

Thaynara Cecilia Santos

Superfícies Mínimas de Fronteira Livre na Bola Tridimensional

Maceió-AL

2018

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central

Bibliotecária Responsável: Janis Christine Angelina Cavalcante: CRB4 - 1664

S237s Santos, Thaynara Cecilia.
Superfícies mínimas de fronteira livre na bola tridimensional / Thaynara
Cecilia Santos. – 2018.
46f. : il.

Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vítório.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió,
2018.

Inclui bibliografia.
Apêndice: 45-46.

1. Geometria diferencial. 2. Segunda forma fundamental. 3. Superfícies
mínimas. 3. Disco Equatorial plano. 4. Catenóide crítico. I. Título.

CDU: 514.7

Thaynara Cecilia Santos

Superfícies Mínimas de Fronteira Livre na Bola Tridimensional

Dissertação de Mestrado na área de Geometria Diferencial apresentada ao curso de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Alagoas – Ufal

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória

Maceió-AL

2018

Thaynara Cecilia Santos

Superfícies Mínimas de Fronteira Livre na Bola Tridimensional

Dissertação de Mestrado na área de Geometria Diferencial, submetida em 11 / 05 / 18 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora



Prof. Dr. Feliciano Vitorio - Orientador - UFAL



Prof. Dr. Ivaldo Nunes - UFMA



Prof. Dr. Abraão Mendes - UFAL

*Ao meu orientador Prof. Feliciano Vitório,
a minha avó, mãe, irmã e aos amigos.*

Agradecimentos

Destaco minha gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Feliciano Vitório, pelo apoio e paciência, por acreditar em mim mesmo depois de todas as minhas falhas. Agradeço-o pelas conversas matemáticas, por sua amizade e pelo exemplo de pessoa e profissional que tem sido.

Agradeço aos amigos do Instituto de Matemática, pela amizade e apoio, especialmente a Laís Macêdo e Davis Guimalhães.

Agradeço aos funcionários da pós Ana, Fátima e Ewerton, pelos conselhos e pelo excelente trabalho realizado.

Agradeço aos professores da pós, especialmente ao Prof. Dr. Krerley Oliveira.

Ao Prof. Dr. Abraão Mendes, pelas correções e sugestões que enriqueceram esta dissertação.

A Capes pelo suporte financeiro.

A Deus por tudo...

Resumo

Nesta dissertação, estudamos uma caracterização do disco equatorial plano e do catenóide crítico na bola unitária B^3 do \mathbb{R}^3 em termos da sua segunda forma fundamental. O trabalho aqui desenvolvido baseia-se no artigo “*A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball*” de Lucas Ambrozio e Ivaldo Nunes.

Palavras-chaves: Segunda Forma Fundamental; Superfície Mínima; Disco Equatorial Plano; Catenóide Crítico.

Abstract

In this dissertation, we study a characterization of the flat equatorial disk and the critical catenoid in the unitary ball B^3 of \mathbb{R}^3 in terms of its second fundamental form. The work developed here is based on the article “*A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball*” by Lucas Ambrozio and Ivaldo Nunes.

Key-words: Second Fundamental Form; Minimal Surface; Flat Equatorial Disk; Critical Catenoid.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Variedades diferenciáveis; campo de vetores	11
1.2 Métricas Riemannianas; conexões	13
1.2.1 Métricas Riemannianas	13
1.2.2 Conexões	15
1.3 A segunda forma fundamental	20
1.4 Geodésicas	26
1.5 Homotopia; grupo fundamental	28
1.5.1 Homotopia	28
1.5.2 O Grupo Fundamental	29
2 Resultados principais	31
2.1 O Disco Equatorial Plano e o Catenóide Crítico	31
2.1.1 Prova do Teorema de Ambrozio-Nunes	37
3 Apêndice	44
Referências	46

Introdução

É de certo modo natural que hipóteses topológicas impliquem em resultados geométricos pela hierarquia das estruturas, melhor dizendo, uma estrutura geométrica, tal como uma métrica Riemanniana, é uma estrutura subjacente a uma estrutura diferencial, de variedade diferenciável, que por sua vez é subjacente a uma estrutura topológica, de variedade topológica. Resultados no caminho inverso são muito interessantes. A guisa de exemplo, temos o Teorema de Gauss-Bonnet que relaciona um invariante topológico, a característica de Euler, com um invariante métrico, a curvatura de Gauss. Pode-se provar de modo direto usando o Teorema de Gauss-Bonnet que é impossível termos uma métrica de curvatura positiva em um toro. Neste sentido, um dos fenômenos mais interessantes em geometria diferencial é o surgimento de “gaps topológicos” por meio de hipóteses analítico-geométricas. Na década de 60 do último século, importantes contribuições foram dadas nesta direção, uma delas podendo ser sumarizada como segue

Teorema A. (Simons, Chern-do Carmo-Kobayashi, Lawson) *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima fechada em S^{n+1} . Suponha que a segunda forma fundamental A satisfaz:*

$$|A|^2 \leq n.$$

Então

- i) $|A|^2 \equiv 0$ e Σ é um equador;*
- ii) ou $|A|^2(p) \equiv n$ e Σ é o toro de Clifford.*

Objetos geométricos de simples definição, tais como imersões mínimas e de curvatura média constante, são de suma importância e tem sido estudados por um longo tempo, tendo recentemente importantes avanços. Por exemplo, Lawson conjecturou, e foi demonstrado por Brendle, que o toro de Clifford é o único toro mínimo mergulhado em S^3 . Pinkall e Sterling conjecturaram, e foi provado por Andrews e Li, que o toro rotacional é o único toro mergulhado com curvatura média constante em S^3 .

Nesta dissertação estudamos alguns dos resultados obtidos por Lucas Ambrozio e Ivaldo Nunes que aparecem no artigo “*A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball*” a ser publicado no Comm. Anal. Geom., os quais são bastante interessantes e importantes, pois revelam que a correspondência entre superfícies mínimas na esfera e superfícies mínimas de fronteira livre na bola pode ser levada para fenômenos de “gap”.

De um modo mais preciso, neste trabalho, é vista uma caracterização do disco equatorial plano e do catenóide crítico na bola unitária B^3 do \mathbb{R}^3 em termos da sua se-

gunda forma fundamental, o que pode ser visto como o análogo do Teorema A para o caso de fronteira livre. O Teorema principal é o seguinte:

Teorema B.(Ambrozio-Nunes) *Seja Σ^2 uma superfície mínima de fronteira livre em B^3 . Suponha que para todos os pontos x em Σ ,*

$$|A|^2(x)\langle x, N(x)\rangle^2 \leq 2,$$

onde $N(x)$ denota um vetor normal unitário no ponto $x \in \Sigma$ e A denota a segunda forma fundamental de Σ . Então ocorre apenas um dos seguintes casos

- i) $|A|^2(x)\langle x, N(x)\rangle^2 \equiv 0$ e Σ é o disco equatorial plano;*
- ii) ou $|A|^2(p)\langle p, N(p)\rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ é o catenóide crítico.*

Apresentaremos a demonstração do teorema acima, bem como os resultados necessários para demonstrá-lo. Um resultado posterior e semelhante a este para Superfícies mínimas em bolas geodésicas do espaço hiperbólico e hemisfério foi obtido por Haizhong Li e Changwei Xiong e pode ser encontrado no artigo “*Gap Theorem for Free Boundary Minimal Surfaces in Geodesic Balls of Hyperbolic Space and Hemisphere*”.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos resultados básicos que serão utilizados neste trabalho, tais como definições, proposições e teoremas de geometria Riemanniana e de Grupo Fundamental. Salvo menção contrária, os resultados de geometria Riemanniana podem ser encontrados demonstrados na referência [6] enquanto que os de Grupo Fundamental na referência [9]. Ao longo de todo este trabalho, a palavra diferenciável significará possuir todas as derivadas contínuas de todas as ordens.

1.1 Variedades diferenciáveis; campo de vetores

Definição 1.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto Σ e uma família de aplicações $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em Σ tais que:*

1. $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = \Sigma$.
2. Para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente as condições 1 e 2.

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou aplicação \mathbf{x}_α) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma **parametrização** (ou **sistema de coordenadas**) de Σ em p ; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma **estrutura diferenciável** em Σ .

Observação 1.1.1. *A topologia natural de uma variedade diferenciável pode ser estranha. Em particular, pode acontecer que um (ou ambos) dos axiomas abaixo não sejam satisfeitos:*

1. **Axioma de Hausdorff:** dados dois pontos distintos em Σ , existem vizinhanças desses pontos que não se intersectam.
2. **Axioma da base enumerável:** Σ pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (dizemos, então, que Σ tem base enumerável).

Neste trabalho, todas as variedades a serem consideradas são Hausdorff e têm base enumerável.

Uma superfície regular é um exemplo de uma variedade diferenciável bidimensional. Um exemplo trivial de uma variedade diferenciável n -dimensional é o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com a estrutura diferenciável dada pela aplicação identidade.

Às vezes denotaremos uma variedade diferenciável n -dimensional Σ por Σ^n .

Definição 1.1.2. *Seja Σ uma variedade diferenciável. Diz-se que Σ é **orientável** se Σ admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que:*

1. *para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.*

*Caso contrário, diz-se que Σ é **não-orientável**. Se Σ é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo 1 é chamada uma **orientação** de Σ e Σ é, então, **orientada**.*

Definição 1.1.3. *Sejam Σ_1^n e Σ_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é diferenciável em um ponto $p \in \Sigma_1$ se, dada uma parametrização $\mathbf{y}_\beta : V_\beta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \Sigma_2$ em torno de $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma_1$ em torno de p , tal que $\varphi(\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)) \subset \mathbf{y}_\beta(V_\beta)$ e a aplicação*

$$\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um conjunto aberto de Σ_1 se for diferenciável em todos os pontos desse conjunto.

