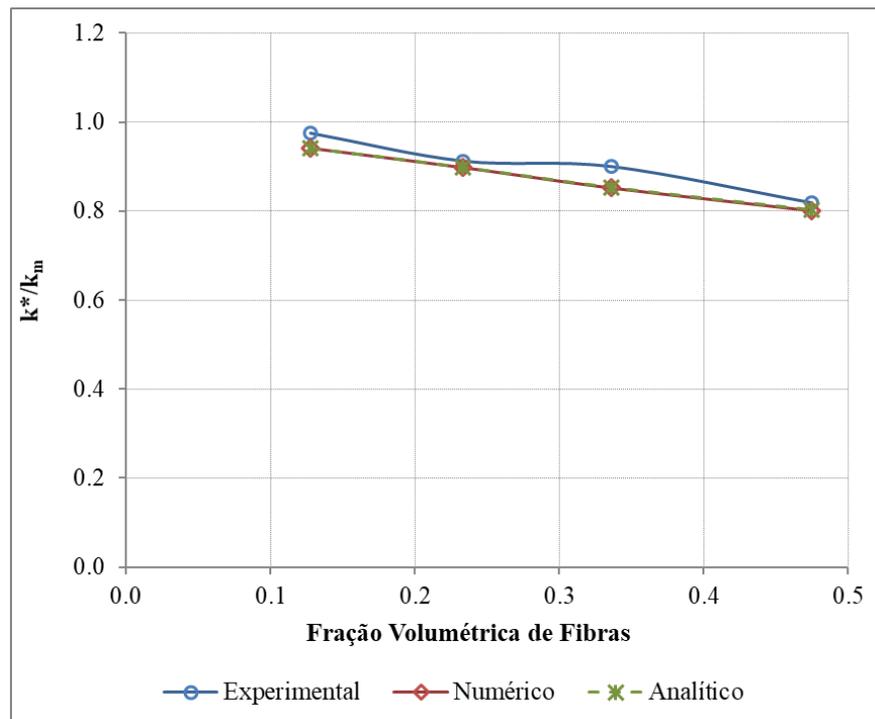
Material	Condutividade Térmica (W/mK)
Matriz epóxi	0,298
Feixe de Fibras de Abaca	0,185
Feixe de Fibras de Bambu	0,345

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na Figura 3.37 são mostrados os resultados obtidos para o compósito reforçado com fibras de abaca, considerando frações volumétricas de feixe de fibras iguais a 13%, 23%, 34% e 47%. O raio da região sólida da fibra é igual a 93 μm e o raio do lúmen, 62 μm .

Percebe-se uma boa concordância dos resultados numéricos e analíticos com os experimentais. A condutividade térmica efetiva diminui com o aumento da fração volumétrica de fibras. Esse comportamento se deve a presença do lúmen que atua como uma barreira para a transmissão de calor.

Figura 3.37 - Fibras de abaca.

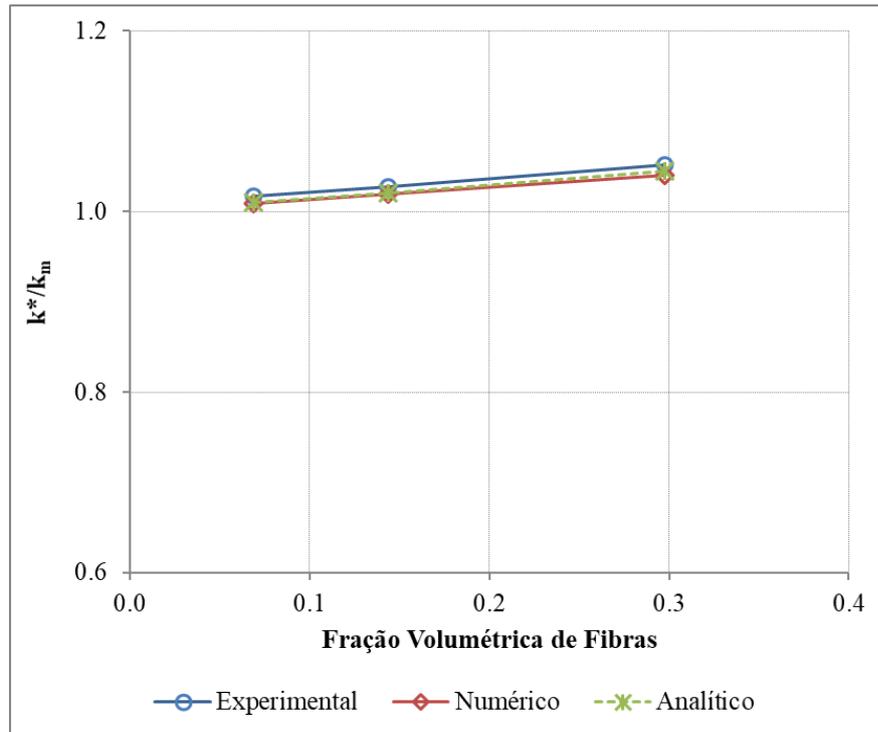


Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A Figura 3.38 apresenta os resultados obtidos para o compósito reforçado com fibras de bambu, considerando frações volumétricas de feixe de fibras iguais a 7%, 14% e 30%. O raio da região sólida da fibra é igual a 102 μm e o raio do lúmen, 12,24 μm . Os resultados numéricos e analíticos também coincidiram com os experimentais para esse caso.

Como mostrado na Figura 3.34, as dimensões do lúmen da fibra de bambu são pequenas, logo não influenciam de forma significativa a condutividade térmica efetiva do compósito. Dessa forma, há um pequeno acréscimo de condutividade com o aumento da fração volumétrica.

Figura 3.38 - Fibras de bambu.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

4 HOMOGENEIZAÇÃO TERMOELÁSTICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS REFORÇADOS POR FIBRAS

Neste capítulo é apresentada uma extensão da formulação paramétrica tridimensional da Teoria de Volumes Finitos para problemas elásticos na qual foram incorporados os efeitos térmicos.

4.1 Formulação Paramétrica Tridimensional da Teoria de Volumes Finitos

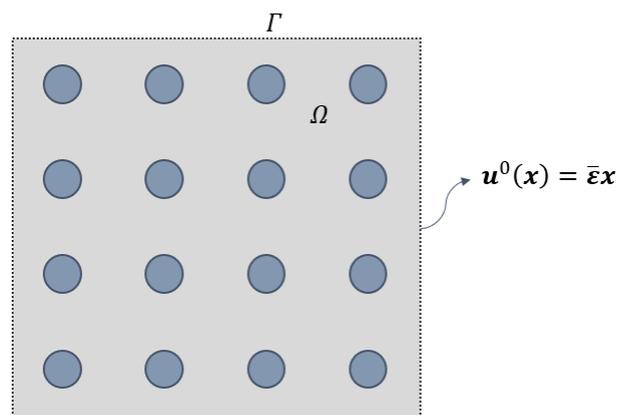
Nesta seção, a versão paramétrica tridimensional elástica da Teoria de Volumes Finitos apresentada em Chen; Wang e Chen (2018) é estendida com a incorporação dos efeitos térmicos.

Considera-se um elemento de volume representativo submetido a uma condição de contorno homogênea em deslocamento (Figura 4.1). A célula unitária de repetição obtida a partir deste EVR tem sua microestrutura discretizada em subvolumes hexaédricos como descrito na Seção 2.1. O campo de deslocamentos em cada subvolume (k) é representado por uma expansão em duas escalas que envolve componentes macroscópicas e flutuantes

$$u_i^{(k)} = \bar{\varepsilon}_{ij}x_j + \tilde{u}_i^{(k)} \quad (4.1)$$

em que $\bar{\varepsilon}_{ij}$ são as deformações macroscópicas.

Figura 4.1 - Elemento de Volume Representativo submetido a uma condição de contorno homogênea.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na versão paramétrica da Teoria de Volumes Finitos, as componentes do campo de deslocamentos flutuantes $\tilde{u}_i^{(k)}$ são aproximadas por uma expansão polinomial de segunda ordem de Legendre nas coordenadas paramétricas

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^{(k)} = & W_{i(000)}^{(k)} + \zeta W_{i(100)}^{(k)} + \eta W_{i(010)}^{(k)} + \xi W_{i(001)}^{(k)} + \frac{1}{2}(3\zeta^2 - 1)W_{i(200)}^{(k)} \\ & + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)W_{i(020)}^{(k)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)W_{i(002)}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que $W_{i(mn)}^{(k)}$ são coeficientes a determinar.

As equações de equilíbrio para o subvolume são dadas pela seguinte expressão

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial y_j} = 0 \quad (4.3)$$

enquanto a equação de Cauchy é representada pela relação:

$$t_i^{(k)} = \sigma_{ji}^{(k)} n_j^{(k)} \quad (4.4)$$

Assumindo que o material do subvolume é elástico linear submetido a uma variação de temperatura ΔT , as tensões se relacionam com as deformações por meio da lei de constitutiva termoelástica de Duhamel-Neumann

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijkl}^{(k)} \varepsilon_{kl}^{(k)} - \sigma_{ij}^{\text{th}(k)} \quad (4.5)$$

em que as componentes de tensões associadas à variação de temperatura são dadas por

$$\sigma_{ij}^{\text{th}(k)} = C_{ijkl}^{(k)} \alpha_{kl}^{(k)} \Delta T \equiv \Gamma_{ij}^{(k)} \Delta T \quad (4.6)$$

sendo C_{ijkl} o tensor de rigidez do material e α_{kl} os coeficientes de dilatação térmica.

Por meio da Equação (4.1), obtém-se a seguinte expressão relacionando as deformações do subvolume com os deslocamentos flutuantes:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^{(k)}}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^{(k)}}{\partial y_i} \right) \quad (4.7)$$

Como será visto adiante, os deslocamentos flutuantes da célula unitária de repetição são determinados por meio de uma matriz de rigidez global que é construída pela combinação de matrizes de rigidez locais. A montagem da referida matriz deve garantir as condições de continuidade de deslocamentos e tensões médias, assim como as condições de periodicidade.

4.1.1 Matriz de rigidez do subvolume

Considerando a Equação (4.2), os deslocamentos flutuantes médios nas faces de cada subvolume (Figura 2.4) são definidos e avaliados pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_i \rangle^{(1,2)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{u}_i(\zeta, \eta, \xi = \mp 1) d\zeta d\eta = W_{i(000)} \mp W_{i(001)} + W_{i(002)} \\ \langle \tilde{u}_i \rangle^{(3,5)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{u}_i(\zeta, \eta = \mp 1, \xi) d\zeta d\xi = W_{i(000)} \mp W_{i(010)} + W_{i(020)} \\ \langle \tilde{u}_i \rangle^{(4,6)} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{u}_i(\zeta = \pm 1, \eta, \xi) d\eta d\xi = W_{i(000)} \pm W_{i(100)} + W_{i(200)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

A partir das equações (4.8), os coeficientes W_i de primeira e segunda ordem podem ser escritos em função dos deslocamentos médios nas faces e dos coeficientes de ordem zero pela expressão:

$$\begin{pmatrix} W_{i(100)} \\ W_{i(010)} \\ W_{i(001)} \\ W_{i(200)} \\ W_{i(020)} \\ W_{i(002)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \langle \tilde{u}_i \rangle^{(1)} - W_{i(000)} \\ \langle \tilde{u}_i \rangle^{(2)} - W_{i(000)} \\ \langle \tilde{u}_i \rangle^{(3)} - W_{i(000)} \\ \langle \tilde{u}_i \rangle^{(4)} - W_{i(000)} \\ \langle \tilde{u}_i \rangle^{(5)} - W_{i(000)} \\ \langle \tilde{u}_i \rangle^{(6)} - W_{i(000)} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Representando por C_{ij} e G_{ij} as componentes da matriz de rigidez elástica do material relacionadas com as tensões normais e de cisalhamento, respectivamente, as seguintes equações locais de equilíbrio podem ser escritas:

$$\begin{aligned}
C_{11} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y_1^2} + G_{12} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y_2^2} + G_{31} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y_3^2} + (C_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial y_1 \partial y_2} + (C_{13} + G_{31}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y_1 \partial y_3} &= 0 \\
G_{12} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial y_1^2} + C_{22} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial y_2^2} + G_{23} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial y_3^2} + (C_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y_1 \partial y_2} + (C_{23} + G_{23}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y_2 \partial y_3} &= 0 \quad (4.10) \\
G_{31} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y_1^2} + G_{23} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y_2^2} + C_{33} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial y_3^2} + (C_{13} + G_{31}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y_1 \partial y_3} + (C_{23} + G_{23}) \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial y_2 \partial y_3} &= 0
\end{aligned}$$

Os coeficientes de ordem zero $W_{i(000)}$ podem ser calculados substituindo-se as derivadas segundas do campo de deslocamentos (4.2) nas equações (4.10) juntamente com a expressão (4.9). Dessa forma, os coeficientes $W_{i(000)}$ são escritos em função dos deslocamentos médios nas faces dos subvolumes. Substituindo-se as expressões de $W_{i(000)}$ na Equação (4.9), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \begin{Bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(4)} \\ \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(5)} \\ \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(6)} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

em que $\mathbf{W}_i = [W_{i(100)} \quad W_{i(010)} \quad W_{i(001)} \quad W_{i(200)} \quad W_{i(020)} \quad W_{i(002)}]^T$ e $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(i)} = [\langle \tilde{u}_1 \rangle^{(i)} \quad \langle \tilde{u}_2 \rangle^{(i)} \quad \langle \tilde{u}_3 \rangle^{(i)}]^T$. A matriz $\bar{\mathbf{B}}$ é calculada com as componentes da matriz de rigidez elástica do material e da matriz Jacobiana inversa média, porém não está descrita aqui em detalhes devido ao tamanho dos seus elementos.

As deformações médias nas faces dos subvolumes podem ser obtidas a partir da Equação (4.7), considerando que as derivadas parciais das componentes de deslocamentos flutuantes com relação às coordenadas $(y_1 - y_2 - y_3)$ estão relacionadas com as derivadas parciais com relação às coordenadas $(\zeta - \eta - \xi)$ pela média da matriz Jacobina inversa $\langle \bar{\mathbf{J}} \rangle$.

Dessa forma, o vetor que reúne as deformações médias na face p de um subvolume genérico é dado por

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_{11} \rangle \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle \\ \langle \gamma_{23} \rangle \\ \langle \gamma_{31} \rangle \\ \langle \gamma_{12} \rangle \end{bmatrix}^{(p)} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ \bar{\gamma}_{23} \\ \bar{\gamma}_{31} \\ \bar{\gamma}_{12} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} \langle \bar{J} \rangle & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle \bar{J} \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \langle \bar{J} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(p)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(p)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

e onde as matrizes $\mathbf{A}^{(p)}$ são calculadas da seguinte forma:

$$\mathbf{A}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mp 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(3,5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mp 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{A}^{(4,6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base na Equação (4.4), as componentes de tensões médias nas faces dos subvolume podem ser determinadas pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle t_3 \rangle \end{bmatrix}^{(p)} = \mathbf{n}^{(p)} \begin{bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{23} \rangle \\ \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \end{bmatrix}^{(p)} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}^{(p)} \begin{bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{23} \rangle \\ \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \end{bmatrix}^{(p)} \quad (4.15)$$

onde n_1, n_2 e n_3 são as componentes do vetor normal unitário que apontam para fora da face p do subvolume.

Fazendo-se uso das Equações (4.5) e (4.12), o vetor das tensões médias na face p do subvolume pode ser avaliado pela relação:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{23} \rangle \\ \langle \sigma_{31} \rangle \\ \langle \sigma_{12} \rangle \end{bmatrix}^{(p)} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\gamma}_{23} \\ \bar{\gamma}_{31} \\ \bar{\gamma}_{12} \end{bmatrix} + \mathbf{C}\bar{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} \langle \bar{J} \rangle & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle \bar{J} \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \langle \bar{J} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(p)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(p)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle \sigma_{11}^{\text{th}} \rangle \\ \langle \sigma_{22}^{\text{th}} \rangle \\ \langle \sigma_{33}^{\text{th}} \rangle \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{(p)} \quad (4.16)$$

em que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Substituindo-se a Equação (4.16) em (4.15), a seguinte expressão para o vetor das tensões médias nas seis faces do subvolume pode ser prontamente obtida:

$$\begin{Bmatrix} \langle \mathbf{t} \rangle^{(1)} \\ \langle \mathbf{t} \rangle^{(2)} \\ \langle \mathbf{t} \rangle^{(3)} \\ \langle \mathbf{t} \rangle^{(4)} \\ \langle \mathbf{t} \rangle^{(5)} \\ \langle \mathbf{t} \rangle^{(6)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{C}\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{W} - \mathbf{N}\langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{th}} \rangle \quad (4.18)$$

onde $\langle \mathbf{t} \rangle^{(i)} = [\langle t_1 \rangle^{(i)} \quad \langle t_2 \rangle^{(i)} \quad \langle t_3 \rangle^{(i)}]^T$, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}^{(1)} \quad \mathbf{n}^{(2)} \quad \mathbf{n}^{(3)} \quad \mathbf{n}^{(4)} \quad \mathbf{n}^{(5)} \quad \mathbf{n}^{(6)}]^T$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\varepsilon}_{33} \quad \bar{\gamma}_{23} \quad \bar{\gamma}_{31} \quad \bar{\gamma}_{12}]^T$ e a matriz $\bar{\mathbf{A}}$ está detalhada no Apêndice C.

Finalmente, a substituição da Equação (4.11) na (4.18) resulta na seguinte expressão:

$$\langle \mathbf{t} \rangle = \mathbf{N} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{K} \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle - \mathbf{N} \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{th}} \rangle \quad (4.19)$$

em que $\langle \mathbf{t} \rangle = [\langle \mathbf{t} \rangle^{(1)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(2)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(3)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(4)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(5)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(6)}]^T$, e a matriz de rigidez do subvolume \mathbf{K} é dada pelo produto das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$.

4.1.2 Matriz de rigidez global

Considerando as condições de continuidade de deslocamentos e componentes de tensão nas faces comuns a subvolumes adjacentes, juntamente com as condições de periodicidade, a partir da Equação (4.19) é gerado o seguinte sistema de equações globais:

$$\mathbf{K}^G \langle \tilde{\mathbf{U}} \rangle = \Delta \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Delta \boldsymbol{\Gamma} \Delta T \quad (4.20)$$

em que \mathbf{K}^G é a matriz de rigidez global da CUR. A matriz $\Delta \mathbf{C}$ é constituída pelas diferenças entre as matrizes de rigidez local de subvolumes adjacentes, enquanto o vetor $\Delta \boldsymbol{\Gamma}$ está associado aos coeficientes de dilatação térmica dos subvolumes.

4.1.3 Matrizes homogeneizadas

A solução do sistema de equações (4.20) fornece os deslocamentos médios nas faces dos subvolumes. A partir destes deslocamentos médios, pode-se calcular as deformações médias e, então, montar as matrizes de concentração de Hill $\mathbf{A}^{(k)}$ para cada subvolume k utilizando a seguinte expressão:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.21)$$

na qual as colunas da matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ são determinadas pela aplicação de deformações macroscópicas devidamente escolhidas. Por exemplo, para a montagem da primeira coluna da matriz de concentração de Hill, aplica-se a deformação macroscópica $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} =$

$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e calculam-se os deslocamentos flutuantes nas faces dos subvolumes $\langle \tilde{\mathbf{U}} \rangle$ usando-se a Equação (4.20). Tais deslocamentos são usados para calcular os coeficientes \mathbf{W} que, por sua vez, são utilizados para calcular as deformações médias nas faces dos subvolumes. Introduzindo-se as deformações médias calculadas e a deformação macroscópica adotada na Equação (4.7), ficam determinadas as deformações no subvolume. Esse resultado aplicado na Equação (4.21) fornece os elementos da primeira coluna da matriz $\mathbf{A}^{(k)}$.

