

**ARLAN RICARDO CAVALCANTE DOS SANTOS**

**ANÁLISE DE TENSÕES EMPREGANDO A  
FORMULAÇÃO EM COORDENADAS POLARES  
DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS**

**DELMIRO GOUVEIA-AL**

**Janeiro de 2017**

**ARLAN RICARDO CAVALCANTE DOS SANTOS**

**ANÁLISE DE TENSÕES EMPREGANDO A  
FORMULAÇÃO EM COORDENADAS POLARES DA  
TEORIA DE VOLUMES FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia Civil da Unidade Acadêmica Campus do Sertão da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador:

**Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
UNIDADE ACADÊMICA CAMPUS DO SERTÃO  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

**DELMIRO GOUVEIA – AL**

**Janeiro de 2017**

S237a Santos, Arlan Ricardo Cavalcante dos

Análise de tensões empregando a formulação em coordenadas polares da teoria de volumes finitos / Arlan Ricardo Cavalcante dos Santos . - 2017.

96f.: il.

Monografia (Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Delmiro Gouveia, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante.

1. Coordenadas Polares. 2. Volumes Finitos.

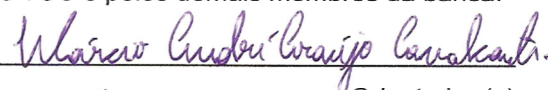
CDU 624




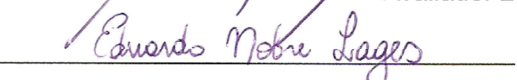
## ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil de **ARLAN RICARDO CAVALCANTE DOS SANTOS**.

Aos dezesseis dias do mês de janeiro do ano de dois mil e dezessete, reuniu-se a banca examinadora do trabalho apresentado como Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil de **ARLAN RICARDO CAVALCANTE DOS SANTOS**, intitulada: “ANÁLISE DE TENSÕES EMPREGANDO A FORMULAÇÃO EM COORDENADAS POLARES DA TEORIA DE VOLUMES FINITOS”. Compuseram a banca examinadora os professores **Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante (Orientador)**, o **Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques - UFAL** e o **Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages - UFAL**. Após a exposição oral, o(a) candidato(a) foi arguido(a) pelos componentes da banca que reuniram-se reservadamente, e decidiram, APROVAR SEM RESERVAÇÕES, com nota 9,5 o trabalho apresentado. Para constar, redigi a presente Ata, que aprovada por todos os presentes, vai assinada por mim, Coordenador(a) do Curso de Engenharia Civil, pelo(a) coordenador(a) de TCC e pelos demais membros da banca.

  
Orientador (a)

  
Avaliador 2

  
Avaliador 3

\_\_\_\_\_  
Coordenador do Curso de Engenharia Civil

\_\_\_\_\_  
Coordenador de TCC

## Agradecimentos

A Deus, por ter me dado saúde e coragem para enfrentar os obstáculos que surgiram ao longo desta trajetória.

A minha família, por ter contribuído decisivamente para a realização deste projeto pessoal.

Ao Prof. Márcio André Araújo Cavalcante, não só pela orientação neste trabalho, como também pela importante contribuição na minha formação como Engenheiro Civil. Aproveito a oportunidade para cumprimentá-lo pela excelente didática e alto rigor técnico de suas aulas, que fazem com que assuntos complexos pareçam triviais. Apresento-lhe meus sinceros agradecimentos por ter me concedido a oportunidade de trabalhar com um tema tão importante e desafiador, como é o caso da *Teoria de Volumes Finitos*. Espero que este trabalho tenha correspondido, ao menos minimamente, às expectativas.

Aos professores Arnaldo dos Santos Júnior, Gabriel Soares Bádue, Marcelo Felisberto de Lima, Márcio André Araújo Cavalcante, Romildo dos Santos Escarpini Filho e Tânia Maria Voronkoff Carnaúba, dos troncos intermediário e profissionalizante, pelas aulas ministradas durante do curso.

Aos professores Severino Pereira Cavalcanti Marques e Eduardo Nobre Lages por terem colaborado com o aperfeiçoamento deste trabalho por meio de suas relevantes sugestões.

*A memória de meu pai, Itamar,  
à minha mãe, Maria Aparecida,  
e aos meus irmãos, Willian e Ryan.*

## **Resumo**

Este trabalho apresenta uma formulação para análise de tensões em estruturas axissimétricas, tais como tubos circulares, cilindros e anéis, elaborada com base em uma versão em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos. Esta formulação é bastante apropriada para análise de tensões em estruturas com contornos curvos, com geometria e campos mecânicos expressos em termo de coordenadas polares, pois visa a melhorar o desempenho do método em tais situações. Diferentemente de versões anteriores empregando coordenadas polares, esta formulação baseia-se na montagem da matriz de rigidez local, que relaciona vetores de tensão e de deslocamentos médios atuantes nas faces do subvolume, e no método da rigidez direta para montagem da matriz de rigidez global, com base nas incidências cinemáticas e estáticas da estrutura, ou seja, nas condições de compatibilidade cinemática e estática da estrutura. Alguns exemplos foram analisados e os resultados comparados com soluções analíticas da teoria da elasticidade linear (problema de Lamé, viga curva engastada e o problema de Kirsch), o que evidenciou a eficiência da formulação proposta.

Palavras-chave: Estruturas Axissimétricas; Teoria de Volumes Finitos; Coordenadas Polares; Método da Rigidez Direta; Problema de Lamé; Viga Curva Engastada; Problema de Kirsch.

## **Abstract**

This work presents a formulation for stress analysis of axisymmetric structures, such as circular tubes, cylinders and rings, based on a polar coordinate version of the Finite-Volume Theory. This formulation is well suited for stress analysis in structures with curved contours, presenting geometry and mechanical fields expressed in term of polar coordinates, aiming to improve the performance of the method in such situations. Unlike previous versions using polar coordinates, this formulation is based on the assembly of the local stiffness matrix, which relates surface-averaged tractions and displacements acting on the faces of the subvolume, and the direct stiffness method for the assembling of the global stiffness matrix, based on the kinematic and static incidences of the structure, that is, in the conditions of kinematic and static compatibilities of the structure. Some examples were analyzed and the results compared with analytical solutions of the linear elasticity theory (Lamé problem, fixed curved beam and the Kirsch problem), showing the efficiency of the proposed formulation.

**Keywords:** Axisymmetric Structures; Finite-Volume Theory; Polar coordinates; Direct Stiffness Method; Problem of Lamé; Fixed Curved Beam; Kirsch problem.



## Lista de figuras

Figura 1. 1 - Exemplos de estruturas axissimétricas. ....	13
Figura 3.1 - Estrutura discretizada em subvolumes retangulares e sistema de coordenadas locais de um subvolume genérico.....	31
Figura 3.2 - Valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces de um subvolume genérico $q$ . ....	34
Figura 3.3 - Valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces de um subvolume genérico $q$ . ....	38
Figura 3.4 - Notação utilizada para designar os identificadores das faces de um subvolume genérico. ....	43
Figura 3.5 - Notação utilizada para designar os identificadores dos graus de liberdade globais associados às faces de um subvolume genérico. ....	44
Figura 4.1- Estrutura discretizada em subvolumes retangulares (retângulos polares) e sistema de coordenadas locais de um subvolume genérico.....	49
Figura 4.2 - Valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces de um subvolume genérico $q$ .....	52
Figura 4.3 - Valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces de um subvolume genérico $q$ .....	55
Figura 4.4 - Notação utilizada para designar os identificadores das faces de um subvolume genérico. ....	60
Figura 5.1 – Tubo de parede grossa submetido a pressões uniformes. ....	63
Figura 5.2 – Malha utilizada na análise do tubo de parede grossa. ....	64
Figura 5.3 - Campo de tensão radial $\sigma_{rr}$ (Pa).....	66
Figura 5.4 - Campo de tensão circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ (Pa). ....	67
Figura 5.5 – Variação da tensão radial ao longo da espessura do tubo. ....	67
Figura 5.6 – Variação da tensão circunferencial ao longo da espessura do tubo. ....	68
Figura 5.7 – Viga curva engastada. ....	68
Figura 5.8 – Malhas utilizadas nas análises da viga curva. ....	70
Figura 5.9 - Campo de tensão radial $\sigma_{rr}$ (kPa).....	73
Figura 5.10 - Campo de tensão circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ (kPa). ....	73
Figura 5.11 - Campo de tensão cisalhante $\sigma_{r\theta}$ (kPa).....	74

Figura 5.12 – Variação da tensão radial ao longo da seção transversal média da viga curva engastada ( $\theta = \pi/4$ ).	74
Figura 5.13 – Variação da tensão circunferencial ao longo da seção transversal média da viga curva engastada ( $\theta = \pi/4$ ).	75
Figura 5.14 – Variação da tensão cisalhante ao longo da seção transversal média da viga curva engastada ( $\theta = \pi/4$ ).	75
Figura 5.15 – Chapa com orifício circular submetida a um estado de tensão uniaxial horizontal (tração).	76
Figura 5.16 – Malhas utilizadas nas análises da chapa com orifício circular.	77
Figura 5.17 - Campo de tensão radial $\sigma_{rr}$ (Pa).	79
Figura 5.18 - Campo de tensão circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ (Pa).	80
Figura 5.19 - Campo de tensão cisalhante $\sigma_{r\theta}$ (Pa).	80
Figura 5.20 - Variação da tensão radial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ ).	81
Figura 5.21 - Variação da tensão radial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$ ).	81
Figura 5.22 - Variação da tensão circunferencial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ ).	82
Figura 5.23 - Variação da tensão circunferencial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$ ).	82
Figura 5.24 - Variação da tensão cisalhante ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = \pi/4$ ou $\theta = 3\pi/2$ ).	83
Figura 5.25 - Variação da tensão cisalhante ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = 3\pi/4$ ou $\theta = 7\pi/4$ ).	83

## Lista de tabelas

Tabela 2.1 - Coeficientes da matriz constitutiva de materiais isotrópicos para análises bidimensionais em estado plano de deformações ou de tensões. ....	23
Tabela 5.1 – Propriedades do material do tubo. ....	65
Tabela 5.2 – Parâmetros adotados nas análises. ....	65
Tabela 5.3 - Análise de convergência do Problema de Lamé. ....	66
Tabela 5.4 - Propriedades do material da viga. ....	71
Tabela 5.5 – Parâmetros adotados nas análises. ....	71
Tabela 5.6 - Análise de convergência do problema da viga curva engastada. ....	72
Tabela 5.7 – Propriedades do material da chapa. ....	78
Tabela 5.8 – Parâmetros adotados nas análises. ....	78
Tabela 5.9 - Análise de convergência do Problema de Kirsch. ....	79

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Equações Governantes da Teoria da Elasticidade Linear</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Problema Tridimensional em Coordenadas Cartesianas.....</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Problema Bidimensional em Coordenadas Cartesianas.....</b>	<b>21</b>
<b>2.3</b>	<b>Problema Tridimensional em Coordenadas Cilíndricas .....</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Problema Bidimensional em Coordenadas Polares .....</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>Teoria de Volumes Finitos em Coordenadas Cartesianas.</b>	<b>31</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>31</b>
<b>3.2</b>	<b>Montagem da Matriz Local de Rigidez .....</b>	<b>33</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Deslocamentos Médios nas Faces.....</b>	<b>33</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Vetores de Tensão Médios nas Faces.....</b>	<b>35</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Considerações de Equilíbrio Local no Subvolume .....</b>	<b>39</b>
<b>3.3</b>	<b>Montagem da Matriz Global de Rigidez .....</b>	<b>41</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Montagem do Sistema Global de Equações.....</b>	<b>41</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Solução do Sistema Global de Equações .....</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Teoria de Volumes Finitos em Coordenadas Polares .....</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Montagem da Matriz Local de Rigidez .....</b>	<b>51</b>
<b>4.2.1</b>	<b>Deslocamentos Médios nas Faces.....</b>	<b>51</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Vetores de Tensão Médios nas Faces.....</b>	<b>53</b>
<b>4.2.3</b>	<b>Considerações de Equilíbrio Local do Subvolume .....</b>	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b>Montagem da Matriz Global de Rigidez .....</b>	<b>59</b>
<b>4.3.1</b>	<b>Montagem do Sistema Global de Equações.....</b>	<b>59</b>
<b>4.3.2</b>	<b>Solução do Sistema Global de Equações .....</b>	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos .....</b>	<b>63</b>
<b>5.1</b>	<b>Problema de Lamé.....</b>	<b>63</b>
<b>5.2</b>	<b>Viga Curva Engastada .....</b>	<b>68</b>
<b>5.3</b>	<b>Problema de Kirsch .....</b>	<b>75</b>
<b>6</b>	<b>Conclusão.....</b>	<b>84</b>
	<b>Referências.....</b>	<b>85</b>
	<b>Apêndice A – Matrizes Auxiliares Usadas na Formulação em Coordenadas Cartesianas da Teoria de Volumes Finitos..</b>	<b>87</b>

<b>Apêndice B – Matrizes Auxiliares Usadas na Formulação em Coordenadas Polares da Teoria de Volumes Finitos .....</b>	<b>89</b>
<b>Apêndice C – Dedução das equações de equilíbrio de um subvolume genérico em termos dos vetores de tensão atuantes nas faces.....</b>	<b>96</b>

# 1 Introdução

Entende-se que o principal estágio do processo de concepção de uma estrutura consiste na avaliação das tensões internas que são produzidas em resposta às ações aplicadas. Quando um elemento estrutural apresenta geometria complexa e/ou se encontra sujeito a ações não uniformes, torna-se indispensável a utilização de métodos de análise mais sofisticados que aqueles apresentados nos livros de resistência dos materiais.

Uma primeira alternativa seria o uso de soluções analíticas fornecidas pela *Teoria da Elasticidade Linear* (em geral, *determinadas com o auxílio do método da função de tensão de Airy*, para estruturas que se encontram em estado plano de tensões ou deformações, ver Timoshenko e Goodier (1980)). No entanto, as soluções analíticas disponíveis na literatura apresentam-se em número bastante reduzido, contemplando tão somente alguns casos particulares — geralmente aqueles em que as estruturas a serem analisadas encontram-se sujeitas a ação de cargas concentradas e/ou carregamentos uniformes.

Uma segunda opção consistiria na utilização de métodos numéricos voltados para análise estrutural, tais como o Método dos Elementos de Contorno, o Método dos Elementos Finitos e a Teoria de Volumes Finitos. Uma das principais vantagens da maioria dos métodos numéricos existentes é a flexibilidade na modelagem de estruturas que exibem geometria complexa e na representação de ações não uniformes.

Diversas publicações apresentaram e comprovaram a eficiência de diferentes variações da Teoria de Volumes Finitos, formulada originalmente em coordenadas cartesianas por Bansal e Pindera (2003). Devem ser destacadas as formulações em *coordenadas polares* e em *coordenadas paramétricas* desenvolvidas por Cavalcante e Marques (2005) e Cavalcante et. al. (2007), respectivamente. Nos referidos trabalhos, foram realizadas várias análises em estruturas constituídas de materiais heterogêneos, e os resultados encontrados foram comparados com outros provenientes de soluções analíticas ou obtidos por intermédio do Método dos Elementos Finitos.

Recentemente, Cavalcante e Pindera (2012) propuseram uma nova abordagem da Teoria de Volumes Finitos, denominada *Generalized Finite-Volume Theory*. Nesta abordagem, a estrutura a ser analisada é subdividida em subvolumes que dispõem de quatro graus de liberdade por face (duas translações, uma rotação e uma curvatura), em vez de dois

graus de liberdade por face (duas translações), como acontece na formulação apresentada por Bansal e Pindera (2003).

No presente trabalho, apresenta-se uma formulação voltada para análise de tensões em estruturas axissimétricas, elaborada com base numa versão em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos (Cavalcante e Marques, 2005).

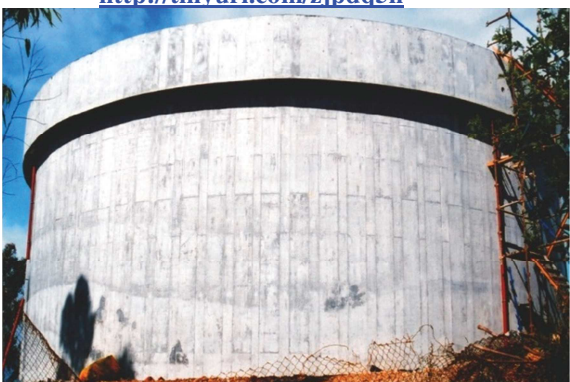
As estruturas axissimétricas são amplamente empregadas nas engenharias civil e mecânica e podem ser obtidas por meio da rotação de uma figura plana em 360 graus em torno de um eixo de simetria (a curva geratriz da figura e o eixo devem estar no mesmo plano), conforme apresentado por Vaz (2011). Apresentam-se na Figura 1.1 alguns exemplos de estruturas deste tipo.



(a) Silos para armazenagem de grãos. Fonte: Ceráça. Disponível em: <http://tinyurl.com/zjpdq5h>



(b) Estacas pré-moldadas. Fonte: Incopre. Disponível em: <http://tinyurl.com/hwc3k8v>



(c) Reservatório de água. Fonte: Caldora. Disponível em: <http://tinyurl.com/z95t9ps>



(d) Vaso de pressão para armazenagem de gás. Fonte: Aberko Equipamentos Industriais. Disponível em: <http://tinyurl.com/z95t9ps>

Figura 1. 1 - Exemplos de estruturas axissimétricas.

Deve-se mencionar que os elementos estruturais a serem analisados com a formulação proposta neste trabalho necessitam satisfazer simultaneamente às duas condições abaixo:

- Precisam apresentar seção transversal constante, ou seja, possuem as mesmas propriedades geométricas (área e momento de inércia) em todas as seções normais ao plano de análise (plano  $r-\theta$ ). Em geral, as análises de tensões serão realizadas em seções intermediárias de elementos cilíndricos;
- As ações impostas precisam ser paralelas ao plano de análise. Isto significa que as ações não podem variar ao longo do eixo normal ao plano de análise (eixo  $z$ ).

Algumas semelhanças entre a formulação apresentada no presente trabalho e aquela proposta por Cavalcante e Marques (2005) merecem ser destacadas. Por exemplo, ambas as formulações utilizam subvolumes com faces retas e curvas na discretização da estrutura a ser analisada, o que facilita, assim, a modelagem geométrica de estruturas que apresentam geometria axissimétrica. Além disso, as duas formulações empregam polinômios de segundo grau, nos quais figuram dez coeficientes desconhecidos, para aproximar o campo de deslocamentos em cada subvolume. A quantidade de coeficientes desconhecidos equivale ao número de graus de liberdade de um subvolume (oito) somado ao número de equações de equilíbrio disponíveis (duas). Para determinar os valores numéricos destes coeficientes, são desenvolvidas equações discretas que relacionam os valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos com os mesmos. Além do mais, nas duas formulações, as equações diferenciais de equilíbrio são expressas em função das derivadas de primeira e segunda ordem dos componentes do campo de deslocamentos e satisfeitas em termos médios nos subvolume.

Diferentemente da formulação proposta pelos autores mencionados no parágrafo anterior, a formulação desenvolvida neste trabalho incorpora o conceito de montagem da matriz de rigidez local e global (Bansal e Pindera (2003), Cavalcante et. al. (2007) e Cavalcante e Pindera (2012)). A matriz de rigidez local relaciona os valores médios nas faces dos componentes dos vetores de tensão com valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos. A matriz de rigidez global, por sua vez, é montada por meio do método da rigidez direta emprestado pela abordagem em elementos finitos. Este método é o resultado final de um processo que envolve a construção das conhecidas *matrizes de incidência cinemática* e *estática* que são determinadas impondo-se as condições de continuidade estática e cinemática em termos de valores médios dos componentes dos vetores



de tensão e de valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces comuns de subvolumes vizinhos, assim como realizado por Bansal e Pindera (2003) e Cavalcante e Pindera (2012).

Deve-se mencionar que, na formulação apresentada por Cavalcante e Marques (2005), as incógnitas básicas do problema eram os *coeficientes do campo de deslocamentos*, em vez dos *valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos*, como acontece na formulação aqui proposta.

Desta forma, o presente trabalho tem como objetivo geral:

- Elaborar uma formulação em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos, adequada à análise de tensões em estruturas axissimétricas que se encontram em estado plano de tensões ou deformações.

Para atingir o objetivo geral deste trabalho, contemplou-se os seguintes objetivos específicos:

- Deduzir o equacionamento correspondente à formulação, usando como base os trabalhos citados anteriormente;
- Escrever um código computacional em ambiente MATLAB;
- Analisar alguns casos que apresentam solução analítica conhecida, com a finalidade de verificar se a formulação está correta.

Com base no exposto acima, entende-se que o presente trabalho apresenta relevante contribuição, uma vez que a formulação proposta possibilitará a realização de análises de tensões em estruturas axissimétricas submetidas a ações não uniformes.

No Capítulo 2, apresentam-se as equações governantes da Teoria da Elasticidade Linear, expressas tanto em coordenadas cartesianas como em coordenadas cilíndricas. Além do mais, são deduzidas as equações que integram a chamada *formulação em deslocamentos de um problema mecânico bi e tridimensional*, usando ambos os sistemas de coordenadas mencionados acima.

No Capítulo 3, apresenta-se uma revisão teórica da formulação em coordenadas cartesianas da Teoria de Volumes Finitos. Para a dedução das equações, foram utilizados como base os trabalhos de Bansal e Pindera (2003) e Cavalcante e Pindera (2012). Ainda neste capítulo, são demonstrados os procedimentos de montagem e resolução do sistema global de equações de uma estrutura qualquer.

No Capítulo 4, apresenta-se a formulação proposta no presente trabalho. A referida formulação trata-se de uma versão em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos, destinada a análise bidimensional de tensões em estruturas definidas por domínios de análise axissimétricos, especialmente para aqueles que apresentam geometria cilíndrica.

No Capítulo 5, com o propósito de demonstrar a eficiência da formulação proposta, são analisados três exemplos usando a formulação apresentada no Capítulo 4. Os resultados obtidos com a mesma são confrontados com aqueles encontrados a partir de soluções analíticas da *Teoria da Elasticidade Linear*.

## 2 Equações Governantes da Teoria da Elasticidade Linear

### 2.1 Problema Tridimensional em Coordenadas Cartesianas

Nesta seção são apresentadas as equações que regem um problema mecânico tridimensional, expressas em coordenadas cartesianas. Além disso, são deduzidas as equações que constituem a chamada formulação (analítica) em deslocamentos do mencionado problema. Nestas equações estão presentes os *coeficientes da matriz constitutiva do material* que preenche o meio contínuo a ser analisado, bem como as *derivadas parciais dos componentes do campo de deslocamentos*, sendo estes responsáveis por descrever a configuração deformada do referido meio.

Deve-se salientar que um problema mecânico fica completamente definido por um domínio de análise (meio contínuo), o qual define a geometria da estrutura, suas respectivas condições de contorno e, evidentemente, as equações governantes do problema. Sobre as condições de contorno, deve-se dizer que estas podem ser mistas ou de um único tipo.

A formulação em deslocamentos do problema mecânico (formulação forte) é bastante útil na solução de problemas unidimensionais descritos por uma única equação diferencial de equilíbrio (equação diferencial ordinária) e na construção de técnicas numéricas (formulações fracas) destinadas a análises em uma ou mais dimensões. No entanto, a aplicabilidade da formulação em deslocamentos (formulação forte) na solução analítica (ou exata) de problemas em mais de uma dimensão é bastante reduzida, em virtude da dificuldade em se determinar as variáveis incógnitas (componentes de deslocamentos) que satisfazem simultaneamente (e pontualmente) as equações diferenciais de equilíbrio (equações diferenciais parciais) e as condições de contorno do problema. Em outras palavras, a formulação forte requer a determinação de expressões fechadas para as variáveis incógnitas (componentes de deslocamentos), enquanto que na formulação fraca admite-se uma aproximação polinomial para estas variáveis. Em síntese, converte-se um problema de *determinação de funções* em outro de *determinação de coeficientes*.

Assim, considere uma estrutura de volume  $V$  limitada por uma superfície  $S$  e um sistema de coordenadas cartesianas de referência composto pelos eixos  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ). Suponha que a referida estrutura se encontra sujeita à ação de forças de corpo  $b_i$  e de superfície  $\hat{t}_i$

( $i=1,2,3$ ). Tais forças são equilibradas pelas reações de apoio que surgem nos elementos de vinculação que restringem os deslocamentos em uma parte específica do contorno da estrutura.

Para garantir que a estrutura se encontra em equilíbrio estático, é necessário que as seguintes equações diferenciais de equilíbrio sejam satisfeitas pontualmente em todo o domínio de análise (Silva, 2004). Estas equações são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

nas quais  $\sigma_{ij}$  representam os componentes do campo de tensões e  $b_j$  simbolizam os componentes das forças de corpo. Em geral, os componentes das forças de corpo são variáveis conhecidas e os componentes do campo de tensões são variáveis desconhecidas do problema mecânico. Assim, não é possível resolver o problema mecânico dispondo-se apenas das equações diferenciais de equilíbrio, uma vez que o número de equações disponíveis não é igual ao número de variáveis desconhecidas.

Portanto, para construir uma formulação analítica voltada à solução de um problema mecânico, é necessário recorrer a equações adicionais que consideram informações de natureza geométrica e o comportamento mecânico do material que constitui a estrutura.

Os componentes do campo de deformações são expressos em termos dos componentes do campo de deslocamentos da estrutura por intermédio de relações cinemáticas. Por se tratar de uma análise em regime de pequenas deformações e deslocamentos, as mencionadas relações são dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \gamma_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

sendo  $\varepsilon_{ij}$  os componentes normais e  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  os componentes tangenciais (deformações angulares) do campo de deformações, e  $u_i$  os componentes do campo de deslocamentos. Assim, conhecendo-se os componentes do campo de deslocamentos e utilizando-se as expressões apresentadas na equação anterior (Equação 2.2), podem-se determinar os componentes do campo de deformações, que define o estado de deformação em um ponto pertencente ao sólido.