Definição 1.1.4. *Seja Σ uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ é chamada uma **curva** (diferenciável) em Σ . Suponha que $\alpha(0) = p \in \Sigma$ e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de Σ diferenciáveis em p . O **vetor tangente à curva** α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

*Um **vetor tangente em p** é o vetor tangente de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a Σ em p será indicado por $T_p\Sigma$.*

Fibrado Tangente

O **fibrado tangente** $T\Sigma$ de uma variedade diferenciável Σ^n é definido por $T\Sigma = \{(p, v); p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma\}$. O conjunto $T\Sigma$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Definição 1.1.5. *Um **campo de vetores** X em uma variedade diferenciável Σ é uma correspondência que a cada ponto $p \in \Sigma$ associa um vetor $X(p) \in T_p\Sigma$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de Σ no fibrado tangente $T\Sigma$. O campo é **diferenciável** se a aplicação $X : \Sigma \rightarrow T\Sigma$ é diferenciável.*

Considerando uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a \mathbf{x} , $i = 1, \dots, n$.

Às vezes é conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ do conjunto das funções \mathcal{D} das funções diferenciáveis em Σ no conjunto \mathcal{F} das funções em Σ , definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f \in \mathcal{D},$$

onde f indica a expressão de f na parametrização \mathbf{x} . Neste contexto X é diferenciável se e só se $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, isto é, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

A interpretação de X com um operador em \mathcal{D} permite-nos considerar os iterados de X . Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em Σ e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$.

Lema 1.1.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável Σ . Então existe um único campo vetorial Z tal que para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

O campo vetorial Z dado pelo lema acima é chamado o **colchete** $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y .

Definição 1.1.6. *Sejam Σ_1^m e Σ_2^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é uma **imersão** se $d\varphi_p : T_p\Sigma_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}\Sigma_2$ é injetiva para todo $p \in \Sigma_1$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(\Sigma_1) \subset \Sigma_2$, onde φ tem a topologia induzida por Σ_2 , diz-se que φ é um **mergulho**. Se $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ e a inclusão $i : \Sigma_1 \hookrightarrow \Sigma_2$ é um mergulho, diz-se que Σ_1 é uma **subvariedade** de Σ_2 .*

1.2 Métricas Riemannianas; conexões

1.2.1 Métricas Riemannianas

Definição 1.2.1. *Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável Σ é uma correspondência que associa a cada ponto p de Σ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p\Sigma$ e que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma **variedade Riemanniana**.

Definição 1.2.2. *Sejam Σ_1 e Σ_2 variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma **isometria** se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \text{para todo } p \in \Sigma_1, u, v \in T_p \Sigma_1. \quad (1.1)$$

Definição 1.2.3. *Sejam Σ_1 e Σ_2 variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é uma **isometria local** em $p \in \Sigma_1$ se existe uma vizinhança $U \subset \Sigma_1$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1.1).*

Exemplo 1.2.1. $\Sigma = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. \mathbb{R}^n é chamado **espaço euclidiano de dimensão n** e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica euclidiana.

Exemplo 1.2.2. Variedades imersas. *Seja $f : \Sigma_1^n \rightarrow \Sigma_2^{n+k}$ uma imersão, isto é, f é diferenciável e $df_p : T_p \Sigma_1 \rightarrow T_{f(p)} \Sigma_2$ é injetiva para todo $p \in \Sigma_1$. Se Σ_2 tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em Σ_1 por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_p \Sigma_1$. A métrica de Σ_1 é chamada então a métrica **induzida** por f e f é uma **imersão isométrica**.*

Variedades com fronteira

Seja \mathbb{H}^n o semi-espaço de \mathbb{R}^n dado por $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$. Os conjuntos abertos de \mathbb{H}^n são aqueles obtidos pela interseção de \mathbb{H}^n com abertos do \mathbb{R}^n .

Definição 1.2.4. *Uma **variedade diferenciável com fronteira** de dimensão n é um conjunto Σ e uma família de aplicações $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \Sigma$ de abertos U_α de \mathbb{H}^n em Σ tais que:*

1. $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = \Sigma$.
2. Para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{H}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente as condições 1 e 2.

Os conceitos e resultados dados para variedades diferenciáveis são dados de maneira análoga para variedades com fronteira, apenas trocando \mathbb{R}^n por \mathbb{H}^n .

Definição 1.2.5. *Um ponto $p \in \Sigma$ é um **ponto de fronteira** em Σ se, para alguma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow \Sigma$ em p , tivermos que $\mathbf{x}(0, x_2, \dots, x_n) = p$. Em [4] é possível verificar que a definição de ponto de fronteira independe da parametrização.*

O conjunto formado por todos os pontos de fronteira de uma variedade diferenciável Σ com fronteira será indicado por $\partial\Sigma$.

Proposição 1.2.1. *Seja Σ uma variedade diferenciável n -dimensional com fronteira. Então $\partial\Sigma$ é uma variedade $(n - 1)$ -dimensional no sentido tradicional. Além disso, se Σ é orientável, toda orientação de Σ induz uma orientação em $\partial\Sigma$ de maneira natural.*

Demonstração. Ver [4]. □

Diremos que uma variedade Σ^2 tem fronteira convexa se a curvatura geodésica k_g de $\partial\Sigma$ é não negativa para todos os pontos em $\partial\Sigma$.

Diz-se que o vetor $v \in \mathbb{R}^m$ **aponta para fora** do semi-espaço $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ quando $v \notin \mathbb{H}^n$.

Dado que a fronteira $\partial\Sigma$ é uma variedade diferenciável $(n - 1)$ -dimensional, podemos para cada ponto $p \in \partial\Sigma$, considerar o espaço tangente $T_p\partial\Sigma$ em $\partial\Sigma$. Segue-se das definições que $T_p\partial\Sigma$ é um subespaço vetorial de $T_p\Sigma$. Logo, podemos considerar o subespaço de $T_p\Sigma$ formado pelo conjunto dos vetores normais a $\partial\Sigma$. Um desses vetores é o chamado **vetor conormal** que será definido a seguir.

Definição 1.2.6. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana orientada com fronteira. Dado um ponto $p \in \partial\Sigma$, diz-se que um vetor $v \in T_p\Sigma$ aponta para fora de Σ quando existe uma parametrização positiva $\mathbf{x} : U \rightarrow \Sigma$ definida no aberto $U \subset \mathbb{H}^n$, com $p = \mathbf{x}(u)$ e $v = d_u\mathbf{x}(v_0)$ com v_0 apontando para fora de \mathbb{H}^n . O **vetor conormal** ν a $\partial\Sigma$ no ponto $p \in \partial\Sigma$ é o vetor normal unitário a $T_p\partial\Sigma$ que aponta para fora de Σ .*

1.2.2 Conexões

Indicaremos por $\mathcal{X}(\Sigma)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em Σ e por $\mathcal{D}(\Sigma)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em Σ .

Definição 1.2.7. *Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade diferenciável Σ é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(\Sigma) \times \mathcal{X}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{X}(\Sigma)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e $f, g \in \mathcal{D}(\Sigma)$.

Observação 1.2.1. Escolhendo um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i (y_j) X_j. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,$$

concluimos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X .

Definição 1.2.8. Uma aplicação diferenciável $c : I \rightarrow \Sigma$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável Σ chama-se uma **curva**.

Definição 1.2.9. Um **campo vetorial** V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow \Sigma$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}\Sigma$. Diz-se que V é **diferenciável** se para toda função diferenciável f em Σ , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .

Proposição 1.2.2. Seja Σ uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow \Sigma$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominada **derivada covariante** de V ao longo de c , tal que:

$$i) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$ii) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \text{ onde } W \text{ é um campo de vetores ao longo de } c \text{ e } f \text{ é uma função diferenciável em } I.$$

$$iii) \quad \text{Se } V \text{ é induzido por um campo de vetores } Y \in \mathcal{X}(\Sigma), \text{ i.e., } V(t) = Y(c(t)), \text{ então} \\ \frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y.$$

Definição 1.2.10. Seja Σ uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita **compatível** com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Definição 1.2.11. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável Σ é dita **simétrica** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma).$$

Observação 1.2.2. Em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) , o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

o que justifica o nome adotado (observe que (1.2) é equivalente ao fato que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$).

Teorema 1.2.1. (Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana Σ , existe uma única conexão afim ∇ em Σ satisfazendo as condições:

- i) ∇ é simétrica.
- ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Observação 1.2.3. A conexão dada pelo teorema acima é chamada de **conexão Riemanniana** ou **conexão de Levi-Civita**.

Observação 1.2.4. Seja (\mathbf{x}, U) um sistema de coordenadas. As funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os **coeficientes da conexão** ∇ em U ou os **símbolos de Christoffel** da conexão.

Um conjunto $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{X}(\Sigma)$ é um **referencial** para Σ , se $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base de $T_p \Sigma$ para cada $p \in \Sigma$. Isto nos diz que todo campo de vetores $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ pode ser escrito da forma

$$X = \sum_i^n x_i E_i,$$

onde as funções $x_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis. Um referencial é dito **ortonormal** se $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_p \Sigma$ para cada $p \in \Sigma$. Dizemos que um referencial $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é **geodésico numa vizinhança** $U \subset \Sigma$, se para cada $p \in U$, $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_p \Sigma$ e $\nabla_{E_i} E_j = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.

A existência de um referencial geodésico numa vizinhança normal U de p é garantida tomando $E(q)$, para cada $q \in U$, como o transporte paralelo de $E(p)$ ao longo da curva que liga p a q .

Definição 1.2.12. Seja Σ uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(\Sigma)$. O **gradiente** de f em Σ é o campo vetorial $\text{grad } f$ definido por

$$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in \Sigma, \quad v \in T_p \Sigma.$$

Se $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ é uma extensão local de v , temos

$$\langle \text{grad } f(p), X \rangle = X_p(f).$$

Às vezes usaremos a notação ∇^Σ para denotar o gradiente.

Proposição 1.2.3. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana, $f \in \mathcal{D}(\Sigma)$ e (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas locais em Σ . Então*

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ e $[g^{ij}]$ é a matriz inversa de $[g_{ij}]$.

