

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Arquimedes e o Método

Rosivaldo Pereira da Silva



Instituto de Matemática

Maceió, dezembro de 2014



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ROSIVALDO PEREIRA DA SILVA

ARQUIMEDES E O MÉTODO

MACEIÓ  
2014

ROSIVALDO PEREIRA DA SILVA

ARQUIMEDES E O MÉTODO

Dissertação de mestrado, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo.

MACEIÓ

2014

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecário: Roselito de Oliveira Santos**

S586a Silva, Rosivaldo Pereira da.  
Arquimedes e o método / Rosivaldo Pereira da Silva. – Maceió, 2015.  
91 f. : il.

Orientador: Vânio Fragoso de Melo.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade  
Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação  
em Matemática. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 90-92.

1. Lei o equilíbrio de uma alavanca. 2. Método da exaustão. 3. Arquimedes.  
I. Título.

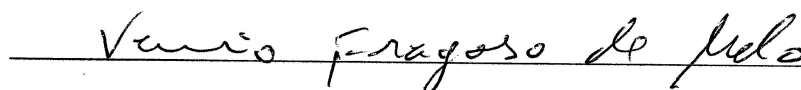
CDU: 51

## ARQUIMEDES E O MÉTODO

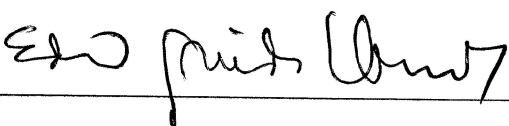
**Rosivaldo Pereira da Silva**

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 19 de dezembro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

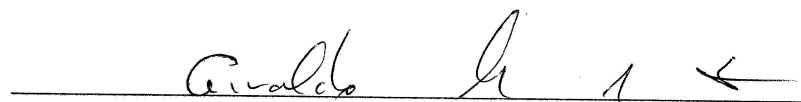
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Vánio Fragoso de Melo - (Orientador-UFAL)



Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (UFAL)



Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos (UFAL)

*À minha esposa Jane Glécia dos Santos.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais por sempre me apoiarem em diversos momentos.

Ao professor Vânio Fragoso de Melo, pelas aulas ministradas no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e orientação desta dissertação.

Aos professores Ediel Azevedo Guerra e Givaldo Oliveira dos Santos por participarem dessa banca, e pelas valiosas contribuições para essa dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Mestrado.

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar dois dos resultados mais interessantes da teoria desenvolvida por Arquimedes: o cálculo da área sob a parábola - quadratura da parábola - e volume de uma esfera. Apresenta o famoso método mecânico por ele utilizado que, em verdade, utiliza a lei do equilíbrio de uma alavanca e, em conjunto com o método da exaustão demonstra cada resultado com o rigor requerido na época. Contrapondo com a perspectiva da matemática moderna, mostra que é possível mesclar história da matemática no ensino de cálculo de áreas de figuras geométricas planas - neste caso, a área limitada por uma curva, a parábola - e o cálculo do volume de uma esfera - seja utilizando o princípio de Cavalieri ou até mesmo cálculo integral - apresentando inicialmente, a visão empírica e rebuscada de Arquimedes. A proposta desta dissertação visa proporcionar ao professor de matemática, uma nova visão sobre o ensino de tópicos de história da matemática concomitantemente aos temas tradicionalmente estudados em sala de aula, possibilitando o desenvolvimento de abordagens diferenciadas no ensino destes temas do ensino médio.

**Palavras-chave:** Arquimedes. Lei do Equilíbrio de uma alavanca. Método da exaustão. Quadratura da parábola e Volume da esfera.



## ABSTRACT

This paper aims to present two of the most interesting results of the theory developed by Archimedes: the calculation of the area under the parabola - the quadrature of the parabola - and volume of a sphere. Features the famous mechanical method used by him, in fact, uses the law of equilibrium of a lever and, together with the method of exhaustion shows each result with the rigor required at the time. In contrast with the perspective of modern mathematics shows that it is possible to merge the history of mathematics in the teaching calculation of areas of plane geometric figures - in this case, the area bounded by a curve, the parable - and the calculation of the volume of a sphere - using the principle of Cavalieri or even integral calculus - presenting initially empirical and elaborate vision of Archimedes. The purpose of this dissertation aims to provide the math teacher, a new take on the teaching of the history of mathematics topics concurrently with issues traditionally studied in the classroom, enabling the development of differentiated approaches in the teaching these high school subjects.

**Key words:** Archimedes. Law of balance of a lever. Method of exhaustion. Quadrature of the parable and Volume of a sphere.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Quadrado inscrito no círculo . . . . .	17
Figura 2 – Quadrado circunscrito no círculo . . . . .	18
Figura 3 – Pontos médios dos arcos . . . . .	19
Figura 4 – Retângulo e segmento circular . . . . .	20
Figura 5 – Método clássico . . . . .	23
Figura 6 – Área do círculo . . . . .	23
Figura 7 – Seções Cônicas . . . . .	24
Figura 8 – Parábola . . . . .	25
Figura 9 – Parábola . . . . .	26
Figura 10 – Propriedade da parábola . . . . .	27
Figura 11 – Coroa circular . . . . .	28
Figura 12 – Segmento Parabólico . . . . .	29
Figura 13 – Propriedade da Parábola . . . . .	30
Figura 14 – Subtangente . . . . .	31
Figura 15 – Subtangente . . . . .	32
Figura 16 – Subtangente . . . . .	33
Figura 17 – Paradoxo de Zenão . . . . .	35
Figura 18 – Quadratura da Parábola . . . . .	37
Figura 19 – Lei da Alavanca . . . . .	40
Figura 20 – Postulado das paralelas . . . . .	41
Figura 21 – Reta e ponto médio M . . . . .	42
Figura 22 – Paralelogramo . . . . .	43
Figura 23 – Base média de um triângulo . . . . .	44
Figura 24 – Centróide de um triângulo . . . . .	45
Figura 25 – Propriedade do centróide . . . . .	46
Figura 26 – Pontos médios sobre os segmentos . . . . .	46
Figura 27 – Teorema da base média . . . . .	47
Figura 28 – Paralelogramo . . . . .	48
Figura 29 – Metro Cúbico . . . . .	49
Figura 30 – Princípio de Cavalieri . . . . .	51
Figura 31 – Tetraedro $VABC$ . . . . .	52
Figura 32 – Tetraedros com áreas das bases equivalentes . . . . .	54
Figura 33 – Decomposição de um prisma triangular em três partes . . . . .	55
Figura 34 – Cálculo do volume do cilindro . . . . .	56
Figura 35 – Cálculo do volume do cone . . . . .	57
Figura 36 – Triângulo Inscrito sob a parábola . . . . .	60

Figura 37 – Reta paralela ao eixo . . . . .	61
Figura 38 – Reta tangente à curva . . . . .	62
Figura 39 – Segmentos de reta paralelos ao eixo . . . . .	63
Figura 40 – Construindo a alavanca . . . . .	64
Figura 41 – Aplicando a Lei da Alavanca . . . . .	66
Figura 42 – Situação de Equilíbrio . . . . .	67
Figura 43 – Centro de Gravidade K . . . . .	68
Figura 44 – Segmento Parabólico . . . . .	69
Figura 45 – Retas tangentes à curva . . . . .	70
Figura 46 – Aplicando a propriedade da Parábola . . . . .	70
Figura 47 – Pontos de interseção . . . . .	71
Figura 48 – Retas paralelas passando pelos pontos de interseção . . . . .	71
Figura 49 – Segmentos parabólicos sobre os lados do triângulo . . . . .	72
Figura 50 – Triângulos inscritos sob o segmento parabólico . . . . .	73
Figura 51 – Volume da Esfera . . . . .	75
Figura 52 – Seção contendo a esfera . . . . .	76
Figura 53 – Seção contendo o cone e a esfera . . . . .	76
Figura 54 – Plano Perpendicular ao Diâmetro . . . . .	77
Figura 55 – Triângulos congruentes no Plano Perpendicular ao Diâmetro . . . . .	78
Figura 56 – Círculos Concêntricos . . . . .	79
Figura 57 – Construção da Alavanca . . . . .	80
Figura 58 – Seções Meridianas . . . . .	83
Figura 59 – Clepsidra . . . . .	84
Figura 60 – Interseção da anticlepsidra e do círculo . . . . .	84
Figura 61 – Seção meridiana da anticlepsidra . . . . .	85
Figura 62 – Circunferência e esfera centradas na origem . . . . .	86
Figura 63 – Fatia infinitesimal da esfera . . . . .	87

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>VIDA E OBRA: UM BREVE COMENTÁRIO</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>14</b>
<b>3.1</b>	<b>Razão e Proporção</b>	<b>14</b>
3.1.1	Método de Dupla redução ao absurdo	16
3.1.2	Propriedades das proporções	21
<b>3.2</b>	<b>Grandezas comensuráveis e incomensuráveis</b>	<b>21</b>
<b>3.3</b>	<b>Cálculo do <math>\pi</math></b>	<b>22</b>
<b>3.4</b>	<b>Área do Círculo</b>	<b>23</b>
<b>3.5</b>	<b>Parábola</b>	<b>24</b>
3.5.1	Elementos da parábola	25
3.5.2	Propriedade Fundamental da Parábola	26
<b>3.6</b>	<b>Conjunto Convexo</b>	<b>28</b>
<b>3.7</b>	<b>Segmento Parabólico</b>	<b>29</b>
3.7.1	Outras Propriedades da Parábola	30
3.7.2	Demonstração (Moderna) do Lema 3	32
<b>3.8</b>	<b>Método da Exaustão</b>	<b>35</b>
<b>3.9</b>	<b>Lei da Alavanca</b>	<b>39</b>
<b>3.10</b>	<b>Postulado das Paralelas</b>	<b>41</b>
<b>3.11</b>	<b>Teorema da Base Média</b>	<b>41</b>
<b>3.12</b>	<b>Centroide</b>	<b>45</b>
3.12.1	Propriedade do centroide	46
<b>3.13</b>	<b>Volume de um sólido geométrico</b>	<b>48</b>
<b>3.14</b>	<b>Princípio de Cavalieri</b>	<b>49</b>
<b>3.15</b>	<b>Volume de alguns sólidos</b>	<b>52</b>
3.15.1	Volume da pirâmide	52
3.15.2	Cálculo do volume de uma pirâmide triangular	55
3.15.3	Volume do cilindro	56
3.15.4	Volume do cone	57
<b>4</b>	<b>O MÉTODO</b>	<b>59</b>
<b>4.1</b>	<b>Área sob uma Parábola</b>	<b>59</b>
<b>4.2</b>	<b>Área sob uma Parábola - Quadratura</b>	<b>69</b>
<b>4.3</b>	<b>Volume da Esfera</b>	<b>74</b>

4.4	Volume da Esfera - Método de Cavalieri . . . . .	83
4.5	Volume da Esfera - Cálculo diferencial e Integral . . . . .	86
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	89
	REFERÊNCIAS . . . . .	89

## 1 INTRODUÇÃO

Arquimedes foi um grande matemático de sua época, destacando-se em vários campos do conhecimento, além de criar um grande número de inventos bastante úteis para a sociedade, devido as suas conjecturas houve avanços para a ciência da época, contribuindo de forma marcante para a humanidade, produzindo um grande número de obras a respeito dos mais diversos assuntos da época. É considerado um dos maiores matemáticos da antiguidade devido a seu brilhante raciocínio.

Discorreremos um pouco sobre a vida e alguns fatos históricos que se mostrarão relevantes para o desenvolvimento do trabalho. Apresentando o contexto histórico em que vivia, além de seus contemporâneos, os quais de alguma maneira influenciaram (ou auxiliaram) no desenvolvimento de suas teorias, além de curiosidades a respeito de algumas proposições por ele demonstrada em suas obras.

Em seguida, no capítulo 3 será fornecido todo o embasamento teórico (definições, proposições, teoremas, lemas), o qual apoiará as demonstrações dos resultados propostos por Arquimedes.

No capítulo 4, apresentaremos dois resultados que se destacaram de suas obras: a área sob a parábola e o volume da esfera. Enriquecendo-os com detalhes, nas seções 4.1 e 4.3; detalhes que o próprio Arquimedes omitia nas demonstrações por ele enviadas a seus amigos. Mostraremos também, como é realizado o cálculo com as técnicas conhecidas atualmente.

Finalizaremos essa dissertação com algumas considerações sobre a aplicação deste tema em uma sala de aula.

## 2 VIDA E OBRA: UM BREVE COMENTÁRIO

As notas históricas desta seção foram extraídas de Assis (2008), Boyer (2010), Eves (2011) e Martins (2000). Arquimedes nasceu por volta de 287 a.C. (antes de Cristo) e morreu provavelmente em 212 a.C. viveu em Siracusa, atual Itália; um ser humano que estava à frente de seu tempo, destacando-se em diversas áreas do conhecimento, publicando diversas obras relacionadas à física, matemática, engenharia e astronomia, sendo considerado um grande inventor da sua época.

Provavelmente estudou em Alexandria, local onde recebeu fortes bases da geometria da época, a qual se apoiava na obra *Os Elementos* de Euclides. A biblioteca de Alexandria sofreu um grande incêndio por volta de 391 a.C. o que culminou na perda de grande acervo de diversos autores, incluindo muito do que foi produzido pelo próprio Arquimedes.

No campo dos inventos, destaca-se pela construção de catapultas, guindastes, espelhos ardentes, um sistema de bombeamento de água conhecido como cóclea (concha de caracol, do grego) ou parafuso de Arquimedes, além de um planetário no qual se baseava em princípios hidráulicos, entre outros.

No campo da física, destacam-se entre suas descobertas, a lei da alavanca, a qual foi usada em suas demonstrações pelo método mecânico, além de um dos princípios fundamentais da hidrostática, a força de empuxo.

Martins (2000, p. 117,118), traduzindo uma parte da obra de Vitruvius (1969), relata a seguinte história:

Quanto a Arquimedes, ele certamente fez descobertas admiráveis em muitos domínios, mas aquela que vou expor testemunha, entre muitas outras, um engenho extremo. Hieron de Siracusa, tendo chegado ao poder real, decidiu colocar em um templo, por causa de seus sucessos, uma coroa de ouro que havia prometido aos deuses imortais.

Ofereceu assim um prêmio pela execução do trabalho, e forneceu ao vencedor a quantidade de ouro necessária devidamente pesada. Este, depois do tempo previsto submeteu seu trabalho, finalmente manufaturado, à aprovação do rei, e com uma balança fez uma prova do peso da coroa. Quando Hieron soube através de uma denúncia que certa quantidade de ouro havia sido retirada e substituída pelo equivalente em prata, incorporada ao objeto votivo, furioso por haver sido enganado, mas não encontrando nenhum modo de evidenciar a fraude, pediu a Arquimedes que refletisse sobre isso. E o acaso fez com que ele fosse se banhar com essa preocupação em mente, e ao descer à banheira, notou que à medida que lá entrava, escorria para fora uma quantidade de água igual ao volume de seu corpo. Isso lhe revelou o modo de resolver o problema: sem demora, ele saltou cheio de alegria para fora da banheira e completamente nu, tomou o caminho de sua casa, manifestando em voz alta para todos que havia encontrado o que procurava. Pois em sua corrida ele não cessava de gritar, em grego: Eureka, Eureka ["Encontrei, Encontrei!"].

Assim encaminhado para sua descoberta, diz-se que ele fabricou dois blocos de mesmo peso, igual ao da coroa, sendo um de ouro e o outro de prata. Feito isso, encheu de água até a borda um grande vaso, no qual mergulhou o bloco de prata. Escoou-se uma quantidade de água igual ao volume imerso no vaso. Assim, depois de retirado o corpo, ele colocou de volta a água que faltava, medindo-a

com um sextarius (ou sesteiro, uma unidade de medida de volumes para líquidos utilizada durante o Império Romano; equivale a, aproximadamente, 54cl), de tal modo que o nível voltou à borda, como inicialmente. Ele encontrou assim o peso de prata correspondente a uma quantidade determinada de água.

Feita essa experiência, ele mergulhou então da mesma forma o corpo de ouro no vaso cheio, e depois de retirá-lo fez então sua medida seguindo um método semelhante: partindo da quantidade de água necessária, que não era igual e sim menor, encontrou em que proporção o corpo de ouro era menos volumoso do que o de prata, quando tinham pesos iguais. Em seguida, depois de ter enchido o vaso e mergulhado desta vez a coroa na mesma água, descobriu que havia escoado mais água para a coroa do que para o bloco de ouro de mesmo peso, e assim, partindo do fato de que fluía mais água no caso da coroa do que no do bloco, inferiu por seu raciocínio a mistura de prata ao ouro e tornou manifesto o furto do artesão.

Na matemática valeu-se do método da exaustão de Eudóxio, para calcular a área sob um arco de uma parábola; descobriu, também, uma importante relação entre a esfera e o cilindro, sendo possível determinar o volume de uma esfera. O método da exaustão, utilizado na demonstração do cálculo da área sob a parábola, é de grande importância no meio matemático, pois representa o gérmen do cálculo integral.

Conseguiu-se, inclusive, resolver uma dificuldade da época: a noção de infinito, defendida por Demócrito e sua doutrina física do atomismo (Boyer, 2010). Com o desenvolvimento do cálculo diferencial, utilizamos a noção de limite, o qual simplifica bastante o cálculo.



### 3 PRELIMINARES

Neste capítulo, formalizaremos devidamente alguns conceitos que nos serão úteis nas demonstrações das proposições que se encontram nos capítulos subsequentes.

#### 3.1 Razão e Proporção

Em Boyer (2010, p.41), encontram-se indícios a respeito do surgimento da teoria das proporções. Conferimos a Pitágoras (571 a.C - 570 a.C.), a descoberta da teoria das proporções. Inspirada nas médias aritmética, geométrica, harmônica (na época denominada de subcontrária) e a proporção áurea, as quais tomou conhecimento por meio do mesopotâmicos. Posteriormente, os pitagóricos acrescentaram sete novas médias

**Definição 1.** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$ , três números naturais. Se  $b$  é a média de  $a$  e  $c$ , onde  $a < c$ , então as três quantidades estão relacionadas por uma das equações seguintes:*

$$\begin{array}{llllll} (1) \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a} & (2) \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b} & (3) \frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c} & (4) \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a} & (5) \frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a} \\ (6) \frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b} & (7) \frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a} & (8) \frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a} & (9) \frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a} & (10) \frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a} \end{array}$$

As três primeiras equações representam as médias aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente.

**Exemplo 1.** *(Proporção Áurea) o primeiro de dois números está para a sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo.*

Sejam dois números naturais distintos e não nulos,  $a$  e  $b$ . Temos que sua média aritmética será:

$$\frac{a}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2a}{a+b}$$

por outro lado, a média harmônica é dada por:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

logo,

$$\frac{a}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2a}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{1}{b} = \frac{\frac{2}{ab}}{b} = \frac{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}{b}$$

Aparentemente os gregos usaram a idéia de que quatro quantidades estão em proporção,  $a : b = c : d$ , se as duas razões  $a : b$  e  $c : d$  tem a mesma subtração mútua, isto é, se em cada razão, a quantidade menor cabe um igual número inteiro de vezes na maior e o resto em cada caso cabe um igual número inteiro na menor e o novo resto no precedente o mesmo número inteiro de vezes e assim por diante. (BOYER, 2010, p.66)

Na época, esta definição para proporção encara problemas com respeito aos incomensuráveis (como a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, por exemplo), sendo isto resolvido de maneira muito criativa por Eudoxo de Cnido (entre 390 e 338 a.C.). Euclides de Alexandria (cerca de 300 a.C.) fornece na definição 5, do Livro V, em sua obra *Os Elementos*, a célebre formulação de Eudoxo:

Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente. (BOYER, 2010, p.66)

isto é,

$$\frac{m \cdot A}{n \cdot B} = \frac{m \cdot C}{n \cdot D} \text{ ou } \frac{m \cdot A}{n \cdot B} = \frac{m \cdot C}{n \cdot D} \text{ ou } \frac{m \cdot A}{n \cdot B} = \frac{m \cdot C}{n \cdot D}$$

Segundo Eves (2011, p.173), usando a definição de Eudoxo, teremos uma proporção envolvendo as grandezas, A, B, C e D, sendo A e B da mesma espécie (ambas segmentos de reta, ou ângulos, ou áreas, ou volumes) e C e D também da mesma espécie se, para inteiros positivos arbitrários  $m$  e  $n$ , tivermos:

**Exemplo 2.** *Mostremos que*

$$\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$$

*Considerando  $m = 10$  e  $n = 4$ , temos:*

$$2 \cdot 10 = 20 \text{ e } 4 \cdot 10 = 40 \quad 5 \cdot 4 = 20 \text{ e } 10 \cdot 4 = 40$$

*Logo,*

$$\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$$

*Caso  $m = 6$  e  $n = 9$ , teremos:*

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ e } 4 \cdot 6 = 24 \quad 5 \cdot 9 = 45 \text{ e } 10 \cdot 9 = 90$$

*como  $12 < 45$  e  $24 < 90$ , segue que:  $\frac{2}{4} < \frac{5}{10}$*

Boyer (2010, p.66), afirma que, para realmente perceber a força (e a genialidade de Eudócio) desta nova definição, considere no lugar das grandezas, razão entre radicais, volume de duas esferas e o cubo dos raios.

**Proposição 1.** *(Propriedade da Exaustão) Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor do que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

*Demonstração.* Em Boyer (2010, p.67), encontramos uma demonstração com a seguinte formulação moderna. Se  $M$  é uma grandeza dada,  $\varepsilon$  uma grandeza prefixada de mesma espécie e  $r$  é uma razão tal que  $\frac{1}{2} < r < 1$ , então podemos achar um inteiro  $N$  tal que  $M(1-r)^n < \varepsilon$  para todo inteiro  $n > N$ . Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(1-r)^n = 0$$

Segundo Alvarenga (2006, p.3),

$$\begin{aligned} M_1 &= M - M \cdot r = M \cdot (1-r) \\ M_2 &= M_1 - M_1 \cdot r = M_1 \cdot (1-r) = M \cdot (1-r) \cdot (1-r) = M \cdot (1-r)^2 \\ M_3 &= M_2 - M_2 \cdot r = M_2 \cdot (1-r) = M \cdot (1-r)^2 \cdot (1-r) = M \cdot (1-r)^3 \end{aligned}$$

Assim, para um certo número inteiro  $N$ , teremos  $M_N = M(1-r)^N$ , como  $0 < (1-r) < \frac{1}{2}$ , temos que  $(1-r)^N$  se aproxima de zero com o crescimento de  $N$ . Daí, podemos encontrar  $N$ , tal que  $M(1-r)^N < \varepsilon$ , qualquer que seja o valor dado para  $\varepsilon$ .  $\square$

Tal propriedade da exaustão fora bastante utilizada pelos gregos, servindo para auxiliar na demonstração de teoremas sobre áreas e volumes.

### 3.1.1 Método de Dupla redução ao absurdo

Utilizaremos, também, um método de demonstração, muito usado pelos antigos gregos, chamado de dupla redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*). Ele baseia-se na propriedade dos números reais chamada de tricotomia, conforme Lima (2013).

**Axioma 1.** (*Lei da Tricotomia*) *Dados dois números reais  $m$  e  $n$ , uma e somente uma das relações a seguir será válida:*

- $m = n$
- $m < n$
- $m > n$

A dupla redução ao absurdo consiste em se supor que uma das desigualdades é verdadeira e chegar numa contradição; analogamente, com a outra desigualdade chegaremos a uma segunda contradição. Logo, nos restará como verdade a relação de igualdade.

Em Boyer (2010, p.68), encontramos o seguinte teorema que ilustrará a aplicação do método de Eudoxo:

**Teorema 1.** *As áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros.*

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  as áreas de dois círculos, de diâmetros  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente. Utilizando o método da exaustão de Eudoxo, desejamos provar a seguinte relação:

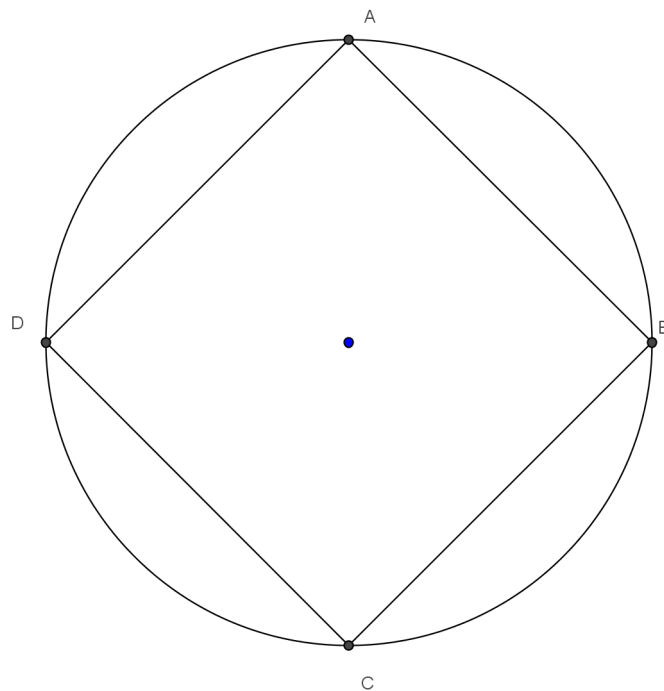
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

*Demonstração.* Suponha que a afirmação é falsa, então existe um polígono  $P$  cuja área é igual a  $P_2$  e que verifique o teorema, isto é,

$$\frac{A_1}{P_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

Temos duas situações a analisar:  $P_2 < A_2$  ou  $P_2 > A_2$ . Considere, inicialmente, que tenhamos  $P_2 < A_2$ . Inscreva no círculo de área  $A_2$  (cujo raio mede  $r$ ), um quadrado de vértices A, B, C e D (cujo lado mede  $r\sqrt{2}$ ), conforme figura 1.

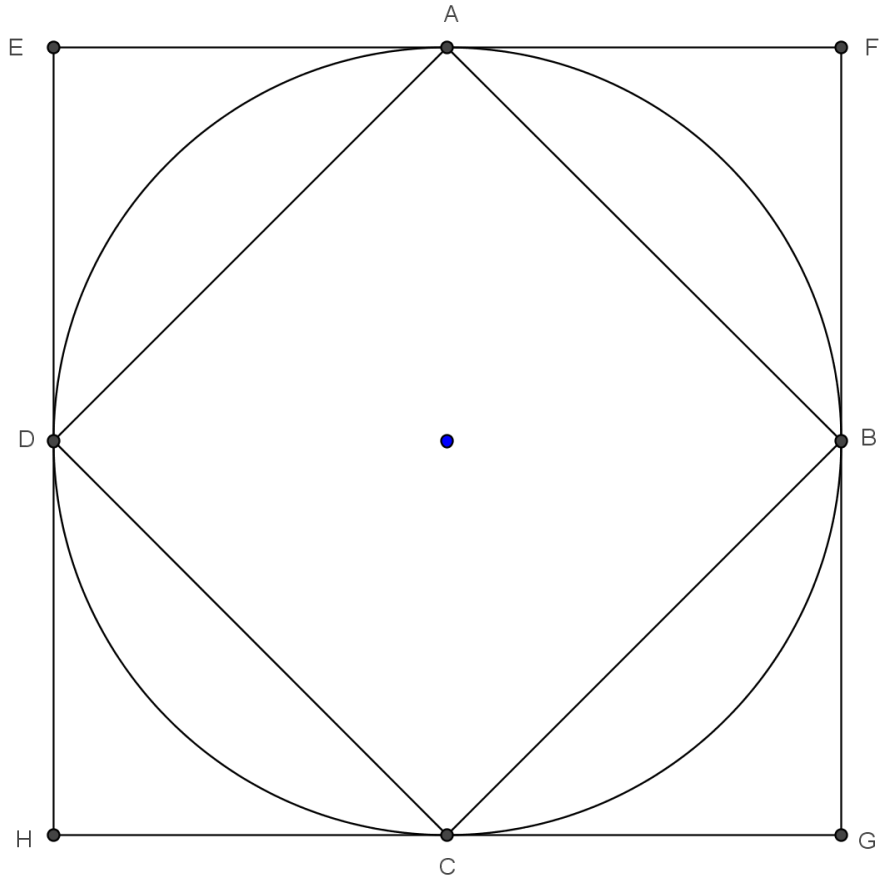
Figura 1 – Quadrado ABCD inscrito no círculo de área  $A_2$



Fonte: Autor, 2014

Traçando tangentes ao círculo por esses pontos obtemos um quadrado de vértices E, F, G e H, circunscrito ao círculo (cujo lado mede  $2 \cdot r$ ), conforme figura 2.

