UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma Matemática Voltada para o Professor do Ensino Médio

Geraldo Ferreira Barbosa Filho

Instituto de Matemática

Maceió, Outubro de 2015

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GERALDO FERREIRA BARBOSA FILHO

UMA MATEMÁTICA VOLTADA PARA O PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO

MACEIÓ
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GERALDO FERREIRA BARBOSA FILHO

UMA MATEMÁTICA VOLTADA PARA O PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Lima

MACEIÓ
2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

B238m Barbosa Filho, Geraldo Ferreira.
Uma matemática voltada para o professor do ensino médio / Geraldo Ferreira Barbosa Filho. – 2015.
168 f. : il.

Orientador: José Carlos de Almeida Lima.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 167.
Índice: f. 168.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Professores – Formação. 3. Professores de ensino médio. I. Título.

CDU: 51:377.8

Folha de Aprovação

GERALDO FERREIRA BARBOSA FILHO

UMA MATEMÁTICA VOLTADA PARA O PROFESSOR DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 16 de outubro de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima (Orientador)

Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo

Prof. Dr. Vicente Francisco de Sousa Neto

À minha esposa Jancineide, companheira para todo o sempre e luz que guia o meu caminho, aos meus filhos Victor e Mayara, inspirações da minha vida, à minha sogra Terezinha, carinhosamente chamada de Neno, à minha cunhada Jeane, que considero como minha irmã, seu esposo, Euclides, aos colegas de curso, que nas horas mais difíceis estávamos juntos para apoiar um ao outro, aos professores que nesta jornada compartilharam suas experiências em prol da nossa evolução no curso, em especial ao professor Dr José Carlos, meu orientador no trabalho de conclusão.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. *José Carlos de Lima*, pela serenidade em sua vida profissional e comunicação com seus alunos e sua filha Doutoranda *Karla katerine Barboza de Lima* pelo grandioso apoio na orientação dos comandos no Latex.

Aos meus companheiros de caminhada, *Alexandre Faria, Claricy Alves, Claudio Agra, Diogo Meurer, Djalma Gomes, Edvan Horácio, Ewerton Roosewelt, Fabrícia Omena, Fernando Valério, Geraldo Barros, Gilmar Teodozio, Givanildo Santos, Gracino Francisco, José Aparecido, José Reinaldo, Ledivaldo Gomes, Marciel da Silva, Orlando Aprígio, Rose Silva, Thiago Lessa e Vanina Carvalho* pelas horas de estudos, pelas informações e compreensão, assim como, àqueles que iniciaram a jornada conosco, mas por algum motivo, não concluíram, *Edcarlos da Silva, Emanoel Mariano, Geovan Vieira, Isaac Gomes, José Romildo, Jucélio Ferreira, Lúcio Augusto, Nilzer Jacqueline e Tony Fábio.*

À minha família, em especial, minha esposa, filhos, sogra, cunhada e co-cunhado pelos dias, noites e fins de semana de auxílio, que foi essencial para a conclusão desse curso.

Aos companheiros de trabalho que me deram apoio com a parte prática desse trabalho, *Almir, Brunio Albino, Caio César, Lucivalda Barboza, Rildson, Sérgio Cabral e Witemberg*, assim como um aluno em especial da Escola Estadual Dr Fernandes Lima, *Alisson Lopes*, que possui um futuro promissor na área das exatas.

Aos meus alunos das Escolas Estadual Dr Fernandes Lima, Municipal Nise da Silveira e do Colégio Anchieta, por contribuirem, de alguma forma, com essa minha conquista.

