

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA DE LORENTZ EM TEORIAS  
DE QUATRO FÉRMIONS

RUBENS MÁRIO MOREIRA DA COSTA FILHO

Maceió

2015

RUBENS MÁRIO MOREIRA DA COSTA FILHO

QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA DE LORENTZ EM TEORIAS  
DE QUATRO FÉRMIONS

Dissertação apresentada no Instituto  
de Física da Universidade Federal de  
Alagoas, como parte dos requisitos para  
a obtenção do título de Mestre em Física.  
Orientador: Prof. Dr. Tiago Homero  
Mariz do Nascimento

Maceió

2015

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

C837q Costa Filho, Rubens Mário Moreira da.  
Quebra dinâmica de simetria de Lorentz em teorias de quatro férmions /  
Rubens Mário Moreira da Costa Filho. – 2016.  
72 f. : il., grafs.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.  
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade  
Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 67-72.

1. Violação de simetria de Lorentz. 2. Temperatura finita. 3. Restauração  
de simetria. 4. Teoria quântica de campo. I. Título.

CDU: 530.145:537.8



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

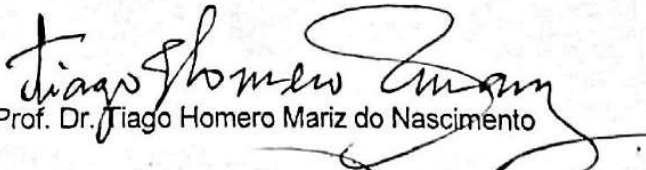
*“Quebra dinâmica de simetria de Lorentz em teorias de*  
*quatro férmions”*

por


Rubens Mário Moreira da Costa Filho

A Banca Examinadora composta pelos Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, e Sandro Guedes Fernandes, do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau "A".

Maceió, 13 de agosto de 2015

  
Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento

  
Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

  
Prof. Dr. Sandro Guedes Fernandes

À MINHA FAMÍLIA

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, aos meus pais (Rubens e Jeyne) e avó (Ednaura) que realizaram sacrifícios ao longo de toda a minha vida em prol da minha educação e juntamente com minha irmã, Mirella, me deram todo o amor, compreensão e carinho.

À minha namorada, Michele, que sempre me dedicou companheirismo, amor e apoio incondicional.

Aos meus amigos Job, Jonathas, Júlio, Fábio, e a todos os parceiros da “zueira”, que certamente sabem quem são, mas evitarei citar nominalmente para evitar injustiças. Obrigado por toda ajuda e por tornarem mais leves os dias nesse árduo caminho.

A todos os professores que participaram da minha formação, em especial ao professor Tiago Mariz, meu orientador desde a graduação, sempre dedicado e paciente.

A todos os funcionários do IF-UFAL, indispensáveis na manutenção do desenvolvimento do nosso instituto.

E, por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.

“Se podes olhar, vê. Se podes ver, repara.”

*(José Saramago)*

# RESUMO

Nesta dissertação estudamos a quebra da simetria de Lorentz induzida dinamicamente em modelos de quatro férmions autointeragentes com e sem massa. No modelo massivo investigamos o potencial efetivo utilizando os métodos de regularização dimensional simples e o de 't Hooft-Veltman, que levarão a diferentes equações de gap, e no segundo caso criará um potencial que conserva a invariância de Lorentz. Para o modelo não massivo usamos novamente a prescrição de 't Hooft-Veltman e calculamos os valores esperados no vácuo do campo  $b^\mu$  nos contextos de temperatura zero e temperatura finita. Com isto mostramos um resultado inédito que revela que, para a parte temporal de  $b^\mu$ , existe um valor crítico de temperatura a partir do qual a simetria do sistema é restaurada.

**Palavras-chave:** Violação de simetria de Lorentz. Temperatura finita. Restauração de simetria.



# ABSTRACT

In this master's thesis we study the dynamically induced Lorentz symmetry breaking in four-fermion self-interacting models with and without mass. In the massive model we investigate the effective potential using the naive and the 't Hooft-Veltman dimensional regularization methods, that will lead to different gap equations and in the second case it will create a potential that conserves the Lorentz invariance. To the massless model we use again the 't Hooft-Veltman prescription and calculate the vacuum expectation value of the field  $b^\mu$  in the contexts of zero and finite temperature. With this we show a unpublished result which reveals that, for the temporal part of  $b^\mu$ , there is a temperature critical value from which the symmetry of the system is restored.

**Keywords:** Lorentz symmetry violation. Finite temperature. Symmetry restoration.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>ELETRODINÂMICA QUÂNTICA ESTENDIDA</b>	<b>8</b>
2.1	Violação da simetria de Lorentz . . . . .	8
2.2	Violação da simetria de CPT . . . . .	11
2.3	Modelo padrão . . . . .	14
2.4	Modelo padrão estendido . . . . .	16
2.5	Eletrodinâmica estendida . . . . .	17
<b>3</b>	<b>QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA COM FÉRMIONS COM MASSA</b>	<b>19</b>
3.1	Introdução . . . . .	20
3.2	Potencial efetivo e VEV . . . . .	20
3.3	Modelo de quatro férmions com massa . . . . .	24
3.4	Modelo de quatro férmions com massa e método HV . . . . .	35
3.4.1	Método de 't Hooft-Veltman . . . . .	35
3.4.2	Método HV no modelo de quatro férmions com massa . . . . .	37
<b>4</b>	<b>QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA COM FÉRMIONS SEM MASSA</b>	<b>42</b>
4.1	Semimetais de Weyl . . . . .	42
4.2	Equação de gap a temperatura zero . . . . .	50
4.3	Equação de gap a temperatura finita . . . . .	58

---

**5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS****64****Referências****67**

## LISTA DE FIGURAS

2.1	TL de observador. . . . .	10
2.2	TL de partícula. . . . .	10
3.1	Regras de Feynman. . . . .	29
3.2	Contribuições para o tadpole $\Pi^\mu$ . . . . .	29
4.1	Heteroestrutura de multicamadas que para baixas energias torna-se um semimetal de Weyl. . . . .	43
4.2	Potencial $V(b^\mu)$ com quebra de simetria, típico do mecanismo de Higgs. . . . .	57
4.3	Potencial $V(b_0)$ para $T > T_c$ . . . . .	63
4.4	Potencial $V(b_0)$ para $T = T_c$ . . . . .	63

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A simetria sempre exerceu um grande fascínio sobre cientistas. Desde a Grécia Antiga, aqueles que tentam entender e explicar o funcionamento da natureza buscam realizar esta tarefa através do uso deste conceito, como fizeram, por exemplo, Pitágoras, com sua teoria da harmonia das esferas celestes, e Platão, para quem o bem estaria relacionado àquilo que é belo e, por conseguinte, segundo ele, simétrico. Vários séculos depois ainda vemos a mesma ideia assumindo posição de destaque em trabalhos como o de Newton, com o princípio da equivalência dos referenciais inerciais.

Posteriormente, em 1918, com a publicação do teorema de Noether – que afirma que para cada simetria em um sistema físico existe uma lei de conservação a ela relacionada – as simetrias ganham maior importância no *modus operandi* da física. Neste contexto algumas simetrias passaram a ser tratadas como propriedades fundamentais da natureza e, portanto, um ponto chave da investigação das estruturas básicas do nosso universo. Uma das simetrias fundamentais mais estudadas atualmente é a de Lorentz, apresentada por Einstein como o primeiro dos dois postulados da relatividade restrita, que diz que as leis da física são invariantes sob transformações de Lorentz, ou seja, elas devem ser equivalentes para todo e qualquer observador em um referencial inercial. Por conta do seu sucesso na confirmação de

dados experimentais, este postulado é parte integrante de qualquer teoria que se proponha a tratar sistemas de altas energias e explicar as forças fundamentais do universo.

Uma dessas teorias é o modelo padrão da física de partículas, proposta mais aceita atualmente na descrição das partículas elementares e suas interações, que, apesar de ser capaz de comprovar experimentos com alta precisão, é vista como o limite de baixas energias de alguma teoria mais fundamental, como uma teoria de cordas. A busca por estas teorias revelou, a despeito do que seria normal esperar, que, no regime de energia em que elas são válidas, simetrias como a de Lorentz e a CPT podem ser violadas de maneira espontânea [1, 2]. Tal descoberta transformou a procura por estas violações em objeto de grande interesse na comunidade científica, e nesse contexto foi desenvolvido por Kostelecký *et al.* o modelo padrão estendido (MPE), uma proposta de extensão da teoria do modelo padrão que visa a inclusão da quebra das simetrias supracitadas [3, 4].

O estudo da quebra de simetria de Lorentz, na verdade, não é uma proposta nova na física de partículas elementares. Antes mesmo do surgimento do MPE, Jackiw *et al.*, em 1990, já haviam proposto o estudo da extensão da teoria de Maxwell pela adição do termo de Chern-Simons em 3+1 dimensões (4D) [5], a saber,  $\propto b_\kappa \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} A_\lambda F_{\mu\nu}$ . Neste termo, devido ao quadri vetor constante  $b_\kappa$ , temos uma quebra de simetria de Lorentz, assim como uma quebra de simetria de CPT. Contudo, em 1963, Bjorken já havia discutido a possibilidade de os fótons surgirem dinamicamente a partir de uma teoria fermiônica autointeragente, com quebra espontânea de simetria de Lorentz [6].

Nesta dissertação estamos interessados em estudar um modelo de Thirring<sup>1</sup> quiral, ou melhor, uma teoria fermiônica com autointeração de quatro férmions, via uma corrente axial  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ , com o objetivo de analisar o surgimento de quebras espontâneas de simetria de Lorentz e de CPT. Na verdade, esse estudo pode ser visto como uma extensão natural da

---

<sup>1</sup>Modelo da teoria quântica de campos solucionável exatamente que descreve autointerações de um campo de Dirac.

análise efetuada por Bjorken, que utilizou inicialmente uma corrente vetorial  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ . Contudo, na nossa análise, devido à corrente axial, temos também o ingrediente da quebra espontânea de simetria de CPT, essencial para geração através de correções radiativas do termo de Chern-Simons 4D [7]. Veremos também que, quando consideramos um modelo fermiônico sem massa, podemos mapeá-lo exatamente nos semimetais de Weyl [8], um sistema de matéria condensada 4D.

No próximo capítulo faremos uma explanação sobre o modelo padrão e sua formulação estendida, após apresentarmos as transformações de Lorentz de observador e partícula e a quebra de simetria relacionada a esta última transformação. Passaremos também pela simetria de CPT e sua violação, que provaremos ser induzida pelo quadrivetor  $b^\mu$ , estudado ao longo de todo este trabalho.

No terceiro capítulo investigamos um modelo de quatro férmions autointeragente com massa, através do uso da regularização dimensional simples, induzindo dinamicamente uma quebra de simetria. Esse estudo já foi realizado na literatura [9], contudo, posteriormente, refazemos o mesmo procedimento, empregando desta vez a prescrição de 't Hooft-Veltman [10], o que resultará em uma inesperada mudança no comportamento do sistema, que descrito por este método deixa de apresentar agora violação de simetria de Lorentz.

Iniciamos o capítulo quatro com uma rápida discussão sobre os semimetais de Weyl, onde mostramos como eles podem ser descritos pela lagrangiana fermiônica da eletrodinâmica quântica estendida pelo termo  $\bar{\psi}\not{b}\gamma_5\psi$ , e assim propiciar uma importante aplicação no domínio da física da matéria condensada de teorias com violação das invariâncias de Lorentz e CPT. Na seção seguinte focamos nossa atenção numa versão não massiva do modelo estudado no capítulo anterior. Seguindo com a prescrição de 't Hooft-Veltman, induzimos uma quebra dinâmica de simetria de Lorentz e geramos dinamicamente um potencial com a forma característica de quebras espontâneas de simetria, um trunfo do nosso trabalho com relação ao de

Bjorken, onde o potencial é adicionado forçosamente já com esta configuração. Em seguida, passando a considerar efeitos termodinâmicos no modelo, encontramos um valor crítico para a temperatura a partir do qual é restaurada a simetria do sistema.

Por fim, no capítulo 5 resumimos nossas conclusões obtidas a partir dos resultados apresentados entre os capítulos 3 e 4 do presente trabalho.

Todos os cálculos aqui apresentados utilizam unidades naturais, isto é, assumem  $\hbar = c = k_B = 1$ .



## Capítulo 2

# ELETRODINÂMICA QUÂNTICA ESTENDIDA

Neste capítulo iremos lançar resumidamente as bases teóricas sobre as quais se fundamenta o nosso trabalho. Inicialmente trataremos das transformações de Lorentz de observador e partícula. Utilizando um exemplo simples, mostraremos como a segunda delas permite uma violação da simetria de Lorentz. Apresentaremos na sequência a transformação de CPT e demonstraremos como o quadrivetor  $b^\mu$  viola a simetria correspondente a esta transformação. Em seguida iremos apresentar o modelo padrão estendido e, por conseguinte, a eletrodinâmica estendida, que será investigada mais a fundo nos capítulos subsequentes.

### 2.1 Violação da simetria de Lorentz

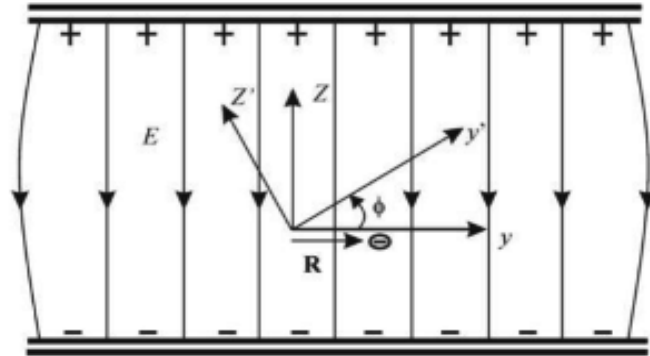
No ano de 1905, Albert Einstein modificou radicalmente a maneira como entendemos o universo, lançando as bases para a compreensão de seu comportamento desde a escala microscópica. Uma de suas mais importantes contribuições à época foi a publicação da teoria da relatividade restrita [11]. Fundada sobre dois postulados, a saber:

- as leis da física devem ser as mesmas para todos os referenciais inerciais;
- a velocidade da luz no vácuo deve ter o mesmo valor constante  $c = 3 \cdot 10^8 m/s$  em todos os referenciais inerciais;

Esta teoria teve como uma de suas primeiras implicações a necessidade de extensão das transformações de Galileu, que mostraram-se inválidas no regime de velocidades próximas a  $c$ . Por esta razão, Einstein introduziu em seu trabalho um novo conjunto de relações matemáticas para conectar diferentes referenciais inerciais, as chamadas transformações de Lorentz (TL), publicadas inicialmente por Henri Poincaré, também em 1905. Elas podem ser divididas entre duas categorias plenamente equivalentes, as passivas e as ativas. Denominamos TL's passivas as relações entre diferentes referenciais inerciais que mantêm fixos os pontos do espaço-tempo. De TL's ativas chamamos as relações inversas, que matêm fixo o sistema de referência e alteram a posição dos pontos no espaço. Na presença de um campo de fundo, as transformações passivas e ativas passam a ser chamadas, respectivamente, de transformações de observador e transformações de partícula.

Na figura (2.1) temos um exemplo de TL de observador [12]: dois referenciais inerciais  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}'$  descrevem um mesmo elétron, de posição  $\vec{R} = (0, R, 0)$ , perpendicular a um campo elétrico  $\vec{E} = (0, 0, -E)$ . Após a aplicação de uma rotação de  $\phi = \frac{\pi}{2}$  sobre  $\mathcal{O}'$ , neste referencial passamos a ter  $\vec{R}' = (0, 0, -R)$  e  $\vec{E}' = (0, -E, 0)$ .