A equação constitutiva macroscópica para o material compósito pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^* \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \boldsymbol{\Gamma}^* \Delta T \quad (4.22)$$

em que \mathbf{C}^* é a matriz de rigidez homogeneizada e

$$\boldsymbol{\Gamma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\alpha}^* \quad (4.23)$$

sendo as matrizes homogeneizadas \mathbf{C}^* e $\boldsymbol{\Gamma}^*$ obtidas por meio das seguintes equações:

$$\mathbf{C}^* = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)} \quad (4.24)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^* = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} [\mathbf{A}^{(k)}]^T \boldsymbol{\Gamma}^{(k)} \quad (4.25)$$

onde N_k é o número de subvolumes e $v^{(k)}$ é a fração volumétrica do k -ésimo subvolume.

Após a obtenção das matrizes homogeneizadas, os coeficientes de dilatação térmica efetivos são calculados com a Equação (4.23).

4.2 Caso particular da homogeneização termoelástica de compósitos periódicos com fibras longas unidirecionais

Para avaliar as propriedades termoelásticas efetivas de compósitos periódicos reforçados por fibras longas unidirecionais pode-se utilizar a versão paramétrica

bidimensional da Teoria de Volumes Finitos. A formulação apresentada sucintamente nesta seção pode ser encontrada de forma mais detalhada em Khatam e Pindera (2009b). No caso bidimensional, a microestrutura do compósito é discretizada em subvolumes quadrilaterais como mostrado na Seção 2.2.

4.2.1 Matriz de rigidez de um subvolume

Na versão paramétrica bidimensional da teoria de volumes finitos, as componentes do campo de deslocamentos flutuantes $\tilde{u}_i^{(k)}$ são aproximadas por uma expansão polinomial de segunda ordem de Legendre nas coordenadas paramétricas (η, ξ)

$$\tilde{u}_i^{(k)} = W_{i(00)}^{(k)} + \eta W_{i(10)}^{(k)} + \xi W_{i(01)}^{(k)} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)W_{i(20)}^{(k)} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)W_{i(02)}^{(k)} \quad (4.26)$$

em que $W_{i(mn)}^{(k)}$ são coeficientes a determinar. Esses coeficientes são relacionados com os deslocamentos médios nas faces dos subvolumes por meio de uma matriz $\bar{\mathbf{B}}$:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}}[\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(1)} \quad \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(2)} \quad \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(3)} \quad \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle^{(4)}]^T \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{W}_i = [W_{i(10)} \quad W_{i(01)} \quad W_{i(20)} \quad W_{i(02)}]^T$.

Devido à presença das fibras unidirecionais, a deformação $\varepsilon_{11}^{(k)}$ é a mesma para ambas as fases e é igual à deformação axial macroscópica $\bar{\varepsilon}_{11}$. As deformações normais e de cisalhamento no plano $y_2 - y_3$ são desacopladas das deformações de cisalhamento fora do plano.

As deformações médias nas faces dos subvolumes podem ser obtidas a partir da Equação (4.7), considerando que as derivadas parciais das componentes de deslocamentos flutuantes com relação às coordenadas (y_2, y_3) estão relacionadas com as derivadas parciais com relação às coordenadas (η, ξ) pela média da matriz Jacobina inversa $\langle \bar{\mathbf{J}} \rangle$.

Considerando que material dos subvolumes é ortótropo e que $\varepsilon_{11}^{(k)} = \bar{\varepsilon}_{11}$, as tensões médias nas faces dos subvolumes são obtidas pela seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma_{12} \rangle \\ \langle \sigma_{13} \rangle \end{Bmatrix}^{(p)} = \mathbf{C}_{out} \begin{bmatrix} 2\bar{\varepsilon}_{12} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_{out} \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle \mathbf{A}_{(p)} \mathbf{W}_1 \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_{22} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{23} \rangle \end{bmatrix}^{(p)} = \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{13} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} + \mathbf{C}_{in} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_{in} \bar{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} \langle \bar{J} \rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \langle \bar{J} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(p)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \langle \sigma_{22}^{th} \rangle \\ \langle \sigma_{33}^{th} \rangle \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

em que

$$\mathbf{C}_{in} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{C}_{out} = \begin{bmatrix} C_{66} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

e

$$\mathbf{A}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{A}_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix}$$

A partir das Equações (4.28) e (4.29), pode-se escrever a equação que segue para o vetor de componentes de tensões médias nas faces de cada subvolume na forma

$$\langle \mathbf{t} \rangle = \mathbf{N} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{A}} \mathbf{W} \quad (4.33)$$

onde $\langle \mathbf{t} \rangle = [\langle \mathbf{t} \rangle^{(1)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(2)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(3)} \quad \langle \mathbf{t} \rangle^{(4)}]^T$ e $\mathbf{N} = [\mathbf{n}^{(1)} \quad \mathbf{n}^{(2)} \quad \mathbf{n}^{(3)} \quad \mathbf{n}^{(4)}]^T$.

Para as componentes de tensão fora do plano $y_2 - y_3$, $\langle \mathbf{t} \rangle^{(p)} = [\langle t_1 \rangle^{(p)}]$, $\mathbf{n}^{(p)} = [n_2 \quad n_3]^{(p)}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{out}$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [2\bar{\varepsilon}_{12} \quad 2\bar{\varepsilon}_{13}]^T$. Para as componentes no referido plano, $\langle \mathbf{t} \rangle^{(p)} = [\langle t_2 \rangle^{(p)} \quad \langle t_3 \rangle^{(p)}]^T$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\bar{\varepsilon}_{11} \quad \bar{\varepsilon}_{22} \quad \bar{\varepsilon}_{33} \quad 2\bar{\varepsilon}_{23}]^T,$$

$$\mathbf{n}^{(p)} = \begin{bmatrix} n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_3 & n_2 \end{bmatrix}^{(p)} \mathbf{e}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}.$$

A substituição da Equação (4.27) em (4.33) resulta na seguinte expressão:

$$\langle \mathbf{t} \rangle = \mathbf{N} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{K} \langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle \quad (4.34)$$

em que a matriz de rigidez local do subvolume \mathbf{K} é o produto das matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$.

4.2.2 Matriz de rigidez global

Considerando as condições de continuidade de deslocamentos e de componentes de tensão nas faces comuns a subvolumes adjacentes, juntamente com as condições de periodicidade, a partir da Equação (4.34) é gerado um sistema de equações globais:

$$\mathbf{K}_{out}^G \langle \tilde{\mathbf{U}}_{out} \rangle = \Delta \mathbf{C}_{out} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{out} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{K}_{in}^G \langle \tilde{\mathbf{U}}_{in} \rangle = \Delta \mathbf{C}_{in} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{in} + \Delta \boldsymbol{\Gamma}_{in} \Delta T \quad (4.36)$$

em que \mathbf{K}_{out}^G e \mathbf{K}_{in}^G são matrizes de rigidez global. As matrizes $\Delta \mathbf{C}_{out}$ e $\Delta \mathbf{C}_{in}$ são geradas pela diferença das matrizes de rigidez local de subvolumes adjacentes e o vetor $\Delta \boldsymbol{\Gamma}_{in}$ está associado aos coeficientes de dilatação térmica dos subvolumes.

4.2.3 Matrizes homogeneizadas

A relação constitutiva macroscópica do material é representada pela seguinte expressão:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^* \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \boldsymbol{\Gamma}^* \Delta T \quad (4.37)$$

sendo \mathbf{C}^* a matriz de rigidez homogeneizada e

$$\boldsymbol{\Gamma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\alpha}^* \quad (4.38)$$

em que as matrizes \mathbf{C}^* e $\boldsymbol{\Gamma}^*$ são obtidas por meio das seguintes equações:

$$\boldsymbol{\Gamma}^* = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} [\mathbf{A}^{(k)}]^T \boldsymbol{\Gamma}^{(k)} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{C}^* = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{A}^{(k)} \quad (4.40)$$

As matrizes de concentração de deformação $\mathbf{A}^{(k)}$ são determinadas com a aplicação de deformações macroscópicas devidamente escolhida. O procedimento de montagem dessas matrizes é análogo ao apresentado na Seção 4.1.3. Finalmente, uma vez obtidas as matrizes \mathbf{C}^* e $\boldsymbol{\Gamma}^*$, os coeficientes de dilatação térmica efetivos podem ser calculados com a Equação (4.38).

4.3 Formulação analítica para cálculo de propriedades elásticas efetivas

Nesta seção é apresentada resumidamente uma formulação analítica baseada em séries de Fourier para homogeneização elástica de compósitos periódicos. A formulação mais detalhada pode ser encontrada em Nemat-Nasser, Iwakuma e Hejazi (1982) e Luciano e Barbero (1994). No presente trabalho, esta formulação é utilizada para geração de resultados que sirvam de comparação com aqueles obtidos pelo modelo de homogeneização baseado na Teoria de Volumes Finitos.

Devido à periodicidade da microestrutura do compósito, as deformações no elemento de volume representativo submetido à condição de contorno homogênea podem ser representadas em séries de Fourier:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = \sum_{\xi}^{\pm\infty} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}} \quad (4.41)$$

sendo os coeficientes de Fourier definidos da seguinte forma:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}} d\Omega \quad (4.42)$$

em que os componentes do vetor $\boldsymbol{\xi}$ são definidos pela Equação (2.47).

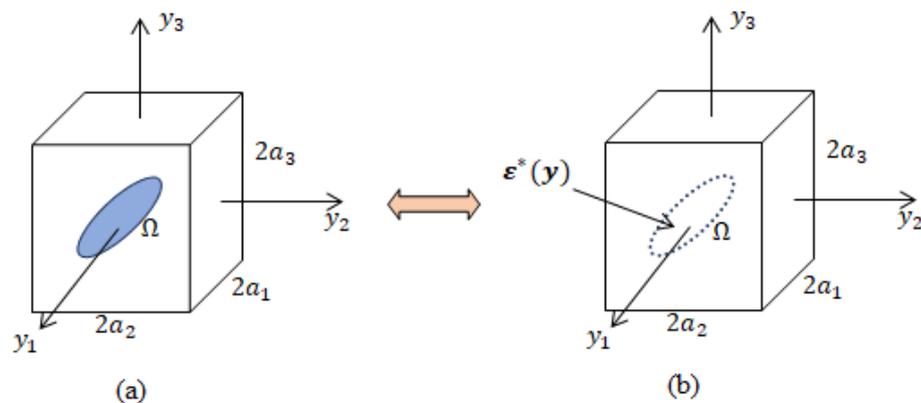
De acordo com o método da inclusão equivalente de Eshelby (ESHELBY, 1957), uma célula unitária de repetição heterogênea (Figura 4.2-a) pode ser substituída por outra de material homogêneo submetida a uma *eigenstrain* adequada $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{y})$, a qual é nula fora do domínio da inclusão (Figura 4.2-b). Esta *eigenstrain* tem distribuição periódica e pode ser representada pela seguinte série de Fourier:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{y}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}}^{\pm\infty} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}} \quad (4.43)$$

em que

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{y}) e^{-i\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}} d\mathbf{y} \quad (4.44)$$

Figura 4.2 - (a) Célula unitária de repetição da microestrutura real (b) Célula unitária de repetição homogênea.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Em termos de valores médios, a imposição da equivalência dos campos de tensão dos dois problemas pode ser representada pela seguinte equação de consistência:

$$\mathbf{C}_f : (\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{P} : \mathbf{C}_m : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle) = \mathbf{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}_0 + (\mathbf{P} : \mathbf{C}_m - \mathbf{I}^{(4)}) : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle) \quad (4.45)$$

onde \mathbf{C}_f e \mathbf{C}_m são, respectivamente, as matrizes constitutivas da inclusão e da matriz, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ é a deformação macroscópica na célula unitária, $\mathbf{I}^{(4)}$ representa a matriz identidade de ordem 4. No caso em que os materiais da matriz e da inclusão são isotrópicos, \mathbf{P} pode ser calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_m} \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \left(\text{sym}(\bar{\xi} \otimes \mathbf{I}^{(2)} \otimes \bar{\xi}) - \frac{1}{2(1-\nu_m)} (\bar{\xi} \otimes \bar{\xi} \otimes \bar{\xi} \otimes \bar{\xi}) \right) \quad (4.46)$$

sendo

$$f(\xi) = f_v \left(\frac{g_0(\xi)}{V_\Omega} \right) \left(\frac{g_0(-\xi)}{V_\Omega} \right) \quad (4.47)$$

e $\bar{\xi} = \xi/|\xi|$, f_v é a fração volumétrica de inclusões, $\mathbf{I}^{(2)}$ representa a matriz identidade de ordem 2, μ_m e ν_m são o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson da matriz, respectivamente.

De acordo Nemat-Nasser, Iwakuma e Hejazi (1982), a matriz constitutiva efetiva pode ser obtida pela equação a seguir:

$$\mathbf{C}^* : \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}_0 - f_v \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle) \quad (4.48)$$

A partir da Equação (4.45) pode-se determinar a média volumétrica da *eigenstrain*:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle = \left[\left((\mathbf{C}_m - \mathbf{C}_f)^{-1} - \mathbf{P} \right) \mathbf{C} \right]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (4.49)$$

Substituindo-se a Equação (4.49) em (4.48), obtém-se a seguinte expressão para a matriz constitutiva efetiva:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_m - f_v \left((\mathbf{C}_m - \mathbf{C}_f)^{-1} - \mathbf{P} \right)^{-1} \quad (4.50)$$

A matriz constitutiva efetiva pode ser reescrita com a substituição da expressão (4.46) em (4.50) e considerando que os materiais da matriz e da fibra são isotrópicos:

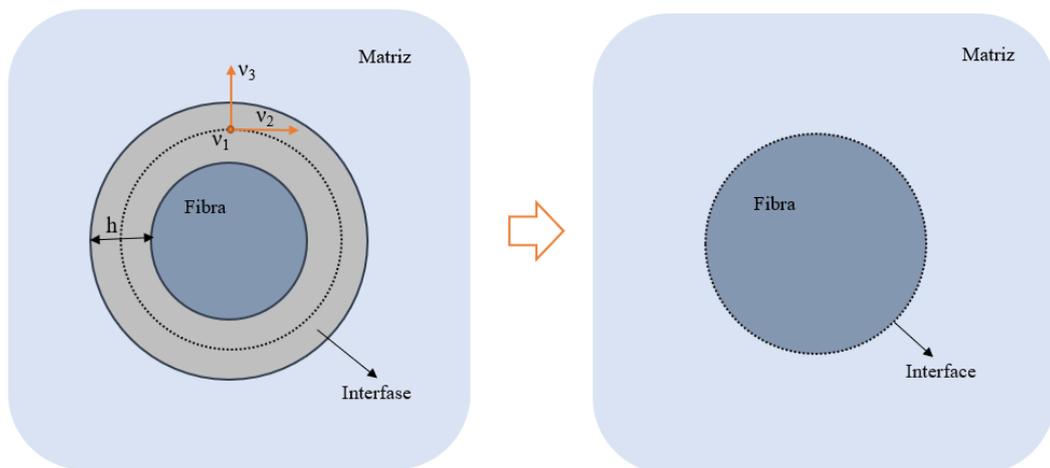
$$\mathbf{C}^* = \lambda_m \mathbf{I}^{(2)} \otimes \mathbf{I}^{(2)} + 2\mu_m \mathbf{I}^{(4)} - f_v [(\lambda_m - \lambda_f) \mathbf{I}^{(2)} \otimes \mathbf{I}^{(2)} + 2(\mu_m - \mu_f) \mathbf{I}^{(4)}]^{-1} - \frac{1}{\mu_m} \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \left[\text{sym}(\bar{\xi} \otimes \mathbf{I}^2 \otimes \bar{\xi}) - \frac{1}{2(1 - \nu_m)} (\bar{\xi} \otimes \bar{\xi} \otimes \bar{\xi} \otimes \bar{\xi}) \right]^{-1} \quad (4.51)$$

As expressões para o cálculo dos elementos da matriz constitutiva homogeneizada são apresentadas no Apêndice D.

4.4 Elemento de interface imperfeita

O elemento de interface imperfeita utilizado nas análises bidimensionais foi apresentado por Escarpini Filho (2015) e teve seu desenvolvimento baseado nos trabalhos de Benveniste e Miloh (2001) e Benveniste (2006). O modelo considera uma célula unitária de repetição constituída por três fases: fibra, matriz e uma interfase fina de espessura h , como ilustrado na Figura 4.3. A estratégia consiste na substituição da região de interfase por uma interface imperfeita, ou seja, na transformação do problema trifásico em um bifásico equivalente (Figura 4.3). A interface imperfeita, neste caso, é localizada no centro da interfase.

Figura 4.3 - Interfase substituída por uma interface.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Considera-se que as componentes do tensor constitutivo elástico da interfase são muito menores do que as componentes do tensor constitutivo das demais fases. Nestas condições, pode-se mostrar que a equivalência pode ser aproximadamente alcançada impondo-se uma adequada descontinuidade no campo de deslocamento através da interface, mantendo-se como contínuo o campo de tensão ao longo da célula unitária (BENVENISTE, 2006).

A mencionada descontinuidade nos deslocamentos pode ser expressa em termos das componentes de tensão pelas seguintes expressões, onde o sinal positivo indica os pontos do lado da matriz e o sinal negativo, do lado da fibra:

$$(u_1)_+ - (u_1)_- = \frac{h}{\mu_i} \sigma_{31} \quad (4.52)$$

$$(u_2)_+ - (u_2)_- = \frac{h}{\mu_i} \sigma_{32} \quad (4.53)$$

$$(u_3)_+ - (u_3)_- = \frac{h}{\lambda_i + 2\mu_i} \sigma_{33} \quad (4.54)$$

sendo λ e μ as constantes de Lamé.