Demonstração. Dado que $\text{grad } f \in \mathcal{X}(\Sigma)$ e que $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ forma uma base de $T_p M$, podemos escrever

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \left\langle \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i g_{ij}. \quad (1.3)$$

Como a matriz $[g_{ij}]$ é invertível, pois é positiva definida, segue que multiplicando (1.3) por $[g^{ij}]$ temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} g^{jk} = \sum_{i=1}^n a_i g_{ij} g^{jk},$$

somando em j , teremos

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{jk} &= \sum_{i,j=1}^n a_i g_{ij} g^{jk} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n (g_{ij} g^{jk}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ik} = a_k. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} g^{ji} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

□

Observação 1.2.5. *Quando $\Sigma = \mathbb{R}^n$ e $g_{ij} = \delta_{ij}$ é a métrica Euclidiana, temos*

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definição 1.2.13. *Seja $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$. A **divergência** de X é a função diferenciável em Σ definida por*

$$\begin{aligned} \text{div } X : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto (\text{div})(p) = \text{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\} \end{aligned}$$

onde $v \in T_p \Sigma$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Definição 1.2.14. Seja Σ uma variedade Riemanniana e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **Laplaciano** de f é a função $\Delta f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = -\operatorname{div}(\nabla f).$$

Definição 1.2.15. Uma função $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 é dita harmônica se Δf é identicamente nulo.

Definição 1.2.16. Seja Σ uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(\Sigma)$. O **hessiano** de f em $p \in \Sigma$ é o operador linear auto-adjunto $\operatorname{Hess} f$ que associa $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$ a aplicação

$$\operatorname{Hess}(f)(X, Y) = (XY - \nabla_X Y)f = \operatorname{Hess}(f)(Y, X).$$

Proposição 1.2.4. Se $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

$$-\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f).$$

Demonstração. Seja $p \in \Sigma$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de $T_p \Sigma$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)_p &= \langle \nabla_{X_i} \nabla f, X_i \rangle_p \\ &= \operatorname{div}(\nabla f)(p) = -\Delta f(p). \end{aligned}$$

□

Recordemos que uma **superfície parametrizada** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável \mathbf{x} de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^3 . \mathbf{x} é **regular** se a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$. Um ponto $p \in U$ onde $d\mathbf{x}_p$ não é injetiva é chamado de ponto **singular**.

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in U$ é um ponto **ponto crítico** de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é sobrejetiva.

Definição 1.2.17. Seja Σ uma variedade Riemanniana e F uma autofunção do laplaciano, $\Delta F = \lambda F$. O **conjunto nodal** N de F é o conjunto dos pontos $x \in \Sigma$ tal que $F(x) = 0$.

Teorema 1.2.2 (Cheng). Seja Σ^2 uma variedade diferenciável. Então para qualquer solução da equação $(\Delta + h(x))f = 0$, $h \in \mathcal{D}(\Sigma)$, os pontos críticos sobre o conjunto nodal são isolados.

Demonstração. Ver [3].

□

1.3 A segunda forma fundamental

Seja $f : \Sigma_1^n \rightarrow \Sigma_2^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada $p \in \Sigma_1$, existe uma vizinhança $U \subset \Sigma_1$ de p tal que $f(U) \subset \Sigma_2$ é uma subvariedade de Σ_2 . Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\bar{U} \subset \Sigma_2$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \bar{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do \mathbb{R}^k , tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \bar{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_q \Sigma_1$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \Sigma_2$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de Σ_1 a um campo local (isto é, definido em \bar{U}) de vetores em Σ_2 ; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê usando o difeomorfismo φ .

Para cada $p \in \Sigma_1$, o produto interno em $T_p \Sigma_2$ decompõe $T_p \Sigma_2$ na soma direta

$$T_p \Sigma_2 = T_p \Sigma_1 \oplus (T_p \Sigma_1)^\perp,$$

onde $(T_p \Sigma_1)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p \Sigma_1$ em $T_p \Sigma_2$. Se $v \in T_p \Sigma_2$, $p \in \Sigma_1$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p \Sigma_1, \quad v^N \in (T_p \Sigma_1)^\perp.$$

Denominamos v^T a **componente tangencial** de v e v^N a **componente normal** de v . Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\Sigma_2$ em $T\Sigma_2$ dadas por

$$(p, v) \rightarrow (p, v^T) \quad \text{e} \quad (p, v) \rightarrow (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de Σ_2 será indicada por $\bar{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em Σ_1 , e \bar{X} , \bar{Y} são extensões locais a Σ_2 , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T. \quad (1.4)$$

A conexão dada por (1.4) é uma conexão Riemanniana e é a conexão induzida pela métrica de Σ_1 .

Proposição 1.3.1. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em X e Y e que $B(fX, Y) = fB(X, Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Resta mostrar que $B(X, fY) = fB(X, Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Indicando por \bar{f} uma extensão de f a \bar{U} , teremos

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{f}\bar{Y}) - \nabla_X(fY) \\ &= \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X Y + \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Como em Σ_1 , $f = \bar{f}$ e $\bar{X}(\bar{f}) = X(f)$, concluímos que as duas últimas parcelas se anulam, donde $B(X, fY) = fB(X, Y)$, isto é, B é bilinear. Para mostrar que B é simétrica, utilizamos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} + [\bar{X}, \bar{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Como em Σ_1 , $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$, concluímos que $B(X, Y) = B(Y, X)$. \square

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in \Sigma_1$ e $\eta \in (T_p\Sigma_1)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p\Sigma_1 \times T_p\Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_pM,$$

é, pela Proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.3.1. A forma quadrática II_η definida em $T_p\Sigma_1$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de f em p segundo o vetor normal η .

Às vezes se utiliza também a expressão **segunda forma fundamental** para designar a aplicação B que a cada $p \in \Sigma_1$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_p\Sigma_1)^\perp$.

Observe que à aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A : T_p\Sigma_1 \rightarrow T_p\Sigma_1$ por

$$\langle A(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.3.2. Seja $p \in \Sigma_1$, $x \in T_p\Sigma_1$ e $\eta \in (T_p\Sigma_1)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a Σ_1 . Então

$$A(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Seja $y \in T_p\Sigma_1$ e X, Y extensões locais de x e y , respectivamente, e tangente a Σ_1 . Então $\langle N, Y \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle A(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) = -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) = \langle -\bar{\nabla}_x N, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_p\Sigma_1$. \square

Exemplo 1.3.1. Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, i.e., $f : \Sigma_1^n \rightarrow \Sigma_2^{n+1}$; $f(\Sigma_1) \subset \Sigma_2$ é então denominada uma **hipersuperfície**.

Seja $p \in \Sigma_1$ e $\eta \in (T_p\Sigma_1)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $A : T_p\Sigma_1 \rightarrow T_p\Sigma_1$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $T_p\Sigma_1$ com valores próprios reais $\lambda_1 \dots \lambda_n$, i.e., $A(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Se Σ_1 e Σ_2 são ambas orientáveis e estão orientadas (i.e., escolhemos orientações para Σ_1 e Σ_2) então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1 \dots e_n\}$ uma base na orientação de Σ_1 , $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de Σ_2 . Neste caso, denominamos os e_i **direções principais** e os $\lambda_i = k_i$ **curvaturas principais** de f . As funções simétricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ é denominada a **curvatura de Gauss-Kronecker** de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ é denominada a **curvatura média** de f .

Um caso importante, e que analisaremos com mais detalhes neste trabalho, do exemplo anterior ocorre quando $\Sigma_2 = \mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso, podemos dar uma interpretação geométrica interessante de A . Inicialmente, seja N uma extensão local de η , unitária e normal a Σ_1 . Seja $S_1^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} e defina a **aplicação normal de Gauss**, $g : \Sigma_1^n \rightarrow S_1^n$, trasladando a origem do campo N para a origem do \mathbb{R}^{n+1} e fazendo

$$g(q) = \text{ponto final do trasladado de } N(q).$$

Como $T_q\Sigma_1$ e $T_{g(q)}(S_1^n)$ são paralelos, podemos identificá-los, e vemos que $dg_q : T_q\Sigma_1 \rightarrow T_{g(q)}S_1^n$ é dada por

$$dg_q(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \bar{\nabla}_x N = (\bar{\nabla}_x N)^T = -A(x),$$

onde $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma_1$ é uma curva com $c(0) = q$, $c'(0) = x$, e onde usamos o fato que $\langle N, N \rangle = 1$ para garantir que $\bar{\nabla}_x N = (\bar{\nabla}_x N)^T$. Segue-se que $-A$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Definição 1.3.2. Uma imersão $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é **mínima** se para para todo $p \in \Sigma_1$ e todo $\eta \in (T_p\Sigma_1)^\perp$ tem-se $\text{traço } A = 0$.

Escolhendo um referencial ortonormal E_1, \dots, E_n e η_1, \dots, η_m de vetores em Σ_2 tal que $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{X}(U)$ e $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é um mergulho, podemos escrever, em p ,

$$B(x, y) = \sum_i H_i(x, y) E_i, \quad x, y \in T_p\Sigma, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde $H_i = H_{E_i}$. O vetor normal dado por

$$H = \sum_j^n B(E_j, E_j) = \sum_i^m (\text{traço } A_i) E_i,$$

onde $A_i = A_{E_i}$, não depende do referencial A_i escolhido. O vetor H é chamado **vetor curvatura média** de f . Segue que f é mínima se e só se $H(p) = 0$, para todo $p \in \Sigma$.

Autovalor de Steklov

Seja Σ^n uma variedade Riemanniana com fronteira $\partial\Sigma$. Dada uma função $u \in \mathcal{D}(\partial\Sigma)$, seja \hat{u} a extensão harmônica de u , isto é,

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} = 0 & \text{em } \Sigma \\ \hat{u} = u & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases}$$

A aplicação de Dirichlet-Neumann $\mathfrak{L} : \mathcal{D}(\partial\Sigma) \rightarrow \mathcal{D}(\partial\Sigma)$ associa a cada função $u \in \mathcal{D}(\partial\Sigma)$ a derivada direcional de sua extensão na direção do vetor conormal ν ao bordo $\partial\Sigma$,

$$\mathfrak{L}u = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}.$$

Definição 1.3.3. Dizemos que uma subvariedade diferenciável $\Sigma \subset B^3$ é uma **superfície mínima de fronteira livre** em B^3 se Σ é mínima, $\partial\Sigma \subset \partial B^3$ e Σ intercepta ∂B^3 ortogonalmente ao longo da $\partial\Sigma$.