Figura 2 – Quadrado EFGH circunscrito no círculo de área  $A_2$



Fonte: Autor, 2014

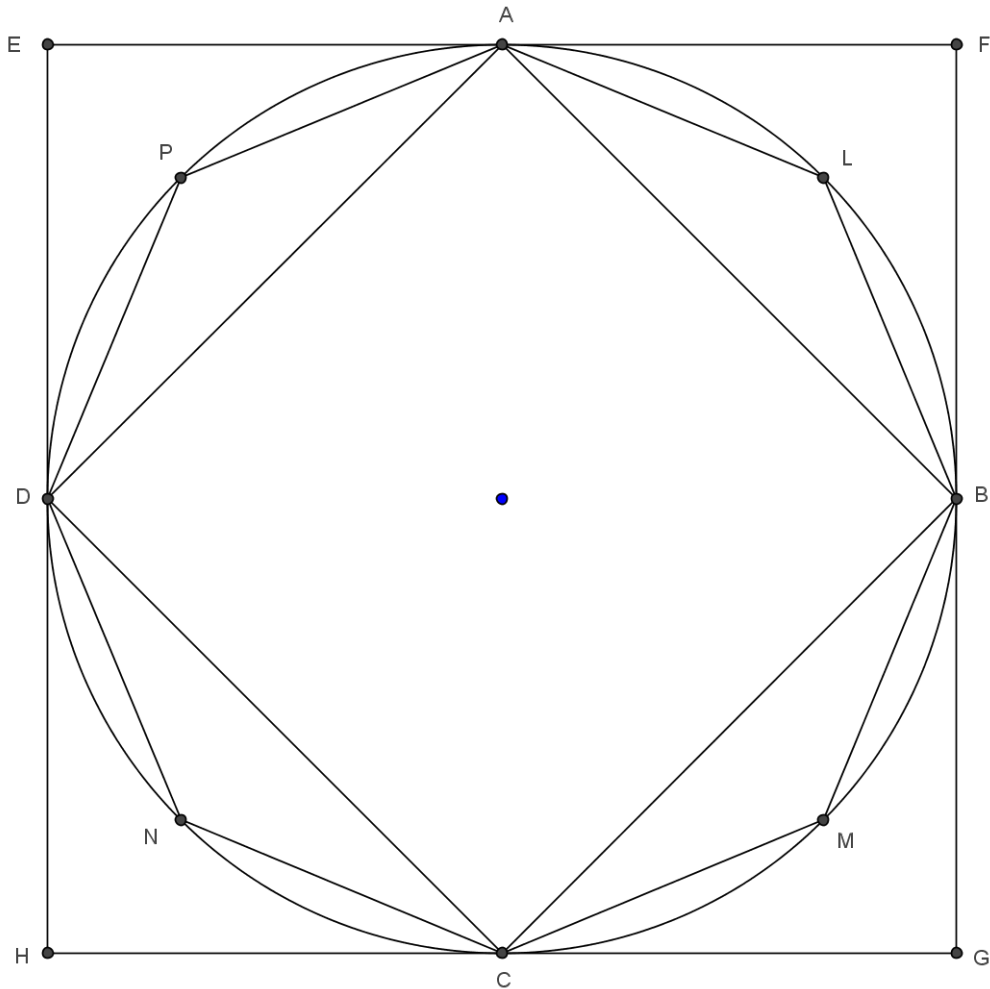
Temos que:

$$\text{Área}(EFGH) = 4 \cdot r^2 \text{ e } \text{Área}(ABCD) = (r\sqrt{2})^2 = 2 \cdot r^2$$

Logo, a área do quadrado EFGH é o dobro da área do quadrado inicial, além disso, será superior a metade da área do círculo.

Consideremos agora os pontos L, M, N e P, pontos médios de cada um dos arcos AB, BC, CD e AD, respectivamente, e tracemos os segmentos de reta que unem os pontos L, M, N e P com os extremos dos arcos dos quais eles são pontos médios, de acordo com a figura 3.

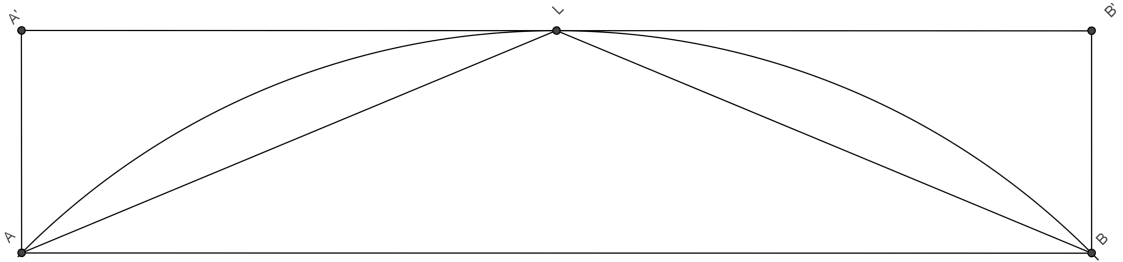
Figura 3 – Pontos médios dos arcos determinados pelos lados do quadrado ABCD



Fonte: Autor, 2014

Traçando pelo ponto  $L$  a tangente ao círculo, obtemos o retângulo  $ABB'A'$ , cuja área será o dobro da área do triângulo  $\triangle ABL$ , conforme subseção ??, e superior a metade da área do segmento circular  $\widehat{ABL}$ ; o mesmo ocorrendo para os triângulos  $\triangle BCM$ ,  $\triangle CDN$  e  $\triangle ADP$ , ver figura 4.

Figura 4 – Retângulo  $ABB'A'$  e segmento circular  $\widehat{ABL}$



Fonte: Autor, 2014

Prosseguindo com o processo, de acordo com a propriedade da exaustão de Eudoxo, proposição 1, obteremos um polígono  $R$ , cuja a área mede  $R_2$  tal que subtraindo da área do círculo  $A_2$  teremos:

$$A_2 - R_2 < A_2 - P_2$$

ou seja,  $R_2 > P_2$ .

Considere agora um outro polígono  $S$ , com área igual a  $R_1$ , semelhante ao polígono  $R$ , mas inscrito no círculo de diâmetro  $D_1$ . Conforme provado por Euclides em *Os Elementos*, Livro XII, proposição I: "Os polígonos semelhantes inscritos em círculos estão entre si, assim como os quadrados dos diâmetros dos mesmos círculos". Teremos:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

Mas, por hipótese, temos:

$$\frac{A_1}{P_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

logo,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{A_1}{P_2}$$

Entretanto, se  $R_2 > P_2$  devemos ter  $R_1 > A_1$ . Mas, como o polígono  $S$  está inscrito no círculo de área  $A_1$ , segue que  $A_1 > R_1$  e  $P_2 > R_2$ , o que contradiz o fato de  $R_2 > P_2$ , logo a hipótese de que  $P_2 < A_2$  não se verifica.

Analogamente, teremos que  $P_2 > A_2$  também não se verifica, levando também a uma contradição. Portanto, por uma dupla redução ao absurdo, o teorema fica demonstrado.  $\square$

### 3.1.2 Propriedades das proporções

Sejam A, B, C e D quatro grandezas homogêneas. A partir da proporção:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

poderemos obter novas proporções, como se segue:

$$(i) \text{ Permutação } \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \quad (ii) \text{ Adição } \frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$$

$$(iii) \text{ Inversão } \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \quad (iv) \text{ Subtração } \frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}$$

Tais propriedades serão utilizadas posteriormente.

### 3.2 Grandezas comensuráveis e incommensuráveis

De acordo com Eves (2004, p.104-107), os números inteiros são abstrações oriundas de processos naturais de contagem de coleções finitas de objetos individuais ou da medição de várias quantidades, como por exemplo, as grandezas: comprimento, peso e tempo. Dessa maneira, o surgimento dos números racionais foi natural, pois raramente temos uma quantidade exata de vezes que uma determinada unidade linear de medida cabe em uma dada grandeza. Diante disso, foi estabelecido que um *número racional* é um quociente  $\frac{p}{q}$  entre dois números inteiros  $p$  e  $q$ , com  $q \neq 0$ .

Dessa forma, esses novos números podiam ser representados geometricamente, associando-se cada número racional a um ponto sobre uma reta numerada. Entretanto, descobriu-se que existem pontos sobre a reta que não correspondem a nenhum número racional. Os números que se associam a estes pontos receberam o nome de números irracionais (isto é, números não racionais).

Duas grandezas são consideradas comensuráveis quando a razão entre elas corresponde a um número racional, o que significa que existe uma terceira grandeza, talvez muito pequena, que cabe um número inteiro de vezes em cada uma delas.

Segundo Boyer (2010, p.54), as circunstâncias que rodearam a primeira percepção da incommensurabilidade são tão incertas quanto a época de sua descoberta. Supõe-se, a princípio, que a percepção veio como resultado da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Enquanto que Aristóteles se refere a uma demonstração da incommensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, baseando-se na distinção de números pares e ímpares.



**Proposição 2.** Sendo  $d$  e  $l$  a diagonal e o lado do quadrado, temos que  $d$  e  $l$  são duas grandezas incomensuráveis.

*Demonstração.* Suponha que  $d$  e  $l$  sejam comensuráveis, isto é,  $\frac{d}{l}$  é racional e igual a fração irredutível  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  inteiros. Do teorema de Pitágoras, sabemos que:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

Daí:

$$\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \frac{d^2}{l^2} = \frac{p^2}{q^2} = 2 \implies p^2 = 2 \cdot q^2$$

Logo,  $p^2$  deve ser par, e então  $p$  é par, portanto  $q$  deve ser ímpar. Fazendo  $p = 2 \cdot r$  e substituindo na equação  $p^2 = 2 \cdot q^2$  segue que  $4 \cdot r^2 = 2 \cdot q^2$ , ou seja  $q^2 = 2 \cdot r^2$ . Então  $q^2$  deve ser par, logo  $q$  é par. Chegamos em uma contradição, pois provamos que  $q$  deve ser ímpar, como um número inteiro não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar.

Portanto,  $d$  e  $l$  não são comensuráveis. □

A descoberta dos números irracionais gerou uma crise lógica no meio matemático da época, pois até então, tudo dependia dos números inteiros, assim como a definição pitagórica das proporções (ver definição 1).

### 3.3 Cálculo do $\pi$

Na época de Arquimedes ainda não se tinha o conhecimento do símbolo  $\pi$ , assim como não eram utilizadas fórmulas. A letra grega  $\pi$  foi adotada para o número a partir da palavra grega para perímetro,  $\text{περιμετρσζ}$ , provavelmente por William Jones em 1706. Entretanto, somente após Leonhard Euler utilizá-la é que houve aceitação pela comunidade da época, popularizando o uso.

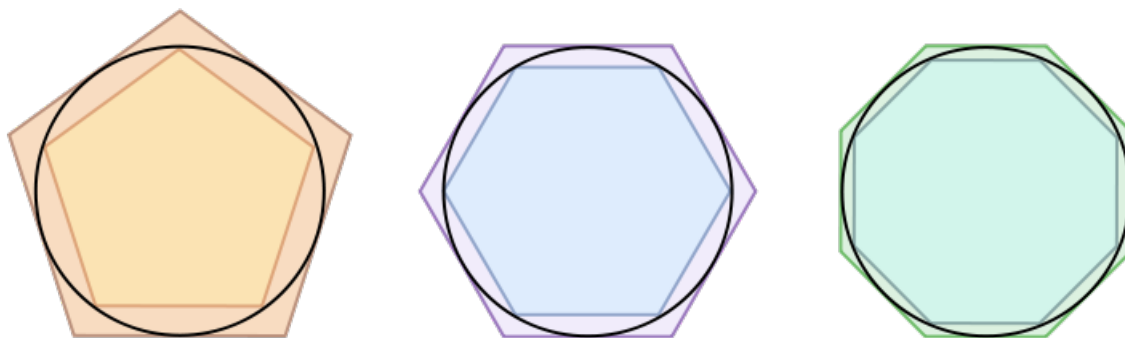
Eves (2011, p.141) afirma que o método a seguir, considerado como *método clássico* de cálculo de  $\pi$ , é creditado a Arquimedes. Tal método consiste em se calcular os perímetros de polígonos regulares inscritos ( $p_n$ ) e circunscritos ( $P_n$ ) de  $n$  lados em um círculo de raio unitário (também podemos utilizar as áreas dos polígonos regulares inscrito e circunscrito de  $n$  lados), encontrando uma boa aproximação para o valor de  $\pi$ .

Escreve-se a sequência  $(P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \dots)$ . Começando pelo terceiro termo, calcula-se cada termo a partir dos dois precedentes tomando alternadamente a média hármonica e a média geométrica:

$$P_{2n} = \frac{2 \cdot p_n \cdot P_n}{(p_n + P_n)} \qquad p_{2n} = \sqrt{p_n \cdot P_n}$$

Começando com o hexágono regular inscrito ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a noventa e seis lados, conforme figura 5.

Figura 5



Fonte: Leszek Krupinski, Wikipédia

O resultado do cálculo de Arquimedes sobre o círculo foi uma aproximação do valor de  $\pi$  expressa pelas desigualdades  $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$  (BOYER, 2010, p.86,87).

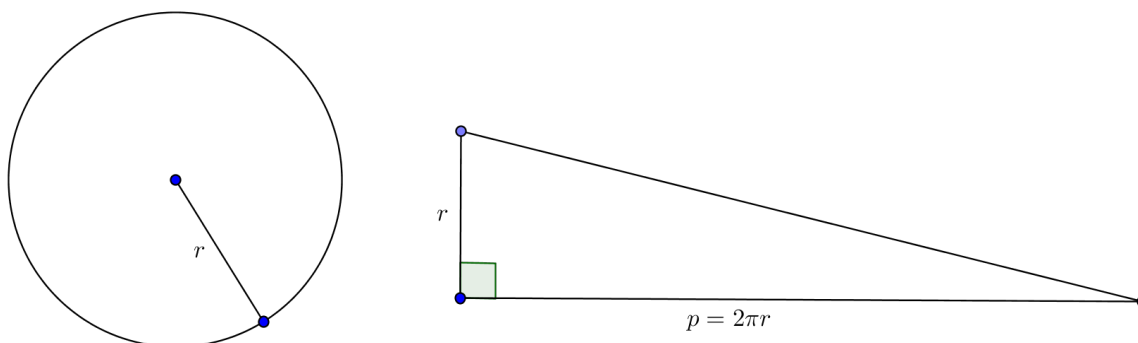
### 3.4 Área do Círculo

Em sua obra, *A Medida do Círculo*, Arquimedes também demonstra o seguinte:

**Lema 1.** *A área de qualquer círculo é igual a área de um triângulo retângulo, em que um dos lados sobre o ângulo reto é igual ao raio, e o outro é igual ao perímetro do círculo. (HEATH, 1897, p.91)*

Conforme ilustra a figura 6.

Figura 6 – Área do círculo



Fonte: Autor, 2014

*Demonstração.* A demonstração, é devida a Magnaghi (2011, p.51). Queremos provar que  $A_T = A_C$ . Uma vez que a razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo é constante e igual a  $\pi$ . Teremos:

$$\frac{P}{2 \cdot r} = \pi \Leftrightarrow p = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Logo,

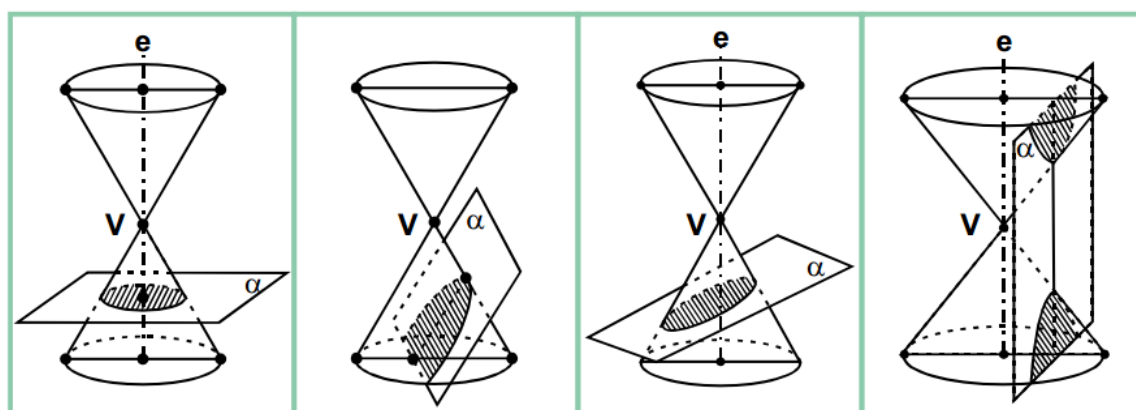
$$A_C = A_T = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

□

### 3.5 Parábola

Boyer (2010, p.99) cita que foi Apolônio de Perga quem escreveu um célebre tratado sobre as curvas: *As Cônicas*. Venturi (1949, p.119) afirma que as seções cônicas são curvas obtidas da interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas. A depender da posição do plano, podem ser obtidos quatro tipos, ver figura 7:

Figura 7 – Seções Cônicas.



Fonte: Venturi (1949, p.119)

1. *Elipse*, quando o plano é oblíquo ao eixo de simetria do cone.
2. *Parábola*, quando o plano é paralelo a geratriz do cone.
3. *Hiperbole*, quando o plano é paralelo ao eixo de simetria do cone.
4. *Círculo*, quando o plano é perpendicular ao eixo de simetria do cone.

Dentre as cônicas citadas, focaremos na parábola.

**Definição 2.** Dados um ponto  $F$  e uma reta  $l$ , pertencentes a um mesmo plano  $\alpha$ , com  $F \notin l$ , seja  $p$  a distância entre  $F$  e  $l$ , isto é:  $p = d(F, l)$ . Parábola, é o conjunto dos pontos de  $\alpha$  que estão a mesma distância de  $F$  e de  $l$ .

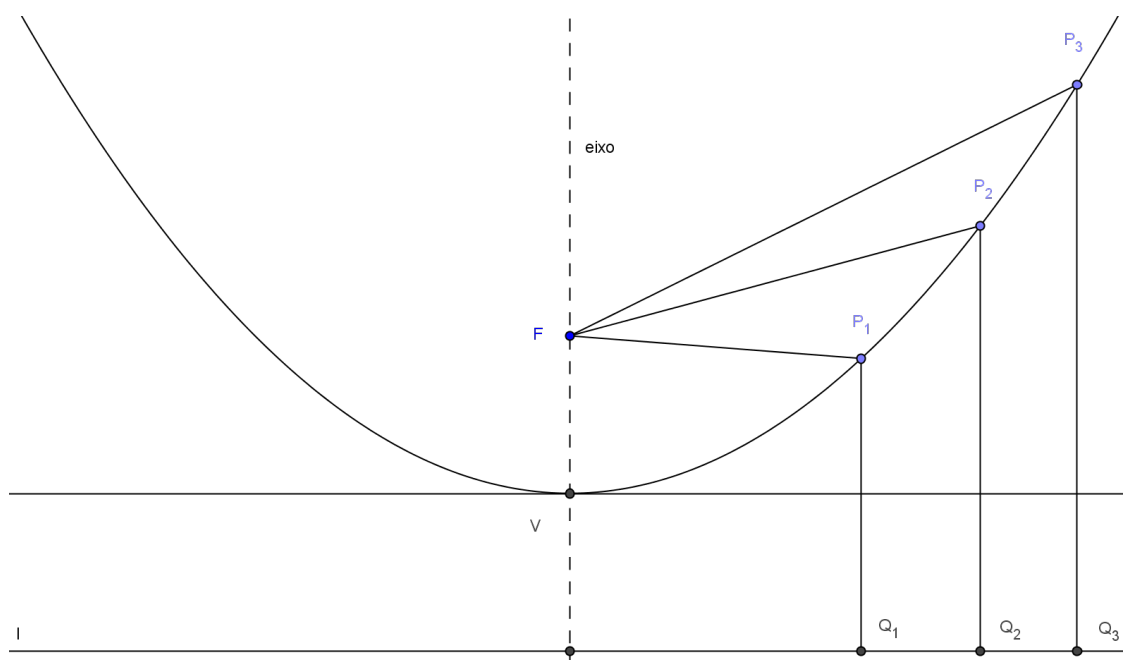
$$\text{Parábola} = \{P \in \alpha \mid d(P, F) = d(P, Q)\}$$

onde temos:

$$d(F, P_1) = d(P_1, Q_1) \quad d(F, P_2) = d(P_2, Q_2) \quad \text{e} \quad d(F, P_3) = d(P_3, Q_3)$$

segundo a figura 8.

Figura 8 – Parábola



Fonte: Autor, 2014

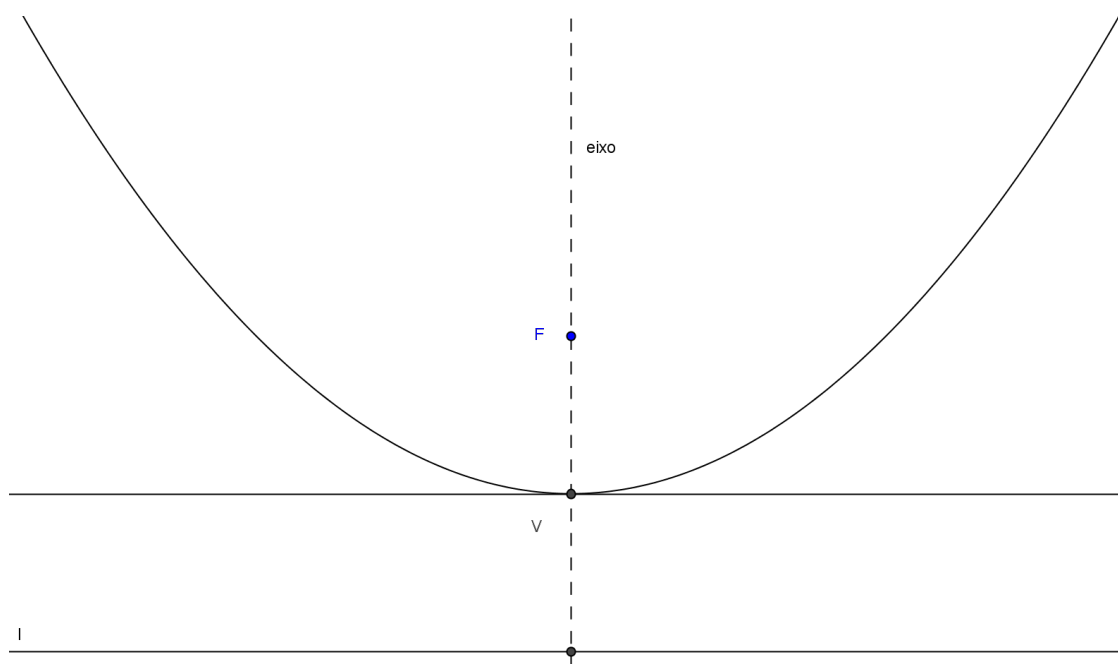
### 3.5.1 Elementos da parábola

Na parábola, podemos destacar os seguintes elementos:

- Foco da parábola (ponto  $F$ );
- Reta Diretriz da parábola (reta  $l$ );
- Vértice da parábola: é o ponto da parábola mais próximo do foco;
- Parâmetro da parábola ( $p$ ): é a distância do foco a reta diretriz ( $p = d(F, l)$ );
- Eixo de simetria: é a reta perpendicular a reta diretriz, passando pelo foco e o vértice.

Conforme mostra a figura 9:

Figura 9 – Parábola



Fonte: Autor, 2014

### 3.5.2 Propriedade Fundamental da Parábola

Segundo Lima (2012, p.2-5), ao rotacionarmos uma parábola em torno de seu eixo, iremos obter uma superfície chamada de parabolóide de revolução, ou superfície parabólica. Devido a uma propriedade geométrica da parábola, essa superfície possui aplicações importantes como por exemplo: antenas parabólicas, as quais convergem os sinais provenientes de algum satélite para um único ponto, o foco, melhorando a qualidade da recepção do sinal.

Da antiguidade, há uma lenda segundo a qual Arquimedes, destruiu a frota de navios que sitiava a cidade de Siracusa, utilizando espelhos parabólicos, os quais refletiam os raios de sol concentrados em sua superfície. Atualmente, utilizando o princípio de forma inversa, temos os holofotes, faróis de automóveis e lanternas de mão, por exemplo.

**Lema 2.** A reta  $\overleftrightarrow{FQ}$ , que une o foco  $F$  ao ponto  $Q$ , pé da perpendicular baixada de  $P$  (ponto de tangência) sobre a reta diretriz, é perpendicular a reta tangente à parábola em  $P$ .

*Demonstração.* Considere a equação cartesiana de uma parábola:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , cuja inclinação da reta tangente no ponto  $P = (x, y)$  corresponde a  $2ax + b$ . Temos dois casos a considerar: o ponto  $P$  é o vértice da parábola, ou o ponto  $P$  não é vértice da parábola.

Seja  $P$  o vértice da parábola, a reta  $\overleftrightarrow{FQ}$  seria vertical e a tangente no ponto  $P$  seria horizontal (inclinação zero). Assim, para um ponto  $P$  qualquer da parábola, isto é,  $x_P \neq \frac{-b}{2a}$ , temos que:  $F = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta+1}{4a})$  e  $Q = (x, \frac{-\Delta-1}{4a})$ . Logo, a inclinação da reta  $\overleftrightarrow{FQ}$  será:

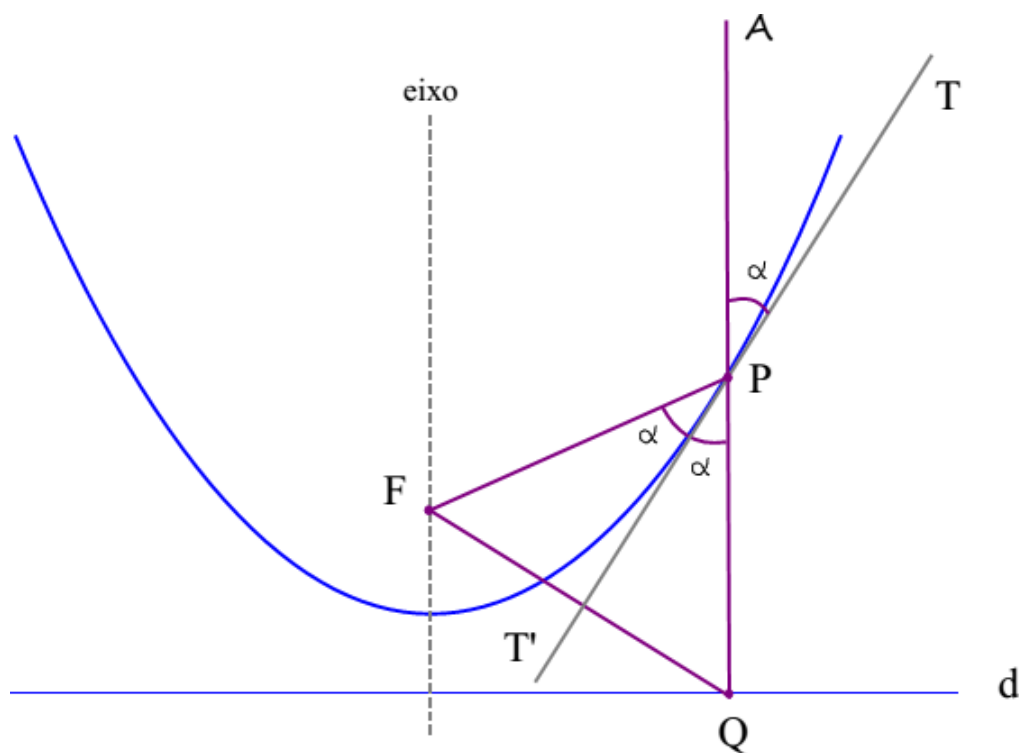
$$\frac{\frac{-\Delta-1}{4a} - \frac{-\Delta+1}{4a}}{x - (\frac{-b}{2a})} = \frac{-1}{2a(x + (\frac{b}{2a}))} = -\frac{1}{2ax + b}$$

Como o produto da inclinação da reta tangente pela inclinação da reta  $\overleftrightarrow{FQ}$  é igual a  $-1$ , temos que a reta  $\overleftrightarrow{FQ}$  é perpendicular a reta tangente a parábola no ponto  $P$ .  $\square$

O princípio que norteia a propriedade da parábola é devido a seguinte proposição:

**Proposição 3.** *A tangente à parábola num ponto  $P$  faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco  $F$  a esse ponto, ver figura 10.*

Figura 10 – Propriedade geométrica da parábola.



Fonte: Lima (2012, p.7)

*Demonstração.* Considere o ponto  $Q$ , o pé da perpendicular baixada do ponto  $P$  (ponto de tangência) sobre a reta diretriz da parábola. Conforme a definição 2, temos que:  $\overline{FP} = \overline{PQ}$ , daí, o triângulo  $PFQ$  é isósceles, e segundo o lema 2,  $FQ$  é perpendicular a tangente. Dessa forma, a tangente é a altura do triângulo  $PFQ$ , logo é também é bissetriz. Portanto, teremos que:  $\widehat{FPT}' = \widehat{QPT}' = \alpha$ .  $\square$

Dessa maneira, quando posicionamos a antena na direção do satélite, na realidade estamos ajustando o seu eixo, pois, devido a grande distância que se encontra o satélite, os sinais emitidos seguem trajetórias praticamente paralelas ao eixo da superfície parabólica.

### 3.6 Conjunto Convexo

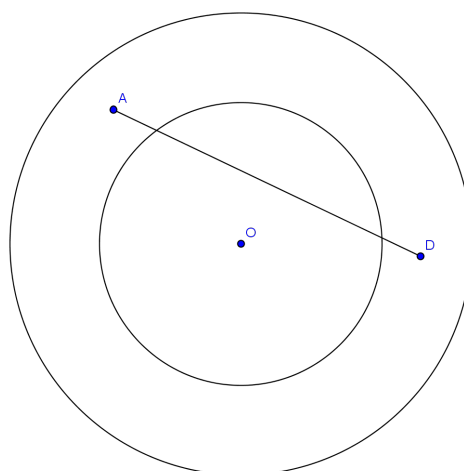
Conforme Neto (1982, p.55,56), temos que:

**Definição 3.** Uma figura  $F$  qualquer é um **conjunto convexo** se todo segmento  $\overline{AB}$  cujas extremidades  $A$  e  $B$  pertencem a  $F$  e está contido em  $F$ .

Diante disso, temos alguns exemplos:

1. O conjunto vazio é um conjunto convexo;
2. O ponto, a reta, o plano e o espaço são conjuntos convexos ;
3. Um círculo é um conjunto convexo;
4. A coroa circular **não** é um conjunto convexo, ver figura 11.