Admitindo-se que a estrutura seja feita de material homogêneo, isotrópico e linearmente elástico, podem-se relacionar os componentes do campo de tensões com os componentes do campo de deformações por meio das equações constitutivas que descrevem o comportamento mecânico do material. Estas equações são conhecidas como *Lei de Hooke Generalizada* e se encontram definidas matricialmente a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo  $C_{ij}$  os componentes constantes da matriz constitutiva do material. Deve-se salientar que a equação constitutiva do material, representada pela relação matricial que consta na Equação 2.3, funciona como um elo entre a parte estática e a parte cinemática do problema mecânico.

Os coeficientes da matriz constitutiva de um material isotrópico podem ser avaliados pelas seguintes expressões:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.4)$$

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

No que segue, as equações diferenciais de equilíbrio são reescritas em termos dos componentes da matriz constitutiva do material e dos componentes do campo de deslocamentos. Para isso, basta substituir as relações cinemáticas (Equação 2.2) nas equações constitutivas do material (Equação 2.3) e introduzir as expressões resultantes nas equações diferenciais de equilíbrio, obtendo-se, assim, as seguintes equações:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + C_{66} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + C_{55} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + b_1 &= 0 \\ C_{66} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + C_{21} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{23} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{44} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + b_2 &= 0 \quad (2.5) \\ C_{55} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) + C_{44} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + C_{31} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + C_{32} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Percebe-se que ao expressar as equações diferenciais de equilíbrio em termos dos componentes do campo de deslocamentos, ocorre uma redução no número de variáveis desconhecidas que figuram nestas equações, o que torna o número de variáveis desconhecidas equivalente ao número de equações disponíveis.

Além disso, as ações atuantes e os deslocamentos impostos na superfície da estrutura podem ser interpretados como condições de contorno de natureza estática e cinemática, respectivamente, do problema mecânico. Considerando-se que um mesmo ponto não pode estar sujeito a condições de contorno de tipos diferentes ao mesmo tempo, pode-se imaginar a superfície  $S$  como sendo constituída por duas partes, as quais são denotadas por  $S_u$  e  $S_t$ . Sendo  $S_u$  a porção do contorno da estrutura com deslocamentos conhecidos, e  $S_t$  a porção do contorno com ações conhecidas.

As condições de contorno mencionadas acima podem ser representadas resumidamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji}n_j &= \hat{t}_i \text{ em } S_t \\ u_i &= \hat{u}_i \text{ em } S_u\end{aligned}\tag{2.6}$$

sendo  $\hat{t}_i$  as ações conhecidas (componentes do vetor de forças de superfície),  $\hat{u}_i$  os deslocamentos conhecidos e  $n_j$  os componentes do vetor unitário normal à superfície que delimita a estrutura.

Deve-se salientar que as expressões que figuram na Equação 2.1 constituem a forma mais geral das equações diferenciais de equilíbrio, pois nestas equações não foram consideradas informações relativas ao modo como a estrutura se deforma e o tipo de lei constitutiva que descreve o comportamento do material que a constitui. Assim, estas equações diferenciais de equilíbrio (Equação 2.1) podem ser usadas tanto em análises em regime de pequenos deslocamentos e deformações, quanto em análises em regime de grandes deslocamentos e deformações, bem como podem ser usadas em análises de estruturas constituídas de materiais que apresentam comportamento linear ou não linear. Diferentemente das equações diferenciais de equilíbrio que constam na Equação 2.5, as quais são válidas somente para análises de estruturas feitas de materiais elásticos lineares e em regime de pequenos deslocamentos e deformações.

Com o exposto, constata-se que encontrar a solução de um problema mecânico tridimensional, com equações governantes expressas em termos de coordenadas cartesianas, significa determinar os componentes  $u_i$  do campo de deslocamentos que satisfazem simultaneamente as equações diferenciais de equilíbrio (Equação 2.5) e as condições de contorno  $\sigma_{ji}n_j = \hat{t}_i$  em  $S_t$  e  $u_i = \hat{u}_i$  em  $S_u$ .

Conforme mencionado anteriormente, os componentes dos campos de deformações e tensões podem ser encontrados automaticamente, usando as relações cinemáticas (Equação 2.2) e as equações constitutivas do material (Equação 2.3), respectivamente, desde que os componentes do campo de deslocamentos sejam conhecidos.

## 2.2 Problema Bidimensional em Coordenadas Cartesianas

Geralmente, são empregados modelos bidimensionais para simplificar a análise de estruturas tridimensionais. Segundo Fish e Belystchko (2009), nestas situações, costuma-se

assumir a hipótese que as estruturas se encontram em estado plano de tensões ou deformações. Esta hipótese simplificadora conduz a resultados bastante satisfatórios na análise de estruturas que apresentam seção transversal constante e que estão sujeitas a ações paralelas ao plano de análise, como é caso dos carregamentos que se mantêm uniformes ao longo do eixo normal ao plano de análise.

Diante do exposto, nesta seção são apresentadas as equações que regem um problema mecânico bidimensional, expressas em coordenadas cartesianas. Além disso, são deduzidas as equações de equilíbrio, em termos dos componentes do campo de deslocamentos, da formulação em deslocamentos do mencionado problema. Acrescenta-se ainda que a formulação em deslocamentos do problema mecânico bidimensional, mostrada na presente seção, serve como base na elaboração de formulações numéricas, destinadas a análises bidimensionais de estruturas, tais como o Método dos Elementos Finitos e a Teoria de Volumes Finitos.

No caso de uma análise bidimensional no plano 2-3, na qual se admite a hipótese de estado plano de tensões ou deformações, as equações diferenciais de equilíbrio a serem satisfeitas em todo o domínio de análise, mostradas na Equação 2.1, reduzem-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como a análise se restringe ao plano 2-3, apenas os componentes do campo de deslocamentos correspondentes aos eixos 2 e 3 são considerados importantes, uma vez que o componente relativo à direção 1 é assumida como sendo nulo, no caso de estado plano de deformações, ou avaliado em função da deformação normal associada a esta direção, no caso de estado plano de tensões. Portanto, as relações cinemáticas, mostradas na Equação 2.2, são resumidas a:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{2.8}$$



$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

No caso em questão (análise bidimensional no plano 2-3), as equações constitutivas do material, que relacionam os componentes do campo de tensões com os componentes do campo de deformações, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 \\ \bar{C}_{23} & \bar{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

em que  $\bar{C}_{ij}$  representam os coeficientes da matriz constitutiva do material.

Cabe destacar que as equações constitutivas mostradas na Equação 2.9 são utilizadas para modelar o comportamento de materiais isotrópicos e linearmente elásticos. Observe que na representação da matriz constitutiva, mostrada na Equação 2.9, tirou-se proveito das condições de simetria do material isotrópico, ou seja,  $\bar{C}_{33} = \bar{C}_{22}$  e  $\bar{C}_{32} = \bar{C}_{23}$ . Os coeficientes da mencionada matriz podem ser avaliados conforme indicado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Coeficientes da matriz constitutiva de materiais isotrópicos para análises bidimensionais em estado plano de deformações ou de tensões.

Coeficiente	Estado Plano de Deformações	Estado Plano de Tensões
$\bar{C}_{22}$	$C_{22}$	$C_{22} - (C_{23})^2 / C_{22}$
$\bar{C}_{23}$	$C_{23}$	$C_{23} - (C_{23})^2 / C_{22}$
$\bar{C}_{44}$	$C_{44}$	$C_{44}$

Assim como foi feito para o problema mecânico tridimensional, as equações diferenciais de equilíbrio podem ser expressas em termos dos coeficientes da matriz constitutiva e dos componentes do campo de deslocamentos, resultando em:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \bar{C}_{23} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \bar{C}_{44} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + b_2 &= 0 \\ \bar{C}_{44} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \bar{C}_{23} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \bar{C}_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Portando, resolver o problema bidimensional no plano 2-3 com equações governantes expressas em termos de coordenadas cartesianas é o mesmo que determinar os componentes  $u_i$  que satisfazem simultaneamente as equações diferenciais de equilíbrio (Equação 2.10) e as condições de contorno  $\sigma_{ji} n_j = \hat{t}_i$  em  $S_t$  e  $u_i = \hat{u}_i$  em  $S_u$ .

Acrescenta-se ainda que pode ser calculada a deformação normal na direção 1, para o caso de estado plano de tensões, ou a tensão normal na direção 1, para o caso de estado plano de deformações, usando as expressões presentes nas Equações 2.11 e 2.12, nesta ordem.

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\bar{C}_{23}}{\bar{C}_{22}} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (2.11)$$

$$\sigma_{11} = \bar{C}_{23} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (2.12)$$

### 2.3 Problema Tridimensional em Coordenadas Cilíndricas

O uso de coordenadas cilíndricas mostra-se bastante vantajoso nos casos em que a estrutura a ser analisada apresenta contornos curvos, tais como as estruturas que podem ser representadas por domínios de análise circulares. Por isso, nesta seção são apresentadas as equações governantes do problema mecânico expressas em coordenadas cilíndricas. Assim como foi feito nas seções anteriores, também são deduzidas as equações de equilíbrio, em termos dos componentes do campo de deslocamentos, da formulação em deslocamentos do mencionado problema.

Seja uma estrutura de volume  $V$  limitada por uma superfície  $S$  e um sistema de coordenadas cilíndricas de referência, constituído pelos eixos  $r$ ,  $\theta$  e  $z$ . Além disso, considere que a mencionada estrutura se encontra sujeita à ação de forças de corpo  $b_i$  e de superfície  $\hat{t}_i$  ( $i = r, \theta, z$ ). Estas forças são equilibradas pelas reações de apoio que são

produzidas nos elementos de vinculação que restringem os deslocamentos em uma parte específica do contorno da estrutura.

Quando expressas em coordenadas cilíndricas, as equações diferenciais de equilíbrio assumem a configuração mostrada a seguir:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + b_r &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + b_\theta &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + b_z &= 0
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

nas quais  $\sigma_{ij}$  representam os componentes do campo de tensões e  $b_j$  simbolizam os componentes das forças de corpo. Percebe-se que, assim como ocorre na formulação do problema mecânico em coordenadas cartesianas, as variáveis incógnitas são os componentes do campo de tensões e as equações diferenciais de equilíbrio são necessárias, entretanto, não são suficientes para se determinar os componentes do mencionado campo.

Apresentam-se a seguir as relações cinemáticas, expressas em coordenadas cilíndricas, válidas para uma análise em regime de pequenos deslocamentos e deformações.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

sendo  $\varepsilon_{ij}$  os componentes normais,  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  os componentes tangenciais (deformações angulares) do campo de deformações e  $u_i$  os componentes do campo de deslocamentos.

Admitindo-se, novamente, que a estrutura a ser analisada seja feita de um material isotrópico e linearmente elástico, e uma vez conhecidas os componentes do campo de deformações, podem-se determinar os componentes do campo de tensões por meio da Lei de Hooke Generalizada, mostrada a seguir:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{\theta r} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{zr} & C_{z\theta} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

sendo  $C_{ij}$  e  $G$  ( $i, j = r, \theta, z$ ) os coeficientes da matriz constitutiva do material. Levando-se em consideração as simetrias da matriz constitutiva do material, tem-se que  $C_{rr} = C_{\theta\theta} = C_{zz}$  e  $C_{r\theta} = C_{\theta r} = C_{rz} = C_{zr} = C_{\theta z} = C_{z\theta}$ . Além disso, pelo fato de o material ser isotrópico, suas propriedades mecânicas são as mesmas em qualquer direção, logo:  $C_{rr} = C_{11}$ ,  $C_{r\theta} = C_{12}$  e  $G = C_{44}$ .

Para tornar o número de variáveis desconhecidas igual ao número de equações de equilíbrio disponíveis, a exemplo do que foi feito anteriormente, utiliza-se a estratégia que consiste em escrever as equações diferenciais de equilíbrio em função dos coeficientes da matriz constitutiva (valores conhecidos) e dos componentes do campo de deslocamentos. Para isso, necessita-se substituir as relações cinemáticas (Equação 2.14) nas equações constitutivas do material (Equação 2.15) e introduzir as expressões resultantes nas equações diferenciais de equilíbrio, mostradas na Equação 2.13, resultando, assim, nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} & C_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + C_{r\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + C_{r\theta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \\ & + G \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) \\ & + (C_{rr} - C_{r\theta}) \frac{\partial u_r}{\partial r} + (-C_{rr} + C_{r\theta}) \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + b_r = 0 \quad (2.16) \\ & G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_\theta \right) + C_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \\ & + C_{r\theta} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) + C_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + G \frac{2}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + b_\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G \left( \frac{\partial u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r \partial z} \right) + G \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta^2} \right) + C_{r\theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + C_{r\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} \right) \\
& + C_{rr} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + G \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + b_z = 0
\end{aligned}$$

Observe que, na representação dos coeficientes da matriz constitutiva do material, presentes nas equações diferenciais de equilíbrio que figuram na Equação 2.16, optou-se por tirar proveito das condições de simetria da mencionada matriz.

Assim, para resolver um problema mecânico tridimensional com equações governantes expressas em termos de coordenadas cilíndricas, basta determinar os componentes  $u_i$  ( $i = r, \theta, z$ ) do campo de deslocamentos que satisfazem simultaneamente as equações de equilíbrio (Equação 2.16) e as condições de contorno  $\sigma_{ji} n_j = \hat{t}_i$  em  $S_t$  e  $u_i = \hat{u}_i$  em  $S_u$  ( $i, j = r, \theta, z$ ).

## 2.4 Problema Bidimensional em Coordenadas Polares

Conforme comentado anteriormente, frequentemente são utilizados modelos bidimensionais para simplificar a análise de estruturas tridimensionais. Nestes casos, costuma-se admitir a hipótese que a estrutura se encontra em estado plano de tensões ou deformações.

Neste contexto, esta seção apresenta as equações governantes do problema mecânico expressas em coordenadas polares. Assim como foi feito nas seções anteriores, também são deduzidas as equações de equilíbrio, em termos dos componentes do campo de deslocamentos, que constituem a formulação em deslocamentos do mencionado problema.

Para o caso de uma análise bidimensional no plano  $r-\theta$ , as equações diferenciais de equilíbrio, mostradas na Equação 2.13, a serem satisfeitas pontualmente em toda a estrutura, reduzem-se as equações mostradas a seguir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + b_r &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + b_\theta &= 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Como a análise é realizada no plano  $r-\theta$ , somente os componentes do campo de deslocamentos correspondentes aos eixos radial e circunferencial são considerados relevantes, levando-se em conta que o componente relativo à direção longitudinal é assumido como sendo nulo, no caso de estado plano de deformações, ou avaliado em função da deformação normal associada à direção longitudinal, no caso de estado plano de deformações. Portanto, as relações cinemáticas, mostradas na Equação 2.14, são convertidas em:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\end{aligned}\tag{2.18}$$

sendo  $\varepsilon_{ij}$  os componentes normais,  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  os componentes tangenciais (deformações angulares) do campo de deformações e  $u_i$  os componentes do campo de deslocamentos.

Vale lembrar que se está considerando que a estrutura é constituída de um material isotrópico que apresenta comportamento linearmente elástico. Neste caso, os componentes do campo de tensões relacionam-se com os componentes do campo de deformações por meio das equações constitutivas que satisfazem a Lei de Hooke. Apresenta-se abaixo a representação, em forma matricial, da mencionada lei.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{rr} & \bar{C}_{r\theta} & 0 \\ \bar{C}_{r\theta} & \bar{C}_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix}\tag{2.19}$$

na qual  $\bar{C}_{ij}$  e  $G$  representam os coeficientes da matriz constitutiva do material.

Em virtude das condições de simetria do material isotrópico, têm-se as seguintes equivalências:  $\bar{C}_{rr} = \bar{C}_{\theta\theta}$  e  $\bar{C}_{r\theta} = \bar{C}_{\theta r}$ . Além disso, considerando-se também a condição de isotropia do material, conclui-se que:  $\bar{C}_{rr} = \bar{C}_{11}$ ,  $\bar{C}_{r\theta} = \bar{C}_{12}$  e  $G = \bar{C}_{44}$ . Assim, os valores de tais coeficientes podem ser consultados na Tabela 2.1.

De forma similar ao que foi apresentado nas seções anteriores, com o propósito de tornar o número de variáveis desconhecidas compatível com o número de equações disponíveis, utiliza-se a estratégia que consiste em escrever as equações diferenciais de equilíbrio em função dos coeficientes da matriz constitutiva do material e dos componentes do campo de deslocamentos, obtendo-se, assim, as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
& C_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + C_{r\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} u_r + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + G \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + (C_{rr} - C_{r\theta}) \frac{\partial u_r}{\partial r} + (-C_{rr} + C_{r\theta}) \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + b_r = 0 \\
& G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_\theta \right) + C_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \\
& + C_{r\theta} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) + G \frac{2}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + b_\theta = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

As equações diferenciais de equilíbrio que figuram na Equação 2.20 foram obtidas substituindo-se as relações cinemáticas (Equação 2.18) nas equações constitutivas do material (Equação 2.19), e introduzindo-se as expressões resultantes nas equações diferenciais de equilíbrio expressas em termos dos componentes do campo de tensões (Equação 2.17).

Portanto, para resolver um problema mecânico bidimensional com equações governantes expressas em termos de coordenadas polares, faz-se necessário encontrar os componentes  $u_i$  ( $i=r, \theta$ ) do campo de deslocamentos que satisfazem simultaneamente as equações de equilíbrio (Equação 2.20) e as condições de contorno  $\sigma_{ji} n_j = \hat{t}_i$  em  $S_t$  e  $u_i = \hat{u}_i$  em  $S_u$  ( $i, j = r, \theta$ ).

De forma análoga ao que foi mostrado na Seção 2.1.2, pode ser calculada a deformação normal na direção longitudinal, para o caso de estado plano de tensões, ou a tensão normal na direção longitudinal, para o caso de estado plano de tensões, usando as expressões presentes nas Equações 2.21 e 2.22, respectivamente.

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\bar{C}_{r\theta}}{\bar{C}_{rr}} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \tag{2.21}$$

$$\sigma_{zz} = \bar{C}_{r\theta} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \tag{2.22}$$





### 3 Teoria de Volumes Finitos em Coordenadas Cartesianas

#### 3.1 Introdução

A Figura 3.1 ilustra o caso de uma estrutura retangular subdividida em  $N_q = N_\beta N_\gamma$  subdomínios retangulares denominados *subvolumes*. Os valores  $N_\beta$  e  $N_\gamma$  indicam o número de subdivisões correspondentes aos intervalos  $0 \leq x_2 \leq B$  e  $0 \leq x_3 \leq H$ , respectivamente. Cada subvolume pode ser denotado por um único número inteiro  $1 \leq q \leq N_q$  ou por um par de números inteiros  $\beta = 1, \dots, N_\beta$  e  $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$ , sendo que o primeiro parâmetro mencionado pode ser avaliado em função destes dois últimos. Por exemplo, o subvolume  $(\beta, \gamma)$  é aquele que ocupa a posição  $\beta$  na direção horizontal e a posição  $\gamma$  na direção vertical, ou  $q = \beta + (\gamma - 1)N_\beta$  na estrutura discretizada. Além disso, as ações (forças de superfície) e deslocamentos impostos à estrutura são aplicados nas faces externas dos subvolumes localizados na periferia do modelo estrutural, em termos de valores médios destas grandezas estáticas e cinemáticas.

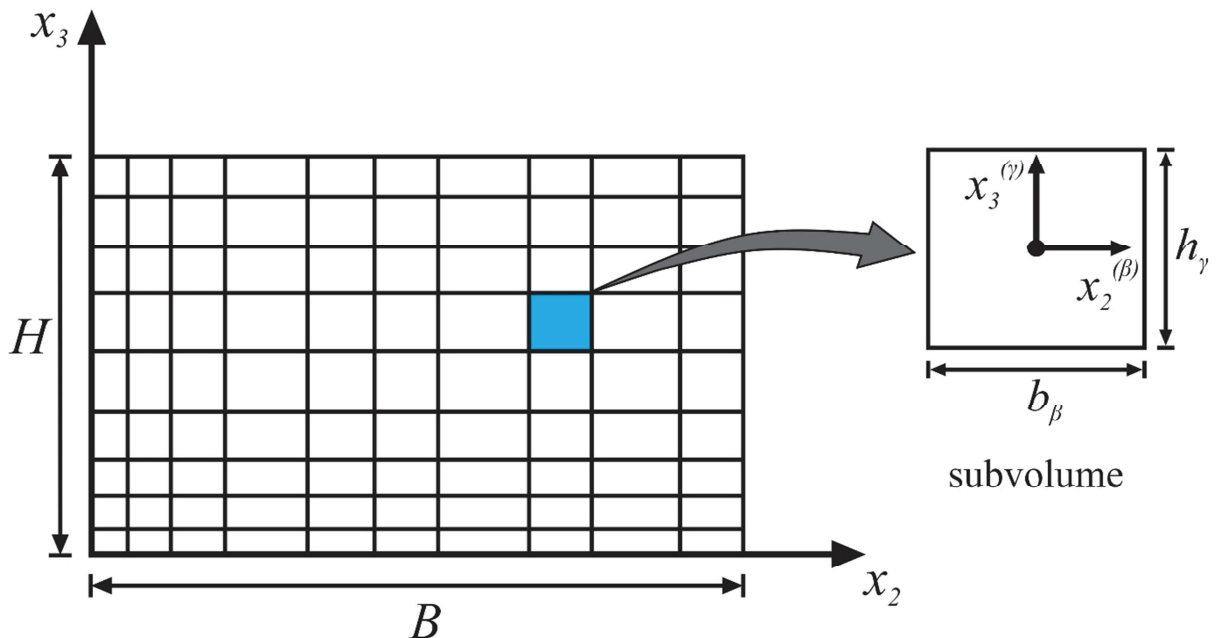


Figura 3.1 - Estrutura discretizada em subvolumes retangulares e sistema de coordenadas locais de um subvolume genérico.

A presente formulação utiliza polinômios de segundo grau expressos em função de coordenadas locais para aproximar os componentes do campo de deslocamentos em cada subvolume, viabilizando, assim, a realização de análises de tensões em estruturas que se apresentam em estado plano de tensões ou deformações (Bansal e Pindera, 2003). Estes polinômios são dados por:

$$\begin{aligned}
 u_2^{(q)} &= U_{2(00)}^{(q)} + x_2^{(q)}U_{2(10)}^{(q)} + x_3^{(q)}U_{2(01)}^{(q)} + \frac{1}{2}\left(3(x_2^{(q)})^2 - \frac{b_q^2}{2}\right)U_{2(20)}^{(q)} + \frac{1}{2}\left(3(x_3^{(q)})^2 - \frac{h_q^2}{2}\right)U_{2(02)}^{(q)} \\
 u_3^{(q)} &= U_{3(00)}^{(q)} + x_2^{(q)}U_{3(10)}^{(q)} + x_3^{(q)}U_{3(01)}^{(q)} + \frac{1}{2}\left(3(x_2^{(q)})^2 - \frac{b_q^2}{2}\right)U_{3(20)}^{(q)} + \frac{1}{2}\left(3(x_3^{(q)})^2 - \frac{h_q^2}{2}\right)U_{3(02)}^{(q)}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

nas quais  $b_q (= b_\beta)$  e  $h_q (= h_\gamma)$  representam a largura e a altura de um subvolume genérico, e os valores  $U_{i(mm)}^{(q)}$  simbolizam os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

Percebe-se que para cada subvolume existem dez coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos a serem determinados, sendo dois coeficientes de ordem zero (ou constantes), quatro coeficientes de primeira ordem (ou lineares) e quatro coeficientes de segunda ordem (ou quadráticos). Os componentes dos campos de deformações e tensões de um subvolume genérico podem ser avaliados em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Para isso, são utilizadas as relações cinemáticas e as equações constitutivas que regem o comportamento mecânico do material que preenche o subvolume. Assim, para realizar uma análise estrutural (de deslocamentos, deformações ou tensões), faz-se necessário determinar os valores numéricos de  $10N_q$  coeficientes desconhecidos.

Recorrendo-se a considerações cinemáticas, obtém-se uma *relação matricial* que permite relacionar os coeficientes de primeira e segunda ordem com os valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos e com os coeficientes de ordem zero. Avaliando os componentes dos vetores de tensão atuantes em termos médios nas faces, encontra-se uma *segunda relação matricial* que relaciona os valores médios dos mencionados componentes com os coeficientes de primeira e segunda ordem do campo de deslocamentos. Satisfazendo-se as condições de equilíbrio de um subvolume genérico, empregando-se, para isso, os valores médios nas faces dos componentes dos vetores de tensão, chega-se a uma

*terceira relação matricial* denominada equação de equilíbrio local de um subvolume (Cavalcante et. al., 2007 e Cavalcante e Pindera, 2012).

Combinado às três relações matriciais mencionadas acima, chega-se ao sistema de equações local de um subvolume genérico. Além disso, somando-se adequadamente a contribuição de cada subvolume que constitui a malha usada na discretização da estrutura, determina-se o sistema global de equações da estrutura (Bansal e Pindera, 2003 e Cavalcante e Pindera, 2012). Os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos são determinados com o auxílio das equações que relacionam os mesmos com os valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos.

## **3.2 Montagem da Matriz Local de Rigidez**

A sistemática da Teoria de Volumes Finitos assemelha-se à de outros métodos numéricos no que se refere à necessidade técnica de converter um problema definido por um domínio contínuo regido fisicamente por equações diferenciais parciais contínuas em outro problema discreto regido por um sistema de equações lineares. Em outras palavras, a Teoria de Volumes Finitos viabiliza a análise de um problema contínuo utilizando uma abordagem baseada na subdivisão do domínio de análise em um número finito de subdomínios (subvolumes), nos quais as equações que regem o problema são convertidas em um sistema de equações lineares que relacionam grandezas cinemáticas e estáticas avaliadas em termos médios nas faces dos subvolumes. Assim, as grandezas cinemáticas e estáticas avaliadas em termos médios nas faces dos subvolumes do domínio discretizado de análise são tratadas na Teoria de Volumes Finitos como variáveis discretas do problema.