Lema 1.3.1. Seja Σ^k uma subvariedade mínima imersa na bola unitária B^n . Então Σ é uma superfície mínima de fronteira livre se, e somente se, as funções coordenadas de Σ em \mathbb{R}^n são autofunções de Steklov associada ao autovalor 1.

Demonstração. Seja $x_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ a função que a cada ponto $p \in \Sigma$ associa sua i -ésima coordenada em \mathbb{R}^n , $\langle p, e_i \rangle$, onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica do \mathbb{R}^n . Por hipótese, Σ é uma subvariedade mínima, logo a função coordenada x_i é harmônica para $i = 1, \dots, n$. De fato, considerando um referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ de Σ , então o gradiente ∇x_i em Σ é dado por $\nabla x_i = e_i - e_i^\perp$, onde e_i^\perp é a componente normal de e_i com respeito aos espaços tangentes a Σ , temos

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \operatorname{div}(\nabla x_i) \\ &= \sum_j \langle \nabla_{E_j} \nabla x_i, E_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_{E_j}(e_i - e_i^\perp) - \bar{\nabla}_{E_j}^\perp(e_i - e_i^\perp), E_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_{E_j}(e_i - e_i^\perp), E_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \bar{\nabla}_{E_j} e_i - \bar{\nabla}_{E_j} e_i^\perp, E_j \rangle \\ &= \sum_j \langle -\bar{\nabla}_{E_j} e_i^\perp, E_j \rangle. \end{aligned}$$

Dado que $\langle e_i^\perp, E_j \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= E_j \langle e_i^\perp, E_j \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{E_j} e_i^\perp, E_j \rangle + \langle e_i^\perp, \bar{\nabla}_{E_j} E_j \rangle \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \sum_j \langle e_i^\perp, \bar{\nabla}_{E_j} E_j \rangle \\ &= \sum_j \langle e_i, (\bar{\nabla}_{E_j} E_j)^\perp \rangle \\ &= \langle e_i, \sum_j (\bar{\nabla}_{E_j} E_j)^\perp \rangle \\ &= \langle e_i, H \rangle \\ &= H_i, \end{aligned}$$

onde $H = (H_1, \dots, H_n)$ é o vetor curvatura média de Σ . Assim para que Σ seja uma superfície mínima de fronteira livre, uma vez que já estamos supondo que esta é uma subvariedade mínima de B^n , é necessário que o conormal ν em $\partial\Sigma$ coincida com o vetor posição no \mathbb{R}^n para todo ponto $p \in \partial\Sigma$. Em outras palavras, se $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, Σ é uma superfície mínima de fronteira livre em B^n se, e somente se,

$$x_i = \nu_i = \langle \nu, e_i \rangle = \frac{\partial}{\partial \nu} x_i$$

para todo $i = 1, \dots, n$. □

Campo de Killing

Sejam Σ_2 uma variedade Riemanniana de dimensão $n + 1$, Σ_1 uma hipersuperfície orientável de Σ_2 e η um campo normal unitário de Σ_2 em Σ_1 . Dado $p \in \Sigma_1$, $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ base ortonormal que diagonaliza A e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalores associados a $E_1(p), \dots, E_n(p)$, respectivamente. Seja E_1, \dots, E_n um referencial geodésico em Σ_1 obtido estendendo $E_1(p), \dots, E_n(p)$ numa vizinhança normal U em Σ_1 de p .

Com essas hipóteses obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.3.3. *Seja $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$ um referencial geodésico. Então, para cada i , vale*

$$\nabla_{E_i} E_i = \lambda_i \eta.$$

Demonstração. Da definição de referencial geodésico, $(\nabla_{E_i} E_i(p))^T = 0$. Então, $\nabla_{E_i} E_i(p) = \alpha \eta$ para algum α . Temos também

$$\begin{aligned} \langle \eta, E_i \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle + \langle \eta, \nabla_{E_i} E_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle = -\langle \eta, \nabla_{E_i} E_i \rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, em p ,

$$\begin{aligned}\alpha &= \langle \nabla_{E_i} E_i, \eta \rangle(p) = -\langle E_i, \nabla_{E_i} \eta \rangle \\ &= \lambda_i \langle E_i, E_i \rangle,\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos o fato de que λ_i é o autovalor associado a E_i . Portanto $\nabla_{E_i} E_i = \lambda_i \eta$. \square

Definição 1.3.4. *Sejam X, Y e $Z \in \mathcal{X}(M)$. O campo X é dito de **Killing** se*

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0.$$

Definição 1.3.5. *Uma função C^2 $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\Delta u - 2Ku = 0$ em Σ , onde K é a curvatura de Gauss, é chamada **função Jacobi**. Denotaremos por $\mathcal{J}(\Sigma)$ o espaço linear das funções Jacobi em Σ .*

Teorema 1.3.1. *Seja $u : \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u = \langle p, N \rangle$ (aqui p denota o vetor posição) e Σ mínima. Então, u é uma função Jacobi.*

Demonstração. Seja $p \in \Sigma$ e $\{E_1(p), E_2(p)\}$ uma base que ortogonaliza A . Denotaremos por E_1, E_2 o referencial geodésico em Σ . Então, em p ,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^2 E_i E_i(u).$$

Temos

$$\begin{aligned}E_i(u) &= E_i \langle p, N \rangle = \langle \nabla_{E_i} p, N \rangle + \langle p, \nabla_{E_i} N \rangle \\ &= \langle E_i(p), N \rangle + \langle p, -\lambda_i E_i \rangle \\ &= \langle p, -\lambda_i E_i \rangle\end{aligned}$$

onde usamos na última linha que E_i é direção principal e o λ_i é o autovalor associado. Dessa forma

$$\begin{aligned}E_i E_i(u) &= \langle E_i(p), -\lambda_i E_i(p) \rangle + \langle p, -\lambda_i \nabla_{E_i} E_i \rangle \\ &= \langle E_i(p), -\lambda_i E_i(p) \rangle + \langle p, -\lambda_i \lambda_i N \rangle \\ &= -\lambda_i - \lambda_i^2 \langle p, N \rangle.\end{aligned}$$

Como Σ é mínima, $\lambda_1 = -\lambda_2$. Logo

$$\Delta u = -2\lambda_1^2 \langle p, N \rangle.$$

Como $K = -\lambda_1^2$, segue o resultado. \square

Exemplo 1.3.2. *Quando um campo de Killing é uma translação por um vetor $v \in \mathbb{R}^3$, então a correspondente função Jacobi é $\langle N, v \rangle$ chamada **função Jacobi linear**. Semelhantemente, rotações ao redor de um eixo na direção $v \in \mathbb{R}^3$ produz uma função Jacobi dada por $\det(p, N, v)$ e $\langle p, N \rangle \in \mathcal{J}(M)$.*

1.4 Geodésicas

Durante esta seção, Σ será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 1.4.1. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ é uma **geodésica em** $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma **geodésica**. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) **geodésica ligando** $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Às vezes, chamaremos de geodésica à imagem $\gamma(I)$ de uma geodésica.

Se $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

isto é, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante. Suporemos, de agora em diante, que $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$, isto é, excluiremos as geodésicas que se reduzem a pontos. O comprimento de arco s de γ , a partir de uma origem fixa, digamos $t = t_0$, é então dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que a geodésica γ está **normalizada**.

Definição 1.4.2. Uma **geodésica fechada** é uma curva fechada que é uma geodésica. Uma noção mais geral é a de um **loop geodésico**, isto é, uma geodésica γ que passa no mesmo ponto p em instantes diferentes.

Definição 1.4.3. Dizemos que uma variedade Riemanniana Σ é **completa** quando, para todo $p \in \Sigma$, as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Vamos determinar as equações locais satisfeitas por uma geodésica γ em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) . Seja $\mathbf{x}^{-1} \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de γ na parametrização \mathbf{x} .

A curva γ será uma geodésica se, e somente se,

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dx_t} \frac{dx_j}{dx_t} \Gamma_{ij}^k \right) X_k$$

Ou seja, se e só se

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dx_t} \frac{dx_j}{dx_t} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Dado que as geodésicas são soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, o seu domínio maximal é um intervalo I .

Como consequência do teorema de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4.1. *Seja Σ uma variedade Riemanniana. Dados $p \in \Sigma$ e $v \in T_p\Sigma$, existe uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

Denotaremos por γ_v a única geodésica que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade $v \in T_p\Sigma$.

Lema 1.4.1. (de Homogeneidade). *Seja $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ uma geodésica com $\gamma'(0) = p$. Então*

$$\gamma_{av}(t) = \gamma_v(at), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Definição 1.4.4. *Seja Σ uma variedade Riemanniana completa. Definimos a aplicação exponencial em $p \in \Sigma$ por*

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p\Sigma &\rightarrow \Sigma \\ v &\mapsto \gamma_v(1). \end{aligned}$$

Podemos definir a aplicação exponencial em variedades que não são completas. A única diferença é que o seu domínio de definição é um aberto do espaço tangente em torno da origem.

Geometricamente, a $\exp_p v$ é o ponto de Σ obtido percorrendo uma distância igual a $|v|$, a partir de p , sobre a geodésica que passa por p com velocidade $\frac{v}{|v|}$. Usaremos a notação $B(0, \varepsilon)$ para indicar a bola de centro na origem 0 de $T_p\Sigma$ e raio ε e a notação $B[0, \varepsilon]$ para indicar uma bola fechada de centro na origem 0 de $T_p\Sigma$ e raio ε .

Definição 1.4.5. *Uma **curva diferenciável por partes** é uma aplicação contínua $c : [a, b] \rightarrow \Sigma$ de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em Σ satisfazendo a seguinte condição: existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que as restrições $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k-1$, são diferenciáveis. Dizemos que c liga os pontos $c(a)$ e $c(b)$.*

Definição 1.4.6. *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow \Sigma$ é chamado **minimizante** se $\ell(\gamma) < \ell(c)$, onde $\ell(\cdot)$ indica o comprimento da curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Definição 1.4.7. *Uma imersão $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é **geodésica** em $p \in \Sigma_1$ se para todo $\eta \in (T_p\Sigma_1)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p . A imersão f é **totalmente geodésica** se ela é geodésica para todo $p \in \Sigma_1$.*

Definição 1.4.8. Um subconjunto \mathcal{C} de uma variedade Riemanniana é chamado **totalmente convexo** se para qualquer $p, q \in \mathcal{C}$ e qualquer geodésica γ de p a q tem-se $\gamma \subset \mathcal{C}$.