Figura 11 – A coroa circular não é um conjunto convexo



Fonte: Autor, 2014

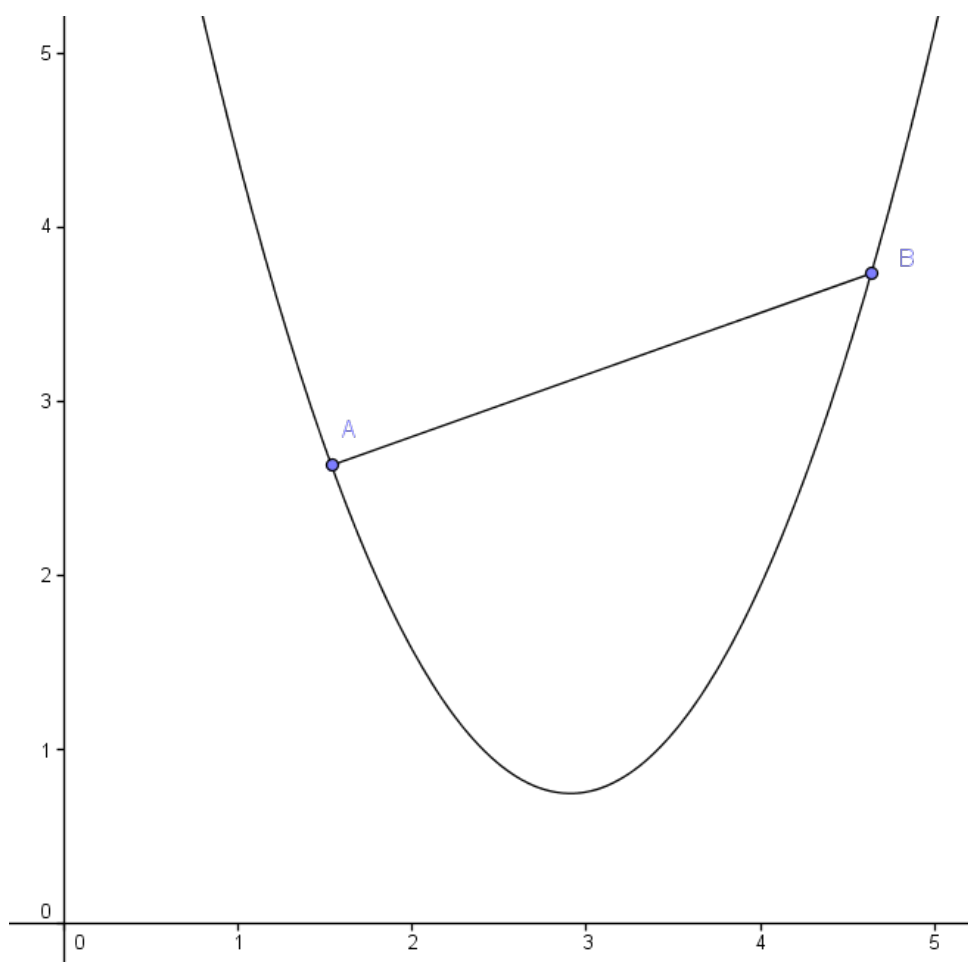
**Definição 4** (Curva Convexa). *Uma curva é dita convexa se, dado um segmento  $\overline{AB}$  cujas extremidades  $A$  e  $B$  pertencem a curva, a região compreendida entre o segmento  $\overline{AB}$  e a curva for um conjunto convexo.*

**Exemplo 3.** *A parábola é um exemplo de curva convexa.*

### 3.7 Segmento Parabólico

**Definição 5.** *Definimos segmento parabólico como sendo a região limitada por uma curva no plano (podemos considerar qualquer uma das cônicas citadas anteriormente) e uma linha reta, intersectando a curva convexa em dois pontos distintos, ver figura 12.*

Figura 12 – Segmento Parabólico



Fonte: Autor, 2014



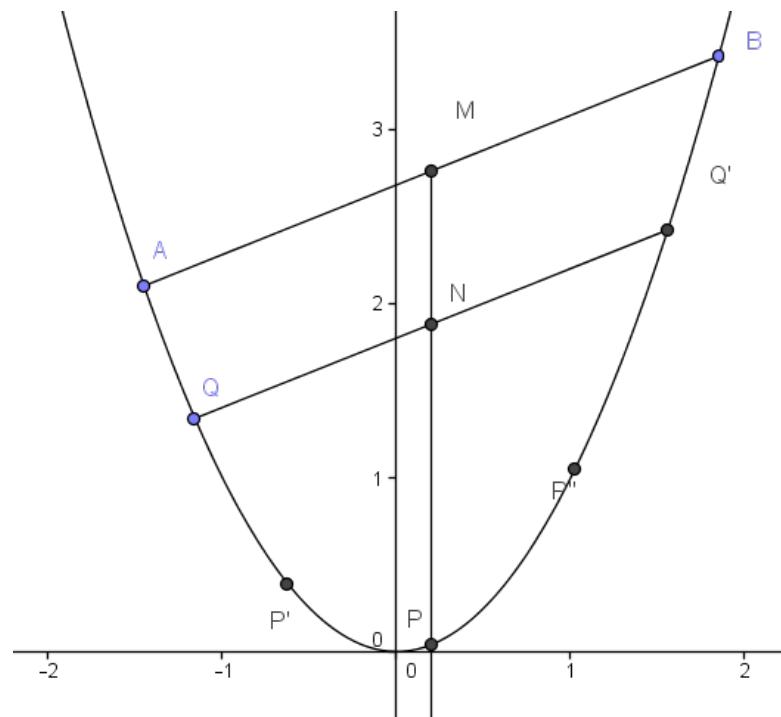
### 3.7.1 Outras Propriedades da Parábola

Os resultados a seguir, segundo Heath (1897, p.234,235) e Sally (2007, p.1), encontram-se nas três primeiras proposições citadas em sua obra *A Quadratura da Parábola*. Arquimedes não demonstra estas proposições, explicando que as demonstrações se encontram provadas em *Os Elementos de Cônicas* (tratado atribuído a Aristeu, o velho (370 a.C.-300 a.C.) e Euclides).

Tais proposições eram comumente empregadas pelos estudiosos da época, sendo utilizadas para justificar algumas passagens de suas demonstrações.

**Proposição 4.** *Dado um segmento parabólico com AB sendo uma corda que passa por dois pontos quaisquer de uma parábola, e o ponto P (que segundo (P1) representa o vértice do mesmo), ver figura 13, temos que:*

Figura 13 – Propriedade da Parábola



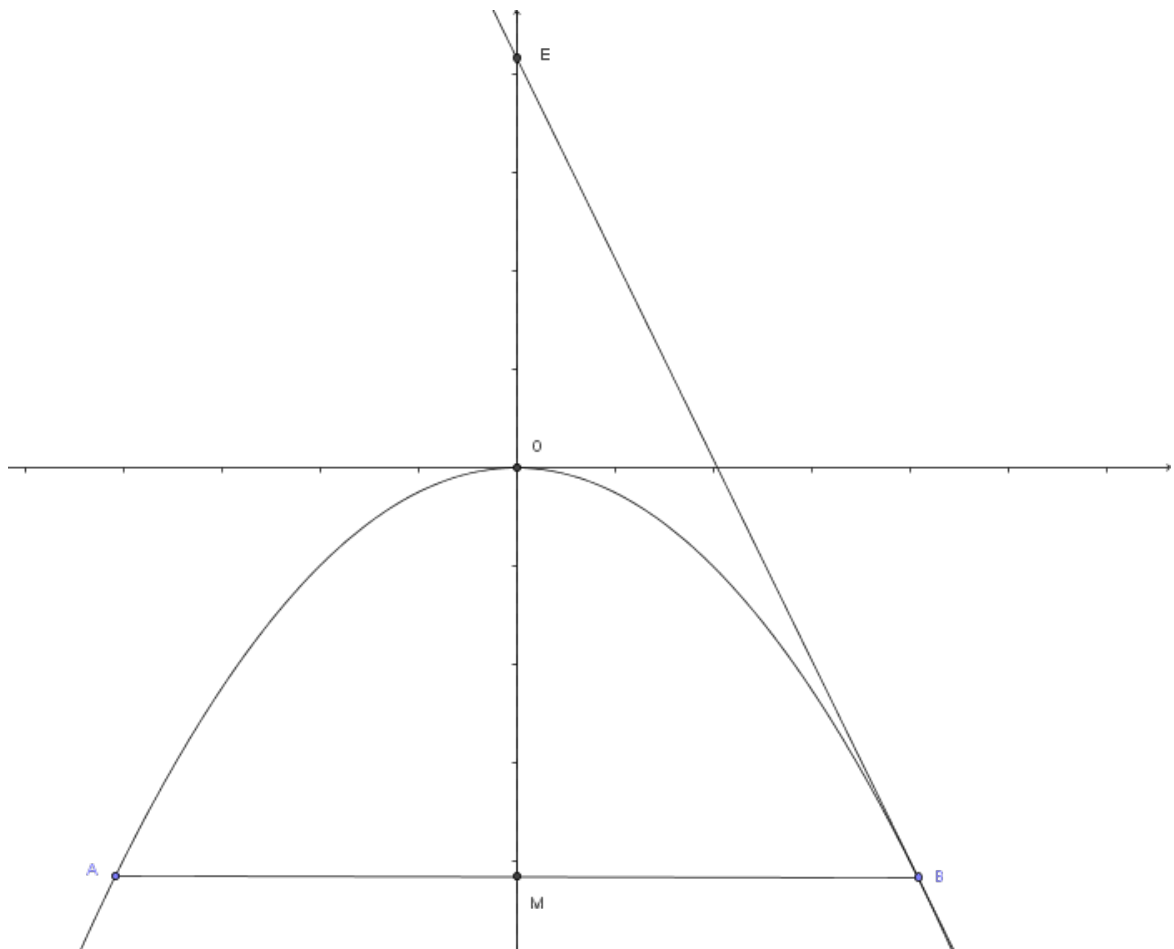
Fonte: Autor, 2014

- (P1) A reta paralela ao eixo (podendo ser o próprio eixo de simetria) que passa por P, intersecta a corda AB em seu ponto médio M;
- (P2) Toda corda QQ' paralela a corda AB também é intersectada por PM em seu ponto médio N;
- (P3)  $\overline{PM} : \overline{PN} :: \overline{AM}^2 : \overline{QN}^2$ , ou seja,  $\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{QN}^2}$

Segundo Magnaghi (2011), Arquimedes utiliza em a *Quadratura da parábola*, na sua segunda proposição, o seguinte lema, o qual será usado posteriormente no teorema 4.

**Lema 3.** *(A subtangente) Seja APB uma parábola qualquer, cuja corda AB é paralela a reta tangente em P, vértice do segmento parabólico (ou da parábola). Se uma paralela ao eixo de simetria da parábola, ou por uma outra reta paralela ao eixo, intersecta AB em um ponto M, a tangente a parábola em B intersecta a paralela em um ponto E, então  $\overline{EP} = \overline{PM}$ , conforme figura 14.*

Figura 14 – A Subtangente



Fonte: Autor, 2014

### 3.7.2 Demonstração (Moderna) do Lema 3

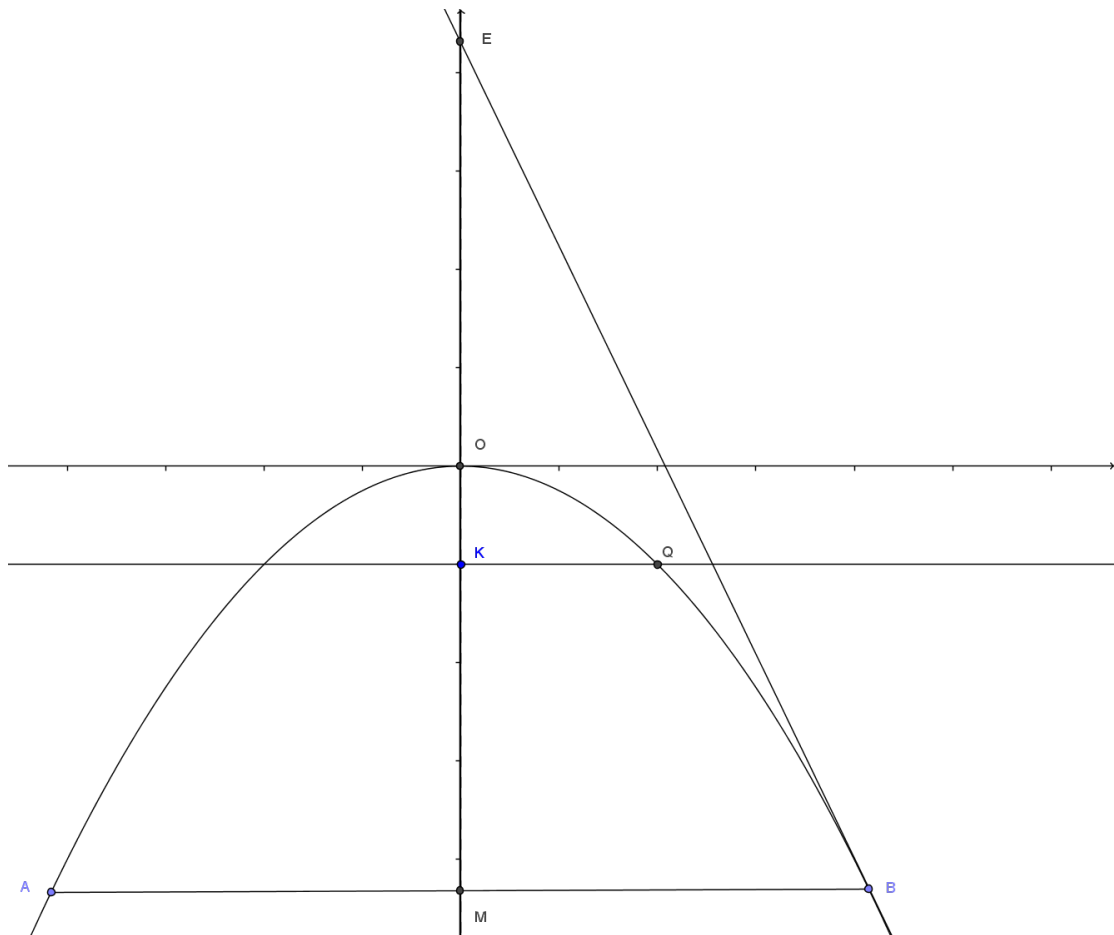
De acordo com Magnaghi (2011), Pierre de Fermat (1601 d.C. - 1665 d.C.) utilizando a geometria analítica conseguiu demonstrar tal lema.

Considere um sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , com centro  $O = (0, 0)$ . Aplicando a definição 2, a equação de uma parábola, com foco  $F = (0, -p)$  e reta diretriz  $l$ , localizada em  $y = p$ , é dada por:

$$x^2 = -4 \cdot p \cdot y \quad \text{ou} \quad y = -\frac{x^2}{4p}$$

Utilizando essa equação e a figura 15.

Figura 15 – A Subtangente

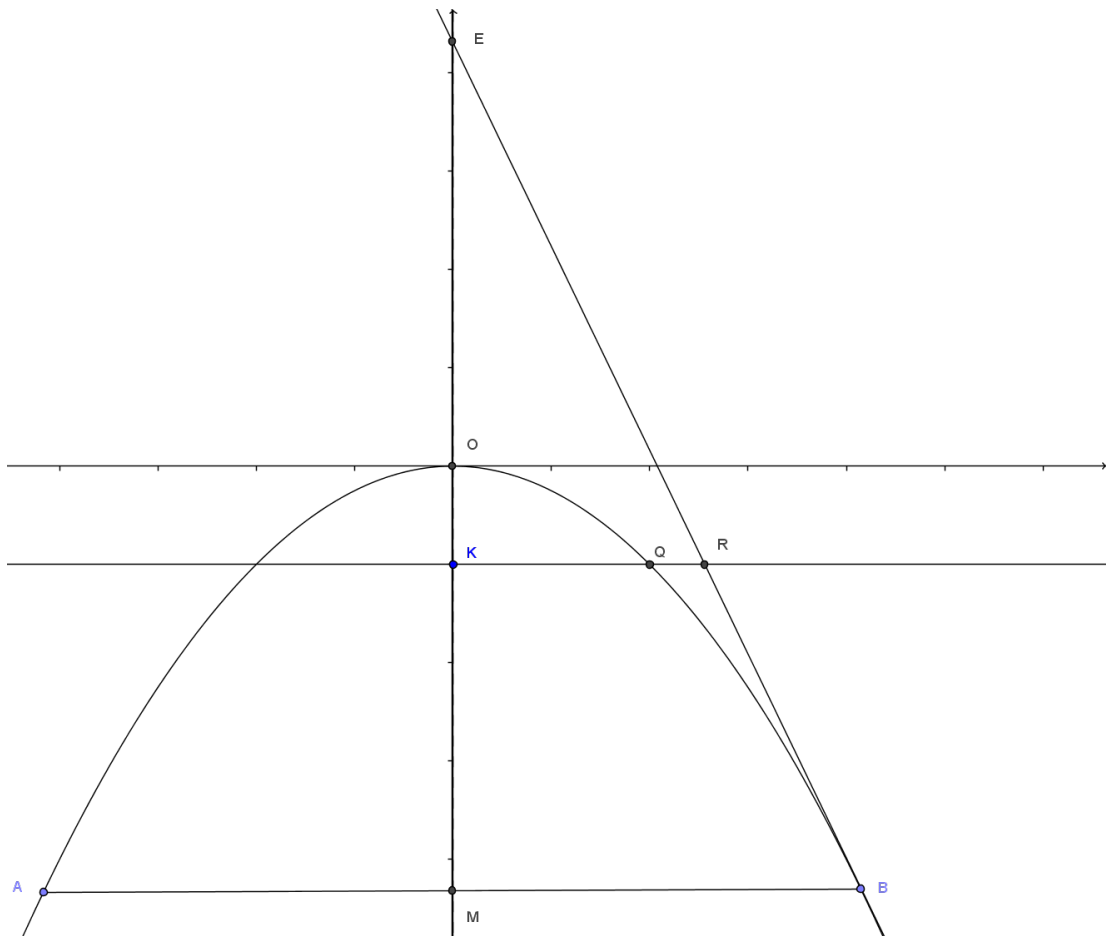


Fonte: Autor, 2014

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{BM}^2}{\overline{KQ}^2}$$

Seja  $R$  um ponto externo à parábola, tal que  $KR \parallel MB$ , de acordo com a figura 16:

Figura 16 – A Subtangente



Fonte: Autor, 2014

teremos:

$$\overline{KQ} < \overline{KR}$$

daí, temos:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OK}} > \frac{\overline{BM}^2}{\overline{KR}^2}$$

Por outro lado, os triângulos  $\Delta EMB$  e  $\Delta EKR$  são semelhantes e, conseqüentemente:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{KR}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{EK}}$$

logo,

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OK}} > \frac{\overline{EM}^2}{\overline{EK}^2}$$

Chamando  $\overline{OM} = x$ ,  $\overline{KM} = y$ ,  $\overline{OK} = x - y$ ,  $\overline{EM} = z$  e  $\overline{EK} = z - y$ , teremos:

$$\frac{x}{x-y} > \frac{z^2}{(z-y)^2}$$

de onde obteremos a desigualdade:

$$x \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot z + x \cdot y^2 > x \cdot z^2 - y \cdot z^2$$

$$-2 \cdot x \cdot z + x \cdot y > -z^2$$

$$z^2 + x \cdot y > 2 \cdot x \cdot z$$

Fazendo o ponto  $K$  se aproximar do ponto  $M$ , temos que  $\overline{KM}$  se aproxima de zero, e essa desigualdade se torna uma igualdade, pois o segmento  $\overline{QR}$  também se aproxima de zero e  $\overline{KQ} = \overline{KR}$ . Ou seja,  $z = 2 \cdot x$ . Portanto, a subtangente é dividida em duas partes iguais pelo vértice, isto é:

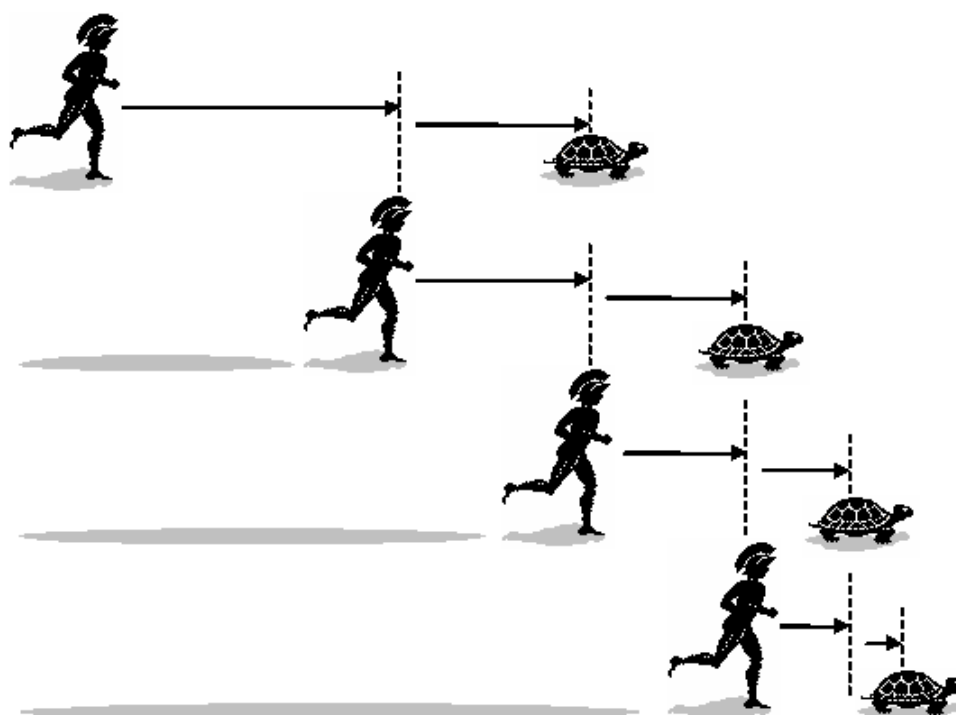
$$\overline{EM} = 2 \cdot \overline{OM}$$

### 3.8 Método da Exaustão

Eves (2004, p.417), afirma que na Grécia do século V a.C., se desenvolveram escolas de raciocínio matemática que admitiam uma das seguintes suposições: uma grandeza pode ser subdividida infinitamente em pedaços cada vez menores, ou é composta de uma grande quantidade de partes atômicas indivisíveis. O matemático Zeno (ou Zenão) de Elea (cerca de 430 a.C.), se destacou por chamar a atenção para algumas dificuldades (ou falhas) lógicas que poderiam ser encontradas nessas suposições, através de alguns paradoxos (um paradoxo é uma declaração que se supõe verdadeira, mas que conduz a uma contradição) elaborados para esta finalidade.

**Exemplo 4.** *(Aquiles e a Tartaruga)* Aquiles aposta uma corrida com uma tartaruga que sai com vantagem, e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco; e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. E o processo continua indefinidamente, com o resultado que Aquiles nunca pode alcançar a lenta tartaruga, conforme ilustra a figura 17.

Figura 17 – Aquiles e a tartaruga.



Fonte: <http://matcalculo.blogspot.com.br>

Segundo Garbi (2009, p.37), tal paradoxo partia do pressuposto de que a soma de uma infinidade de pequenas distâncias também seria infinita, e que graças ao se desenvolver o estudo das séries infinitas, descobriu-se justamente o contrário.

Em Boyer (2010, p.58), destacamos também, Demócrito de Abdera (460 a.C. - 370 a.C.), discípulo de Leucipo (cerca de 450 a.C.) ao qual atribuímos a criação da doutrina materialista atômica, segundo a qual todos os fenômenos físicos deviam ser explicados em termos de átomos rígidos infinitamente pequenos e variados (em tamanho e forma) que se movem incessantemente no espaço vazio.

O atomismo de Demócrito se deparou com alguns problemas. Se a pirâmide (ou o cone) é feita de infinitas seções infinitamente finas, triangulares (ou circulares), paralelas à base, então ao considerarmos duas seções adjacentes teremos um paradoxo:

- Se são iguais em área, então como todas serão iguais, a totalidade será um prisma (ou cilindro) e não uma pirâmide (ou cone);
- Se são desiguais em área, então como todas serão iguais, a totalidade será uma pirâmide em degraus (ou cone em degraus), não a figura de superfície lisa que visualizamos em nossa mente.

Segundo Eves (2004, p.418), devido ao problema clássico da quadratura do círculo, o sofista Antífon (cerca de 430 a.C.), antecipou a idéia de que, ao duplicarmos sucessivamente o número de lados de um polígono regular inscrito em um círculo, a diferença entre o perímetro do círculo e o polígono chegaria a ponto de se exaurir. E como se pode construir um quadrado cuja área seja igual à área de qualquer outro polígono, seria então possível construir um quadrado com área igual a de um círculo.

O método da exaustão é o mais próximo do cálculo diferencial que temos registro, apesar de ser criado com o propósito de superar o problema dos indivisíveis e, na medida em que fornece uma saída lógica para problemas como do paradoxos de Zeno, foi mais além, evoluiu, tornando-se uma ferramenta para demonstrar teoremas com rigor requerido na época.

Segundo Ávila (1986, p.38, 39), Arquimedes claramente fez uso em *O Método* utilizando-o concomitantemente com a *dupla redução ao absurdo*, utilizando alguns dos seguintes fatos já conhecidos e utilizados por seus contemporâneos:

**Lema 4.** *"Por repetidas adições a si mesmo, o excesso pelo qual a maior de duas áreas excede a menor, pode exceder qualquer área finita dada".*

**Lema 5.** *"Dadas duas grandezas distintas, se da maior se subtrai mais que sua metade, e do restante mais que sua metade, e assim por diante, acabará restando uma grandeza menor que a menor das grandezas dadas".*

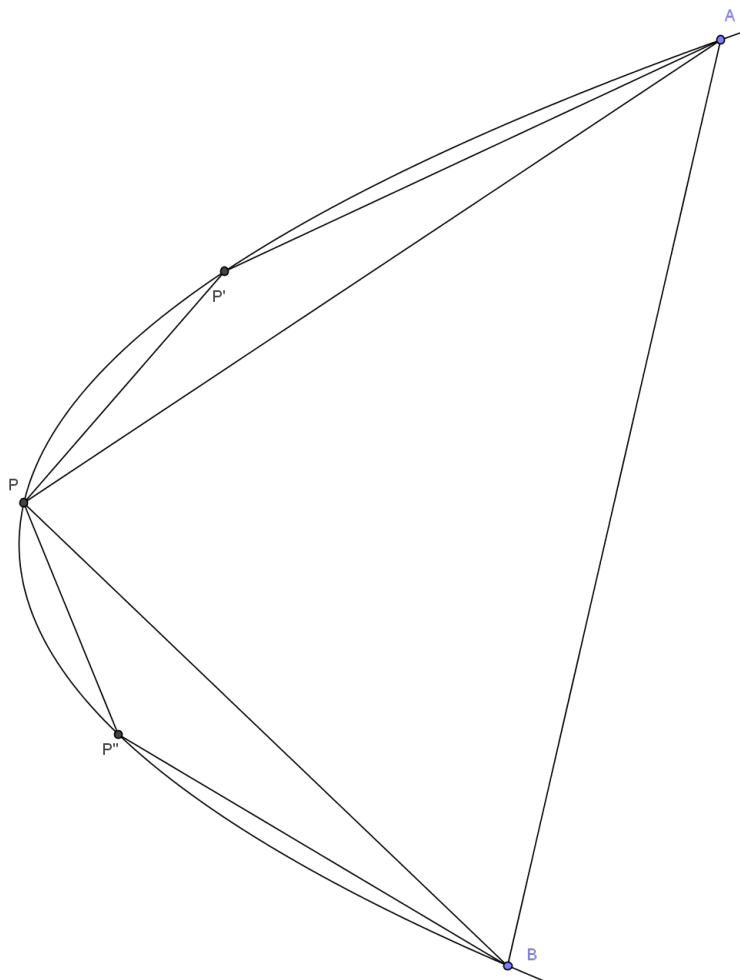
**Lema 6.** *"Dadas as grandezas A e B, existe um múltiplo de A que supera B, isto é,  $n \cdot A > B$ ".*

**Lema 7.** *"Dadas as grandezas A e B, existe um submúltiplo de B menor que A, isto é,  $\frac{B}{n} < A$ ".*

**Teorema 2.** *Todo segmento de parábola é quatro terços do triângulo que tem mesma base e mesma altura.*

*Demonstração.* Para determinar a área de um segmento parabólico, Arquimedes procedeu de modo análogo ao do método clássico para cálculo do  $\pi$  (citado na seção 3.3), com uma sutil diferença, apenas utilizando triângulos inscritos. Considerando, o segmento parabólico exposto na figura 18, temos:

Figura 18 – Quadratura da Parábola



Fonte: Autor, 2014

Após se inscrever o primeiro triângulo ( $\Delta APB$ ), a cada nova etapa são adicionados dois novos triângulos sobre os lados do triângulo anterior ( $\Delta APP'$  e  $\Delta BPP''$ ); procedendo assim, para um número suficientemente grande, a região sob a parábola é, por exaustão, equivalente a soma de todas as áreas dos triângulos inscritos.

- $A_0$  é a área do triângulo inicial,  $\Delta ABP$ ;
- $A_1$  é a soma das áreas  $\Delta ACD$  e  $\Delta CBE$  e corresponde a  $\frac{1}{4}A_0$ ;
- $A_2 = \frac{1}{4}A_1, \dots, A_{n-1} = \frac{1}{4}A_{n-2}, A_n = \frac{1}{4}A_{n-1}$ .
- Por outro lado,  $A_2 = \frac{1}{4^2}A_0, \dots, A_{n-1} = \frac{1}{4^{n-2}}A_0, A_n = \frac{1}{4^{n-1}}A_0$ .



Vale salientar que, na seção 4.2, demonstraremos que as áreas dos dois novos triângulos obtidos na etapa seguinte corresponde a  $\frac{1}{4}$  da área do triângulo anterior.

Assim, repetindo o processo para um número finito  $n$  de etapas, a soma das áreas de todos os triângulos obtidos se aproximará da área do segmento parabólico  $P$ , esta soma será dada por:

$$S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + A_n = A_0 + \frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4^2}A_0 + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}A_0 + \frac{1}{4^n}A_0$$

ou seja,

$$S_n = A_0 \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n} \right)$$

Entretanto, isso evidentemente nos leva a concluir que  $S_n < P$ . Como não havia a existência da noção de limites e ainda havia o problema com o infinito, Arquimedes considerou que, para um número suficientemente grande de etapas o segmento parabólico seria totalmente preenchido pelos triângulos e, daí,  $S_n = P$ .

De fato, Arquimedes percebeu que se adicionarmos  $\frac{1}{3}$  da última área no final da soma anterior, independente do valor de  $n$ , sempre obteremos  $\frac{4}{3}$ .