### **3.2.1 Deslocamentos Médios nas Faces**

Na presente formulação, são utilizados os valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces dos subvolumes. A Figura 3.2 exibe a representação utilizada para denotar os deslocamentos médios nas faces de um subvolume genérico, os quais são avaliados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i^{(q,1)} &= \frac{1}{b_q} \int_{-b_q/2}^{+b_q/2} u_i^{(q)}(x_2^{(q)}, -h_q/2) dx_2^{(q)} \\
\bar{u}_i^{(q,2)} &= \frac{1}{h_q} \int_{-h_q/2}^{+h_q/2} u_i^{(q)}(+b_q/2, x_3^{(q)}) dx_3^{(q)} \\
\bar{u}_i^{(q,3)} &= \frac{1}{b_q} \int_{-b_q/2}^{+b_q/2} u_i^{(q)}(x_2^{(q)}, +h_q/2) dx_2^{(q)} \\
\bar{u}_i^{(q,4)} &= \frac{1}{h_q} \int_{-h_q/2}^{+h_q/2} u_i^{(q)}(-b_q/2, x_3^{(q)}) dx_3^{(q)}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

nas quais os parâmetros  $\bar{u}_i^{(q,p)}$  ( $i = 2,3$ ) indicam os deslocamentos médios na face  $p$  de um subvolume genérico  $q$ .

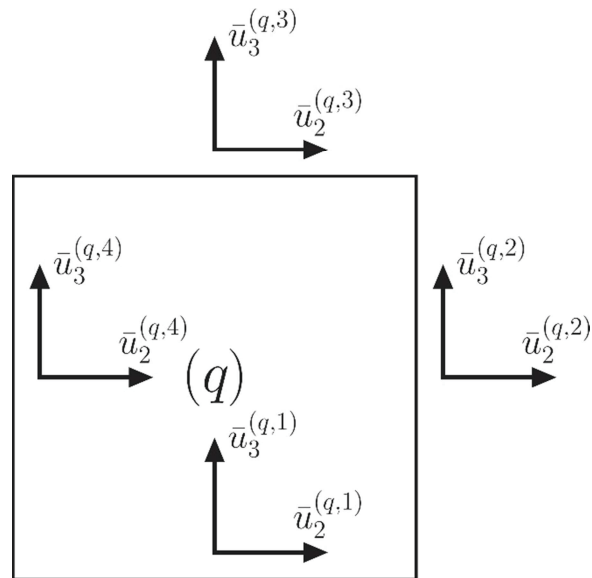


Figura 3.2 - Valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces de um subvolume genérico  $q$ .

Substituindo-se os componentes do campo de deslocamentos (Equação 3.1) nas expressões que constituem a Equação 3.2, são obtidas oito expressões para os deslocamentos médios nas faces de um subvolume em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Tais expressões podem ser organizadas matricialmente da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}^{(q)} + \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (3.3)$$

sendo  $\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = [\bar{u}_2^{(q,1)}, \bar{u}_3^{(q,1)}, \bar{u}_2^{(q,2)}, \bar{u}_3^{(q,2)}, \bar{u}_2^{(q,3)}, \bar{u}_3^{(q,3)}, \bar{u}_2^{(q,4)}, \bar{u}_3^{(q,4)}]^T$  o vetor local de deslocamentos médios nas faces,  $\mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} = [U_{2(10)}^{(q)}, U_{2(01)}^{(q)}, U_{2(20)}^{(q)}, U_{2(02)}^{(q)}, \dots, U_{3(02)}^{(q)}]^T$  o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem e  $\mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} = [U_{2(00)}^{(q)}, U_{3(00)}^{(q)}]^T$  o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero. As matrizes  $\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)}$  e  $\mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)}$  encontram-se definidas no Apêndice A. O vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem pode ser avaliado em função do vetor local de deslocamentos médios nas faces e do vetor formado pelos coeficientes de ordem zero conforme mostrado abaixo:

$$\mathbf{U}^{(q)} = \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Vetores de Tensão Médios nas Faces

De maneira análoga e fazendo uso dos mesmos argumentos discutidos acima, na formulação abordada neste trabalho, faz-se necessário avaliar os valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces dos subvolumes. Para tanto, inicialmente, devem ser determinados os componentes dos campos de deformações e tensões nos subvolumes em termos dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

Assim, introduzindo-se os componentes do campo de deslocamentos nas relações cinemáticas, mostradas abaixo, são obtidos os componentes locais do campo de deformações em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^{(q)} &= \frac{\partial u_2^{(q)}}{\partial x_2^{(q)}} \\ \varepsilon_{33}^{(q)} &= \frac{\partial u_3^{(q)}}{\partial x_3^{(q)}} \\ \varepsilon_{23}^{(q)} &= \frac{1}{2} \gamma_{23}^{(q)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2^{(q)}}{\partial x_3^{(q)}} + \frac{\partial u_3^{(q)}}{\partial x_2^{(q)}} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

nas quais  $\boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(q)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(q)}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_{23}^{(q)}$  representam os componentes do campo de deformações para a um subvolumen genérico  $q$ .

Além disso, substituindo-se os componentes do campo de deslocamentos na relação constitutiva, representada pelas equações definidas a seguir, são encontrados os componentes locais do campo de tensões em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{(q)} &= C_{22}^{(q)} \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(q)} + C_{23}^{(q)} \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(q)} = C_{22}^{(q)} \frac{\partial u_2^{(q)}}{\partial x_2^{(q)}} + C_{23}^{(q)} \frac{\partial u_3^{(q)}}{\partial x_3^{(q)}} \\ \sigma_{33}^{(q)} &= C_{32}^{(q)} \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{(q)} + C_{33}^{(q)} \boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{(q)} = C_{22}^{(q)} \frac{\partial u_2^{(q)}}{\partial x_2^{(q)}} + C_{23}^{(q)} \frac{\partial u_3^{(q)}}{\partial x_3^{(q)}} \\ \sigma_{23}^{(q)} &= C_{44}^{(q)} \boldsymbol{\gamma}_{23}^{(q)} = C_{44}^{(q)} \left( \frac{\partial u_2^{(q)}}{\partial x_3^{(q)}} + \frac{\partial u_3^{(q)}}{\partial x_2^{(q)}} \right)\end{aligned}\quad (3.6)$$

nas quais  $\sigma_{22}^{(q)}$ ,  $\sigma_{33}^{(q)}$  e  $\sigma_{23}^{(q)}$  representam os componentes do campo de tensões, e  $C_{22}^{(q)}$ ,  $C_{23}^{(q)}$ ,  $C_{32}^{(q)}$  e  $C_{33}^{(q)}$  simbolizam os coeficientes da matriz constitutiva do material que preenche um subvolumen genérico  $q$ .

De posse dos componentes do campo de tensões associadas a um subvolumen genérico, podem ser determinados os componentes dos vetores de tensão atuantes em cada uma de suas faces, utilizando-se a relação de Cauchy, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$t_i^{(q,p)} = \sigma_{ji}^{(q)} n_j^{(p)} \quad (3.7)$$

em que os valores  $n_j^{(p)}$  representam os componentes do vetor unitário normal à face  $p$ . Os vetores unitários normais a cada uma das faces de um subvolumen genérico podem ser definidos como segue:

$$\mathbf{n}^{(1)} = [0, -1]^T, \mathbf{n}^{(2)} = [+1, 0]^T, \mathbf{n}^{(3)} = [0, +1]^T \text{ e } \mathbf{n}^{(4)} = [-1, 0]^T \quad (3.8)$$

Portanto, utilizando-se a relação de Cauchy, podem ser encontradas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
t_2^{(q,1)}(x_2^{(q)}) &= -\sigma_{32}^{(q)}(x_2^{(q)}, -h_q/2) \\
t_3^{(q,1)}(x_2^{(q)}) &= -\sigma_{33}^{(q)}(x_2^{(q)}, -h_q/2) \\
t_2^{(q,2)}(x_3^{(q)}) &= +\sigma_{22}^{(q)}(+b_q/2, x_3^{(q)}) \\
t_3^{(q,2)}(x_3^{(q)}) &= +\sigma_{23}^{(q)}(+b_q/2, x_3^{(q)}) \\
t_2^{(q,3)}(x_2^{(q)}) &= +\sigma_{32}^{(q)}(x_2^{(q)}, +h_q/2) \\
t_3^{(q,3)}(x_2^{(q)}) &= +\sigma_{33}^{(q)}(x_2^{(q)}, +h_q/2) \\
t_2^{(q,4)}(x_3^{(q)}) &= -\sigma_{22}^{(q)}(-b_q/2, x_3^{(q)}) \\
t_3^{(q,4)}(x_3^{(q)}) &= -\sigma_{23}^{(q)}(-b_q/2, x_3^{(q)})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

A Figura 3.3 exibe a representação utilizada para denotar os componentes dos vetores de tensão médios atuantes nas faces de um subvolume genérico, os quais são avaliados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\bar{t}_i^{(q,1)} &= \frac{1}{b_q} \int_{-b_q/2}^{+b_q/2} t_i^{(q,1)}(x_2^{(q)}) dx_2^{(q)} \\
\bar{t}_i^{(q,2)} &= \frac{1}{h_q} \int_{-h_q/2}^{+h_q/2} t_i^{(q,2)}(x_3^{(q)}) dx_3^{(q)} \\
\bar{t}_i^{(q,3)} &= \frac{1}{b_q} \int_{-b_q/2}^{+b_q/2} t_i^{(q,3)}(x_2^{(q)}) dx_2^{(q)} \\
\bar{t}_i^{(q,4)} &= \frac{1}{h_q} \int_{-h_q/2}^{+h_q/2} t_i^{(q,4)}(x_3^{(q)}) dx_3^{(q)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

nas quais os parâmetros  $\bar{t}_i^{(q,p)}$  indicam os componentes médios do vetor de tensão atuante na face  $p$  de um subvolume genérico  $q$ .

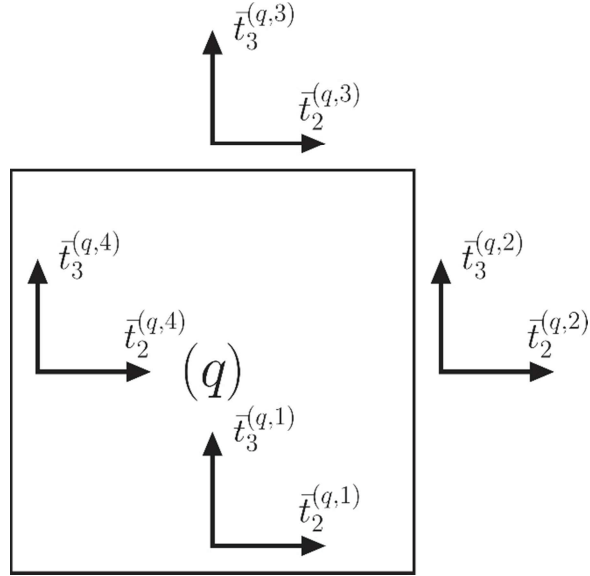


Figura 3.3 - Valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces de um subvolumen genérico  $q$ .

Substituindo-se os componentes dos vetores de tensão (Equação 3.9) nas expressões que figuram na equação anterior (Equação 3.10), são obtidas oito expressões para os componentes médios dos vetores de tensão atuantes nas faces de um subvolumen genérico em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Tais expressões podem ser organizadas matricialmente na forma:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}^{(q)} \quad (3.11)$$

em que  $\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = [\bar{t}_2^{(q,1)}, \bar{t}_3^{(q,1)}, \bar{t}_2^{(q,2)}, \bar{t}_3^{(q,2)}, \bar{t}_2^{(q,3)}, \bar{t}_3^{(q,3)}, \bar{t}_2^{(q,4)}, \bar{t}_3^{(q,4)}]^T$  representa o vetor local de tensões médias atuantes nas faces de um subvolumen. A matriz  $\mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)}$  encontra-se definida no Apêndice A.

Substituindo-se a Equação 3.4 na equação anterior (Equação 3.11), elimina-se o vetor dos coeficientes de primeira e segunda ordem que figura nesta equação, deixando-a em termos do vetor local de deslocamentos médios nas faces e do vetor formado pelos coeficientes de ordem zero.

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (3.12)$$



A Equação 3.12 pode ser reescrita de forma que figurem no vetor local de tensões médias atuantes nas faces os próprios vetores médios de tensão atuantes em cada uma das faces de um subvolume genérico, chegando-se na seguinte configuração:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q,1)} \\ \bar{\mathbf{t}}^{(q,2)} \\ \bar{\mathbf{t}}^{(q,3)} \\ \bar{\mathbf{t}}^{(q,4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,1)} \\ \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,2)} \\ \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,3)} \\ \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,4)} \end{bmatrix} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,1)} \\ \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,2)} \\ \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,3)} \\ \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,4)} \end{bmatrix} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (3.13)$$

em que

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q,p)} = \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} \quad (3.14)$$

### 3.2.3 Considerações de Equilíbrio Local no Subvolume

Na ausência de forças de corpo agindo sobre um subvolume genérico, a satisfação das condições de equilíbrio é assegurada fazendo-se o somatório de forças atuantes nas faces do subvolume igual ao vetor nulo, conforme mostrado na seguinte equação:

$$\mathbf{R}^{(q)} = \int_{S_q} \mathbf{t}^{(q)} dS_q = \mathbf{0}_{(2 \times 4)} \quad (3.15)$$

Desenvolvendo-se a integral que consta na Equação 3.15, chega-se a seguinte expressão:

$$\int_{-b_q/2}^{+b_q/2} \mathbf{t}^{(q,1)}(x_2^{(q)}) dx_2^{(q)} + \int_{-h_q/2}^{+h_q/2} \mathbf{t}^{(q,2)}(x_3^{(q)}) dx_3^{(q)} + \int_{-b_q/2}^{+b_q/2} \mathbf{t}^{(q,3)}(x_2^{(q)}) dx_2^{(q)} + \int_{-h_q/2}^{+h_q/2} \mathbf{t}^{(q,4)}(x_3^{(q)}) dx_3^{(q)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (3.16)$$

Nesta formulação, a equação de equilíbrio de um subvolume genérico (Equação 3.16) pode ser expressa em termos dos vetores médios de tensão atuantes nas faces. Assim, a equação anterior é convertida em:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q,1)} b_q + \bar{\mathbf{t}}^{(q,2)} h_q + \bar{\mathbf{t}}^{(q,3)} b_q + \bar{\mathbf{t}}^{(q,4)} h_q = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (3.17)$$

Podendo ainda ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{p=1}^4 \bar{\mathbf{t}}^{(q,p)} L_p^{(q)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (3.18)$$

em que  $L_1^{(q)} = b_q$ ,  $L_2^{(q)} = h_q$ ,  $L_3^{(q)} = b_q$  e  $L_4^{(q)} = h_q$  representam os comprimentos das faces de um subvolume genérico.

Substituindo-se os vetores médios de tensão atuantes nas faces (Equação 3.14) na equação de equilíbrio local de um subvolume (Equação 3.18), chega-se a seguinte equação:

$$\left( \sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \left( \sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (3.19)$$

Isolando-se o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero, que figura na Equação 3.19, torna-se possível expressar este vetor em termos do vetor local de deslocamentos médios nas faces, empregando-se as matrizes previamente definidas. Deve-se salientar que nas entradas destas matrizes são armazenados os parâmetros que definem as dimensões geométricas do subvolume e as propriedades mecânicas do material que o preenche. A relação matricial que relaciona o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero com o vetor local de deslocamentos médios nas faces encontra-se definida a seguir:

$$\mathbf{U}_{(00)}^{(q)} = \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (3.20)$$

em que

$$\bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} = \left( \left( \sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \right)^{-1} \left( \sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

Combinado as equações (3.4) e (3.20), chega-se ao seguinte resultado:

$$\mathbf{U}^{(q)} = \bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (3.22)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} - \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \quad (3.23)$$

Se forem conhecidos os valores numéricos dos componentes do vetor local de deslocamentos médios nas faces de um subvolume genérico, os valores dos coeficientes de

ordem zero e dos coeficientes de primeira e de segunda ordem do campo de deslocamentos do respectivo subvolume podem ser determinados pelas Equações 3.20 e 3.22, nesta ordem.

Substituindo-se a equação matricial que relaciona o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem com o vetor local de deslocamentos médios nas faces, obtém-se o sistema de equações local de um subvolume, dado por:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{K}_{(88)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (3.24)$$

em que  $\mathbf{K}_{(88)}^{(q)} = \mathbf{B}_{(88)}^{(q)} \bar{\mathbf{A}}_{(88)}^{(q)}$  representa a matriz local de rigidez de um subvolume genérico. A equação anterior (Equação 3.24) possibilita a montagem do sistema local de equações associado a cada subvolume empregado na discretização da estrutura, desde que sejam conhecidas as suas dimensões geométricas e as propriedades mecânicas do material que os constitui.

### 3.3 Montagem da Matriz Global de Rigidez

#### 3.3.1 Montagem do Sistema Global de Equações

Na presente formulação, assim como acontece no Método dos Elementos Finitos, o sistema global de equações da estrutura é obtido somando-se adequadamente a contribuição individual dos sistemas locais de equações de todos os subvolumes que constituem a malha usada na discretização da estrutura. Nesta seção, é apresentado um procedimento de montagem do sistema global de equações análogo à sistemática apresentada por Fish e Belytschko (2009), no âmbito do Método dos Elementos Finitos.

Dito de outra forma, o processo de discretização da estrutura, mencionado na primeira seção deste capítulo, consiste em uma separação virtual, ou artificial (termo utilizado por Alves Filho (2000)), da estrutura em porções menores. A discretização é realizada para que o modelo numérico se torne o mais parecido possível com a estrutura real que se deseja analisar, sobretudo no que diz respeito à geometria e à reprodução das condições de contorno do problema.

Assim, o procedimento de montagem do sistema global de equações pode ser interpretado como um recurso responsável por restabelecer as conectividades dos elementos

ou subvolumes, a depender do método numérico utilizado. Deve-se ressaltar que o mencionado procedimento é uma consequência direta das equações que resultam da imposição das condições de continuidade cinemática e estática nos nós compartilhados por elementos (no método dos elementos finitos) ou nas faces compartilhadas por subvolumes (na teoria de volumes finitos). Em ambas as abordagens citadas, devem ser utilizadas malhas suficientemente refinadas para assegurar a precisão dos resultados.

Diante do exposto, considere o caso geral de uma estrutura discretizada em  $N_q = N_\beta N_\gamma$  subvolumes. É evidente que a dimensão do sistema global de equações da estrutura dependerá diretamente do número de subvolumes que constitui a malha empregada em sua discretização. Para este problema, dispõe-se de  $4N_q$  faces locais e  $N_\beta(N_\gamma + 1) + (N_\beta + 1)N_\gamma$  faces globais. Percebe-se que  $4N_q > N_\beta(N_\gamma + 1) + (N_\beta + 1)N_\gamma$ , ou seja, o número de faces locais é superior ao número de faces globais, uma vez que a nível global as faces compartilhadas por subvolumes adjacentes são contabilizadas uma única vez.

No procedimento de montagem do sistema global de equações usado no presente trabalho, faz-se necessário a utilização de identificadores para as faces dos subvolumes, aos quais são atribuídos valores inteiros. A Figura 3.4 apresenta a notação utilizada para designar os identificadores das faces dos subvolumes. Tais identificadores podem ser enumerados de forma automática por intermédio das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 f_1^{(q)} &= \beta + (\gamma - 1)N_\beta \\
 f_2^{(q)} &= N_\beta(N_\gamma + 1) + \beta + 1 + (\gamma - 1)(N_\beta + 1) \\
 f_3^{(q)} &= \beta + \gamma N_\beta \\
 f_4^{(q)} &= N_\beta(N_\gamma + 1) + \beta + (\gamma - 1)(N_\beta + 1)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Os identificadores correspondentes às faces compartilhadas por subvolumes adjacentes são enumerados com os mesmos valores numéricos, assim:

$$\begin{aligned}
 f_1^{(\beta, \gamma)} &= f_3^{(\beta, \gamma - 1)} \\
 f_2^{(\beta, \gamma)} &= f_4^{(\beta + 1, \gamma)}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

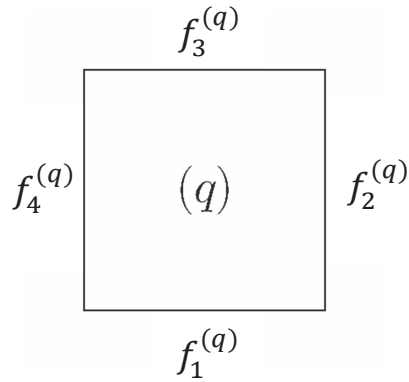


Figura 3.4 - Notação utilizada para designar os identificadores das faces de um subvolume genérico.

Na presente formulação, os subvolumes apresentam dois graus de liberdade de translação por face. Assim como foi feito para as faces dos subvolumes, no procedimento de montagem do sistema global de equações da estrutura aqui apresentado, faz-se necessário o uso de identificadores para os graus de liberdade globais. Na Figura 3.5 é apresentada a notação utilizada para designar os identificadores dos graus de liberdade globais. Além disso, é possível atribuir automaticamente valores numéricos aos mencionados identificadores pelas seguintes equações:

$$d_{2p-1}^{(q)} = 2f_p^{(q)} - 1, \quad d_{2p}^{(q)} = 2f_p^{(q)} \quad (3.27)$$

em que  $p$  representa a face, e varia de 1 a 4.

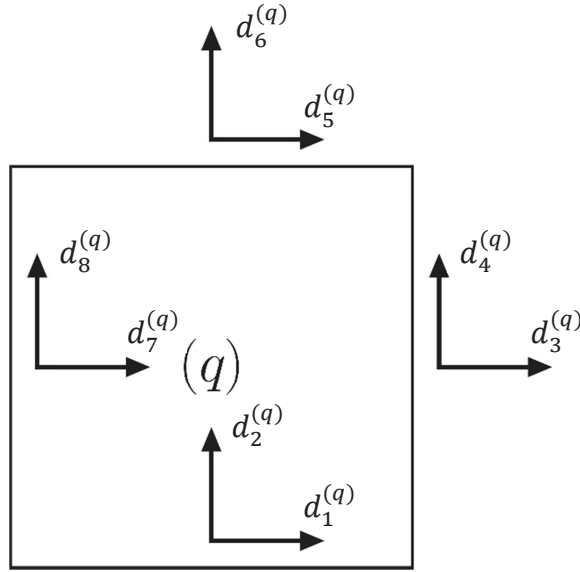


Figura 3.5 - Notação utilizada para designar os identificadores dos graus de liberdade globais associados às faces de um subvolumen genérico.

Os identificadores dos graus de liberdade globais herdam a mesma característica dos identificadores associados às faces dos subvolumes, isto é, os identificadores dos graus de liberdade globais relativos às faces compartilhadas por subvolumes vizinhos apresentam o mesmo valor numérico, assim:

$$\begin{aligned}
 d_1^{(\beta,\gamma)} &= d_5^{(\beta,\gamma-1)}, & d_2^{(\beta,\gamma)} &= d_6^{(\beta,\gamma-1)} \\
 d_3^{(\beta,\gamma)} &= d_7^{(\beta+1,\gamma)}, & d_4^{(\beta,\gamma)} &= d_8^{(\beta+1,\gamma)}
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Os graus de liberdade globais da estrutura, determinados pelas expressões que constam na Equação 3.27, posicionam os componentes dos vetores globais de deslocamentos médios nas faces e de tensões médias atuantes nas faces, os quais se encontram, respectivamente, definidos a seguir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_{(Ngbkl)} &= [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{Ngl-1}, \bar{u}_{Ngl}]^T \\
 \mathbf{T}_{(Ngbkl)} &= [\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{Ngl-1}, \bar{t}_{Ngl}]^T
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

em que  $NgI = 2[N_\beta(N_\gamma + 1) + (N_\beta + 1)N_\gamma]$  representa o número de graus de liberdade globais associados à estrutura.