Figura 2.1: TL de observador.

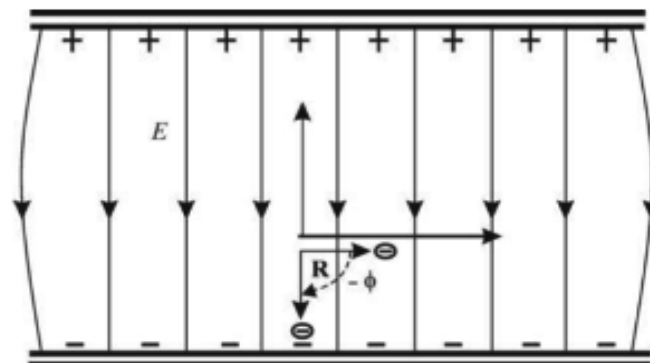


Fonte: Belich *et al.*, 2007.

Observe que mesmo após a rotação o elétron e o campo elétrico permanecem perpendiculares, conservando assim a simetria de Lorentz.

No caso de uma transformação de partícula, figura (2.2), temos um único referencial e a rotação, agora de  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , é desta vez aplicada sobre o elétron. Com isto, a posição do elétron, que era inicialmente  $\vec{R} = (0, R, 0)$ , torna-se  $\vec{R}' = (0, 0, -R)$ , enquanto que o campo elétrico não sofre nenhuma alteração. Deste modo  $\vec{R}'$  e  $\vec{E}' = \vec{E}$  deixam de ser ortogonais, e assim o sistema viola a simetria de Lorentz.

Figura 2.2: TL de partícula.



Fonte: Belich *et al.*, 2007.

Este tipo de violação de simetria, que pode decorrer de rotações ou empurrões (*boosts*) sobre a partícula, será um tema basilar neste trabalho, e nele surgirá através do cálculo de correções radiativas, com um campo constante  $b^\mu$  assumindo o papel desempenhado por  $\vec{E}$  neste exemplo. Conforme demonstraremos nos capítulos 3 e 4, este processo de correção criará estados fundamentais degenerados, causando o surgimento de potenciais efetivos assimétricos, e por isso induzirá de maneira dinâmica violações das invariâncias de Lorentz e de CPT.

## 2.2 Violação da simetria de CPT

A simetria de CPT é uma propriedade essencial das leis da física que implica que estas devem ser invariantes sob operações de conjugação de carga (C), inversão espacial (ou paridade, P) e reversão temporal (T). Resulta dessa propriedade que nosso universo deve ser tal que se trocarmos nele a matéria pela antimatéria (e vice-versa), invertermos suas coordenadas espaciais e momentos (como efeito da reversão temporal), ele deve ainda assim evoluir segundo as mesmas leis que o regiam antes dessas mudanças.

Por algum tempo acreditou-se que as simetrias C, P e T, respeitadas pelas forças gravitacional, forte e eletromagnética, eram simetrias físicas independentes e universais. Contudo, no final da década de 1950 experimentos envolvendo a força fraca revelaram violações da simetria P, que juntamente com casos à época recém conhecidos de violação da simetria C ligados a esta mesma força, fizeram com que a comunidade científica passasse a acreditar que, na verdade, a inversão conjunta de carga e paridade é que deveria manter inalteradas as leis da física. Porém, em 1964, James Cronin e Val Fitch provaram que o decaimento do káon violava a simetria CP (o que lhes rendeu em 1980 o prêmio Nobel de Física), motivando assim a posterior adoção da invariância de CPT como a real característica fundamental dos sistemas físicos, que relaciona a violação da simetria de T à violação de CP.

Embora diversos experimentos nos indiquem que a física deve realmente ser invariante sob transformações de Lorentz e CPT<sup>1</sup>, o propósito do nosso trabalho é investigar possíveis desvios deste comportamento. A razão para este interesse está relacionada com a descoberta apresentada por Greenberg em [13], que prova que uma quebra da simetria de CPT implica necessariamente uma quebra da covariância de Lorentz, embora a recíproca não seja verdadeira. Por esta razão escolhemos estudar modelos que contêm o termo  $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$  do MPE, que mostraremos ser capaz de possuir violações de CPT. Com este fim, iremos introduzir agora as seguinte relações de inversão espacial:

$$P\psi(x)P^{-1} \equiv \psi^p(x) = \alpha_p \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

$$P\bar{\psi}(x)P^{-1} \equiv \bar{\psi}^p(x) = \alpha_p^* \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0; \quad (2.2)$$

reversão temporal:

$$T\psi(x)T^{-1} \equiv \psi^t(x) = \alpha_t \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \mathbf{x}), \quad (2.3)$$

$$T\bar{\psi}(x)T^{-1} \equiv \bar{\psi}^t(x) = -\alpha_t^* \bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) \gamma^1 \gamma^3; \quad (2.4)$$

e conjugação de carga:

$$C\psi(x)C^{-1} \equiv \psi^c(x) = \alpha_c C \bar{\psi}^T(x) \quad (2.5)$$

$$C\bar{\psi}(x)C^{-1} \equiv \bar{\psi}^c(x) = \alpha_c^* \psi^T(x) C, \quad (2.6)$$

$$CA_\mu(x)C^{-1} = -A_\mu(x), \quad (2.7)$$

com  $C = i\gamma^2\gamma^0$ . A seguir, ao invés de aplicar as transformações sobre um termo que envolve diretamente o quadrivetor contante  $b_\mu$ , iremos, sem perda de generalidade, utilizar inicialmente o quadrivetor  $B_\mu = B_\mu(x)$ , que tal qual qualquer campo de gauge transforma-se sob

<sup>1</sup>Para maiores detalhes acerca das transformações de CPT indicamos o livro-texto [14].

conjugação de carga. Sob conjugação de paridade o termo em questão,  $B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ , com o auxílio da inserção de dois operadores identidade  $P^{-1}P$ , transforma-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} PB_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi P^{-1} &= PB_\mu P^{-1} P \bar{\psi} P^{-1} \gamma^\mu \gamma_5 P \psi P^{-1} \\ &= |\alpha_p|^2 B_\mu(t, -\mathbf{x}) \bar{\psi}(\mathbf{t}, -\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^0 \psi(\mathbf{t}, -\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dessa forma, como  $|\alpha_p|^2 = 1$ ,

$$PB_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi P^{-1} = \begin{cases} -B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi & \text{para } \mu = 0 \\ +B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi & \text{para } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.9)$$

De modo análogo, para a reversão temporal, temos

$$\begin{aligned} TB_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi T^{-1} &= TB_\mu T^{-1} T \bar{\psi} T^{-1} \gamma^\mu \gamma_5 T \psi T^{-1} \\ &= -|\alpha_t|^2 B_\mu(-t, \mathbf{x}) \bar{\psi}(-\mathbf{t}, \mathbf{x}) \gamma^1 \gamma^3 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^1 \gamma^3 \psi(-\mathbf{t}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Assim, como também  $|\alpha_t|^2 = 1$ , obtemos que

$$TB_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi T^{-1} = \begin{cases} +B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi & \text{para } \mu = 0 \\ -B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi & \text{para } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.11)$$

Por fim, para a conjugação de carga, encontramos

$$\begin{aligned} CB_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi C^{-1} &= CB_\mu C^{-1} C \bar{\psi} C^{-1} \gamma^\mu \gamma_5 C \psi C^{-1} \\ &= -B_\mu(t, \mathbf{x}) \bar{\psi}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(\mathbf{t}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A partir dos resultados das operações acima, listamos na tabela 2.1 as simetrias violadas

pelas estruturas tensoriais  $B_0$  e  $B_i$ .

**Tabela 2.1: Simetria CPT e tensor  $B_\mu$ .**

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$B_0$	-	-	+	+	-	-	+
$B_i$	-	+	-	-	+	-	+

Fonte: Autor, 2015.

Observe que caso  $B_\mu = B_\mu(x)$  seja convertido em um quadri vetor constante  $b_\mu$ , ele não mais se transformará sob conjugação de carga, o que causará uma mudança de sinal na operação (2.12) e, por conseguinte, na transformação de CPT, conforme mostrado na tabela 2.2.

**Tabela 2.2: Simetria CPT e tensor  $b_\mu$ .**

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$b_0$	+	-	+	-	+	-	-
$b_i$	+	+	-	+	-	-	-

Fonte: Autor, 2015.

Isto mostra que a estrutura  $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$  do setor fermiônico do MPE viola de fato a simetria de CPT.

## 2.3 Modelo padrão

O modelo padrão da física de partículas (MP) é uma teoria física que descreve o universo dividindo-o entre matéria e forças atuando entre seus componentes. De acordo com sua explicação, toda a física se reduz a um conjunto de interações entre férmions mediadas por bósons através de campos. Atualmente o MP engloba três das quatro forças fundamentais da natureza (eletromagnética, forte e fraca) – excetuando assim a gravidade, única força ainda

não descritível em termos de uma teoria quantizável – relacionando cada uma destas a uma determinada propriedade da matéria (carga elétrica, sabor, cor e massa), cuja presença é condição necessária para sua atuação.

Neste modelo todas as partículas elementares hoje conhecidas são divididas entre dois grupos: férmions (com spin semi-inteiro) e bósons (com spin inteiro). Os férmions podem ser de dois tipos: léptons, capazes de interagir apenas através das forças fraca e eletromagnética, e quarks, que interagem também com a força forte, além das duas últimas. Os bósons são os quanta associados a cada um dos campos das quatro interações fundamentais, e podem ser entendidos como “transportadores” destas interações. Para o eletromagnetismo temos uma partícula desprovida de massa, o fóton. Para o campo fraco os quantas são os eletricamente carregados  $W^+$  e  $W^-$  e o neutro  $Z$ , descoberto no CERN em 1983, já previsto por José Leite Lopes, em 1958 [15]. Por ser mediada por bósons massivos, a força fraca é de curto alcance. Isto é uma consequência direta do princípio da incerteza, que implica que uma partícula de massa  $M$  (e energia  $E = Mc^2$ ) pode existir apenas por um intervalo de tempo  $\Delta t = \frac{\hbar}{Mc^2}$ , limitando dessa maneira seu alcance a uma distância próxima a  $\frac{\hbar c}{Mc}$ . Por outro lado, o glúon, quanta da força forte, mesmo sendo uma partícula sem massa, tem também um alcance pequeno, no seu caso limitado pelo fenômeno do confinamento, que restringe sua atuação a distâncias da ordem de  $1.0 \times 10^{-15}\text{m}$ . Na tabela 2.3 listamos as interações descritas pelo modelo padrão, e os quanta e simetrias correspondentes a cada uma delas.

**Tabela 2.3: Interações fundamentais, seus bósons e simetrias.**

Interação	Bóson	Spin	Simetria
Eletromagnética	fóton	1	U(1)
Fraca	$W^+, W^-, Z_0$	1	SU(2)
Forte	glúons	1	SU(3)

Fonte: Autor, 2015.



## 2.4 Modelo padrão estendido

Apesar de seu sucesso na explicação da ação de três interações fundamentais, na incorporação das simetrias de gauge a elas associadas, e de outras simetrias essenciais como a de Lorentz e a de CPT, o modelo padrão tem ainda uma série de problemas, como a incapacidade de lidar adequadamente com a gravitação, as questões da assimetria entre matéria e antimatéria, da hierarquia das massas, entre outros. Com a pretensão de corrigir esses problemas, vários modelos foram propostos como alternativas ao modelo padrão. Entre estas está o modelo padrão estendido, desenvolvido por V. Alan Kostelecký e D. Colladay em 1998, como uma teoria efetiva contendo todas as propriedades do MP convencional, como estabilidade, causalidade [16] e renormalizabilidade [17], porém, dotada de termos capazes de violar as simetrias de Lorentz e de CPT.

A razão para a escolha de uma teoria com este comportamento, aparentemente indesejável, reside na descoberta de que quebras de simetria deste tipo podem ser naturais em teorias com número de dimensões espaço-temporais maior que quatro, como acontece em teorias de cordas. Por esta razão, a manifestação deste tipo de fenômeno em teorias quadridimensionais pode servir como uma evidência experimentalmente comprovável da validade de teorias mais fundamentais. A busca por estas evidências experimentais, embora não seja simples, uma vez que deve lidar com efeitos mínimos das violações de Lorentz sobre eventos observáveis, tem um vasto campo de pesquisa a explorar, que passa por oscilações de káons [18, 19], medições no setor bosônico do MP [20, 21, 22, 23], no setor gravitacional [24, 25], oscilações de neutrinos [26, 27, 28], medidas de tempo em diferentes referenciais [29, 30, 31], além de estudos com semimetais de Weyl [32], que abordaremos posteriormente.

## 2.5 Eletrodinâmica estendida

A eletrodinâmica quântica estendida é uma proposta de eletrodinâmica generalizada que incorpora termos que desrespeitam a simetria de Lorentz, obtida diretamente do modelo padrão estendido, e que, para além das violações de Lorentz e CPT, conserva todas as propriedades convencionais da eletrodinâmica quântica. Seu estudo dentro do contexto do MPE tem importância destacada por conta do alto grau de precisão dos testes realizados com a eletrodinâmica quântica usual, o que pode oferecer limites e vínculos muito bem determinados para os valores dos coeficientes dos termos passíveis de provocar violações de Lorentz. Estes termos devem necessariamente ser pequenos o suficiente para que possam ser considerados insignificantes no regime de energia do setor eletrofraco usual e assim garantir a recuperação do modelo usual. Além disso, o respeito a estes pré-requisitos nos oferece a possibilidade de emprego do método perturbativo dentro da teoria.

Limitada a seu setor mínimo, isto é, àquele com operadores com dimensão de massa  $d = 3$  ou  $d = 4$ , a densidade de lagrangiana, ou apenas lagrangiana, da teoria é escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} \overbrace{F^{\kappa\lambda} F^{\mu\nu}}^{d=4} + \frac{1}{2} \overbrace{(k_{AF})^\kappa}^{d=1} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \overbrace{A^\lambda F^{\mu\nu}}^{d=3}, \quad (2.13)$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  é a derivada covariante, o tensor intensidade do campo eletromagnético é  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$  e  $M = m + M_1$ , sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= c^{\nu\mu} \gamma_\nu + d^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda}, \\ M_1 &= a_\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A quebra da invariância de Lorentz é introduzida no setor fermiônico de (2.13) através dos termos governados pelos tensores constantes  $a_\mu, b_\mu, c_{\nu\mu}, d_{\nu\mu}, e_\mu, f_\mu, g_{\kappa\lambda\mu}, H_{\mu\nu}$ , enquanto

que no setor bosônico são os coeficientes  $(k_{AF})_\mu$  e  $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$  que exercem esta função. Deste modo, como deveria ser, a anulação destes termos nos leva de volta para a lagrangiana da eletrodinâmica quântica usual, dada por

$$\mathcal{L}_{EDQ} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} m \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Note que apenas os coeficientes contidos em  $M_1$  ( $a_\mu, b_\mu, H_{\mu\nu}$  e  $(k_{AF})_\mu$ ) possuem dimensão de massa, enquanto os demais são todos adimensionais. É válido destacar ainda que todos os coeficientes com quantidade ímpar de índices violam também a simetria CPT (tabela 2.4),

**Tabela 2.4: Simetria CPT e coeficientes do MPE.**

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, (k_F)_{0j0k},$ $c_{jk}, (k_F)_{jklm}$	+	+	+	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	+	-	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-	+	-	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	-	-	+	+
$a_0, e_0, f_j$	-	+	+	-	-	+	-
$H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}$	-	+	-	-	+	-	+
$H_{0j}, d_{00}, d_{jk}$	-	-	+	+	-	-	+
$a_j, e_j, f_0$	-	-	-	+	+	+	-

Fonte: Kostelecký *et al.*, 2002.

bem como que apenas os coeficientes  $b_\mu$  e  $c_{\nu\mu}$  produzem correções quânticas no setor bosônico, de modo que

$$(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} \propto g_{\kappa\mu} c_{\lambda\nu} + g_{\lambda\nu} c_{\kappa\mu} - g_{\kappa\nu} c_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu} c_{\kappa\nu},$$

$$(k_{AF})_\mu \propto b_\mu. \quad (2.16)$$

Além desta, uma outra característica destacável do quadrivetor  $b^\mu$  é a capacidade de geração do termo de Chern-Simons a partir de uma quebra espontânea de Lorentz.