Em particular,

$$\frac{1}{4^i} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^i} = \frac{4}{3 \cdot 4^i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4^i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{i-1}}$$

Daí, obtemos que:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \left( \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left( \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right) \\ &= \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^2} \right) \\ &= 1 + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Logo,

$$S_n + \frac{A_n}{3} = A_0 \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^n} \right) = \frac{4}{3}A_0 = W$$

Resta ainda, eliminar qualquer dúvida a respeito da igualdade acima, onde faremos isto por dupla redução ao absurdo. Para isto, admitiremos duas possibilidades distintas para a área do segmento parabólico, o que segundo Ávila (1986, p.41) conduzem a absurdos.

- Suponhamos  $P > W$ . De início, tem-se:  $P - W > 0$ . Aplicando o lema 5, notamos que o primeiro triângulo  $A_0$  é maior que a metade do segmento parabólico, prosseguindo com as retiradas, após  $n$  etapas (para um número  $n$  suficientemente grande), teremos que:  $P - S_n < P - W$ , de onde segue-se que  $S_n > W$ . Mas isso é um absurdo, pois demonstramos anteriormente que:  $S_n + \frac{A_n}{3} = W$ .

- Suponhamos  $P < W$ . Analogamente,  $W - P > 0$ . Aplicando agora o lema 7, podemos observar que  $W - S_n = \frac{A_n}{3} < W - P$ . Logo  $S_n > P$ , o que é igualmente absurdo.

Após demonstrarmos que qualquer outra possibilidade acarreta numa contradição, a demonstração estará concluída. E, portanto,  $S_n = P$ .  $\square$

### 3.9 Lei da Alavanca

Nesta seção iremos abordar sobre a alavanca, sua origem, descrição e exposição do princípio sobre o qual Arquimedes inspirou-se para comprovar suas conjecturas.

A alavanca é uma das máquinas simples estudadas na Antiguidade grega. As outras máquinas simples são a polia (ou roldana), a cunha (ou plano inclinado), o sarilho (ou guincho, ou guindaste, ou roda e eixo) e o parafuso sem fim (ou hélice sem fim). A alavanca consiste em um corpo rígido, geralmente linear, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra (o fulcro ou ponto de sustentação). É como se fosse uma balança, mas agora com a possibilidade de colocarmos pesos a distâncias diferentes do fulcro. Assim como no caso da balança, diremos por definição que uma “alavanca está em equilíbrio” quando sua haste ou travessão fica em repouso em relação à Terra, na horizontal. Chamamos de braço da alavanca à distância horizontal,  $d$ , entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão e o plano vertical passando pelo fulcro. Algumas vezes falamos apenas, por brevidade, da distância entre o peso e o fulcro, mas em geral deve-se entender que estamos nos referindo à distância horizontal entre o ponto de atuação do peso na alavanca e o plano vertical passando pelo fulcro. Se estivermos falando de dois braços da alavanca, deve ser entendido que eles estão de lados opostos do plano vertical passando pelo fulcro. (ASSIS, 2008, p.165)

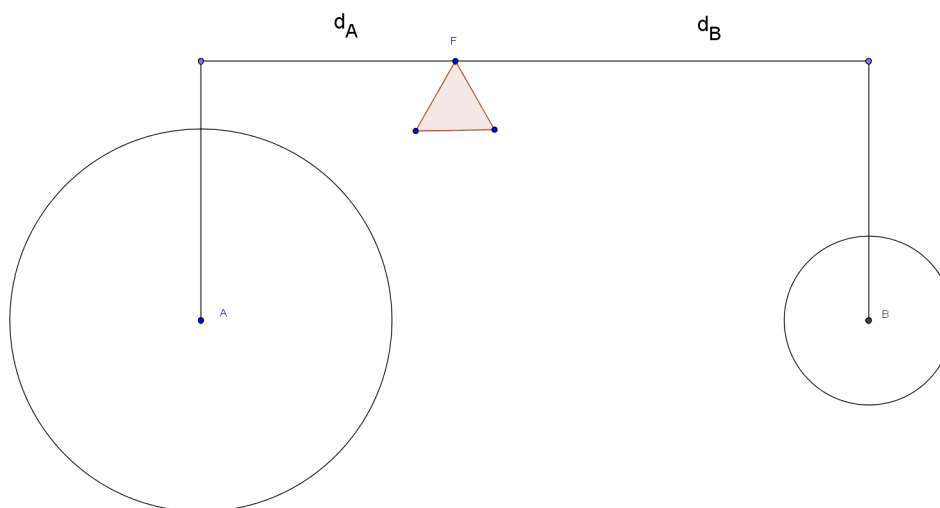
Ainda de acordo com Assis (2008, p.223), Arquimedes postula que:

**Postulado 1.** *Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.*

No primeiro período Arquimedes quer dizer “grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro”. Enquanto que, no segundo período quer dizer “grandezas de mesmo peso”. Em física, o *momento* de uma força em relação a um ponto é definido como o produto dessa força por sua distância ao ponto. Dentre outros postulados, este em particular, permitiu a Arquimedes chegar a dois resultados importantes: a lei da alavanca e a obtenção do centro de gravidade (ou centroide) das figuras geométricas. Em *Sobre o equilíbrio dos planos* - o centro de gravidade é um ponto que pertence a um corpo, de modo que, quando suspenso por este ponto, o corpo permanece inerte.

**Proposição 5.** *Duas grandezas, quer comensuráveis (ou incomensuráveis), se equilibram a distâncias inversamente proporcionais às suas grandezas, , conforme mostra figura 19.*

Figura 19 – Lei da Alavanca



Fonte: Autor, 2014

Sejam  $m_a$  e  $m_b$  as medidas das massas de duas grandezas distintas A e B, e considerando  $d_a$  e  $d_b$  a distância das mesmas ao fulcro, podemos, então, descrever a lei da alavanca, proposição 5, utilizando a razão definida por Eudoxo (seção 3.1, página 15).

De onde segue que:

$$d_a : d_b :: m_b : m_a \iff d_a \cdot m_a = d_b \cdot m_b$$

ou em termos mais modernos:

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{m_b}{m_a}$$

e no caso de uma distribuição homogênea de massa numa região plana (área), teremos:

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{A_b}{A_a} \quad \text{ou} \quad d_a \cdot A_a = d_b \cdot A_b$$

onde

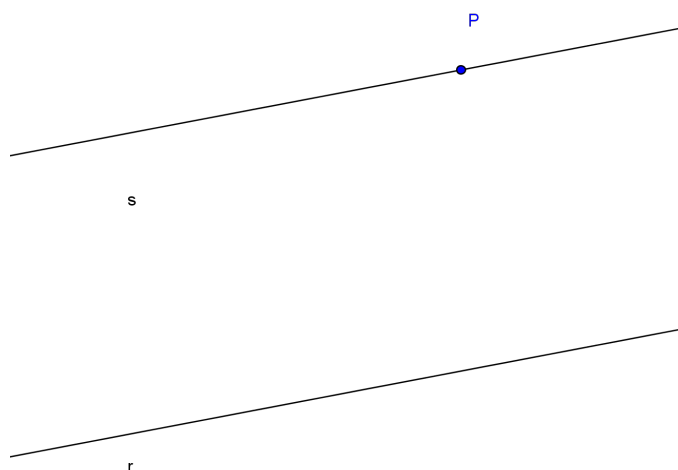
Na verdade, o que Arquimedes estudou não foi a Lei da Alavanca como ilustrada acima, mas sim, mudando um pouco de nomenclatura, a "*Lei de Equilíbrio de uma Alavanca*", pois seu interesse era estudar as condições de equilíbrio de uma alavanca e calcular o centro de gravidade de figuras planas. Arquimedes não foi o primeiro a usar a Lei da Alavanca, nem mesmo o primeiro a formular ou apresentar a referida lei. Ela já era conhecida na escola aristotélica antes mesmo de sua formulação por Arquimedes. (CARDOSO, 2006, p.221, 222)

### 3.10 Postulado das Paralelas

Em geometria euclidiana plana temos o seguinte postulado:

**Postulado 2.** *Por um ponto  $P$ , não pertencente a uma dada reta  $r$ , podemos traçar uma única reta  $s$ , passando por  $P$  e paralela à reta  $r$ , (figura 20).*

Figura 20 – Postulado das paralelas



Fonte: Autor, 2014

Segundo Eves (2011, p.539-544), Os gregos antigos questionavam esse postulado, pois o mesmo não decorria logicamente dos axiomas anteriores e isso gerou uma crise no meio matemático da época, pois, do ponto de vista lógico, ele não era tão claro, chegando ao ponto de se questionar se deveria ser considerado um postulado ou axioma.

A primeira tentativa, que se tem registro, de demonstração desse postulado é devida ao jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733), utilizando o método de redução ao absurdo, e, devido a contradições no desenvolvimento de suas idéias, não conseguiu avançar no desenvolvimento de uma geometria não euclidiana.

Acredita-se que Gauss (1777-1855), fora o primeiro matemático a dar passos concretos em direção a uma nova geometria, entretanto, como nunca publicou nada sobre o assunto, o mérito é compartilhada entre Bolyai (1802-1860) e Lobachevsky (1793-1856). Somente em 1854, Riemann (1826-1866) demonstrou que era possível, com alguns ajustes na teoria até então desenvolvida, criar uma nova geometria, não euclidiana e consistente.

As geometrias desenvolvidas até então: Bolyai, Lobachevsky e Riemann passaram a ser chamadas de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente.

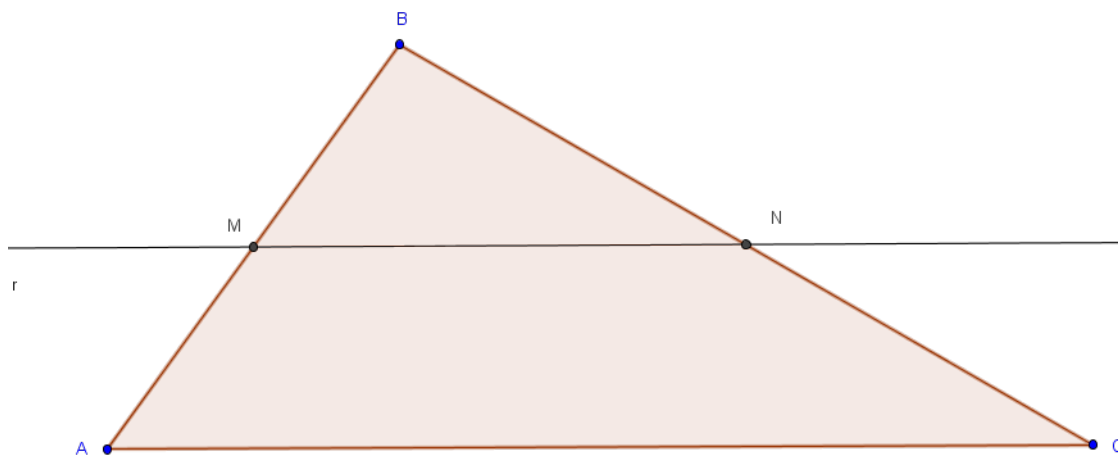
### 3.11 Teorema da Base Média

Inicialmente, teremos que demonstrar o seguinte lema:

**Lema 8.** *Se pelo ponto médio  $M$  de um lado no triângulo  $ABC$ , traçarmos uma reta paralela  $r$  à base do mesmo, esta encontra o terceiro lado no seu ponto médio, ver figura 21.*

*Demonstração.* Considere o triângulo  $ABC$ , de base  $AC$ , e ponto médio  $M$  sobre o lado  $AB$ .

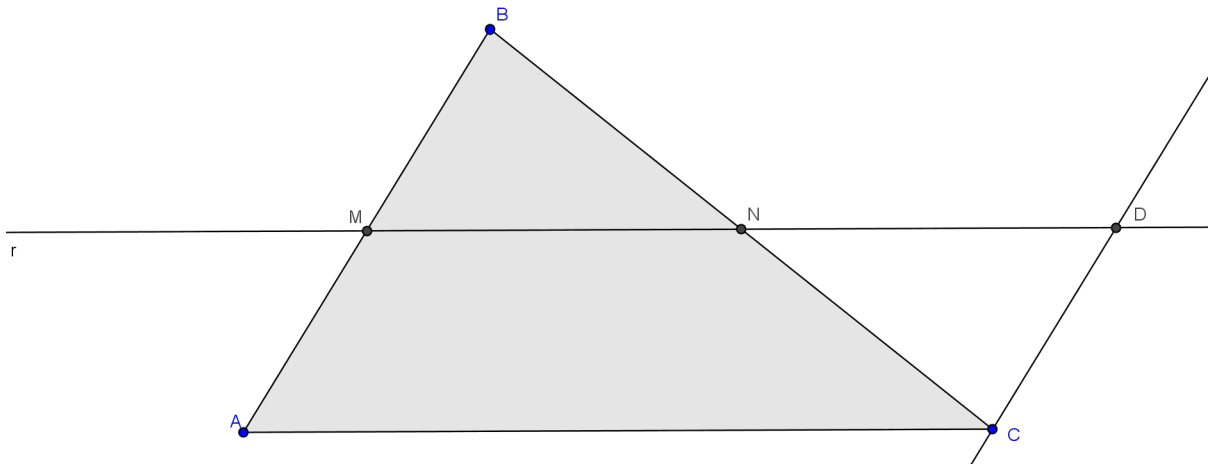
Figura 21 – Reta passando pelo ponto médio  $M$



Fonte: Autor, 2014

Seja a reta  $r$ , paralela a base  $AC$  e passando pelo ponto médio  $M$  do lado  $AB$  e no ponto  $N$  sobre o lado  $AC$ . Traçando uma semirreta pelo ponto  $C$ , paralela ao lado  $AB$ , intersectando a reta  $r$  no ponto  $D$ , temos, por construção, que o quadrilátero  $ACDM$ , é um paralelogramo, pois, de acordo com a figura 22:

Figura 22 – Paralelogramo



Fonte: Autor, 2014

$$AM \parallel CD$$

$$MD \parallel AC$$

Então,  $\overline{AM} = \overline{CD}$

Logo,  $\overline{MB} = \overline{CD}$  pois  $\overline{AM} = \overline{MB}$  (M é ponto médio de AB)

Analisando os triângulos  $\Delta BMN$  e  $\Delta NCD$ , temos:

$$\overline{BM} = \overline{CD} \quad (\text{resultado anterior})$$

$$\widehat{BMN} = \widehat{CDN} \quad (\widehat{\text{ângulos alternos internos}})$$

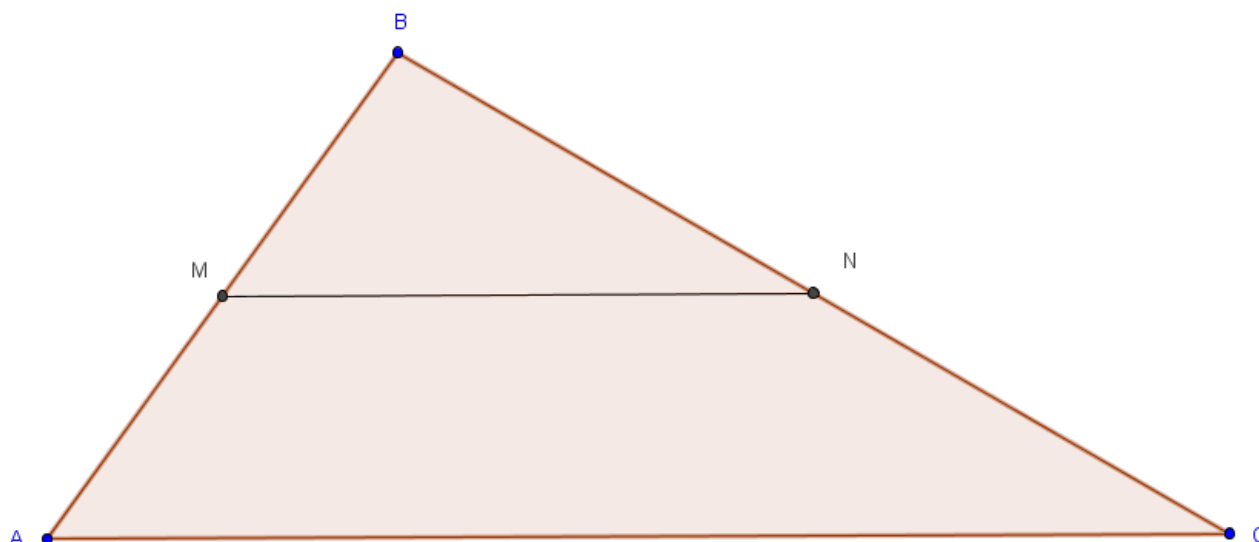
$$\widehat{BNM} = \widehat{DNC} \quad (\widehat{\text{ângulos opostos pelo vértice}})$$

Logo, os triângulos são congruentes. Assim,  $\overline{BN} = \overline{NC}$

Portanto,  $N$  é ponto médio do lado  $\overline{AC}$ . □

**Teorema 3** (Teorema da Base Média). *O Segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado, e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado. Conforme a figura 23.*

Figura 23 – Base média de um triângulo



Fonte: Autor, 2014

*Demonstração.* Utilizando o postulado das paralelas, seção 3.10, sendo  $P = M$  e  $s = \overleftrightarrow{AC}$ , então,  $r \parallel s$ ,  $M \in r$  e aplicando o lema 8, implica que  $r = \overleftrightarrow{MN}$ , onde  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente.

Seguindo a mesma construção, concluímos que  $\overline{MN} = \overline{ND}$ , pois os triângulos  $\triangle BMN$  e  $\triangle NCD$  são congruentes.

Por outro lado,  $ACDM$  é um paralelogramo, daí:

$$\overline{AC} = \overline{MD} = 2 \cdot \overline{MN}$$

Portanto,

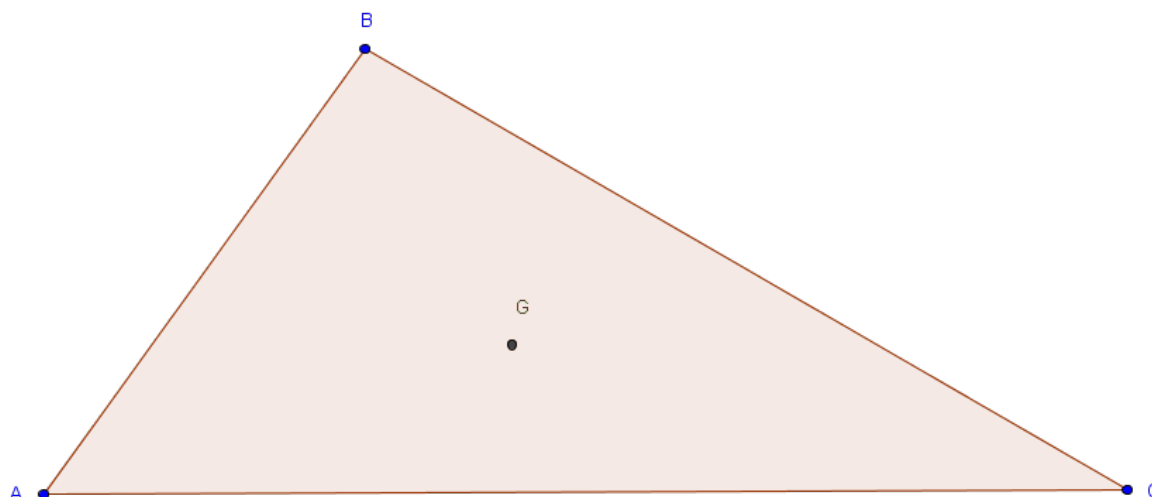
$$\overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

□

### 3.12 Centroide

Em seu livro *Sobre o equilíbrio dos planos*, Arquimedes fala sobre o centroide de um triângulo. Cumpre esclarecer que, em termos físicos, o centroide é o centro de gravidade - ou centro de massa - do triângulo (considerando aqui que a distribuição de massa é homogênea), sobre o qual Arquimedes utilizava a *lei da alavanca*, ver figura 24.

Figura 24 – Centroide de um triângulo



Fonte: Autor, 2014

**Definição 6.** *Uma mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um de seus vértices ao ponto médio do lado oposto a este vértice.*

**Definição 7.** *O centroide é o baricentro do triângulo, que corresponde ao ponto de interseção G das medianas de um triângulo qualquer.*

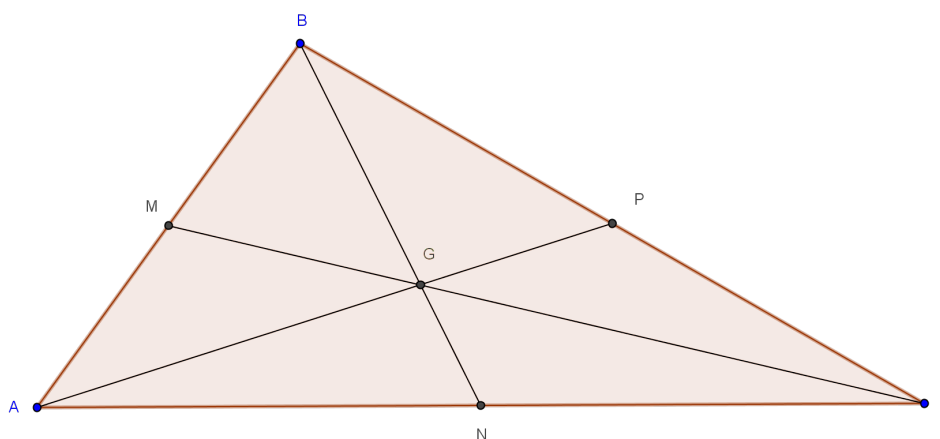


## 3.12.1 Propriedade do centroide

O centro de massa do triângulo possui uma propriedade interessante:

**Proposição 6.** *Seja o  $\Delta ABC$ , com pontos médios  $M$ ,  $N$  e  $P$  relativamente aos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ , e centro de massa em  $G$ , segundo a figura 25.*

Figura 25 – Propriedade do centroide



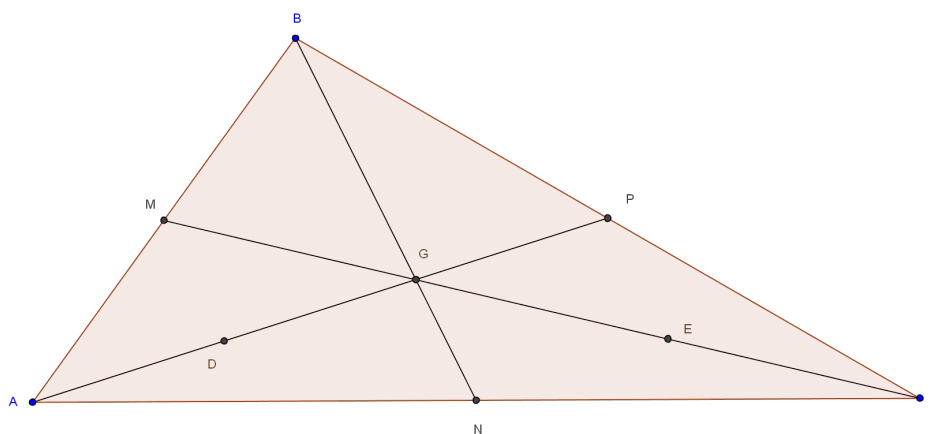
Fonte: Autor, 2014

*temos que:*

$$\overline{GM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM} \quad , \quad \overline{GN} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BN} \quad e \quad \overline{GP} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AP}$$

*Demonstração.* Marque os pontos médios  $D$  e  $E$  sobre os segmentos  $\overline{AG}$  e  $\overline{CG}$ , respectivamente, ver figura 26.

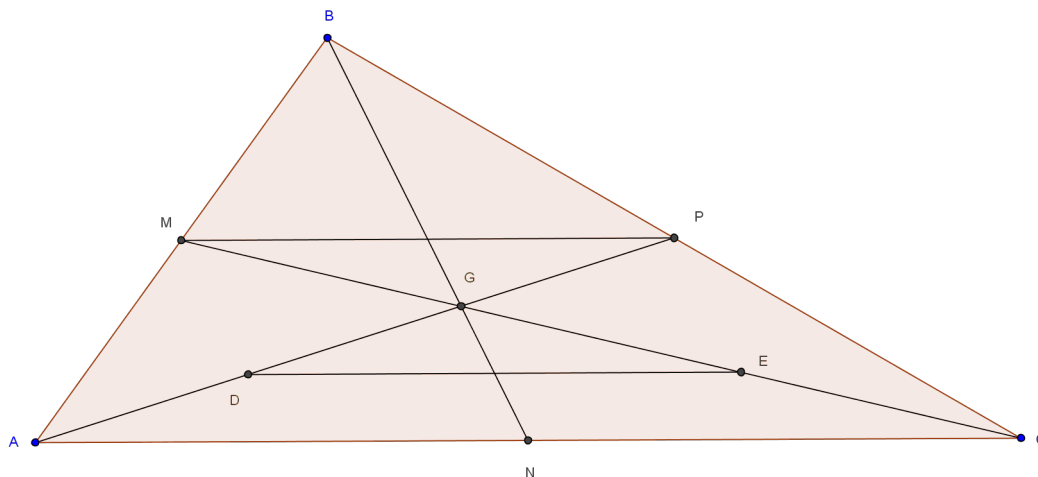
Figura 26 – Pontos médios sobre os segmentos AG e CG



Fonte: Autor, 2014

Pelo teorema da base média, seção 3, aplicado aos triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta AGC$ , e de acordo com a figura 27:

Figura 27 – Aplicando o teorema da base média



Fonte: Autor, 2014

segue que:

$$(i) MP \parallel AC \quad e \quad MP = \frac{AC}{2}$$

$$(ii) DE \parallel AC \quad e \quad DE = \frac{AC}{2}$$

logo,

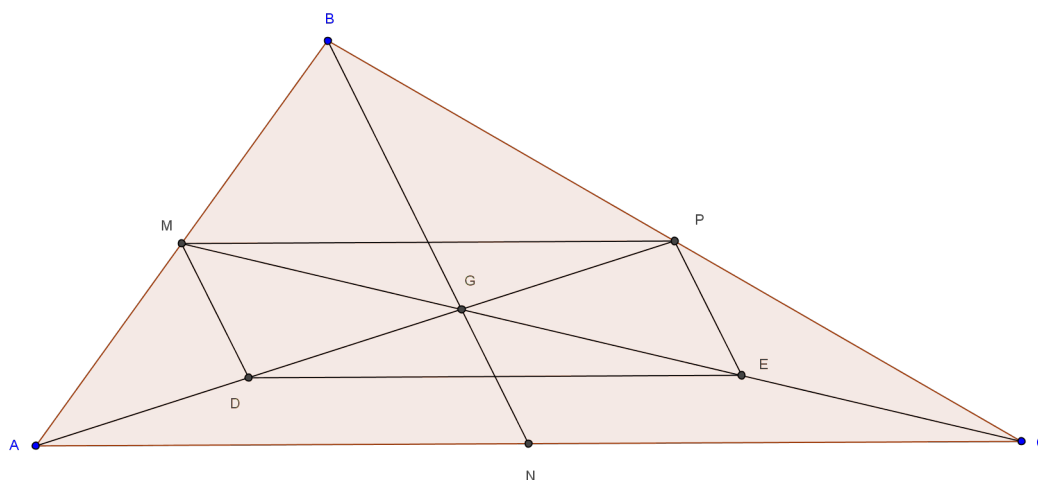
$$MP \parallel DE \quad e \quad \overline{DE} = \overline{MP}$$

De modo análogo, usando os triângulos  $\Delta AGB$  e  $\Delta BGC$

$$MD \parallel PE \quad e \quad \overline{MD} = \overline{PE}$$

Consequentemente,  $DEPM$  é um paralelogramo, conforme figura 28.

Figura 28 – Aplicando a definição de paralelogramo



Fonte: Autor, 2014

$$\overline{AD} = \overline{DG} = \overline{GP} \Rightarrow \overline{GP} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AP}$$

e

$$\overline{CE} = \overline{EG} = \overline{GM} \Rightarrow \overline{GM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM}$$

Analogamente, para a mediana  $BN$ , e sobre  $BG$  o ponto médio  $F$ ,

$$\overline{BF} = \overline{FG} = \overline{GN} \Rightarrow \overline{GN} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BN}$$

□

### 3.13 Volume de um sólido geométrico

Segundo Dolce e Pompeo (2005b, p.153), temos a seguinte definição:

**Definição 8.** *Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido.*

de maneira que:

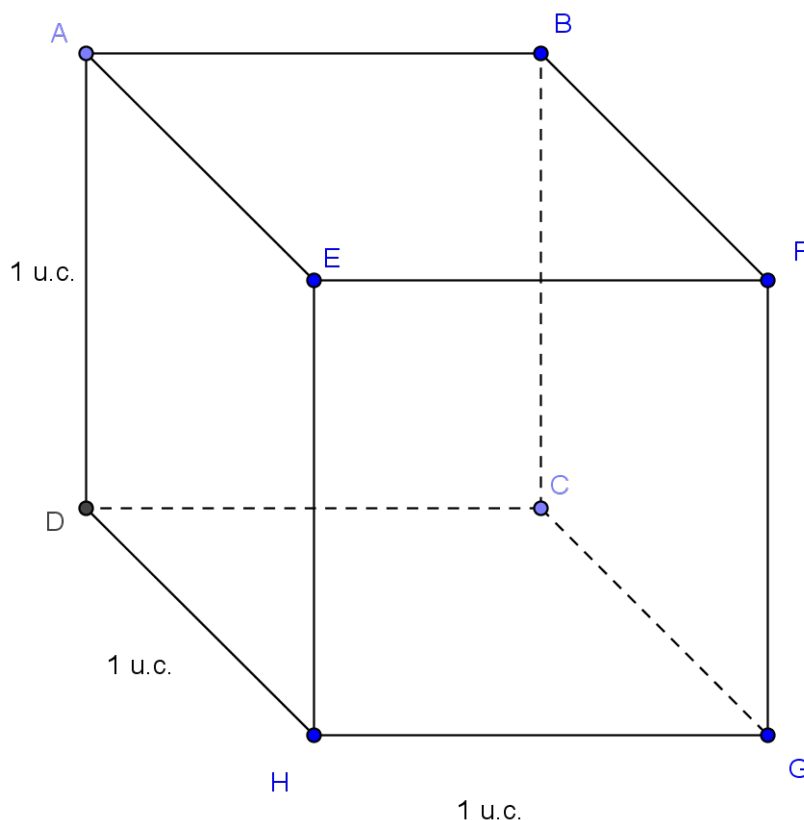
1. sólidos congruentes tem volumes iguais.
2. se um sólido  $S$  é a reunião de dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  que não tem pontos *interiores* comuns, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes de  $S_1$  com  $S_2$ .