Definição 1.4.9. Seja Σ uma variedade Riemanniana. Um subconjunto $S \subset \Sigma$ é **estritamente convexo** se para quaisquer dois pontos q_1, q_2 do fecho \bar{S} de S existe uma única geodésica minimizante γ ligando q_1 a q_2 cujo interior está contido em S .

1.5 Homotopia; grupo fundamental

Durante esta seção, o símbolo I significará o intervalo compacto $[0, 1]$.

1.5.1 Homotopia

Definição 1.5.1. Sejam M, N espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : M \rightarrow N$ dizem-se **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua

$$H : M \times I \rightarrow N$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in M$. A aplicação H chama-se então **homotopia** entre f e g . Escreve-se, neste caso, $H : f \simeq g$, ou simplesmente $f \simeq g$.

Exemplo 1.5.1. Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n -dimensional. Dadas duas aplicações contínuas $f, g : M \rightarrow S^n$, se $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in M$ (isto é, se $f(x)$ e $g(x)$ nunca são pontos antípodas) então $f \simeq g$. Com efeito, nestas condições vale $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$ para todo $t \in I$ e todo $x \in M$. Então obteremos uma homotopia $H : M \times I \rightarrow S^n$, entre f e g , definindo

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}.$$

Proposição 1.5.1. Sejam M, N espaços topológicos. A relação de homotopia, $f \simeq g$, é uma equivalência no conjunto das aplicações contínuas de M em N .

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas **classes de homotopia**: A classe de homotopia de uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é indicada pelo símbolo $[f]$.

Definição 1.5.2. Uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ chama-se uma **equivalência homotópica** quando existe $g : N \rightarrow M$ contínua tal que $g \circ f \simeq id_M$. Diz-se então que g é um **inverso homotópico** de f e que os espaços topológicos M e N têm o mesmo **tipo de homotopia**. Escreveremos, neste caso, $M \equiv N$ ou $f : M \rightarrow N$.

Definição 1.5.3. Diz-se que um espaço topológico M é **contrátil** quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

É possível mostrar que \mathbb{R}^n é contrátil a um ponto arbitrário $p_0 \in \mathbb{R}^n$; é suficiente definir $H(p, t) = p_0 + (p - p_0)t$. O mesmo argumento mostra que a bola $B_r(0) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < r\}$ é contrário à origem 0.

Proposição 1.5.2. *M é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade $id : M \rightarrow M$ é homotópica a uma aplicação constante $M \rightarrow M$.*

1.5.2 O Grupo Fundamental

Veremos agora um caso especial do conceito geral de homotopia que são as homotopias de **caminhos fechados**, isto é, de aplicações contínuas $a : J \rightarrow M$, definidas num intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$ com $a(s_0) = a(s_1)$.

Como o intervalo I é contrátil, todo caminho $a : I \rightarrow M$ é homotópico a uma constante. Exigiremos que, durante a homotopia, os extremos do caminho sejam mantidos fixos. Assim, consideraremos a fronteira $\partial I = \{0, 1\}$ do intervalo e as homotopias de caminhos serão relativas ao subespaço ∂I .

Definição 1.5.4. *Dizemos que $a, b : I \rightarrow M$ são **caminhos homotópicos** quando tivermos $a \simeq b$ (rel. ∂I). Abreviamos esta afirmação com a notação $a \cong b$. Assim, uma homotopia $H : a \cong b$ entre caminhos é uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow M$ tal que*

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= a(s), & H(s, 1) &= b(s), \\ H(0, t) &= a(0) = b(0), \\ H(1, t) &= a(1) = b(1), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $s, t \in I$.

Definição 1.5.5. *Sejam $a, b : I \rightarrow M$ dois caminhos em M com $a(1) = b(0)$. Definimos o caminho $a * b$ por:*

$$a * b = \begin{cases} a(2t), & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ b(2t - 1), & \text{se } [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

O conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos num espaço topológico M , munido da lei de composição acima definida, chama-se o **grupóide fundamental** de M .

Consideraremos pares do tipo (M, x_0) , onde $x_0 \in M$ será chamado o **ponto básico** do espaço topológico M . Os caminhos fechados $a : (I, \partial I) \rightarrow (M, x_0)$ serão chamados caminhos fechados **com base no ponto** x_0 .

O subconjunto $\pi_1(M, x_0)$ do grupóide fundamental, formado pela classe de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 constitui um grupo, chamado o **grupo fundamental** do espaço M com base no ponto x_0 .

A proposição que será vista a seguir será diretamente usada na demonstração do nosso teorema principal.

Proposição 1.5.3. *O grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo \mathbb{Z} dos inteiros.*

2 Resultados principais

Neste capítulo apresentamos os resultados principais desta dissertação. Iniciamos com as definições de catenóide crítico e disco equatorial plano. Posteriormente, apresentamos outros resultados necessários para a demonstração do teorema principal para em seguida demonstrá-lo. Durante todo o capítulo o símbolo B^3 representará a bola unitária do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

2.1 O Disco Equatorial Plano e o Catenóide Crítico

Definição 2.1.1. O *disco equatorial plano* é definido como sendo a interseção da bola unitária B^3 com um plano contendo a origem.

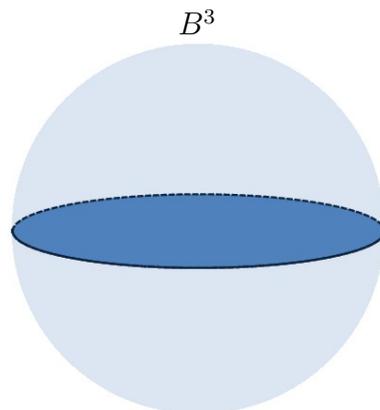


Fig. 1: O disco equatorial plano

Os discos equatoriais planos são as únicas superfícies com fronteira livre e totalmente geodésicas em B^3 . Nitsche [11] mostrou que eles são de fato as únicas superfícies mínimas de fronteira livre imersas em B^3 que são homeomorfas a um disco.

Antes de iniciar a demonstração do Teorema de Nitsche, precisamos de alguns resultados.

Definição 2.1.2. Uma *Superfície de Riemann* Σ é uma 2-variedade diferenciável onde as composições como em 2 da Definição (1.1.1) são todas holomorfas, com a identificação de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Definição 2.1.3. Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies de Riemann. Uma aplicação $\varphi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é dita *holomorfa* se $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}$ for holomorfa, para toda carta (\mathbf{x}, U) de Σ_1 e toda carta (\mathbf{y}, V) de Σ_2 , com $\varphi(U) \subset V$.

Definição 2.1.4. *Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies de Riemann e $\varphi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ holomorfa. Um ponto $p \in \Sigma_1$ é **ponto de ramificação** de φ quando não existe vizinhança U de p tal que $\varphi|_U$ seja injetora.*

Teorema 2.1.1 (Nitsche). *Seja Σ uma superfície mínima de fronteira livre em B^3 . Se Σ tem o tipo topológico do disco então Σ é um disco equatorial plano.*

Demonstração. Como Σ é mínima, conforme Proposição 2 p. 239 de [5], podemos supor que a métrica em Σ é dada por parâmetros isotérmicos (u, v) , i.e., os termos da primeira forma fundamental satisfazem

$$E(u, v) = G(u, v) \quad \text{e} \quad F(u, v) = 0.$$

Podemos supor que Σ é holomorfa e sem pontos de ramificação em $\bar{\Sigma}$ (o fecho de Σ) assim $E > 0$ em $\bar{\Sigma}$. Denotando os termos da segunda forma fundamental por e, f e g , da equação de Codazzi:

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

como $F = 0$ e $E(u, v) = G(u, v)$ temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{E} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= E_v H \\ f_v - g_u &= -E_u H, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $H = \frac{e+g}{2E}$ é a curvatura média de Σ . Em termos da variável complexa $z = u + iv$ e dos operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

podemos escrever (2.1) da forma

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2}(e - g) - if \right) = E \frac{\partial H}{\partial z} \tag{2.2}$$

É importante notar que a equação (2.2) nos diz que a função $\frac{1}{2}(e - g) - if$ é analítica quando H é constante, em particular se Σ é mínima. É conveniente neste ponto considerar a função

$$g(z) = \left(\frac{1}{2}(e - g) - if \right) z^2 := A(z) + iB(z)$$

Note que em termos de (u, v) temos

$$A(z) = \frac{1}{2}(e - g)(u^2 - v^2) + 2fuv$$

e

$$B(z) = (e - g)uv - f(u^2 - v^2).$$

Também será conveniente introduzir coordenadas polares $u = \rho \cos \theta$ e $v = \rho \operatorname{sen} \theta$. Em termos destas novas coordenadas temos que

$$\tilde{E}(\rho, \theta) = \rho^2 \tilde{G}(\rho, \theta) \quad \text{e} \quad \tilde{F}(\rho, \theta) = 0.$$

Além disso, veja que

$$\begin{aligned} \varphi_\rho &= \cos \theta \varphi_u + \operatorname{sen} \theta \varphi_v \\ \rho \varphi_\theta &= -\operatorname{sen} \theta \varphi_u + \cos \theta \varphi_v \\ N_\rho &= \cos \theta N_u + \operatorname{sen} \theta N_v \\ \rho N_\theta &= -\operatorname{sen} \theta N_u + \cos \theta N_v \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde φ denota o vetor posição.