Uma vez que para cada deslocamento global existem um (para as faces localizadas no contorno da estrutura) ou dois (para as faces localizadas no interior da estrutura) deslocamentos locais correspondentes, torna-se possível escrever o vetor local de deslocamentos médios nas faces de um subvolume genérico em função do vetor global de deslocamentos médios nas faces, conforme mostrado abaixo:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = \mathbf{L}_{(8 \times NgI)}^{(q)} \mathbf{U}_{(NgI \times 1)} \quad (3.30)$$

na qual  $\mathbf{L}_{(8 \times NgI)}^{(q)}$  representa a matriz de incidência ou compatibilidade cinemática de um subvolume genérico, em sua maior parte composta por zeros, apresentando elementos unitários posicionados segundo os graus de liberdade globais definidos na Equação (3.27). A Equação (3.30) pressupõe a satisfação das seguintes condições de compatibilidade cinemática em termos de valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^{(\beta, \gamma, 1)} &= \bar{u}_2^{(\beta, \gamma-1, 3)}, \quad \bar{u}_3^{(\beta, \gamma, 1)} = \bar{u}_3^{(\beta, \gamma-1, 3)}; \\ \bar{u}_2^{(\beta, \gamma, 2)} &= \bar{u}_2^{(\beta+1, \gamma, 4)}, \quad \bar{u}_3^{(\beta, \gamma, 2)} = \bar{u}_3^{(\beta+1, \gamma, 4)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

O vetor global de tensões médias nas faces pode ser montado por meio da contribuição dos vetores locais de tensões médias atuantes nas faces dos subvolumes que constituem a malha utilizada na discretização da estrutura, como ilustra a seguinte equação:

$$\mathbf{T}_{(NgI \times 1)} = \sum_{q=1}^{N_q} \left( \mathbf{L}_{(8 \times NgI)}^{(q)} \right)^T \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \quad (3.32)$$

na qual  $\left( \mathbf{L}_{(8 \times NgI)}^{(q)} \right)^T$  representa a matriz de incidência ou compatibilidade estática de um subvolume genérico. A Equação (3.32) pressupõe a satisfação das seguintes condições de compatibilidade estática em termos de valores médios nas faces dos componentes do campo de tensões:

$$\begin{aligned}
\bar{t}_2^{(\beta,\gamma,1)} + \bar{t}_2^{(\beta,\gamma-1,3)} = 0 \therefore \bar{\sigma}_{32}^{(\beta,\gamma,1)} = \bar{\sigma}_{32}^{(\beta,\gamma-1,3)}, \quad \bar{t}_3^{(\beta,\gamma,1)} + \bar{t}_3^{(\beta,\gamma-1,3)} = 0 \therefore \bar{\sigma}_{33}^{(\beta,\gamma,1)} = \bar{\sigma}_{33}^{(\beta,\gamma-1,3)}; \\
\bar{t}_2^{(\beta,\gamma,2)} + \bar{t}_2^{(\beta+1,\gamma,4)} = 0 \therefore \bar{\sigma}_{22}^{(\beta,\gamma,2)} = \bar{\sigma}_{22}^{(\beta+1,\gamma,4)}, \quad \bar{t}_3^{(\beta,\gamma,2)} + \bar{t}_3^{(\beta+1,\gamma,4)} = 0 \therefore \bar{\sigma}_{23}^{(\beta,\gamma,2)} = \bar{\sigma}_{23}^{(\beta+1,\gamma,4)}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

As equações (3.30) e (3.32) também levam em consideração a satisfação das condições de contorno, expressas em termos de deslocamentos ou de tensões médias nas faces dos subvolumes localizados nas fronteiras do domínio de análise, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2^{(\beta,1,1)} = \mathbf{U}(d_1^{(\beta,1)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_2^{(\beta,1,1)} = \mathbf{T}(d_1^{(\beta,1)}), \\
\bar{u}_3^{(\beta,1,1)} = \mathbf{U}(d_2^{(\beta,1)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_3^{(\beta,1,1)} = \mathbf{T}(d_2^{(\beta,1)}), \\
\bar{u}_2^{(\beta,N_\gamma,3)} = \mathbf{U}(d_5^{(\beta,N_\gamma)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_2^{(\beta,N_\gamma,3)} = \mathbf{T}(d_5^{(\beta,N_\gamma)}), \\
\bar{u}_3^{(\beta,N_\gamma,3)} = \mathbf{U}(d_6^{(\beta,N_\gamma)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_3^{(\beta,N_\gamma,3)} = \mathbf{T}(d_6^{(\beta,N_\gamma)}), \\
\bar{u}_2^{(1,\gamma,4)} = \mathbf{U}(d_7^{(1,\gamma)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_2^{(1,\gamma,4)} = \mathbf{T}(d_7^{(1,\gamma)}), \\
\bar{u}_3^{(1,\gamma,4)} = \mathbf{U}(d_8^{(1,\gamma)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_3^{(1,\gamma,4)} = \mathbf{T}(d_8^{(1,\gamma)}), \\
\bar{u}_2^{(N_\beta,\gamma,2)} = \mathbf{U}(d_3^{(N_\beta,\gamma)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_2^{(N_\beta,\gamma,2)} = \mathbf{T}(d_3^{(N_\beta,\gamma)}), \\
\bar{u}_3^{(N_\beta,\gamma,2)} = \mathbf{U}(d_4^{(N_\beta,\gamma)}) \quad \text{ou} \quad \bar{t}_3^{(N_\beta,\gamma,2)} = \mathbf{T}(d_4^{(N_\beta,\gamma)}).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Substituindo a Equação (3.30) na Equação (3.24), torna-se possível expressar o vetor de tensões médias nas faces de um subvolume genérico em função do vetor global de deslocamentos médios da estrutura, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{U}_{(N_{gl})} \tag{3.35}$$

Finalmente, introduzindo-se a equação anterior (Equação 3.35) na Equação (3.32), obtém-se o sistema global de equações da estrutura, dado por:



$$\mathbf{T}_{(Ng \times 1)} = \mathbf{K}_{(Ng \times Ng)} \mathbf{U}_{(Ng \times 1)} \quad (3.36)$$

sendo  $\mathbf{K} = \sum_{q=1}^{N_q} \left( \mathbf{L}_{(8 \times Ng)}^{(q)} \right)^T \mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times Ng)}^{(q)}$  a matriz de rigidez global da estrutura.

Se forem conhecidos os valores numéricos dos componentes do vetor global de deslocamentos médios nas faces, os valores dos coeficientes de primeira e segunda ordem e dos coeficientes de ordem zero, que figuram nas expressões que definem os componentes do campo de deslocamentos de um subvolume genérico, podem ser determinados, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} &= \overline{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times Ng)}^{(q)} \mathbf{U}_{(Ng \times 1)} \\ \mathbf{U}_{(00)}^{(q)} &= \overline{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times Ng)}^{(q)} \mathbf{U}_{(Ng \times 1)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3.3.2 Solução do Sistema Global de Equações

O sistema global de equações da estrutura pode ser organizado na forma mostrada abaixo, após serem inseridas as condições de contorno no vetor global de deslocamentos médios nas faces e no vetor global de tensões médias nas faces:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T}_c \\ \mathbf{T}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cd} & \mathbf{K}_{cc} \\ \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_c \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

em que  $\mathbf{T}_c$  e  $\mathbf{T}_d$  representam os vetores de tensões conhecidas e desconhecidas, respectivamente, e  $\mathbf{U}_c$  e  $\mathbf{U}_d$  simbolizam os vetores de deslocamentos conhecidos e desconhecidos, nesta ordem. As submatrizes que figuram no interior da matriz global de rigidez são designadas abaixo:

$\mathbf{K}_{cd}$  - submatriz de rigidez que associa os deslocamentos desconhecidos às tensões conhecidas.

$\mathbf{K}_{cc}$  - submatriz de rigidez que associa os deslocamentos conhecidos às tensões conhecidas.

$\mathbf{K}_{dd}$  - submatriz de rigidez que associa os deslocamentos desconhecidos às tensões desconhecidas.

$\mathbf{K}_{dc}$  - submatriz de rigidez que associa os deslocamentos conhecidos às tensões desconhecidas.

Assim, os vetores de deslocamentos e de tensões desconhecidas podem ser determinados, respectivamente, pelas equações apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_d &= (\mathbf{K}_{cd})^{-1} \mathbf{T}_c - (\mathbf{K}_{cd})^{-1} \mathbf{K}_{cc} \mathbf{U}_c \\ \mathbf{T}_d &= \mathbf{K}_{dd} \mathbf{U}_d - \mathbf{K}_{dc} \mathbf{U}_c\end{aligned}\tag{3.39}$$

## 4 Teoria de Volumes Finitos em Coordenadas Polares

### 4.1 Introdução

A Figura 4.1 mostra uma estrutura circular subdividida em  $N_q = N_\beta N_\gamma$  subdomínios retangulares (retângulos polares) denominados subvolumes. Os valores  $N_\beta$  e  $N_\gamma$  representam o número de subdivisões correspondentes aos intervalos  $R_I \leq r \leq R_I + E$  e  $0 \leq \theta \leq A$ , nesta ordem. Cada subvolume pode ser designado por um único número inteiro  $1 \leq q \leq N_q$  ou por um par de números inteiros  $\beta = 1, \dots, N_\beta$  e  $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$ , sendo que o primeiro parâmetro mencionado é dado em função destes dois últimos. Por exemplo, o subvolume  $(\beta, \gamma)$  é aquele que ocupa a posição  $\beta$  na direção radial e a posição  $\gamma$  na direção circunferencial, ou  $q = \beta + (\gamma - 1)N_\beta$  na estrutura discretizada. Além do mais, as ações (forças de superfície) e deslocamentos impostos à estrutura são aplicados nas faces externas dos subvolumes localizados na periferia do modelo estrutural em termos de valores médios destas grandezas estáticas e cinemáticas.

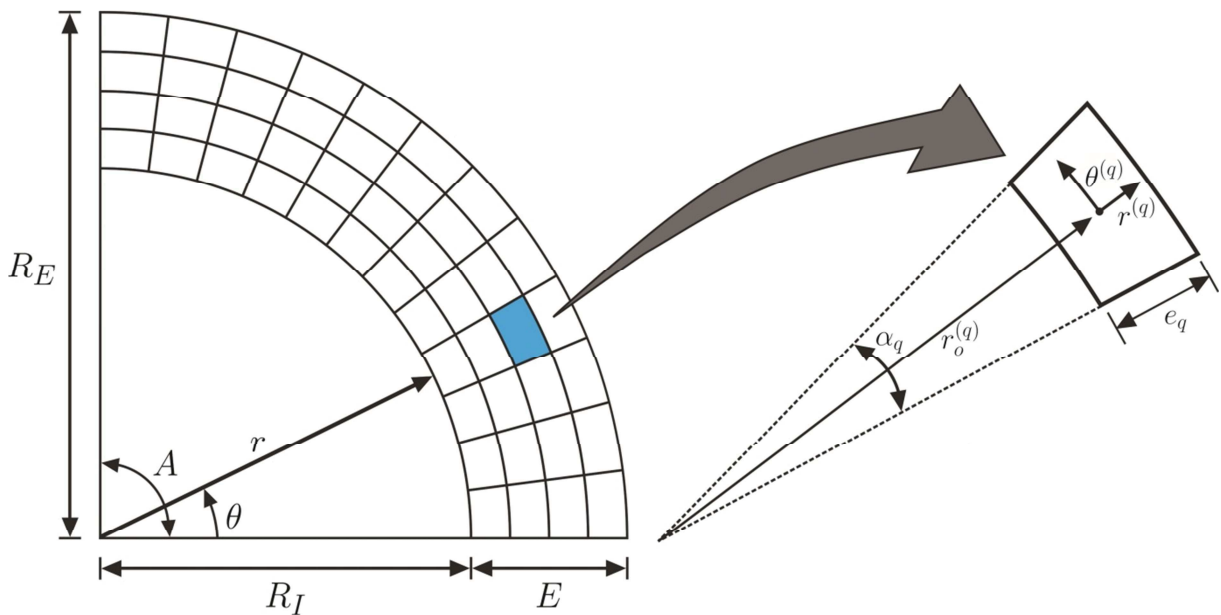


Figura 4.1- Estrutura discretizada em subvolumes retangulares (retângulos polares) e sistema de coordenadas locais de um subvolume genérico.

A exemplo do que acontece na formulação em coordenadas cartesianas da Teoria de Volumes Finitos apresentada por Bansal e Pindera (2003), na presente formulação, são empregados polinômios de segundo grau expressos em coordenadas locais (polares) para descrever os componentes do campo de deslocamentos em cada subvolume (Cavalcante e Marques, 2005). Tais polinômios são dados por:

$$u_r^{(q)} = U_{2(00)}^{(q)} + r^{(q)} U_{2(10)}^{(q)} + \theta^{(q)} U_{2(01)}^{(q)} + \frac{1}{2} \left( 3(r^{(q)})^2 - \frac{e_q^2}{4} \right) U_{2(20)}^{(q)} + \frac{1}{2} \left( 3(\theta^{(q)})^2 - \frac{\alpha_q^2}{4} \right) U_{2(02)}^{(q)} \quad (4.1)$$

$$u_\theta^{(q)} = U_{3(00)}^{(q)} + r^{(q)} U_{3(10)}^{(q)} + \theta^{(q)} U_{3(01)}^{(q)} + \frac{1}{2} \left( 3(r^{(q)})^2 - \frac{e_q^2}{4} \right) U_{3(20)}^{(q)} + \frac{1}{2} \left( 3(\theta^{(q)})^2 - \frac{\alpha_q^2}{4} \right) U_{3(02)}^{(q)}$$

nas quais  $e_q$  e  $\alpha_q$  representam a espessura e o ângulo de abertura de um subvolume genérico e os valores  $U_{i(mm)}^{(q)}$  simbolizam os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

Conforme apresentado no capítulo anterior, cada subvolume possui dez coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos a serem determinados, sendo dois coeficientes de ordem zero (ou termos independentes), quatro coeficientes de primeira ordem (ou lineares) e quatro coeficientes de segunda ordem (ou quadráticos). Os componentes dos campos de deformações e tensões de um subvolume genérico podem ser avaliados em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Para isso, são utilizadas as relações cinemáticas e as equações constitutivas que regem o comportamento mecânico do material que preenche o subvolume. Assim, para realizar uma análise estrutural (de deslocamentos, de deformações ou de tensões), faz-se necessário determinar os valores numéricos destes coeficientes.

Recorrendo-se a considerações cinemáticas, obtém-se uma *relação matricial* que permite relacionar os coeficientes de primeira e segunda ordem com os valores médios nas faces das componentes do campo de deslocamentos e com os coeficientes de ordem zero. Avaliando as componentes dos vetores de tensão em termos médios nas faces, encontra-se uma *segunda relação matricial* que relaciona os valores médios das mencionadas componentes com os coeficientes de primeira e segunda ordem do campo de deslocamentos. Satisfazendo-se as condições de equilíbrio do subvolume em termos médios no subvolume,

chega-se a uma *terceira relação matricial* denominada equação de equilíbrio local de um subvoluma (Cavalcante e Pindera, 2003; Cavalcante e Marques, 2005 e Cavalcante, 2006).

Combinam-se as três relações matriciais mencionadas anteriormente e chega-se ao sistema de equações local de um subvoluma genérico. Além disso, soma-se adequadamente a contribuição de cada subvoluma que constitui a malha usada na discretização da estrutura e determina-se o sistema global de equações da estrutura. Os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos são determinados com o auxílio das equações que relacionam os mesmos com os valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos.

## 4.2 Montagem da Matriz Local de Rigidez

### 4.2.1 Deslocamentos Médios nas Faces

Assim como ocorre na formulação em coordenadas cartesianas da Teoria de Volumes Finitos, mostrada no capítulo anterior, na formulação em coordenadas polares, também se faz necessário avaliar os valores médios nas faces dos componentes do campo de deslocamentos. Na Figura 4.2 estão ilustrados os deslocamentos médios nas faces de um subvoluma genérico  $q$ , os quais podem ser calculados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i^{(q,1)} &= \frac{1}{\alpha_q (r_o^{(q)} - e_q/2)} \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} u_i^{(q)}(-e_q/2, \theta^{(q)}) (r_o^{(q)} - e_q/2) d\theta^{(q)} \\
 \bar{u}_i^{(q,2)} &= \frac{1}{e_q} \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} u_i^{(q)}(r^{(q)}, -\alpha_q/2) dr^{(q)} \\
 \bar{u}_i^{(q,3)} &= \frac{1}{\alpha_q (r_o^{(q)} + e_q/2)} \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} u_i^{(q)}(+e_q/2, \theta^{(q)}) (r_o^{(q)} + e_q/2) d\theta^{(q)} \\
 \bar{u}_i^{(q,2)} &= \frac{1}{e_q} \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} u_i^{(q)}(r^{(q)}, +\alpha_q/2) dr^{(q)}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

em que os valores  $\bar{u}_i^{(q,p)}$  ( $i = r, \theta$ ) representam os deslocamentos médios na face  $p$  de um subvoluma genérico  $q$ .

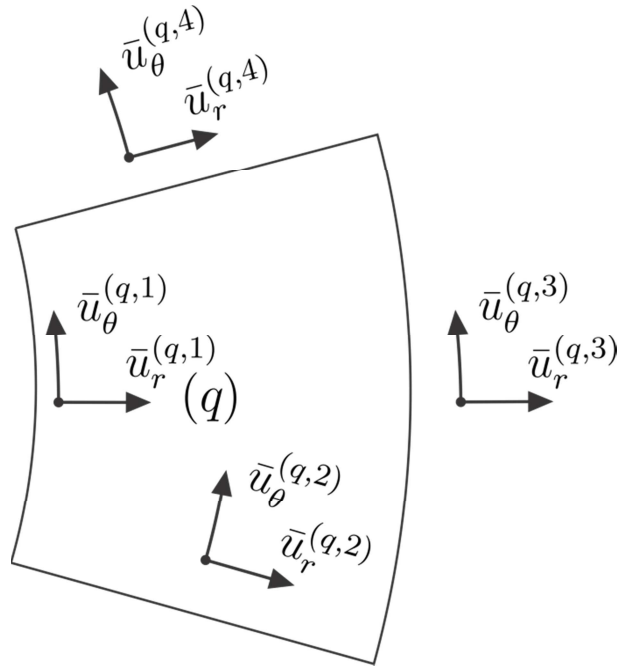


Figura 4.2 - Valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces de um subvoluma genérico  $q$ .

Substituindo-se os componentes do campo de deslocamentos (Equação 4.1) nas expressões anteriores que figuram na Equação (4.2), são obtidas oito expressões para os deslocamentos médios nas faces em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Estas últimas expressões podem ser organizadas matricialmente da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} + \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} \quad (4.3)$$

sendo  $\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = [\bar{u}_r^{(q,1)}, \bar{u}_\theta^{(q,1)}, \bar{u}_r^{(q,2)}, \bar{u}_\theta^{(q,2)}, \bar{u}_r^{(q,3)}, \bar{u}_\theta^{(q,3)}, \bar{u}_r^{(q,4)}, \bar{u}_\theta^{(q,4)}]^T$  o vetor local de deslocamentos médios nas faces,  $\mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} = [U_{2(10)}^{(q)}, U_{2(01)}^{(q)}, U_{2(20)}^{(q)}, U_{2(02)}^{(q)}, \dots, U_{3(02)}^{(q)}]^T$  o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem e  $\mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} = [U_{2(00)}^{(q)}, U_{3(00)}^{(q)}]^T$  o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero. As matrizes  $\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)}$  e  $\mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)}$  encontram-se definidas no Apêndice B.

Conforme mostrado no capítulo anterior, o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem pode ser avaliado em função do vetor local de deslocamentos médios nas faces e do vetor formado pelos coeficientes de ordem zero, conforme mostrado abaixo:

$$\mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} = \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Vetores de Tensão Médios nas Faces

Na formulação elaborada no presente trabalho, faz-se necessário avaliar os valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces dos subvolumes. Para isso, inicialmente, devem ser determinados os componentes dos campos de deformações e tensões em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

Assim, substituindo-se os componentes do campo de deslocamentos nas relações cinemáticas mostradas abaixo, são obtidos os componentes locais do campo de deformações em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(q)} &= \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial r^{(q)}} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{u_r^{(q)}}{r} \\ \gamma_{r\theta}^{(q)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial r^{(q)}} - \frac{u_\theta^{(q)}}{r} \end{aligned} \quad (4.5)$$

nas quais  $\varepsilon_{rr}^{(q)}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}^{(q)}$  e  $\gamma_{r\theta}^{(q)}$  representam a deformação radial, circunferencial e angular no plano polar, respectivamente, e  $r = r_o^{(q)} + r^{(q)}$  simboliza a distância radial medida a partir da origem do sistema de coordenadas globais  $(r, \theta)$  a um ponto arbitrário no interior do subvolume genérico  $q$ .

Além disto, substituindo-se os componentes do campo de deformações na relação constitutiva, empregando-se as relações cinemáticas definidas acima, são encontrados os componentes locais do campo de tensões em termos dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(q)} &= C_{rr}^{(q)} \varepsilon_{rr}^{(q)} + C_{r\theta}^{(q)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} = C_{rr}^{(q)} \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial r^{(q)}} + C_{r\theta}^{(q)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{u_r^{(q)}}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(q)} &= C_{r\theta}^{(q)} \varepsilon_{rr}^{(q)} + C_{rr}^{(q)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(q)} = C_{r\theta}^{(q)} \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial r^{(q)}} + C_{rr}^{(q)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{u_r^{(q)}}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(q)} = G^{(q)} \gamma_{r\theta}^{(q)} = G^{(q)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial r^{(q)}} - \frac{u_\theta^{(q)}}{r} \right)$$

nas quais  $\sigma_{rr}^{(q)}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^{(q)}$  e  $\sigma_{r\theta}^{(q)}$  representam os componentes radial, circunferencial e cisalhante do campo de tensões, e  $C_{rr}^{(q)}$ ,  $C_{r\theta}^{(q)}$  e  $G^{(q)}$  simbolizam os coeficientes da matriz constitutiva do material que preenche o subvolume genérico  $q$ .

De posse dos componentes do campo de tensões associadas a um subvolume genérico, podem ser determinados os componentes dos vetores de tensão atuantes em cada uma de suas faces, utilizando-se a relação de Cauchy, a qual pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} t_r \\ t_\theta \end{Bmatrix}^{(q,p)} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}^{(q)} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_\theta \end{Bmatrix}^{(p)} \quad (4.7)$$

em que os valores  $n_j^{(p)}$  representam os componentes do vetor unitário normal à face  $p$ . Os vetores unitários normais a cada uma das faces de um subvolume genérico podem ser definidos como segue:

$$\mathbf{n}^{(1)} = [-1, 0]^T, \mathbf{n}^{(2)} = [0, -1]^T, \mathbf{n}^{(3)} = [+1, 0]^T \text{ e } \mathbf{n}^{(4)} = [0, +1]^T \quad (4.8)$$

Portanto, utilizando-se a relação de Cauchy, podem ser encontradas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} t_r^{(q,1)}(\theta^{(q)}) &= -\sigma_{rr}^{(q)}(-e_q/2, \theta^{(q)}) \\ t_\theta^{(q,1)}(\theta^{(q)}) &= -\sigma_{r\theta}^{(q)}(-e_q/2, \theta^{(q)}) \\ t_r^{(q,2)}(r^{(q)}) &= -\sigma_{r\theta}^{(q)}(r^{(q)}, -\alpha_q/2) \\ t_\theta^{(q,2)}(r^{(q)}) &= -\sigma_{\theta\theta}^{(q)}(r^{(q)}, -\alpha_q/2) \\ t_r^{(q,3)}(\theta^{(q)}) &= +\sigma_{rr}^{(q)}(+e_q/2, \theta^{(q)}) \\ t_\theta^{(q,3)}(\theta^{(q)}) &= +\sigma_{r\theta}^{(q)}(+e_q/2, \theta^{(q)}) \\ t_r^{(q,4)}(r^{(q)}) &= +\sigma_{r\theta}^{(q)}(r^{(q)}, +\alpha_q/2) \\ t_\theta^{(q,4)}(r^{(q)}) &= +\sigma_{\theta\theta}^{(q)}(r^{(q)}, +\alpha_q/2) \end{aligned} \quad (4.9)$$



A Figura 4.2 mostra a representação utilizada para denotar os componentes médios dos vetores de tensão atuantes nas faces de um subvolume genérico  $q$ , os quais podem ser avaliados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\bar{t}_i^{(q,1)} &= \frac{1}{\alpha_q (r_o^{(q)} - e_q/2)} \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} t_i^{(q,1)}(\theta^{(q)}) (r_o^{(q)} - e_q/2) d\theta^{(q)} \\ \bar{t}_i^{(q,2)} &= \frac{1}{e_q} \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} t_i^{(q,2)}(r^{(q)}) dr^{(q)} \\ \bar{t}_i^{(q,3)} &= \frac{1}{\alpha_q (r_o^{(q)} + e_q/2)} \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} t_i^{(q,3)}(\theta^{(q)}) (r_o^{(q)} + e_q/2) d\theta^{(q)} \\ \bar{t}_i^{(q,4)} &= \frac{1}{e_q} \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} t_i^{(q,4)}(r^{(q)}) dr^{(q)}\end{aligned}\tag{4.10}$$

em que  $\bar{t}_i^{(q,p)}$  ( $i = r, \theta$ ) representa os valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces de um subvolume genérico  $q$ .

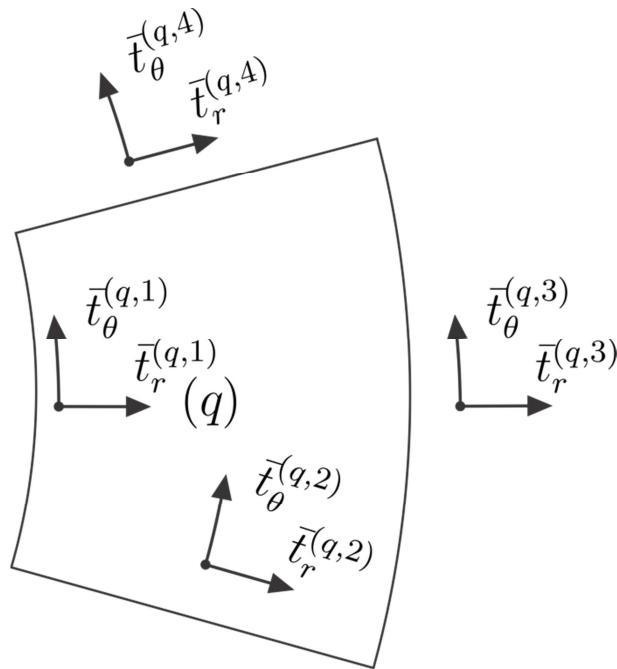


Figura 4.3 - Valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces de um subvolume genérico  $q$ .

Substituindo-se as expressões presentes na Equação (4.9) naquelas apresentadas na Equação (4.10), são obtidas oito expressões para os componentes médios dos vetores de

tensão em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Estas expressões podem ser organizadas matricialmente da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} + \mathbf{b}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} \quad (4.11)$$

em que  $\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = [\bar{t}_r^{(q,1)}, \bar{t}_\theta^{(q,1)}, \bar{t}_r^{(q,2)}, \bar{t}_\theta^{(q,2)}, \bar{t}_r^{(q,3)}, \bar{t}_\theta^{(q,3)}, \bar{t}_r^{(q,4)}, \bar{t}_\theta^{(q,4)}]^T$  representa o vetor local de tensões médias atuantes nas faces de um subvolume. As matrizes  $\mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)}$  e  $\mathbf{b}_{(8 \times 2)}^{(q)}$  encontram-se definidas no Apêndice B.

Cabe salientar que, na presente formulação, os valores médios dos componentes dos vetores de tensão atuantes nas faces são dados tanto em função dos coeficientes de primeira e segunda ordem quanto dos coeficientes de ordem zero do campo de deslocamentos. Diferentemente do que acontece na versão em coordenadas cartesianas da Teoria de Volumes Finitos, na qual os valores médios dos vetores de tensão atuantes nas faces do subvolume são dados em função somente dos coeficientes de primeira e segunda ordem do campo de deslocamentos (no entanto, como os coeficientes de primeira e segunda ordem dependem dos coeficientes de ordem zero, as referidas variáveis estáticas dependem de forma indireta destes coeficientes). Esta diferença justifica-se devido ao fato de que nas relações cinemáticas, expressas em coordenadas polares, figuram não só as derivadas de primeira ordem como também as derivadas de ordem zero dos componentes do campo de deslocamentos.