Na formulação paramétrica da Teoria de Volumes Finitos, as interfaces são discretizadas em segmentos de retas que são as faces que separam a matriz da fibra. Considerando os índices (m) e (f) para as variáveis nas faces do lado da matriz e da fibra, respectivamente, a relação entre tensão e deformação é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(m)} \\ t_2^{(m)} \\ t_3^{(m)} \\ t_1^{(f)} \\ t_2^{(f)} \\ t_3^{(f)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}][\mathbf{K}_L][\mathbf{T}]^T \begin{Bmatrix} u_1^{(m)} \\ u_2^{(m)} \\ u_3^{(m)} \\ u_1^{(f)} \\ u_2^{(f)} \\ u_3^{(f)} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

em que $[\mathbf{T}]$ é a matriz de transformação, dependente do ângulo θ entre a normal à interface e a direção horizontal e definida por

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & -\text{cos}(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) \\ 0 & -\text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

e a matriz $[\mathbf{K}_L]$ é dada por

$$[\mathbf{K}_L] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\lambda + 2\mu)} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Por fim, a matriz de rigidez do elemento de interface imperfeita é obtida pela seguinte expressão:

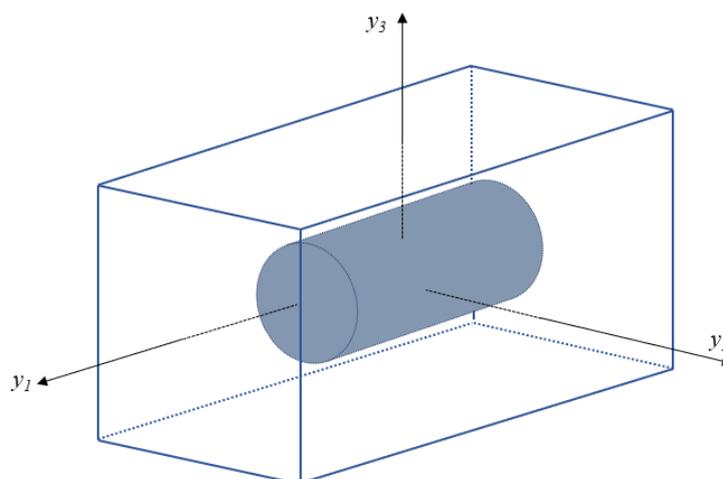
$$[\mathbf{K}_e] = [\mathbf{T}][\mathbf{K}_L][\mathbf{T}]^T \quad (4.58)$$

5 EXEMPLOS DE HOMOGENEIZAÇÃO TERMOELÁSTICA DE COMPÓSITOS PERIÓDICOS REFORÇADOS POR FIBRAS

5.1 Propriedades termoelásticas de compósitos com fibras curtas

Nesta seção são apresentados exemplos da determinação das propriedades termoelásticas efetivas de compósitos reforçados por fibras curtas distribuídas periodicamente. Considera-se que o índice 1 das propriedades calculadas representa a direção ao longo da fibra, enquanto os índices 2 e 3 indicam as direções transversais à fibra (Figura 5.1).

Figura 5.1 - Célula unitária de repetição.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 5.1.1 – Propriedades elásticas efetivas de compósitos reforçados por fibras contínuas unidirecionais.

Neste exemplo são calculados os módulos E_{22}^* e G_{23}^* efetivos de um compósito reforçado por fibras longas unidirecionais. Os resultados obtidos com a formulação tridimensional da TVF são comparados com aqueles apresentados em Chen, Wang e Chen (2018), os quais foram obtidos com uma formulação micromecânica baseada no Método dos Elementos Finitos. A célula unitária de repetição utilizada neste exemplo tem forma paralelepípedica.

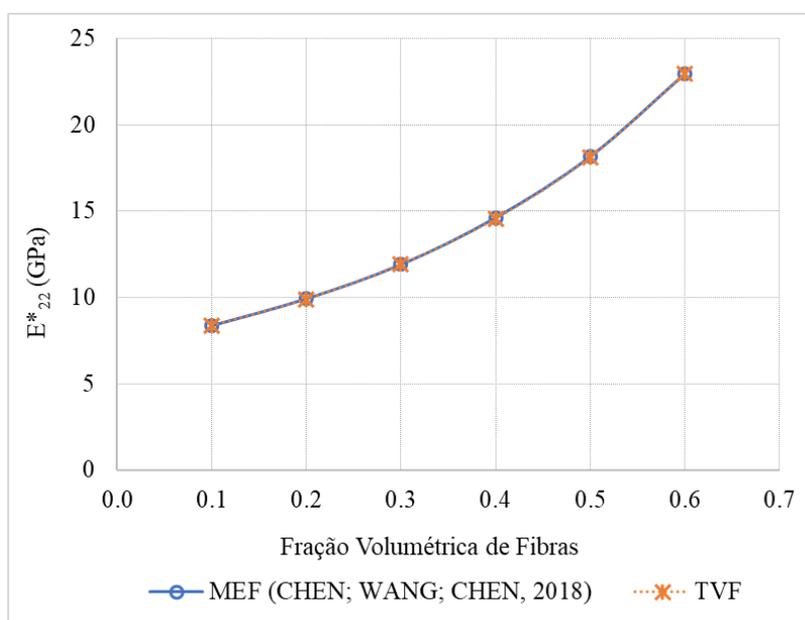
As propriedades elásticas da matriz e da fibra são apresentadas na Tabela 5.1. A fração volumétrica de fibras é admitida variando de 10% a 60%.

Tabela 5.1 - Propriedades elásticas dos materiais.

Material	E (GPa)	ν
Matriz	7,0	0,30
Fibra	70,0	0,22

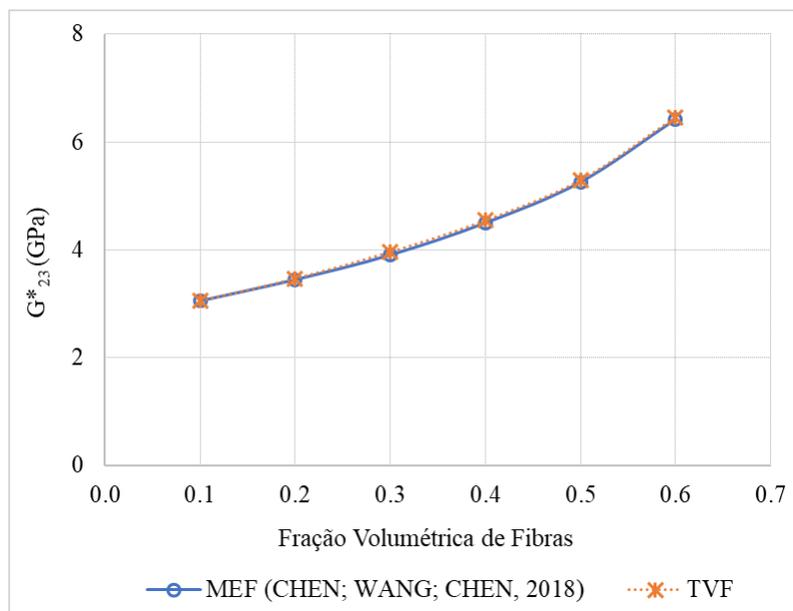
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Os módulos de elasticidade efetivos E_{22}^* para as frações volumétricas adotadas são mostrados na Figura 5.2. Por sua vez, os módulos efetivos G_{23}^* são apresentados na Figura 5.3. Em ambos os casos, nota-se uma ótima concordância entre os resultados obtidos com os dois diferentes métodos numéricos empregados. Como observado e esperado, as propriedades efetivas aumentam à medida que cresce a fração volumétrica de fibras.

Figura 5.2 - Módulo de elasticidade efetivo na direção transversal à fibra em função da fração volumétrica.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.3 - Módulo de elasticidade transversal efetivo em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 5.1.2 – Coeficientes de dilatação térmica efetivos de compósitos reforçados por fibras contínuas unidirecionais.

Este exemplo tem como objetivo a obtenção dos coeficientes de dilatação térmica efetivos de um compósito com fibras longas unidirecionais. As propriedades dos materiais constituintes são mostradas na Tabela 5.2. Os resultados obtidos pela formulação tridimensional da TVF, utilizando uma célula unitária cúbica, são comparados com aqueles encontrados por Karadeniz e Kumlutaz (2007) usando uma formulação micromecânica baseada no MEF.

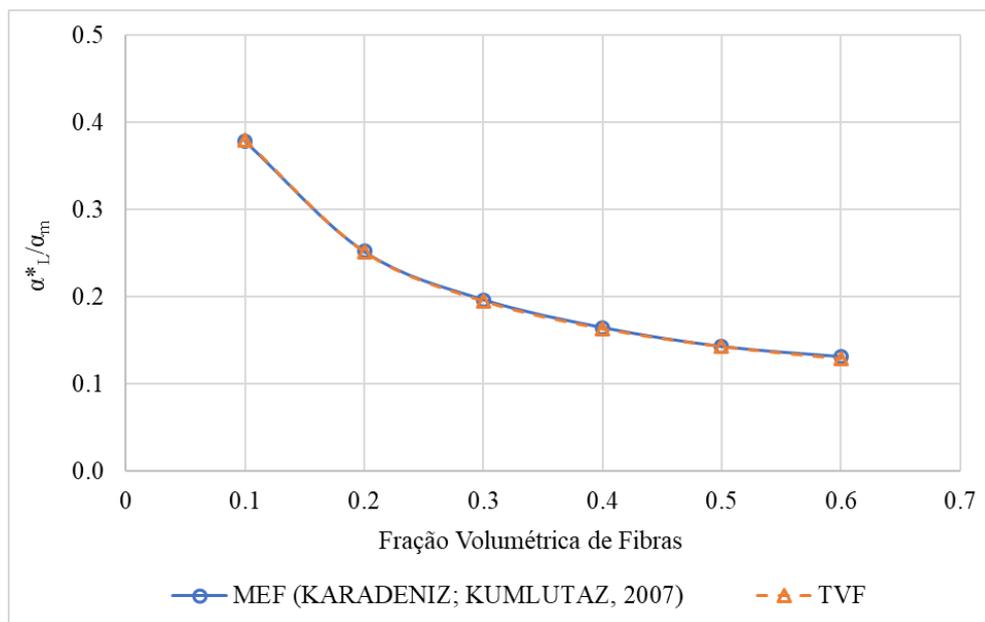
Tabela 5.2 - Propriedades dos materiais.

Material	E (GPa)	G (GPa)	ν	α
Matriz Epóxi	3,5	3,89	0,35	$5,25 \cdot 10^{-5}$
Fibra de Vidro	72,0	40,0	0,20	$5,00 \cdot 10^{-6}$

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A Figura 5.4 e a Figura 5.5 apresentam as curvas representativas da variação dos coeficientes de dilatação térmica efetivos na direção longitudinal e transversal, respectivamente, em função da fração volumétrica das fibras do compósito. Como pode ser observado, os resultados obtidos pela formulação tridimensional aqui apresentada estão em excelente concordância com aqueles obtidos pelo modelo micromecânico baseado no MEF.

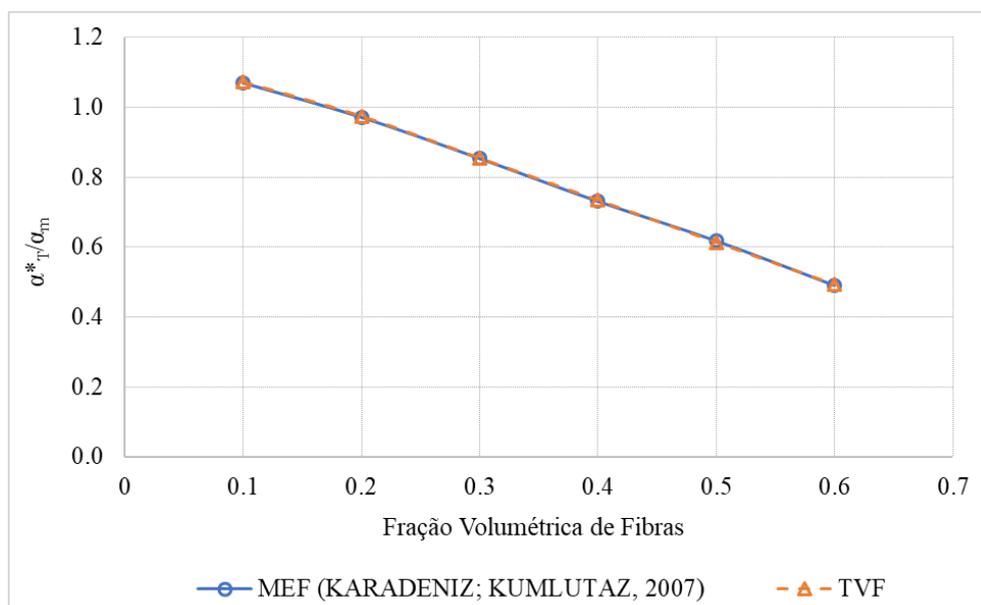
Figura 5.4 - Coeficiente de dilatação térmica efetiva na direção longitudinal em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Como o coeficiente de dilatação térmica das fibras é menor do que o da matriz, a redução dos coeficientes de dilatação efetivos para as duas direções com o aumento da fração volumétrica de fibras é fisicamente consistente (ver Figura 5.4 e Figura 5.5).

Figura 5.5 - Coeficiente de dilatação térmica efetiva na direção transversal em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 5.1.3 – Influência da fração volumétrica de fibras.

Analisa-se, neste exemplo, a influência da fração volumétrica de fibras nas propriedades termoelásticas efetivas de um compósito periódico reforçado por fibras curtas alinhadas. As propriedades das fases que constituem o compósito estão apresentadas na Tabela 5.3. Adotou-se uma célula unitária paralelepípedica com razão de aspecto igual a 2. A fibra possui raio igual a $8 \mu\text{m}$ e sua razão de aspecto é mantida igual a 2 em todos os casos analisados.

Tabela 5.3 - Propriedades dos materiais.

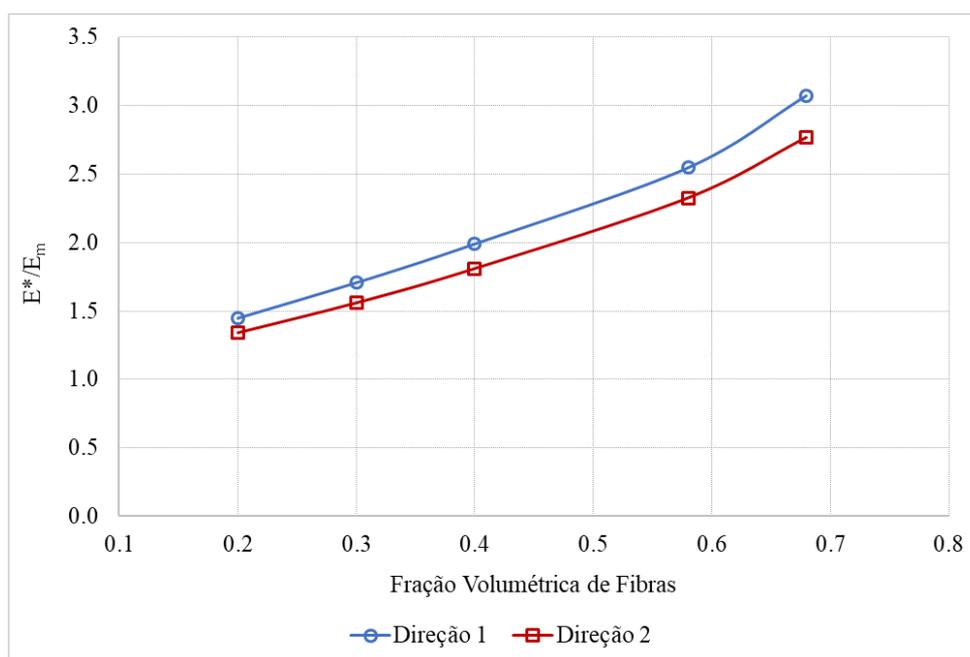
Material	E (GPa)	G (GPa)	ν	A
Matriz de Alumínio	96,5	37,1	0,30	$9,25 \cdot 10^{-6}$
Fibra de SiC	431,0	172,0	0,25	$4,86 \cdot 10^{-6}$

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na Figura 5.6 são mostrados os módulos de elasticidade longitudinal efetivos nas direções 1 e 2. Os valores de E_{11}^* e E_{22}^* aumentam juntamente com a fração volumétrica de fibras devido às propriedades da fibra. Este crescimento também acontece com os módulos transversais G_{12}^* e G_{23}^* , apresentados na Figura 5.7.

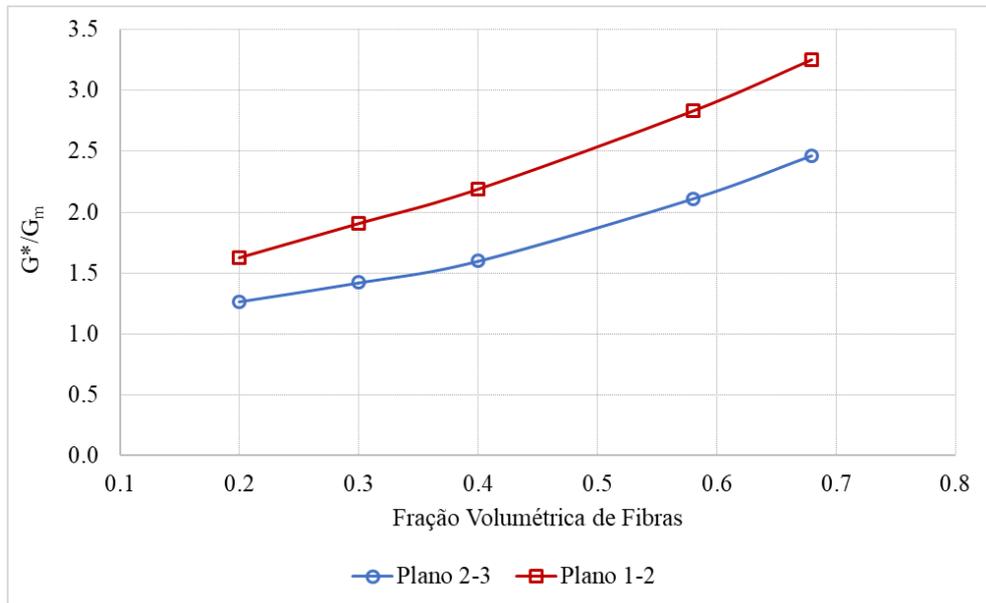
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.6 - Módulo de elasticidade efetivo em função da fração volumétrica fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

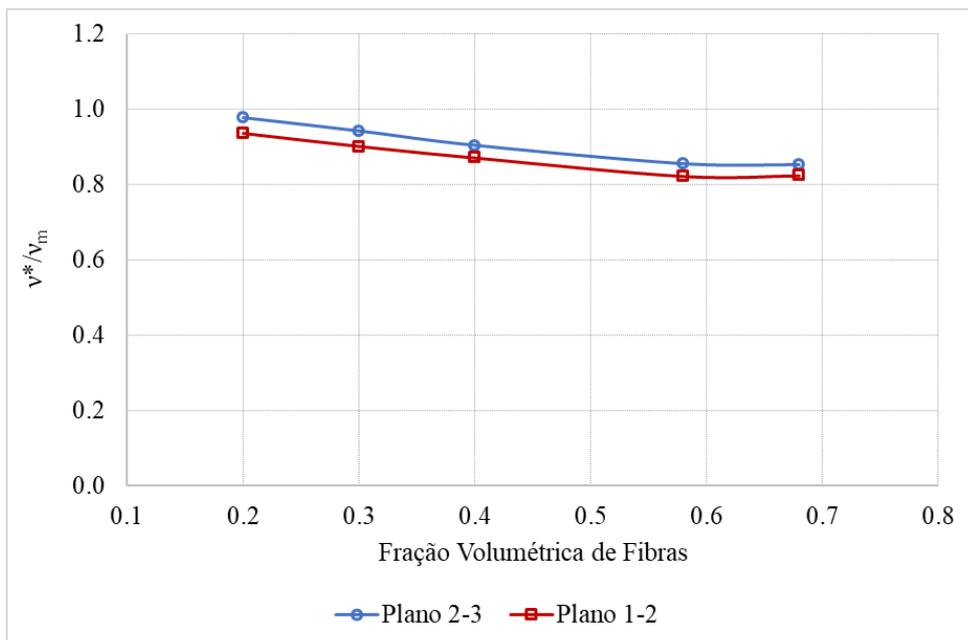
Figura 5.7 - Módulo de elasticidade transversal efetivo em função da fração volumétrica de fibras



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

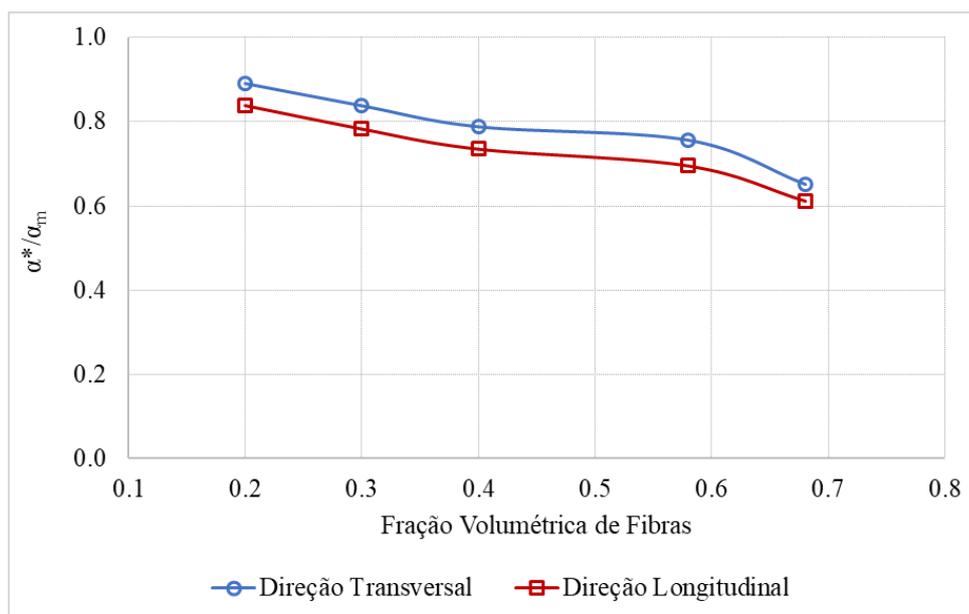
De acordo com a Figura 5.8, os coeficientes de Poisson efetivos ν_{12}^* e ν_{23}^* decrescem à medida que a fração volumétrica de fibras aumenta. Os coeficientes de dilatação térmica efetivos α_L^* e α_T^* , mostrados na Figura 5.9, apresentam o mesmo comportamento.