## Capítulo 3

# QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA COM FÉRMIONS COM MASSA

Ao longo deste capítulo iremos investigar a possibilidade da produção de uma quebra espontânea da simetria de Lorentz gerada por correções radiativas em um modelo fermiônico autointeragente. Analisando o potencial efetivo, atestaremos a existência de um valor esperado no vácuo (VEV) não nulo para o campo  $b^\mu$ , o que irá desencadear uma quebra da simetria de Lorentz, conforme estudo já realizado em [9]. Em seguida, refaremos este procedimento usando a prescrição de 't Hooft-Veltman (ou método HV) para calcular a equação de gap, que irá assumir uma nova forma, e gerar um potencial simétrico, que preserva a simetria de Lorentz, ao contrário do que acontece no primeiro caso.

## 3.1 Introdução

A ideia de quebra dinâmica de simetria foi utilizada em teorias físicas pela primeira vez na teoria BCS (Bardeen-Cooper-Schieffer) de supercondutividade [33], que além de explicar satisfatoriamente este fenômeno, introduziu um novo conceito na física: o de rearmenjo dinâmico do estado fundamental por emparelhamento de férmions.

Esta ideia foi estendida para a teoria quântica de campos por Y. Nambu e G. Jona-Lasinio [34], que propuseram que a massa dos férmions deveria ser um resultado de seus emparelhamentos, e que através de um mecanismo semelhante surgiriam as massas das partículas fundamentais.

A quebra dinâmica de simetria que iremos estudar é uma violação de simetria induzida através de correções radiativas em teorias quânticas de campos. Por envolver correções radiativas, para trabalhar com este tipo de fenômeno precisamos lançar mão de um tipo de potencial diferente do usual, capaz de incorporar os efeitos destas correções, que chamamos de potencial efetivo ( $V_{ef}$ ), que infelizmente não possui uma expressão geral bem definida e, por esta razão, necessita ser analisado em cada ordem de correção.

Uma importante função do potencial efetivo no estudo da quebra dinâmica de simetria advém do fato de que ela decorre do surgimento na teoria de um valor esperado no vácuo não nulo, que por sua vez pode ter sua existência facilmente inferida através do cálculo dos mínimos do potencial.

## 3.2 Potencial efetivo e VEV

Utilizando uma teoria  $\phi^4$  escalar, nesta seção mostraremos como um valor mínimo não nulo do potencial efetivo implica a existência de um VEV diferente de zero.

A lagrangiana da teoria do nosso exemplo é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (3.1)$$

e a ação, na presença de uma fonte  $J$ , fica

$$S^J = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right). \quad (3.2)$$

Desligando a fonte ( $J = 0$ ) obtemos o potencial clássico, denotado por  $V^0$ , dado por

$$V^0 = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3.3)$$

O funcional gerador para o nosso sistema definimos como

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = \int D\phi e^{\frac{i}{\hbar} S^J}, \quad (3.4)$$

onde  $W[J]$  é o funcional gerador para as funções de Green conectadas, definido como

$$\left. \frac{\delta^n W}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = (i\hbar)^{n-1} \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (3.5)$$

Da equação acima, vemos que  $\phi_c$ , o campo clássico, que fornece o valor esperado no vácuo do campo  $\phi$ , é dado por

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J, \quad (3.6)$$

o que nos mostra que  $\phi_c$  deve ser uma constante independente do espaço tempo se a fonte for desligada, uma vez que o vácuo deve ser um invariante de Lorentz.

A equação de Euler-Lagrange obtida a partir da ação (3.2) é

$$\frac{\delta S^J}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + J(x) = 0, \quad (3.7)$$

onde,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = -(\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3). \quad (3.8)$$

Assim, substituindo este resultado na equação anterior, temos,

$$J = F(\phi) = (\square + m^2)\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3, \quad (3.9)$$

com  $F(\phi)$  sendo o operador de Euler, isto é, o operador que aplicado em  $\phi$  resulta na equação de Euler-Lagrange para este campo.

A partir da Eq. (3.4) podemos observar que o funcional gerador não possui dependência em  $\phi$ , uma vez que ele é definido através de uma integração sobre todas as configurações de campo. Sendo assim, uma variação infinitesimal no campo,

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi, \quad (3.10)$$

não pode alterar o funcional gerador. Isto implica que, sob esta redefinição do campo, deve ser válida a identidade abaixo,

$$\delta Z[J] = 0. \quad (3.11)$$

Portanto, pelas definições de  $Z[J]$  e  $J$ , equações (3.4) e (3.9), respectivamente, chegamos a

$$\begin{aligned}
\int D\phi \frac{\delta S^J}{\delta \phi} e^{\frac{i}{\hbar} S^J} &= 0 \\
&= \int D\phi (F(\phi) - J) e^{\frac{i}{\hbar} S^J} \\
&= \int D\phi \left( F \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) - J \right) e^{\frac{i}{\hbar} S^J} \\
&= \left( F \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) - J \right) Z[J],
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde fizemos a substituição  $\phi \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J}$ , válida porque

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int d^4 y J(y) \phi(y) \right] = \phi(x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int d^4 y J(y) \phi(y) \right] \tag{3.13}$$

e, portanto,

$$\frac{\delta e^{\frac{i}{\hbar} S^J}}{\delta J} = \phi e^{\frac{i}{\hbar} S^J}. \tag{3.14}$$

Explicada a substituição, regressamos para o último termo de (3.12) e o reescrevemos:

$$F \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) Z[J] = J(x) Z[J] \tag{3.15}$$

$$F \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = J e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} \tag{3.16}$$

$$F \left( \frac{\delta W[J]}{\delta J} \right) = F(\phi_c) = J(x). \tag{3.17}$$

Este resultado nos mostra que o campo clássico satisfaz à mesma equação de Euler-Lagrange da teoria original. Logo, ao desligarmos o termo de fonte ( $J \rightarrow 0$ ), que foi utilizado até então apenas como um artifício matemático, ficamos com

$$\Box \phi_c + m^2 \phi_c + \frac{\lambda}{3!} \phi_c^3 = 0. \tag{3.18}$$



Contudo, na ausência da fonte o campo clássico é constante, e assim a equação acima se reduz a

$$m^2\phi_c + \frac{\lambda}{3!}\phi_c^3 = 0. \quad (3.19)$$

Voltando para a expressão do potencial clássico (3.3) vemos que sua derivada é igual ao lado esquerdo da equação (3.19), logo,

$$\frac{\partial V^0(\phi_c)}{\partial \phi_c} = 0. \quad (3.20)$$

A solução desta equação nos fornece o valor de  $\phi_c$  para o qual o potencial clássico é mínimo. Por conseguinte, a presença de uma solução não trivial para (3.20) implica

$$\phi_c = \langle 0 | \phi | 0 \rangle \neq 0. \quad (3.21)$$

Isto explicita uma relação entre o potencial efetivo e o vácuo da teoria, e nos prova que um mínimo diferente de zero para o potencial implica a existência de um valor não nulo para o valor esperado no vácuo do campo.

### 3.3 Modelo de quatro férmions com massa

Nesta seção iremos estudar uma quebra espontânea de simetria que ocorre através do mecanismo de Coleman-Weinberg [35], com o fim de investigar a possibilidade de ocorrência de quebra de simetria de Lorentz induzida dinamicamente através de correções radiativas que geram um modelo tipo *bumblebee*<sup>1</sup>; uma vantagem do nosso trabalho com relação a modelos que necessitam partir de um campo *bumblebee* para obter a VIL, como o tratado em [37].

<sup>1</sup>Modelos de *bumblebee* são teorias que envolvem um campo vetorial capaz de induzir uma violação espontânea da simetria de Lorentz a partir de um potencial que é função deste campo. [36]

Analisaremos um modelo de Thirring quirial em 4 dimensões, usando quatro férmions, como no modelo de Gross-Neveu<sup>2</sup> [38], governado pela lagrangiana,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \frac{G}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi), \quad (3.22)$$

que descreve um modelo não renormalizável. Este modelo deve ser entendido como uma teoria efetiva de baixa energia surgida de uma teoria mais fundamental ainda não conhecida, da mesma maneira que a proposta inicial de Nambu e Jona-Lasinio (NJL) [34] para a cromodinâmica quântica (CDQ).

A fim de eliminar o termo de autointeração na lagrangiana do modelo que estamos trabalhando, acrescentamos a ela um campo auxiliar  $B^\mu$ , tal que (3.22) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \frac{g^2}{2} \left( B^\mu - \frac{e}{g^2} \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \right)^2 \\ &= \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{B}\gamma_5)\psi, \end{aligned} \quad (3.23)$$

com  $G = \frac{e^2}{g^2}$ . Em seguida, com o auxílio dos termos de fonte  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ , definimos o funcional gerador,

$$Z = \int DB_\mu D\psi D\bar{\psi} \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right], \quad (3.24)$$

para analisarmos a possibilidade de indução de um potencial bumblebee através de correções radiativas a partir da lagrangiana (3.23).

Para extrair a ação efetiva a partir da equação acima podemos ignorar os termos de fonte. Assim, vamos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$Z = \int DB_\mu Z_0, \quad (3.25)$$

---

<sup>2</sup>Modelo da teoria quântica de campos com interação entre quatro férmions de Dirac, apresentado em 1974 por David Gross e André Neveu.

com  $Z_0$  sendo definido como:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + \bar{\psi} (i\rlap{\not{D}} - m - e\rlap{\not{B}}\gamma_5) \psi \right] \right\} \\ &= \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left( i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu \right) \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\rlap{\not{D}} - m - e\rlap{\not{B}}\gamma_5) \psi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Uma vez que  $B^\mu$  não tem dependência dos espinores  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , retiramos a primeira exponencial da integral, deixando  $Z_0$  com a forma

$$Z_0 = \exp \left( i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu \right) \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\rlap{\not{D}} - m - e\rlap{\not{B}}\gamma_5) \psi \right] \right\}. \quad (3.27)$$

Como solução da integral fermiônica, temos

$$\int D\psi D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\rlap{\not{D}} - m - e\rlap{\not{B}}\gamma_5) \psi \right] \right\} = \det \underbrace{(i\rlap{\not{D}} - m - e\rlap{\not{B}}\gamma_5)}_{\Theta} = \det \Theta. \quad (3.28)$$

Aproveitando o fato de que  $\Theta$  pode ser escrito como uma matriz diagonal, expressamos seu determinante como o produto dos termos da sua diagonal principal,

$$\det \Theta = \prod_{i=1}^n \theta_i. \quad (3.29)$$

Logo, utilizando propriedades do produtório, obtemos

$$\det \Theta = \prod_{i=1}^n e^{\ln \theta_i} = e^{\sum_i \ln \theta_i} = e^{\ln \sum_i \theta_i} = e^{\ln \text{Tr} \Theta}. \quad (3.30)$$

Portanto,

$$Z_0 = \exp \left( i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu \right) \exp (\text{Tr} \ln \Theta). \quad (3.31)$$

Fazendo uso da relação entre o funcional gerador e a ação efetiva ( $S_{ef}$ ),

$$Z = \int DB_\mu D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x \mathcal{L}} = \int DB_\mu e^{iS_{ef}}, \quad (3.32)$$

temos as seguintes igualdades,

$$\begin{aligned} e^{iS_{ef}} &= Z_0 \\ &= \exp \left( i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu \right) \exp (Tr \ln \Theta) \\ &= \exp \left[ i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + Tr \ln \Theta \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Desse modo, a ação efetiva é então expressa como

$$S_{ef}[B] = \frac{g^2}{2} \int d^4x B_\mu B^\mu - i Tr (i \not{\partial} - m - e \not{B} \gamma_5). \quad (3.34)$$

Aqui “Tr” é o traço sobre as matrizes de Dirac, bem como sobre a integração nos espaços dos momentos ou das coordenadas. Assim, passando para o espaço dos momentos, através da ação efetiva encontramos o potencial efetivo, dado por

$$V_{ef} = -\frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\not{p} - m - e \not{B} \gamma_5), \quad (3.35)$$

onde o campo clássico é independente das coordenadas.

Com o propósito de verificar a presença de um mínimo não trivial na teoria, vamos agora buscar os mínimos do potencial efetivo, isto é, as soluções da equação abaixo,

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = -\frac{g^2}{e} b^\mu - i \Pi^\mu = 0, \quad (3.36)$$

onde  $b^\mu = e\beta^\mu \neq 0$  e  $\Pi^\mu$  é uma função de um ponto chamada de amplitude de *tadpole*<sup>3</sup>, responsável pela correção quântica de primeira ordem do VEV do campo, tal que

$$\Pi^\mu = \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} (-ie)\gamma^\mu\gamma_5. \quad (3.37)$$

Para resolver a equação (3.36) precisamos calcular a integral acima. Para isto, sabendo que

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \dots, \quad (3.38)$$

iremos expandir o propagador  $S(p) = i(\not{p} - m - \not{b}\gamma_5)^{-1}$ , contido em  $\Pi^\mu$ , de maneira que

$$\begin{aligned} \Pi^\mu = & e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu\gamma_5 + e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu\gamma_5 \\ & + e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu\gamma_5 \\ & + e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu\gamma_5 \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

As frações  $\frac{1}{\not{p}-m}$  podem ser racionalizadas da seguinte forma:

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{1}{\not{p} - m} \frac{\not{p} + m}{\not{p} + m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (3.40)$$

Com isto, expressamos  $\Pi^\mu$  como

$$\begin{aligned} \Pi^\mu = & e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma^\mu\gamma_5 + e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \not{b}\gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma^\mu\gamma_5 \\ & + e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \not{b}\gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \not{b}\gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma^\mu\gamma_5 \\ & + e \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \not{b}\gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \not{b}\gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \not{b}\gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma^\mu\gamma_5 + \dots, \end{aligned} \quad (3.41)$$

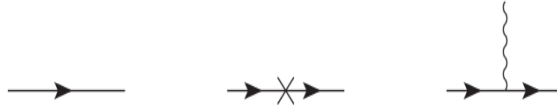
<sup>3</sup>Chamamos de tadpole um diagrama de Feynman dotado de uma única perna externa.

tal que, separando os termos de acordo com o número de inserções  $i\not{b}\gamma_5$ , temos

$$\Pi^\mu = \Pi_0^\mu + \Pi_b^\mu + \Pi_{bb}^\mu + \Pi_{bbb}^\mu + \dots \quad (3.42)$$

Para representar graficamente o termo de tadpole utilizaremos as regras de Feynman, ilustradas na figura (3.1).