### 4.2.3 Considerações de Equilíbrio Local do Subvolume

Na presente formulação, opta-se em impor as condições de equilíbrio de um subvolume genérico por meio da satisfação das equações diferenciais de equilíbrio, em vez de impor o equilíbrio fazendo o somatório de forças agindo sobre as faces do mesmo igual ao vetor nulo.

Esta decisão se deve ao fato de que, para calcular os componentes radial e circunferencial das forças resultantes agindo sobre as faces curvas de um subvolume genérico, faz-se necessário avaliar integrais cujos integrandos são formados pelo produto de duas funções que dependem da variável  $\theta^{(q)}$ . Os resultados destas integrais não podem ser escritos como múltiplos escalares dos vetores de tensão médios atuantes nas faces curvas, como mostrado no Apêndice C.

Portanto, na ausência de forças de corpo, as equações diferenciais de equilíbrio de um subvolumen genérico, são definidas conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(q)}}{\partial r^{(q)}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(q)} - \sigma_{\theta\theta}^{(q)}) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(q)}}{\partial r^{(q)}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(q)}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Substituindo-se os componentes do campo de tensões expressas em termos dos componentes do campo de deslocamentos (Equação 4.6) nas equações diferenciais de equilíbrio de um subvolumen genérico (Equação 4.12), tem-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} &C_{rr}^{(q)} \frac{\partial}{\partial r^{(q)}} \left( \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial r^{(q)}} \right) + C_{r\theta}^{(q)} \left( \frac{\partial}{\partial r^{(q)}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{u_r^{(q)}}{r} \right) \right) \\ &+ C_{44}^{(q)} \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta^{(q)}} \left( \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} \right) + \frac{\partial^2 u_\theta^{(q)}}{\partial r^{(q)} \partial \theta^{(q)}} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \left( (C_{rr}^{(q)} - C_{\theta\theta}^{(q)}) \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial r^{(q)}} + (C_{r\theta}^{(q)} - C_{rr}^{(q)}) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} + \frac{u_r^{(q)}}{r} \right) \right) = 0 \\ &C_{44}^{(q)} \frac{\partial}{\partial r^{(q)}} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} \right) + \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial r^{(q)}} - \frac{u_\theta^{(q)}}{r} \right) \\ &+ \frac{1}{r} \left( C_{r\theta}^{(q)} \frac{\partial^2 u_r^{(q)}}{\partial r^{(q)} \partial \theta^{(q)}} + C_{rr}^{(q)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta^{(q)}} \left( \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} \right) \right) \\ &+ \frac{2C_{44}^{(q)}}{r} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial \theta^{(q)}} \right) + \frac{\partial u_\theta^{(q)}}{\partial r^{(q)}} - \frac{u_\theta^{(q)}}{r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

As equações (4.12) e (4.13) podem ser interpretadas como *equações de equilíbrio local* de um subvolumen genérico expressas em função dos componentes do campo de tensões, no primeiro caso, e em termos dos componentes do campo de deslocamentos, no segundo caso. Introduzindo-se os componentes do campo de deslocamentos na Equação 4.13, torna-se possível expressar as mencionadas equações em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Além disso, avaliando-se as equações resultantes em termos médios no subvolumen, são encontradas duas equações que podem ser organizadas matricialmente como segue:

$$\Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} + \Theta_{(2 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (4.14)$$

em que as matrizes  $\Phi_{(2 \times 8)}^{(q)}$  e  $\Theta_{(2 \times 2)}^{(q)}$  estão definidas no Apêndice B. Empregando-se a expressão que relaciona o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem do campo de deslocamentos com o vetor local de deslocamentos médios nas faces e o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero (Equação 4.4), chega-se a seguinte expressão:

$$\Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} + \Theta_{(2 \times 2)}^{(q)} \mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (4.15)$$

Explicitando-se o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero, presente na Equação (4.15), torna-se possível expressar este vetor em termos do vetor local de deslocamentos médios nas faces. Deve-se ressaltar que, nas entradas das matrizes presentes na Equação (4.15), são armazenados os parâmetros que definem as dimensões geométricas do subvolume e as propriedades mecânicas do material que o preenche. A relação matricial, que permite avaliar o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero a partir do vetor local de deslocamentos médios nas faces, encontra-se definida a seguir:

$$\mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} = \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (4.16)$$

em que

$$\bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} = \left( \Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} - \Theta_{(2 \times 2)}^{(q)} \right)^{-1} \Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \quad (4.17)$$

Combinando-se as equações (4.16) e (4.4), obtém-se uma relação matricial na qual o vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem é avaliado em função do vetor local de deslocamentos médios nas faces, resultando em

$$\mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} = \bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (4.18)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} - \left( \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \quad (4.19)$$

Se forem conhecidos os valores numéricos dos componentes do vetor local de deslocamentos médios nas faces de um subvolume genérico, os valores dos coeficientes de

ordem zero e dos coeficientes de primeira e segunda ordem do campo de deslocamentos do respectivo subvolume podem ser determinados pelas Equações (4.16) e (4.18), respectivamente.

Substituindo-se as equações matriciais (4.16) e (4.18) na Equação (4.11), obtém-se o sistema de equações local de um subvolume genérico, dado por:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{K}_{(88)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (4.20)$$

em que  $\mathbf{K}_{(88)}^{(q)} = \mathbf{B}_{(88)}^{(q)} \bar{\mathbf{A}}_{(88)}^{(q)} + \mathbf{b}_{(82)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(28)}^{(q)}$  representa a matriz local de rigidez de um subvolume genérico. A Equação (4.20) viabiliza a montagem do sistema local de equações associado a cada subvolume empregado na discretização da estrutura, desde que sejam conhecidas as dimensões geométricas e as propriedades dos materiais que constituem os subvolumes em questão.

### 4.3 Montagem da Matriz Global de Rigidez

#### 4.3.1 Montagem do Sistema Global de Equações

Conforme apresentado anteriormente, o procedimento de montagem do sistema global de equações é consequência direta da imposição das condições de continuidade cinemática e estática, em termos médios nas faces compartilhadas por subvolumes vizinhos dos componentes do campo de deslocamentos e de tensões, respectivamente. O procedimento de montagem do sistema global de equações, usado na formulação em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos, é exatamente o mesmo apresentado na Seção 3.1.3 para a formulação em coordenadas cartesianas, a não ser por uma pequena alteração nas expressões que produzem os valores numéricos dos identificadores das faces.

Apresenta-se na Figura 4.4 a notação utilizada para denotar os identificadores das faces de um subvolume genérico. Estes identificadores podem ser determinados de forma automática pelas seguintes equações:

$$f_1^{(q)} = \gamma + (\beta - 1)N_\beta \quad (4.21)$$

$$f_2^{(q)} = N_\beta(N_\gamma + 1) + \gamma + 1 + (\beta - 1)(N_\beta + 1)$$

$$f_3^{(q)} = \gamma + \beta N_\beta$$

$$f_4^{(q)} = N_\beta(N_\gamma + 1) + \gamma + (\beta - 1)(N_\beta + 1)$$

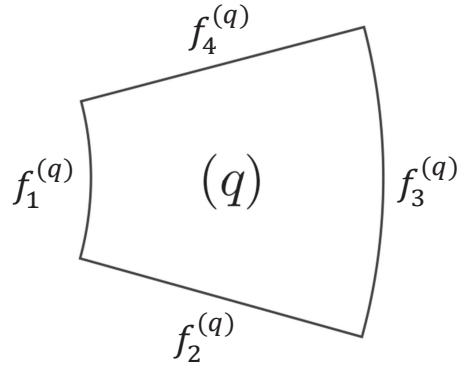


Figura 4.4 - Notação utilizada para designar os identificadores das faces de um subvolume genérico.

Seguindo o que foi apresentado na Seção 3.1.3, as expressões que figuram na Equação (4.21) possuem a mesma característica daquelas mostradas na Equação (3.26), ou seja, os identificadores correspondentes às faces compartilhadas por subvolumes adjacentes apresentam os mesmos valores numéricos.

Além disso, conforme mostrado anteriormente, na presente formulação, faz-se necessário o uso de identificadores para os graus de liberdade globais. Na Figura 4.5 é apresentada a notação utilizada para designar os identificadores dos graus de liberdade globais. Além disso, é possível atribuir automaticamente valores numéricos para os mencionados identificadores utilizando as expressões que constam na Equação (3.27). Lembrando-se de que os valores numéricos dos identificadores dos graus de liberdade globais servem para posicionar os componentes dos vetores globais de deslocamentos médios e de tensões médias nas faces da estrutura discretizada.

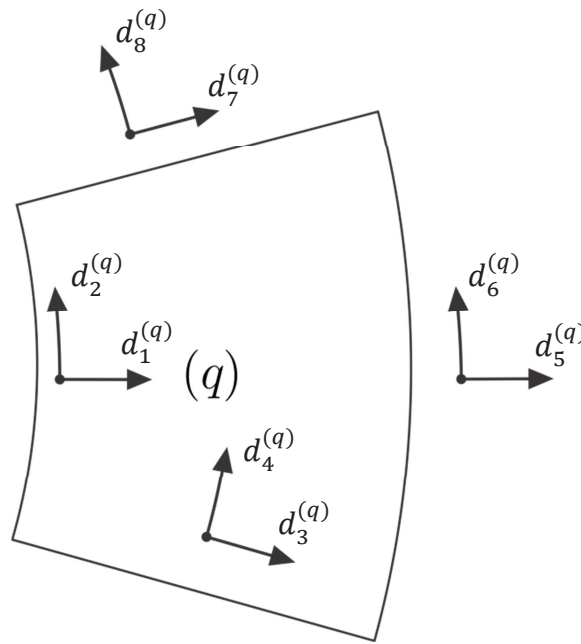


Figura 4.5 - Notação utilizada para designar os identificadores dos graus de liberdade globais associados às faces de um subvolume genérico  $q$ .

Se uma estrutura é subdividida em  $N_q$  subvolumes, considerando-se dois graus de liberdade por face, chega-se a um total de  $N_{gl} = 2N_\beta(N_\gamma + 1) + 2(N_\beta + 1)N_\gamma$  graus de liberdade globais associados à estrutura. Com base nas condições de compatibilidade cinemática e estática, as quais são satisfeitas em termos médios nas interfaces compartilhadas por subvolumes vizinhos, chega-se a seguinte equação:

$$\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} = \mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} \quad (4.22)$$

em que  $\mathbf{U} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{N_{gl}}]^T$  e  $\mathbf{T} = [\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{N_{gl}}]^T$  são os vetores globais de deslocamentos e de tensões médias atuantes nas faces da estrutura discretizada, respectivamente. Com base nas condições de compatibilidade mencionadas acima, a matriz de rigidez global da estrutura pode ser calculada como segue:

$$\mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} = \sum_{q=1}^{N_q} \left( \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \right)^T \mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \quad (4.23)$$

sendo  $\mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)}$  e  $(\mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)})^T$  as matrizes de compatibilidade cinemática e estática da estrutura, nesta ordem.

Se forem conhecidos os valores numéricos dos componentes do vetor global de deslocamentos médios nas faces, os valores dos coeficientes de ordem zero e dos coeficientes de primeira e segunda ordem, que figuram nas expressões que definem os componentes do campo de deslocamentos de um subvolume genérico, podem ser determinados, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{(00)(2 \times 1)}^{(q)} &= \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}_{(8 \times 1)}^{(q)} &= \bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{U} \end{aligned} \quad (4.24)$$

### 4.3.2 Solução do Sistema Global de Equações

O sistema de equações global da estrutura pode ser organizado na forma mostrada abaixo, após serem consideradas as condições de contorno nos vetores globais de deslocamentos e de tensões médias nas faces da estrutura discretizada:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T}_c \\ \mathbf{T}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cd} & \mathbf{K}_{cc} \\ \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_c \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

em que  $\mathbf{T}_c$  e  $\mathbf{T}_d$  representam os vetores de tensões conhecidas e desconhecidas, respectivamente, e  $\mathbf{U}_c$  e  $\mathbf{U}_d$  simbolizam os vetores de deslocamentos conhecidos e desconhecidos, nesta ordem. Assim, os vetores de deslocamentos e de tensões desconhecidos podem ser determinados pelas equações apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_d &= (\mathbf{K}_{cd})^{-1} \mathbf{T}_c - (\mathbf{K}_{cd})^{-1} \mathbf{K}_{cc} \mathbf{U}_c \\ \mathbf{T}_d &= \mathbf{K}_{dd} \mathbf{U}_d - \mathbf{K}_{dc} \mathbf{U}_c \end{aligned} \quad (4.26)$$



## 5 Resultados Numéricos

### 5.1 Problema de Lamé

A Figura 5.1 ilustra o caso de um tubo de parede grossa de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , constituído de material isotrópico elástico linear, submetido a pressões uniformes nos bordos interno e externo, cujos valores são  $P_i$  e  $P_e$ , respectivamente. A solução analítica deste problema foi apresentada pela primeira vez por Lamé no ano de 1852.

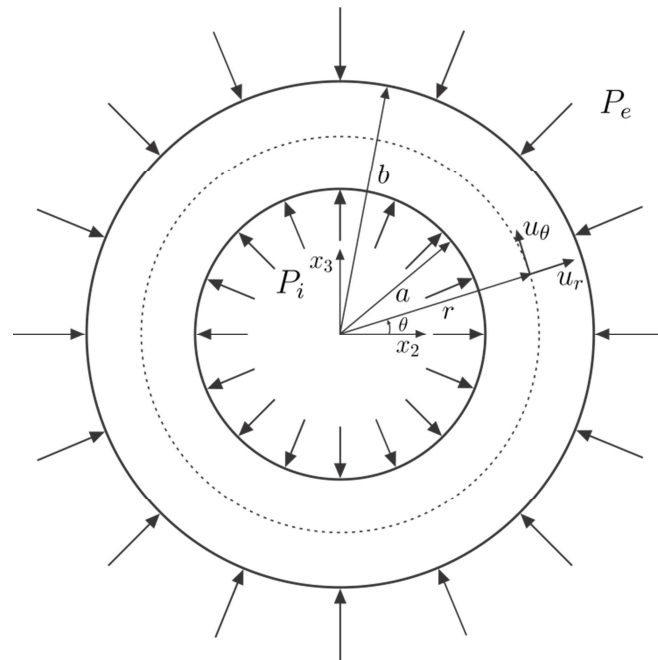


Figura 5.1 – Tubo de parede grossa submetido a pressões uniformes.

A dedução das equações que constituem a solução analítica deste problema pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1980), Villaça e Garcia (1998) e Sadd (2009). Os componentes do campo de tensões podem ser expressos em função da coordenada radial  $r$ , sendo dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r) &= \frac{c_1}{r^2} + c_2 \\ \sigma_{\theta\theta}(r) &= -\frac{c_1}{r^2} + c_2\end{aligned}\tag{5.1}$$

nas quais

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a^2 b^2 (P_e - P_i)}{b^2 - a^2} \\ c_2 &= \frac{a^2 P_i - b^2 P_e}{2(b^2 - a^2)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nas análises numéricas, utilizam-se duas malhas constituídas por  $10 \times 1$  e  $20 \times 1$  subdivisões nas direções radial e circunferencial, respectivamente, totalizando 10 e 20 subvolumes, nesta ordem, como mostra a Figura 5.2.

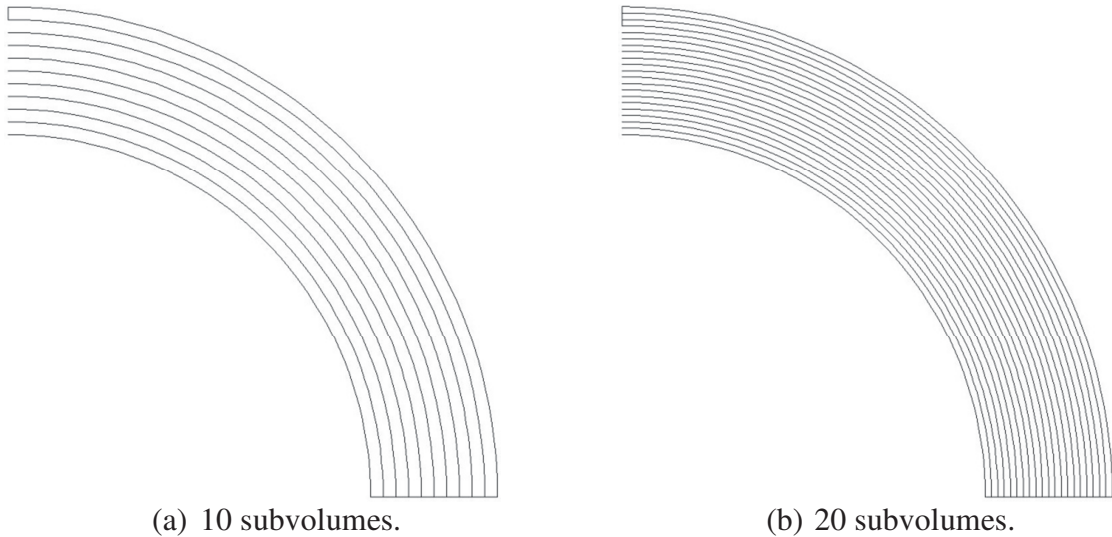


Figura 5.2 – Malha utilizada na análise do tubo de parede grossa.

Em virtude das simetrias geométrica e das condições de contorno do problema, apenas um quarto do tubo é analisado. Para isso, são impostas condições de vinculação nos extremos anti-horário e horário com o propósito de restringir os eventuais deslocamentos de corpo rígido.

As condições de contorno consideradas na análise numérica do tubo de parede grossa encontram-se indicadas a seguir:

$$\begin{aligned} \bar{t}_r^{(1,\gamma,1)} &= P_i, \bar{t}_\theta^{(1,\gamma,1)} = 0 && \text{(bordo interno),} \\ \bar{t}_r^{(\beta,1,2)} &= 0, \bar{u}_\theta^{(\beta,1,2)} = 0 && \text{(bordo horário),} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{t}_r^{(N_\beta, \gamma, 3)} &= -P_e, \bar{t}_\theta^{(N_\beta, \gamma, 3)} = 0 && \text{(bordo externo),} \\ \bar{t}_r^{(\beta, N_\gamma, 4)} &= 0, \bar{u}_\theta^{(\beta, N_\gamma, 4)} = 0 && \text{(bordo anti-horário).} \end{aligned}$$

Os parâmetros adotados nas análises e as propriedades do material do tubo de parede grossa encontram-se definidos nas Tabelas 5.1 e 5.2, nesta ordem.

Tabela 5.1 – Propriedades do material do tubo.

Propriedade	Valor
$E$	200 GPa
$\nu$	0,22

Tabela 5.2 – Parâmetros adotados nas análises.

Parâmetro	Valor
$a$	1,00 m
$b$	1,35 m
$P_i$	5.000 Pa
$P_e$	1.000 Pa

Nas Figuras 5.3 e 5.4, são apresentados os mapas de tensão obtidos com a presente formulação (para a malha que consta na Figura 1.2 (b)) e com a solução analítica do problema, enquanto que, nas Figuras 5.5 e 5.6, são mostrados os diagramas que exibem a variação dos componentes de tensão para uma seção média ( $\pi/4$ ) do tubo de parede grossa. Os valores encontrados nas análises numéricas correspondem às médias volumétricas dos componentes de tensão nos subvolumes  $\left( \bar{\sigma}_{ij}^{(q)} = \frac{1}{V_q} \int_{V_q} \sigma_{ij}^{(q)} dV_q \right)$ , enquanto que os valores obtidos por meio de solução analítica são determinados avaliando-se as expressões que constam da Equação 5.1 no raio médio de cada subvolume  $(\sigma_{ij}(r_o^{(q)}))$ . Como se observa, as malhas apresentadas na Figura 5.2 são suficientes para assegurar a precisão dos resultados, uma vez que os resultados obtidos com a TVF apresentam excelente concordância com aqueles provenientes da solução analítica.

A Tabela 5.3 sintetiza os resultados de uma análise de convergência realizada confrontando-se as soluções numéricas, obtidas com as malhas mostradas na Figura 5.2, com

a solução analítica do problema. A comparação dos valores dos erros quadráticos que figuram na mencionada tabela comprova a estabilidade da formulação apresentada neste trabalho, visto que, na análise numérica em que se utiliza a malha mais refinada (Figura 5.2(b)), são produzidos resultados cujos erros são menores que aqueles encontrados na análise numérica em que se utiliza a malha mais grosseira (Figura 1.2(a)).

Tabela 5.3 - Análise de convergência do Problema de Lamé.

Erro quadrático	Número de subvolumes	
	10	20
$ERRO[\sigma_{rr}] \times 10^{-7}$	25,89	1,62
$ERRO[\sigma_{\theta\theta}] \times 10^{-7}$	0,03	0,00

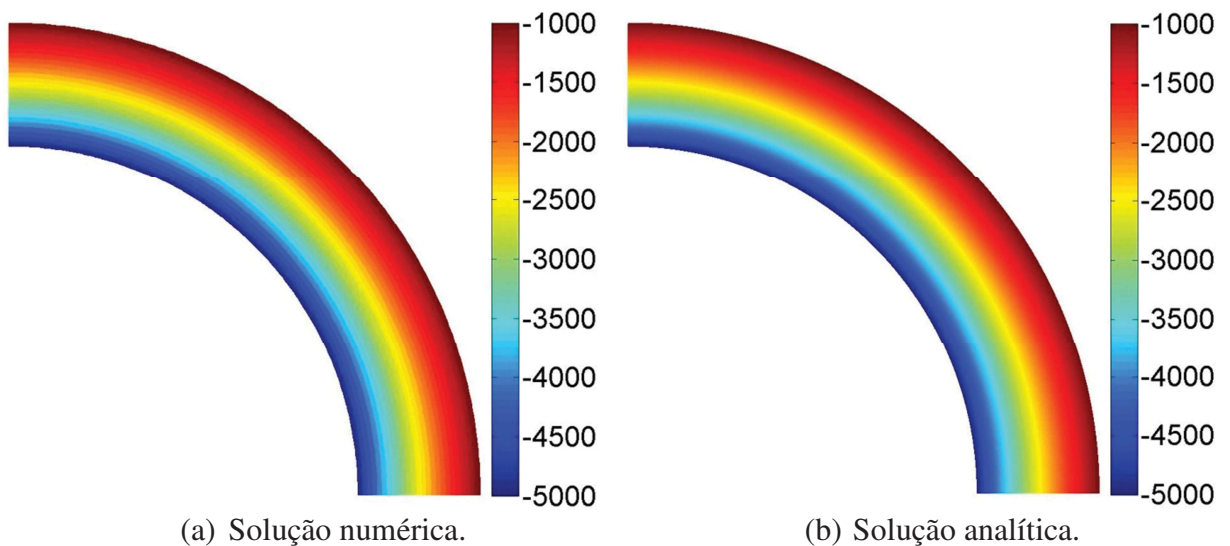


Figura 5.3 - Campo de tensão radial  $\sigma_{rr}$  (Pa).

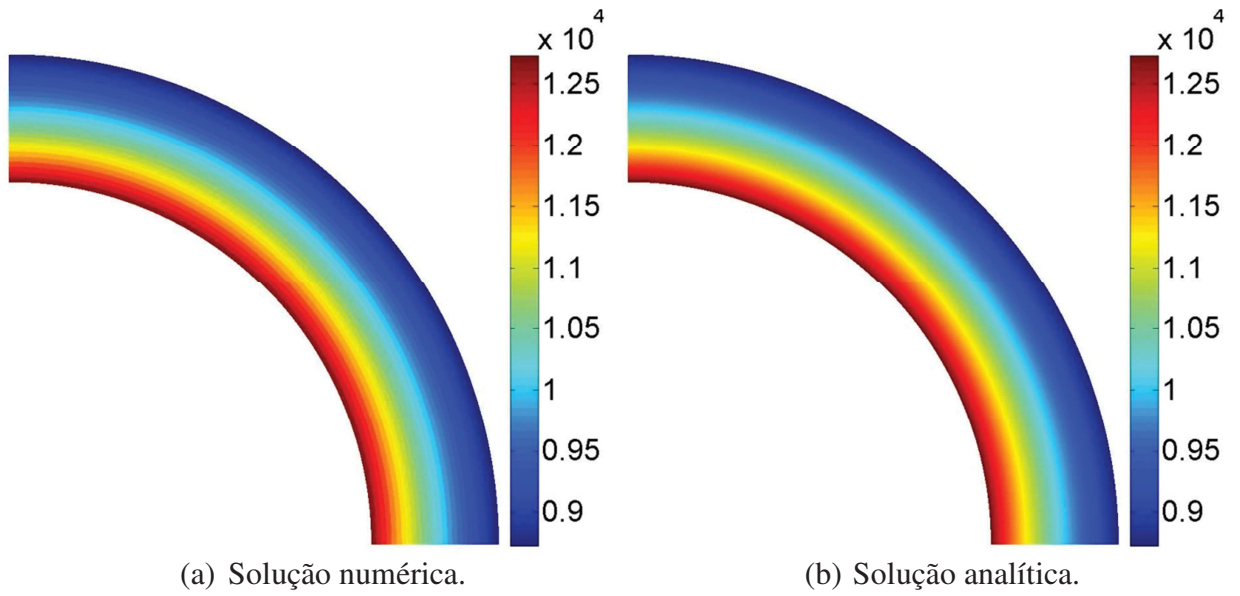


Figura 5.4 - Campo de tensão circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  (Pa).