Resumo

Muitos são os desafios que a Matemática propõe durante toda a nossa vida profissional, seja como estudante ou como profissional da área. A busca pelo conhecimento é necessária para poder darmos conta das novidades que surgem a cada dia. Sempre precisamos de motivação para poder ficarmos atualizados com os assuntos necessários para o entendimento dessas novidades. A seguir, mostraremos um material que motivará o professor de matemática que busca o aprendizado o tempo todo, resgatando o estímulo que muitas vezes se perde pelo fato do profissional da educação não conseguir resolver alguns problemas matemáticos que surgem na sua caminhada. Os assuntos que serão abordados aqui são de grande utilidade na Educação Básica e por eles terem uma beleza e graciosidade na resolução dos problemas devem ser apreciados com maior interesse. A linguagem utilizada aqui é muito agradável para o professor de Matemática, estimulando-o ainda mais em querer adquirir o conhecimento. Este material deve ser usado de maneira intensa e ostensiva para que você como professor tenha total confiança e domínio do conteúdo para propor técnicas e estratégias nos planejamentos de suas aulas.

Abstract

There are many challenges that mathematics offers throughout our working lives, either as a student or as an area of work. The quest for knowledge is necessary to be able to give account of the new developments that arise every day. Always need of motivation in order to stay updated with the matters necessary for the understanding of these news. Next, we will show a material that will motivate the math teacher who seeks learning all the time, rescuing the stimulus that often gets lost because of professional education can not solve some mathematical problems that arise in your walk. The subjects to be discussed here are of great use in basic education and they have a beauty and grace in solving problems must be examined with great interest. The language used here is very pleasant for the teacher of Mathematics, stimulating it even more in wanting to acquire knowledge. This material should be used in an intense and overt way for you as a teacher have full confidence and contents of the domain to propose techniques and strategies in planning their lessons.

Sumário

Introdução

Esse trabalho visa contemplar professores de Matemática e áreas afins, através de cursos de formação para professores, motivando-os para um melhor desempenho em sala de aula. Este trabalho faz parte de um sentimento de angústia que tive há alguns anos, quando percebi que estava ensinando Matemática de modo equivocado, com resoluções de exercícios, sem muita preocupação com definições, propriedades, teoremas e aplicações devidas desses conhecimentos.

Esse sentimento me estimulou a desenvolver esse trabalho, pois penso que essa angústia não é privilégio meu. Portanto, meus colegas também devem passar por isso. E antes disso se prolongar para eles, gostaria de compartilhar as ideias desse trabalho, que espero ser de grande valia para meus companheiros.

O material a ser apresentado deve ser usado pelo professor continuamente, no intuito de encorajá-lo aos desafios que a Matemática propõe para a gente. Por muitas vezes passamos por situações que nos deixam constrangido, pelo fato de que naquele momento de dificuldade não consigamos obter uma ideia para a resolução de um problema proposto.

Para todo comentário que se ouve, devemos ter atenção em cada palavra que se é falada. Muitas dessas palavras podem nos levar a diversos caminhos, basta você assimilar as informações que são úteis para desenvolver determinados assuntos. Vou contar um exemplo que aconteceu comigo. Eu estava assistindo uma aula de geometria, quando o professor colocou no quadro um triângulo com os ângulos de medidas x, $2x$ e $3x$ para explicar algum teorema ou alguma propriedade, quando um dos meus colegas chamou a minha atenção ao dizer - Esse triângulo é retângulo - mas não explicou o porque. Fiquei, por quase 20 minutos, sem entender aquela informação que ele passou, deixando-me pensativo de como é que ele enxerga tão rapidamente que aquele triângulo é retângulo. Na verdade, podemos provar isso de diversas maneiras, mas as definições que não são colocadas com muita afinidade em nossa mente, nos deixam cego quanto a essa informação. É fácil ver que sendo a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer sempre é $180°$, então $x + 2x + 3x = 180°$, o que implica que $x = 30°$, e dessa forma $3x = 90°$ e portanto, o triângulo é retângulo. Pensei isso a princípio, mas acho que pela agilidade que ele deu a resposta, acredito que não foi essa conta que ele fez na hora. Logo em seguida, esse mesmo companheiro fez a seguinte afirmação: Se a soma de dois ângulos internos de um triângulo qualquer for igual ao terceiro, então o triângulo é retângulo. E essa conta é bem mais fácil de fazer do que a primeira, pois $x + 2x = 3x$, portanto o triângulo é retângulo.