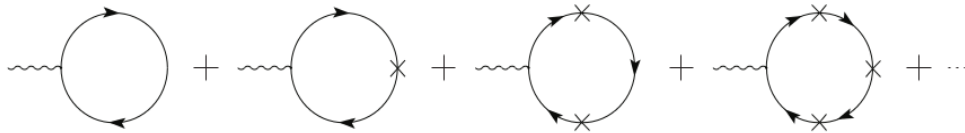
**Figura 3.1: Regras de Feynman.**



Fonte: Mariz *et al.*, 2008.

Nestes gráficos linhas contínuas representam os propagadores fermiônicos, enquanto linhas onduladas correspondem a propagadores do campo auxiliar. O símbolo  $\times$  indica a inserção  $-i\not{b}\gamma_5$  no propagador do férmion. E o vértice formado pelo encontro das linhas ondulada e contínua representa o termo  $-ie\gamma^\mu\gamma^5$ . Com isto, as correções quânticas decorrentes de  $\Pi^\mu$  podem ser representadas pelo diagrama de Feynman da figura (3.2).

**Figura 3.2: Contribuições para o tadpole  $\Pi^\mu$ .**



Fonte: Mariz *et al.*, 2008.

Prosseguindo em busca da solução de (3.41), iremos utilizar o processo de regularização dimensional para identificar possíveis divergências na integral de laço em (3.42) [39]. Este procedimento, além de resolver tanto divergências ultravioleta quanto infravermelhas,

é bastante vantajoso, se comparado a outros métodos de regularização, também por não interferir nas simetrias das teorias em que é aplicado. Ele consiste basicamente em calcular os traços das matrizes de Dirac em 4 dimensões e em seguida promover as integrais e o tensor métrico  $g^{\mu\nu}$  para D dimensões.

Para computar os traços iremos contar com o auxílio das seguintes identidades:

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0, \text{ se } n \text{ é ímpar}; \quad (3.43a)$$

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) = 0, \text{ se } n \text{ é ímpar ou menor que } 4; \quad (3.43b)$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}; \quad (3.43c)$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}); \quad (3.43d)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}; \quad (3.43e)$$

$$\{\not{p}, \not{b}\} = 2(p \cdot b); \quad (3.43f)$$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0; \quad (3.43g)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1. \quad (3.43h)$$

Observando as equações (3.41) e (3.42) já podemos concluir, pela identidade (3.43b), a despeito do cálculo da integral, que

$$\Pi_0^\mu = 0. \quad (3.44)$$

Em  $\Pi_b^\mu$  iremos calcular o traço a seguir,

$$\text{tr}[(\not{p} + m)\not{b}\gamma_5(\not{p} + m)\gamma^\mu\gamma^5] = \text{tr}(\not{p}\not{b}\gamma_5\not{p}\gamma^\mu\gamma_5 + \not{p}\not{b}\gamma_5 m\gamma^\mu\gamma_5 + m\not{b}\gamma_5\not{p}\gamma^\mu\gamma_5 + m^2\not{b}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5). \quad (3.45)$$

Usando (3.43g), em cada termo do lado direito da igualdade acima iremos juntar aos pares as matrizes  $\gamma_5$ , passando-as através das outras matrizes de Dirac, para aplicando (3.43h) obtermos

$$\text{tr}[(\not{p} + m)\not{b}\gamma_5(\not{p} + m)\gamma^\mu\gamma^5] = \text{tr}(\not{p}\not{b}\not{p}\gamma^\mu - \not{p}\not{b}\gamma^\mu m + \not{b}\not{p}\gamma^\mu m - m^2\not{b}\gamma^\mu), \quad (3.46)$$

onde, de acordo com a identidade (3.43a) o segundo e o terceiro termo são anulados e, por (3.43f), o primeiro torna-se

$$\not{p}\not{b}\not{p}\gamma^\mu = (2p \cdot b - \not{p}\not{b})\not{p}\gamma^\mu = 2(p \cdot b)\not{p}\gamma^\mu - p^2\not{b}\gamma^\mu, \quad (3.47)$$

tal que, por (3.43c),

$$\text{tr}(\not{p}\not{b}\not{p}\gamma^\mu) = 2(p \cdot b)\text{tr}(\not{p}\gamma^\mu) - p^2\text{tr}(\not{b}\gamma^\mu) = 8(p \cdot b)p^\mu - 4p^2b^\mu, \quad (3.48)$$

e o último termo de (3.46) fica

$$\text{tr}(m^2\not{b}\gamma^\mu) = 4m^2b^\mu. \quad (3.49)$$

Logo, juntando os resultados obtidos acima em (3.47) e (3.49), encontramos o resultado do traço presente em  $\Pi_b^\mu$ :

$$\text{tr}[(\not{p} + m)\not{b}\gamma_5(\not{p} + m)\gamma^\mu\gamma^5] = 8(p \cdot b)p^\mu - 4p^2b^\mu - 4m^2b^\mu. \quad (3.50)$$

Portanto, podemos escrever

$$\Pi_b^\mu = e \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{8(p \cdot b)p^\mu - 4p^2b^\mu - 4m^2b^\mu}{(p^2 - m^2)^2}. \quad (3.51)$$



Através de procedimento semelhante ao utilizado para  $\Pi_b^\mu$  chegamos aos resultados a seguir:

$$\Pi_{bb}^\mu = 0, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{bbb}^\mu = e \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} \times [32p^\mu (p \cdot b)^3 + 24m^2 p^2 b^2 b^\mu - 16m^2 (b \cdot p)^2 b^\mu \\ - 16m^2 b^2 (p \cdot b) p^\mu - 16p^2 (p \cdot b)^2 b^\mu - 16p^2 b^2 (p \cdot b) p^\mu + 4m^4 b^2 b^\mu + 4b^2 p^4 b^\mu]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Efetuamos também os cálculos para termos com mais de três inserções e vimos que eles são todos iguais a zero. Utilizando o método de *cutoff*, em [9] verificou-se igualmente que os termos com potência maior que 3 em  $b_\mu$  são todos nulos, assim como aqueles proporcionais a  $b^2$ .

Nosso próximo passo é calcular as integrais de laço. Para isto faremos uso da fórmula abaixo:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_P}}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\alpha)(-m)^{\alpha - \frac{D}{2}}} [(g_{\mu_1 \mu_2} \cdots g_{\mu_{P-1} \mu_P} + \text{permutações}) \times \\ \left(-\frac{m}{2}\right)^{\frac{P}{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - \frac{P}{2}\right)]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Objetivando deixar sua expressão com a forma adequada para aplicação da fórmula (3.54), reescrevemos os termos dependentes do momento em  $\Pi_b^\mu$ . Além disso, introduzimos o parâmetro regulador  $\mu^{4-D}$ , necessário para a correção da dimensão de massa na expressão, uma vez que a dimensão está sendo variada para que possamos efetuar a integração. Feitas estas modificações, chegamos em

$$\Pi_b^\mu = e\mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{8p^\alpha b_\beta g^{\alpha\beta} p^\mu - 4p^\alpha p_\beta g^{\beta\mu} - 4m^2 b^\mu}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (3.55)$$

tal que, empregando (3.54) com  $P = 2$  para os dois primeiros termos na integral acima e

$P = 0$  para o último, encontramos

$$\begin{aligned} \Pi_b^\mu = & i2^{-D}D(2D-2)\pi^{-\frac{D}{2}}eb^\mu\mu^{4-D}(-m^2)^{\frac{D-2}{2}}\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right) - i2^{1-D}D\pi^{-\frac{D}{2}}eb^\mu \\ & \times \mu^{4-D}(-m^2)^{\frac{D-2}{2}}\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Realizada a integração, expandimos o resultado em torno de  $D$ . Assim, com  $\epsilon = 4 - D$  e  $\mu'^2 = 4\pi\mu^2e^{-\gamma}$ , obtemos

$$\Pi_b^\mu = -\frac{im^2eb^\mu}{\pi^2\epsilon} + \frac{im^2eb^\mu}{2\pi^2}\ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right). \quad (3.57)$$

Com o propósito de calcular  $\Pi_{bbb}^\mu$ , realizamos procedimento análogo ao descrito acima para o termo  $\Pi_b^\mu$  e assim encontramos

$$\Pi_{bbb}^\mu = -\frac{ieb^2b^\mu}{3\pi^2}. \quad (3.58)$$

Portanto, juntando os resultados encontrados em (3.44), (3.57), (3.52) e (3.58), escrevemos o termo de correção do valor esperado no vácuo de  $b^\mu$  como

$$\Pi^\mu = -\frac{im^2eb^\mu}{\pi^2\epsilon} + \frac{im^2eb^\mu}{2\pi^2}\ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) - \frac{ieb^2b^\mu}{3\pi^2}. \quad (3.59)$$

De posse desse resultado podemos agora escrever a derivada do potencial efetivo em  $B = \beta$  (3.36) como

$$\left[-\frac{1}{G} - \frac{m^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{m^2}{2\pi^2}\ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) - \frac{b^2}{3\pi^2}\right]eb^\mu = 0. \quad (3.60)$$

Introduzindo a constante de acoplamento renormalizada,

$$\frac{1}{G_R} = \frac{1}{G} + \frac{m^2}{\pi^2\epsilon}, \quad (3.61)$$

chegamos então à equação de gap

$$\left[ -\frac{1}{G_R} + \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left( \frac{m^2}{\mu'^2} \right) - \frac{b^2}{3\pi^2} \right] eb^\mu = 0, \quad (3.62)$$

cuja solução não trivial é dada por

$$b^2 = -3\pi^2 \left[ \frac{1}{G_R} - \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left( \frac{m^2}{\mu'^2} \right) \right]. \quad (3.63)$$

Esta solução evidencia a existência de duas possibilidades para a ocorrência de mínimos não triviais para o potencial efetivo. Caso  $b^\mu$  seja um quadrivetor tipo tempo ( $b_0^2 > b_i^2 \Rightarrow b^2 > 0$ ), o mínimo que buscamos será possível se

$$G_r > \frac{2\pi^2}{m^2 \left( \frac{m^2}{\mu'^2} \right)}, \quad (3.64)$$

ao passo que para um  $b^\mu$  tipo espaço ( $b_0^2 < b_i^2 \Rightarrow b^2 < 0$ ) devemos ter

$$G_r < \frac{2\pi^2}{m^2 \left( \frac{m^2}{\mu'^2} \right)}. \quad (3.65)$$

Nestes dois casos, portanto, teremos um VEV que viola a invariância de Lorentz. Na próxima seção iremos obter a correção quântica de primeira ordem para o valor esperado no vácuo através de um outro método de regularização e observar as alterações que isto implicará na forma do potencial efetivo e na sua relação com a simetria de Lorentz.

## 3.4 Modelo de quatro férmions com massa e método HV

### 3.4.1 Método de 't Hooft-Veltman

O método de 't Hooft-Veltman consiste em um procedimento de regularização dimensional no qual o espaço quadridimensional é generalizado para um espaço D-dimensional composto por dois subespaços, um subespaço físico com dimensão 4 e um não físico de dimensão  $D - 4$ .

A introdução desse espaço D-dimensional irá implicar o surgimento de elementos físicos e não físicos nos processos que incorporarem este método. Assim, no cálculo de diagramas de Feynman o momento interno passará a ser formado pela soma de um vetor de dimensão quatro, denotado por  $p^\mu$ , com outro de dimensão  $D - 4$ , denotado por  $\hat{p}^\mu$ , isto é,

$$p^\mu \rightarrow \bar{p}^\mu = p^\mu + \hat{p}^\mu, \quad (3.66)$$

onde  $p^\mu$  será um vetor com apenas as quatro primeiras componentes não nulas e  $\hat{p}^\mu$  com apenas as quatro primeiras sendo necessariamente nulas, ou seja,

$$p^\mu = 0, \text{ se } \mu \notin \{0, 1, 2, 3\}; \hat{p}^\mu = 0, \text{ se } \mu \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (3.67)$$

Contudo, esta alteração se limitará à variável de integração e, deste modo, matrizes de Dirac contraídas com um momento interno irão também adquirir uma parte não física e uma

física, passando a serem decompostas de maneira análoga ao que ocorre com o momento:

$$\gamma^\mu \rightarrow \bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu + \hat{\gamma}^\mu. \quad (3.68)$$

A extensão da dimensão do espaço dos momentos irá ocasionar também uma outra modificação na integração, tal que  $\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$  passará para  $\mu^{4-D} \frac{d^D\bar{p}}{(2\pi)^D}$ , onde  $\mu$ , conforme já explicado na seção anterior, é utilizado para regular a dimensão de massa.

As matrizes de Dirac ganharão uma regra de anticomutação adicional para reger as relações entre matrizes de subespaços diferentes:

$$\{\hat{\gamma}^\mu, \gamma^\nu\} = 0. \quad (3.69)$$

Contudo, para matrizes de um mesmo subespaço serão mantidas as regras usuais, a saber,

$$\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2\hat{g}^{\mu\nu}; \quad (3.70a)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.70b)$$

A matriz de Dirac com dimensão 4 continua anticomutando com  $\gamma_5$ , conforme (3.43g), ao contrário da matriz de dimensão  $D - 4$ , que irá comutar com  $\gamma_5$ :

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0; \quad (3.71a)$$

$$[\hat{\gamma}^\mu, \gamma_5] = 0. \quad (3.71b)$$

Por fim, é importante destacar que a contração de matrizes de Dirac de um mesmo subespaço sempre será igual a dimensão deste subespaço, o mesmo valendo para a contração

entre tensores métricos, ou seja,

$$\hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}^\mu = \hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\mu\nu} = D - 4; \quad (3.72a)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4. \quad (3.72b)$$

E, além disso, a contração entre objetos de subespaços diferentes será sempre nula. Por isso,

$$\hat{\gamma}_\mu \gamma^\mu = 0; \quad (3.73a)$$

$$\bar{\gamma}_\mu \hat{g}^{\mu\nu} = \underbrace{\gamma_\mu \hat{g}^{\mu\nu}}_0 + \hat{\gamma}_\mu \hat{g}^{\mu\nu} = \hat{\gamma}^\nu. \quad (3.73b)$$

### 3.4.2 Método HV no modelo de quatro férmions com massa

Nosso propósito nesta subseção é aplicar o método de 't Hooft-Veltman no modelo de quatro férmions e observar as alterações decorrentes da mudança de método de regularização nos resultados da seção anterior, onde utilizamos regularização dimensional com o método convencional para o cálculo dos traços das matrizes de Dirac. Para tanto, precisamos então recalcular os traços presentes em (3.41) utilizando para isto as regras do método HV. Por este ser um processo ainda mais extenso que o convencional, vamos novamente detalhar o cálculo do traço apenas para o termo com uma única inserção  $i\not{b}\gamma_5$ , que agora tem a seguinte forma:

$$\Pi_b^{\mu(HV)} = e\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}[(\not{p} + m)\not{b}\gamma_5(\not{p} + m)\gamma^\mu \gamma^5]}{(\bar{p}^2 - m^2)^2}. \quad (3.74)$$

Sabendo que os termos com número ímpar de matrizes de Dirac são nulos, temos

$$\text{tr}[(\not{p} + m)\not{b}\gamma_5(\not{p} + m)\gamma^\mu \gamma^5] = \text{tr}[\not{p}\not{b}\gamma_5\not{p}\gamma^\mu \gamma_5 + m^2\not{b}\gamma_5\gamma^\mu \gamma_5]. \quad (3.75)$$

Fazendo uso das identidades (3.71a) e (3.71b), juntamos as matrizes  $\gamma_5$  a fim de retirá-las da expressão. Com isto, o segundo termo do lado direito da igualdade torna-se

$$\begin{aligned} tr(m^2 \not{b} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5) &= tr(-m^2 \not{b} \gamma^\mu) \\ &= -4m^2 b^\mu. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ao passo que para o primeiro termo ficamos com

$$\begin{aligned} tr(\bar{\psi} \not{b} \gamma_5 \not{p} \gamma^\mu \gamma_5) &= tr[\bar{\psi} \not{b} (-\not{p} + \hat{p}) \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5] \\ &= tr[\bar{\psi} \not{b} (\not{p} - \hat{p}) \gamma^\mu] \\ &= tr(\bar{\psi} \not{b} \not{p} \gamma^\mu - \bar{\psi} \not{b} \hat{p} \gamma^\mu) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para tornar o processo mais claro, vamos calcular separadamente os dois termos em (3.77).