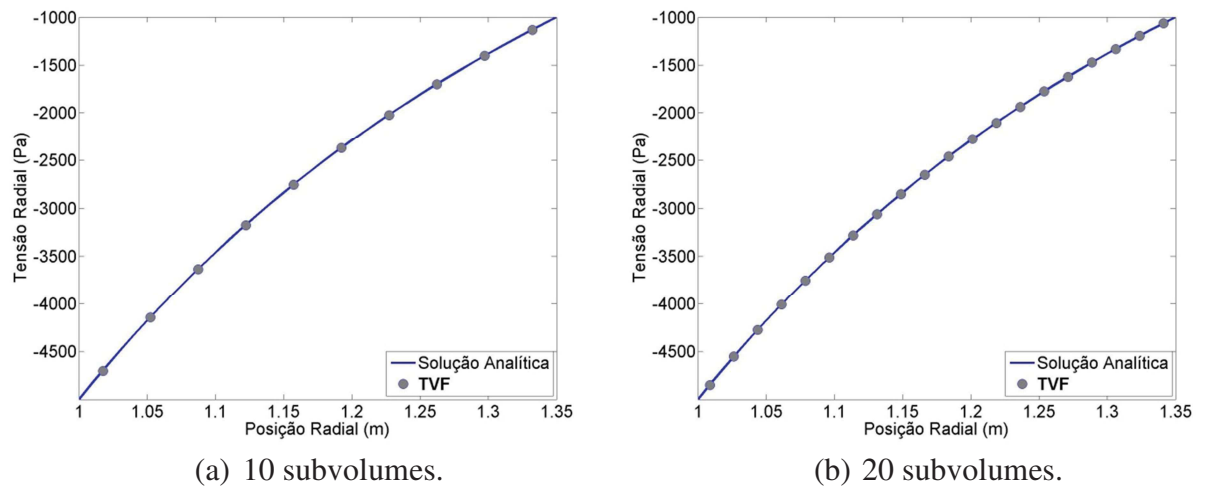
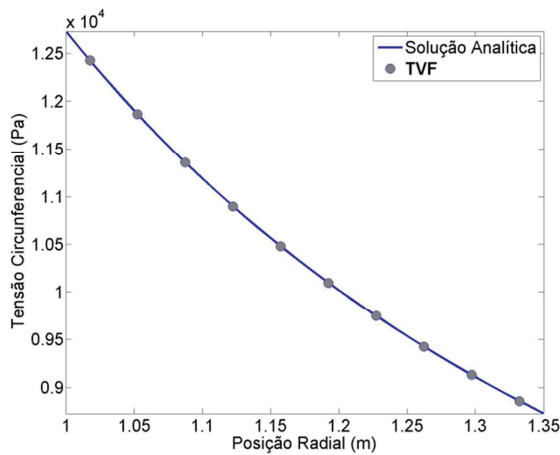
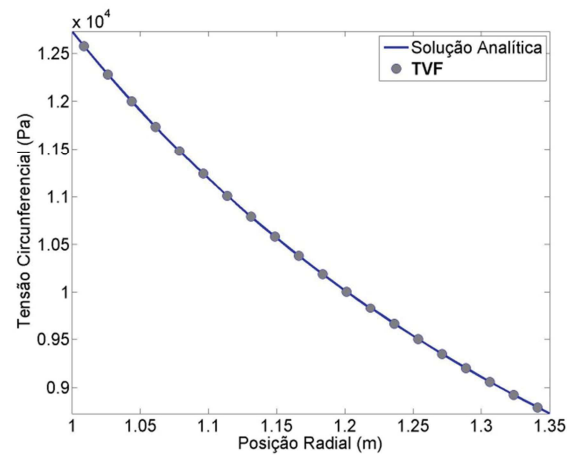


Figura 5.5 – Variação da tensão radial ao longo da espessura do tubo.



(a) 10 subvolumes.



(b) 20 subvolumes.

Figura 5.6 – Variação da tensão circunferencial ao longo da espessura do tubo.

## 5.2 Viga Curva Engastada

Nesta seção, é analisada uma viga de seção retangular com eixo curvo, engastada na extremidade anti-horária e submetida a uma carga concentrada por unidade de comprimento de valor  $P$  no bordo horário, assim como ilustrado na Figura 5.7. A altura da seção transversal mede  $h = b - a$ , na qual  $a$  e  $b$  representam a distância do centro de curvatura da viga aos bordos interno e externo, nesta ordem.

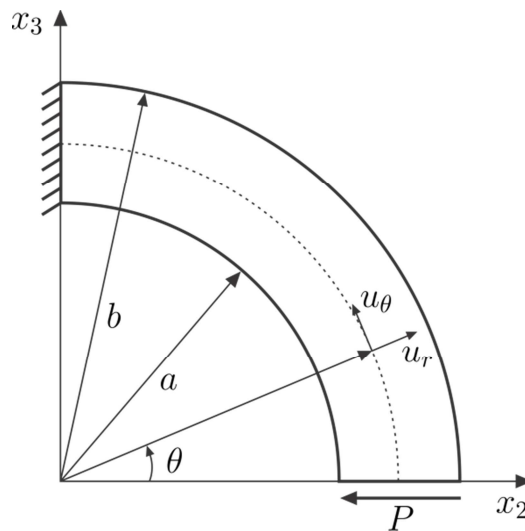


Figura 5.7 – Viga curva engastada.

A dedução das equações que constituem a solução analítica deste problema pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1980) e Sadd (2009). O campo de tensões pode ser expresso em função das coordenadas  $r$  e  $\theta$ , como segue:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) \sin(\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) \sin(\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right) \cos(\theta)\end{aligned}\tag{5.7}$$

sendo

$$\begin{aligned}A &= \frac{P}{2N} \\ B &= -\frac{Pa^2b^2}{2N} \\ D &= -\frac{P}{N}(a^2 + b^2) \\ N &= a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}\tag{5.8}$$

Nas análises numéricas deste exemplo, utilizam-se duas malhas constituídas por  $6 \times 21$  e  $18 \times 57$  subdivisões nas direções radial e circunferencial, respectivamente, totalizando 126 e 1026 subvolumes, nesta ordem, como mostra a Figura 5.8.

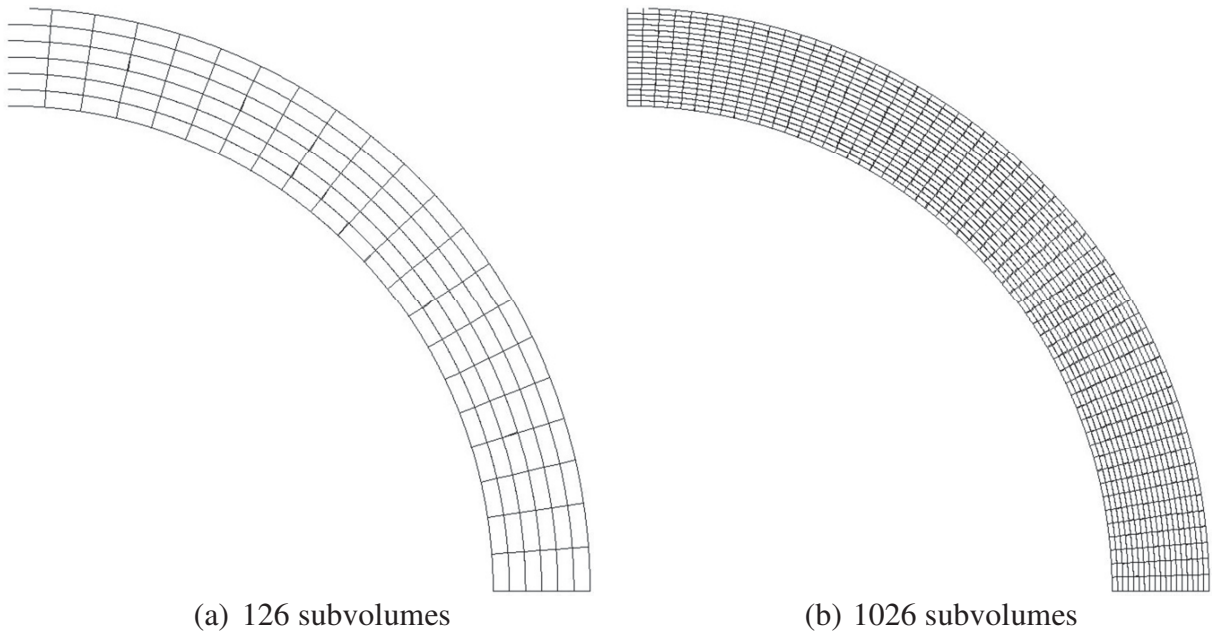


Figura 5.8 – Malhas utilizadas nas análises da viga curva.

No caso das faces externas localizadas nas extremidades da viga, são impostas condições de contorno que reproduzem, de forma aproximada, aquelas consideradas na dedução da solução analítica. Mais precisamente, os valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces anti-horárias dos subvolumes localizados na extremidade vinculada são assumidos como sendo nulos, para simular os efeitos promovidos pela presença do engaste, e o valor médio do componente radial dos vetores de tensão atuantes nas faces horárias dos subvolumes localizados na extremidade livre é assumido como sendo igual ao valor da tensão cisalhante média na respectiva extremidade, para simular os efeitos decorrentes da distribuição de tensão não uniforme, dada pela Equação 5.4.

As condições de contorno consideradas na análise numérica da viga curva engastada encontram-se indicadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_r^{(1,\gamma,1)} &= 0, \bar{t}_\theta^{(1,\gamma,1)} = 0 && \text{(bordo interno),} \\
 \bar{t}_r^{(\beta,1,2)} &= -P/(b-a), \bar{t}_\theta^{(\beta,1,2)} = 0 && \text{(extremidade livre),} \\
 \bar{t}_r^{(N_\beta,\gamma,3)} &= 0, \bar{t}_\theta^{(N_\beta,\gamma,3)} = 0 && \text{(bordo externo),} \\
 \bar{u}_r^{(\beta,N_\gamma,4)} &= 0, \bar{u}_\theta^{(\beta,N_\gamma,4)} = 0 && \text{(extremidade engastada).}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Os parâmetros adotados nas análises e as propriedades do material da viga encontram-se definidos nas Tabelas 5.3 e 5.4, respectivamente.



Tabela 5.4 - Propriedades do material da viga.

Propriedade	Valor
$E$	200 GPa
$\nu$	0,22

Tabela 5.5 – Parâmetros adotados nas análises.

Parâmetro	Valor
$a$	1,50 m
$b$	1,80 m
$P$	15 kN

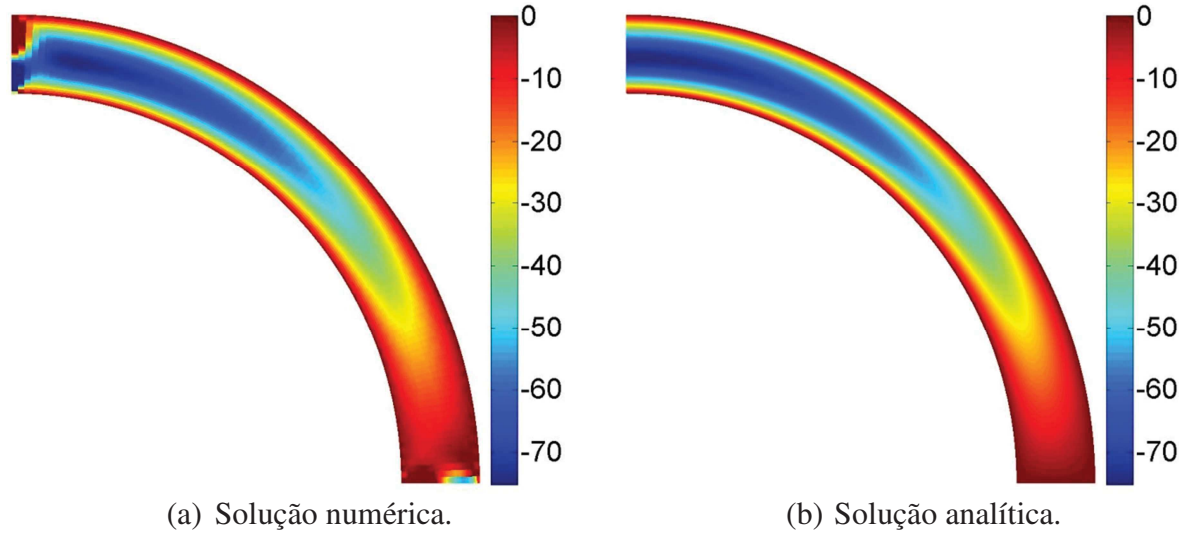
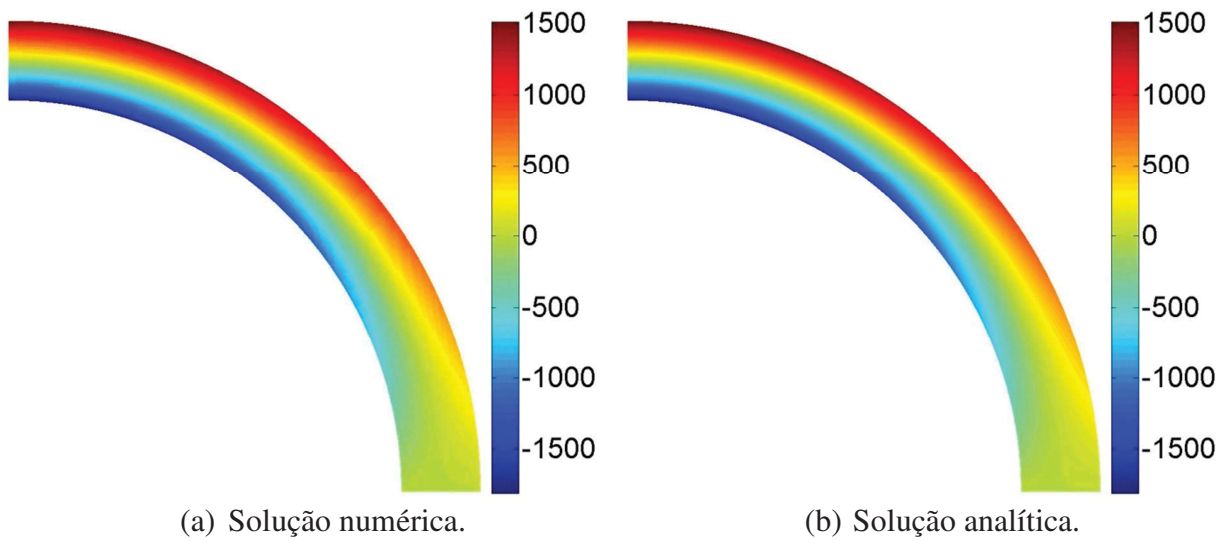
Nas figuras 5.9 a 5.11, são apresentados os mapas de tensão obtidos com a formulação apresentada neste trabalho (para a malha da Figura 5.8(b)) e com a solução analítica do problema, enquanto que as Figuras 5.12 a 5.14 exibem os diagramas que mostram a variação dos componentes de tensão para uma seção média ( $\pi/4$ ) da viga curva engastada. Os valores encontrados nas análises numéricas correspondem às médias volumétricas dos componentes de tensão nos subvolumes  $\left( \bar{\sigma}_{ij}^{(q)} = \frac{1}{V_q} \int_{V_q} \sigma_{ij}^{(q)} dV_q \right)$ , enquanto que os valores obtidos por meio da solução analítica são determinados avaliando-se as expressões que constam na Equação 5.4 no centroide de cada subvolume  $(\sigma_{ij}(r_o^{(q)}, \theta_o^{(q)}))$ . Como se vê, a malha apresentadas na Figura 5.8(b) é suficiente para assegurar a precisão da análise numérica, uma vez que os resultados obtidos com a TVF apresentam boa concordância com aqueles provenientes de solução analítica, principalmente nas regiões mais afastadas das extremidades da viga (livre e engastada), em virtude do *Princípio de Saint-Venant*. Segundo este princípio, as distribuições de tensão assumem o mesmo comportamento das regiões mais afastadas dos locais onde são aplicadas as ações, independentemente de como estas ações são aplicadas, desde que as resultantes sejam iguais. Além disso, constata-se que nas regiões mais próximas das extremidades da viga podem ser observadas algumas *perturbações* nas distribuições de tensão radial e cisalhante da análise numérica, que estão relacionadas às diferenças nas condições de contorno impostas à formulação numérica em relação àquelas empregadas na solução analítica.

A Tabela 5.3 apresenta os resultados de um estudo de convergência realizado confrontando-se as soluções numéricas com a solução analítica do problema. Para fazer o mencionado estudo, consideram-se três malhas adicionais, além daquelas mostradas na Figura 5.6. Na avaliação dos erros quadráticos, que constam na Tabela 5.3, são consideradas somente as contribuições das seções transversais (e conseqüentemente dos subvolumes) suficientemente afastadas das extremidades da viga, de modo a não capturar as perturbações comentadas anteriormente. Recorde-se que as condições de contorno consideradas nas soluções numéricas e analíticas são bastante diferentes, embora produzam as mesmas resultantes e reações de apoio nas extremidades livre e engastada, assegurando distribuições de tensão semelhantes em regiões afastadas das extremidades da viga, assim como sugere o *Princípio de Saint-Venant*.

Especificamente, na mensuração dos erros quadráticos, desprezam-se as duas porções próximas das extremidades da viga cujos comprimentos dos eixos das mesmas equivalem ao valor da altura da viga ( $h$ ). Assim, as seções analisadas são aquelas que se encontram no retângulo polar definido pela região  $[a,b] \times [2(b-a)/(b+a), \pi/2 - 2(b-a)/(b+a)]$ . A comparação dos valores dos erros quadráticos que figuram na Tabela 5.6 comprova a estabilidade da formulação apresentada neste trabalho, visto que nas análises numérica nas quais se utilizam as malhas mais refinadas são produzidos resultados cujos erros são menores que aqueles encontrados nas análises numéricas em que se utilizam as malhas mais grosseiras.

Tabela 5.6 - Análise de convergência do problema da viga curva engastada.

<b>Erro quadrático</b>	<b>Número de subvolumes</b>				
	126	216	468	816	1026
$ERRO[\sigma_{rr}] \times 10^{-3}$	10,70	4,00	0,93	0,32	0,20
$ERRO[\sigma_{\theta\theta}] \times 10^{-3}$	4,45	1,80	0,45	0,16	0,10
$ERRO[\sigma_{r\theta}] \times 10^{-3}$	13,42	5,16	1,26	0,43	0,28

Figura 5.9 - Campo de tensão radial  $\sigma_{rr}$  (kPa).Figura 5.10 - Campo de tensão circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  (kPa).

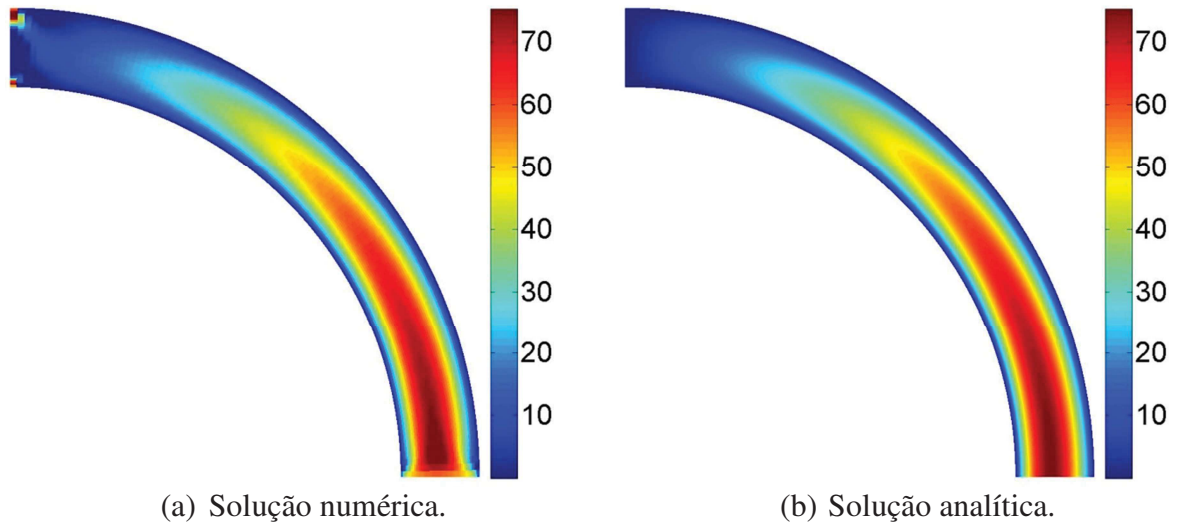


Figura 5.11 - Campo de tensão cisalhante  $\sigma_{r\theta}$  (kPa).

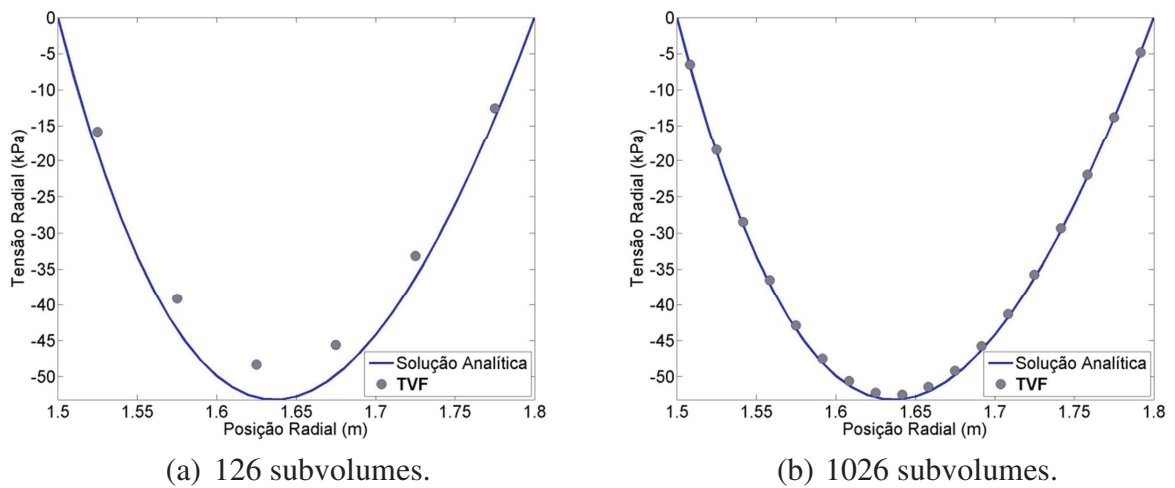
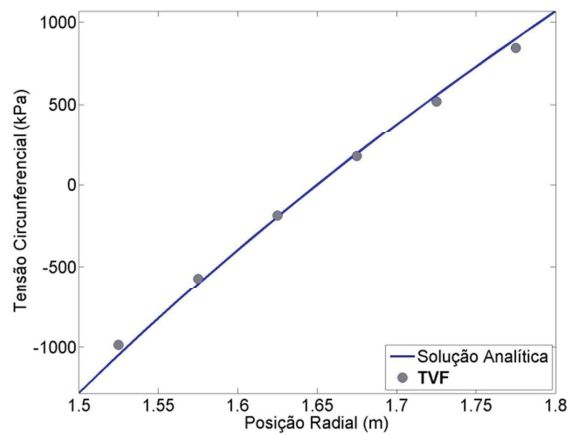
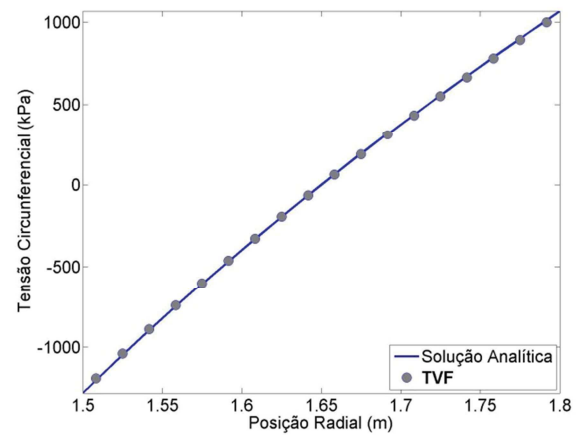


Figura 5.12 – Variação da tensão radial ao longo da seção transversal média da viga curva engastada ( $\theta = \pi/4$ ).

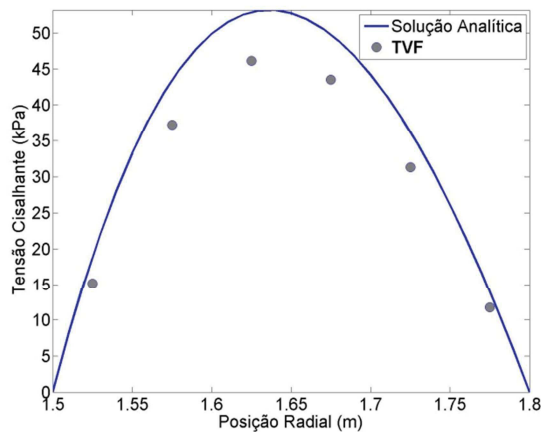


(a) 126 subvolumes.

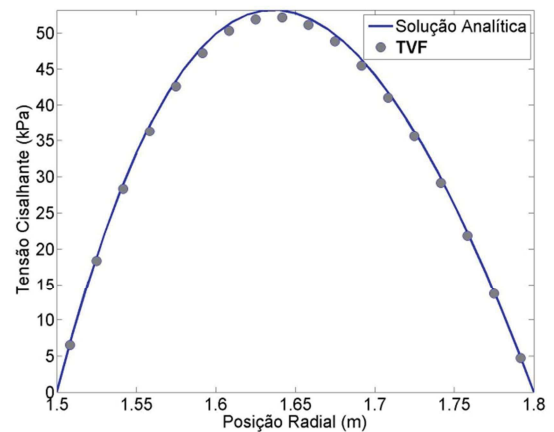


(b) 1026 subvolumes.

Figura 5.13 – Variação da tensão circunferencial ao longo da seção transversal média da viga curva engastada ( $\theta = \pi/4$ ).



(a) 126 subvolumes.



(b) 1026 subvolumes.

Figura 5.14 – Variação da tensão cisalhante ao longo da seção transversal média da viga curva engastada ( $\theta = \pi/4$ ).

### 5.3 Problema de Kirsch

A Figura 5.15 ilustra o caso de uma chapa com orifício circular de raio  $a$  submetida a um estado de tensão uniaxial horizontal definido por  $S$ . As distribuições de tensão nas regiões mais afastadas do orifício tendem a permanecer idênticas àquelas encontradas em uma chapa sem orifício submetida à mesma solicitação, em virtude do *Princípio de Saint-Venant*.