Dois sólidos são *equivalentes* se, e somente se, eles tem *volumes iguais* na mesma unidade de volume.

Conforme Dante (2014, p.196), temos a seguinte definição:

**Definição 9** (Unidade de Medida de Volume). *Estabelecemos como **unidade de volume** um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento. Ele será denominado de **cubo unitário**, ver figura 29.*

Figura 29 – Metro Cúbico



Fonte: Autor, 2014

Qualquer cubo cuja aresta meça 1 terá, por definição, volume igual a 1.

### 3.14 Princípio de Cavalieri

Segundo Eves (2011, p.425) o italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileu (1564-1642), foi responsável pela divulgação da teoria dos logaritmos na Europa, e obteve notoriedade quando publicou em 1635, o tratado *Geometria indivisibilibus* (ou geometria dos indivisíveis). Nesse trabalho, ele apresenta a teoria (ou método) dos indivisíveis, que possivelmente se inspirou em Demócrito (410 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.), mas talvez sua motivação se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes.

Para Cavalieri, um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção, enquanto que um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Por sua vez, considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas.

O argumento utilizado por ele, consistia em deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, com isso a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Por analogia, os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original.

Um exemplo, para essa teoria dos indivisíveis, é devida a Demócrito, quando considerou a possibilidade de um cone ser formado de uma infinidade de secções planas paralelas à base.

Se duas secções “adjacentes” fossem do mesmo tamanho, o sólido seria um cilindro e não um cone. Se, por outro lado, duas secções adjacentes tivessem áreas diferentes, a superfície do sólido seria formada de uma série de degraus, o que certamente não se verifica. Neste caso se assumiu que o volume do cone pode ser subdividido indefinidamente (ou seja, numa infinidade de secções planas atômicas), mas que o conjunto dessas secções é contável, no sentido de que, dada uma delas, há uma outra que lhe é vizinha; suposição que se situa, até certo ponto, entre as duas já consideradas sobre a divisibilidade de grandezas. Demócrito pode ter argumentado que se duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais são seccionadas por planos paralelos às bases, verificando-se a divisão das alturas numa mesma razão, então as secções correspondentes assim formadas são equivalentes. Portanto as pirâmides contêm mesmo número infinito de secções planas equivalentes, o que implica que seus volumes devem ser iguais. (EVES, 2011, p.420)

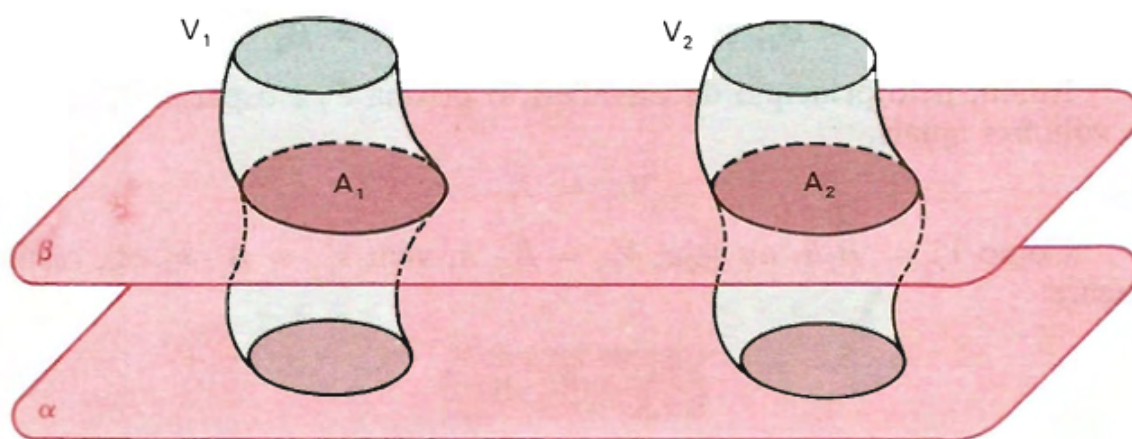
Com base nesses resultados, temos os chamados princípios de Cavalieri:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Neste presente trabalho, iremos utilizar a definição que consta em Dolce e Pompeo (2005b, p.165)

**Definição 10.** *Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (volumes equivalentes), ver figura 30.*

Figura 30 – Princípio de Cavalieri



$$(A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2)$$

Fonte: Autor, 2014

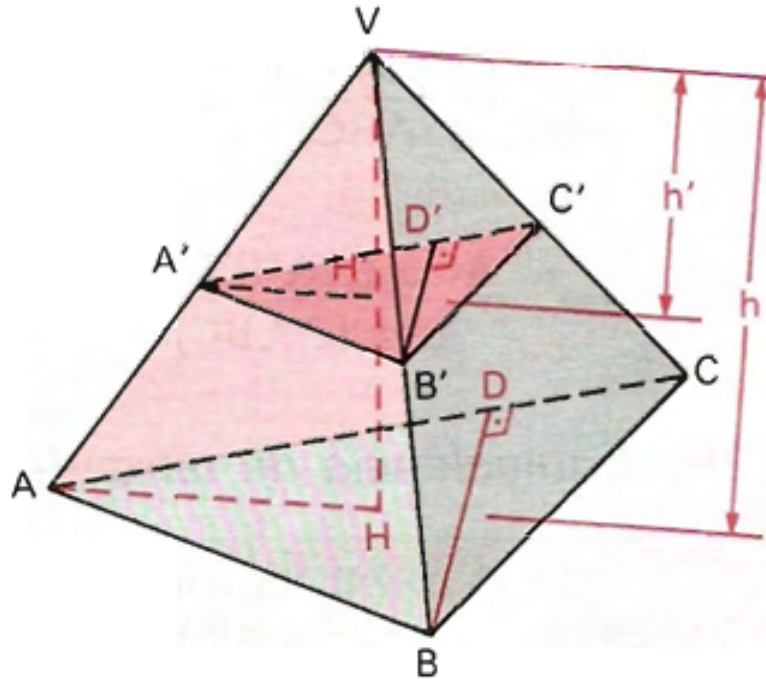
O princípio de Cavalieri, atualmente, nos ajuda a calcular o volume de diversos sólidos geométricos.

### 3.15 Volume de alguns sólidos

#### 3.15.1 Volume da pirâmide

Segundo Dolce e Pompeo (2005b, p.189-193), quando seccionamos uma pirâmide triangular (tetraedro) por um plano paralelo à base da mesma, temos três casos a considerar, ver figura 31:

Figura 31 – Tetraedro  $VABC$ . Fonte: Dolce e Pompeo (2005b, p.189)



Fonte: Autor, 2014

**Lema 9.** *As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.*

*Demonstração.* Observando que as retas  $\overleftrightarrow{A'H'}$  e  $\overleftrightarrow{AH}$  são as interseções dos planos paralelos com um terceiro plano, o qual contém a reta  $\overleftrightarrow{VH}$ ; logo os triângulos  $\Delta VH'A'$  e  $\Delta VHA$  são semelhantes, daí:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$

□

**Lema 10.** *A secção e a base são triângulos semelhantes.*

*Demonstração.* Temos que os triângulos  $\Delta VA'B'$  e  $\Delta VAB$  são semelhantes, pelo lema 9:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h}$$

os triângulos  $\Delta VB'C'$  e  $\Delta VBC$  são semelhantes, pelo lema 9:

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}$$

e também, os triângulos  $\Delta VA'C'$  e  $\Delta VAC$  são semelhantes, pelo lema 9:

$$\frac{VC'}{VA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{h'}{h}$$

logo,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}$$

Portanto, os triângulos  $\Delta A'B'C'$  e  $\Delta ABC$  são semelhantes e sua razão de semelhança é  $\frac{h'}{h}$ . □

**Lema 11.** *A razão entre as áreas da secção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.*

*Demonstração.* Considerando  $B'D'$  e  $BD$  as duas respectivas alturas da secção e da base, temos que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h}$$

Logo, teremos:

$$\frac{\text{Área } \Delta(A'B'C')}{\text{Área } \Delta(ABC)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (A'C') \cdot (B'D')}{\frac{1}{2} \cdot (AC) \cdot (BD)} = \frac{A'C'}{AC} \cdot \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

□



**Proposição 7.** *Duas pirâmides triangulares (tetraedros) com áreas das bases iguais (bases equivalentes) e com mesma altura têm volumes iguais (volumes equivalentes).*

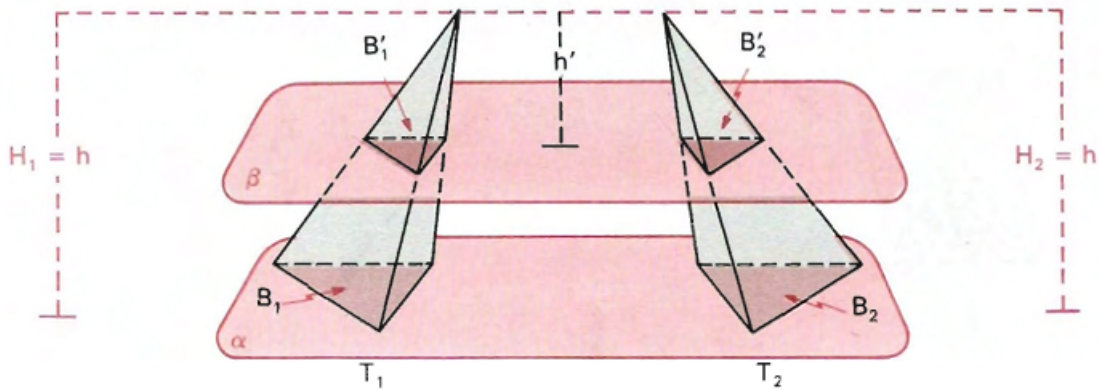
Sejam  $T_1$  e  $T_2$  os dois tetraedros,  $B_1$  e  $B_2$  as áreas das bases e  $H_1$  e  $H_2$  as alturas, temos, por hipótese:

$$B_1 = B_2 \quad \text{e} \quad H_1 = H_2 = h$$

*Demonstração.* Podemos supor, sem perda de generalidade, que as bases equivalentes estão num plano  $\alpha$  e que os vértices estão num mesmo semi-espaco dos determinados por  $\alpha$ .

Considere agora, um plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distando  $h'$  dos vértices e determinando em  $T_1$  e  $T_2$  seções de áreas  $B'_1$  e  $B'_2$ , conforme mostra a figura 32:

Figura 32 – Tetraedros com áreas das bases equivalentes.



Fonte: Dolce e Pompeo (2005b, p.191)

$$\frac{B'_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$\frac{B'_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

daí,

$$\frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}$$

como  $B_1 = B_2$ , por hipótese, temos que  $B'_1 = B'_2$

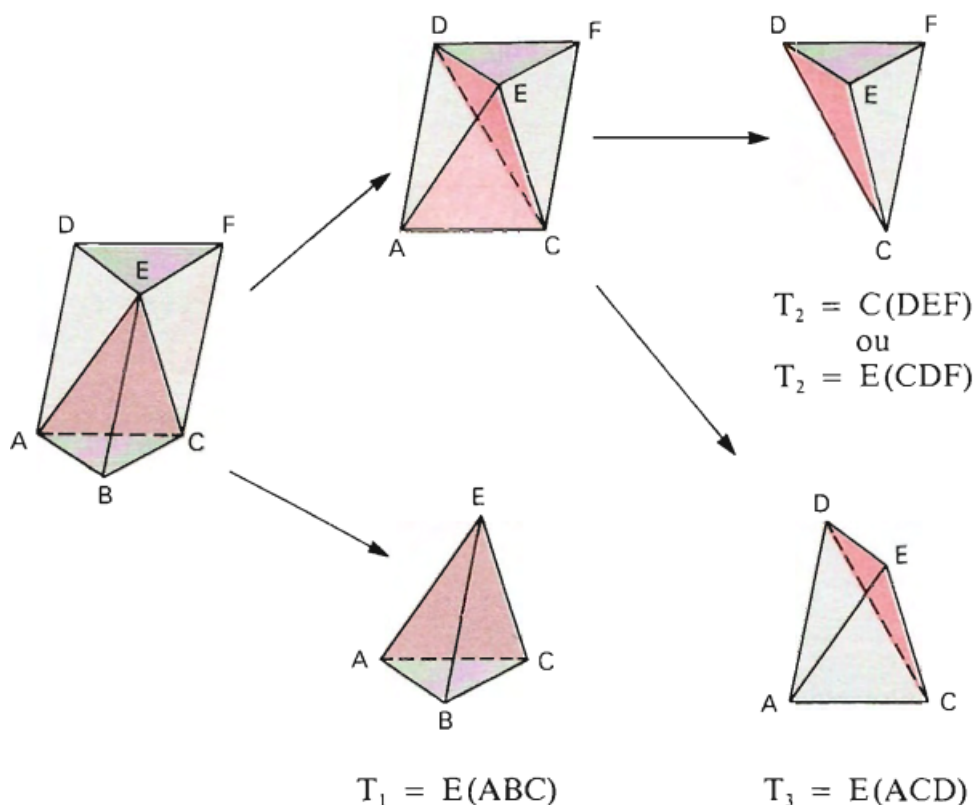
Logo, se as seções tem áreas iguais, pelo princípio de Cavalieri, seção 10, os sólidos  $T_1$  e  $T_2$  tem volumes iguais (volumes equivalentes), isto é,  $V_{T_1} = V_{T_2}$ .  $\square$

## 3.15.2 Cálculo do volume de uma pirâmide triangular

**Proposição 8.** *Todo prisma triangular é a soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si, isto é, tem volumes iguais.*

*Demonstração.* Seja o prisma triangular ABCDEF, conforme figura 33.

Figura 33 – Decomposição de um prisma triangular em três partes.



Fonte: Dolce e Pompeo (2005b, p.192)

Cortando o prisma pelo plano (ACE), obtemos o tetraedro  $T_1 = E(ABC)$  e a pirâmide de base quadrada  $E(ACFD)$ . Cortando a pirâmide  $E(ACFD)$  pelo plano (CDE), obtemos os tetraedros  $T_2 = C(DEF)$  (ou  $T_2 = E(CDF)$ ) e  $T_3 = E(ACD)$ . De maneira que,

$$\text{Prisma}(ABCDEF) = T_1 + T_2 + T_3$$

As pirâmides  $T_1 = E(ABC)$  e  $T_2 = C(DEF)$  tem o mesmo volume, pois suas bases, ABC e CDF são congruentes e possuem a mesma altura (a distância do ponto E ao plano (ABC) é igual a distância do ponto A ao plano (DEF)), logo,  $V_{T_1} = V_{T_2}$ .

As pirâmides  $T_2 = E(CDF)$  e  $T_3 = E(ACD)$  tem o mesmo volume, pois suas bases, CDF e ACD são congruentes, pois CD é a diagonal do paralelogramo ACFD) e possuem a mesma altura (a distância do ponto E ao plano (ACFD)) logo,  $V_{T_2} = V_{T_3}$ .

Assim, temos que:  $V_{T_1} = V_{T_2}$  e  $V_{T_2} = V_{T_3}$ . Logo,  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$ .

Considerando que  $V_{\text{Prisma}} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}$  e fazendo  $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3} = V$ , teremos que:

$$V_{Prisma} = 3 \cdot V \implies V = \frac{1}{3} \cdot V_{Prisma}$$

Segundo Dante (2014, p.209), para o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer, podemos utilizar o resultado anterior, proposição 3.15.2 e o princípio de Cavalieri, definição 10, o qual garante que duas pirâmides com áreas das bases iguais e com a mesma altura tem volumes iguais. Por outro lado, como  $V_{Prisma} = B \cdot h$ , teremos:

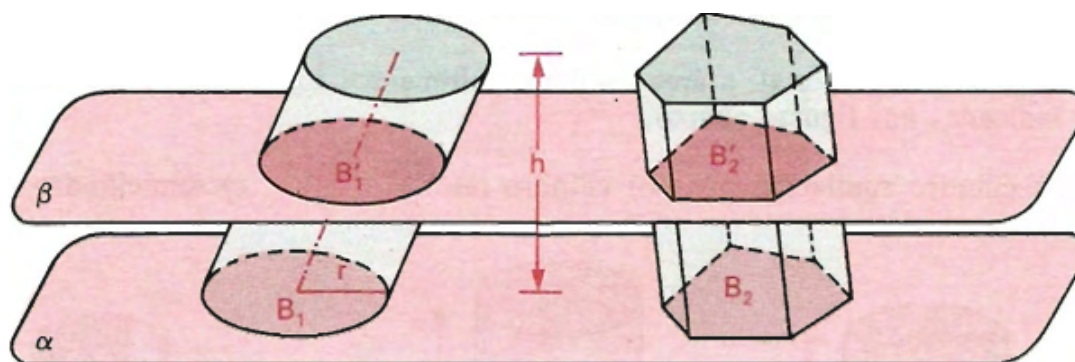
$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

□

### 3.15.3 Volume do cilindro

Conforme Dolce e Pompeo (2005b, p.220,221), considere um cilindro de altura  $h$ , área da base  $B_1 = B$  e um prisma qualquer de altura  $h$  e área da base  $B_2 = B$ , isto é, o cilindro e o prisma tem alturas congruentes e bases equivalentes, e cujas bases estejam sobre um mesmo plano  $\alpha$  e num mesmo semi-espaço determinado por esse plano. Assim, qualquer outro plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , secciona os dois sólidos, em duas regiões ( $B'_1$  e  $B'_2$ ), paralelas as suas respectivas bases, ver figura 34.

Figura 34 – Cálculo do volume do cilindro.



Fonte: Dolce e Pompeo (2005b, p.221)

de forma que:

$$B'_1 = B_1$$

$$B'_2 = B_2$$

$$B_1 = B_2 = B$$

daí, teremos:

$$B'_1 = B'_2$$

Logo, pelo princípio de Cavalieri, definição 10, o cilindro e o prisma tem volumes iguais.

$$V_{cilindro} = V_{prisma} = B \cdot h$$

Como  $B_{cilindro} = \pi \cdot r^2$ , temos que :

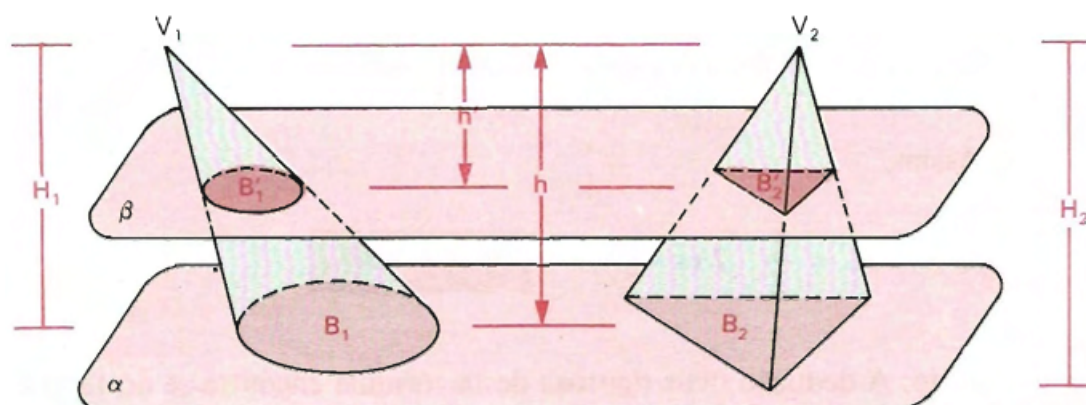
$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

### 3.15.4 Volume do cone

De acordo com Dolce e Pompeo (2005b, p.239,240), considere um cone de altura  $H_1 = h$  e área da base  $B_1 = B$  e um tetraedro de altura  $H_2 = h$  e área da base  $B_2 = B$ , isto é, o cone e a pirâmide tem alturas congruentes e bases equivalentes, e cujas bases estejam sobre um mesmo plano  $\alpha$  e num mesmo semi-espaco determinado por esse plano.

Assim, qualquer outro plano secante  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distando  $h'$  dos vértices que seccionam o cone e o tetraedro, em duas regiões ( $B'_1$  e  $B'_2$ ), paralelas as suas respectivas bases, ver figura 35.

Figura 35 – Cálculo do volume do cone.



Fonte: Dolce e Pompeo (2005b, p.240)

de forma que:

$$\frac{B'_1}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$\frac{B'_2}{B_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$\frac{B'_1}{B_1} = \frac{B'_2}{B_2}$$

Como  $B_1 = B_2 = B$ , segue-se que  $B'_1 = B'_2$ .

Logo, pelo princípio de Cavalieri, definição 10, o cone e o tetraedro tem volumes iguais, isto é,  $V_{cone} = V_{tetraedro}$ .

Mas,

$$V_{tetraedro} = \frac{B \cdot h}{3}$$

daí:

$$V_{cone} = \frac{B \cdot h}{3}$$

Por outro lado,  $B_{cone} = \pi \cdot r^2$ . Portanto,

$$V_{cone} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

## 4 O MÉTODO

Sobre o método da exaustão, Eves (2011, p.422) comenta, "(...) é rigoroso mas estéril.(...) uma vez conhecida uma fórmula, o método de exaustão pode se constituir num elegante instrumento para prová-la, mas o método, por si só, não se presta para a descoberta inicial do resultado".

A importância deste trabalho (o método) é que ele contém praticamente o único relato de um matemático da antiguidade apresentando o método que o levou à descoberta dos seus teoremas. Em todos os outros trabalhos só temos os teoremas apresentados em sua forma final, deduzidos com rigor lógico e com demonstrações cientificamente precisas, a partir de axiomas e de outros teoremas, sem que se saiba qual foi o caminho ou a intuição que levou ao resultado final. *O Método* alterou tudo isto. Neste caso, Arquimedes apresenta o caminho que utilizou para chegar a diversos resultados importantes e difíceis de quadratura e de cubatura (obtenção de áreas e de volumes por integração), assim como ao centro de gravidade de diversas figuras geométricas. (ASSIS, 2009, p.33)

Arquimedes apresentava seus trabalhos seguindo um bom encadeamento lógico dedutivo, entretanto, omitia frequentemente os detalhes de algumas demonstrações. Por meio de cartas, conta que utilizava um meio mecânico para comprovar suas constatações. Costumava enviar seus trabalhos a amigos, fato este que permitiu a sobrevivência de muitas de suas obras. Utilizava princípios básicos da física (Estática) sobre equilíbrio de pesos (segmentos de reta, áreas e volumes) pendurados sobre uma barra (chamada de alavanca de fulcro) para verificar suas conjecturas, e, em seguida, recorria ao método da exaustão com dupla redução ao absurdo para rigorosamente demonstrar seus resultados.

Antes de 1906, de acordo com Ávila (1986, p.30,31), tudo que se sabia sobre *O Método* era que se tratava possivelmente de uma lenda, isto é, que ele sequer existia. Em 1899 o professor, filólogo e historiador Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) descobriu a existência de um palimpsesto em Constantinopla, o qual estava sendo utilizado como livro de orações, e que demonstrava estar relacionado à matemática do período grego. Um palimpsesto consistia em um pergaminho (ou papiro), cujo texto original era raspado, para ser novamente utilizado. Essa reciclagem era devida ao alto custo do papel. Após muito trabalho, conseguiu-se recuperar boa parte do conteúdo.

Segundo Eves (2004, p.422), a idéia fundamental do método de Arquimedes consiste no fato de que, para se determinar a área ou um volume, devemos fatiá-las (mentalmente) em tiras planas (ou fatias paralelas finas) e ao pendurá-las numa extremidade de uma alavanca, obter o equilíbrio com outra figura, cuja área ou volume e centróide são conhecidos.

### 4.1 Área sob uma Parábola

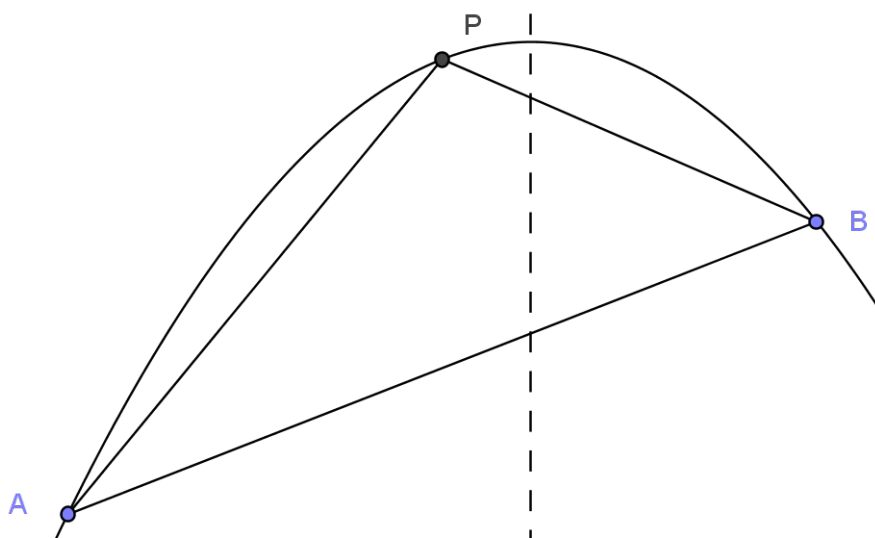
Em uma tradução (comentada) do texto original (em grego) do Método, obtida do palimpsesto, temos uma das cartas de Arquimedes escrita a Erastóstenes (alguns trechos estão entre colchetes,

todavia não aparecem no texto grego original, a fim de facilitar a compreensão do conteúdo):

Arquimedes para Eratóstenes, saudações. Eu te enviei anteriormente alguns teoremas que encontrei, tendo indicado seus enunciados, convidando-te a encontrar as demonstrações que não mostrei até o momento. Estes eram os enunciados dos teoremas enviados: (...) Mas acontece que a descoberta dos teoremas agora demonstrados me ocorreu da mesma maneira que para os teoremas precedentes. Assim decidi redigir e publicar esse método por ter falado dele anteriormente, e, para não parecer a alguns que tenha dito palavras vazias, [e também] porque estou persuadido de que [este método] trará uma contribuição não pequena para a matemática. Pois sou da opinião de que alguns dos contemporâneos ou sucessores encontrarão, por meio do método demonstrado, outros teoremas que ainda não me ocorreram. Portanto, descrevo inicialmente o primeiro [teorema] que me foi revelado pela mecânica. Isto é, que todo segmento de parábola é [equivalente a] quatro terços do triângulo que tem mesma base e mesma altura. Em seguida [descrevo] cada um [dos outros teoremas] examinados pelo mesmo método. No fim do livro apresento as demonstrações geométricas dos teoremas cujos enunciados já enviei a você. (MAGNAGHI, 2011, p.105,106)

O problema que em questão se refere a uma parábola qualquer e dois pontos A e B pertencentes a mesma, com seu eixo de simetria passando pelo vértice da parábola. Considerando o segmento parabólico  $APB$ , de acordo com a figura 36.

Figura 36 – Triângulo inscrito sob a parábola



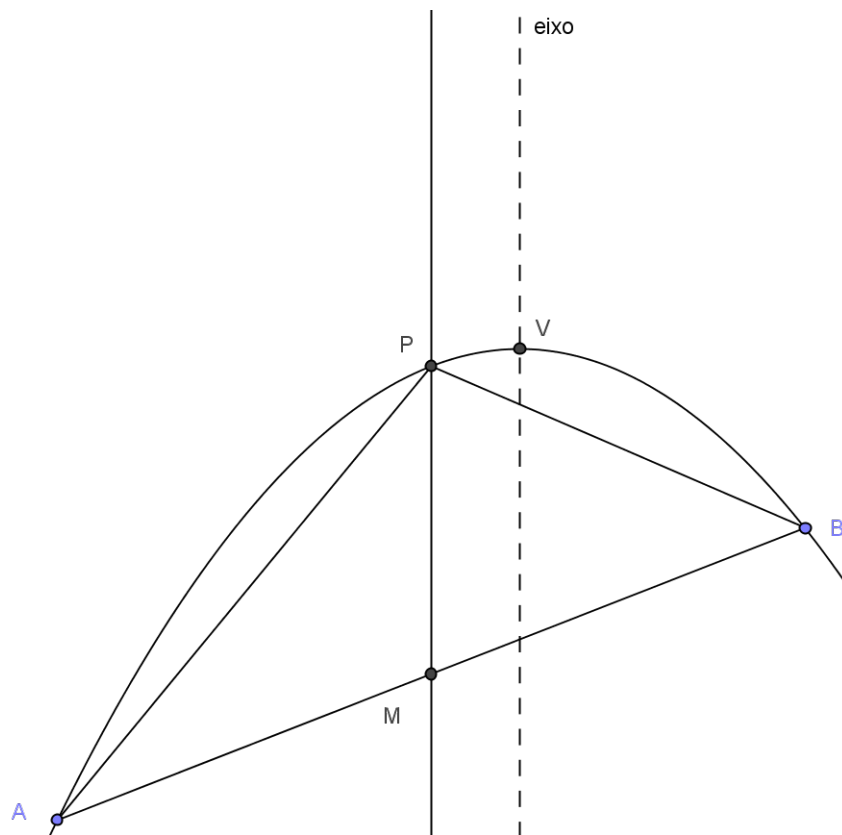
Fonte: Autor, 2014

**Teorema 4.** *A área de qualquer segmento de parábola é [equivalente a] quatro terços [da área] do triângulo com a mesma base e igual altura.*

*Demonstração.* A demonstração a seguir, inspira-se em Ávila (1986, p.32,33) e Magnaghi (2011, p.46,47).