Assim, separando  $\bar{p}$  em suas partes física e não física, obtemos

$$\begin{aligned} tr(\bar{p} \not{b} \not{p} \gamma^\mu) &= tr(\not{p} \not{b} \not{p} \gamma^\mu) + tr(\hat{p} \not{b} \not{p} \gamma^\mu) \\ &= tr[2(p \cdot b) \not{p} \gamma^\mu] - tr(\not{b} \not{p} \not{p} \gamma^\mu) \\ &= 2(p \cdot b) tr(\not{p} \gamma^\mu) - p^2 tr(\not{b} \gamma^\mu) \\ &= 8(p \cdot b) p^\mu - 4p^2 b^\mu \end{aligned} \quad (3.78)$$

e

$$\begin{aligned} tr(\bar{p} \not{b} \hat{p} \gamma^\mu) &= tr(\not{p} \not{b} \hat{p} \gamma^\mu) + tr(\hat{p} \not{b} \hat{p} \gamma^\mu) \\ &= -tr(\not{b} \hat{p} \hat{p} \gamma^\mu) \\ &= -4\hat{p}^2 b^\mu. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Fazendo uso agora das substituições

$$p^\mu \rightarrow \bar{p}_\alpha g^{\alpha\mu} \text{ e } \hat{p}^\mu \rightarrow \bar{p}_\alpha \hat{g}^{\alpha\mu}, \quad (3.80)$$

com os resultados (3.76), (3.78) e (3.79), temos então

$$\Pi_b^{\mu(HV)} = e\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\gamma}{(\bar{p}^2 - m^2)^2} (8g^{\alpha\beta} b_\beta g^{\gamma\mu} - 4g^{\alpha\beta} g_\gamma^\beta b^\mu + 4\hat{g}^{\alpha\beta} \hat{g}_\gamma^\beta b^\mu). \quad (3.81)$$

Para calcular os termos restantes ( $\Pi_0^{\mu(HV)}$ ,  $\Pi_{bb}^{\mu(HV)}$  e  $\Pi_{bbb}^{\mu(HV)}$ ), utilizamos procedimento semelhante ao empregado para o termo anterior. Com isto encontramos

$$\Pi_0^{\mu(HV)} = 0; \quad (3.82)$$

$$\Pi_{bb}^{\mu(HV)} = 0; \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{bbb}^{\mu(HV)} = & e\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\beta \bar{p}_\gamma \bar{p}_\delta}{(\bar{p}^2 - m^2)^4} [4(D-4)^2 b^2 b^\mu - 56(D-4) b^2 b^\mu] \\ & + e\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\bar{p}_\alpha \bar{p}_\beta}{(\bar{p}^2 - m^2)^4} [-12(D-6) m^2 b^2 b^\mu - 4(D-4) m^2 b^2 b^\mu + 8D m^2 b^2 b^\mu + 8m^2 b^2 b^\mu] \\ & + e\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{4m^4 b^2 b^\mu}{(\bar{p}^2 - m^2)^4}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Nossa próxima tarefa é efetuar as integrais de laço em (3.81) e (3.84). Outra vez, por conta da extensão do procedimento envolvido, nos limitaremos a expor o cálculo de um único termo,  $\Pi_{bbb}^{\mu(HV)}$ , que possui divergência logarítmica e irá apresentar resultado diferente daquele encontrado na seção anterior, em que usamos o método convencional de regularização dimensional. O cálculo de  $\Pi_b^{\mu(HV)}$  pode ser realizado de modo análogo ao que faremos a seguir e fornecerá o mesmo resultado encontrado para  $\Pi_b^\mu$ .

Com os termos já devidamente separados de acordo com a ordem em  $p$ , empregamos (3.54) com  $P=4, 2$  e  $0$  na expressão (3.84), respectivamente, para os primeiro, segundo e



terceiro termos, obtendo com isto

$$\begin{aligned}
\Pi_{bbb}^{\mu(HV)} &= \frac{1}{3} ib^2 2^{-D-1} (D-4)^2 \pi^{-\frac{D}{2}} m^4 b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-4} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\
&\quad - \frac{7}{3} ib^2 2^{-D} (D-4) \pi^{-\frac{D}{2}} m^4 b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-4} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \\
&\quad + ib^2 2^{-D} (D-6) \pi^{-\frac{D}{2}} m^4 b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-4} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3} ib^2 2^{-D} (D-4) \pi^{-\frac{D}{2}} m^4 b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-4} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{3} ib^2 2^{1-D} \pi^{-\frac{D}{2}} m^4 b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-4} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \\
&\quad - \frac{1}{3} ib^2 2^{1-D} D \pi^{-\frac{D}{2}} m^4 b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-4} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3} ib^2 2^{1-D} \pi^{-\frac{D}{2}} m^4 b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{\frac{D}{2}-4} \Gamma\left(4 - \frac{D}{2}\right) \\
&= ib^2 2^{-D-1} \pi^{-\frac{D}{2}} b^\mu \mu^{4-D} (-m^2)^{D/2} \frac{[(D^2 - 22D + 72) \Gamma(2 - \frac{D}{2})]}{3m^4} \\
&\quad + \frac{4(D-12) \Gamma(3 - \frac{D}{2})}{3m^4} + \frac{4 \Gamma(4 - \frac{D}{2})}{3m^4}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Expandindo o resultado acima em torno de  $D=4$ , por conta da divergência presente neste ponto, encontramos

$$\Pi_{bbb}^{\mu(HV)} = 0. \tag{3.86}$$

Os termos restantes, conforme antecipamos, não foram alterados pela mudança de método de regularização, portanto, agora apenas a parte com uma inserção irá produzir contribuição não nula. Sendo assim,  $\Pi^{\mu(HV)}$ , a função de um ponto que fornece a correção quântica do potencial, assume agora a forma a seguir:

$$\Pi^{\mu(HV)} = -\frac{im^2 eb^\mu}{\pi^2 \epsilon} + \frac{im^2 eb^\mu}{2\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right). \tag{3.87}$$

Substituindo  $\Pi^{\mu(HV)}$  na equação (3.36) encontramos a nossa nova equação de gap,

$$\left[ -\frac{1}{G} - \frac{m^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{m^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) \right] eb^\mu = 0, \quad (3.88)$$

que em termos da constante de acoplamento normalizada (3.61) é dada por

$$\left[ -\frac{1}{G_R} + \frac{m^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) \right] eb^\mu = 0 \quad (3.89)$$

e possui apenas a solução trivial, o que nos indica ausência da quebra de simetria Lorentz.

Este cálculo, ainda não discutido na literatura, revela a existência de uma ambiguidade na solução de integrais com divergência logarítmica que envolvem a matriz  $\gamma_5$ , pois mostra que ao utilizarmos o esquema de regularização dimensional, sistematizado pelas regras de 't Hooft e Veltman, obtemos um resultado totalmente diferente daquele encontrado anteriormente em [9], onde foi aplicada a regularização dimensional convencional.

## Capítulo 4

# QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA COM FÉRMIONS SEM MASSA

Neste capítulo realizaremos uma breve introdução sobre os semimetais de Weyl e sua relação com a eletrodinâmica estendida, que permite uma interessante ligação entre modelos com quebra de simetria de Lorentz, como o estudado neste trabalho, e sistemas de matéria condensada. Analisaremos um modelo de eletrodinâmica quântica sem massa onde iremos induzir dinamicamente uma quebra espontânea de simetria e, após um estudo desta teoria no regime de temperatura finita, encontrar um valor crítico de temperatura a partir do qual a simetria do sistema é restaurada.

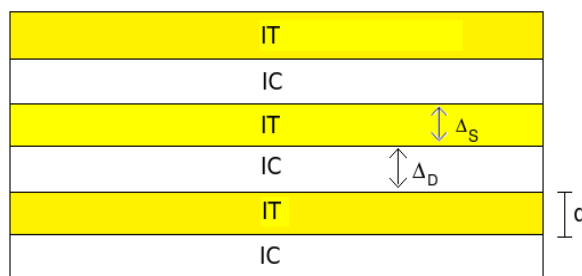
### 4.1 Semimetais de Weyl

Vamos discutir nesta seção uma importante aplicação nos domínios da física da matéria condensada da eletrodinâmica quântica estendida. Isto será feito mostrando como

uma nova classe de materiais, os semimetais de Weyl, pode ser descrita por uma lagrangiana com a forma da lagrangiana de Dirac estendida pela introdução do quadrivetor constante  $b^\mu$ , que quebra a simetria de Lorentz. Conforme mostraremos mais adiante, com uma escolha correta dos parâmetros envolvidos, esses materiais podem abrigar quasipartículas de baixa energia descritas pela equação de Weyl<sup>1</sup>, o que implica o surgimento de uma ação efetiva semelhante a de uma teoria de campos relativística.

Segundo uma das propostas mais simples para a construção de um semimetal de Weyl [40], este material pode ser produzido como uma heteroestrutura de multicamadas, formada por camadas alternadas de um isolante topológico (IT) e um isolante comum (IC), que terá a função de separar as camadas de IT, de acordo com a ilustração na figura (4.1), onde  $d$  é a espessura de cada camada,  $\Delta_s$  o potencial a ser superado por um elétron para saltar da superfície inferior para a superior de uma camada IT e  $\Delta_D$  é o análogo de  $\Delta_s$  para saltos entre superfícies de camadas IT distintas.

**Figura 4.1: Heteroestrutura de multicamadas que para baixas energias torna-se um semimetal de Weyl.**



Fonte: Autor, 2015.

De maneira geral, isolantes topológicos podem ser descritos por uma hamiltoniana

<sup>1</sup>A equação de Weyl é uma equação de onda relativística que descreve partículas não massivas de spin  $1/2$ , dada por:  $\sigma^\mu \partial_\mu \psi = 0$ .

efetiva de baixa energia da seguinte forma,

$$H_{IT} = \sum_{\mathbf{k}_\perp, i} [v_F \tau_z (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{k}_\perp] c_{\mathbf{k}_\perp, i}^\dagger c_{\mathbf{k}_\perp, i}, \quad (4.1)$$

com  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$  e  $\tau$  sendo matrizes de Dirac relacionadas aos subspaços dos spins e pseudospins, respectivamente, e a segunda delas determinando a superfície em que um determinado férmion deve estar;  $v_F$  a velocidade de Fermi;  $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$  descrevendo o momento na superfície do isolante; e  $c_{\mathbf{k}_\perp, i}^\dagger$  e  $c_{\mathbf{k}_\perp, i}$  sendo os operadores de criação e aniquilação de quasipartículas com momento  $\mathbf{k}_\perp$ .

Se a camada de isolante topológico for suficientemente fina, suas superfícies podem ser acopladas permitindo o salto de elétrons entre elas. Este fenômeno é descrito pela hamiltoniana  $H_{\Delta_S}$ :

$$H_{\Delta_S} = \sum_{\mathbf{k}_\perp, i} \Delta_S \tau_x c_{\mathbf{k}_\perp, i}^\dagger c_{\mathbf{k}_\perp, i}, \quad (4.2)$$

onde o índice  $i$  identifica a camada de isolante topológico para a qual salta o elétron. Se o salto se dá entre camadas diferentes, porém adjacentes, isto é, sem tunelamento de longo alcance, a hamiltoniana será

$$H_{\Delta_D} = \sum_{\mathbf{k}_\perp, i} (\Delta_D \tau^+ \delta_{i, j+1} + \Delta_D \tau^- \delta_{i, j-1}) c_{\mathbf{k}_\perp, i}^\dagger c_{\mathbf{k}_\perp, j}, \quad (4.3)$$

com  $\tau^\pm \equiv \frac{1}{2}(\tau_x \tau_y)$ . Uma vez construídas estas três hamiltonianas, podemos agora escrever a hamiltoniana completa que representa nosso material:

$$H = \sum_{\mathbf{k}_\perp, i} [v_F \tau_z (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{k}_\perp \delta_{i, j} + \Delta_S \tau_x \delta_{i, j} + \Delta_D (\tau^+ \delta_{i, j+1} + \tau^- \delta_{i, j-1})] c_{\mathbf{k}_\perp, i}^\dagger c_{\mathbf{k}_\perp, j}. \quad (4.4)$$

Para obter a hamiltoniana do sistema no espaço dos momentos, aplicamos uma transformada

de Fourier nos operadores de criação e aniquilação,

$$c_{\mathbf{k}_\perp, i}^\dagger = \sum_{k_z} c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}^\dagger e^{ik_z R_i}, \quad (4.5)$$

tomando  $R_n = dn$ ,  $d$  como o espaçamento entre as camadas IT e  $n$  um número inteiro. Deste modo, a expressão (4.4) ganha a forma seguir

$$H(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}_\perp, k_z} [v_F \tau_z (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{k}_\perp + \hat{\Delta}(k_z)] c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}^\dagger c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}, \quad (4.6)$$

onde  $\hat{\Delta}(k_z) \equiv \Delta_S \tau_x + \Delta_D (\tau^+ e^{ik_z d} + \tau^- e^{-ik_z d})$ . Ao diagonalizarmos a hamiltoniana acima encontramos seus autovalores:

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = v_F^2 (k_x^2 + k_y^2) + \Delta_S^2 + \Delta_D^2 + 2\Delta_S \Delta_D \cos(k_z d). \quad (4.7)$$

que, segundo evidencia a expressão, são duplamente degenerados.