Na época dos Gregos, podia-se falar do cálculo e da geometria como partes únicas de um corpo de conhecimentos bem delimitado e não muito extenso. Hoje em dia, porém, a quantidade de conteúdos de matemática que se conhece é imensa e cresce exponencialmente, tornando-se difícil decidir qual deve ser a matemática que se aconselhe ensinar e como deve ser apresentada para sua melhor compreensão e sua melhor utilidade para o futuro dos alunos [9]. Eu acrescento, ainda, a essa evolução que dia após dia aparecem novas tecnologias sendo quebradas propriedades que antes eram inquebráveis e que nós, docentes, achamos que sabemos um pouco de matemática, mas que no fundo somos inseguros daquilo que transmitimos em sala de aula e propomos conhecimentos que não são de grande valia para o aluno, tornando-o um frustrado com a disciplina. O professor Walter Spinelli, em entrevista a *Revista Cálculo* declara que sente mais dificuldade nos tempos de hoje do que há dois anos e ainda mais dificuldade do que há quatro anos.

Lembro-me que ao estudar geometria analítica no ensino médio, mais especificamente o estudo da equação da circunferência, pedi para o professor que demonstrasse a equação da circunferência exposta por ele no quadro naquela época. A resposta que eu obtive desse professor, que era considerado o melhor do colégio e um dos melhores do estado, foi que a demonstração dessa equação demoraria no mínimo duas aulas de 50 minutos e que não valeria a pena demonstrá-la. Fiquei com isso guardado em minha cabeça, achando que um dia poderia deduzí-la, pois já havia feito isso com a distância entre dois pontos. Hoje, eu percebo que não seria necessária duas aulas para uma demonstração de uma equação dessa, pois usa apenas um pouco de geometria e o Teorema de Pitágoras. Ou seja, uma coisa simples e atrativa para mim. Tenho certeza de que se esse professor colocasse isso como um desafio para mim, eu poderia me aproximar melhor da Matemática e me apaixonar ainda mais por ela. Porém cada coisa em seu tempo, e eu acho que o meu tempo, aos poucos está chegando.

O ensino de Matemática hoje no Brasil difere pouco do ensino praticado há 20 anos. A cada ano, livros novos são editados repetindo quase sempre o mesmo estilo e os mesmos conteúdos dos anteriores. Existem hoje no Brasil bons livros de Matemática dedicados aos alunos tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Entretanto, o que lhes falta é um ingrediente que, no mundo de hoje, é fundamental: o estímulo à criatividade.

Entendemos que não é suficiente para a formação do futuro cidadão um aprendizado burocrático da Matemática e percebemos a importância de estimular os alunos desde cedo a resolver problemas novos e desafiantes, propiciando o desenvolvimento da imaginação e da criatividade [10]. O conhecimento é adquirido através da vontade de aprender do aluno. Não existe um professor que consiga transmitir conhecimento para o aluno se esse não admite o aprendizado. Dessa forma é muito cômodo para quem estar aprendendo, pois não teria esforço nenhum para adquirir o conhecimento, e assim, não daria valor para aquilo que estava sendo assimilado.

Além disso, penso que o aluno deve fazer o seu papel dentro de sua profissão de estudante. O que quero dizer é que se o aluno não for atrás do conhecimento por vontade própria, não existirá uma pessoa que consiga colocar isso nele. O papel de um professor é ajudar o aluno a ver as relações entre a Matemática que ele estuda e outras coisas, afirma Spinelli. Por exemplo, números complexos são usados na análise de circuitos elétricos, logaritmos são usados na Escala Richter, seno e cosseno nos cálculos de rampas, entre outras. O aluno não pode se limitar a ver que um assunto em Matemática só serve para um determinado estudo. E outra, quem deve estabelecer as relações entre a Matemática e as situações nas quais ela serve não é o professor, e sim o aluno, afirma o professor Walter Spinelli [11], professor com mais de 40 anos de experiência em sala de aula.