Considere inicialmente o ponto  $P$ , ponto de interseção da parábola com a reta paralela ao eixo de simetria e que passa pelo ponto médio  $M$  do segmento de reta  $\overline{AB}$ , segundo propriedade 3, conforme figura 37.

Figura 37 – Reta paralela ao eixo passando pelo ponto médio  $M$

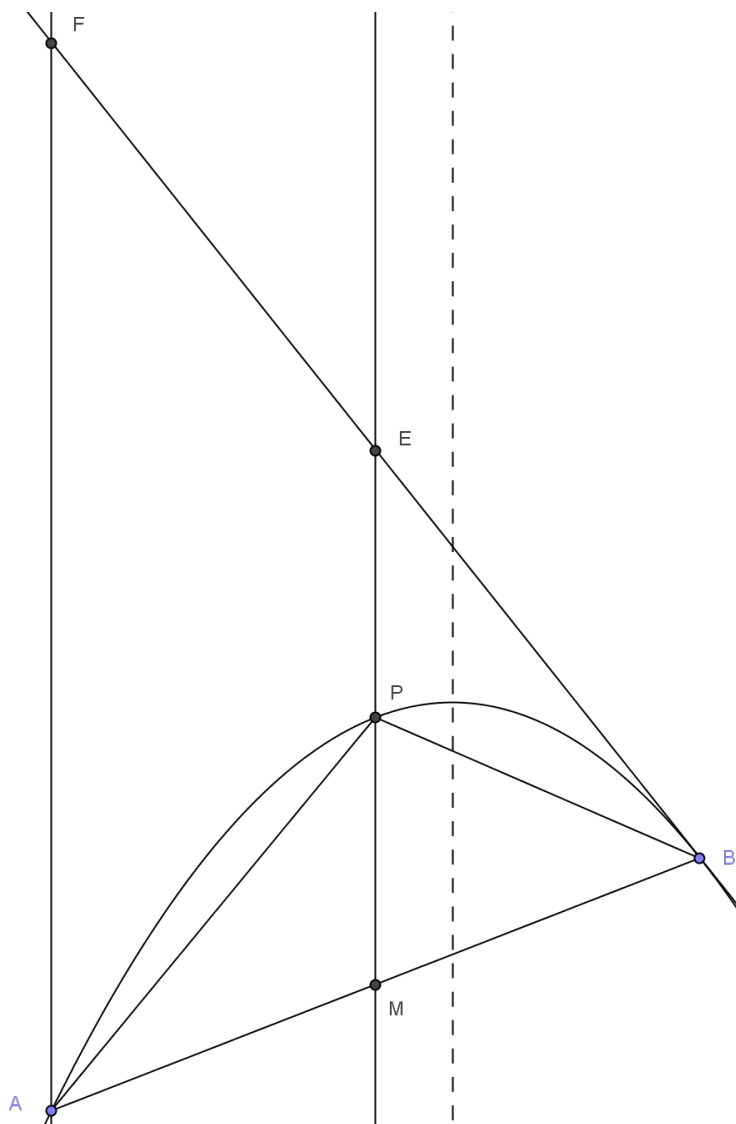


Fonte: Autor, 2014



Esboce a reta tangente à parábola em  $B$  e uma reta paralela ao eixo, passando por  $A$  e tome  $F$  o ponto de interseção entre elas. Seja  $E$  o ponto de interseção entre as retas  $MP$  e a tangente à parábola passando por  $B$ , ver figura 38.

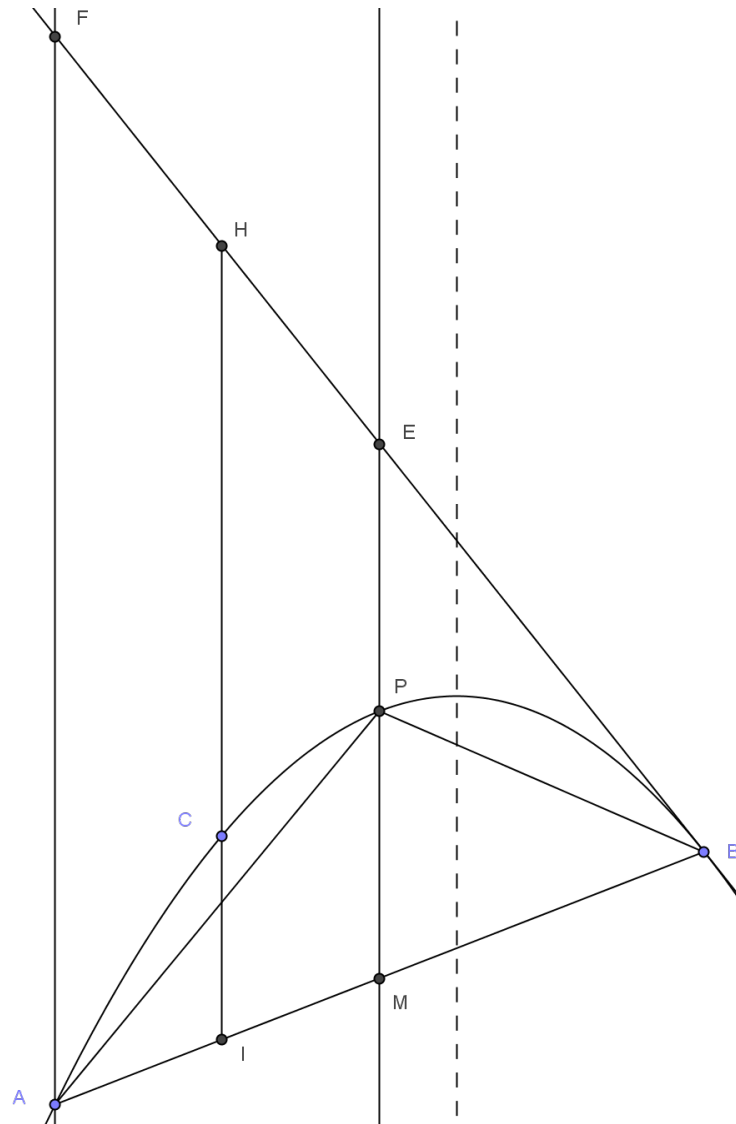
Figura 38 – Reta tangente à curva



Fonte: Autor, 2014

Trace o segmento de reta (também paralelo ao eixo de simetria) que parte por um ponto (arbitrário)  $C$  da parábola. Os segmentos de reta  $AF$  e  $HI$ , são paralelos ao eixo de simetria, pois estão contidos em retas paralelas ao eixo de simetria, de acordo com a figura 39.

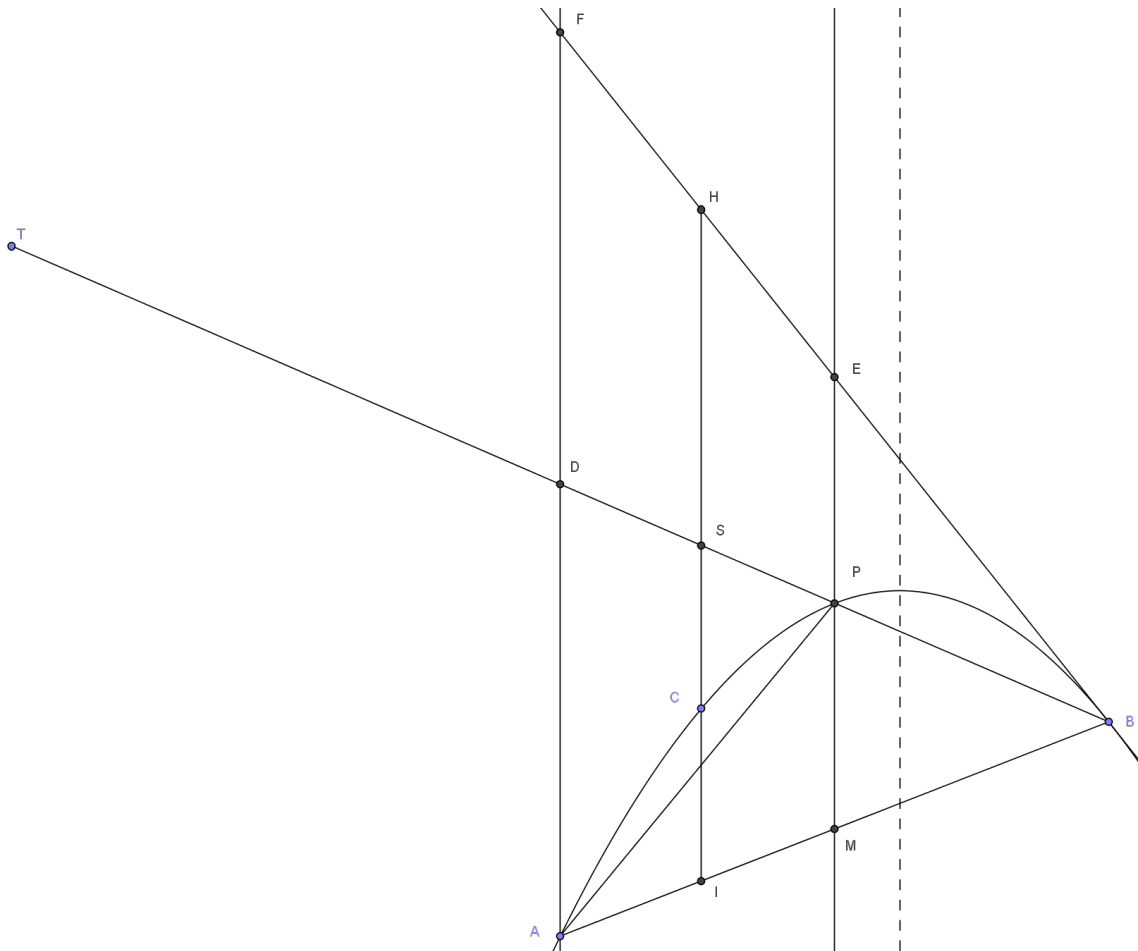
Figura 39 – Segmentos de reta paralelos ao eixo



Fonte: Autor, 2014

Considere que o segmento de reta  $BT$ , com  $P \in BT$ , que intersecta  $AF$  em  $D$  e  $HI$  em  $S$ , de modo que  $BT$  será a alavanca, cujo ponto médio  $D$  representa o ponto de fulcro. Daí, temos  $\overline{BD} = \overline{DT}$ , ver figura 40.

Figura 40 – Construindo a alavanca



Fonte: Autor, 2014

Por propriedade da parábola (a subtangente a parábola em B, ver lema 3), temos que:

$$\overline{EP} = \overline{PM}$$

Observando que os triângulos  $BME$ ,  $BIH$  e  $BAF$  são semelhantes, temos que os lados  $EM$ ,  $HI$  e  $AF$  serão proporcionais.

De forma análoga, mostramos que os triângulos  $BPE$ ,  $BSH$  e  $BDF$  são semelhantes, bem como os triângulos  $BPM$ ,  $BSI$  e  $BDA$  também o são, além do fato de que  $BPM$  e  $APM$  também serão congruentes.

Dessa forma, os pontos  $D$  e  $S$ , são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos  $\overline{AF}$  e  $\overline{HI}$ , pois  $P$  é ponto médio do segmento  $\overline{ME}$

$$\overline{AD} = \overline{DF} \quad e \quad \overline{HS} = \overline{SI}$$

Consequentemente, teremos que:

$$\text{Area}(\Delta BPM) = \text{Area}(\Delta BPE) \quad (Ia)$$

$$\text{Area}(\Delta BSI) = \text{Area}(\Delta BSH) \quad (Ib)$$

$$\text{Area}(\Delta BDA) = \text{Area}(\Delta BDF) \quad (Ic)$$

$$\text{Area}(\Delta APM) = \text{Area}(\Delta BPM) \quad (Id)$$

Neste momento, necessitaremos demonstrar um lema que nos auxiliará na demonstração do teorema.

Conforme Magnaghi (2011, p.140,141), ainda analisando a figura anterior, Arquimedes em *A quadratura da parábola*, demonstra o seguinte resultado:

**Lema 12.** *Seja AB a base de um segmento parabólico, com vértice em P, considerando uma reta qualquer IH, paralela ao eixo, intersectando a base e o segmento de reta BD, nos pontos I e S, respectivamente, então teremos:*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{IS}}{\overline{SC}}$$

*Demonstração.* Aplicando as propriedades (ii), (iii) e (iv) das proporções, na seção 3.1.2, segue que:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{IS}}{\overline{SC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AM} - \overline{AI}} = \frac{\overline{IS}}{\overline{IS} - \overline{IC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{IS}}{\overline{IC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AM} + \overline{AM}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{IS} + \overline{IS}}{\overline{IC}}$$

Teremos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{IC}} \quad (I)$$

Analogamente, aplicando a proposição 2 do Livro VI de *Os Elementos de Euclides*

Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, então ela corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo (MAGNAGHI, 2011, p.44).

segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DS}} \quad (II)$$

Todavia,  $\overline{BD} = \overline{DT}$  (III)

Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DS}}$$

De maneira que, de (I), (II) e (III), teremos:

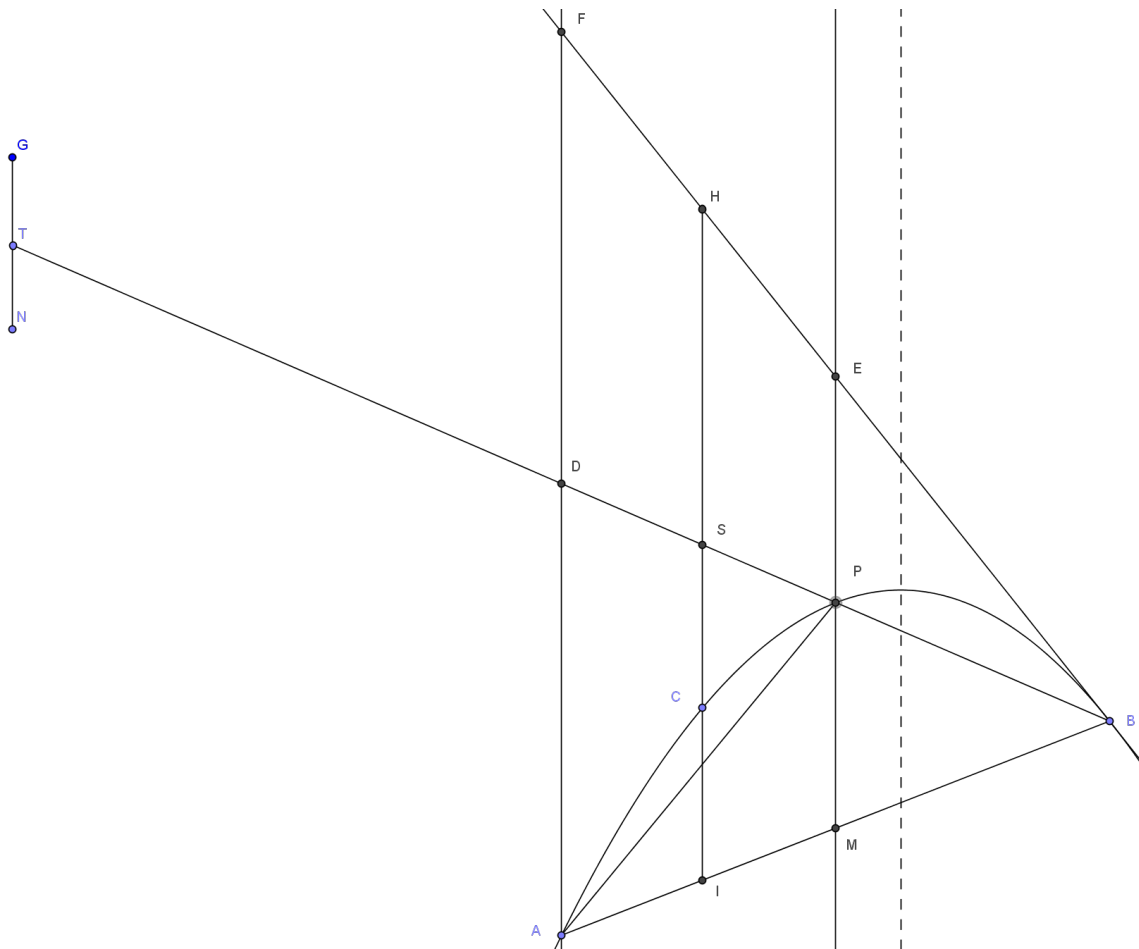
$$\frac{\overline{IH}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DS}} \quad (IV)$$

□

Tendo provado o lema, voltemos a demonstração do teorema.

Considerando  $D$  como ponto de fulcro e sendo o segmento  $TB$  o braço da alavanca, podemos afirmar, de acordo com (IV), que na extremidade  $S$ ,  $IH$  se equilibrará, segundo a lei da alavanca, seção 5, com  $GN$ , tal que  $\overline{GN} = \overline{CI}$ , no ponto  $T$ , médio de  $GN$  (figura 41).

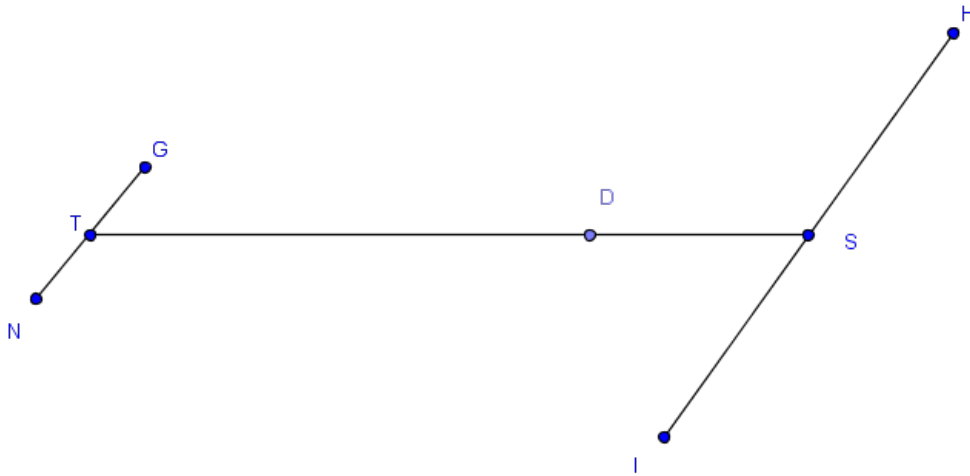
Figura 41 – Aplicando a Lei da Alavanca



Fonte: Autor, 2014

Podemos visualizar a situação de equilíbrio na figura 42:

Figura 42 – Situação de Equilíbrio



Fonte: Autor, 2014

Ao variarmos o ponto  $C$  arbitrariamente ao longo do segmento parabólico, e, simultaneamente aplicarmos a lei da alavanca, obteremos o  $\Delta ABF$  como o somatório de todos os segmentos de reta paralelos ao eixo tais como o segmento  $HI$ ; analogamente, obteremos o segmento parabólico como somatório de todos os segmentos de reta, paralelos ao eixo, tais como  $CI$ .

Arquimedes conjecturou, em sua obra *Sobre o Equilíbrio dos Planos*, que, o segmento parabólico  $APB$  com seu centróide em  $T$  se equilibrará com o  $\Delta ABF$  no seu respectivo centro de gravidade  $K$ , segundo a lei do equilíbrio de uma alavanca 5, considerando o fulcro em  $D$ :

$$Area(\Delta ABF) \cdot \overline{DK} = Area(\Delta \widehat{APB}) \cdot \overline{DT}$$

Assim, no triângulo  $\Delta ABF$ , cujo centro de gravidade se encontra no ponto  $K$  e pela proposição 6, que:

$$\overline{DK} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{3} \cdot \overline{DT} \quad (III)$$

Conforme (III), obteremos a seguinte relação entre a área do segmento parabólico  $\widehat{APB}$  e a área do  $\Delta ABF$ :

$$\frac{Area(\Delta ABF)}{Area(\widehat{APB})} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DK}} = \frac{3}{1} \quad (IV)$$

Por outro lado, os triângulos  $\Delta BPM$  e  $\Delta ABD$  são semelhantes, além disso  $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{MB}$ , daí:

$$\frac{\overline{BM}}{h_1} = \frac{\overline{BA}}{h_2} \implies h_2 = h_1 \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = 2 \cdot h_1$$

$$\frac{Area(\Delta ABD)}{Area(\Delta BMP)} = \frac{\frac{\overline{BA} \cdot h_2}{2}}{\frac{\overline{BM} \cdot h_1}{2}} = \frac{2\overline{BM} \cdot 2h_1}{\overline{BM} \cdot h_1} = 4 \quad (V)$$

de (Ic) e (V), segue que  $Area(\Delta ABF) = 2 \cdot Area(\Delta ADB) = 8 \cdot Area(\Delta BMP)$ ; assim, de (Id) temos:  
 $Area(\Delta APB) = 2 \cdot Area(\Delta BMP)$

logo,

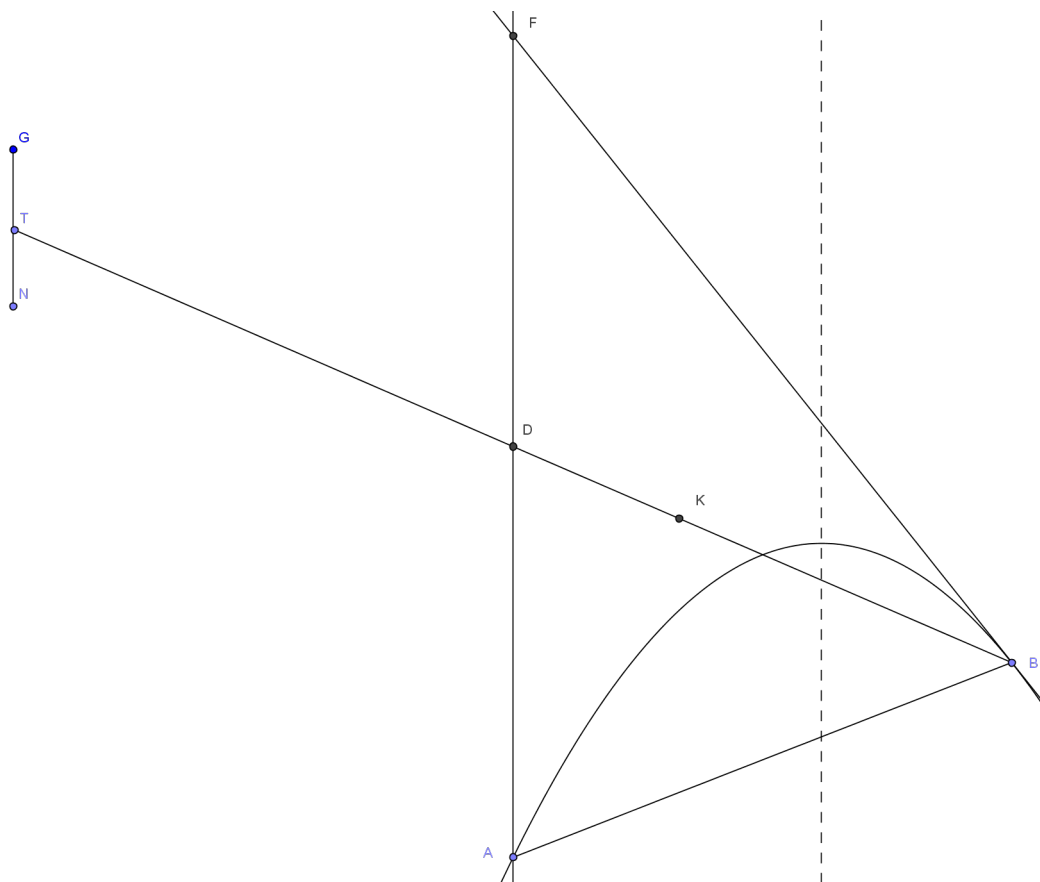
$$Area(\Delta ABF) = 4 \cdot Area(\Delta APB) \quad (VI)$$

Portanto, (IV) e (VI) implicam em:

$$Area(\widehat{APB}) = \frac{4}{3} \cdot Area(\Delta APB)$$

Com isso, fica demonstrado o teorema 4. Conforme mostra figura 43.

Figura 43 – Centro de Gravidade K

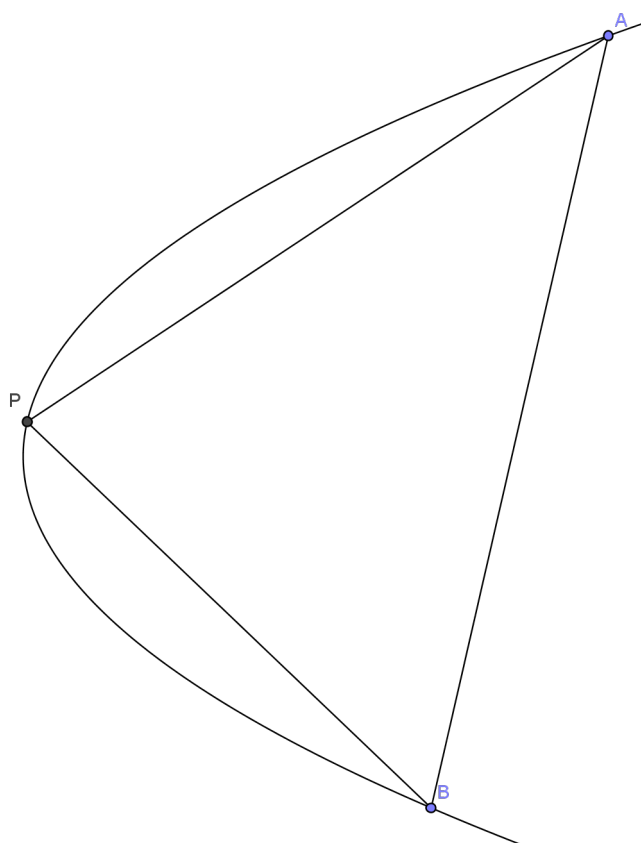


Fonte: Autor, 2014

## 4.2 Área sob uma Parábola - Quadratura

Nesta seção apresentaremos uma outra demonstração do resultado enunciado no teorema 4. Iremos comprovar a "veracidade" da proposição de Arquimedes utilizando soma de uma sequência geométrica infinita e fatos da geometria euclidiana plana. Considere o seguinte segmento parabólico  $A\widehat{P}B$ , de base  $AB$ , no qual  $P$  é o ponto de interseção da reta que passa pelo ponto médio de  $AB$ , e paralela ao eixo, ver figura 44.

Figura 44 – Segmento Parabólico



Fonte: Autor, 2014

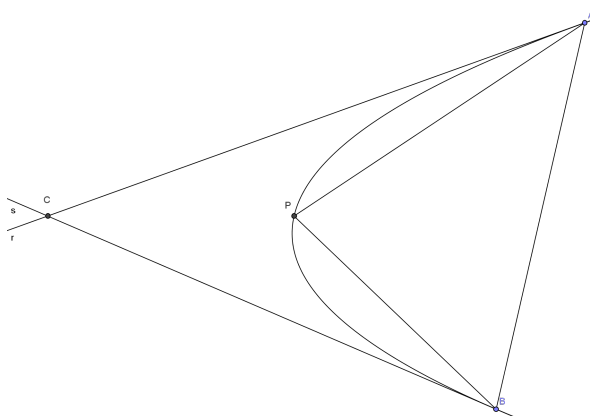
Construímos assim, o  $\Delta APB$  inscrito no segmento parabólico, cuja base coincide com a base  $AB$  do segmento parabólico. Na próxima etapa, inscreveremos dois novos triângulos sobre os lados  $AP$  e  $BP$ . Arquimedes prossegue, inscrevendo novos triângulos nos lados dos triângulos obtidos na etapa anterior.



**Teorema 5.** *A soma das áreas de cada novo par de triângulos - obtidos em cada etapa - representa sempre  $\frac{1}{4}$  da área do triângulo imediatamente anterior, sobre o qual suas bases estavam apoiadas.*

*Demonstração.* Esta demonstração é inspirada em Garbi (2009, p.80-98). Traçando as retas tangentes à curva, passando pelos pontos  $A$  e  $B$ , iremos obter o ponto de interseção  $C$ , conforme figura 45.

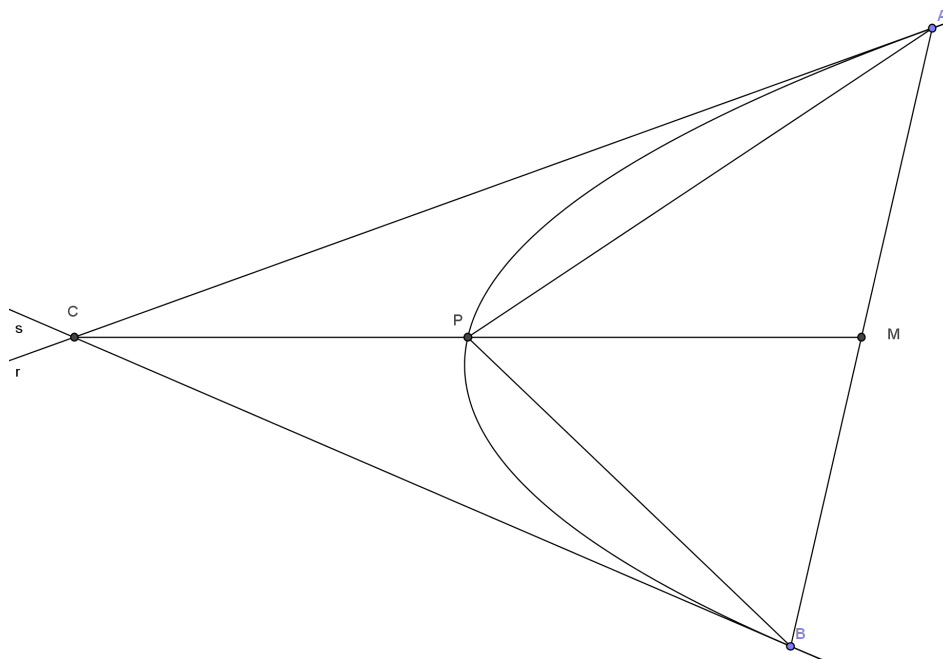
Figura 45 – Retas tangentes à curva



Fonte: Autor, 2014

Aplicando a propriedade 3 da parábola, a reta que passa por  $C$  e  $P$ , paralela ao eixo de simetria, intersecta  $AB$  em seu ponto médio  $M$ . Logo,  $\overline{AM} = \overline{MB}$ , segundo a figura 46.