Figura 5.8 - Coeficiente de Poisson efetivo em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.9 - Coeficiente de dilatação térmica efetiva em função da fração volumétrica de fibras.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 5.1.4 – Influência da razão de aspecto da fibra.

Neste exemplo é avaliada a influência da razão de aspecto da fibra nas propriedades termoelásticas efetivas de um compósito reforçado por fibras curtas com 8 μm de raio. A fração volumétrica de fibras (f_v) vale 30% e a célula unitária paralelepípedica possui $a = 2,5$.

Os limites máximo e mínimo para a razão de aspecto da fibra podem ser calculados pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\rho_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\pi a^2}{4 f_v}} \quad (5.1)$$

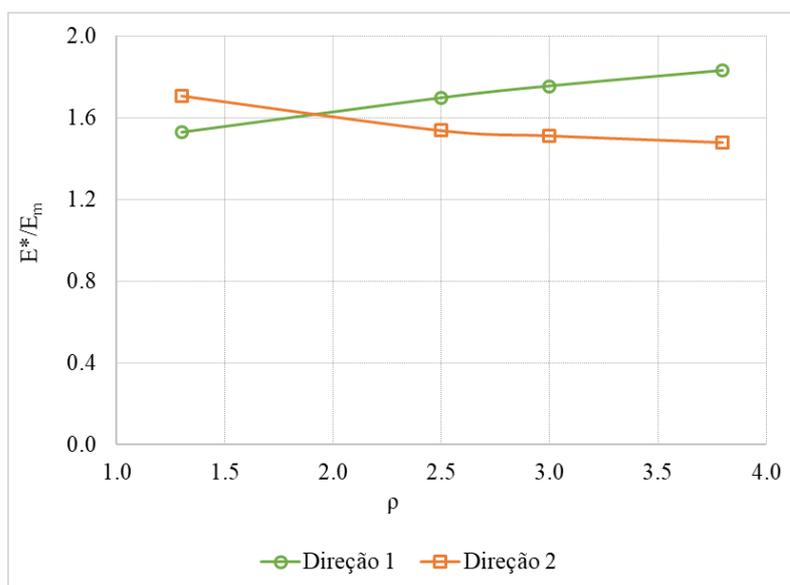
$$\rho_{\text{mín}} = \frac{4 a f_v}{\pi}$$

Dessa forma, para os valores adotados de fração volumétrica e razão de aspecto da célula unitária, a razão de aspecto da fibra pode variar entre 0,95 e 4,05. As propriedades termoelásticas efetivas foram calculadas para os seguintes valores de ρ : 1,3; 2,5; 3 e 3,8. As propriedades dos materiais são apresentadas na Tabela 5.3.

A Figura 5.10 apresenta as variações dos módulos efetivos E_{11}^* e E_{22}^* para o intervalo de ρ adotado. O módulo efetivo na direção 1 apresenta crescimento aproximado de 20% quando ρ varia do valor mínimo para o máximo adotados. Esse crescimento pode ser explicado pelo aumento do comprimento da fibra na direção longitudinal juntamente com a

razão de aspecto da fibra, uma vez que o raio é mantido constante. Por sua vez, o módulo de elasticidade E_{22}^* apresenta uma diminuição de aproximadamente 13% entre os extremos do intervalo.

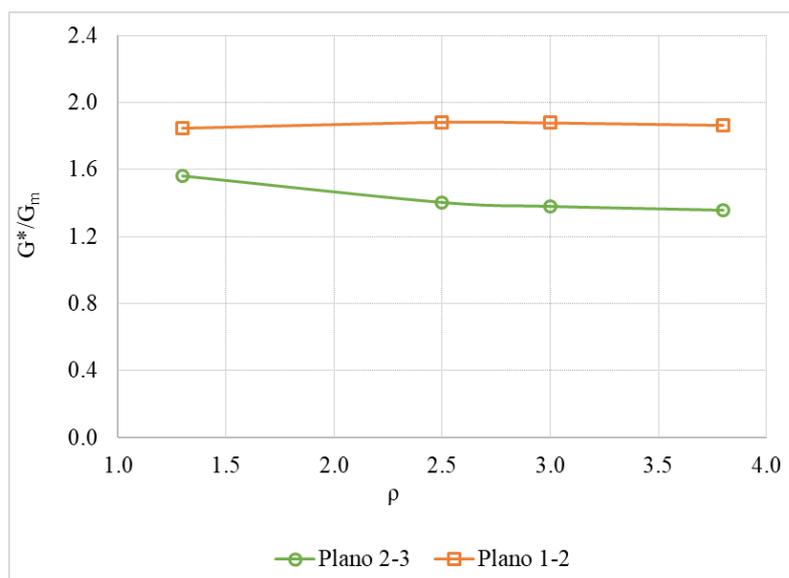
Figura 5.10 - Módulo de elasticidade longitudinal efetivo em função da razão de aspecto da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

As curvas correspondentes às variações dos módulos de elasticidade transversais efetivos G_{12}^* e G_{23}^* são apresentadas na Figura 5.11. Como se observa, estes últimos módulos efetivos variam pouco no intervalo considerado. O valor de G_{23}^* uma redução na ordem de 13% enquanto que G_{12}^* se mantém praticamente constante.

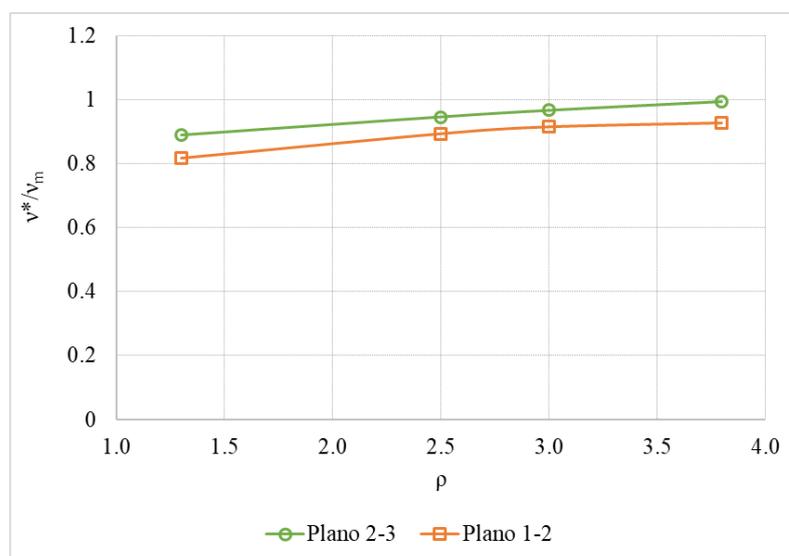
Figura 5.11 - Módulo de elasticidade transversal efetivo em função da razão de aspecto da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

A Figura 5.12 apresenta como variam os coeficientes de Poisson efetivos do compósito ao longo do intervalo adotado para a razão de aspecto da fibra. Assim como os módulos de elasticidade transversais efetivos, os mencionados coeficientes efetivos não variam muito no intervalo.

Figura 5.12 - Coeficiente de Poisson efetivo em função da razão de aspecto da fibra.

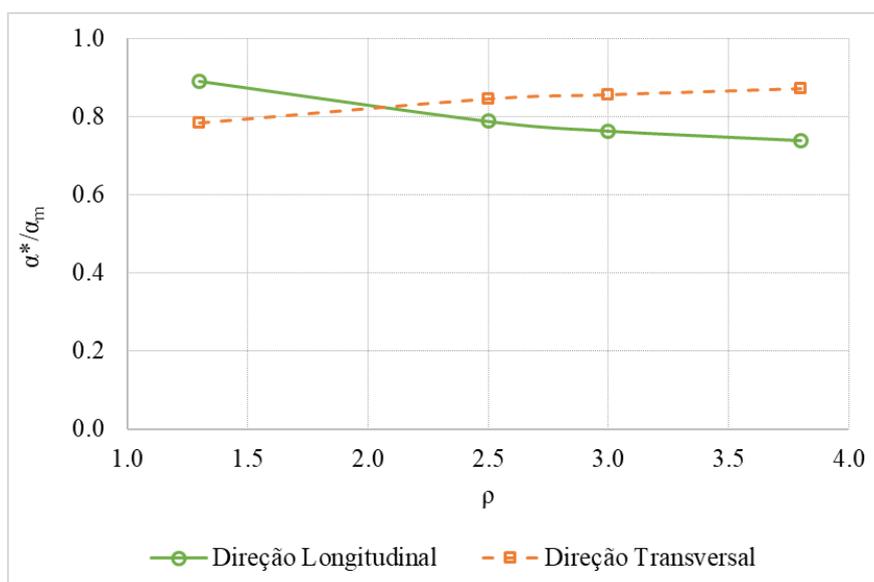


Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Finalmente, na Figura 5.13 são mostrados os coeficientes de dilatação térmica efetivos em função da razão de aspecto da fibra. Nota-se que α_L^* apresenta pequeno decréscimo, na

ordem de 17%, com o aumento de ρ . Por outro lado, α_T^* cresce aproximadamente 11% na mesma situação.

Figura 5.13 - Coeficientes de dilatação térmica efetivos em função da razão de aspecto da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 5.1.5 – Influência do raio da fibra considerando a presença de interfase.

Neste caso é avaliado como a variação do raio da fibra afeta as propriedades termoelásticas efetivas de um compósito reforçado com fibras curtas quando se considera a presença de uma interfase. Os resultados são comparados com o caso de compósito sem interfase. As propriedades dos materiais utilizados nesse caso são mostradas na Tabela 5.4. A razão de aspecto da fibra e da célula unitária são iguais a 2 e a fração volumétrica vale 30%.

Tabela 5.4 - Propriedades termomecânicas das fases.

Material	E (GPa)	G (GPa)	v	α ($^{\circ}\text{C}$)
Matriz de alumínio	96,5	37,1	0,30	$9,25 \cdot 10^{-6}$
Fibra de SiC	431	172	0,25	$4,86 \cdot 10^{-6}$
Interfase de Carbono	34,48	14,34	0,20	$3,30 \cdot 10^{-6}$

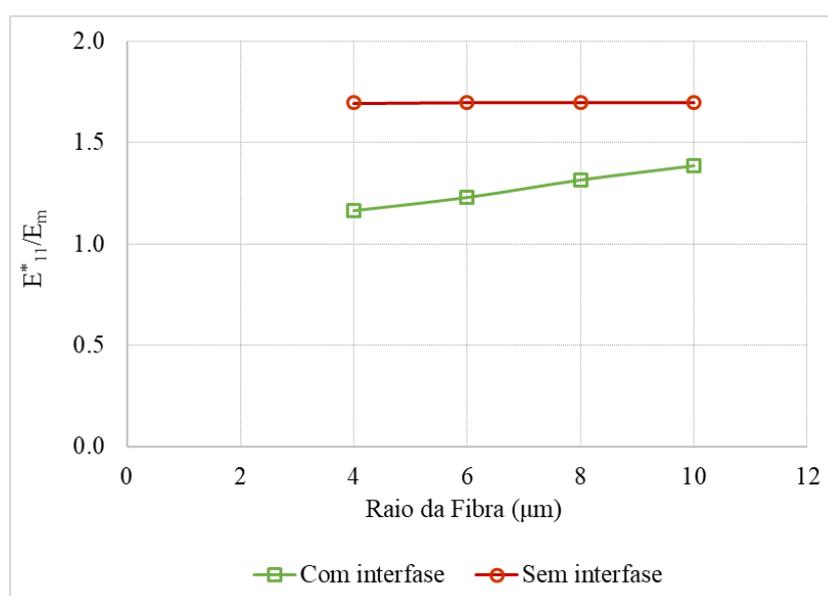
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Os resultados apresentados da Figura 5.14 até a Figura 5.21 mostram que as propriedades termoelásticas efetivas não são afetadas pela variação do raio da fibra quando não há presença interfase.

Quando se considera a presença de uma interfase entre a matriz e a fibra, a variação do raio afeta os valores efetivos das propriedades. Quando o raio da fibra cresce e a fração volumétrica se mantém constante, o volume total de interfase diminui. Dessa forma, o crescimento do raio aproxima o problema de uma fibra com interfase do caso de fibra sem interfase.

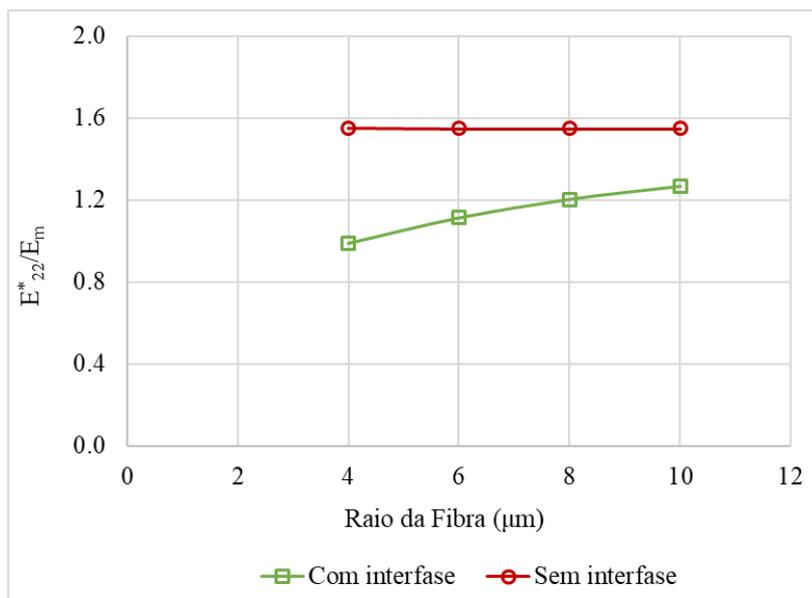
De modo geral, os valores das propriedades efetivas aumentaram com o crescimento do raio da fibra. Isso acontece devido à diminuição do volume total de interfase, o que implica na menor influência de suas propriedades.

Figura 5.14 - Módulo de elasticidade longitudinal efetivo na direção 1 em função do raio da fibra.



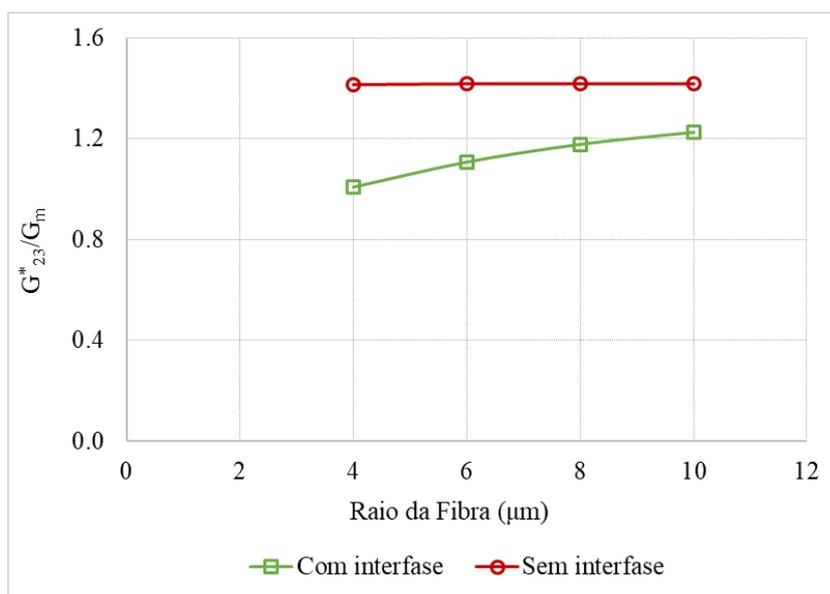
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.15 - Módulo de elasticidade longitudinal efetivo na direção 2 em função do raio da fibra.



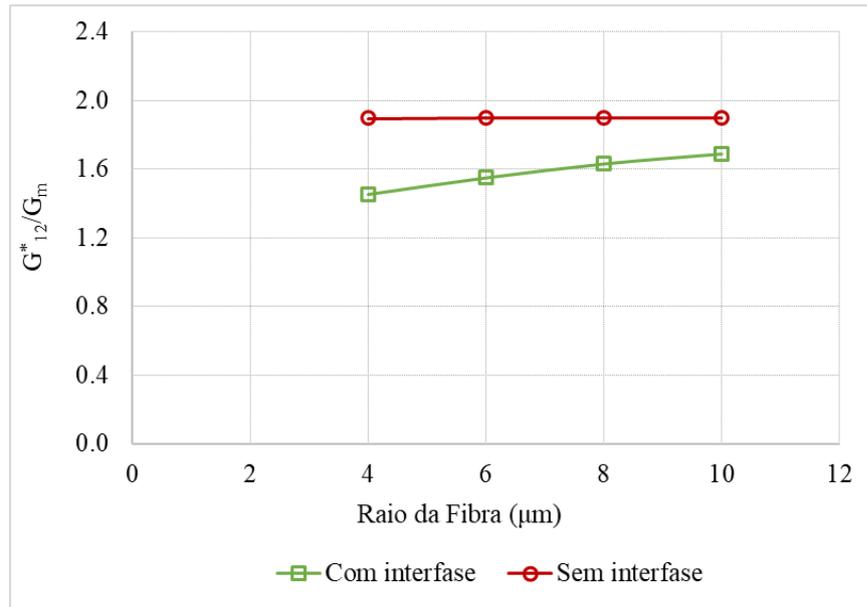
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.16 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 2-3 em função do raio da fibra.