Podemos usar (2.3) para concluir que

$$B(z) = -\rho \langle N_\theta, \varphi_\rho \rangle$$

Por outro lado, o fato da superfície ser de fronteira livre e que a fronteira da bola B^3 é umbilíca, temos que $B(z) = 0$ na fronteira da bola, de fato, se a superfície tem fronteira, o vetor conormal ν é tangente a Σ e assim $\langle N, \nu \rangle = 0$, derivando em θ temos,

$$0 = \frac{d}{d\theta} \langle N, \nu \rangle = \langle N_\theta, \nu \rangle + \langle \nu_\theta, N \rangle = \langle N_\theta, \varphi_\rho \rangle,$$

Pois, na fronteira, temos $\nu = \varphi$. Se Σ tem o tipo topológico do disco e temos que $B(z)$ é uma função harmônica que se anula na fronteira, segue-se que $B(z)$ é identicamente nula. Usando as equações de Cauchy-Riemann temos que $A(z)$ é constante, mas como $A(z) = 0$ para $z = 0$ tem-se que $A(z)$ também é identicamente nula. Isto nos diz que Σ é totalmente umbilíca como Σ é mínima isso implica que Σ é totalmente geodésica. \square

Definição 2.1.5. *O catenóide crítico é um anel mínimo de fronteira livre mergulhado em B^3 .*

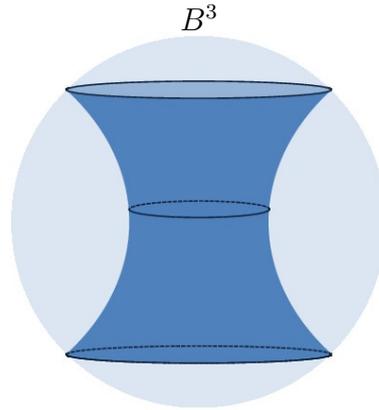


Fig. 2: O catenóide crítico

O catenóide crítico pode ser definido analiticamente como a imagem da aplicação conforme $\varphi : (t, \theta) \in [-t_0, t_0] \times S^1$

$$\mapsto a_0 \cosh(t) \cos(\theta) e_1 + a_0 \cosh(t) \sin(\theta) e_2 + a_0 t e_3 \in \mathbb{R}^3$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é alguma base ortonormal de \mathbb{R}^3 . A constante t_0 é a única solução positiva da equação $t \sinh(t) = \cosh(t)$, enquanto que $a_0 = (t_0 \cosh(t_0))^{-1}$. Estas constantes são escolhidas de tal maneira que a aplicação φ é conforme e a sua imagem é um pedaço de um catenóide contido em B^3 , encontrando ∂B ortogonalmente, e cujo eixo de simetria é a reta gerada pelo vetor e_3 .

Tendo como suporte os resultados anteriores, enunciemos o teorema principal desta dissertação:

Teorema 2.1.2 (Ambrozio-Nunes). *Seja Σ^2 uma superfície mínima em B^3 . Assuma que para todos os pontos x em Σ ,*

$$|A|^2(x) \langle x, N(x) \rangle^2 \leq 2,$$

onde $N(x)$ denota um vetor normal unitário no ponto $x \in \Sigma$ e A denota a segunda forma fundamental de Σ . Então

- i) $|A|^2(x) \langle x, N(x) \rangle^2 \equiv 0$ e Σ é o disco equatorial plano;
- ii) ou $|A|^2(p) \langle p, N(p) \rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$ e Σ é o catenóide crítico.

A demonstração do Teorema (2.1.2) será formada pela junção de Lemas e Proposições que serão apresentados na próxima seção.

Recordando o resultado principal, dada a parametrização φ acima, calculemos a segunda forma fundamental A e a função suporte $\langle x, N \rangle^2$.

Inicialmente, calculemos A : Seja N o campo normal unitário dado por $N(x) = -\frac{\varphi_t \wedge \varphi_\theta}{|\varphi_t \wedge \varphi_\theta|}$. Temos que $-A = dN$ (Ver p.22). A matriz $dN = [a_{ij}]$ é tal que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

onde $e = \langle \varphi_{tt}, N \rangle$, $f = \langle \varphi_{t\theta}, N \rangle$, $g = \langle \varphi_{\theta\theta}, N \rangle$, $E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle$, $F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle$ e $G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle$ Ver [5].

Portanto,

$$\varphi_t = a_0 \sinh(t) \cos(\theta) e_1 + a_0 \sinh(t) \sin(\theta) e_2 + a_0 e_3$$

$$\varphi_\theta = -a_0 \cosh(t) \sin(\theta) e_1 + a_0 \cosh(t) \cos(\theta) e_2 + 0 e_3$$

$$\varphi_{tt} = a_0 \cosh(t) \cos(\theta) e_1 + a_0 \cosh(t) \sin(\theta) e_2 + 0 e_3$$

$$\varphi_{\theta\theta} = -a_0 \cosh(t) \cos(\theta) e_1 - a_0 \cosh(t) \sin(\theta) e_2 + 0 e_3$$

$$\varphi_{t\theta} = -a_0 \sinh(t) \sin(\theta) e_1 + a_0 \sinh(t) \cos(\theta) e_2 + 0 e_3.$$

$$N = -\frac{\varphi_t \wedge \varphi_\theta}{|\varphi_t \wedge \varphi_\theta|} = \frac{\cos(\theta)}{\cosh(t)} e_1 + \frac{\sin(\theta)}{\cosh(t)} e_2 - \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} e_3$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle &= \langle (a_0 \sinh(t) \cos(\theta), a_0 \sinh(t) \sin(\theta), a_0), \\ &\quad (a_0 \sinh(t) \cos(\theta), a_0 \sinh(t) \sin(\theta), a_0) \rangle \\ &= a_0^2 \cosh^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle &= \langle (a_0 \sinh(t) \cos(\theta), a_0 \sinh(t) \sin(\theta), a_0), \\ &\quad (-a_0 \cosh(t) \sin(\theta), a_0 \cosh(t) \cos(\theta), 0) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle &= \langle (-a_0 \cosh(t) \sin(\theta), a_0 \cosh(t) \cos(\theta), 0), \\ &\quad (-a_0 \cosh(t) \sin(\theta), a_0 \cosh(t) \cos(\theta), 0) \rangle \\ &= a_0^2 \cosh^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e = \langle \varphi_{tt}, N \rangle &= \frac{1}{\cosh(t)} \langle (a_0 \cosh(t) \cos(\theta), a_0 \cosh(t) \sin(\theta), 0), \\ &\quad (\cos(\theta), \sin(\theta), -\sinh(t)) \rangle \\ &= a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f = \langle \varphi_{t\theta}, N \rangle &= \frac{1}{\cosh(t)} \langle (-a_0 \sinh(t) \sin(\theta), a_0 \sinh(t) \cos(\theta), 0), \\ &\quad (\cos(\theta), \sin(\theta), -\sinh(t)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g = \langle \varphi_{\theta\theta}, N \rangle &= \frac{1}{\cosh(t)} \langle (-a_0 \cosh(t) \cos(\theta), -a_0 \cosh(t) \operatorname{sen}(\theta), 0), \\
&\quad (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), -\operatorname{senh}(t)) \rangle \\
&= -a_0
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_0 \cosh^2(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_0 \cosh^2(t)} \end{bmatrix}.$$

Calculemos $|A|$:

Temos que $|A| := \sup\{|Av|; v \in S^1\}$. Sejam $k_1 = -\frac{1}{a_0 \cosh^2(t)}$ e $k_2 = \frac{1}{a_0 \cosh^2(t)}$ as curvaturas principais. Determinar $|A|$ é equivalente a achar o máximo da função $f(x, y) = k_2x + k_1y$ com $f|_{S^1}$. Como S^1 é compacto esse máximo é sempre atingido.

Usando o método do multiplicador de Lagrange, calculemos o valor máximo da função $f(x, y) = k_2x + k_1y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

$$\operatorname{grad} f = (k_2, k_1) = 2\lambda(x, y),$$

logo

$$k_1^2 + k_2^2 = 4\lambda^2(x^2 + y^2) = 4\lambda^2$$

ou seja, f assume o valor máximo quando

$$\lambda = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{a_0^2 \cosh^4(t)}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2a_0 \cosh^2(t)}$$

então

$$x = \frac{k_2}{2\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad y = \frac{k_1}{2\lambda} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Assim,

$$|A| = k_2x + k_1y = \frac{1}{a_0 \cosh^2(t)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{1}{a_0 \cosh^2(t)} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{a_0 \cosh^2(t)}$$

e conseqüentemente

$$|A|^2 = \frac{2}{a_0^2 \cosh^4(t)}.$$

Em particular, $k_1 = -\frac{|A|}{\sqrt{2}}$ e $k_2 = \frac{|A|}{\sqrt{2}}$.

Por fim,

$$\begin{aligned}
\langle x, N \rangle^2 &= \langle (a_0 \cosh(t) \cos(\theta), a_0 \cosh(t) \operatorname{sen}(\theta), a_0 t), \\
&\quad \left(\frac{\cos(\theta)}{\cosh(t)}, \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cosh(t)}, -\frac{\operatorname{senh}(t)}{\cosh(t)} \right) \rangle^2 \\
&= a_0^2 \left(1 - \frac{t \operatorname{senh}(t)}{\cosh(t)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Em particular, para $|t| < t_0$,

$$|A|^2 \langle x, N \rangle^2 = \frac{2}{\cosh^6(t)} (\cosh(t) - t \sinh(t))^2 \leq 2. \quad (2.4)$$

Notemos que o valor máximo 2 em (2.4) é atingido quando $t = 0$, ou seja, sobre o círculo definido pela interseção do catenóide crítico e o plano que passa pela origem e é ortogonal ao eixo de simetria do catenóide.

2.1.1 Prova do Teorema de Ambrozio-Nunes

Esta seção será dedicada à demonstração do teorema principal.

Lema 2.1.1. *Seja Σ^2 uma superfície mínima de fronteira livre em B^3 . Seja f a função definida por*

$$f(x) = \frac{|x|^2}{2}, \quad x \in \Sigma.$$

Então,

i) $\nabla^\Sigma f(x) = x$ para todo $x \in \partial\Sigma$.

ii) Para cada $x \in \Sigma$, os autovalores de $\text{Hess}_\Sigma f(x)$ são dados por

$$1 - \frac{|A|(x)}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle \quad e \quad 1 + \frac{|A|(x)}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle.$$

Demonstração. Para provar i) basta notar que dado um campo tangente X

$$\begin{aligned} \langle \nabla^\Sigma f(x), X \rangle &= \frac{1}{2} X \langle x, x \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \bar{\nabla}_X x, x \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_X x \rangle \right\} \\ &= \langle X, x \rangle. \end{aligned}$$

Para $x \in \Sigma$, temos $\nabla^\Sigma f(x) = x^T$ onde $(\cdot)^T$ denota a projeção ortogonal sobre $T_x \Sigma$. Desde que Σ encontra ∂B ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$, $x \in T_x \Sigma$ para todo $x \in \Sigma$, e a afirmação i) segue.