No entanto, na vizinhança do orifício surgem altas concentrações de tensão que podem ser avaliadas considerando-se uma porção de raio  $b$  no interior da chapa e concêntrica com o orifício, onde são impostas condições de contorno em coordenadas polares equivalentes àquelas produzidas por um estado de tensão uniaxial horizontal. A solução exata deste problema, considerando-se uma chapa com dimensões infinitas, foi encontrada por Kirsch em 1898.

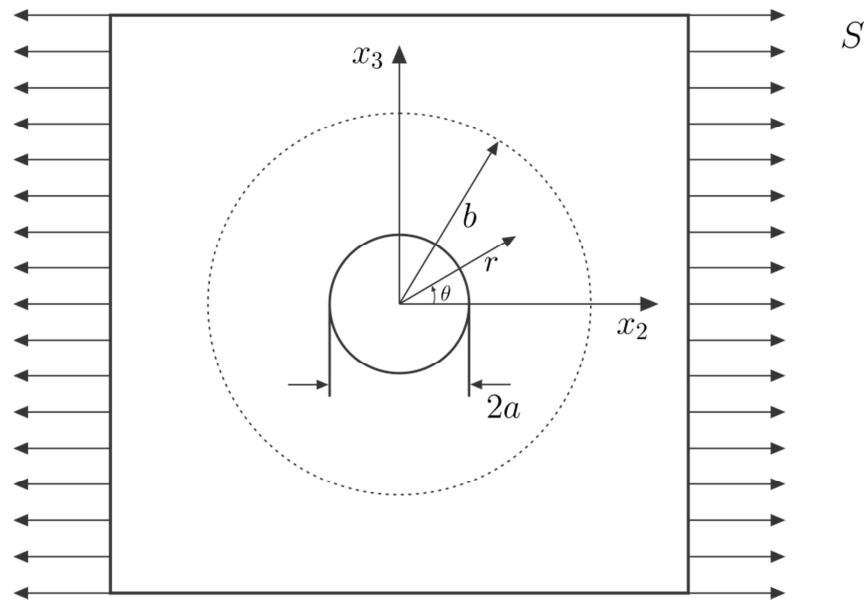


Figura 5.15 – Chapa com orifício circular submetida a um estado de tensão uniaxial horizontal (tração).

A dedução das equações que constituem a solução analítica deste problema pode ser encontrada em Timoshenko e Goodier (1980) e Sadd (2009). O campo de tensões pode ser expresso em função das coordenadas  $r$  e  $\theta$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{A_1}{r^2} + 2A_2 - \left( 2B_1 + \frac{6B_3}{r^4} + \frac{4B_4}{r^2} \right) \cos(2\theta) \\
 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= -\frac{A_1}{r^2} + 2A_2 + \left( 2B_1 + 12B_2r^2 + \frac{6B_3}{r^4} \right) \cos(2\theta) \\
 \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \left( 2B_1 + 6B_2r^2 - \frac{6B_3}{r^4} - \frac{2B_4}{r^2} \right) \sin(2\theta)
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

nas quais

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2}a^2S, \quad A_2 = \frac{1}{2}S \\
 B_1 &= -\frac{S}{4}, \quad B_3 = -\frac{a^4}{4}S, \quad B_4 = -\frac{a^2}{2}S
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Na análise numérica deste exemplo, utilizam-se duas malhas constituídas por  $21 \times 11$  e  $62 \times 35$  subdivisões nas direções radial e circunferencial, respectivamente, totalizando 231 e 2170 subvolumes, nesta ordem, como mostra a Figura 5.16.

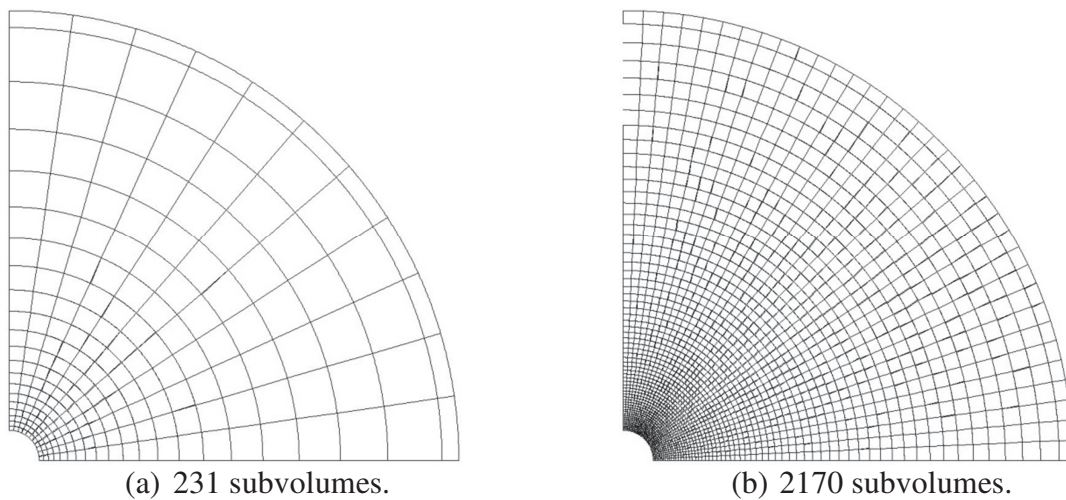


Figura 5.16 – Malhas utilizadas nas análises da chapa com orifício circular.

Em virtude das simetrias geométrica e das condições de contorno do problema, apenas um quarto de chapa é analisado. Para isso, são impostas condições de vinculação nos bordos anti-horário e horário que impendem os eventuais deslocamentos de corpo rígido.

As condições de contorno consideradas na análise numérica da chapa com orifício circular encontram-se indicadas a seguir:

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_r^{(1,\gamma,1)} &= 0, \quad \bar{t}_\theta^{(1,\gamma,1)} = 0 && \text{(bordo interno)} \\
 \bar{t}_r^{(\beta,1,2)} &= 0, \quad \bar{u}_\theta^{(\beta,1,2)} = 0 && \text{(bordo horário)} \\
 \bar{t}_r^{(N_\beta,\gamma,3)} &= \frac{1}{\alpha_q} \int_{-\alpha_\gamma/2}^{+\alpha_\gamma/2} \sigma_{rr} \left( r_o^{(\beta)} + \frac{e_\beta}{2}, \theta_o^{(\gamma)} + \theta^{(\gamma)} \right) d\theta^{(\gamma)}, && \text{(bordo externo),} \\
 \bar{t}_\theta^{(N_\beta,\gamma,3)} &= \frac{1}{\alpha_q} \int_{-\alpha_\gamma/2}^{+\alpha_\gamma/2} \sigma_{r\theta} \left( r_o^{(\beta)} + \frac{e_\beta}{2}, \theta_o^{(\gamma)} + \theta^{(\gamma)} \right) d\theta^{(\gamma)} && 
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

$$\bar{t}_r^{(\beta, N_{\gamma, 4})} = 0, \bar{u}_\theta^{(\beta, N_{\gamma, 4})} = 0 \quad (\text{bordo anti-horário})$$

em que  $r_o^{(\beta)}$  e  $\theta_o^{(\gamma)}$  representam as coordenadas  $r$  e  $\theta$  do centroide de um subvolumen genérico. Os componentes de tensão radial e cisalhante presentes na equação anterior são dados por  $\sigma_{rr} = S \cos^2(\theta_o^{(\gamma)} + \theta^{(\gamma)})$  e  $\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2} S \sin(\theta_o^{(\gamma)} + \theta^{(\gamma)})$ .

Os parâmetros adotados nas análises e as propriedades do material da chapa encontram-se definidos nas Tabelas 5.5 e 5.6, nesta ordem.

Tabela 5.7 – Propriedades do material da chapa.

Propriedade	Valor
$E$	200 GPa
$\nu$	0,22

Tabela 5.8 – Parâmetros adotados nas análises.

Parâmetro	Valor
$a$	0,1 m
$b$	1,0 m
$S$	10 kPa

Nas Figuras 5.17 a 5.19, são apresentados os mapas de tensão obtidos com a presente formulação (para a malha que consta na Figura 5.16(b)) e com a solução analítica do problema, enquanto que nas Figuras 5.20 a 5.25 são mostrados os diagramas que exibem a variação dos componentes de tensão para diversos cortes virtuais da chapa. Os valores encontrados nas análises numéricas correspondem às médias volumétricas dos componentes

de tensão nos subvolumes  $\left( \bar{\sigma}_{ij}^{(q)} = \frac{1}{V_q} \int_{V_q} \sigma_{ij}^{(q)} dV_q \right)$ , enquanto que os valores obtidos por meio

de solução analítica são determinados avaliando-se as expressões que constam na Equação 5.7 no centroide de cada subvolumen  $(\sigma_{ij}(r_o^{(q)}, \theta_o^{(q)}))$ . Como se vê, a malha apresentada na Figura 5.16(b) é suficiente para assegurar a precisão dos resultados, uma vez que os resultados obtidos com a TVF apresentam uma boa concordância com aqueles provenientes de solução analítica.



Em conformidade com os exemplos anteriores, realiza-se um estudo de convergência confrontando-se as soluções numéricas com a solução analítica do problema. Na avaliação dos erros quadráticos que constam na Tabela 5.9, utilizam-se três malhas adicionais, além daquelas mostradas na Figura 5.16. Novamente, examinado os valores que constam na mencionada tabela, constata-se a estabilidade da formulação proposta no presente trabalho.

Tabela 5.9 - Análise de convergência do Problema de Kirsch.

Erro quadrático	Número de subvolumes				
	231	665	1323	2170	3268
$ERRO[\sigma_{rr}] \times 10^{-4}$	1,10	1,08	1,03	0,90	0,56
$ERRO[\sigma_{\theta\theta}] \times 10^{-4}$	6,47	1,66	1,29	1,22	1,21
$ERRO[\sigma_{r\theta}] \times 10^{-4}$	5,57	0,63	0,51	0,33	0,23

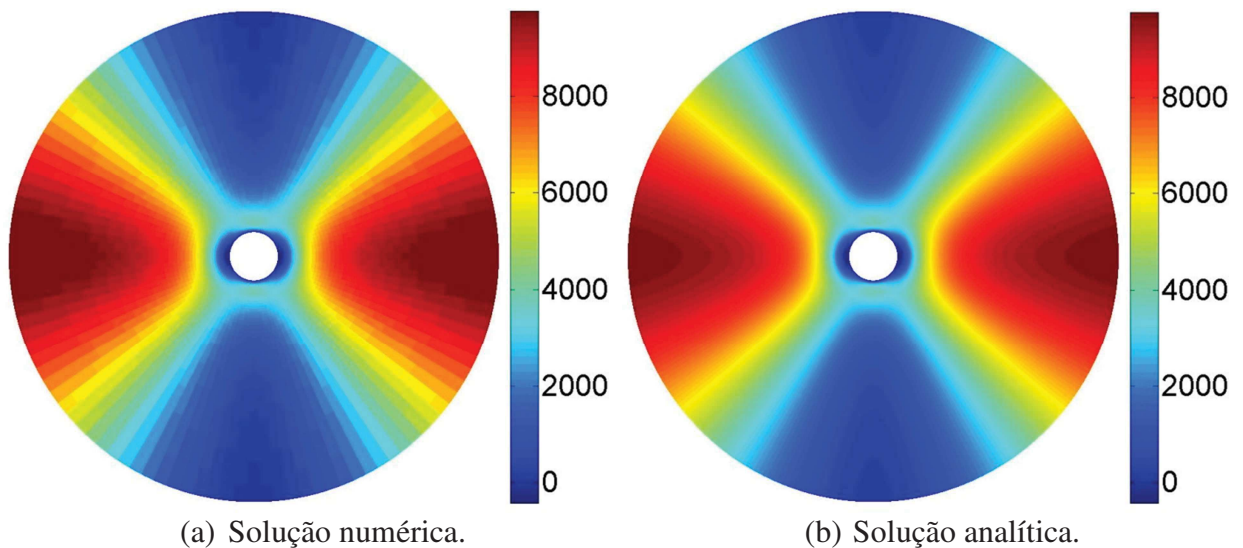


Figura 5.17 - Campo de tensão radial  $\sigma_{rr}$  (Pa).

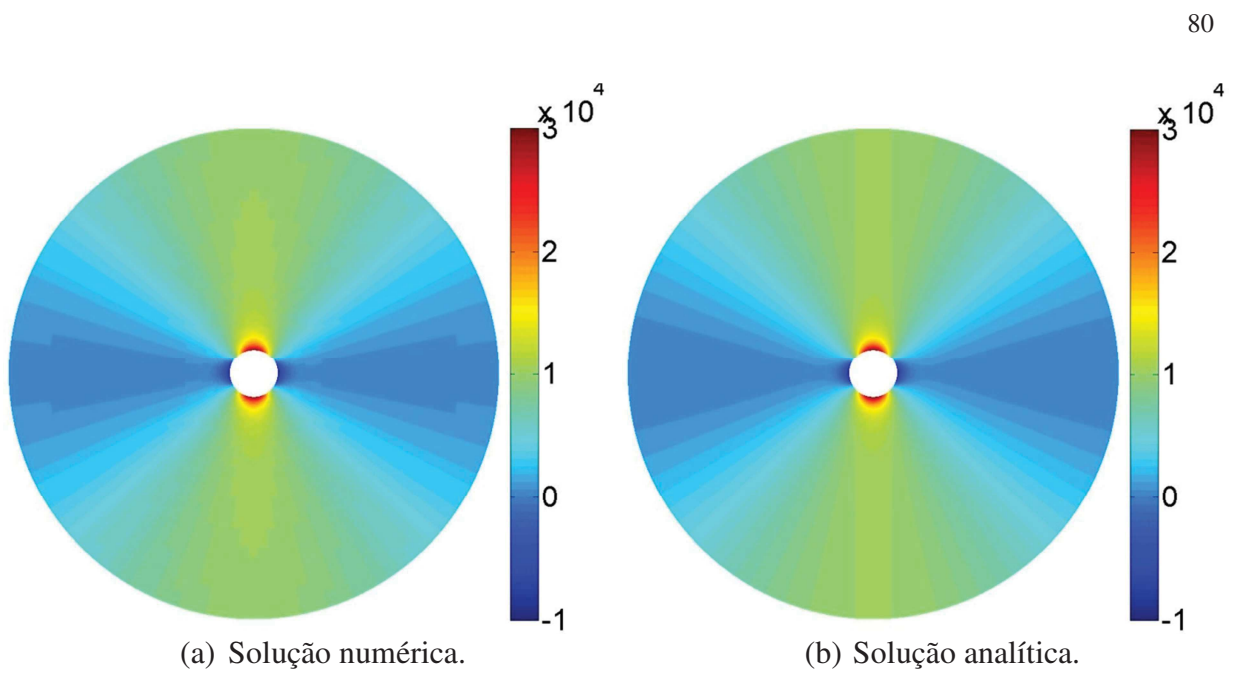


Figura 5.18 - Campo de tensão circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  (Pa).

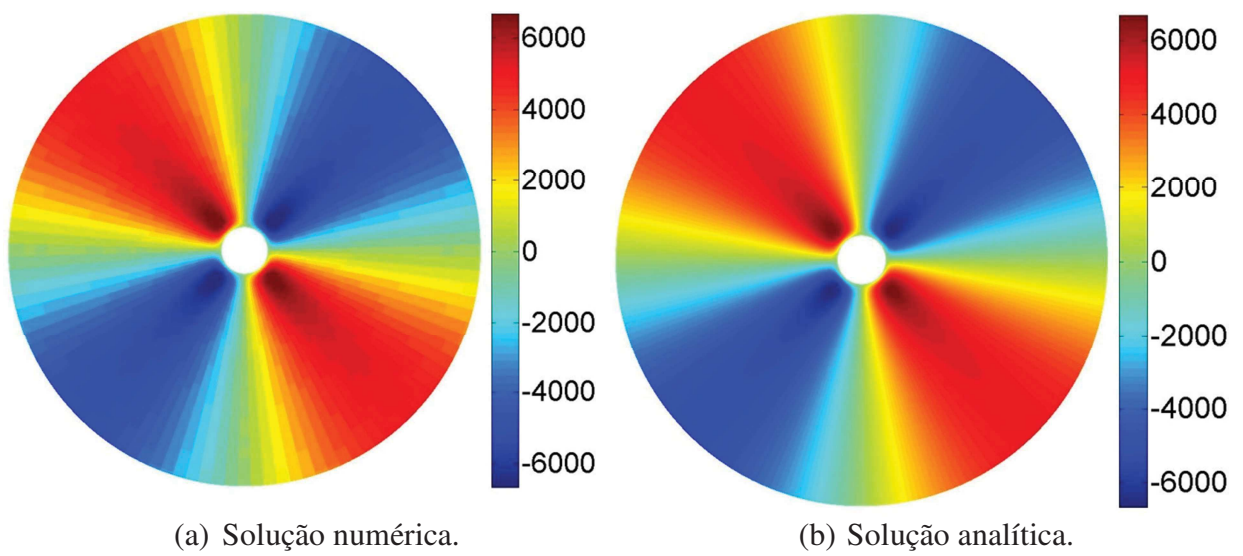
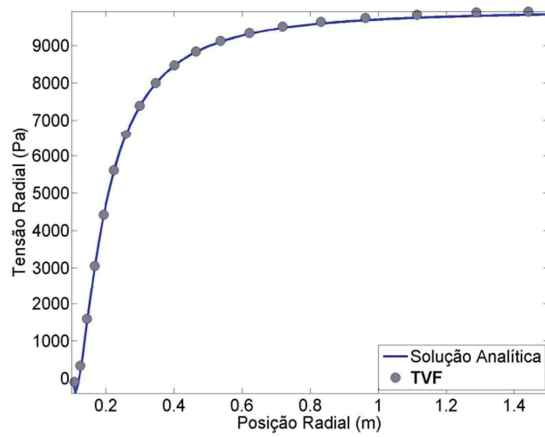
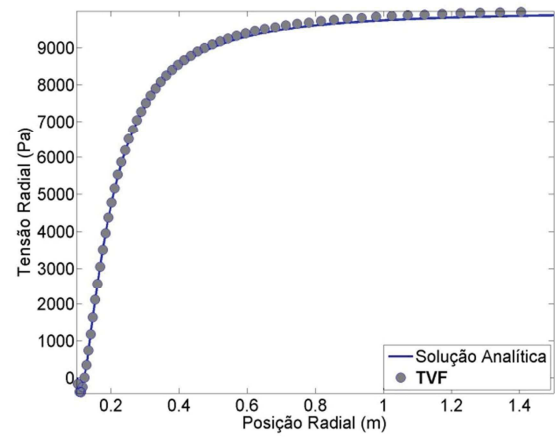


Figura 5.19 - Campo de tensão cisalhante  $\sigma_{r\theta}$  (Pa).

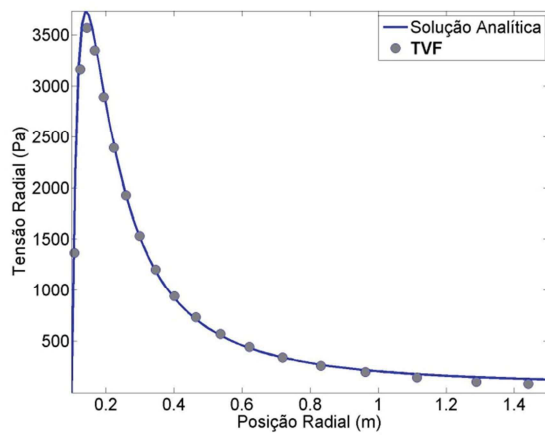


(a) 231 subvolumes.

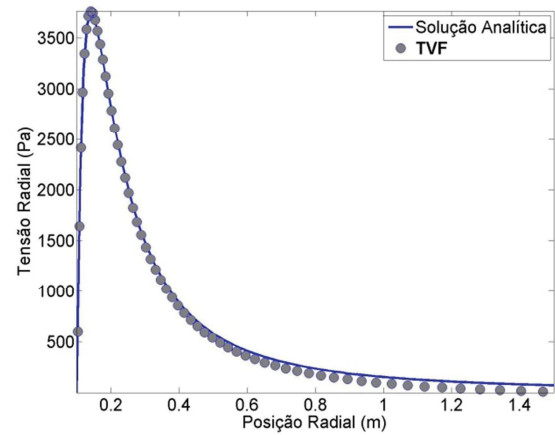


(b) 2170 subvolumes.

Figura 5.20 - Variação da tensão radial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ ).

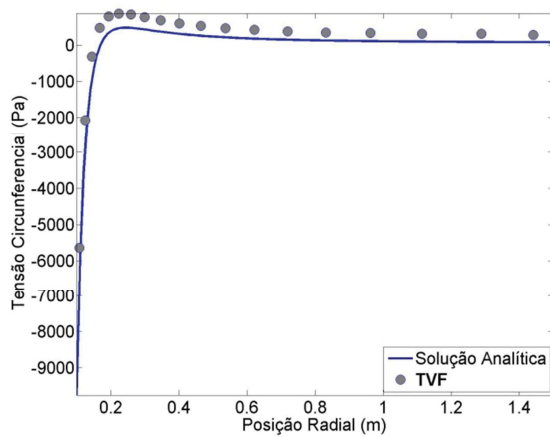


(a) 231 subvolumes.

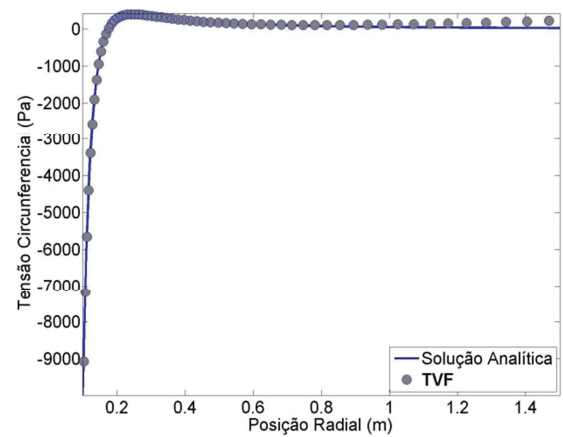


(b) 2170 subvolumes.

Figura 5.21 - Variação da tensão radial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = \pi/2$  ou  $\theta = 3\pi/2$ ).

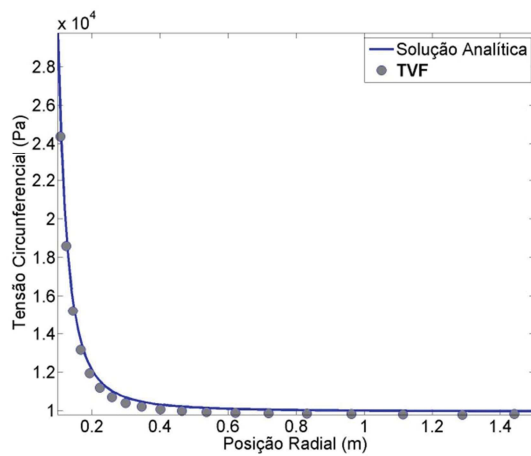


(a) 231 subvolumes.

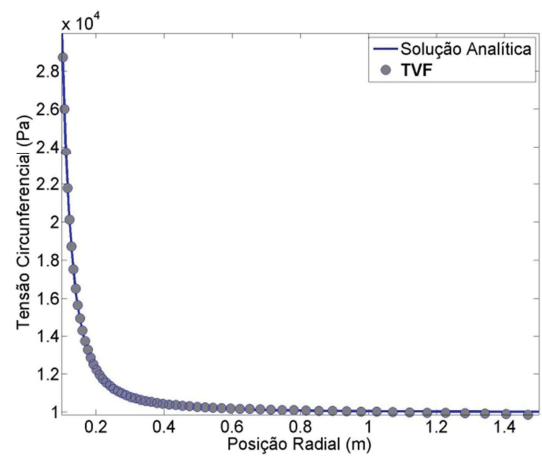


(b) 2170 subvolumes.

Figura 5.22 - Variação da tensão circunferencial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ ).

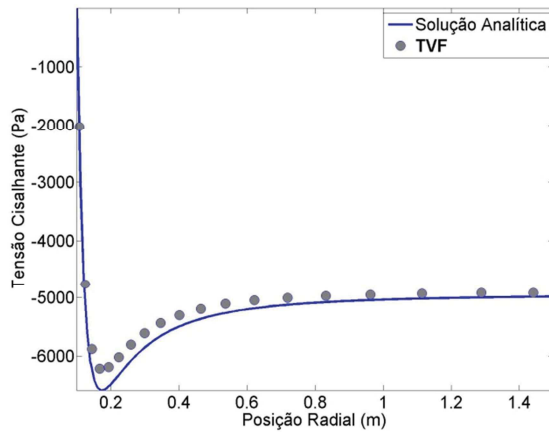


(a) 231 subvolumes.

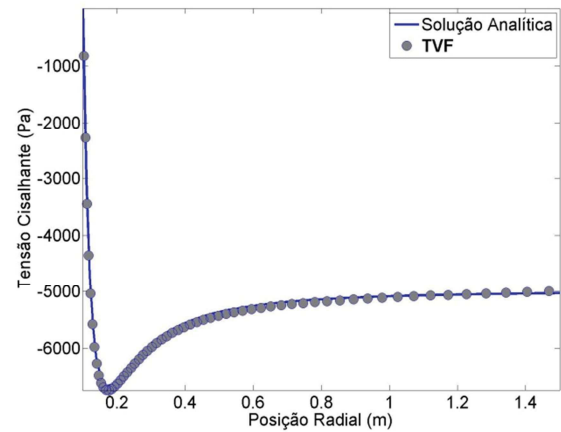


(b) 2170 subvolumes.

Figura 5.23 - Variação da tensão circunferencial ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = \pi/2$  ou  $\theta = 3\pi/2$ ).

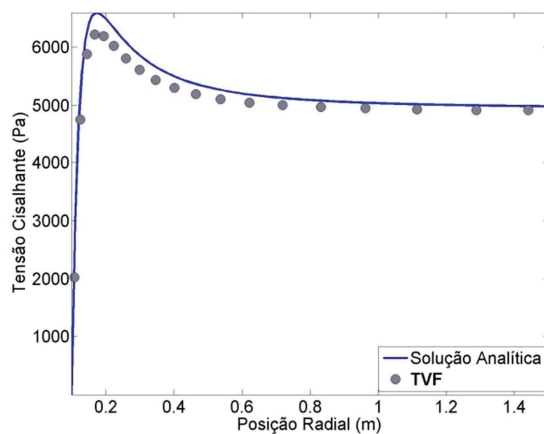


(a) 231 subvolumes.