O trabalho é composto por quatro capítulos, onde são abordados assuntos que são de extrema importância para o ensino médio. No capítulo 1 é mostrado dois princípios importantíssimos na Matemática, tanto pela facilidade de seu entendimento quanto pela graciosidade na resoluções dos problemas. São os princípios da Indução Finita e da Casa dos Pombos. No capítulo 2, são abordados alguns aspectos da divisibilidade na álgebra dos números inteiros. Nesse capítulo será mostrado a definição de divisibilidade, bem como algumas propriedades que envolvem a divisão de números inteiros. Será dado uma relevante importância à Divisão Euclidiana, assim como, apresentado as definições e propriedades de Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum e o Teorema Fundamental da Aritmética, envolvendo a decomposição de um número inteiro em produtos de números primos. No capítulo 3, será mostrado alguns tópicos de Geometria Euclidiana, onde vale destacar os casos de congruência e semelhança de triângulos, a desigualdade triangular, alguns quadriláteros notáveis, o Teorema de Thales e áreas de algumas figuras planas. No capítulo 4, é dado um destaque ao Princípio Fundamental da Contagem, que convém falar é um princípio que usamos o tempo todo, pois sempre estamos tomando decisões a cada instante, e isso é essencial para esse princípio. Finalizando o trabalho, serão apresentadas as soluções dos problemas colocados nos quatro capítulos.

Capítulo

1

Tópicos de Matemática Elementar

Neste capítulo, a fundamentação teórica básica necessária ao desenvolvimento deste trabalho será desenvolvida de forma que o leitor não terá dificuldade em compreender o mesmo. Um dos maiores desafios que podemos encontrar no desenvolvimento de qualquer tema matemático é quando nos deparamos com a necessidade de argumentar sobre fatos que são óbvios, isto é, imediatos.

Neste sentido, quando pensamos em compreender uma teoria matemática, seja de cunho elementar ou não, passamos pela necessidade de consoliddar os conceitos dessa teoria de forma que possamos desenvolver uma linguagem matemática consistente e que seja capaz de dar um sentido lógico aos nossos questionamentos.

Descobri na prática que a solução de um problema ou a compreensão de um enunciado perpassa, muitas vezes, pelo conhecimento histórico de como se desenvolve determinado conteúdo[1].

A seguir trataremos sobre o Princípio da Indução Finita, assunto que me encantou pela precisão como método e pela simplicidade de seus argumentos. Sem dúvida nenhuma, esse princípio me mostrou o quanto a Matemática pode ser apreciada com seus argumentos lógicos refletindo a ciência magnífica que ela é.

Outro princípio que prendeu minha atenção por sua simplicidade lógica é o Princípio da Casa dos Pombos. Um princípio que ataca principalmente problemas da teoria dos números, mas com aplicabilidade em vários ramos da Matemática.

1.1 Princípio da Indução Finita

No início do século XX, o matemático Giuseppe Peano (1858-1932), citado por [8], estabeleceu os axiomas necessários para descrever com precisão o conjunto dos números naturais. O último Axioma de Peano diz:

Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$ ($A \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in A$ e se, além disso, A contém todos os sucessores dos seus elementos então $A = \mathbb{N}$.

Esse axioma é conhecido como *axioma de indução* e serve para estabelecer provas de afirmações matemáticas com o rigor matemático necessário. Agora, iremos enunciar o Princípio da Indução Finita.

Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:

(i) (Base da Indução) Se $P(n_0)$ é verdadeira e

(ii) para todo $n \geqslant n_0$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esse princípio fornece uma das mais poderosas técnicas de demonstração da Matemática: a demonstração por indução. A seguir ilustraremos isso com alguns exemplos.

Exemplo 1.1.1. *Mostre que para todo inteiros positivo n temos*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Provaremos a afirmação acima usando o Princípio da Indução Finita. Note que

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Assumiremos, agora, que $P(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

De acordo com o Princípio Fundamental da Indução, devemos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot [(n+1)+1]}{2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+n)+(n+1) &= \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\\ &= (n+1)\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)\\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Portanto $P(n+1)$ é verdadeira. Dessa forma, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

O que acabamos de mostrar é que dado um número natural n, a soma dos n primeiros naturais consecutivos será igual a $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Exemplo 1.1.2. *Prove que* $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ *é múltiplo de* 3.