Agora, provemos ii).

Dado $x \in \Sigma$, seja N um campo vetorial normal unitário em uma vizinhança de x . Para todo $X, Y \in T_x \Sigma$, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Hess } f(x)(X, Y) &= XY(f) - \nabla_X Y(f) \\
 &= X\langle x, Y \rangle - \langle x, \nabla_X Y \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_X Y \rangle - \langle x, \nabla_X Y \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle + \langle x, -B(X, Y) \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle + \langle \langle x, N(x) \rangle N, -B(X, Y) \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle - \langle x, N(x) \rangle \langle N, B(X, Y) \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle - \langle x, N(x) \rangle \langle A(X), Y \rangle \\
 &= \langle X, Y \rangle - \langle \langle x, N(x) \rangle A(X), Y \rangle \\
 &= \langle X - \langle x, N(x) \rangle A(X), Y \rangle.
 \end{aligned}$$

Calculando a matriz Hess f na base ortonormal que diagonaliza A : $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$, isto é, $A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = a_{ii} \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\text{Hess } f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1 - a_{ij} \langle x, N(x) \rangle, & \text{se } i = j \end{cases}$$

onde $[a_{ij}] = A$, ou seja, dado

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$|A|^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

Como estamos supondo Σ mínima $k_1^2 = k_2^2$. Dessa forma,

$$k_1 = -\frac{|A|}{\sqrt{2}} \quad e \quad k_2 = \frac{|A|}{\sqrt{2}}.$$

Em termos das curvaturas k_1 e k_2 a Hess f é dada por

$$\text{Hess } f = \begin{bmatrix} 1 - k_1 \langle x, N(x) \rangle & 0 \\ 0 & 1 - k_2 \langle x, N(x) \rangle \end{bmatrix}$$

ou, equivalentemente,

$$\text{Hess } f = \begin{bmatrix} 1 + \frac{|A|(x)}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle & 0 \\ 0 & 1 - \frac{|A|(x)}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, concluímos que os autovalores de Hess f são

$$1 - \frac{|A|(x)}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle \quad e \quad 1 + \frac{|A|(x)}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle,$$

como queríamos. \square

Admitindo as hipóteses do Teorema principal, temos que a função f é convexa. De fato, como $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$, temos $\left| \frac{|A|(x)}{\sqrt{2}} \langle x, N(x) \rangle \right| \leq 1$. Como uma função C^2 é convexa se, e somente se, sua forma quadrática hessiana é não-negativa (Ver [8] p.78), segue que a função f do Lema anterior é convexa.

Proposição 2.1.1. *Seja Σ^2 uma superfície compacta mínima de fronteira livre em B^3 .*

Defina

$$\mathcal{C} = \left\{ p \in \Sigma; |p| = \min_{x \in \Sigma} |x| \right\}.$$

Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$ em Σ , então ocorre apenas um dos seguintes casos:

- i) \mathcal{C} contém apenas um ponto singular $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, neste caso Σ deve ser o disco equatorial plano;*
- ii) ou \mathcal{C} é uma geodésica fechada simples em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ e Σ é homeomorfo a um anel.*

Demonstração. Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida como no Lema anterior. Afirmamos que \mathcal{C} é um subconjunto totalmente convexo de Σ . Recordemos que um subconjunto C de uma variedade Riemanniana (M^n, g) é totalmente convexo quando qualquer geodésica em M que liga dois pontos de C está contida em C . De fato, dados dois pontos $p, q \in \mathcal{C}$, seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Pelo item ii) do Lema (2.1.1) a condição geométrica $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$ em Σ é equivalente a $\text{Hess}_\Sigma f \geq 0$ em Σ . Dessa forma, $(f \circ \gamma)'' \geq 0$ para todo $t \in [0, 1]$, isto é, $f \circ \gamma$ é convexa em $[0, 1]$. Pela definição de \mathcal{C} , como $f \circ \gamma$ atinge seu mínimo em $t = 0$ e $t = 1$, então $f \circ \gamma$ é constante. Concluímos que $(f \circ \gamma)(t) \equiv \min_\Sigma f$, ou seja, o conjunto dos pontos críticos de f coincide com \mathcal{C} .

Dado que Σ encontra ∂B ortogonalmente, a curvatura geodésica k_g de $\partial\Sigma$ em Σ , calculada com respeito ao conormal unitário que aponta para fora é dada por

$$k_g = - \left\langle \frac{dT}{dt}, \nu \right\rangle = \left\langle T, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \langle T, T \rangle = 1, \quad (2.5)$$

onde $\varphi : \Sigma \rightarrow B^3$ é uma imersão e usamos o fato de que $\langle \nu, T \rangle = 0$ e $\nu = \varphi$. Então $k_g \equiv 1$. Em particular, $\partial\Sigma$ é estritamente convexa em Σ . Isto implica que para todo $p, q \in \Sigma$ existe uma geodésica minimizante em Σ passando por p e q . Portanto, o conjunto totalmente convexo \mathcal{C} é conexo. Também, \mathcal{C} está contido no interior de Σ , porque o gradiente de f é não nulo em $\partial\Sigma$ e aponta para fora, pelo Lema (2.1.1) item i).

Agora iremos supor que \mathcal{C} contém apenas um ponto $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$. Seja $[\alpha] \in \pi_1(\Sigma, p)$. Assumiremos que $[\alpha]$ é uma classe de homotopia não trivial. Dado que $\partial\Sigma$ é estritamente convexa, podemos encontrar um *loop* geodésico $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, tal que $\gamma \in [\alpha]$. Dado que \mathcal{C} é totalmente convexo, $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{C}$. Mas, $\mathcal{C} = \{p\}$ e $[\alpha]$ é não trivial o que é uma contradição. Então Σ é homeomorfo a um disco. Pelo Teorema de Nitsche, Σ é o disco equatorial plano.

Finalmente, suponha que \mathcal{C} não consiste de apenas um ponto singular. Por Nitsche resulta que Σ não pode ser homeomorfa a um disco. Seja $p \in \mathcal{C}$ e seja $[\alpha] \in \pi_1(\Sigma, p)$ uma classe de homotopia não trivial. Como acima, dado que $\partial\Sigma$ é estritamente convexo, encontramos um *loop* geodésico $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, tal que $\gamma \in [\alpha]$. Afirmamos que $\gamma'(0) \neq \gamma'(1)$, $\gamma([0, 1])$ é uma curva simples e fechada e $\mathcal{C} = \gamma([0, 1])$. De fato, se $\gamma'(0) = \gamma'(1)$, então pelo fato de que \mathcal{C} é totalmente convexa, é possível juntar pontos em γ , conforme Fig. 3, próximos a p por geodésicas minimizantes e encontrar um conjunto aberto $U \subset \mathcal{C}$, isto é uma contradição com o fato de Σ ser mínima pois teríamos um pedaço da esfera.

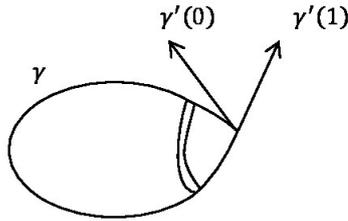


Fig. 3: Curva γ

Por razões semelhantes, γ tem de ser simples e $\mathcal{C} = \gamma([0, 1])$. Portanto \mathcal{C} é uma geodésica simples e fechada. O argumento acima também mostra que qualquer *loop* geodésico em p deve estar contida em \mathcal{C} . Concluímos que $\pi_1(\Sigma, p) = \mathbb{Z}$, isto é, Σ é homeomorfo a um anel. \square

O seguinte corolário é consequência direta da proposição acima.

Corolário 2.1.1. *Seja Σ^2 uma superfície mínima de fronteira livre em B^3 . Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 < 2$ em Σ , então Σ é o disco equatorial plano.*

Demonstração. Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 < 2$, pelo item ii) do Lema (2.1.1), segue que a função f definida na Proposição (2.1.1) é estritamente convexa, isto é, $\text{Hess } f > 0$ em Σ . Pelo item i) do mesmo Lema, f atinge seu valor mínimo no interior de Σ . Pela convexidade estrita de f , o conjunto de mínimo contém um ponto singular. Então, pela Proposição (2.1.1) implica que Σ é o disco equatorial plano. \square

Para finalizar a prova do resultado principal, analisaremos a situação onde a função $|A|^2 \langle x, N \rangle^2$ atinge o valor máximo 2 em algum ponto de Σ .

Proposição 2.1.2. *Seja Σ^2 uma superfície mínima compacta de fronteira livre em B^3 . Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$ em Σ e $|A|^2 \langle p, N(p) \rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$, então Σ é um catenóide crítico.*

Demonstração. Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathcal{C} definida como no Lema (2.1.1) e Proposição (2.1.1) respectivamente. Dado que $|A|^2 \langle p, N(p) \rangle^2 = 2$ em algum ponto $p \in \Sigma$, a superfície Σ não pode ser homeomorfa a um disco, pois neste caso seria totalmente geodésico como uma consequência do Teorema de Nitsche. Então pela Proposição (2.1.1), Σ é homeomorfo a um anel e \mathcal{C} é uma geodésica simples e fechada γ onde podemos admitir que $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ é parametrizada pelo comprimento de arco em $\Sigma \setminus \partial \Sigma$. Em particular, $\inf_{\Sigma} f > 0$. Seja $R > 0$ dado por $R^2/2 = \inf_{\Sigma} f$ e seja $S_R \subset \mathbb{R}^3$ a esfera de raio R centrada na origem. Afirmamos que γ é um grande círculo na esfera S_R . De fato, por definição de R , temos que $\Sigma \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \geq R\}$ e $\Sigma \cap S_R = \gamma([0, \ell])$. Isto implica que $T_{\gamma(s)}\Sigma = T_{\gamma(s)}S_R$ para todo $s \in [0, \ell]$. Dado que γ é uma geodésica de Σ , concluímos que γ é também uma geodésica de S_R , isto é, γ é um grande círculo de S_R .