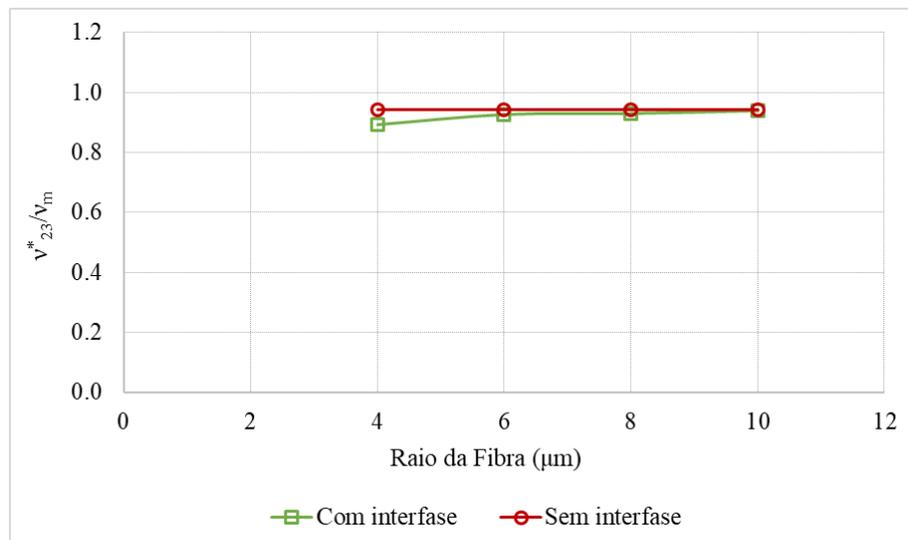
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.17 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 1-2 em função do raio da fibra.



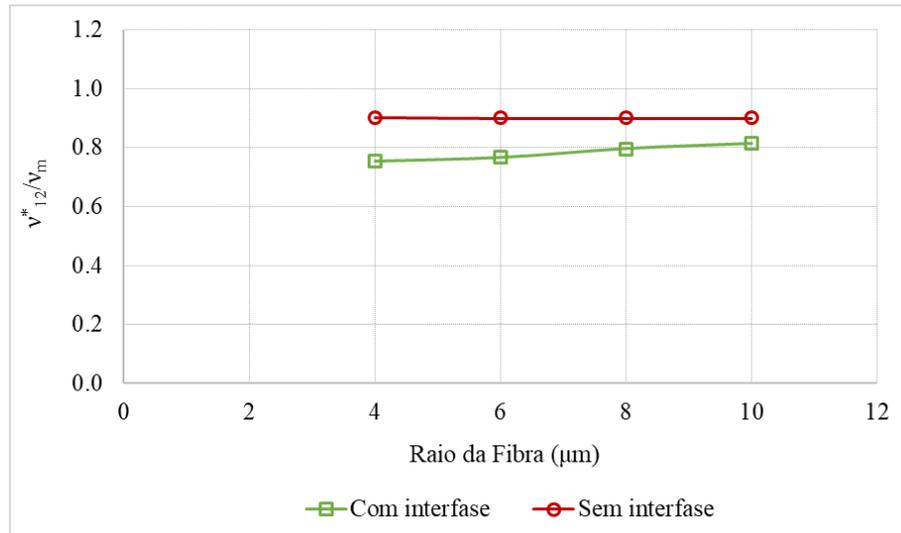
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.18 - Coeficiente de Poisson efetivo no plano 2-3 em função do raio da fibra.



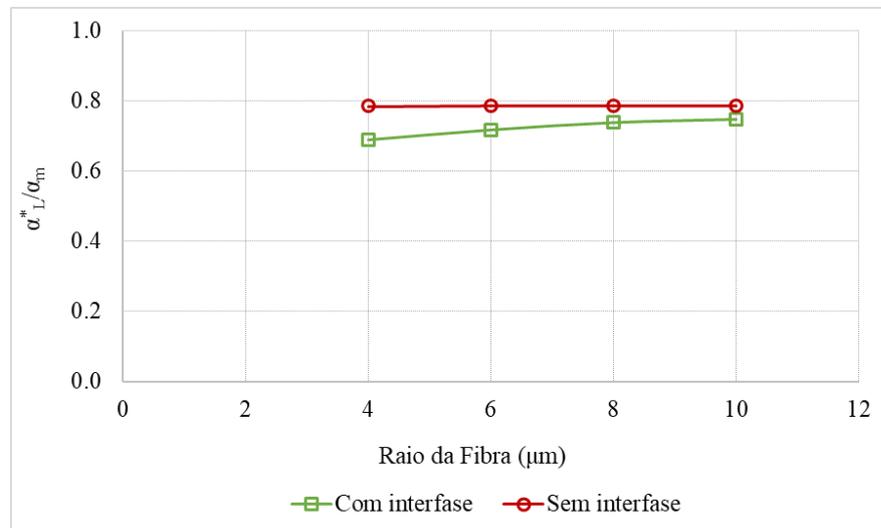
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.19 - Coeficiente de Poisson efetivo no plano 1-2 em função do raio da fibra.



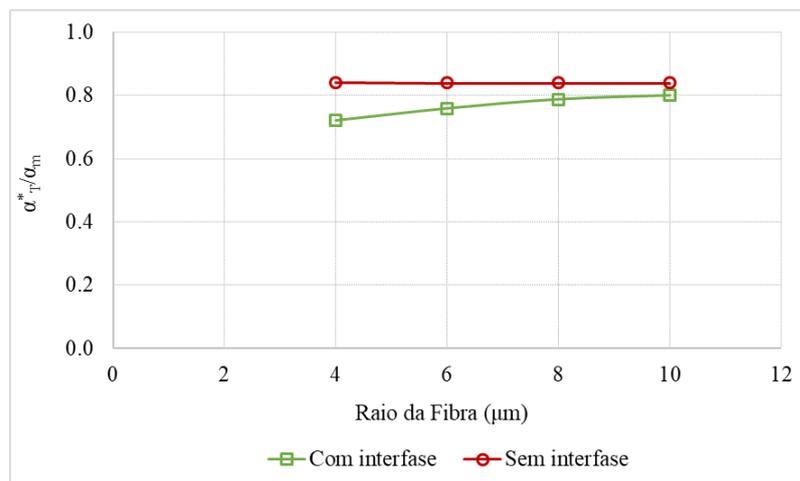
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.20 - Coeficiente de dilatação térmica efetivo na direção longitudinal em função do raio da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.21 - Coeficiente de dilatação térmica efetivo na direção transversal em função do raio da fibra.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

5.2 Propriedades termoelásticas de compósitos com fibras longas

Nesta seção são apresentados exemplos que avaliam as propriedades termoelásticas efetivas de compósitos reforçados por fibras unidirecionais com e sem a presença de interfase.

Exemplo 5.2.1 – Análise das propriedades efetivas de compósitos com duas fases.

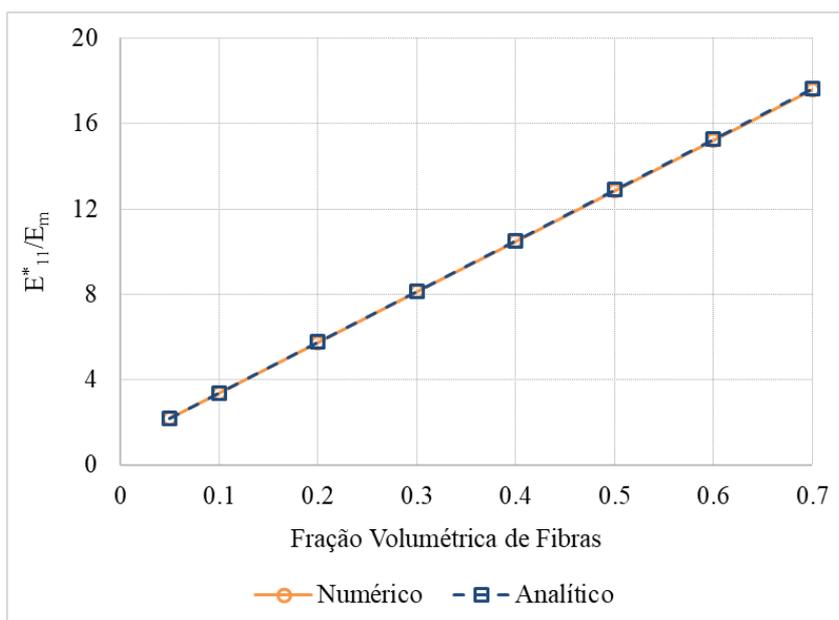
Neste exemplo são calculadas as propriedades elásticas efetivas de um compósito reforçado por fibras unidirecionais cujas propriedades são apresentadas na Tabela 5.5. Os resultados obtidos com TVF e com a formulação analítica baseada em séries de Fourier apresentada na Seção 4.3 são comparados.

Tabela 5.5 - Propriedades mecânicas dos constituintes.

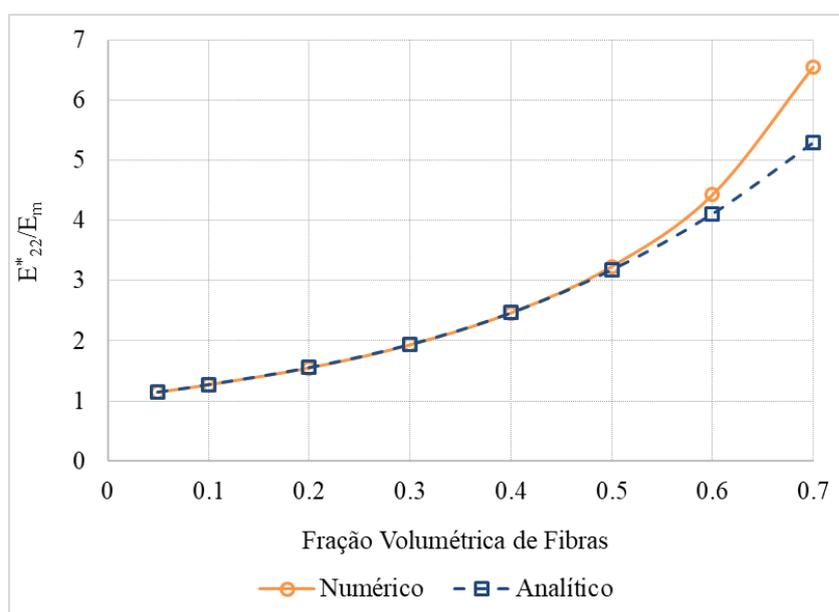
Material	E (GPa)	ν	G (GPa)
Matriz	3,11	0,34	1,16
Fibra	77	0,2	32,08

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Devido às propriedades da fibra escolhida, os módulos de elasticidade efetivos nas direções longitudinal e transversal aumentam em conjunto com a fração volumétrica de fibras, como visto da Figura 5.22 até a Figura 5.25. Os resultados numéricos e analíticos apresentam boa concordância até a fração volumétrica de 50%, exceto pelo módulo E_{11}^* , cujos resultados são coincidentes para todas as frações volumétricas calculadas.

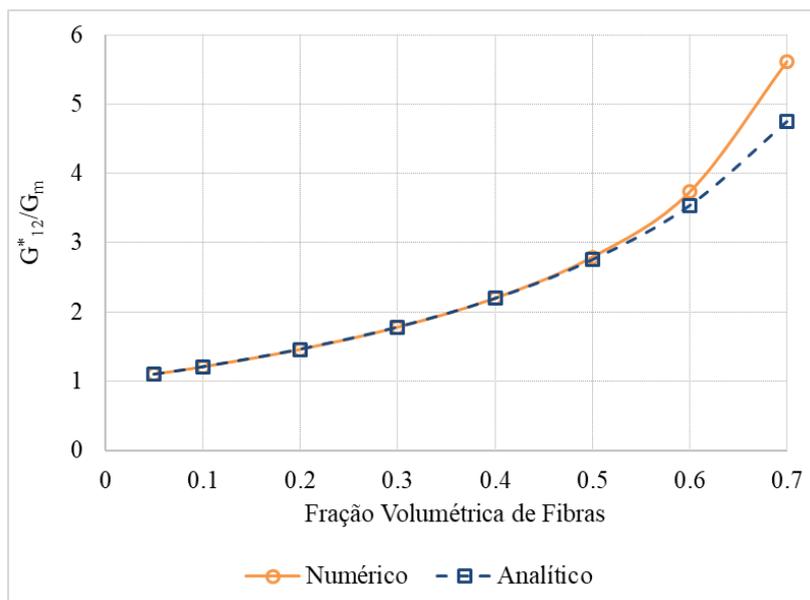
Figura 5.22 - Módulo de elasticidade efetivo na direção 1 em função da fração volumétrica.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.23 - Módulo de elasticidade efetivo na direção 2 em função da fração volumétrica.

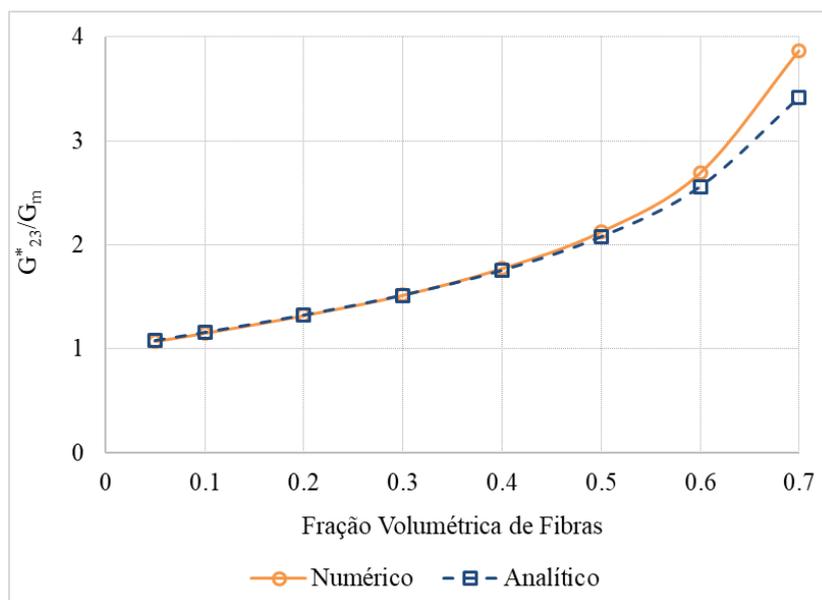
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.24 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 1-2 em função da fração volumétrica de fibras.



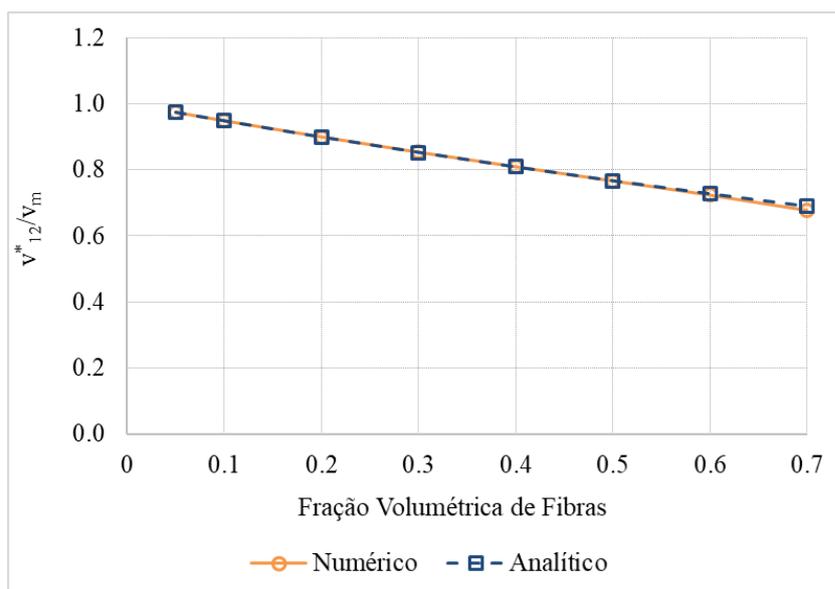
Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.25 - Módulo de elasticidade transversal efetivo no plano 2-3 em função da fração volumétrica de fibras.

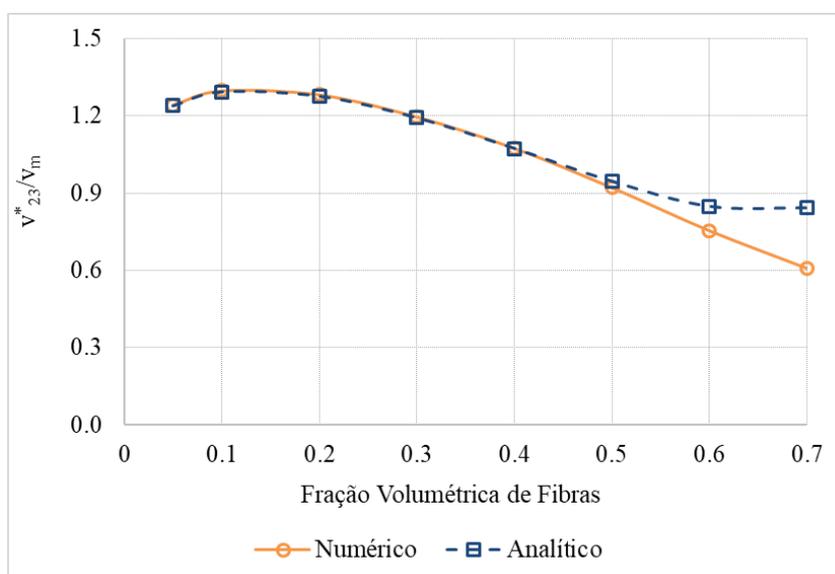


Fonte: elaborada pela autora, 2018.

De acordo com a Figura 5.26 e Figura 5.27, os coeficientes de Poisson apresentam decréscimo em seu valor efetivo na medida em que a fração volumétrica de fibras aumenta.

Figura 5.26 - Coeficiente de Poisson efetivo.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.27 - Coeficiente de Poisson efetivo.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 5.2.2 – Avaliação das propriedades efetivas de compósitos com três fases.

Neste exemplo é investigada a influência de uma interfase fina nas propriedades elásticas efetivas de um compósito. Os resultados obtidos usando TVF são comparados com aqueles apresentados por Dasguptha e Bhandarkar (1992).

O modelo apresentado por Dasguptha e Bhandarkar (1992) é uma extensão do modelo trifásico proposto por Benveniste, Dvorak e Chen (1989) para avaliar compósitos cujas fibras são revestidas. O novo modelo permite a inclusão de múltiplas interfases transversalmente

isotrópicas. Além disso, foi proposto um esquema auto-consistente generalizado para calcular o módulo de elasticidade transversal efetivo.

O compósito avaliado possui matriz de alumínio e fibras de carbeto de silício recobertas por uma fina camada de carbono. As fibras têm 10 μm de raio e a interfase, 0,13 μm de espessura. A fração volumétrica de fibras é igual a 40%. As propriedades dos materiais constituintes são mostradas na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 - Propriedades mecânicas dos constituintes.

Material	E (GPa)	G (GPa)	ν	α ($^{\circ}\text{C}$)
Matriz de alumínio	96,5	37,1	0,3	$9,25 \cdot 10^{-6}$
Fibra de SiC	431	172	0,25	$4,86 \cdot 10^{-6}$
Interfase de Carbono	34,48	14,34	0,20	$3,30 \cdot 10^{-6}$

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Na Tabela 5.7 são mostradas as propriedades efetivas considerando duas situações, com e sem a presença de interfase.

Tabela 5.7 - Propriedades mecânicas efetivas do compósito.