Seguindo em direção à conexão entre os semimetais e a eletrodinâmica quântica estendida, vamos agora tratar do limite de baixas energias da teoria, para assim chegarmos aos férmions de Weyl e obtermos a lagrangiana de Dirac modificada que os descreve. Com este fim, nosso primeiro movimento consiste em expandir  $\epsilon_{\mathbf{k}}^2$  em torno de  $k_z = \frac{\pi}{d}$ , o que nos dá

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = v_F^2 (k_x^2 + k_y^2) + (\Delta_S - \Delta_D)^2 + d^2 \Delta_S \Delta_D \left(k_z - \frac{\pi}{d}\right)^2, \quad (4.8)$$

que, ao tomarmos  $k_z - \frac{\pi}{d} \rightarrow k_z$ , torna-se

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = v_F^2 (k_x^2 + k_y^2) + (\Delta_S - \Delta_D)^2 + d^2 \Delta_S \Delta_D k_z^2. \quad (4.9)$$

O operador cujos alto valores são dados por (4.9), isto é, a hamiltoniana que governa o

sistema no regime de baixas energias, é então

$$H(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}_\perp, k_z} [v_F \tau_z (\hat{z} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{k}_\perp (\Delta_S - \Delta_D) \tau_x + d \sqrt{\Delta_S \Delta_D} k_z \tau_y] c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}^\dagger c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}. \quad (4.10)$$

Agora, por meio das definições seguintes,

$$\alpha_1 = v_F \tau_z \sigma_y, \quad \alpha_2 = -v_F \tau_z \sigma_x, \quad \alpha_3 = \tilde{v}_F \tau_y, \quad m = \Delta_S - \Delta_D \text{ e } \psi_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}, \quad (4.11)$$

onde  $\alpha_i$  e  $\beta$  são as matrizes de Dirac e  $\tilde{v}_F = d \sqrt{\Delta_S \Delta_D}$ , reescrevemos (4.10) como

$$H(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^\dagger (\alpha_i k^i + \beta m) \psi_{\mathbf{k}}. \quad (4.12)$$

E, adotando a notação de matrizes gama ( $\gamma^0 = \beta$ ,  $\gamma^i = \gamma^0 \alpha^i$ ), chegamos à hamiltoniana de Dirac

$$H(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \bar{\psi}_{\mathbf{k}} (\gamma_i k^i + m) \psi_{\mathbf{k}}. \quad (4.13)$$

Note que quando  $\frac{\Delta_S}{\Delta_D} = \pm 1$  temos  $m = 0$  e a hamiltoniana do sistema toma a forma de uma equação de Weyl<sup>1</sup>. Isto significa que os materiais em que os potenciais  $\Delta_S$  e  $\Delta_D$  são iguais tem suas quasipartículas regidas por esta equação, e por esta razão são chamados de semimetais de Weyl. Para os demais casos, a estrutura de multicamadas que estamos analisando será um isolante dotado de gap de energia, descrito pela hamiltonina (4.13).

Com o emprego das definições (4.11), a relação (4.9) torna-se

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \pm \sqrt{v_F^2 (k_x^2 + k_y^2) + \tilde{v}_F^2 k_z^2 + m^2}, \quad (4.14)$$

assumindo a forma da relação de dispersão usual para férmions ( $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ ), em concordância com o resultado esperado. Observe que a velocidade de Fermi na direção  $z$  é

diferente das velocidades relativas às outras direções, o que revela a presença de uma anisotropia independente de fatores externos no material. Esta seleção natural de uma direção privilegiada induz uma quebra da covariância de Lorentz e confirma a validade da escolha de uma teoria com violação de simetria de Lorentz para uma representação efetiva do comportamento do sistema.

Em [40], A.A. Burkov e Leon Balents observaram que ao ser dopado com impurezas magnéticas este material quebra também a simetria de reversão temporal, quebrando assim a simetria CPT e, por conseguinte, violando de uma segunda maneira a invariância de Lorentz. Matematicamente, essa dopagem é equivalente à adição na hamiltoniana do termo

$$H_{b_3} = \sum_{\mathbf{k}_\perp, k_z} b_z \sigma_z c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}^\dagger c_{\mathbf{k}_\perp, k_z}. \quad (4.15)$$

Com o auxílio das matrizes  $\gamma_5 = -i\beta\alpha_5$ , onde  $\alpha_5 = -\tau_z\sigma_z$ , e  $\sigma_z = i\beta\alpha_3\alpha_5$ , reescrevemos  $H_{b_3}$  como

$$\begin{aligned} H_{b_3} &= \sum_{\mathbf{k}} b_z \psi_{\mathbf{k}}^\dagger i\beta\alpha_3\alpha_5\sigma_{\mathbf{k}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} b^3 \bar{\psi}_{\mathbf{k}} \gamma_3 \gamma^5 \psi_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

que apresenta exatamente a forma do termo relativo ao coeficiente  $b^\mu$  da eletrodinâmica quântica estendida. Este termo no semimetal de Weyl é responsável também pela abertura de uma fenda de tamanho  $b_3$  nas superfícies das camadas de isolante topológico. Se considerarmos também a presença de uma quebra da simetria de inversão espacial(P), conforme é



mostrado em [41], precisamos acrescentar à (4.13) o termo de interação spin-órbita

$$\begin{aligned}
H_{b_0} &= \sum_{\mathbf{k}} b_0 \psi_{\mathbf{k}}^\dagger \tau_y \sigma_z \psi_{\mathbf{k}} \\
&= \sum_{\mathbf{k}} b_0 \psi_{\mathbf{k}}^\dagger (-i) \beta \alpha_5 \psi_{\mathbf{k}} \\
&= \sum_{\mathbf{k}} b^0 \bar{\psi}_{\mathbf{k}} \gamma_0 \gamma_5 \psi_{\mathbf{k}},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde  $\tau_y \sigma_y = -i \beta \gamma_5$ . Adicionando  $H_{b_3}$  e  $H_{b_0}$  à expressão (4.13), o que é equivalente a estender a hamiltoniana através da introdução de  $\bar{\psi} \not{b} \gamma_5 \psi$ , temos

$$H_b = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^\dagger (\gamma^0 \gamma^i k_j + m \gamma^0 + b_\mu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5) \psi_{\mathbf{k}}. \tag{4.18}$$

Sabendo que

$$H_b = \int d^3x \mathcal{H}_b, \tag{4.19}$$

para encontrarmos a lagrangiana do sistema vamos escrever  $H_b$  em termos da densidade de hamiltonina  $\mathcal{H}_b$ . Para isto passaremos para uma descrição contínua e aplicaremos uma transformada inversa de Fourier nos espinores usando

$$\psi_{\mathbf{k}} = \int d^3x \psi(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{4.20}$$

Assim, com  $\psi(x) = \psi(\mathbf{x}, t)$ , a equação (4.18) assume a forma a seguir:

$$H_b = \int d^3x \psi^\dagger(x) (-i \gamma^0 \gamma^i \partial_j + m \gamma^0 + b_\mu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5) \psi(x). \tag{4.21}$$

A partir daqui, precisamos apenas utilizar a transformada de Legendre para chegarmos à

lagrangiana. Sendo os campos canonicamente conjugados  $\Pi_\psi = i\psi^\dagger$  e  $\Pi_{\psi^\dagger} = 0$ , temos então

$$\mathcal{L}_b = \Pi_\psi \dot{\psi} + \Pi_{\psi^\dagger} \dot{\psi}^\dagger - \mathcal{H}_b = \psi^\dagger (i\partial_0 + i\gamma^0 \gamma^j \partial_j - m\gamma^0 - b_\mu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5) \psi. \quad (4.22)$$

Logo,

$$\mathcal{L}_b = \bar{\psi} (i\partial - m - \not{b}\gamma_5) \psi, \quad (4.23)$$

que é a lagrangiana fermiônica da eletrodinâmica quântica estendida pelo termo  $\bar{\psi} \not{b}\gamma_5 \psi$ , obtida aqui como um modelo efetivo para a descrição de uma heteroestrutura que combina camadas de isolante topológico separadas por isolantes comuns, que para o caso não massivo representa um material no qual elétrons se comportam como férmions de Weyl, chamado de semimetal de Weyl [42].

A simplicidade do modelo ilustrado na figura(4.1), juntamente com a relativa facilidade atualmente existente para a fabricação de filmes ultrafinos de alta qualidade, faz com que a obtenção e a utilização em laboratório desse tipo de material seja uma tarefa realizável dentro de não muito tempo, o que torna o estudo desse tipo de sistema uma área muito fértil para a aplicação prática da EDQ com violação de simetria de Lorentz, oferecendo assim uma ótima perspectiva de futuro especialmente para modelos de férmions sem massa, como o que trataremos nas próximas seções deste capítulo.

## 4.2 Equação de gap a temperatura zero

A partir daqui iremos passar a trabalhar com uma versão não massiva do modelo de Thirring<sup>2</sup> utilizado no capítulo 3, com um propagador dado por

$$S_b(p) = \frac{i}{\not{p} - \not{b}\gamma_5}. \quad (4.24)$$

Com este novo propagador calcularemos a equação de gap da teoria a temperatura zero e com temperatura finita. Para isso, nossa primeira tarefa será a racionalização deste propagador [43], que tem por objetivo retirar as matrizes de Dirac do denominador da expressão. A partir de  $S_b(p)$ , definimos o propagador racionalizado como

$$G_b(\bar{p}) = \frac{i}{\not{p} - \not{b}\gamma_5} \frac{\bar{p} - \not{b}\gamma_5 \bar{p} + \not{b}\gamma_5 \bar{p} + \not{b}\gamma_5}{\bar{p} - \not{b}\gamma_5 \bar{p} - \not{b}\gamma_5 \bar{p} + \not{b}\gamma_5 \bar{p} + \not{b}\gamma_5}. \quad (4.25)$$

Observe que seguimos adotando as regras do método de 't Hooft-Veltman para tratar as matrizes de Dirac. Por esta razão, teremos novamente objetos físicos, como as matrizes contraídas com o quadrivetor  $b_\mu$ , e não físicos, que surgirão de contrações com o quadrimomento  $\bar{p}_\mu$ , que é composto por termos dos dois subespaços. Assim, com o auxílio das relações (3.69), (3.70a) e (3.70b), o numerador de  $G_b(\bar{p})$  torna-se

$$\begin{aligned} (\bar{p} - \not{b}\gamma_5)(\bar{p} + \not{b}\gamma_5)(\bar{p} + \not{b}\gamma_5) &= (\not{p} + \hat{p} - \not{b}\gamma_5)(\not{p} + \hat{p} + \not{b}\gamma_5)(\bar{p} + \not{b}\gamma_5) \\ &= [(p^2 + \hat{p}^2) + \{\not{p}, \not{b}\}\gamma_5 + [\hat{p}, \not{b}]\gamma_5 + b^2](\bar{p} + \not{b}\gamma_5) \\ &= (\bar{p}^2 + b^2 + 2p \cdot b\gamma_5 + [\hat{p}, \not{b}]\gamma_5)(\bar{p} + \not{b}\gamma_5). \end{aligned} \quad (4.26)$$

---

<sup>2</sup>Embora este assunto transcenda em certo sentido o escopo desta dissertação, é válido ressaltar que uma das motivações mais comuns para o estudo de modelos deste tipo encontra-se na possibilidade que estes oferecem de indução do termo de Chern-Simons [44], que no caso que tratamos pode ser gerado em 4 dimensões.

Realizando procedimento análogo para o denominador, temos

$$\begin{aligned} (\bar{p} \mp \not{b}\gamma_5)(\bar{p} \mp \not{b}\gamma_5) &= \bar{p}^2 \mp [\not{p}, \not{b}]\gamma_5 \mp \{\hat{p}, \not{b}\}\gamma_5 - b^2 \\ &= \bar{p}^2 \mp [\not{p}, \not{b}]\gamma_5 - b^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde, de acordo com (3.69),  $\{\hat{p}, \not{b}\} = 0$ . Deste modo, o denominador de (4.25) fica

$$\begin{aligned} (\bar{p} - \not{b}\gamma_5)(\bar{p} - \not{b}\gamma_5)(\bar{p} + \not{b}\gamma_5)(\bar{p} + \not{b}\gamma_5) &= (\bar{p}^2 - b^2)^2 - ([\not{p}, \not{b}]\gamma_5)^2 \\ &= (\bar{p}^2 - b^2)^2 - 4(p \cdot b)^2 - 4\hat{p}^2 b^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A fim de tornar mais simples o denominador, vamos reescrevê-lo como a seguir,

$$\begin{aligned} (\bar{p}^2 - b^2)^2 - 4(p \cdot b)^2 - 4\hat{p}^2 b^2 &= (\bar{p}^2 + b^2)^2 - 4[(p \cdot b)^2 + \hat{p}^2 b^2] \\ &= (\bar{p} - \bar{b})^2(\bar{p} + \bar{b})^2 - 4\hat{p}^2 \bar{b}^2 \\ &= (\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2 - 4\hat{p}^2 b^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde usamos  $\hat{b}^2 = \hat{p} \cdot \hat{b} = 0$ . E, com os novos numerador e denominador calculados, o propagador fermiônico racionalizado assume a forma seguinte

$$G_b(p) = i \frac{[\bar{p}^2 + b^2 + 2(p \cdot b)\gamma_5 + [\hat{p}, \not{b}]\gamma_5]}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2 - 4\hat{p}^2 b^2} (\bar{p} + \not{b}\gamma_5). \quad (4.30)$$

Expandido em termos de  $4\hat{p}^2 b^2$ ,  $G_b(\bar{p})$  é escrito como

$$G_b(\bar{p}) = S_b(\bar{p}) + \frac{4\hat{p}^2 b^2}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2} S_b(\bar{p}) + \dots \quad (4.31)$$

onde  $S_b(\bar{p})$ , agora o primeiro termo da expansão do propagador racionalizado, é expresso já sem matrizes gama no seu denominador como

$$S_b(\bar{p}) = i \frac{[\bar{p}^2 + b^2 + 2(p \cdot b)\gamma_5 + [\hat{p}, \not{b}]\gamma_5]}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2} (\bar{p} + \not{b}\gamma_5). \quad (4.32)$$

Este será o único termo de  $G_b(\bar{p})$  que produzirá contribuição não nula para a equação de gap. Os termos restantes serão todos anulados após a integração, quando tomarmos o limite em que  $D \rightarrow 4$  com o propósito de recuperar a dimensão original do espaço. Separando agora em  $S_b(\bar{p})$  a parte dependente explicitamente do momento não físico, que é anulada se não usarmos as regras do método HV, temos  $S_b(\bar{p}) = S_{b1}(\bar{p}) + S_{b2}(\bar{p})$ , tal que,

$$S_{b1}(\bar{p}) = i \frac{\bar{p}^2 + b^2 + 2(p \cdot b)\gamma_5}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2} (\bar{p} + \not{b}\gamma_5), \quad (4.33a)$$

$$S_{b2}(\bar{p}) = i \frac{[\hat{p}, \not{b}]\gamma_5}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2} (\bar{p} + \not{b}\gamma_5). \quad (4.33b)$$

Uma vez obtida a expressão do propagador na equação (4.31), vamos então dar prosseguimento ao nosso estudo regressando para a equação que nos fornece os mínimos do potencial efetivo,

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = -\frac{g^2}{e} b^\mu - i\Pi^\mu = 0, \quad (4.34)$$

que mantém sua forma inalterada a despeito da ausência da massa no propagador. Contudo, esta mudança de propagador alterará a forma do termo de tadpole, que a partir daqui, com o auxílio da igualdade  $[\hat{p}, \not{b}]\gamma_5 = 2\hat{p}\not{b}\gamma_5$ , será

$$\Pi^\mu = e\mu^{4-D} \text{tr} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{[\bar{p}^2 + b^2 + 2(b \cdot p)\gamma_5 + 2\hat{p}\not{b}\gamma_5](\bar{p} + \not{b}\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2}. \quad (4.35)$$

De maneira análoga ao que fizemos nos capítulos anteriores, vamos a seguir efetuar

os traços e eliminar as matrizes de Dirac do integrando. Emprestando as regras do método HV apresentadas na subseção 3.4.1, para os dois primeiros termos,

$$\begin{aligned}\text{tr}[(\not{p} + \not{b}\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5] &= \text{tr}\not{p}\gamma^\mu\gamma_5 + \text{tr}\not{b}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5 \\ &= -4b^\mu.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Logo,

$$\text{tr}[(\bar{p}^2 + b^2)(\not{p} + \not{b}\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5] = -4b^\mu(\bar{p}^2 + b^2).\quad (4.37)$$