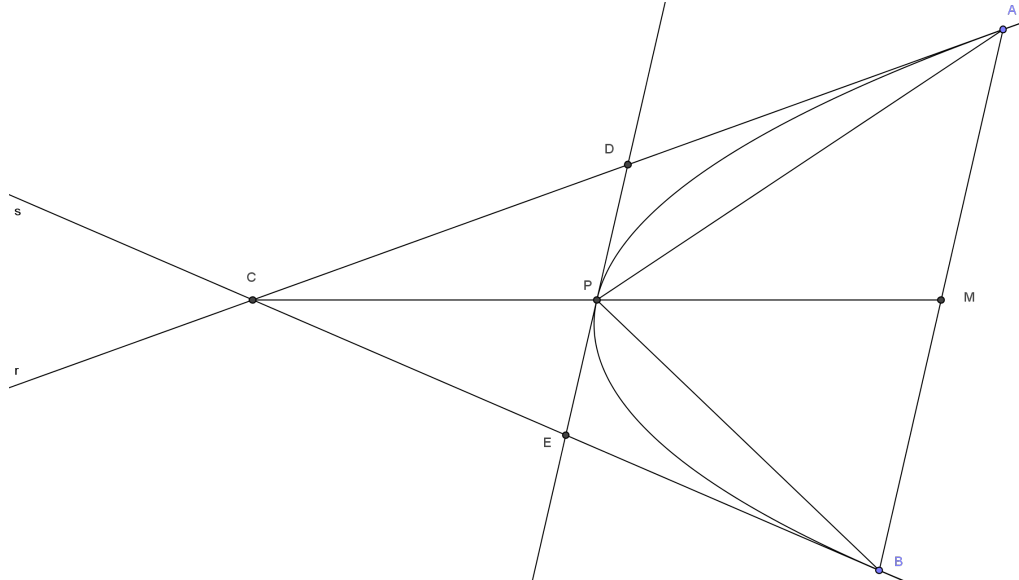
Figura 46 – Aplicando a propriedade da Parábola



Fonte: Autor, 2014

Traçando outra reta tangente, passando pelo vértice  $P$ , iremos obter os pontos de interseção  $D$  e  $E$ , ver figura 47.

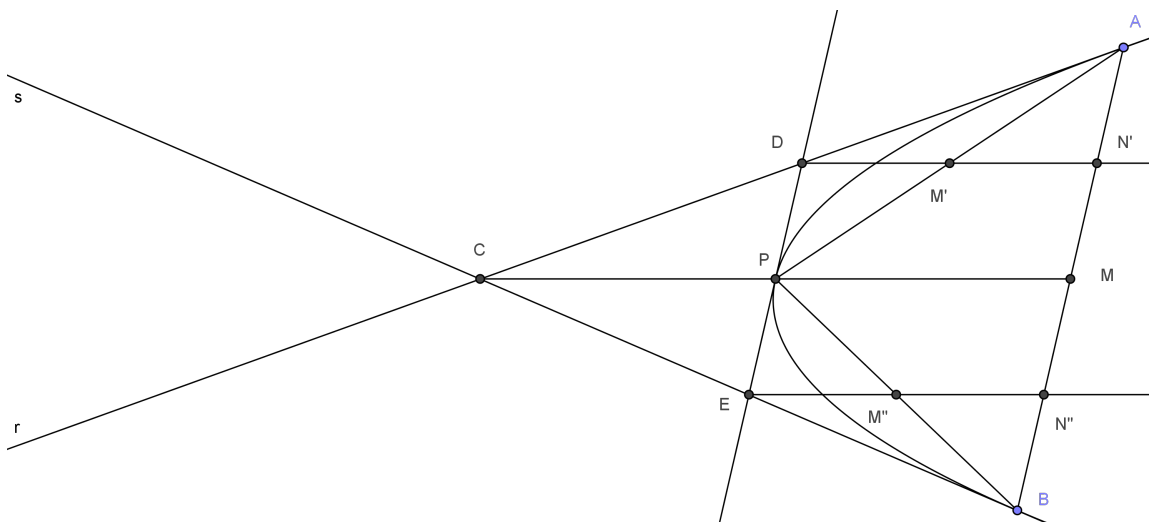
Figura 47 – Pontos de interseção  $D$  e  $E$



Fonte: Autor, 2014

Aplicando novamente a propriedade 3, a reta que passa por  $D$ , paralela ao eixo de simetria, intersecta o segmento  $AP$  em seu ponto médio  $M'$ , isto é,  $\overline{AM'} = \overline{M'P}$ . Daí, no  $\triangle APM$ , pelo teorema 3 (teorema da base média), segue que  $N'$  é ponto médio de  $AM$ , ver figura 48.

Figura 48 – Retas paralelas passando por  $D$  e  $E$



Fonte: Autor, 2014

Analogamente, a reta que passa por  $E$ , paralela ao eixo de simetria, intersecta o segmento  $PB$  em seu ponto médio  $M''$ , isto é,  $\overline{PM''} = \overline{M''B}$ . Daí, no  $\Delta BPM$ , também pelo teorema 3, teremos que  $N''$  é ponto médio de  $BM$ .

No  $\Delta ACM$ , pelo teorema 3, segue que  $D$  é ponto médio de  $AC$ . Pelo mesmo motivo, no  $\Delta BCM$ ,  $E$  é ponto médio de  $BC$ . Daí:

$$\overline{DN'} = \frac{\overline{CM}}{2} = \overline{EN''}$$

Teremos, então, que o segmento de reta  $DE$  é base média do  $\Delta ABC$ , circunscrito ao segmento parabólico, assim:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{N'N''}$$

Assim, temos que  $DN''N'$  é um paralelogramo, donde segue-se que  $\overline{DN''} = \overline{EN''} = \overline{PM}$ , ou seja,  $P$  é ponto médio de  $\overline{CM}$ , e  $\overline{CP} = \overline{PM}$ .

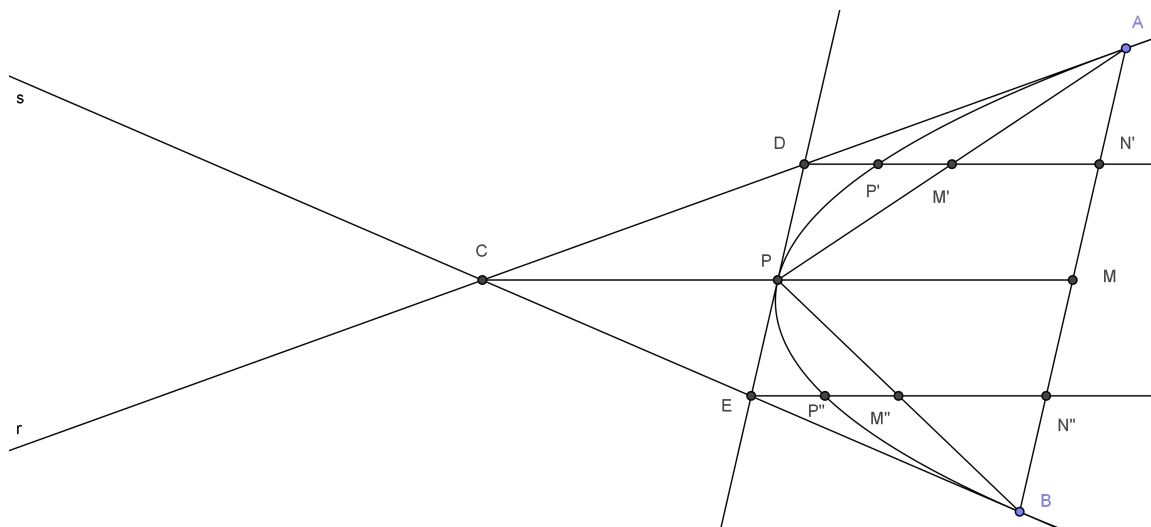
Temos, ainda pelo teorema 3:

$$\overline{M'N'} = \frac{\overline{PM}}{2} = \overline{DM'}$$

$$\overline{M''N''} = \frac{\overline{PM}}{2} = \overline{EM''}$$

Considere, agora, os pontos  $P'$  e  $P''$ , interseção das retas paralelas  $\overleftrightarrow{DN'}$  e  $\overleftrightarrow{EN''}$  com o segmento parabólico  $\widehat{APB}$ , respectivamente, ver figura 49.

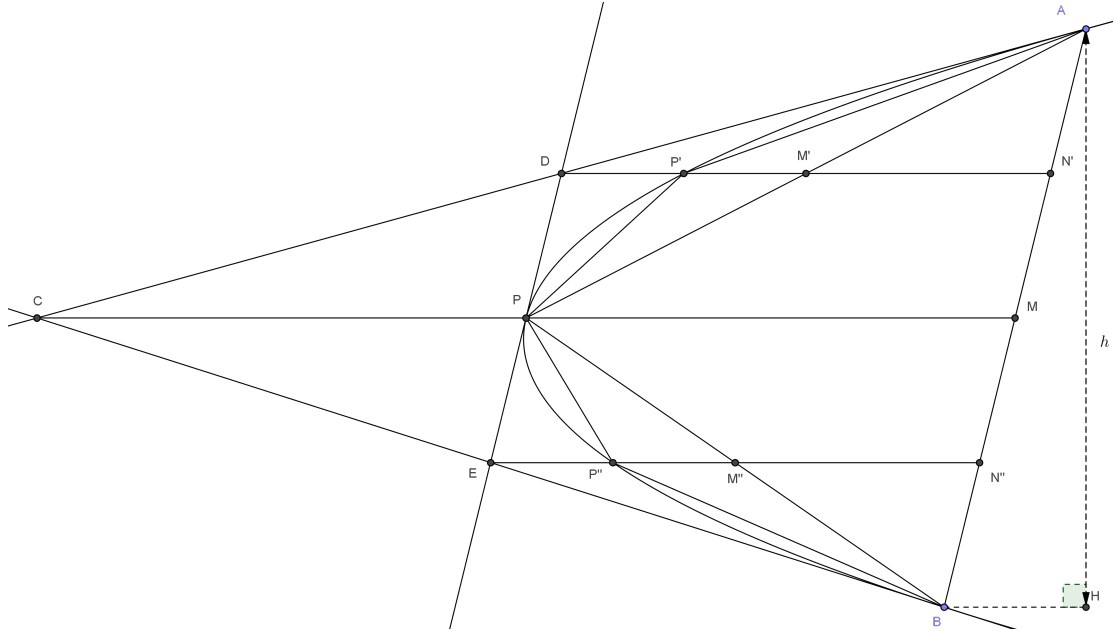
Figura 49 – Segmentos parabólicos sobre os lados do triângulo APB



Fonte: Autor, 2014

Temos, agora, os  $\Delta APP'$  e  $\Delta BPP''$  inscritos sob os segmentos parabólicos  $AP$  e  $PB$ , respectivamente, conforme figura 50.

Figura 50 – Triângulos inscritos sob o segmento parabólico



Fonte: Autor, 2014

Assim, como  $\overline{CP} = \overline{PM}$ , propriedade 3 da parábola, teremos que:  $\overline{DP'} = \overline{P'M'}$  e  $\overline{EP''} = \overline{P''M''}$ . Daí, como  $\overline{DM'} = \overline{M'N'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DN'}$  e  $\overline{EM''} = \overline{M''N''} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EN''}$ , obtemos:

$$\overline{P'M'} = \frac{\overline{DM'}}{2} = \frac{\overline{DN'}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \overline{PM}$$

$$\overline{P''M''} = \frac{\overline{EM''}}{2} = \frac{\overline{EN''}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \overline{PM}$$

Como as retas  $\overleftrightarrow{CM}$  e  $\overleftrightarrow{DN'}$  são paralelas e os segmentos  $AP$  e  $AM$ ,  $PB$  e  $MB$ , transversais às retas, são divididos na mesma razão, segue que a altura  $AH$ , será dividida na mesma razão, segundo teorema de Tales, isto é, a altura do triângulo  $\Delta APM$  vale a metade de  $AH$ .

Dessa forma, atribuindo  $A_0$  à área do triângulo  $APB$  inscrito no segmento parabólico, podemos observar o seguinte:

$$\text{Área}(\Delta APM) = \text{Área}(\Delta BPM) = \frac{1}{2} \cdot [\text{Área}(\Delta APB)] = \frac{1}{2} \cdot A_0.$$

Por outro lado, temos que os triângulos  $\Delta AP'M'$  e  $\Delta PP'M'$  tem a mesma área, pois possuem mesma base e altura, daí: Área ( $\Delta APP'$ ) é o dobro da Área ( $\Delta AP'M'$ ) e essa é  $\frac{1}{8}$  Área( $\Delta APM$ ), pois a base de  $\Delta AP'M'$  corresponde a  $\frac{1}{4}$  da base do  $\Delta APM$ , e a altura é  $\frac{1}{2}$  da altura do  $\Delta APM$ .

Logo,

$$\text{Área}(\Delta APP') = 2 \cdot [\text{Área}(\Delta AP'M')] = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}[\text{Área}(\Delta APM)]\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_0 = \frac{1}{8} \cdot A_0$$

Analogamente,

$$\text{Área}(\Delta BPP'') = 2 \cdot [\text{Área}(\Delta BP''M'')] = 2 \cdot \left(\frac{1}{8}[\text{Área}(\Delta BPM)]\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_0 = \frac{1}{8} \cdot A_0$$

Portanto,

$$\text{Área}(\Delta APP') + \text{Área}(\Delta BPP'') = 2 \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot A_0\right] = \frac{1}{4} \cdot A_0 = A_1$$

Repetindo o processo anterior, na segunda etapa, teremos quatro novos triângulos inscritos, sobre os lados  $\overline{AP'}$ ,  $\overline{PP'}$ ,  $\overline{PP''}$  e  $\overline{P''B}$ , respectivamente, cuja soma de suas áreas corresponderá, de modo análogo, a:

$$A_2 = 4 \cdot \left[\frac{1}{16} \cdot A_1\right] = \frac{4}{16} \cdot A_1 = \frac{1}{4} \cdot A_1 = \frac{1}{4^2} \cdot A_0$$

Continuando com o processo, para um número  $n$  suficientemente grande de etapas, podemos intuitivamente observar que, por exaustão (seção 3.8, página 37), teremos:

$$A_n = \frac{1}{4^n} \cdot A_0$$

A partir daí, Arquimedes, utilizando o teorema 2, prova rigorosamente que:

$$\text{Área}(A\widehat{P}B) = \frac{4}{3} \cdot \text{Área}(\Delta APB)$$

□

### 4.3 Volume da Esfera

Na obra *O Método*, temos este resultado como sua segunda proposição. A demonstração segue também por meios físicos: a lei da alavanca, proposição 5.

Segundo Boyer (2010, p.94), o teorema favorito de Arquimedes, representado em seu túmulo a pedido dele, também foi demonstrado pelo método mecânico. Sendo assim enunciado:

#### **Teorema 6.**

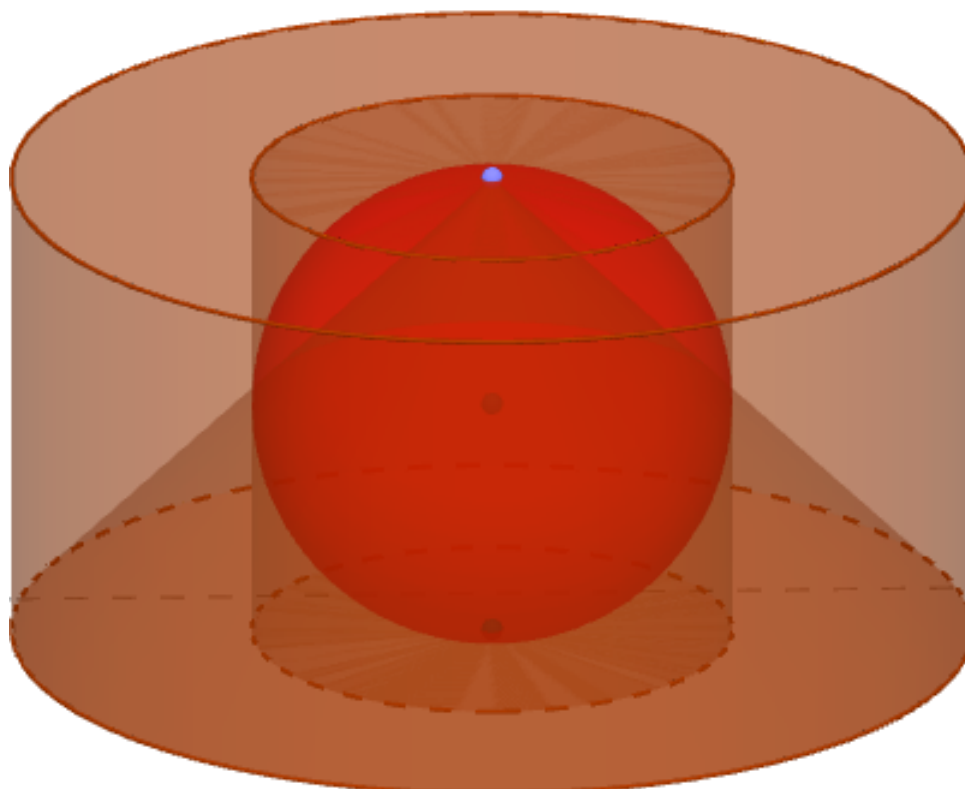
- 1) *O volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual ao círculo máximo da esfera e com altura igual ao raio da mesma esfera; e*
- 2) *O volume do cilindro com base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é  $1\frac{1}{2}$  vezes o volume da esfera.”*

Em uma de suas cartas, Arquimedes comenta que já conhecia o fato, o qual Demócrito havia demonstrado, de que o volume do cone é igual a um terço do volume do cilindro.

As demonstrações a seguir, inspiram-se em Ávila (1986, p.34 a 38), Heath (1912, p.18,19 e 20).

Para auxiliar, considere a seguinte visualização do problema, tal qual fora concebido, ver figura 51:

Figura 51 – Volume da Esfera

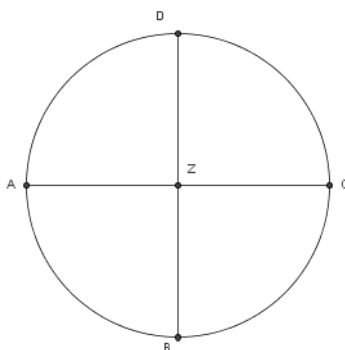


Fonte: Autor, 2014

*Demonstração.* Seja um plano transversal (neste caso, perpendicular ao eixo das abscissas), que passa pelo círculo máximo da esfera de centro  $Z$ , e ortogonal ao plano da base do cone, assim como algumas seções obtidas por planos paralelos ao plano da base do cilindro.

Considere  $ABCD$  um círculo máximo dessa esfera, cujos diâmetros  $AC$  e  $BD$  são perpendiculares entre si, e outro círculo máximo, da mesma esfera, que passa por  $BD$  e é perpendicular a  $AC$ , ver figura 52.

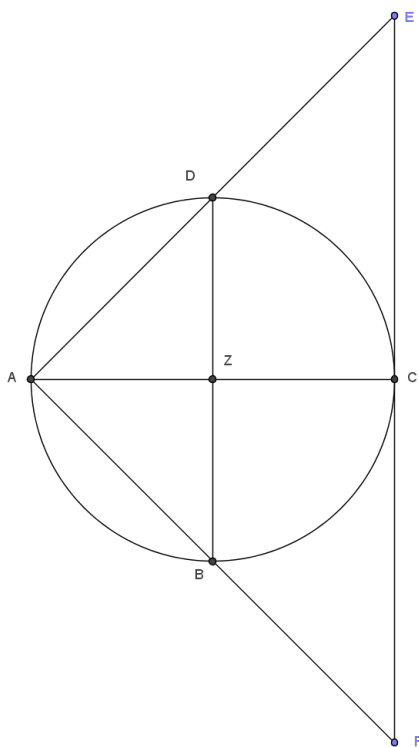
Figura 52 – Seção contendo a esfera



Fonte: Autor, 2014

Seja o cone com origem em  $A$ , passando pelo círculo máximo de diâmetro  $BD$ , cuja base é o círculo de diâmetro  $EF$  paralelo ao círculo anterior, contido no plano perpendicular ao círculo de diâmetro  $AC$ , de acordo com a figura 53.

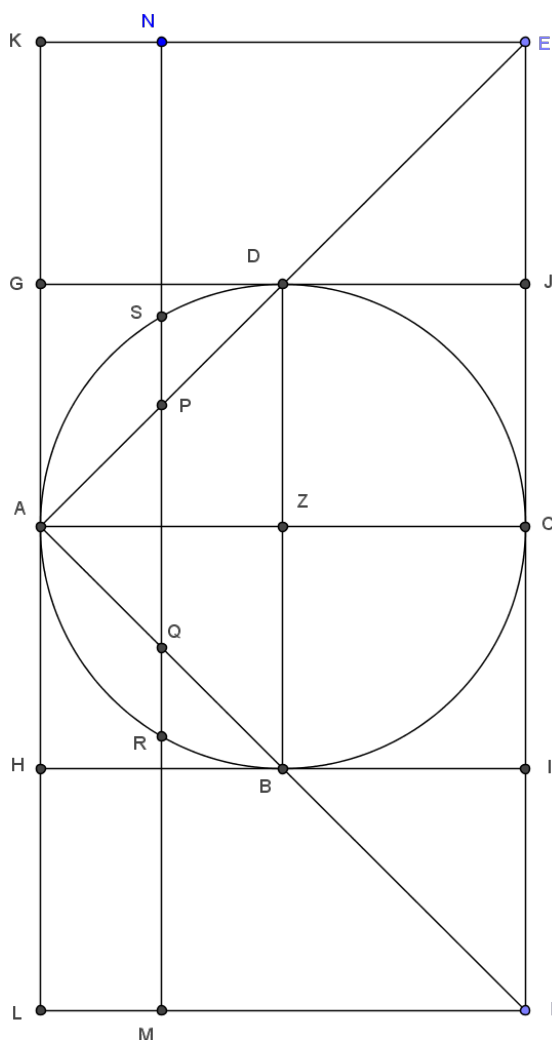
Figura 53 – Seção contendo o cone e a esfera



Fonte: Autor, 2014

Esboce, agora, um plano paralelo ao plano perpendicular que contém a base do cone e do cilindro, gerando um círculo de diâmetro  $MN$  no cilindro circunscrito, outro de diâmetro  $PQ$  na esfera e o de diâmetro  $RS$  no cone, conforme mostra a figura 54.

Figura 54 – Plano Perpendicular ao Diâmetro  $AC$



Fonte: Autor, 2014

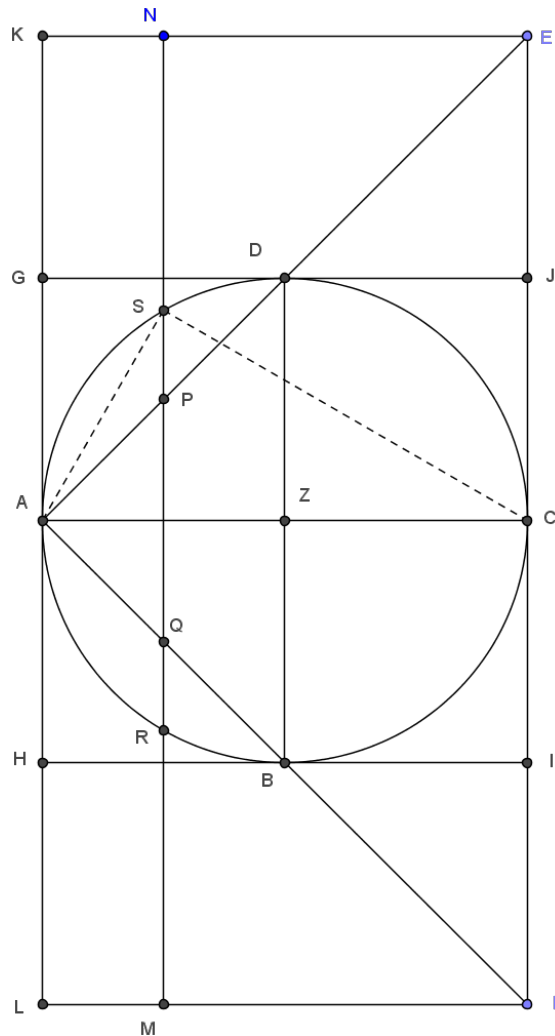
Observe que o ponto  $Z$  (centro da esfera) é o ponto médio do diâmetro  $AC$ . Por outro lado,  $AC$  é a altura do triângulo  $AEF$ . Logo,  $BD$  é a base média do triângulo, isto é,  $BD \parallel EF$ . Portanto,  $\overline{AB} = \overline{BF}$  e  $\overline{AD} = \overline{DE}$ . Além disso,  $\overline{AZ} = \overline{ZC} = \overline{BI} = \overline{DJ} = \overline{EJ} = \overline{IF}$ .

Dessa forma,  $\Delta ABZ$ ,  $\Delta AZD$ ,  $\Delta BIF$ , e  $\Delta DEJ$  são retângulos e congruentes. Podemos concluir isso de outro modo, note que o  $\Delta ABD$  é retângulo em  $A$ ,  $\overline{AZ}$  é perpendicular a base  $\overline{BD}$  e tal que  $\overline{AZ} = \frac{\overline{BD}}{2}$ , temos que  $\overline{AZ}$  é altura e mediana do mesmo. Daí, segue-se que os triângulos  $\Delta AZD$  e  $\Delta AZB$  são congruentes. Logo,  $\overline{AB} = \overline{AD}$ .



Por outro lado, temos que  $PQ \parallel BD$ , assim, os triângulos  $\Delta APQ$  e  $\Delta ABD$  são semelhantes, desse modo, teremos que os triângulos  $\Delta APT$  e  $\Delta ATQ$  são congruentes. Logo,  $\overline{AT} = \frac{\overline{PQ}}{2}$ ,  $\overline{PT} = \overline{TQ}$  e  $\overline{AP} = \overline{AQ}$ , ver figura 55.

Figura 55 – Plano Perpendicular ao Diâmetro AC



Fonte: Autor, 2014

Logo,

$$\overline{AT} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \Leftrightarrow \overline{AT} = \overline{TQ} = \overline{TP}$$

Analisando a seção transversal aos sólidos e utilizando a relação métrica no triângulo retângulo (III) e o teorema de Pitágoras, podemos concluir também:

$$\overline{AC} \cdot \overline{AT} = \overline{AS}^2 = \overline{TS}^2 + \overline{AT}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{TS}^2$$

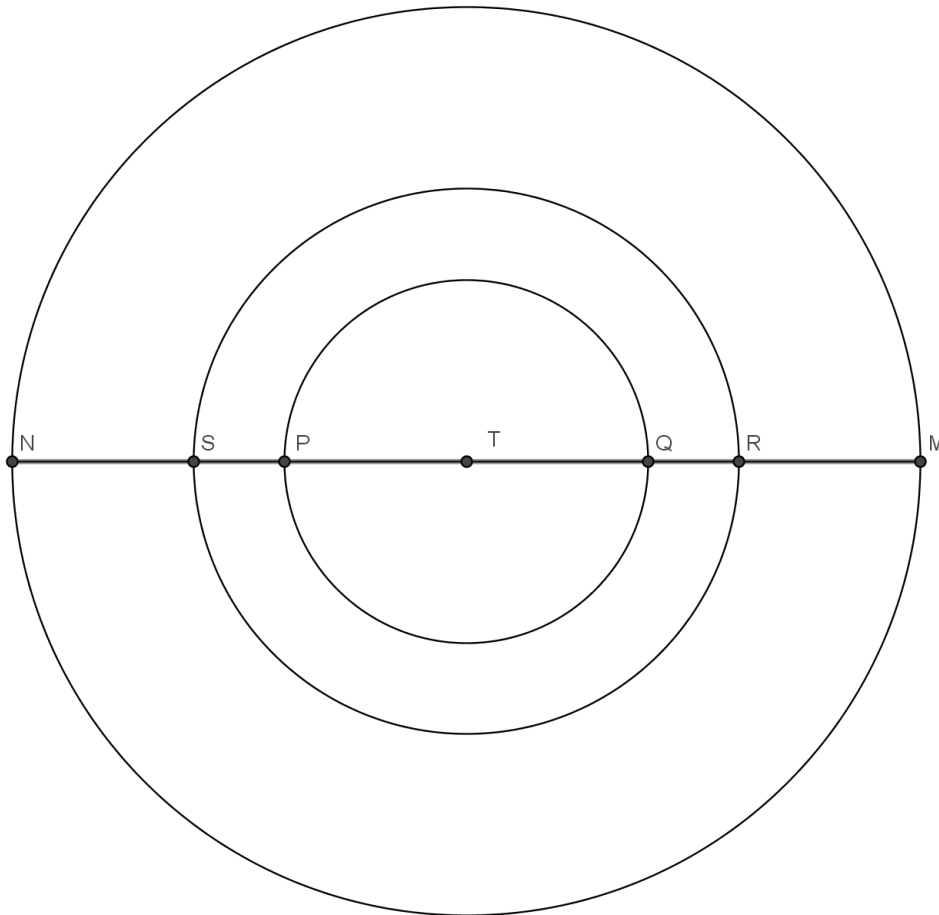
pois  $\overline{AT} = \overline{PT}$ .

Daí,

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{\overline{RS}}{2}\right)^2}{\pi \cdot \left(\frac{\overline{MN}}{2}\right)^2} = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{TS}^2}{\overline{TN}^2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AT}}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AC}} \quad (I)$$

o que mostra que a soma das áreas dos círculos de diâmetro  $PQ$  e  $RS$  está para a área do círculo de diâmetro  $MN$  assim como  $AT$  está para  $AC$ , de acordo com a figura 56.