Propriedades	Sem Interfase		Com Interfase	
	TVF	Dasguptha e Bhandarkar (1992)	TVF	Dasguptha e Bhandarkar (1992)
E_1^* (GPa)	230,24	230,37	229,52	229,71
G_{12}^* (GPa)	63,06	62,91	61,54	61,39
G_{23}^* (GPa)	56,36	59,57	55,20	57,99
α_L^* ($^{\circ}\text{C}$)	$6 \cdot 10^{-6}$	$5,99 \cdot 10^{-6}$	$5,99 \cdot 10^{-6}$	$5,98 \cdot 10^{-6}$
α_T^* ($^{\circ}\text{C}$)	$7,64 \cdot 10^{-6}$	$7,64 \cdot 10^{-6}$	$8,25 \cdot 10^{-6}$	$7,60 \cdot 10^{-6}$

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Conforme a Tabela 5.7, o módulo E_1^* praticamente não sofre influência da interfase. O módulo G_{12}^* apresenta decréscimo de 2,4% devido à presença da interfase considerando os dois modelos apresentados. Por sua vez, o módulo G_{23}^* sofre decréscimo de 2,1% de acordo com a TVF e de 2,7% de acordo com o modelo de Dasguptha e Bhandarkar (1992).

Para o caso no qual não é considerada a presença de interfase entre matriz e fibra, os resultados obtidos coincidem com aqueles apresentados por Dasguptha e Bhandarkar (1992).

Quando se considera a presença da interfase, os resultados apresentam uma pequena diferença no valor do coeficiente de dilatação térmica na direção transversal.

Considerando os resultados obtidos com TVF, percebe-se que a interfase praticamente não tem influência no coeficiente de dilatação térmica efetivo na direção longitudinal. A interfase afeta sensivelmente o resultado na direção transversal, aumentando o valor do coeficiente de dilatação térmica efetivo nessa direção.

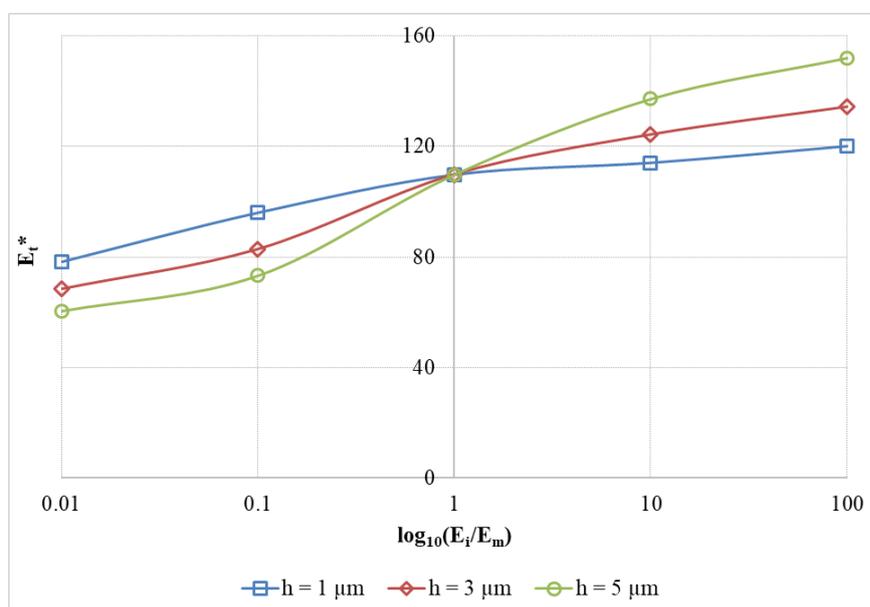
Exemplo 5.2.3 - Influência do módulo de elasticidade e da espessura da interfase.

Neste caso avalia-se a influência do módulo de elasticidade da interfase, assim como da sua espessura, no módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson efetivos de um compósito. A fibra possui raio de 10 μm e sua fração volumétrica é igual a 10%. As propriedades da matriz e da fibra são apresentadas na Tabela 5.6.

Considerou-se três diferentes espessuras para a interfase: 1, 3 e 5 μm . O módulo de elasticidade da interfase foi tomado proporcional ao da matriz com valores variando de $0,01E_m$ a $100E_m$. Na Figura 5.28 é apresentado o módulo de elasticidade efetivo na direção transversal à fibra, enquanto que na Figura 5.29 é mostrado o coeficiente de Poisson efetivo.

O módulo de elasticidade efetivo está diretamente relacionado ao módulo de elasticidade da interfase. Interfases rígidas proporcionam aumento do módulo efetivo e interfases flexíveis causam diminuição. Quanto maior a espessura da interfase, mais influencia a mesma possui sobre o módulo efetivo.

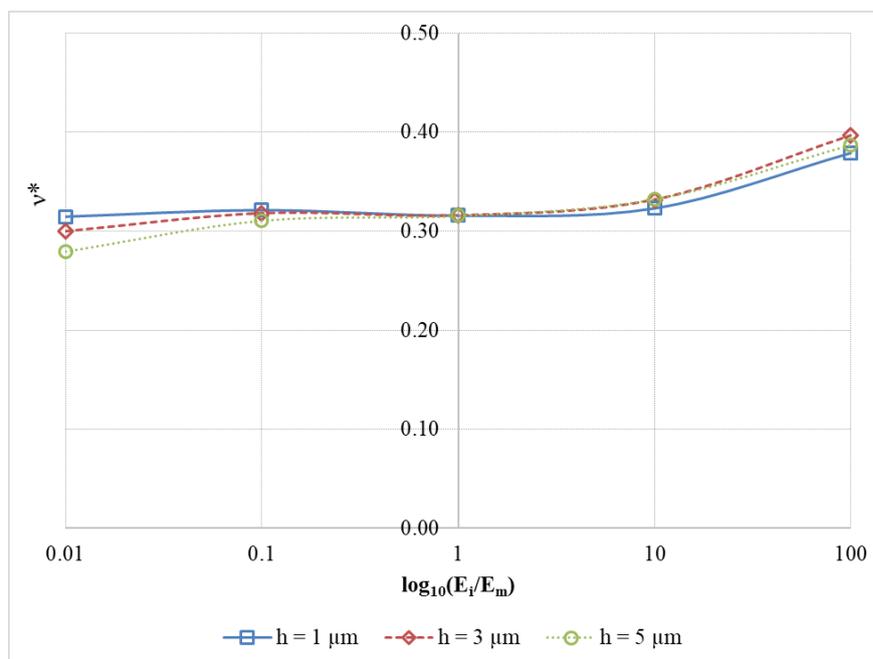
Figura 5.28 - Módulo de elasticidade efetivo.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Interfases flexíveis têm pouca influência no coeficiente de Poisson efetivo, causando pouca variação dessa propriedade na medida em que o módulo de elasticidade da interface diminui. No caso de interfases rígidas há crescimento do coeficiente de Poisson efetivo com o aumento do módulo de elasticidade da interface.

Figura 5.29 - Coeficiente de Poisson efetivo.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Exemplo 5.2.4 - Influência do raio da fibra e substituição da interface por uma interface flexível.

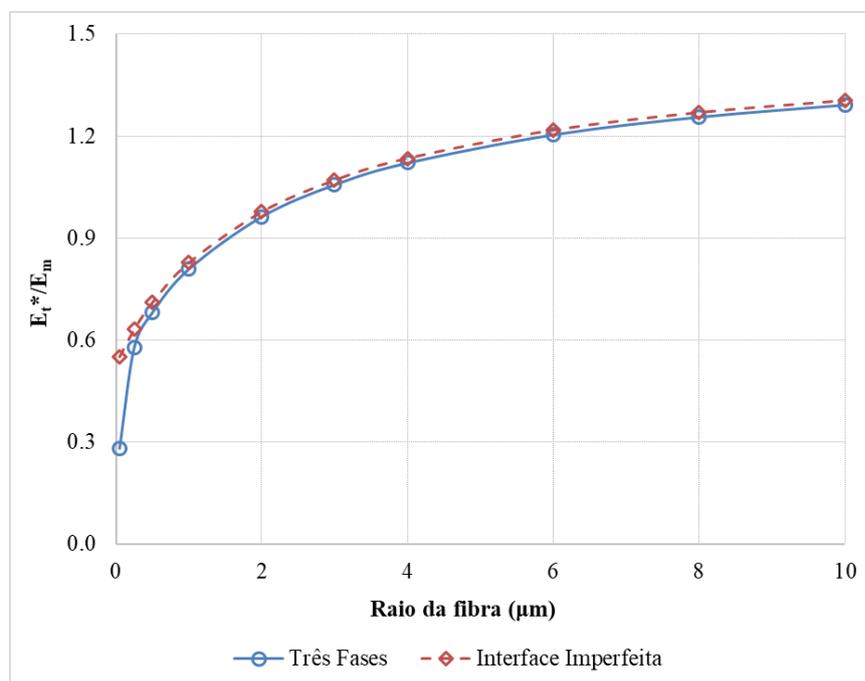
Neste exemplo é avaliada a influência do raio da fibra nas propriedades mecânicas de um compósito cuja interface de 20 nm de espessura e módulo de elasticidade igual a $0,01E_m$. Foram usados dois modelos para determinação das propriedades efetivas. O primeiro é formado por matriz, interface e fibra, enquanto no segundo, a interface é substituída por uma interface imperfeita.

As propriedades dos materiais constituintes são apresentadas na Tabela 5.6 e a fração volumétrica de fibras é igual a 30%. O raio da fibra varia de $0,05 \mu\text{m}$ a $10 \mu\text{m}$.

Na Figura 5.30 é mostrado o módulo de elasticidade efetivo em função do raio para os dois modelos utilizados. Percebe-se que o módulo de elasticidade efetivo aumenta na medida em que o raio da fibra cresce. Como a fração volumétrica é constante, raios maiores implicam

em menor volume de interfase. Logo, o baixo módulo de elasticidade da interfase passa a influenciar menos no módulo efetivo quando o raio aumenta.

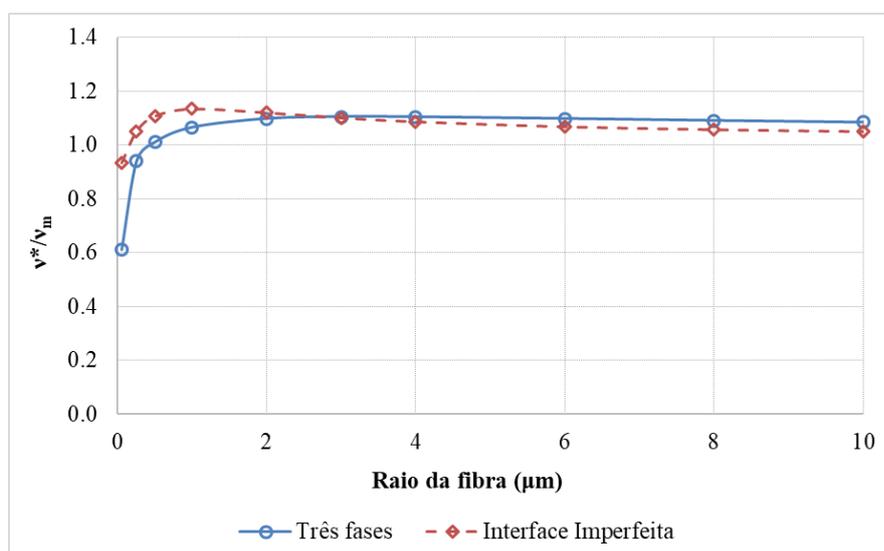
Figura 5.30 - Módulo de elasticidade efetivo.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Os coeficientes de Poisson efetivos para os raios considerados são apresentados na Figura 5.31. Essa propriedade sofre pouca influência do raio da fibra, sendo afetada apenas quando o raio é menor do que $1 \mu\text{m}$.

Figura 5.31 - Coeficiente de Poisson efetivo.



Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Nota-se que a substituição da interfase por uma interface não é eficiente para fibras com raios muito pequenos. Nesses casos, a interfase não atende mais a hipótese de ser fina.

Nesse exemplo, a substituição da interfase por uma interface é eficiente para fibras com raios acima de 1 μm para o cálculo do módulo de elasticidade efetivo. No caso de determinação do coeficiente de Poisson efetivo, a substituição apresenta bons resultados para raios maiores do que 2 μm .

Exemplo 5.2.5 – Avaliação dos coeficientes de dilatação térmica efetivos de compósito sem interfase.

Karadeniz e Kumlutaz (2007) avaliaram o coeficiente de dilatação térmica de compósitos reforçados por fibras unidirecionais usando o método dos elementos finitos. Os resultados obtidos pelos autores foram comparados com resultados experimentais e formulações analíticas, obtendo boa concordância.

Neste exemplo, os resultados experimentais e analíticos apresentados em Karadeniz e Kumlutaz (2007) são comparados com os obtidos com TVF. A formulação analítica considerada foi aquela desenvolvida por Schapery (1968) onde o coeficiente de dilatação térmica efetivo na direção longitudinal é dado por

$$\alpha_l = \frac{E_f \alpha_f f_f + E_m \alpha_m f_m}{E_f f_f + E_m f_m} \quad (5.2)$$

e na direção transversal,

$$\alpha_t = (1 + \nu_f) \alpha_f f_f + (1 + \nu_m) \alpha_m f_m - \alpha_l (\nu_f f_f + \nu_m f_m) \quad (5.3)$$

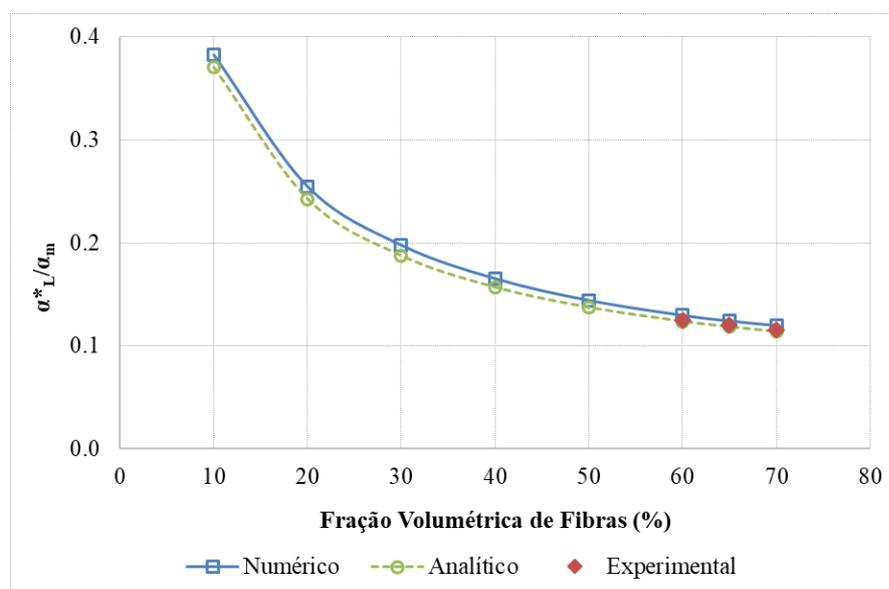
onde α_m e α_f são os coeficientes de dilatação térmica da matriz e da fibra, respectivamente. As frações volumétricas de matriz e fibra são f_m e f_f . O compósito considerado é formado por matriz epóxi e fibra de vidro, cujas propriedades são mostradas na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 - Propriedades dos materiais.

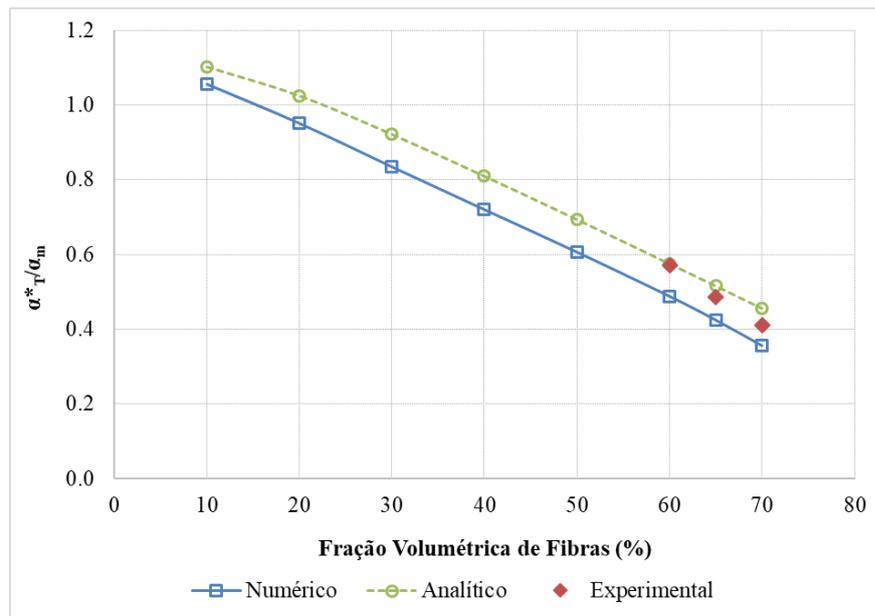
Material	E (GPa)	G (GPa)	ν	α ($^{\circ}\text{C}$)
Matriz Epóxi	3,5	3,89	0,35	$5,25 \cdot 10^{-5}$
Fibra de Vidro	72	40	0,20	$5 \cdot 10^{-6}$

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.32 e na Figura 5.33. Percebe-se uma boa concordância dos resultados numéricos obtidos com TVF e os resultados experimentais apresentados em Karadeniz e Kumlutaz (2007), assim como com a formulação analítica apresentada. De modo geral, os resultados mostram um decréscimo no valor dos coeficientes de dilatação térmica efetivos com o aumento da fração volumétrica de fibras.

Figura 5.32 - Coeficiente de dilatação térmica longitudinal efetivo.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

Figura 5.33 - Coeficiente de dilatação térmica transversal efetivo.

Fonte: elaborada pela autora, 2018.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados procedimentos numéricos e analíticos para avaliação da condutividade térmica efetiva e das propriedades termoelásticas efetivas de compósitos periódicos multifásicos, enfatizando a influência de interfases.

Uma extensão tridimensional da versão paramétrica da Teoria de Volumes Finitos foi desenvolvida para a avaliação da condutividade térmica efetiva de compósitos periódicos multifásicos com microestrutura de arquitetura generalizada. Para fins de comparação de resultados, também foi implementada uma formulação analítica para homogeneização térmica baseada em séries de Fourier.

O desempenho da formulação desenvolvida foi verificado e validado por meio de exemplos envolvendo a homogeneização térmica de compósitos reforçados por fibras curtas e partículas cúbicas. Compósitos com fibras longas também foram analisados e, neste caso, optou-se por utilizar a versão bidimensional da TVF devido ao menor esforço computacional exigido. Os resultados destes exemplos foram comparados com os obtidos por outros autores pelos procedimentos de homogeneização que utilizam o Método dos Elementos Finitos e com a formulação analítica em séries de Fourier. No caso de compósitos com fibras vegetais, as respostas encontradas foram comparadas também com resultados experimentais.

A influência das seguintes variáveis sobre a condutividade térmica efetiva foi estudada: fração volumétrica de inclusões, relação entre condutividade térmica da matriz e da inclusão, razão de aspecto de fibra, grau de anisotropia de fibras e presença de interfase. Nos casos onde considerou-se a presença de interfase, avaliou-se os efeitos de sua condutividade e espessura. Com base nos exemplos analisados, percebeu-se um bom desempenho da formulação desenvolvida.