Para o terceiro termo, calculamos o traço abaixo:

$$\begin{aligned}\text{tr}[\gamma_5(\not{p} + \not{b}\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5] &= \text{tr}(\not{p}\gamma^\mu + \not{b}\gamma^\mu) \\ &= 4p^\mu.\end{aligned}\quad (4.38)$$

E, por conseguinte,

$$\text{tr}[2(b \cdot p)\gamma_5(\not{p} + \not{b}\gamma_5)]\gamma^\mu\gamma_5 = 8(b \cdot \bar{p})p^\mu.\quad (4.39)$$

O traço do quarto termo fica:

$$\begin{aligned}\text{tr}[2\not{p}\not{b}\gamma_5(\not{p} + \not{b}\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5] &= 2\text{tr}\not{p}\not{b}\gamma_5\not{p}\gamma^\mu\gamma_5 + 2\text{tr}\not{p}\not{b}\gamma_5\not{b}\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5 \\ &= -2\text{tr}\not{p}\not{b}\not{p}\gamma^\mu - 2\text{tr}\not{p}\not{b}\gamma_5\not{b}\gamma^\mu \\ &= -2\text{tr}(\not{p}\not{b}\not{p}\gamma^\mu + \not{p}\not{b}\not{p}\gamma^\mu) \\ &= 2\text{tr}(\not{p}\not{p}\not{b}\gamma^\mu) \\ &= 8\hat{p}^2b^\mu.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Assim, com os resultados (4.37), (4.39) e (4.40), chegamos em

$$\Pi^\mu = e\mu^{4-D} \int \frac{d^D\bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{-4b^\mu(\bar{p}^2 + b^2) + 8(b \cdot p)p^\mu + 8\hat{p}^2b^\mu}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2}.\quad (4.41)$$

Contudo, como  $(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2 \neq (\bar{p}^2 - b^2)^2$ , pois

$$(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2 = (b - \bar{p})_\mu(b - \bar{p})^\mu(b + \bar{p})_\nu(b + \bar{p})^\nu, \quad (4.42)$$

necessitamos acrescentar aos nossos cálculos uma técnica chamada parametrização de Feynman, para dar ao integrando de (4.35) a forma necessária para a aplicação da fórmula (3.54) que nos permitirá realizar a integração. Esta parametrização consiste num método auxiliar para a solução de integrais de laço surgidas de diagramas de Feynman, onde certos tipos de frações são expressos em termos de integrais múltiplas. De maneira geral, esta técnica é empregada através do uso da fórmula:

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 du_1 \cdots \int_0^1 du_n \frac{\delta(\sum_{k=1}^n u_k - 1) u_1^{\alpha_1 - 1} \cdots u_n^{\alpha_n - 1}}{[u_1 A_1 + \cdots + u_n A_n]^{\sum_{k=1}^n \alpha_k}}. \quad (4.43)$$

em que  $u_k$  é chamado de parâmetro de Feynman. Para o caso que estamos tratando, em que é possível considerar que temos apenas dois objetos no denominador, precisaremos de uma versão simplificada desta relação, a saber,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[Ax + (1-x)B]^2}, \quad (4.44)$$

com  $A = (\bar{p} - b)^2$  e  $B = (\bar{p} + b)^2$ . Sendo assim, após a parametrização,  $\Pi^\mu$  passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= e\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{-4b^\mu(\bar{p}^2 + b^2) + 8(b \cdot p)p^\mu + 8\hat{p}b^\mu}{[x(\bar{p} - b)^2 + (\bar{p} + b)^2(1-x)]^2} \\ &= e\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{-4b^\mu(\bar{p}^2 + b^2) + 8(b \cdot p)p^\mu + 8\hat{p}b^\mu}{[x(\bar{p}^2 - 2b \cdot p + b^2) + (\bar{p}^2 + 2b \cdot p + b^2)(1-x)]^2}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Para chegarmos à forma que buscamos para o integrando, necessitamos ainda eliminar

os termos cruzados com  $p$  no denominador. Para isto introduziremos um deslocamento  $t$  no momento, tal que  $\bar{p}^\mu \rightarrow \bar{p}^\mu + t^\mu$ , com  $t^\mu = -(1 - 2x)b^\mu$ . Note que supomos  $t^\mu$  dependente de  $b^\mu$  e por esta razão ele não deve possuir parte não física. Aplicando este deslocamento, vemos que

$$(\bar{p} + t - b)^2 x = (\bar{p}^2 + t^2 + b^2 + 2p \cdot t - 2p \cdot b - 2t \cdot b)x, \quad (4.46)$$

$$(\bar{p} + t + b)^2 (1 - x) = (\bar{p}^2 + t^2 + b^2 + 2p \cdot t + 2p \cdot b + 2t \cdot b)(1 - x). \quad (4.47)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\bar{p} + t - b)x + (\bar{p} + t + b)(1 - x) &= (\bar{p}^2 + t^2 + b^2 + 2p \cdot t + 2p \cdot b + 2t \cdot b) - 4p \cdot bx - 4t \cdot bx \\ &= \bar{p}^2 + t^2 + b^2 + 2p \cdot t + 2p \cdot b(1 - 2x) + 2t \cdot b(1 - 2x). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Se o deslocamento que impusemos para o momento estiver correto, os termos cruzados com  $p$  devem se anular, o que implica

$$\begin{aligned} 2p \cdot t + 2p \cdot b(1 - 2x) &= 0 \\ 2p[t + b(1 - 2x)] &= 0 \\ t^\mu &= -b^\mu(1 - 2x). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Este resultado confirma a validade da nossa escolha para o formato de  $t^\mu$ , e assim o denominador de  $\Pi^\mu$  passa a ser

$$\begin{aligned} [(\bar{p} + t - b)x + (\bar{p} + t + b)(1 - x)]^2 &= [\bar{p}^2 + t^2 + b^2 + 2t \cdot b(1 - 2x)]^2 \\ &= (\bar{p}^2 + t^2 + b^2 - 2t^2)^2 \\ &= (\bar{p}^2 - t^2 + b^2)^2 \\ &= (\bar{p}^2 - M^2)^2, \end{aligned} \quad (4.50)$$



onde  $M^2 = t^2 - b^2$ . Uma vez modificado o denominador, precisamos então alterar o numerador empregando a mesma mudança de variável. Em consequência disso, encontramos

$$\begin{aligned} \Pi'^\mu = & e\mu^{4-D} \int_0^1 dx \\ & \times \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{-4b^\mu(\bar{p}^2 + t^2 + b^2 + 2\bar{p} \cdot t) + (2\bar{p} \cdot b + 2t \cdot b)(4p^\mu + 4t^\mu) + 8b^\mu \hat{p}^2}{(\bar{p}^2 - M^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Com a integral de laço finalmente organizada de maneira adequada, devemos agora solucioná-la e tratar das divergências que possam emergir deste processo. Para isto seguimos procedimento semelhante ao explanado no capítulo 3. Após a utilização da fórmula (3.54), expandimos o integrando em torno de  $D=4$ , onde ele exibe uma singularidade, e efetuamos a integral em  $x$ , o parâmetro de Feynman. Feito isso, encontramos o seguinte resultado para a correção quântica de primeira ordem do VEV para  $b^\mu$ :

$$\Pi'^\mu = \frac{ieb^2 b^\mu}{3\pi^2}. \quad (4.52)$$

Voltando para a equação (4.34), com  $G = \frac{e^2}{g^2}$  e  $b^\mu = e\beta^\mu$ , encontramos

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = -\frac{e}{G} b^\mu + \frac{eb^2 b^\mu}{3\pi^2} = 0. \quad (4.53)$$

Isto nos leva à equação de gap

$$\left( -\frac{e}{G} + \frac{eb^2}{3\pi^2} \right) b^\mu = 0, \quad (4.54)$$

cujas soluções, para  $b^2 \geq 0$ , são

$$b_{(1)} = eB_{(1)} = 0, \quad (4.55a)$$

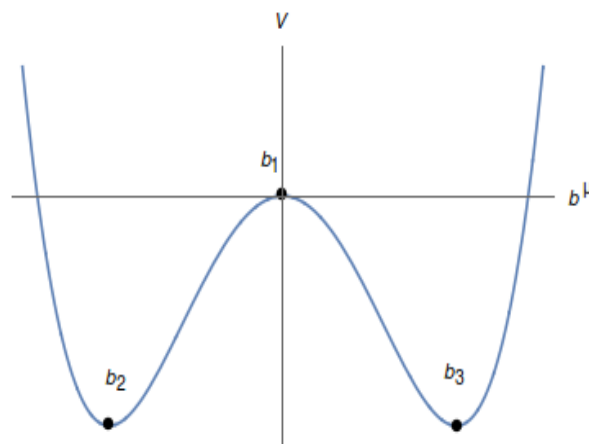
$$b_{(2),(3)} = eB_{(2),(3)} = \pm \sqrt{\frac{3\pi^2}{G}}, \quad (4.55b)$$

e constituem, respectivamente, um máximo local e os mínimos do potencial  $V(b^\mu)$ , dado pela expressão

$$V(b^\mu) = -\frac{e}{2G}b^2 + \frac{e}{12\pi^2}b^4. \quad (4.56)$$

A ocorrência das soluções não triviais  $b_2$  e  $b_3$  para a equação de gap, os valores esperados no vácuo do campo  $b^\mu$ , indica a indução de uma quebra de simetria de Lorentz na teoria. Este resultado, ainda não registrado na literatura, possui uma outra interessante consequência revelada através do cálculo de  $V(b^\mu)$ , que é a presença de um potencial do tipo chapéu mexicano, apresentado na figura(4.2), característico do modelo de Higgs. Em [46], Bjorken usa um mecanismo análogo ao aqui descrito para obter uma curva com esta forma, contudo, introduzindo termos na expressão para  $V$  através de procedimento *ad hoc*, o que aqui não é necessário, uma vez que  $V(b^\mu)$  é gerado naturalmente com esta configuração através de correções radiativas.

**Figura 4.2: Potencial  $V(b^\mu)$  com quebra de simetria, típico do mecanismo de Higgs.**



Fonte: Autor, 2015.

Este tipo de potencial é particularmente interessante por nos permitir analisar e explicar com relativa simplicidade fenômenos ligados à quebra espontânea de simetria, como a geração de massa para as partículas fundamentais no modelo padrão, no caso do modelo de

Higgs, ou a restauração de uma simetria a partir de mudanças de temperatura, como ocorre no nosso modelo, que é o tema da próxima seção deste texto.

### 4.3 Equação de gap a temperatura finita

Dizemos que uma quebra espontânea de simetria ocorre quando uma determinada simetria que é respeitada pela lagrangiana de uma teoria deixa de ser preservada pelo seu estado fundamental. Se esta alteração surge do cálculo de correções radiativas, a simetria é dita quebrada dinamicamente. Quando isto acontece, o estado de menor energia do sistema deixa de ser único e instável e passa ser um estado degenerado e estável, o que pode ser observado através de uma mudança na forma do potencial, que sendo inicialmente simétrico com relação a seu ponto de mínimo, perde esta característica após a degenerescência do estado fundamental. Com este fato em mente, nesta seção levaremos em consideração efeitos termodinâmicos<sup>3</sup> nos nossos cálculos para analisar como uma variação na temperatura altera a forma do gráfico da figura (4.2), e obtermos assim o valor crítico de T a partir do qual a simetria do sistema é restaurada. Uma investigação acerca da restauração de simetria por mudança de temperatura foi realizada por Mariz *et al* em [47], contudo, para o progador massivo estudado no capítulo anterior, que não permite a presença de um potencial simples como o que encontramos no caso do modelo sem massa, e utilizando um método diferente daquele aqui empregado.

Nosso ponto de partida será novamente o termo de tadpole, que calcularemos desta vez assumindo um sistema em equilíbrio térmico com temperatura definida. Pretendendo simplificar os cálculos, faremos uso da rotação de Wick para passarmos do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano. Esta rotação impõe uma mudança de métrica ( $\bar{g}^{\mu\nu} \rightarrow -\bar{\delta}^{\mu\nu}$ )

---

<sup>3</sup>Para um estudo mais detalhado acerca de teoria de campos a temperatura finita, recomendamos [45].

que implica nas transformações

$$\vec{p}^2 \rightarrow -\bar{\delta}^{\mu\nu} \bar{p}_\mu \bar{p}_\nu = -\bar{p}^2 = \bar{p}_E^2, \quad (4.57a)$$

$$p \cdot b \rightarrow -p_E \cdot b, \quad (4.57b)$$

$$d^4 \bar{p} \rightarrow i d^4 \bar{p}_E, \quad (4.57c)$$

$$b^\mu \rightarrow -b^\mu. \quad (4.57d)$$

Agora no espaço euclidiano, a função de um ponto  $\Pi^\mu$  assume o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= e i \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}_E}{(2\pi)^D} \frac{-4b^\mu [2b^2 + 4b^2 x(x-1)] + 8(1-2x)^2 b^2 b^\mu}{(\bar{p}_E^2 + M^2)^2} \\ &\quad - e i \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}_E}{(2\pi)^D} \frac{4b^\mu \bar{p}_E^2}{(\bar{p}_E^2 + M^2)^2} \\ &\quad + e i \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}_E}{(2\pi)^D} \frac{8(\bar{p}_E \cdot b) \bar{p}_E^\mu}{(\bar{p}_E^2 + M^2)^2} \\ &\quad + e i \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}_E}{(2\pi)^D} \frac{8b^\mu \hat{p}_E^2}{(\bar{p}_E^2 + M^2)^2}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde escrevemos o deslocamento como  $t^\mu = -b^\mu(1-2x)$ . Em seguida, decompomos os quadrimomentos como  $\vec{p}_E^\mu = \vec{p}^\mu + \bar{p}_0 u^\mu$ , com  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Além disso, considerando a simetria das integrais sob rotações espaciais, introduzimos a substituição

$$\vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta \rightarrow \frac{\vec{p}^2}{D-1} (\bar{\delta}^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta). \quad (4.59)$$

Com isto escrevemos (4.58) como a soma de suas partes espacial e temporal, isto é,

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= e i \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d\bar{p}_0}{2\pi} \int \frac{d^{D-1} \vec{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{(\bar{p}_0^2 + \vec{p}^2 + M^2)^2} \left\{ 8b^\mu \frac{\vec{p}^2}{D-1} \bar{\delta}^{\alpha\beta} \hat{\delta}^{\alpha\beta} - 4b^\mu b^2 [4(x-1)x + 2] \right. \\ &\quad \left. - 4b^\mu \vec{p}^2 - 4b^\mu \bar{p}_0^2 + 8b^\mu b^2 (1-2x)^2 + 8 \frac{\vec{p}^2}{D-1} b^\mu - 8 \frac{\vec{p}^2}{D-1} (b \cdot u) u^\mu + 8\bar{p}_0^2 (b \cdot u) u^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Para resolver as integrais em  $\vec{p}$  seguimos as soluções dadas por

$$\int \frac{d^n \vec{p}}{(2\pi)^n (\vec{p}^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha) (\Delta^2)^{\alpha - n/2}} \quad (4.61)$$

$$\int \frac{d^n \vec{p}}{(2\pi)^n (\vec{p}^2 + \Delta^2)^\alpha} \frac{\vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - 1 - n/2)}{\Gamma(\alpha) (\Delta^2)^{\alpha - 1 - n/2}}. \quad (4.62)$$

Com isto a equação (4.60) então torna-se

$$\begin{aligned} \Pi'^\mu = & ei\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d\bar{p}_0}{2\pi} \{i2^{-D}(D-1)\pi^{\frac{D-1}{2}-D+1}\Gamma\left(\frac{1-D}{2}+1\right)(M^2+p_0^2)^{\frac{D-1}{2}-1} \\ & \times \left[\frac{8(D-4)b^\mu}{D-1} + \frac{8b^\mu}{D-1} - \frac{8u^\mu b \cdot u}{D-1} - 8u^\mu b \cdot u\right]\} \\ & + ei\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d\bar{p}_0}{2\pi} \{i2^{1-D}\pi^{\frac{D-1}{2}-D+1}\Gamma\left(\frac{1-D}{2}+1\right)(M^2+p_0^2)^{\frac{D-1}{2}-1} \\ & \times (8u^\mu b \cdot u - 4b^\mu) - i2^{3-D}\pi^{\frac{D-1}{2}-D+1}e\mu^{4-D}\Gamma\left(\frac{1-D}{2}+2\right)(M^2+p_0^2)^{\frac{D-1}{2}-2} \\ & \times 4\{M^2b^\mu + b^2[4(x-1)x+2]b^\mu + 8b^2(1-2x)^2b^\mu - 8u^\mu b \cdot u\}\}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Neste ponto introduziremos efetivamente as considerações termodinâmicas nos nossos cálculos com o uso do formalismo de Matsubara para o cálculo das integrais em  $\bar{p}_0$ . Partindo da suposição de que temos um sistema em equilíbrio térmico com um reservatório de temperatura  $T = \beta^{-1}$ , discretizamos a energia assumindo  $\bar{p}_0 = (n + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{\beta}$  e substituímos sua integração por um somatório, fazendo  $\frac{1}{2\pi} \int d\bar{p}_0 \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n$ . A fórmula geral para a solução deste somatório [48] é

$$\sum_n [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda)(a^2)^{\lambda-1/2}} + 4\sin(\pi\lambda)f_\lambda(a, b), \quad (4.64)$$

com

$$f_\lambda(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \text{Re} \left( \frac{1}{e^{2\pi(z+ib)} - 1} \right). \quad (4.65)$$

Esta solução é válida apenas para  $\lambda < 1$  e fora dos pólos em  $\lambda = -1/2, 1/2, -3/2, 3/2 \dots$ .