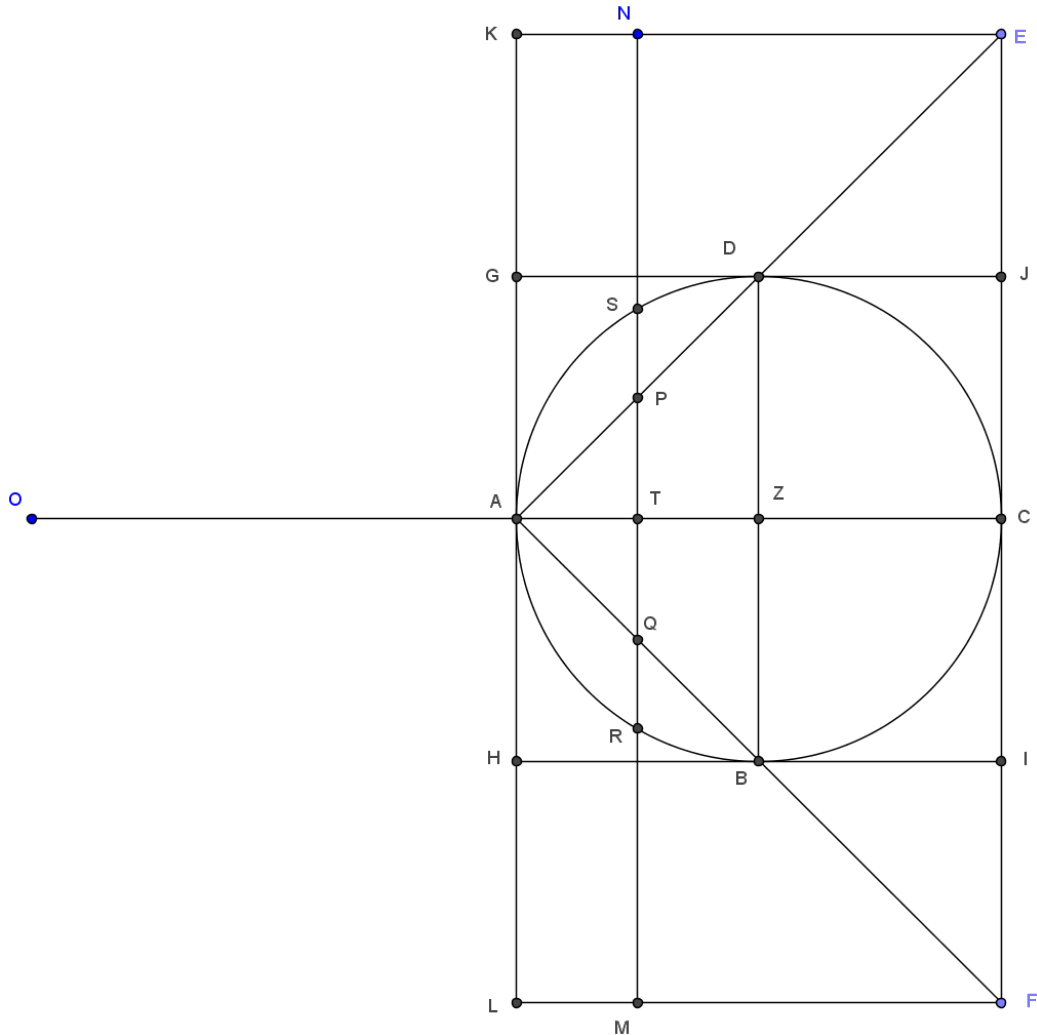
Figura 56 – Círculos Concêntricos



Fonte: Autor, 2014

Daí, considere um segmento de reta  $\overline{AO}$ , sobre a reta que contém o diâmetro  $AC$ , de forma que  $\overline{AO} = \overline{AC}$  e considerando o segmento de reta  $\overline{OC}$  como sendo uma alavanca de fulcro em  $A$ , segundo figura 57.

Figura 57 – Construção da Alavanca



Fonte: Autor, 2014

Usando (I) e o fato de que  $\overline{AC} = \overline{AO}$ , teremos:

$$\frac{\overline{TP}^2 + \overline{TS}^2}{\overline{TN}^2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AT}}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}}$$

Desse modo, observamos que a soma das áreas dos círculos de diâmetro  $PQ$  e  $RS$ , quando transferidos para o ponto  $O$ , estarão em equilíbrio, pela lei da alavanca, proposição 5, com o círculo de diâmetro  $MN$  no ponto  $T$ .

Nesse momento, visualize o cilindro circunscrito ao cone como sendo a reunião de infinitos círculos de diâmetros iguais a  $\overline{MN}$ , ou seja, iremos fazer  $T$  variar de  $A$  até  $C$ ; deste modo, segue-se que o centróide deste cilindro se encontra no ponto  $Z$  (quando  $T = Z$ ), ou seja  $AZ = \frac{AC}{2}$ , o qual equilibrará a esfera e o cone quando colocados no ponto  $O$ , conforme conclusão anterior.

Denominando por  $V_e, V_{co}, V_{cl}$ , os volumes da esfera, cone e cilindro respectivamente, podemos então reescrever a relação anterior:

$$\frac{V_{co} + V_e}{V_{cl}} = \frac{AT}{AO} = \frac{1}{2}$$

Donde,

$$V_{cl} = 2 \cdot (V_{co} + V_e)$$

Entretanto,

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot V_{cl} \Leftrightarrow V_{cl} = 3 \cdot V_{co}$$

Logo,

$$V_{co} = 2 \cdot V_e$$

Todavia, como  $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{BD}$  e  $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AZ}$ , vem que:

$$V_{co} = 8 \cdot V_{ABD}$$

dai,

$$V_e = 4 \cdot V_{ABD}$$

onde  $V_{ABD}$  é o volume do cone de seção  $ABD$ , o que corresponde a demonstração do primeiro item da proposição citada anteriormente.

Neste ponto, vale considerar que já podemos, atualmente, deduzir a fórmula do volume da esfera.

Por outro lado, em relação às seções  $GHIJ$  e  $GHBD$ , temos a seguinte relação com os respectivos cilindros:

$$V_{GHIJ} = 2 \cdot V_{GHBD}$$

e como

$$V_{GHBD} = 3 \cdot V_{ABD}$$

teremos:

$$V_{GHIJ} = 6 \cdot V_{ABD}$$

Logo,

$$V_{GHIJ} = \frac{6}{4} \cdot V_e$$

e, assim, teremos:

$$V_{GHIJ} = \frac{3}{2} \cdot V_e$$

E assim concluímos com a segunda parte da proposição.

Arquimedes afirma que:

A partir deste teorema, no sentido de que o volume da esfera é quatro vezes o do cone cuja base é um círculo máximo da esfera e com altura igual ao raio da esfera, concebi a noção de que a superfície de qualquer esfera é quatro vezes maior do que um círculo máximo da mesma; porque, a julgar pelo fato de a área de qualquer círculo é igual a área de um triângulo com uma base igual à circunferência e altura igual ao raio do círculo, compreendi que, de igual modo, o volume de qualquer esfera é igual ao de um cone com base igual à superfície da esfera e altura igual ao raio. (HEATH, 1912, p.20, 21)

Dessa forma, ele demonstra em *Sobre a esfera e o cilindro*, que

$$A_{Esfera} = 4 \cdot A_{C_{máximo}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Cabe ressaltar que Arquimedes obteve a relação para o volume antes da relação para a área. Este resultado, assim como o volume da esfera, foram obtidos e demonstrados com o devido rigor, pela primeira vez por Arquimedes.

Assim, voltemos a expressão que deduzimos para o volume da esfera:

$$V_e = 4 \cdot V_{ABD} = 4 \cdot \frac{1}{3} A_C \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

A qual corresponde a fórmula já conhecida e muito utilizada:

$$V_e = \frac{4}{3} \pi r^3$$

□

#### 4.4 Volume da Esfera - Método de Cavalieri

No ensino médio, este método é comumente utilizado para deduzir a expressão que corresponde a fórmula para cálculo do volume de uma esfera de raio  $r$ . A demonstração a seguir baseia-se em Neto (1982, p.339,340) e Dolce e Pompeo (2005b, p.252-254).

**Definição 11** (Cilindro Reto). *Um cilindro é denominado reto quando suas geratrizes são perpendiculares ao plano da base.*

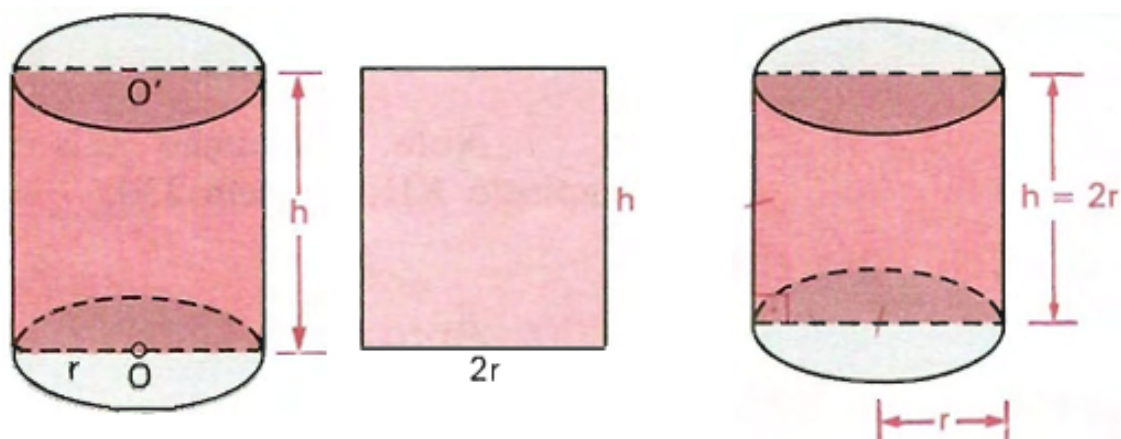
Quando as geratrizes são oblíquas, o cilindro é chamado de oblíquo. O cilindro reto também é denominado de cilindro de revolução, pois, ao rotacionarmos um retângulo em torno de um eixo sobre um dos seus lados obteremos tal sólido.

**Definição 12** (Cilindro Equilátero). *Um cilindro é chamado de equilátero quando sua altura corresponde ao diâmetro da base.*

**Definição 13** (Seção Meridiana). *A seção meridiana é a interseção de um cilindro com um plano que contém o eixo.*

Dessa forma, temos que a seção de um cilindro oblíquo é um paralelogramo, a de um cilindro reto é um retângulo e a de um cilindro equilátero corresponde a um quadrado, conforme mostra a figura 58.

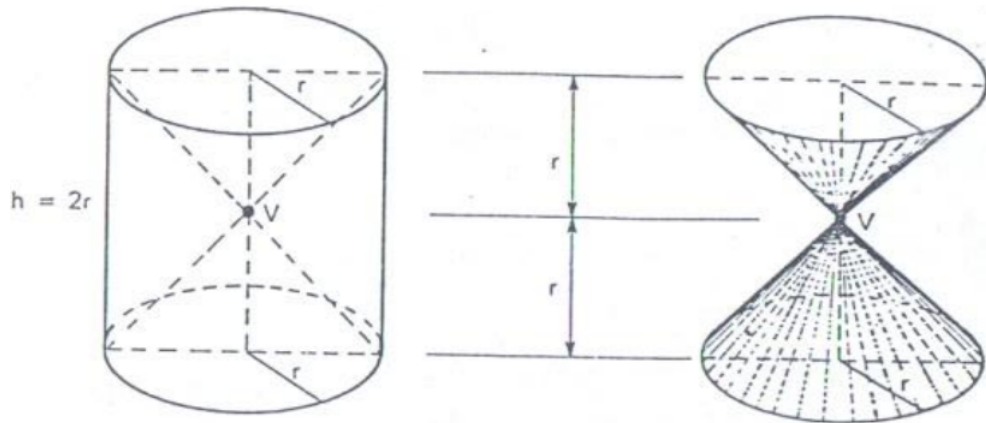
Figura 58 – Seções Meridianas.



Fonte: Dolce e Pompeo (2005b, p.219)

Considere um cilindro equilátero, conforme definição 12, cujo raio da base seja igual ao raio da esfera. Chame de  $V$  o centro desse cilindro, equidistante das bases. Desse modo, podemos visualizar dois cones, com vértices comum (o ponto  $V$ ) e cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. À reunião destes dois cones, obteremos um sólido, o qual chamaremos de *clepsidra* (Relógio de água, em grego), veja na figura 59.

Figura 59 – Clepsidra.

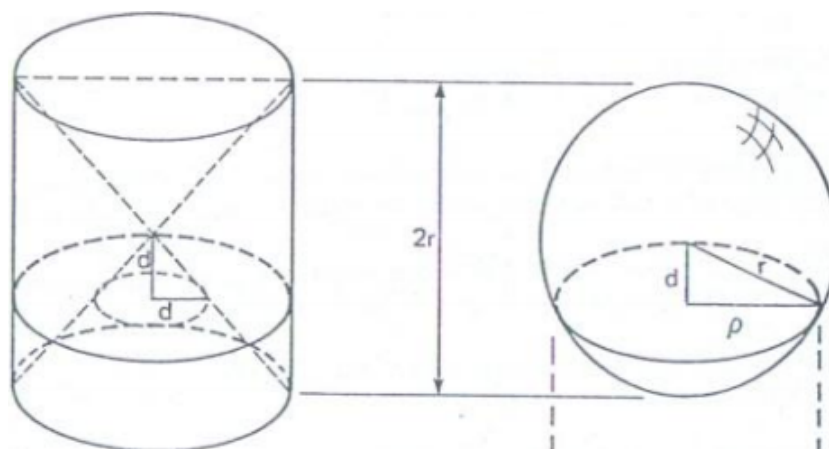


Fonte: Neto (1982, p.339)

Agora, visualizando a retirada da clepsidra, ao sólido que corresponde ao restante do interior do cilindro equilátero, denominaremos de *anticlepsidra*.

Suponha que uma esfera de raio  $r$ , seja tangente aos dois planos das bases do cilindro. Um outro plano, paralelo às bases, e que se encontra a uma distância  $d$  (com  $d < r$ ) do centro da esfera, interceptará a *anticlepsidra* segundo uma coroa circular e a esfera, segundo um círculo, de acordo com a figura 60.

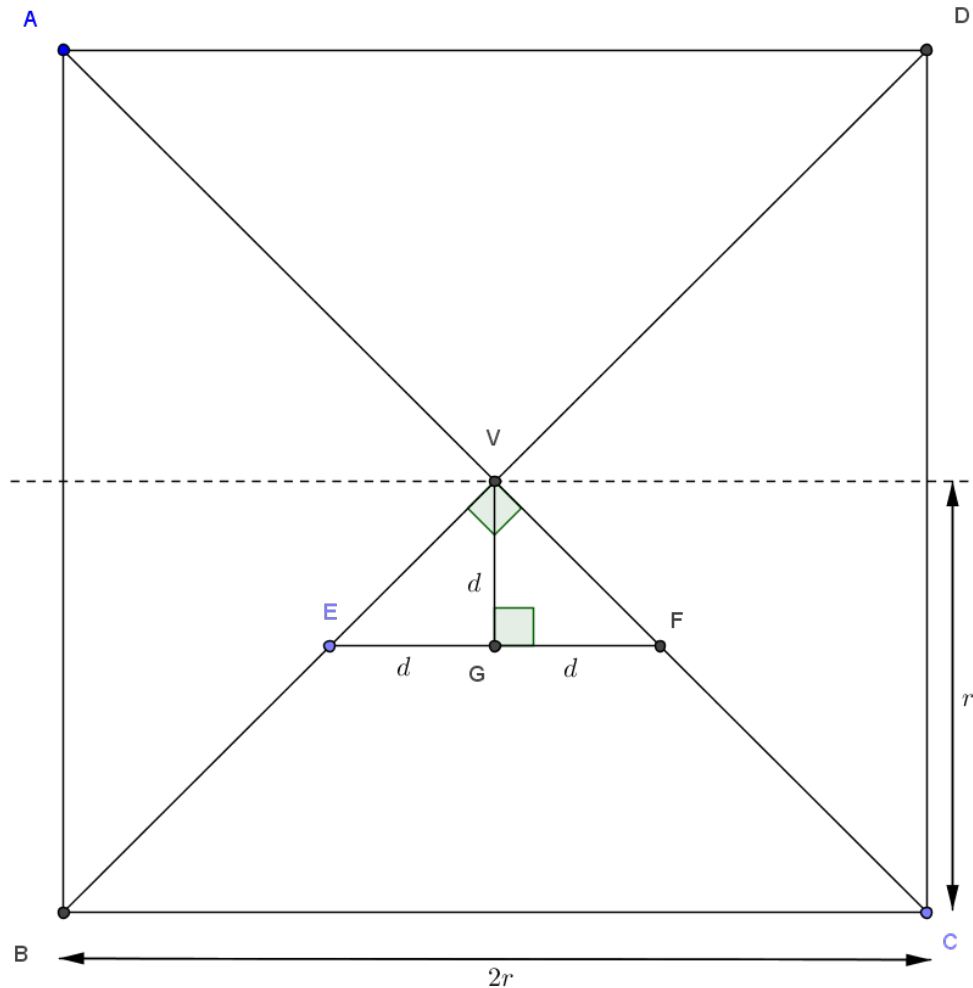
Figura 60 – Interseção da anticlepsidra e do círculo.



Fonte: Neto (1982, p.339)

Analisando os triângulos  $\Delta VBC$  e  $\Delta VEF$  podemos concluir que o triângulo  $\Delta VEF$ , obtido da interseção do plano com a *anticlepsidra*, é isósceles, pois, como sua seção meridiana é um quadrado (segundo definição 13), daí, teremos por semelhança de triângulos, que a altura desse triângulo corresponde a metade do valor da base, de acordo com a figura 61.

Figura 61 – Seção meridiana da anticlepsidra



Fonte: Autor, 2014

Dessa forma, teremos que as circunferências que limitam a coroa circular tem raios iguais a  $d$  e  $r$ , logo:

$$\text{Área}_{\text{Coroa}} = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot d^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2) \quad (I)$$

Por outro lado, teremos que o raio do círculo será dado por  $\rho$ , logo:

$$\text{Área (Círculo)} = \pi \cdot \rho^2$$

Todavia, temos que:  $\rho^2 = r^2 - d^2$ , e daí:

$$\text{Área (Círculo)} = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2) \quad (II)$$



De (I) e (II), podemos concluir que as áreas das seções serão iguais, daí, pelo princípio de Cavalieri, seção 10, podemos concluir que o volume da esfera será igual ao volume da anticlépsidra.

Assim,

$$V_{anticlépsidra} = V_{cilindro} - 2 \cdot V_{cone} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot r \right)$$

$$V_{anticlépsidra} = 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

Portanto,

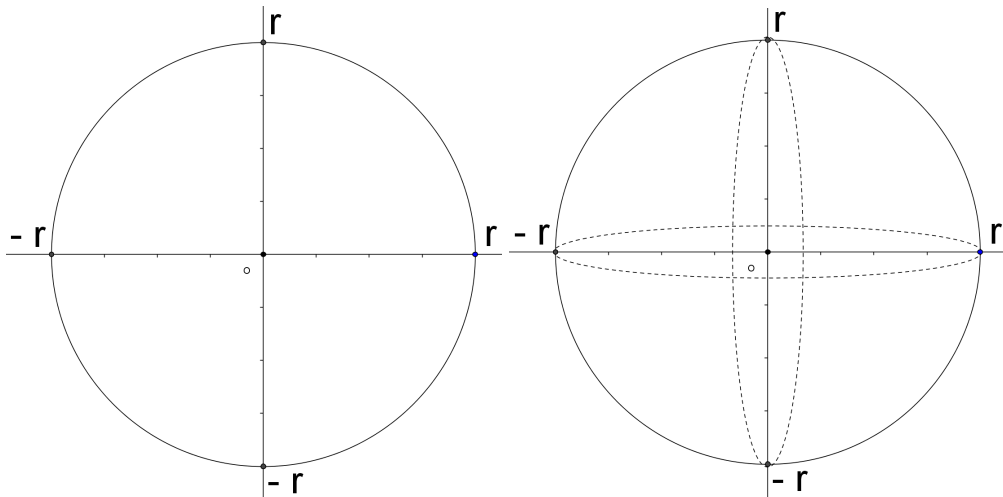
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

#### 4.5 Volume da Esfera - Cálculo diferencial e Integral

Conforme citado na seção 4.2, podemos utilizar o cálculo diferencial e integral para calcular o volume de uma esfera, mais especificamente a idéia de integral definida.

Considere uma circunferência de raio  $r$ , centrada na origem de um sistema de eixos cartesianos ortogonal. Ao rotacionarmos esta circunferência em torno do seu eixo de simetria (o qual podemos considerar tanto o eixo  $Ox$ , quanto o eixo  $Oy$ ), iremos obter uma esfera centrada na origem e de raio  $r$ , conforme mostra a figura 62.

Figura 62 – Circunferência e esfera centradas na origem



Fonte: Autor, 2014

Segundo Iezzi (2005, p.99), a equação da circunferência é dada por:

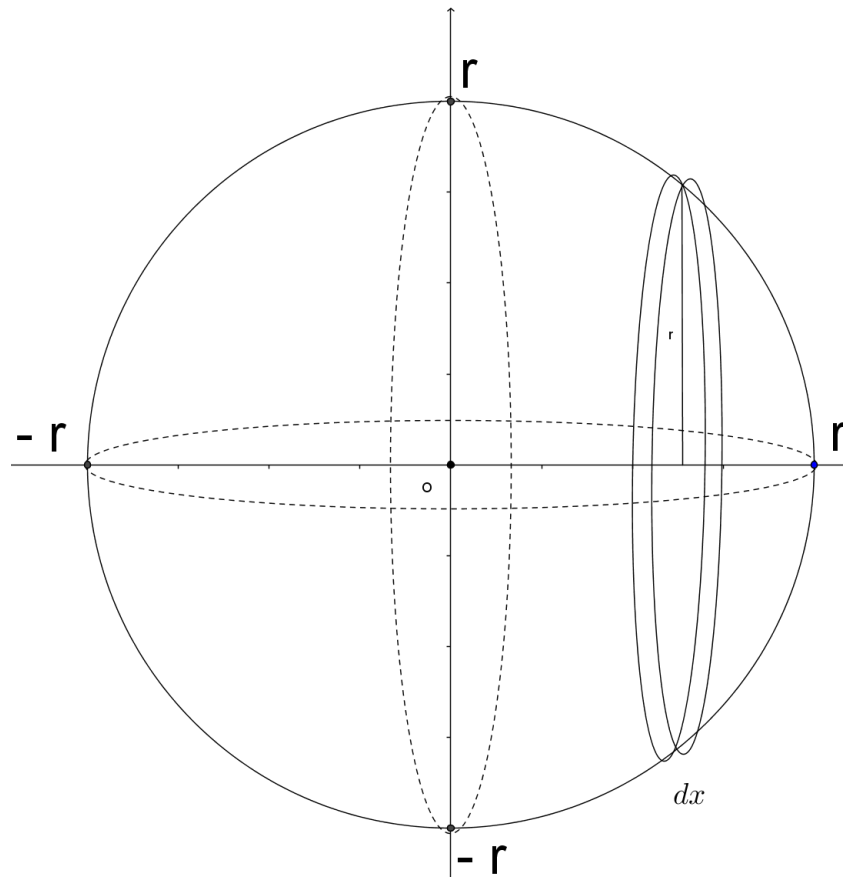
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Uma vez que a circunferência está centrada na origem, segue que  $a = b = 0$ , assim:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Vamos considerar fatias infinitesimais da esfera, com largura  $dx$  e raio  $y$ , de acordo com a figura 63.

Figura 63 – Fatia infinitesimal da esfera



Fonte: Autor, 2014

Como já sabemos, o volume de um cilindro é dado por:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Assim, reescrevendo a expressão acima, teremos que o volume da fatia infinitesimal da esfera será:

$$V_{fatia} = \pi \cdot y^2 \cdot dx$$

Considerando a esfera como sendo o somatório de infinitas fatias cilíndricas, teremos que o volume será dado pela integral definida abaixo:

$$V = \int_{-r}^r \pi \cdot y^2 dx = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

Donde, calculando a integral, obtemos o resultado esperado:

$$V = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left[ \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left( \frac{r^3}{3} - r^3 \right) \right] = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Portanto,

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

Na prática, como usamos a aproximação para o valor  $\pi$ , também podemos afirmar que se utiliza, em verdade, uma aproximação para o valor do volume da esfera.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A dissertação pretendeu apresentar um outro olhar para a história da matemática e possibilitou, também, conhecer algumas curiosidades sobre a vida e o trabalho de Arquimedes: o método clássico de obtenção do  $\pi$ , o método mecânico de suas demonstrações - evidenciando a complexidade das suas idéias e nível de abstração do seu raciocínio, servindo de base para novos trabalhos posteriores a respeito de suas descobertas. As demonstrações desta dissertação seguiram um encadeamento lógico consistente, buscando tornar o texto o mais claro possível, embasando-o com aspectos algébricos e geométricos que auxiliam na compreensão dos resultados.

Se faz necessário, sempre que for possível, apresentar uma nova abordagem para assuntos já conhecidos, almejando buscar uma outra maneira de estimular o aprendizado, o que tradicionalmente nem sempre é possível. É pertinente que se pense em um plano de ensino que possibilite a aplicação do que se aprende, visto que todo conhecimento foi construído tendo por motivação a solução de algum problema, ou limitação de um grupo social. Existem, em alguns livros didáticos (e, inclusive na internet) algumas sugestões de atividades enriquecedoras, principalmente no aspecto de volume de alguns sólidos (pirâmides, esferas, entre outras), tais atividades práticas estimulam o desenvolvimento da noção tridimensional e despertam o interesse pelo assunto.

Durante as aulas, devemos salientar o contexto sociocultural da época, tentando correlacionar com diversos aspectos encontrados em outros ambientes: física, história, filosofia, método de demonstração (utilizando raciocínio lógico-dedutivo), entre outros. Procedendo assim, propicia-se a interdisciplinariedade desejada, além de proporcionar uma aplicação simples - porém engenhosa - de aspectos matemáticos e físicos aplicados.

Pode vir a ser utilizado por professores que desejem encaminhar alunos em trabalhos de iniciação científica, pois ele é rico em história da matemática, geometria euclidiana, sequências e séries, além de noções de cálculo diferencial e integral utilizando soma de Riemann. Podemos abordar este tema em turmas do Ensino Médio, preferencialmente com o conhecimento de progressões geométricas e, paralelamente ao assunto de geometria plana e espacial.

## REFERÊNCIAS

- ALVARENGA, Mauro Lopes. **O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático**, 2006. Disponível em: <<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12006/MauroLopesAlvarenga.pdf>>. Acesso em 21 mar. 2014.
- ASSIS, André Koch Torres, **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. 1ª edição. Apeiron, Montreal, 2008. ISBN 978-0-9732911-6-2. Disponível em: <<http://www.ifi.unicamp.br/~assis/Arquimedes.pdf>>. Acesso em 1 maio 2014.
- ÁVILA, Geraldo. **Arquimedes, o rigor e o método**. *Matemática Universitária*, SBM, Rio de Janeiro, RJ, v.1, n.4, p. 27-45, dez. 1986.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**, 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1995.
- BONGIOVANNI, Vincenzo. **As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido**: a teoria das proporções e o método de exaustão. União, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v.2, p. 91-110, 2005. Disponível em: <<https://www.fisem.org/www/union/revistas/2005/2/Union02.pdf>>. Acesso em 18 ago. 2014.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide, 2. ed. São Paulo : Blücher, 1996.
- CARDOSO, Henrique B.; FREIRE, Paulo de Tarso C.; FILHO, Josué Mendes. **Arquimedes e a Lei da Alavanca**: Erros Conceituais em Livros Didáticos. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v.23, n.2, p.218-237, ago.2006. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6276>>. Acesso em 20 jun. 2014.
- DANTE, Luiz Roberto. **Contexto e Aplicações**, v.2, 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.
- DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: Matemática, 9º ano, 2. reimp. São Paulo: Ática, 2013.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol. 9, 7. ed. São Paulo: Atual, 2005a.
- \_\_\_\_\_. **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol. 10, 7. ed. São Paulo: Atual, 2005b.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**, 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

HEATH, Thomas Little. **The Works of Arquimedes**. Disponível em: <<https://archive.org/details/worksofarchimede00arch>>. Acesso em 25 mai. 2014.

HEATH, Thomas Little. **The Method of Archimedes: A Supplement to The Works of Arquimedes**. Disponível em: <<https://archive.org/details/worksofarchimede00arch>>. Acesso em 25 mai. 2014.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol. 4, 2. ed. São Paulo: Atual, 2005a.

\_\_\_\_\_. **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol. 7, 7. ed. São Paulo: Atual, 2005b.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

MAGNAGHI, Ceno Pietro. **Análise e Tradução Comentada da Obra de Arquimedes Intitulada "MÉTODOS SOBRE OS TEOREMAS MECÂNICOS"**. Disponível em: <<http://www.ifi.unicamp.br/assis/tese-Ceno.pdf>>. Acesso em 21 mar 2014.

MARTINS, Roberto de Andrade. **Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v.17, n.2, p.115-121, ago.2000. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/issue/view/404>>. Acesso em 1 mai. 2014.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios**. Coleção do Professor de Matemática, v.6. SBM, 2012.

NETO, Aref Antar. **Geometria: Noções de Matemática**. v.5. São Paulo: Moderna, 1982.

PINTO, Joaquim António P. **Método de Exaustão dos Antigos: O Princípio de Eudoxo-Arquimedes**, 2014. Disponível em: <<http://hostel.ufabc.edu.br/daniel.miranda/ecm>>. Acesso em 21 mar. 2014.

PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

SALLY, R.A.G. **Archimedes' quadrature of the parabola and the method of exhaustion**. Disponível em: <<http://www.math.mcgill.ca/rags/JAC/NYB/exhaustion2.pdf>>. Acesso em 06 jun. 2014.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas**. 5. ed. ISBN 85-85132-48-5. Disponível em: <<http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/cq.pdf>>. Acesso em 2 mai. 2014. Curitiba, 1949.

VITRUVIUS, Marcus. **De l architecture**. Trad. Jean Soubiran. livro IX, preâmbulo, §§ 9-12, pp. 5-7. Paris: Belles Lettres, 1969.