Dentre os resultados obtidos, pode-se citar o efeito de tamanho da inclusão quando se considera a presença da interfase. Percebeu-se que inclusões menores apresentam condutividade térmica efetiva mais dependente da condutividade da interfase. Evidenciou-se também a influência da razão de aspecto da fibra sobre a condutividade efetiva mesmo sem alteração da fração volumétrica. Em alguns exemplos, a interfase foi substituída por uma interface imperfeita, mostrando que essa estratégia apresenta bons resultados dentro das limitações impostas para a construção do modelo.

A formulação paramétrica tridimensional da Teoria de Volumes Finitos para problemas elásticos foi estendida com a incorporação de efeitos térmicos. Uma formulação

analítica para homogeneização elástica baseada em séries de Fourier também foi implementada.

A formulação desenvolvida foi utilizada para a avaliação das propriedades termoelásticas macroscópicas de compósitos periódicos reforçados por fibras considerando a presença de interfase. O desempenho da referida formulação foi verificado comparando-se os resultados de casos estudados com aqueles obtidos com formulações micromecânicas baseadas no MEF. Vale ressaltar que compósitos com fibras longas foram estudados com uso da versão bidimensional da TVF e, nesse caso, as propriedades elásticas obtidas foram comparadas com a formulação analítica em séries de Fourier.

Os casos analisados mostraram como diversos fatores microestruturais influenciam as propriedades termoelásticas efetivas de compósitos periódicos, tais como: fração volumétrica de fibras, razão de aspecto e tamanho da fibra, assim como a presença de interfase. Destacou-se o papel da espessura e da rigidez da interfase nas propriedades macroscópicas. Demonstrou-se, também, que a interfase pode ser satisfatoriamente substituída por uma interface imperfeita dentro de condições apropriadas. Os resultados obtidos demonstraram um bom desempenho da formulação desenvolvida quando em comparação com outros procedimentos de homogeneização.

Apresentam-se, a seguir, algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Aplicação da formulação desenvolvida para a análise da condutividade térmica efetiva de compósitos com outras microestruturas, tais como partículas esféricas e tecidos;
- Incorporação da influência da temperatura sobre a condutividade térmica efetiva;
- Extensão da formulação tridimensional para outros problemas de condução tais como condutividade elétrica e difusão;
- Substituição de interfases por interfaces imperfeitas em problemas tridimensionais;
- Extensão da formulação paramétrica tridimensional da Teoria de Volumes Finitos para homogeneização de compósitos que apresentam não-linearidades físicas, tais como plasticidade, viscoelasticidade e viscoplasticidade.

REFERÊNCIAS

ABOUDI, J.; PINDER, M.-J.; ARNOLD, S.M. Higher-Order Theory for Functionally Graded Materials. **Composites Part B: Engineering**, v. 30, n. 8, p. 777-832, 1999.

ABOUDI, J.; PINDER, M.-J.; ARNOLD, S.M. Linear Thermoelastic Higher-Order Theory for Periodic Multiphase Materials. **Journal of Applied Mechanics**, v. 68, n. 5, p. 697-707, 2001.

ABOUDI, J.; PINDER, M.-J.; ARNOLD, S.M. High-Fidelity Generalized Method of Cells for Inelastic Periodic Multiphase Materials. **NASA Technical Memorandum 2002-211469**, NASA-Glenn Research Center. Cleveland, OH, 2002.

ARAÚJO, F.C.; GRAY, L.J. Evaluation of Effective Material Parameters of CNT-Reinforced Composites via 3D BEM. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 24, n. 2, p. 103-121, 2008.

AWANI, O.; EL-MAADDAWY, T.; ISMAIL, N. Fabric-reinforced cementitious matrix: A promising strengthening technique for concrete structures. **Construction and Building Materials**, v. 132, p. 94-111, 2017.

BANSAL, Y.; PINDER, M.-J. A Second Look at the Higher-Order Theory for Periodic Multiphase Materials. **Journal of Applied Mechanics**, v. 72, n. 2, p. 177-195, 2005.

BANSAL, Y.; PINDER, M.-J. Efficient Reformulation of the Thermoelastic Higher-Order Theory for FGMs. **Journal of Thermal Stresses**, v. 26, n. 11-12, p. 1055-1092, 2003.

BANSAL, Y.; PINDER, M.-J. Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics of Heterogeneous Materials with Elastic-Plastic Phases. **International Journal of Plasticity**, v. 22, n. 5, p. 775-825, 2006.

BENVENISTE, Y. A General Interface Model for a Three-Dimensional Curved Thin Anisotropic Interphase Between Two Anisotropic Media. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 54, n. 4, p. 708-734, 2006.

BENVENISTE, Y.; DVORAK, G.J.; CHEN, T. Stress Fields in Composites with Coated Inclusions. **Mechanics of Materials**, v. 7, n. 4, p. 305-317, 1989.

BENVENISTE, Y.; MILOH, T. Imperfect Soft and Stiff Interfaces in Two-Dimensional Elasticity. **Mechanics of Materials**, v. 33, n. 6, p. 309-323, 2001.

BING, J.; DAINING, F.; KEHCHIH, H. The Effective Properties of Piezocomposites, Part II: The Effective Electroelastic Moduli. **Acta Mechanica Sinica**, v. 13, n. 4, p. 347-354, 1997.

BIRMAN, V.; BYRD, L.W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures. **Applied Mechanics Reviews**, v. 60, n. 5, p. 195-216, 2007.

BONFOH, N.; SABAR, H. Anisotropic Thermal Conductivity of Composites with Ellipsoidal Inclusions and Highly Conducting Interfaces. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 118, p. 498-509, 2018.

BURGER, N.; LAACHACHI, A.; FERRIOL, M.; LUTZ, M.; TONIAZZO, V.; RUCH, D. Review of thermal conductivity in composites: Mechanisms, parameters and theory. **Progress in Polymer Science**, v. 61, p. 1-28, 2016.

BURYACHENKO, V. **Micromechanics of Heterogeneous Materials**. 1 ed., Springer US, 2007.

CAO, L.; WANG, B.; WANG, D.F.; YAO, C.K. The Thermal Conductivity of Short-Fiber Composites. **Materials Chemistry and Physics**, v. 24, n. 4, p. 405-411, 1990.

CAVALCANTE, M.A.A. **Modelagem do Comportamento Termomecânico Transiente de Estruturas de Materiais Compósitos pela Teoria de Volumes Finitos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2006.

CAVALCANTE, M.A.A.; MARQUES, S.P.C. Homogenization of Periodic Materials with Viscoelastic Phases Using the Generalized FVDAM Theory. **Computational Material Science**, v. 87, p. 43-53, 2014.

CAVALCANTE, M.A.A.; MARQUES, S.P.C.; PINDERA, M-J. Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials. Part I: Analysis. **Journal of Applied Mechanics**, v. 74, n. 5, p. 935-945, 2007a.

CAVALCANTE, M.A.A.; MARQUES, S.P.C.; PINDERA, M-J. Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials. Part II: Numerical Results. **Journal of Applied Mechanics**, v. 74, n. 5, p. 946-957, 2007b.

CAVALCANTE, M.A.A.; MARQUES, S.P.C.; PINDERA, M-J. Computational Aspects of the Parametric Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials. **Computational Materials Science**, v. 44, n. 2, p. 422-438, 2008.

CAVALCANTE, M.A.A.; PINDERA, M-J. Generalized FVDAM Theory for Periodic Materials Undergoing Finite Deformations – Part I: Framework. **Journal of Applied Mechanics**, v. 81, n. 2, p. 021005, 2014a.

CAVALCANTE, M.A.A.; PINDERA, M-J. Generalized FVDAM Theory for Periodic Materials Undergoing Finite Deformations – Part II: Results. **Journal of Applied Mechanics**, v. 81, n. 2, p. 021006, 2014b.

CAVALCANTE, M.A.A.; PINDERA, M-J. Generalized FVDAM Theory for Elastic-Plastic Periodic Materials. **International Journal of Plasticity**, v. 77, p. 90-117, 2016.

CAVALCANTE, M.A.A.; PINDERA, M-J.; KHATAM, H. Finite-Volume Micromechanics of Periodic Materials: Past, Present and Future. **Composites: Part B**, v. 43, n. 6, p. 2521-2543, 2012.

CHEN, C.-H.; WANG, Y.-C. Effective Thermal Conductivity of Misoriented Short-Fiber Reinforced Thermoplastics. **Mechanics of Materials**, v. 23, n. 3, p. 217-228, 1996.

CHEN, H.; GINZBURG, V. V.; YANG, J.; YANG, Y.; LIU, W.; HUANG, Y.; DU, L.; CHEN, B. Thermal Conductivity of Polymer-Based Composites: Fundamentals and Applications. **Progress in Polymer Science**, v. 59, p. 41-85, 2016a.

CHEN, Q.; CHEN, X.; YANG, Z.; ZHAI, Z.; GAO, J. Micromechanical Modeling of Plain Woven Polymer Composites via 3D Finite-Volume Homogenization. **Polymer Composites**, 2017.

CHEN, Q.; CHEN, X.; ZHAI, Z.; YANG, Z. A New and General Formulation of Three-Dimensional Finite-Volume Micromechanics for Particulate Reinforced Composites with Viscoplastic Phases. **Composite Part B: Engineering**, v. 85, p. 216-232, 2016b.

CHEN, Q.; WANG, G.; CHEN, X. Three-Dimensional Parametric Finite-Volume Homogenization of Periodic Materials with Multi-Scale Structural Applications. **International Journal of Applied Mechanics**, v. 10, n. 4, p. 1850045, 2018.

DASGUPTA, A.; BHANDARKAR, S. M. A Generalized Self-Consistent Mori-Tanaka - Scheme for Fiber-Composites with Multiple Interphases. **Mechanics of Materials**, v. 14, n. 1, p. 67-82, 1992.

DEMIRDZIC, I.; MUZAFERIJA, S. Finite Volume Method for Stress Analysis in Complex Domains. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 21, p. 3751-3766, 1994.

DRAGO, A.; PINDER, M.-J. Micro-Macromechanical Analysis of Heterogeneous Materials: Macroscopically Homogeneous vs Periodic Microstructures. **Composite Science and Technology**, v. 67, n. 6, p. 1243-1263, 2007.

DUNN, M.L.; WIENECKE, H.A. Inclusions and Inhomogeneities in Transversely Isotropic Piezoelectric Solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 34, n. 27, p. 3571-3582, 1997.

EBEAD, U. A.; SHRESTHA, K. C.; AFZAL, M. S.; REFAI, A. E.; NANNI, A. Effectiveness of fabric-reinforced cementitious matrix in strengthening reinforced concrete beams, **Journal of Composites for Construction**, v. 21, n. 2, 2017.

ESCARPINI FILHO, R.S.; MARQUES, S.P.C. A model for evaluation of effective thermal conductivity of periodic composites with poorly conducting interfaces. **Materials Research**, v. 17, n. 5, p. 1344-1355, 2014.

ESCARPINI FILHO, R.S. **Homogeneização de Propriedades Térmicas e Mecânicas de Materiais Compósitos Considerando Efeitos de Interfaces Imperfeitas**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Materiais, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

ESCARPINI FILHO, R.S.; MARQUES, S.P.C. A Model for Homogenization of Linear Viscoelastic Periodic Composite Materials with Imperfect Interface. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 14, p. 2706-2735, 2016.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 241, n. 1226, p. 376-396, 1957.

FALLAH, N. A Cell Vertex and Cell Centered Finite Volume Method for Plate Bending Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3457-3470, 2004.

FERNANDES, G.R.; CROZARIOL, L.H.R.; FURTADO, A.S.; SANTOS, M.C. A 2D Boundary Element Formulation to Model the Constitutive Behavior of Heterogeneous Microstructures Considering Dissipative Phenomena. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 99, p. 1-22, 2019.

FRYER, Y.D.; BAILEY, C.; CROSS, M.; LAI, C.-H. A Control Volume Procedure for Solving the Elastic Stress-Strain Equations on an Unstructured Mesh. **Applied Mathematical Modelling**, v. 15, n. 11-12, p. 639-645, 1991.

GATTU, M.; KHATAM, H.; DRAGO, A. S.; PINDER, M. Parametric Finite-Volume Micromechanics of Uniaxial Continuously-Reinforced Periodic Materials with Elastic Phases. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 130, n. 3, p. 31015, 2008.

GORI, F.; CORASANITI, S. Effective thermal conductivity of composites. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 77, p. 653-661, 2014.

HASHIN, Z. The Differential Scheme and Its Application to Cracked Materials. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 36, n. 6, p. 719-734, 1988.

HASHIN, Z. Thin Interphase/Imperfect Interface in Conduction. **Journal of Applied Physics**, v. 89, n. 4, p. 2261-2267, 2001.

HASHIN, Z. Thin Interphase/Imperfect Interface in Elasticity with Application to Coated Fiber Composites. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 50, n. 12, p. 2509-2537, 2002.

HASSANZADEH-AGHDAM, M.K.; MAHMOODI, M. J.; ANSARI, R. Interphase Effects on the Thermo-Mechanical Properties of Three-Phase Composites. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 230, n. 19, 2016.

HATTA, H.; TAYA, M. Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. **International Journal of Engineering Science**, v. 24, n. 7, p. 1159-1172, 1986.

HILL, R. Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 5, p. 357-372, 1963.

HILL, R. A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 13, n. 4, p. 213-222, 1965.

HOSSEINI KORDKHEILI, S.A.; TOOZANDEHJANI, H. Effective Mechanical Properties of Unidirectional Composites in the Presence of Imperfect Interface. **Archive of Applied Mechanics**, v. 84, n. 6, p. 807-819, 2014.

ISLAM, MD. R.; PRAMILA, A. Thermal Conductivity of Fiber Reinforced Composites by the FEM. **Journal of Composite Materials**, v. 33, n. 15, p. 1699-1715, 1999.

JIANG, W.-G.; ZHONG, R.-Z.; QIN, Q.H.; TONG, Y.-G. Homogenized Finite Element Analysis on Effective Elastoplastic Mechanical Behaviors of Composites with Imperfect Interfaces. **International Journal of Molecular Sciences**, v. 15, n. 12, p. 23389-23407, 2014.

KAPITZA, P.L. The study of heat transfer in helium II. **Journal of Physics**, v. 4, p. 181-210, 1941.

KARADENIZ, Z.H.; KUMLUTAS, D. A Numerical Study on The Coefficients of Thermal Expansion of Fiber Reinforced Composite Materials. **Composite Structures**, v. 78, n. 1, p. 1-10, 2007.

KHATAM, H.; PINDER, M.-J. Parametric Finite-Volume Micromechanics of Periodic Materials with Elastoplastic Phases. **International Journal of Plasticity**, v. 25, n. 7, p. 1386-1411, 2009a.

KHATAM, H.; PINDER, M.-J. Thermo-Elastic Moduli of Periodic Multilayers with Wavy Architectures. **Composites: Part B**, v. 40, n. 1, p. 50-64, 2009b.

KIM, J.-K.; MAI, Y.-W. **Engineered Interfaces in Fiber Reinforced Composites**. 1 ed., Elsevier Publishers, 1998.

LE QUANG, H.; PHAN, T.-L.; BONNET, G. Effective Thermal Conductivity of Periodic Composites with Highly Conducting Imperfect Interfaces. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 50, n. 8, p. 1428-1444, 2011.

LIU, K.; TAKAGI, H.; OSUGI, R.; YANG, Z. Effect of Lumen Size on the Effective Transverse Thermal Conductivity of Unidirectional Fiber Composites. **Composites Science and Technology**, v. 72, n. 5, p. 633-639, 2012a.

LIU, K.; TAKAGI, H.; OSUGI, R.; YANG, Z. Effect of Physicochemical Structure of Natural Fiber on Transverse Thermal Conductivity of Unidirectional Abaca/Bamboo Fiber Composites. **Composites: Part A**, v. 43, n. 8, p. 1234-1241, 2012b.

LIU, K.; TAKAGI, H.; YANG, Z. Evaluation of Transverse Thermal Conductivity of Manila Hemp Fiber in Solid Region Using Theoretical Method and Finite Element Method. **Materials and Design**, v. 32, n. 8-9, p. 4586-4589, 2011.

LIU, W.; BIAN, L. Influences of Inclusion and Corresponding Interphase on Elastic Properties of Composites. **Archive of Applied Mechanics**, v. 88, n. 9, p. 1507-1524, 2018.

LUCIANO, R.; BARBERO, E.J. Formulas for the Stiffness of Composites with Periodic Microstructure. **International Journal of Solids and Structures**, v. 31, n. 21, p. 2933-2944, 1994.

MA, H.; LIU, X.; HU, G. Overall Elastoplastic Property for Micropolar Composites with Randomly Oriented Ellipsoidal Inclusions. **Computational Materials Science**, v. 37, n. 4, p. 582-592, 2006.

MATT, C.F.; CRUZ, M.E. Calculation of the Effective Conductivity of Ordered Short-Fiber Composites. Proc. 35th AIAA Thermophysics Conf., Summer Co-Located Conferences, Anaheim, CA, Paper AIAA 2001-2968, pp. 1-11, 2001.

MATT, C.F.; CRUZ, M.E. Effective Thermal Conductivity of Composite Materials with 3-D Microstructures and Interfacial Thermal Resistance. **Numerical Heat Transfer, Part A**, v. 53, n. 6, p. 577-604, 2008.

MATT, C.F.; CRUZ, M.E. Enhancement of the Thermal Conductivity of Composites Reinforced with Anisotropic Short Fibers. **Journal of Enhanced Heat Transfer**, v. 13, n. 1, p. 17-38, 2006.

MOLINARI, A. Averaging Models for Heterogeneous Viscoplastic and Elastic Viscoplastic Materials. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 124, n. 1, p. 62-70, 2002.

MONTEIRO, S.N.; BRAGA, F.O.; LIMA, E.P.; LOURO, L.H.L.; DRELICH, J.W. Promising Curaua Fiber-Reinforced Polyester Composite for High-Impact Ballistic Multilayered Armor. **Polymer Engineering and Science**, v. 57, n. 9, p. 947-954, 2016.

MORI, T.; TANAKA, K. Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions. **Acta Metallurgica**, v. 21, n. 5, p. 571-574, 1973.

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Solids**. 2 ed., Elsevier Publishers, 1999.

NEMAT-NASSER, S.; IWAKUMA, T.; HEJAZI, M. On Composites with Periodic Structure. **Mechanics of Materials**, v. 1, n. 3, p. 239-267, 1982.

NEMAT-NASSER, S.; YU, N.; HORI, M. Bounds and Estimates of Overall Moduli of Composites with Periodic Microstructure. **Mechanics of Materials**, v. 15, n. 3, p. 163-181, 1993.

PATHAK, S.V. **Enhanced heat transfer in composite materials**. Dissertação de mestrado - Russ College of Engineering and Technology - Ohio University, OH, EUA, 2013.

PINDERA, M.-J.; BANSAL, Y. On the Micromechanics-Based Simulation of Metal Matrix Composite Response. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 129, n. 3, p. 468-482, 2007.

RIAÑO, L.; BELEC, L.; CHAILAN, J.F.; JOLIFF, Y. Effect of Interphase Region on the Elastic Behavior of Unidirectional Glass-Fiber/Epoxy Composites. **Composites Structures**, v. 198, p. 109-116, 2018.

RODRIGUES, R.Q.; GALVIS, A.F.; SOLLERO, P.; TAN, C.L.; ALBUQUERQUE, E.L. Fast BEM Multi-Domain Approach for the Elastostatic Analysis of Short Fibre Composites. **European Journal of Computational Mechanics**, v. 26, n.5, p. 525-540, 2017.