Para os demais casos, que não precisaremos tratar aqui, é possível utilizar relações de recorrência e colocar  $\lambda$  dentro do intervalo de validade da expressão.

Finalmente, resolvendo os somatórios descobrimos que o termo covariante recupera o resultado (4.52), obtido através do cálculo de temperatura zero, enquanto que a parte não covariante da expressão gera um termo dependente de temperatura. Deste modo, com  $\xi = \frac{\beta M}{2\pi}$ , temos

$$\Pi'^\mu = \frac{ieb^2 b^\mu}{3\pi^2} + ie \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{M^2(\xi^2 - 2z^2)(\tanh(\pi z) - 1)b \cdot u}{\pi^2 \xi^2 \sqrt{(z - \xi)(z + \xi)}}. \quad (4.66)$$

No regime de altas temperaturas ( $\xi \rightarrow 0$ ), tomando  $M \rightarrow 2\pi T\xi$ , a equação anterior se reduz a

$$\Pi'^\mu = \frac{ieb^2 b^\mu}{3\pi^2} + ie \int_0^{\infty} dz \frac{4T^2(\xi^2 - 2z^2)(\tanh(\pi z) - 1)b \cdot u}{\sqrt{(z - \xi)(z + \xi)}}. \quad (4.67)$$

Sendo assim, ao efetuar a integração usando  $b \cdot u = b_0$ , obtemos

$$\Pi'^\mu = \frac{ieb^2 b^\mu}{3\pi^2} + \frac{1}{3}ieT^2 b_0. \quad (4.68)$$

Este resultado mostra, como consequência da consideração de efeitos termodinâmicos na teoria, o surgimento de uma dependência com relação à temperatura na correção quântica para o VEV.

Buscando entender os efeitos da adição de temperatura sobre a simetria do sistema, vamos calcular a equação de gap, contudo, separando-a em suas partes espacial e temporal,

$$\left[ -\frac{e}{G} + \frac{eb^2}{3\pi^2} \right] b^i = 0, \quad (4.69a)$$

$$-\left( \frac{1}{G} - \frac{T^2}{3} \right) eb^0 + \frac{eb^2}{3\pi^2} b_0 = 0. \quad (4.69b)$$

Observe que a equação (4.69a) conserva a forma de (4.54), bem como suas soluções, uma vez que a parte espacial do campo  $b^\mu$  mostrou-se inalterada sob ação da temperatura. No entanto, a equação referente à componente temporal possui um termo dependente de  $T$  que nos permite encontrar um valor crítico a partir do qual o potencial da teoria recupera a simetria em torno de seu valor mínimo. A condição para que isto ocorra é dada por

$$\left(\frac{1}{G} - \frac{T^2}{3}\right) \leq 0, \quad (4.70)$$

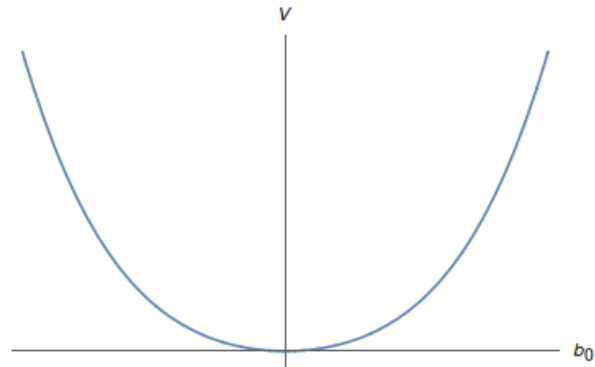
pois se este termo for nulo ou negativo o potencial correspondente,

$$V(b_0) = -\left(\frac{1}{G} - \frac{T^2}{3}\right) \frac{e}{2} b_0^2 + \frac{e}{12\pi^2} b_0^4, \quad (4.71)$$

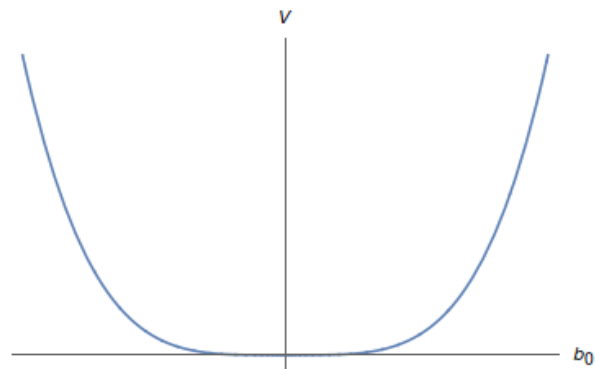
perde a forma do potencial de Higgs. Portanto, a partir do valor crítico da temperatura,

$$T_c = \sqrt{\frac{3}{G}}, \quad (4.72)$$

$V(b_0)$  passa a ter um único mínimo (figura (4.3) e figura (4.4)), o vácuo perde a degenerescência e, por conseguinte, para a parte temporal do campo  $b^\mu$  é restaurada a covariância de Lorentz, presente inicialmente no modelo. E, da mesma forma, ocorre também a restauração da simetria de paridade.

**Figura 4.3: Potencial  $V(b_0)$  para  $T > T_c$ .**

Fonte: Autor, 2015.

**Figura 4.4: Potencial  $V(b_0)$  para  $T = T_c$ .**

Fonte: Autor, 2015.



## Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Nesta dissertação estudamos a violação da invariância de Lorentz no contexto do modelo padrão. Nossas investigações se baseiam em uma proposta de extensão desta teoria, chamada de modelo padrão estendido, que pretende contemplar efeitos não explicados pelo modelo padrão em sua formulação convencional.

No primeiro capítulo apresentamos uma introdução sobre parte da história da procura da ciência por simetrias na natureza e as motivações principais não somente para o nosso trabalho, mas também para o desenvolvimento do próprio modelo padrão estendido.

No capítulo 2 introduzimos os diferentes tipos de transformações de Lorentz e exemplificamos a violação de simetria de Lorentz relacionada com a transformação de partícula, bem como a transformação de CPT e sua violação, induzida pelo quadri-vetor  $b^\mu$ . Em seguida, fizemos explanações acerca do modelo padrão, de sua extensão, feita com o propósito de incluir no MP as violações de Lorentz e de CPT, e da eletrodinâmica quântica estendida, mostrando como esta se reduz à eletrodinâmica quântica convencional ao retirarmos dela os

---

termos relativos a quebras de simetria. Nos capítulos 3 e 4 apresentamos nossos cálculos e principais resultados.

Partimos no capítulo 3 da reprodução de um trabalho já presente na literatura, que induz através de correções radiativas um valor esperado no vácuo para o campo  $b^\mu$  diferente de zero, quebrando assim a invariância de Lorentz em um modelo de quatro férmions massivos autointeragente. Na sequência efetuamos este mesmo procedimento, usando desta vez a prescrição de 't Hooft-Veltman para operações com as matrizes de Dirac. Observamos com isto uma mudança no resultado do cálculo da amplitude de tadpole, que passou a ter apenas a contribuição de termos de primeira ordem em  $b^\mu$ , o que gerou uma equação de gap que revela a existência de um potencial simétrico e de um vácuo não degenerado para o sistema, inviabilizando assim a violação de simetria de Lorentz. Esta aparente dependência do comportamento da teoria com relação ao procedimento de regularização indica a existência de uma ambiguidade no tratamento de divergências logarítmica através das técnicas de regularização dimensional convencional e de 't Hooft-Veltman. Entretanto, este é um problema que carece de maiores investigações e deve motivar futuros trabalhos nossos com estas técnicas.

No quarto capítulo estudamos uma versão não massiva do modelo abordado no capítulo 3. Novamente, induzimos dinamicamente uma quebra de simetria de Lorentz, calculamos os valores esperados no vácuo do campo  $b^\mu$  e plotamos o gráfico do potencial, que mostrou-se semelhante ao potencial do campo de Higgs e explicitou a degenerescência do VEV do sistema. Por fim, analisamos este mesmo modelo sob um regime de temperatura finita. Como resultado obtivemos a descoberta de que, embora a parte espacial do campo  $b^\mu$  se mostre inócua aos efeitos da adição de temperatura, sua parte temporal é sensível a estes efeitos e altera a forma do potencial, a medida que variamos  $T$ . Com isto conseguimos inferir um valor crítico para a temperatura a partir do qual acontece a recuperação das simetrias de Lorentz e de paridade no sistema.

Este trabalho nos oferece como perspectivas futuras, entre outras possibilidades, o estudo da eletrodinâmica estendida no contexto dos semimetias de Weyl, que permite uma interessante ligação entre a física de altas energias e a área de matéria condensada, além da continuação das investigações efetuadas no capítulo 4 no regime de temperatura finita, com o objetivo de oferecer uma melhor compreensão acerca do comportamento do campo  $b^\mu$  sob ação de temperatura. Podemos ainda realizar análises de sistemas de spin  $3/2$  e sobre a indução dinâmica da ação efetiva.

# Referências Bibliográficas

- [1] V. A. Kostelecký, S. Samuel “Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory”, *Phys Rev. D* 39, 683(1989).
- [2] V. A. Kostelecký and R. Potting, “CPT and strings”, *Nucl. Phys. B* 359, 545(1991).
- [3] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz violating extension of the standard model”, *Phys. Rev. D* 58, 116002 (1998) [hep-ph/9809521].
- [4] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “CPT violation and the standard model”, *Phys. Rev. D* 55, 6760 (1997) [hep-ph/9703464].
- [5] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics”, *Phys. Rev. D* 41, 1231 (1990).
- [6] J. D. Bjorken, *Annals Phys.* 24, 174 (1963).
- [7] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics” *Phys. Rev. Lett.* 82, 3572 (1999) [hep-ph/9901358].
- [8] A. G. Grushin, “Consequences of a condensed matter realization of Lorentz violating QED in Weyl semi-metals”, *Phys. Rev. D* 86, 045001 (2012).
- [9] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. J. da Silva, “Dynamical Lorentz and CPT symmetry breaking in a 4D four-fermion model”, *Phys. Rev. D* 77, 105002 (2008).

- [10] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, “Regularization and Renormalization of Gauge Fields”, Nucl. Phys. B 44, 189 (1972).
- [11] A. Einstein, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, Annalen der Physik, 17, 891(1905).
- [12] H. Belich, *et al.*, “Violação da Simetria de Lorentz”, Revista Brasileira de Ensino de Física, 29, 57(2007).
- [13] O. W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance”, Phys. Rev. Lett. 89, 231602 (2002) [hep-ph/0201258].
- [14] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Reading, USA: Addison-Wesley(1995) 842p.
- [15] J.L. Lopes, “Forty years of the first attempt at the electroweak unification and of the prediction of the weak neutral boson  $Z_0$ ”, Braz. J. Phys. 29, 3 (1999).
- [16] V. A. Kostelecký and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation”, Phys. Rev. D 63, 065008(2001)[hep-th/0012060].
- [17] V. A. Kostelecký, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, “One loop renormalization of Lorentz violatin electrodynamics”, Phys. Rev. D 65, 056006 (2002) [hep-th/0111123].
- [18] P. Massarotti [KLOE Collaboration], “Recent results from KLOE,” Nuovo Cim. B 123, 840 (2008).
- [19] A. Di Domenico *et al.* [KLOE Collaboration], “Search for CPT violation and decoherence effects in the neutral kaon system,” J. Phys. Conf. Ser. 171, 012008 (2009).
- [20] H. Muller, P. L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger and E. Kovalchuk *et al.*, “Relativity tests by complementary rotating Michelson-Morley experiments,” Phys. Rev. Lett. 99, 050401 (2007) [arXiv:0706.2031 [physics.class-ph]].

- [21] S. Reinhardt, G. Saathoff, H. Buhr, L. A. Carlson, A. Wolf, D. Schwalm, S. Karpuk and C. Novotny *et al.*, “Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities,” *Nature Phys.* 3, 861 (2007).
- [22] S. R. Parker, M. Mewes, P. L. Stanwix and M. E. Tobar, “Cavity Bounds on Higher-Order Lorentz-Violating Coefficients,” *Phys. Rev. Lett.* 106, 180401 (2011) [arXiv:1102.0081 [hep-ph]].
- [23] F. Baynes, A. Luiten and M. Tobar, “Testing Lorentz Invariance Using an Odd-Parity Asymmetric Optical Resonator,” *Phys. Rev. D* 84, 081101 (2011) [arXiv:1108.5414 [gr-qc]].
- [24] H. Muller, S. -w. Chiow, S. Herrmann, S. Chu and K. -Y. Chung, “Atom Interferometry tests of the isotropy of post-Newtonian gravity,” *Phys. Rev. Lett.* 100, 031101 (2008) [arXiv:0710.3768 [gr-qc]].
- [25] M. A. Hohensee, S. Chu, A. Peters and H. Muller, “Equivalence Principle and Gravitational Redshift,” *Phys. Rev. Lett.* 106, 151102 (2011) [arXiv:1102.4362 [gr-qc]].
- [26] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” *Phys. Rev. Lett.* 101, 151601 (2008) [arXiv:0806.4945 [hep-ex]].
- [27] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector,” *Phys. Rev. Lett.* 105, 151601 (2010) [arXiv:1007.2791 [hep-ex]].
- [28] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* [MiniBooNE Collaboration], “Test of Lorentz and CPT violation with Short Baseline Neutrino Oscillation Excesses,” arXiv:1109.3480 [hep-ex].