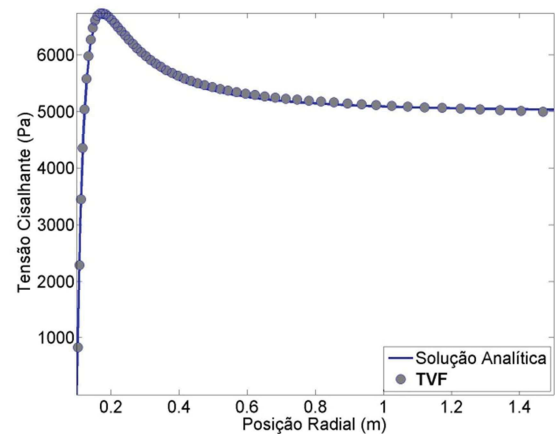


(b) 2170 subvolumes.

Figura 5.24 - Variação da tensão cisalhante ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = \pi/4$  ou  $\theta = 3\pi/2$ ).



(a) 231 subvolumes.



(b) 2170 subvolumes.

Figura 5.25 - Variação da tensão cisalhante ao longo da distância radial medida a partir do centro do orifício ( $\theta = 3\pi/4$  ou  $\theta = 7\pi/4$ ).

## 6 Conclusão

Este trabalho foi dedicado à elaboração de uma formulação em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos, destinada à análise de tensões em estruturas axissimétricas constituídas de materiais elásticos lineares. A mencionada formulação utilizou polinômios quadráticos para descrever o campo de deslocamentos em cada subvolume, e as condições de equilíbrio local são impostas por meio da satisfação das equações diferenciais de equilíbrio em termos médios no volume.

A fundamentação teórica do presente trabalho foi dividida em duas partes. Na primeira parte, que se encontra no Capítulo 2, apresentaram-se as equações governantes da Teoria da Elasticidade Linear expressas em coordenadas cartesianas e cilíndricas, bem como a dedução das equações diferenciais de equilíbrio em termos dos componentes de deslocamentos para problemas bi e tridimensionais. Na segunda parte, a qual se apresenta no Capítulo 3, foram abordados os aspectos gerais de uma formulação em coordenadas cartesianas da Teoria de Volumes Finitos (Bansal e Pindera, 2003 e Cavalcante e Pindera, 2012), a qual serviu de base, juntamente com aquela apresentada por Cavalcante e Marques (2005), para o desenvolvimento da formulação proposta no presente trabalho. Com o objetivo de verificar a formulação proposta, foram analisados no Capítulo 5 três problemas cujas soluções analíticas são fornecidas pela Teoria da Elasticidade Linear. A comparação dos resultados numéricos com os obtidos a partir das soluções analíticas confirmou a eficiência da mencionada formulação na análise bidimensional de estruturas axissimétricas.

Para dar continuidade ao presente trabalho, sugere-se a extensão da presente formulação para coordenadas cilíndricas, a qual possibilitará a análise de estruturas axissimétricas submetidas a carregamentos que variam com a coordenada normal ao plano  $r - \theta$ , assim como acontece com as paredes de reservatórios cilíndricos submetidas à pressão hidrostática.

## Referências

- BANSAL, Y.; PINDERA, M.-J. Efficient reformulation of the thermoelastic higher-order theory for functionally graded materials. **Journal of Thermal Stresses**, v. 26, p. 1055-1092, 1 nov. 2003.
- CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M.-J. Generalized Finite-Volume Theory for Elastic Stress Analysis in Solid Mechanics - Part I: Framework. **Journal of Applied Mechanics**, v. 79, September 2012. 79(5),051006.
- CAVALCANTE, M. A. A. **Modelagem do Comportamento Termo-Mecânico Transiente de Estruturas de Materiais Compósitos pela Teoria de Volumes Finitos**. Maceió: Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil - Universidade Federal de Alagoas, 2006.
- CAVALCANTE, M. A. A.; MARQUES, P. C.; PINDERA, M.-J. Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials—part I: analysis. **Journal of Applied Mechanics**, 2007. 74(5), 935-945.
- CAVALCANTE, M. A. A.; MARQUES, S. P. C. Análise Termoelástica Transiente de Estruturas Radialmente Simétricas de Materiais Compósitos de Gradação Funcional. **Proceedings of the XXVI CILAMCE-Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Guarapari, 2005.
- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 1ª. ed. São Paulo: Érica, 2000. ISBN: 85-7194-7414.
- FISH, J.; BELYSTCHKO, T. **Um Primeiro Curso de Elementos Finitos**. Tradução de Ricardo Nicolau Nassar Koury e Luiz Machado. Rio de Janeiro: LTC, 2009. ISBN: 978-85-216-1701-3.
- SADD, M. H. **Elasticity: Theory, Applications, and Numerics**. Burlington: Elsevier Butterworth Heinemann, 2009. ISBN: 0-12-605811-3.
- SILVA, V. D. D. **Mecânica e Resistência dos Materiais**. 3ª. ed. Coimbra: ZUARI - Edição de Livros Técnicos, LTDA, 2004. ISBN: 972-98155-1-8.
- TIMOSHENKO, P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. Tradução de Sérgio Fernandes Villaça; Humberto Lima Soriano e Hierônimo Santos Souza. 3ª. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1986. ISBN: 85-7030-180-4.
- VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011. ISBN: 978-85-352-3929-4.
- VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. T. **Introdução à Teoria da Elasticidade**. 3ª. ed. Rio de Janeiro: COPPE/UFRRJ, 1998. ISBN: 85-285-0025-X.





## ***APÊNDICE A – Matrizes utilizadas no Cálculo da Matriz de Rigidez Local da Formulação em Coordenadas Cartesianas***

Neste Apêndice encontram-se as definições das matrizes auxiliares que aparecem nas equações que constituem a formulação em coordenadas cartesianas da Teoria de Volumes Finitos, apresenta no Capítulo 3.

$$\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h_q}{2} & 0 & \frac{h_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_q}{2} & 0 & \frac{h_q^2}{4} \\ \frac{b_q}{2} & 0 & \frac{b_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_q}{2} & 0 & \frac{b_q^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{h_q}{2} & 0 & \frac{h_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_q}{2} & 0 & \frac{h_q^2}{4} \\ -\frac{b_q}{2} & 0 & \frac{b_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_q}{2} & 0 & \frac{b_q^2}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & B_{12}^{(q)} & 0 & B_{14}^{(q)} & B_{15}^{(q)} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21}^{(q)} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{26}^{(q)} & 0 & B_{28}^{(q)} \\ B_{31}^{(q)} & 0 & B_{33}^{(q)} & 0 & 0 & B_{36}^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & B_{42}^{(q)} & 0 & 0 & B_{45}^{(q)} & 0 & B_{47}^{(q)} & 0 \\ 0 & B_{52}^{(q)} & 0 & B_{54}^{(q)} & B_{55}^{(q)} & 0 & 0 & 0 \\ B_{61}^{(q)} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{66}^{(q)} & 0 & B_{68}^{(q)} \\ B_{71}^{(q)} & 0 & B_{73}^{(q)} & 0 & 0 & B_{76}^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & B_{82}^{(q)} & 0 & 0 & B_{85}^{(q)} & 0 & B_{87}^{(q)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Os coeficientes não nulos da matriz que consta na Equação A.3 são definidos na Equação A.4.

$$B_{12}^{(q)} = -C_{44}^{(q)}, \quad B_{14}^{(q)} = \frac{3}{2}h_q C_{44}^{(q)}, \quad B_{15}^{(q)} = -C_{44}^{(q)}, \quad (\text{A.4a})$$

$$B_{21}^{(q)} = -C_{23}^{(q)}, \quad B_{26}^{(q)} = -C_{22}^{(q)}, \quad B_{28}^{(q)} = \frac{3}{2}h_q C_{22}^{(q)}, \quad (\text{A.4b})$$

$$B_{31}^{(q)} = C_{22}^{(q)}, \quad B_{33}^{(q)} = \frac{3}{2}b_q C_{22}^{(q)}, \quad B_{36}^{(q)} = C_{23}^{(q)} \quad (\text{A.4c})$$

$$B_{42}^{(q)} = C_{44}^{(q)}, \quad B_{45}^{(q)} = C_{44}^{(q)}, \quad B_{47}^{(q)} = \frac{3}{2}b_q C_{44}^{(q)}, \quad (\text{A.4d})$$

$$B_{52}^{(q)} = C_{44}^{(q)}, \quad B_{54}^{(q)} = \frac{3}{2}h_q C_{44}^{(q)}, \quad B_{55}^{(q)} = C_{44}^{(q)}, \quad (\text{A.4e})$$

$$B_{61}^{(q)} = C_{23}^{(q)}, \quad B_{66}^{(q)} = C_{22}^{(q)}, \quad B_{68}^{(q)} = \frac{3}{2}h_q C_{22}^{(q)}, \quad (\text{A.4f})$$

$$B_{71}^{(q)} = -C_{22}^{(q)}, \quad B_{73}^{(q)} = \frac{3}{2}b_q C_{22}^{(q)}, \quad B_{76}^{(q)} = -C_{23}^{(q)} \quad (\text{A.4g})$$

$$B_{82}^{(q)} = -C_{44}^{(q)}, \quad B_{85}^{(q)} = -C_{44}^{(q)}, \quad B_{87}^{(q)} = \frac{3}{2}b_q C_{44}^{(q)} \quad (\text{A.4h})$$

## ***APÊNDICE B – Matrizes utilizadas no Cálculo da Matriz de Rigidez Local da Formulação em Coordenadas Polares***

Neste Apêndice encontram-se as definições das matrizes que aparecem nas equações que constituem a formulação em coordenadas polares da Teoria de Volumes Finitos, apresentada no Capítulo 4.

$$\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} -\frac{e_q}{2} & 0 & \frac{e_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e_q}{2} & 0 & \frac{e_q^2}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_q}{2} & 0 & \frac{\alpha_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_q}{2} & 0 & \frac{\alpha_q^2}{4} \\ \frac{e_q}{2} & 0 & \frac{e_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e_q}{2} & 0 & \frac{e_q^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_q}{2} & 0 & \frac{\alpha_q^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_q}{2} & 0 & \frac{\alpha_q^2}{4} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(q)} & 0 & B_{13}^{(q)} & 0 & 0 & B_{16}^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{(q)} & 0 & 0 & B_{25}^{(q)} & 0 & B_{27}^{(q)} & 0 \\ 0 & B_{32}^{(q)} & 0 & B_{34}^{(q)} & B_{35}^{(q)} & B_{36}^{(q)} & B_{37}^{(q)} & B_{38}^{(q)} \\ B_{41}^{(q)} & B_{42}^{(q)} & B_{43}^{(q)} & B_{44}^{(q)} & B_{45}^{(q)} & 0 & 0 & B_{48}^{(q)} \\ B_{51}^{(q)} & 0 & B_{53}^{(q)} & 0 & 0 & B_{56}^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & B_{62}^{(q)} & 0 & 0 & B_{65}^{(q)} & 0 & B_{67}^{(q)} & 0 \\ 0 & B_{72}^{(q)} & 0 & B_{74}^{(q)} & B_{75}^{(q)} & B_{76}^{(q)} & B_{77}^{(q)} & B_{78}^{(q)} \\ B_{81}^{(q)} & B_{82}^{(q)} & B_{83}^{(q)} & B_{84}^{(q)} & B_{85}^{(q)} & 0 & 0 & B_{88}^{(q)} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{b}_{(8 \times 2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(q)} & 0 \\ 0 & b_{22}^{(q)} \\ 0 & b_{32}^{(q)} \\ b_{41}^{(q)} & 0 \\ b_{51}^{(q)} & 0 \\ 0 & b_{62}^{(q)} \\ 0 & b_{72}^{(q)} \\ b_{81}^{(q)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

$$\Phi_{(2 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{(q)} & 0 & \Phi_{13}^{(q)} & \Phi_{14}^{(q)} & 0 & \Phi_{16}^{(q)} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{22}^{(q)} & 0 & 0 & \Phi_{25}^{(q)} & 0 & \Phi_{27}^{(q)} & \Phi_{28}^{(q)} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$\Theta_{(2 \times 2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \Theta_{11}^{(q)} & 0 \\ 0 & \Theta_{22}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Os coeficientes não nulos das matrizes que constam nas Equações B.3 a B.6 são definidos nas equações B.7 e B.10, respectivamente.

$$B_{11}^{(q)} = -\frac{-2C_{rr}^{(q)} r_o^{(q)} + C_{rr}^{(q)} e_q + C_{r\theta}^{(q)} e_q}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad B_{13}^{(q)} = \frac{e_q \left( -6C_{rr}^{(q)} r_o^{(q)} + 3C_{rr}^{(q)} e_q + C_{r\theta}^{(q)} e_q \right)}{2 \left( 2r_o^{(q)} + e_q \right)}, \quad (\text{B.7a})$$

$$B_{16}^{(q)} = \frac{2C_{r\theta}^{(q)}}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad B_{22}^{(q)} = \frac{2G^{(q)}}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad B_{25}^{(q)} = \frac{2G^{(q)}r_o^{(q)}}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad (\text{B.7b})$$

$$B_{27}^{(q)} = \frac{G^{(q)}e_q(e_q - 3r_o^{(q)})}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad B_{32}^{(q)} = G^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7c})$$

$$B_{34}^{(q)} = -\frac{3}{2}G^{(q)}\alpha_q \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad B_{35}^{(q)} = \frac{G^{(q)}e_q(e_q - 3r_o^{(q)})}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad (\text{B.7d})$$

$$B_{36}^{(q)} = \frac{1}{2}G^{(q)}\alpha_q \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7e})$$

$$B_{37}^{(q)} = \frac{1}{8}G^{(q)} \frac{1}{e_q} \left( -12e_q r_o^{(q)} + 12(r_o^{(q)})^2 \ln \left( \frac{e_q + 2r_o^{(q)}}{-e_q + 2r_o^{(q)}} \right) + e_q^2 \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \right), \quad (\text{B.7f})$$

$$B_{38}^{(q)} = -\frac{1}{4}G^{(q)}\alpha_q^2 \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7g})$$

$$B_{41}^{(q)} = C_{rr}^{(q)} r_o^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{e_q + 2r_o^{(q)}}{-e_q + 2r_o^{(q)}} \right) - C_{rr}^{(q)} - C_{r\theta}^{(q)}, \quad (\text{B.7h})$$

$$B_{42}^{(q)} = -\frac{1}{2}C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7i})$$

$$B_{43}^{(q)} = -\frac{1}{8}C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \left( -12e_q r_o^{(q)} + 12(r_o^{(q)})^2 \ln \left( \frac{e_q + 2r_o^{(q)}}{-e_q + 2r_o^{(q)}} \right) + e_q^2 \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \right), \quad (\text{B.7j})$$

$$B_{44}^{(q)} = \frac{1}{4}C_{rr}^{(q)}\alpha_q^2 \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad B_{45}^{(q)} = C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7k})$$

$$B_{46}^{(q)} = -C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7l})$$

$$B_{48}^{(q)} = -\frac{3}{2}C_{rr}^{(q)}\alpha_q\frac{1}{e_q}\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right), \quad (\text{B.7m})$$

$$B_{51}^{(q)} = \frac{2C_{rr}^{(q)}r_o^{(q)}+C_{rr}^{(q)}e_q+C_{r\theta}^{(q)}e_q}{2r_o^{(q)}+e_q}, \quad B_{53}^{(q)} = \frac{e_q\left(6C_{rr}^{(q)}r_o^{(q)}+3C_{rr}^{(q)}e_q+C_{r\theta}^{(q)}e_q\right)}{2\left(2r_o^{(q)}+e_q\right)}, \quad (\text{B.7n})$$

$$B_{56}^{(q)} = \frac{2C_{r\theta}^{(q)}}{2r_o^{(q)}+e_q}, \quad B_{62}^{(q)} = \frac{2G^{(q)}}{2r_o^{(q)}+e_q}, \quad B_{65}^{(q)} = \frac{2G^{(q)}r_o^{(q)}}{2r_o^{(q)}+e_q}, \quad (\text{B.7o})$$

$$B_{67}^{(q)} = \frac{G^{(q)}e_q\left(e_q+3r_o^{(q)}\right)}{2r_o^{(q)}+e_q}, \quad B_{72}^{(q)} = -G^{(q)}\frac{1}{e_q}\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right), \quad (\text{B.7p})$$

$$B_{74}^{(q)} = -\frac{3}{2}G^{(q)}\alpha_q\frac{1}{e_q}\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right), \quad B_{75}^{(q)} = -\frac{G^{(q)}e_q\left(e_q-3r_o^{(q)}\right)}{-2r_o^{(q)}+e_q}, \quad (\text{B.7q})$$

$$B_{76}^{(q)} = \frac{1}{2}G^{(q)}\alpha_q\frac{1}{e_q}\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right), \quad (\text{B.7r})$$

$$B_{77}^{(q)} = -\frac{1}{8}G^{(q)}\frac{1}{e_q}\left(-12e_qr_o^{(q)}+12\left(r_o^{(q)}\right)^2\ln\left(\frac{e_q+2r_o^{(q)}}{-e_q+2r_o^{(q)}}\right)+e_q^2\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right)\right), \quad (\text{B.7s})$$

$$B_{78}^{(q)} = \frac{1}{4}G^{(q)}\alpha_q^2\frac{1}{e_q}\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right), \quad (\text{B.7t})$$

$$B_{81}^{(q)} = C_{rr}^{(q)}r_o^{(q)}\frac{1}{e_q}\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right)+C_{rr}^{(q)}+C_{r\theta}^{(q)}, \quad (\text{B.7u})$$

$$B_{82}^{(q)} = -\frac{1}{2}C_{rr}^{(q)}\frac{1}{e_q}\ln\left(\frac{-e_q+2r_o^{(q)}}{e_q+2r_o^{(q)}}\right), \quad (\text{B.7v})$$

$$B_{83}^{(q)} = \frac{1}{8} C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \left( -12e_q r_o^{(q)} + 12 \left( r_o^{(q)} \right)^2 \ln \left( \frac{e_q + 2r_o^{(q)}}{-e_q + 2r_o^{(q)}} \right) + e_q^2 \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \right), \quad (\text{B.7w})$$

$$B_{84}^{(q)} = \frac{1}{4} C_{rr}^{(q)} \alpha_q^2 \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad B_{85}^{(q)} = C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7x})$$

$$B_{86}^{(q)} = -C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.7y})$$

$$B_{88}^{(q)} = -\frac{3}{2} C_{rr}^{(q)} \alpha_q \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \quad (\text{B.7z})$$

$$b_{11}^{(q)} = \frac{2C_{r\theta}}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad b_{22}^{(q)} = -\frac{2G^{(q)}}{-2r_o^{(q)} + e_q}, \quad (\text{B.8a})$$

$$b_{32}^{(q)} = -G^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad b_{41}^{(q)} = C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.8b})$$

$$b_{51}^{(q)} = \frac{2C_{r\theta}}{2r_o^{(q)} + e_q}, \quad b_{62}^{(q)} = \frac{2G^{(q)}}{2r_o^{(q)} + e_q}, \quad (\text{B.8c})$$

$$b_{72}^{(q)} = G^{(q)} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \quad b_{81}^{(q)} = C_{rr}^{(q)} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \quad (\text{B.8d})$$

$$\Phi_{11}^{(q)} = -C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.9a})$$

$$\Phi_{13}^{(q)} = -\frac{1}{8} \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \left( -36e_q r_o^{(q)} + 12 \left( r_o^{(q)} \right)^2 \ln \left( \frac{e_q + 2r_o^{(q)}}{-e_q + 2r_o^{(q)}} \right) + e_q \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \right), \quad (\text{B.9b})$$

$$\Phi_{14}^{(q)} = -3G^{(q)} \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \quad (\text{B.9c})$$

$$\Phi_{16}^{(q)} = \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \left( C_{rr}^{(q)} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) + G^{(q)} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \right) \quad (\text{B.9d})$$

$$\Phi_{22}^{(q)} = \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \left( C_{rr}^{(q)} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) + G^{(q)} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \right), \quad (\text{B.9e})$$

$$\Phi_{25}^{(q)} = -G^{(q)} r_o^{(q)} \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.9f})$$

$$\Phi_{27}^{(q)} = -\frac{1}{8} \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \left( -36e_q r_o^{(q)} + 12 \left( r_o^{(q)} \right)^2 \ln \left( \frac{e_q + 2r_o^{(q)}}{-e_q + 2r_o^{(q)}} \right) + e_q \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \right), \quad (\text{B.9g})$$

$$\Phi_{28}^{(q)} = 3C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right), \quad (\text{B.9h})$$

$$\Theta_{11}^{(q)} = C_{rr}^{(q)} \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \quad (\text{B.10a})$$

$$\Theta_{22}^{(q)} = G^{(q)} \frac{1}{e_q r_o^{(q)}} \ln \left( \frac{-e_q + 2r_o^{(q)}}{e_q + 2r_o^{(q)}} \right) \quad (\text{B.10b})$$



## ***APÊNDICE C – Dedução das equações de equilíbrio de um subvolume genérico em termos dos vetores de tensão atuantes nas faces***

Conforme apresentado na Seção 3.2.3, na ausência de forças de corpo agindo sobre um subvolume genérico, a satisfação das condições de equilíbrio é garantida fazendo-se o somatório de forças atuantes nas faces do subvolume igual ao vetor nulo, como mostra a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{R}^{(q)} = \left\{ \begin{array}{c} R_r^{(q)} \\ R_\theta^{(q)} \end{array} \right\} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (\text{C.1})$$

sendo

$R_r^{(q)}$  - componente radial da força resultante agindo sobre as faces do subvolume  $q$ ; e

$R_\theta^{(q)}$  - componente circunferencial da força resultante agindo sobre as faces do subvolume  $q$ .

Apresentam-se abaixo as equações de equilíbrio de um subvolume genérico, expressas na forma escalar:

$$R_r^{(q)} = \sum_{p=1}^4 R_r^{(q,p)} = 0 \quad (\text{equação de equilíbrio na direção } r) \quad (\text{C.2})$$

$$R_\theta^{(q)} = \sum_{p=1}^4 R_\theta^{(q,p)} = 0 \quad (\text{equação de equilíbrio na direção } \theta) \quad (\text{C.3})$$

nas quais

$R_r^{(q,p)}$  - componente radial da força resultante agindo sobre a face  $p$  do subvolume  $q$ ; e

$R_\theta^{(q,p)}$  - componente circunferencial da força resultante agindo sobre a face  $p$  do subvolume  $q$ .

Os valores que figuram nas somatórias que constam nas expressões acima (Equação C.2) podem ser avaliados da seguinte forma:

$$R_r^{(q,1)} = \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} \left( t_r^{(q,1)}(\theta^{(q)}) \cos(\theta^{(q)}) - t_\theta^{(q,1)} \sin(\theta^{(q)}) \right) (r_o^{(q)} - e_q/2) d\theta^{(q)} \quad (\text{C.4a})$$

$$R_r^{(q,2)} = \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} \left[ t_r^{(q,2)}(r^{(q)}) \cos(\alpha_q/2) - t_\theta^{(q,2)}(r^{(q)}) \sin(\alpha_q/2) \right] dr^{(q)} = e_q \left( \bar{t}_r^{(q,2)} \cos(\alpha_q/2) - \bar{t}_\theta^{(q,2)} \sin(\alpha_q/2) \right) \quad (\text{C.4b})$$

$$R_r^{(q,3)} = \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} \left( t_r^{(q,1)}(\theta^{(q)}) \cos(\theta^{(q)}) - t_\theta^{(q,1)} \sin(\theta^{(q)}) \right) (r_o^{(q)} + e_q/2) d\theta^{(q)} \quad (\text{C.4c})$$

$$R_r^{(q,4)} = \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} \left[ t_r^{(q,4)}(r^{(q)}) \cos(\alpha_q/2) - t_\theta^{(q,4)}(r^{(q)}) \sin(\alpha_q/2) \right] dr^{(q)} = e_q \left( \bar{t}_r^{(q,4)} \cos(\alpha_q/2) - \bar{t}_\theta^{(q,4)} \sin(\alpha_q/2) \right) \quad (\text{C.4d})$$

$$R_\theta^{(q,1)} = \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} \left( t_\theta^{(q,1)}(\theta^{(q)}) \cos(\theta^{(q)}) - t_r^{(q,1)} \sin(\theta^{(q)}) \right) (r_o^{(q)} - e_q/2) d\theta^{(q)} \quad (\text{C.4e})$$

$$R_\theta^{(q,2)} = \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} \left[ t_\theta^{(q,2)}(r^{(q)}) \cos(\alpha_q/2) - t_r^{(q,2)}(r^{(q)}) \sin(\alpha_q/2) \right] dr^{(q)} = e_q \left( \bar{t}_\theta^{(q,2)} \cos(\alpha_q/2) - \bar{t}_r^{(q,2)} \sin(\alpha_q/2) \right) \quad (\text{C.4f})$$

$$R_\theta^{(q,3)} = \int_{-\alpha_q/2}^{+\alpha_q/2} \left( t_\theta^{(q,1)}(\theta^{(q)}) \cos(\theta^{(q)}) - t_r^{(q,1)} \sin(\theta^{(q)}) \right) (r_o^{(q)} + e_q/2) d\theta^{(q)} \quad (\text{C.4g})$$

$$R_\theta^{(q,4)} = \int_{-e_q/2}^{+e_q/2} \left[ t_\theta^{(q,4)}(r^{(q)}) \cos(\alpha_q/2) - t_r^{(q,4)}(r^{(q)}) \sin(\alpha_q/2) \right] dr^{(q)} = e_q \left( \bar{t}_\theta^{(q,4)} \cos(\alpha_q/2) - \bar{t}_r^{(q,4)} \sin(\alpha_q/2) \right) \quad (\text{C.4h})$$