ROHEN, L.A.; MARGEM, F.M.; MONTEIRO, S.N.; VIEIRA, C.M.F.; ARAUJO, B.M.; LIMA, E.S. Ballistic Efficiency of an Individual Epoxy Composite Reinforced with Sisal Fibers in Multilayered Armor. **Materials Research**, v. 18, n. 2, p. 55-62, 2015.

SCHAPERLY, R.A. Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles. **Journal of Composite Materials**, v. 2, n. 3, p. 380-404, 1968.

SHOKRIEH, M.M.; MOSHREFZADEH-SANI, H. An Optimized Representative Volume Element to Predict the Stiffness of Aligned Short Fiber Composites. **Journal of Composite Materials**, v. 50, n. 23, p. 3301-3310, 2016.

TAYA, M. Micromechanics Modeling of Electronic Composites. **Journal of Engineering Materials and Technology**, v. 117, n. 4, p. 462-469, 1995.

TOH, W.; TAN, L.B.; JAIMAN, R.K.; TAY, T.E.; TAN, V.B.C. A Comprehensive Study on Composite Risers: Material Solution, Local End Fitting Design and Global Response. **Marine Structures**, v. 61, p. 155-169, 2018.

VERSTEEG, H.K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. 2 ed., New York: Pearson Education Ltd., Prentice Hall, 2007.

WANG, H.; QIN, Q-H. A New Special Coating/Fiber Element for Analyzing Effect of Interface on Thermal Conductivity of Composites. **Applied Mathematics and Computation**, v. 268, p. 311–321, 2015.

WHITEHOUSE, A.F.; WARWICK, C.M.; CLYNE, T.W. Electrical-Resistivity of Copper Reinforced with Short Carbon-Fibers. **Journal of Materials Science**, v. 26, n. 22, p. 6176-6182, 1991.

XIAO, J.; XU, Y.; ZHANG, F. An Analytical Method for Predicting the Effective Transverse Thermal Conductivity of Nano Coated Fiber Composites. **Composite Structures**, v. 189, p. 553-559, 2018.

YANASE, K.; JU, J.W. Effective Elastic Moduli of Spherical Particle Reinforced Composites Containing Imperfect Interfaces. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 21, n. 1, p. 97-127, 2012.

YANG, Q.-S.; QIN, Q.-H. Micro-Mechanical Analysis of Composite Materials by BEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, n. 8, p. 919-926, 2004.

YANG, W.; PENG, K.; ZHOU, L.; ZHU, J.; LI, D. Finite element simulation and experimental investigation on thermal conductivity of diamond/aluminium composites with imperfect interface. **Computational Materials Science**, v. 83, p. 375-380, 2014.

YE, J.; HONG, C.; WANG, Y.; ZHAI, Z.; SHI, B. A New Three-Dimensional Parametric FVDAM for Investigating the Effective Elastic Moduli of Particle-Reinforced Composites with Interphase. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 0, p. 1-11, 2018.

YVONNET, J.; HE, Q.-C.; TOULEMONDE, C. Numerical Modelling of The Effective Conductivities of Composites with Arbitrarily Shaped Inclusions and Highly Conducting Interface. **Composite Science and Technology**, v. 68, n. 13, p. 2818-2825, 2008.

ZHONG, Y.; BANSAL, Y.; PINDER, M.-J. Efficient Reformulation of the Thermal Higher-Order Theory for FGM's with Locally Variable Conductivity. **International Journal of Computational Engineering Science**, v. 5, n. 4, p. 795-832, 2004.

APÊNDICES

Apêndice A: Dedução da matriz Jacobiana para o modelo tridimensional

Derivando a Equação (2.3) em relação às coordenadas $(\zeta - \eta - \xi)$ são obtidos os elementos da matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial y_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial y_3}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \eta} & \frac{\partial y_2}{\partial \eta} & \frac{\partial y_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \xi} & \frac{\partial y_2}{\partial \xi} & \frac{\partial y_3}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Admite-se um valor constante para a matriz Jacobiana sendo este valor igual a média:

$$\langle J \rangle = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J d\zeta d\eta d\xi = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

na qual

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{8} \left(y_1^{(1)} + y_1^{(2)} - y_1^{(3)} - y_1^{(4)} + y_1^{(5)} + y_1^{(6)} - y_1^{(7)} - y_1^{(8)} \right) \\ A_2 &= \frac{1}{8} \left(y_2^{(1)} + y_2^{(2)} - y_2^{(3)} - y_2^{(4)} + y_2^{(5)} + y_2^{(6)} - y_2^{(7)} - y_2^{(8)} \right) \\ A_3 &= \frac{1}{8} \left(y_3^{(1)} + y_3^{(2)} - y_3^{(3)} - y_3^{(4)} + y_3^{(5)} + y_3^{(6)} - y_3^{(7)} - y_3^{(8)} \right) \\ A_4 &= \frac{1}{8} \left(-y_1^{(1)} + y_1^{(2)} + y_1^{(3)} - y_1^{(4)} - y_1^{(5)} + y_1^{(6)} + y_1^{(7)} - y_1^{(8)} \right) \\ A_5 &= \frac{1}{8} \left(-y_2^{(1)} + y_2^{(2)} + y_2^{(3)} - y_2^{(4)} - y_2^{(5)} + y_2^{(6)} + y_2^{(7)} - y_2^{(8)} \right) \\ A_6 &= \frac{1}{8} \left(-y_3^{(1)} + y_3^{(2)} + y_3^{(3)} - y_3^{(4)} - y_3^{(5)} + y_3^{(6)} + y_3^{(7)} - y_3^{(8)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$A_7 = \frac{1}{8} \left(-y_1^{(1)} - y_1^{(2)} - y_1^{(3)} - y_1^{(4)} + y_1^{(5)} + y_1^{(6)} + y_1^{(7)} + y_1^{(8)} \right)$$

$$A_8 = \frac{1}{8} \left(-y_2^{(1)} - y_2^{(2)} - y_2^{(3)} - y_2^{(4)} + y_2^{(5)} + y_2^{(6)} + y_2^{(7)} + y_2^{(8)} \right)$$

$$A_9 = \frac{1}{8} \left(-y_3^{(1)} - y_3^{(2)} - y_3^{(3)} - y_3^{(4)} + y_3^{(5)} + y_3^{(6)} + y_3^{(7)} + y_3^{(8)} \right)$$

A inversa da matriz Jacobiana é calculada da seguinte forma:

$$\langle J \rangle^{-1} = \bar{J} = \frac{1}{A_{10}} \begin{bmatrix} A_5 A_9 - A_6 A_8 & A_3 A_8 - A_2 A_9 & A_2 A_6 - A_3 A_5 \\ A_6 A_7 - A_4 A_9 & A_1 A_9 - A_3 A_7 & A_3 A_4 - A_1 A_6 \\ A_4 A_8 - A_5 A_7 & A_2 A_7 - A_1 A_8 & A_1 A_5 - A_2 A_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

na qual

$$A_{10} = A_1 A_5 A_9 - A_1 A_6 A_8 - A_2 A_4 A_9 + A_2 A_6 A_7 + A_3 A_4 A_8 - A_3 A_5 A_7 \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B: Dedução da matriz de condutividade térmica da interface com descontinuidade de temperatura e fluxo de calor normal

De acordo com Benveniste (2006), as descontinuidades de temperatura e fluxo normal de calor na interface entre matriz e inclusão são calculadas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$(T)_+ - (T)_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_i} \right) (q_3)_+ + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_i} \right) (q_3)_- \quad (\text{B.1})$$

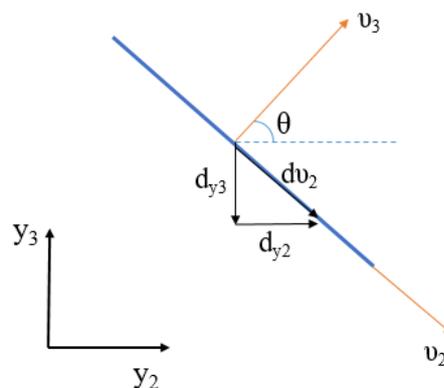
$$(q_3)_+ - (q_3)_- = \frac{h}{2} (k_i - k_m) \{ \Delta_S(T_+) \} + \frac{h}{2} (k_i - k_f) \{ \Delta_S(T_-) \} \quad (\text{B.2})$$

Para o caso de interface plana:

$$\Delta_S T = \frac{\partial^2 T}{\partial v_2^2} \quad (\text{B.3})$$

na qual a coordenada v_2 é mostrada na Figura B.1.

Figura B.1 – Sistema de coordenadas do elemento de interface.



Considerando o sistema de coordenadas mostrado na Figura B.1, são válidas as seguintes expressões:

$$d_{y_2} = dv_2 \text{sen} \theta \quad (\text{B.4})$$

$$d_{y_3} = -dv_2 \text{cos} \theta$$

Expandindo o segundo termo da Equação (B.3) e utilizando a Equação (B.4), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v_2^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y_2^2} \text{sen}^2 \theta + \frac{\partial^2 T}{\partial y_3^2} \text{cos}^2 \theta - \frac{\partial^2 T}{\partial y_2 \partial y_3} \text{sen} 2\theta \quad (\text{B.5})$$

A expressão (B.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v_2^2} = V_1 \tilde{T}_{20} + V_2 \tilde{T}_{02} \quad (\text{B.6})$$

na qual

$$V_1 = 3(\bar{J}_{11}^2 \text{sen}^2 \theta + \bar{J}_{21}^2 \text{cos}^2 \theta - \bar{J}_{11} \bar{J}_{21} \text{sen} 2\theta) \quad (\text{B.7})$$

$$V_2 = 3(\bar{J}_{12}^2 \text{sen}^2 \theta + \bar{J}_{22}^2 \text{cos}^2 \theta - \bar{J}_{12} \bar{J}_{22} \text{sen} 2\theta) \quad (\text{B.8})$$

Logo, a Equação (B.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta_S T = (V_1 \mathbf{B}_3 + V_2 \mathbf{B}_4) \langle \tilde{\mathbf{T}} \rangle \quad (\text{B.9})$$

na qual \mathbf{B}_3 e \mathbf{B}_4 são, respectivamente, a terceira e quarta linhas da matriz \mathbf{B} (Eq. (2.41)).

Substituindo a Equação (B.9) na (B.2) e considerando a expressão resultante em conjunto com a Equação (B.1), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} \langle q_n \rangle_+ \\ \langle q_n \rangle_- \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_{Li} \begin{Bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{T}}_+ \rangle \\ \langle \tilde{\mathbf{T}}_- \rangle \end{Bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

A matriz de condutividade térmica da interface é a seguinte:

$$\mathbf{K}_{Li} = \mathbf{D} - \begin{bmatrix} d_2 \mathbf{U}_+ & d_2 \mathbf{U}_- \\ d_1 \mathbf{U}_+ & d_1 \mathbf{U}_- \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

na qual

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

com

$$d_1 = \frac{\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_i}}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i}}$$

$$d_2 = \frac{\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_i}}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i}} \quad (\text{B.13})$$

$$d_3 = \frac{2}{h} \frac{1}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i}}$$

Os vetores \mathbf{U} são calculados da seguinte forma:

$$\mathbf{U}_+ = \frac{h}{2} (k_i - k_m) (V_1 \mathbf{B}_3 + V_2 \mathbf{B}_4)$$

$$\mathbf{U}_- = \frac{h}{2} (k_i - k_f) (V_1 \mathbf{B}_3 + V_2 \mathbf{B}_4) \quad (\text{B.14})$$

Apêndice C: Dedução da matriz \bar{A} para o modelo tridimensional

A matriz \bar{A} é calculada pela seguinte expressão:

$$\bar{A} = \bar{N}\bar{C}\bar{E}\bar{J}\bar{A} \quad \text{C.1}$$

na qual

$$\bar{N} = \text{diag}[N^{(1)} \quad N^{(2)} \quad N^{(3)} \quad N^{(4)} \quad N^{(5)} \quad N^{(6)}] \quad \text{C.2}$$

$$\bar{C} = \text{diag}[C \quad C \quad C \quad C \quad C \quad C] \quad \text{C.3}$$

$$E = \text{diag}[\bar{E} \quad \bar{E} \quad \bar{E} \quad \bar{E} \quad \bar{E} \quad \bar{E}] \quad \text{C.4}$$

$$\bar{J} = \text{diag}[\langle \bar{J} \rangle \quad \langle \bar{J} \rangle] \quad \text{C.5}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{(1)} \\ A^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{(3)} \\ A^{(4)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(4)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{(4)} \\ A^{(5)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(5)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{(5)} \\ A^{(6)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(6)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{(6)} \end{bmatrix} \quad \text{C.6}$$

Apêndice D – Elementos da matriz constitutiva efetiva

Os elementos da matriz constitutiva efetiva para o caso dos materiais da matriz e da fibra serem isotrópicos são calculados pelas seguintes expressões:

$$C_{11}^* = \lambda_m + 2\mu_m - f_v \left(\frac{S_3 S_2}{\mu_m^2} - \frac{S_5 S_3 + S_6 S_2}{\mu_m^2 g} - \frac{a(S_2 + S_3)}{2\mu_m c} + \frac{S_6 S_5 - S_7^2}{\mu_m^2 g^2} + \frac{a(S_5 + S_6) + 2bS_7}{2\mu_m g c} + \frac{a^2 - b^2}{4c^2} \right) / D \quad (D.1)$$

$$C_{12}^* = \lambda_m + f_v \left(\left(-\frac{S_9}{\mu_m^2 g} + \frac{b}{2c\mu_m} \right) S_3 + \frac{S_9 S_6 - S_8 S_7}{\mu_m^2 g^2} - \frac{b(S_6 - S_7) - bS_8 - aS_9}{2c\mu_m g} - \frac{ba + b^2}{4c^2} \right) / D \quad (D.2)$$

$$C_{13}^* = \lambda_m - f_v \left(\left(\frac{S_8}{\mu_m^2 g} - \frac{b}{2c\mu_m} \right) S_2 - \frac{S_8 S_5 - S_9 S_7}{\mu_m^2 g^2} + \frac{b(S_5 - S_7) - aS_8 - bS_9}{2c\mu_m g} + \frac{ab + b^2}{4c^2} \right) / D \quad (D.3)$$

$$C_{22}^* = \lambda_m + 2\mu_m - f_v \left(\frac{S_3 S_1}{\mu_m^2} - \frac{S_4 S_3 + S_6 S_1}{\mu_m^2 g} - \frac{a(S_1 + S_3)}{2\mu_m c} + \frac{S_6 S_4 - S_8^2}{\mu_m^2 g^2} + \frac{a(S_4 + S_6) + 2bS_8}{2\mu_m g c} + \frac{a^2 - b^2}{4c^2} \right) / D \quad (D.4)$$

$$C_{33}^* = \lambda_m + 2\mu_m - f_v \left(\frac{S_2 S_1}{\mu_m^2} - \frac{S_4 S_2 + S_5 S_1}{\mu_m^2 g} - \frac{a(S_1 + S_2)}{2\mu_m c} + \frac{S_5 S_4 - S_9^2}{\mu_m^2 g^2} + \frac{a(S_5 + S_4) + 2bS_9}{2\mu_m g c} + \frac{a^2 - b^2}{4c^2} \right) / D \quad (D.5)$$

$$C_{23}^* = \lambda_m + f_v \left(\left(-\frac{S_7}{\mu_m^2 g} + \frac{b}{2c\mu_m} \right) S_1 + \frac{S_7 S_4 - S_9 S_8}{\mu_m^2 g^2} - \frac{b(S_4 - S_8 - S_9) - aS_7}{2c\mu_m g} - \frac{ab + b^2}{4c^2} \right) / D \quad (D.6)$$

$$C_{44}^* = \mu_m - f_v \left(-\frac{S_2}{\mu_m} - \frac{S_3}{\mu_m} + (\mu_m - \mu_f)^{-1} + \frac{4S_7}{\mu_m(2 - 2\nu_m)} \right)^{-1} \quad (D.7)$$

$$C_{55}^* = \mu_m - f_v \left(-\frac{S_1}{\mu_m} - \frac{S_3}{\mu_m} + (\mu_m - \mu_f)^{-1} + \frac{4S_8}{\mu_m(2 - 2\nu_m)} \right)^{-1} \quad (D.8)$$

$$C_{66}^* = \mu_m - f_v \left(-\frac{S_1}{\mu_m} - \frac{S_2}{\mu_m} + (\mu_m - \mu_f)^{-1} + \frac{4S_9}{\mu_m(2 - 2\nu_m)} \right)^{-1} \quad (D.9)$$

nas quais μ_m , λ_m , μ_f e λ_f são as constantes de Lamé da matriz e da fibra, respectivamente. A fração volumétrica de fibras é representada por f_v .

As séries S_l são calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_1^2, & S_2 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_2^2, & S_3 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_3^2 \\ S_4 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_1^4, & S_5 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_2^4, & S_6 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_3^4 \\ S_7 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_2^2 \bar{\xi}_3^2, & S_8 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_3^2, & S_9 &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} f(\xi) \bar{\xi}_1^2 \bar{\xi}_2^2 \end{aligned} \quad (D.10)$$

O coeficiente D , presente nas equações D.1 a D.9 é calculado com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
D &= -\frac{S_3 S_2 S_1}{\mu_m^3} + \frac{3S_6 S_2 S_1}{\mu_m^3 g} + \frac{a(S_2 S_1 + (S_1 + S_2)S_3)}{2\mu_m^2 c} \\
&+ \frac{(S_5 S_4 + S_7^2)S_1 + (S_6 S_4 + S_8^2)S_2 + (S_5 S_4 + S_9^2)S_3}{\mu_m^3 g^3} \\
&- \frac{(aS_5 + aS_6 + 2bS_7^2)S_1 + (aS_4 + aS_6 + 2bS_8^2)S_2 + (aS_4 + aS_5 + 2bS_9^2)S_3}{2\mu_m^2 g c} \\
&+ \frac{(b^2 - a^2)}{4\mu_m c^2} (S_1 + S_2 + S_3) + \frac{(S_5 S_6 - S_7^2)S_4 - S_8^2 S_5 - S_9^2 S_6 - 2S_8 S_9 S_7}{\mu_m^3 g^3} \\
&+ \frac{(aS_5 + aS_6 + 2bS_7)S_4 - (aS_7 + 2bS_8 + 2bS_9)S_7 + (2bS_5 - aS_8 + 2bS_9)S_8 - aS_9^2 + (2bS_9 + aS_5)S_6}{2\mu_m^2 g^2 c} \\
&+ \frac{a(a(S_4 + S_5 + S_6) + 2b(S_7 + S_8 + S_9))}{4\mu_m g c^2} \\
&+ \frac{d(2(S_7 + S_8 + S_9) - (S_4 + S_5 + S_6))}{4} + \frac{a^3 - 3ab^3 - 2b^3}{8c^3}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

na qual

$$a = \mu_f - \mu_m - 2\mu_f v_m + 2\mu_m v_f \tag{D.12}$$

$$b = -\mu_m v_m + \mu_f v_f + 2\mu_m v_m v_f - 2\mu_f v_m v_f \tag{D.13}$$

$$c = (\mu_m - \mu_f) \left(\begin{aligned} & -\mu_m + \mu_f - \mu_m v_m - 2\mu_f v_m + 2\mu_m v_f + \mu_f v_f \\ & + 2\mu_m v_m v_f - 2\mu_f v_m v_f \end{aligned} \right) \tag{D.14}$$

$$d = b^2 / (\mu_m g c^2) \tag{D.15}$$

$$g = 2(1 - v_m) \tag{D.16}$$