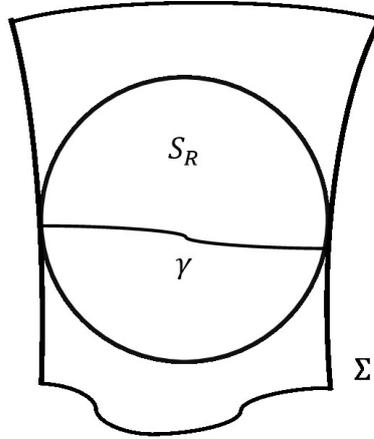


Fig. 4

Se e_3 denota um vetor unitário em \mathbb{R}^3 que é ortogonal ao plano contendo o grande círculo γ , então $\{\gamma'(s), e_3\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(s)}\Sigma$ para todo $s \in [0, \ell]$.

Seja $u(x) = \langle x \wedge N(x), e_3 \rangle$, $x \in \Sigma$, onde \wedge denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3 . A função u é a infinitesimal normal de variação de Σ por rotação ao redor do eixo e_3 . De fato, a variação de Σ por rotações ao redor do eixo e_3 é dada por $(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)e_1 + (x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)e_2 + x_3 e_3$ onde $x = (x_1, x_2, x_3)$.

A variação infinitesimal é dada por

$$(-x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta)e_1 + (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)e_2 + 0e_3$$

aplicada em zero, isto é,

$$-x_2e_1 + x_1e_2 + 0e_3.$$

Logo a variação infinitesimal normal de Σ por rotação ao redor do eixo e_3 é dada por:

$$\langle (-x_2, x_1, 0), (N_1, N_2, N_3) \rangle = -x_2N_1 + x_1N_2$$

onde $N = (N_1, N_2, N_3)$.

Por outro lado, $u = \langle x \wedge N(x), e_3 \rangle$ pode ser vista por

$$\begin{aligned} u = \langle x \wedge N(x), e_3 \rangle &= \langle (x_2N_3 - x_3N_2, x_3N_1 - x_1N_3, x_1N_2 - x_2N_1), (0, 0, 1) \rangle \\ &= x_1N_2 - x_2N_1. \end{aligned}$$

Logo segue o resultado.

Temos que u é uma função Jacobi de Σ (Ver p.25), isto é,

$$\Delta_\Sigma u + |A|^2 u = 0 \text{ em } \Sigma, \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = u \text{ em } \partial\Sigma.$$

Além disso, u é identicamente nula se e só se Σ é uma superfície de revolução ao redor do eixo e_3 . De fato,

Se Σ é uma superfície de revolução, podemos representar $x \in \Sigma$ por

$$x = (f(v)\cos u, f(v)\sen u, g(v))$$

considerando a rotação da curva $(f(v), 0, g(v))$ ao redor do eixo e_3 . Portanto o vetor normal unitário será

$$N(x) = \frac{-g'(v)\cos u}{\sqrt{g'^2(v) + f'^2(v)}}e_1 + \frac{-g'(v)\sen u}{\sqrt{g'^2(v) + f'^2(v)}}e_2 + \frac{f'(v)}{\sqrt{g'^2(v) + f'^2(v)}}e_3.$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle x \wedge N, e_3 \rangle &= x_1N_2 - x_2N_1 = \\ &= f(v)\cos u \left(\frac{-g'(v)\sen u}{\sqrt{g'^2(v) + f'^2(v)}} \right) - f(v)\sen u \left(\frac{-g'(v)\cos u}{\sqrt{g'^2(v) + f'^2(v)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Para a volta provemos que se $x_1N_2 - x_2N_1 = 0$, então Σ é uma superfície de revolução, para isto provemos que a interseção de Σ com a esfera que possui eixo de rotação e_3 é um círculo.

Seja S uma esfera de raio r descrita por $(r \sen \phi \cos \theta, r \sen \phi \sen \theta, r \cos \phi)$ tal que $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\phi \in [0, \pi]$. Observemos que se $x_1N_2 - x_2N_1 = 0$, então o vetor posição está contido no plano gerado por $\{e_1, e_2\}$, logo $x \in \Sigma \cap S$ é tal que $r \cos \phi = 0$, isto é $\phi = \frac{\pi}{2}$. Dessa forma

$$x = (r \cos \theta, r \sen \theta, 0)$$

ou seja, a interseção de Σ com esferas centrada na origem que possuem o eixo e_3 de rotação são círculos, logo Σ é uma superfície de revolução.

Claramente $\gamma([0, \ell])$ está contida em $u^{-1}(0)$ o que implica imediatamente que $du(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$ para todo $s \in [0, \ell]$. Em outras palavras, como $\gamma'(s)$ é uma direção principal de Σ em $\gamma(s)$, então é a direção ortonormal $e_3 \in T_{\gamma(s)}\Sigma$. Então, $dN_{\gamma(s)}e_3$ é paralelo a e_3 e

$$du(\gamma(s))e_3 = \langle e_3 \wedge N(\gamma(s)), e_3 \rangle + \langle \gamma'(s) \wedge dN_{\gamma(s)}e_3, e_3 \rangle = 0.$$

O argumento acima mostrou que cada ponto no círculo \mathcal{C} , que está contido em $u^{-1}(0)$, é um ponto crítico de u . Mas isto implica que u é identicamente nula em Σ . De fato, se isto não fosse verdade, o conjunto nodal $u^{-1}(0)$ da função Jacobi u não estaria contido em um ponto crítico isolado, pelo resultado devido a S.Y. Cheng isto seria uma contradição.

Então, Σ é um anel mínimo de fronteira livre de revolução ao redor do eixo e_3 em B^3 . Em outras palavras, Σ é um catenóide crítico. \square

Dessa forma concluímos a demonstração do Teorema Principal.

3 Apêndice

Primeira variação da Área

Seja (M^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana com fronteira ∂M . Seja X um campo de vetores normais ao longo de ∂M que aponta para fora.

Seja Σ^n uma variedade com fronteira tal que Σ é imersa em M de tal maneira que $\partial\Sigma$ está contida em ∂M . O vetor conormal de $\partial\Sigma$ que aponta para fora de Σ será denotado por ν . Dado N um campo de vetores normal e unitário em Σ , a segunda forma fundamental é o tensor simétrico B em Σ dado por $B(U, W) = g(\nabla_U N, W)$ para cada U, W tangente em Σ . A curvatura média H é o traço de B . Σ é chamada **mínima** quando $H = 0$ em Σ e de fronteira livre quando $\nu = X$ em $\partial\Sigma$.

Consideraremos variações de Σ dada pela aplicação suave $f : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $f_t : x \in \Sigma \mapsto f(x, t) \in M$ é uma imersão de Σ em M é uma imersão de Σ em M tal que $f_t(\partial\Sigma)$ está contida em ∂M .

O subscrito t será usado para denotar quantidades associadas a $\Sigma_t = f_t(\Sigma)$. Por exemplo, N_t denotará um campo vetorial unitário normal a Σ_t e H_t denotará a curvatura média de Σ_t .

Sejam x^1, \dots, x^n as coordenadas locais de Σ . Denotaremos

$$\partial_t = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{e} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

∂_t é chamado de campo vetorial variacional e é decomposto em uma parte tangente e outra normal:

$$\partial_t = \partial^T + v_t N_t,$$

onde v_t é uma função em Σ_t definida por $v_t = g(\partial_t, N_t)$.

Inicialmente olharemos para a variação do tensor métrico $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$:

Proposição 3.0.1.

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij} &= g(\nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} \partial_t), \\ \partial_t g^{ij} &= -2g^{ik} g^{jl} g(\nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_l). \end{aligned}$$

Demonstração. A primeira equação decorre do fato de $[\partial_t, \partial_i] = 0$ juntamente com a simetria da conexão $[\partial_t, \partial_i] = \nabla_{\partial_t} \partial_i - \nabla_{\partial_i} \partial_t$, ou seja, $g([\partial_t, \partial_i], \partial_j) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\partial_t g_{ij} &= g(\nabla_{\partial_t} \partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_t} \partial_j) \\ &= g(\nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_j} \partial_t).\end{aligned}$$

A segunda parte segue da diferencial de $g^{ij} g_{kl} = \delta_{il}$. □

Da bem conhecida fórmula da derivada do determinante,

$$(\det U)' = \det U \operatorname{tr}(U')$$

têm-se:

Proposição 3.0.2. (*A primeira Variação da Área*)

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t| = \int_{\Sigma} H_t v_t dA_t + \int_{\partial \Sigma} g(\nu_t, \frac{\partial f}{\partial t}) dL_t.$$

Demonstração. Observemos que

$$\begin{aligned}\partial_t \sqrt{\det [g_{ij}]} &= \frac{1}{2} g^{ij} \partial_t g_{ij} \sqrt{\det [g_{ij}]} \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \partial_t, \partial_j) \sqrt{\det [g_{ij}]} \\ &= (g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \partial_t^T, \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j) v_t) \sqrt{\det [g_{ij}]} \\ &= (\operatorname{div}_{\Sigma_t} \partial_t^T + H_t v_t) \sqrt{\det [g_{ij}]}.\end{aligned}$$

A primeira fórmula de variação da área segue. □

Referências

- [1] Ambrozio, L. e Nunes, I., *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball*, a aparecer no Comm. Anal. Geom.
- [2] Ambrozio, L. *Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds*, J. Geom. Anal. 25 (2015), no. 2, 1001–1017.
- [3] Cheng, S. Y., *Eigenfunctions and Nodal Sets*, Comment. Math. Helvetici 51 (1976), pp. 43-55.
- [4] do Carmo, M. P., *Formas Diferenciais e Aplicações*, Rio de Janeiro, SBM, 2015.
- [5] do Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 5ª edição.
- [6] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2015, 5ª edição.
- [7] Li, H. e Xiong, C *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in geodesic balls of hyperbolic space and hemisphere*, arxiv:1701.04981.
- [8] Lima, E. L., *Análise Real, volume 2*, Coleção matemática universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 6ª edição.
- [9] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 4ª edição.
- [10] Meeks, W. e Pérez J., *A survey on classical minimal surface theory*, Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2012.
- [11] Nitsche, J. C. C., *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. 89, (1985), pp. 1-19.