Mostraremos, por indução, que a afirmação acima é verdadeira. Perceba que

$$1^3+(1+1)^3+(1+2)^3 = 36 = 3\cdot 12.$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Assumiremos, agora, que $P(n)$ é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 = 3k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Pelo Princípio da Indução Finita, devemos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$(n+1)^3+(n+1+1)^3+(n+2+1)^3 = 3t,\ t \in \mathbb{N}.$$

É verdade,

$$\begin{aligned}(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3-[n^3+(n+1)^3+(n+2)^3] &= (n+3)^3-n^3\\ &= n^3+3\cdot n^2\cdot 3+3\cdot n\cdot 3^2+3^3-n^3\\ &= 3\cdot(3\cdot n^2+3^2\cdot n+3^2).\end{aligned}$$

Logo,

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 3t,\ t = 3 \cdot n^2 + 3^2 \cdot n + 3^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira. Desse modo $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Princípio da Indução Infinita. Ou seja, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é da forma $3k,\ k \in \mathbb{N}$ e conclui-se que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é múltiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.3. *Mostre que, para todo número natural n, $M_n := n \cdot (n^2 - 1) \cdot (3n + 2)$ é múltiplo de 24.*

Também usaremos o Princípio da Indução Finita para provar essa igualdade.

Note que

$$M_1 = 1 \cdot (1^2 - 1) \cdot (3.1 + 2) = 0.$$

Dessa forma, M_1 é múltiplo de 24 e, portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Assumiremos agora que $P(n)$ é verdadeira, ou seja,

$$M_n = 24 \cdot t,\ t \in \mathbb{N}.$$

De acordo com o Princípio Fundamental da Indução, devemos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja,

$$M_{n+1} = 24 \cdot k,\ k \in \mathbb{N}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
M_{n+1} - M_n &= (n+1) \cdot [(n+1)^2 - 1] \cdot [3 \cdot (n+1) + 2] - n \cdot (n^2 - 1) \cdot (3n + 2) \\
&= (n+1) \cdot [n^2 + 2n] \cdot [3n + 5] - n \cdot (n^2 - 1) \cdot (3n + 2) \\
&= (n+1) \cdot [n \cdot (n+2)] \cdot [3n + 5] - n \cdot (n^2 - 1) \cdot (3n + 2) \\
&= n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (3n+5) - n \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot (3n+2) \\
&= n \cdot (n+1) \cdot [3n^2 + 11n + 10 - 3n^2 + n + 2] \\
&= n \cdot (n+1) \cdot (12n + 12) \\
&= 12n \cdot (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$M_{n+1} - M_n = 12n \cdot (n+1)^2.$$

Levando-se em consideração que n e $n+1$ são números naturais consecutivos, temos que um deles é necessariamente par. Dessa forma,

$$n \cdot (n+1)^2 = 2s,\ s \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$M_{n+1} - M_n = 24s, \ \ s \in \mathbb{N}.$$

Donde, segue que

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= 24s + M_n \\ &= 24s + 24t \\ &= 24 \cdot (s+t). \end{aligned}$$

Denotando por $k = s + t \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$M_{n+1} = 24k, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $P(n+1)$ é verdadeira. Dessa forma, pelo Princípio da Indução Finita, tem-se que $P(n)$ é verdadeira para todo n.

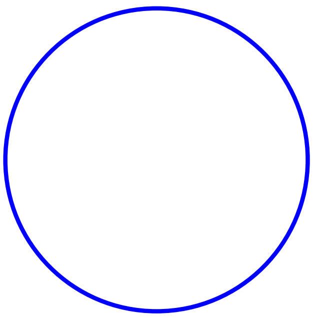
Exemplo 1.1.4. ***(Pizza de Steiner)*** *Mostre que o maior número de partes possíveis que podemos dividir o plano com n retas deste plano é dado por $P(n) = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} + 1$.*

Iremos mostrar pelo Princípio Fundamental da Indução que a afirmação acima é verdadeira. Observe que

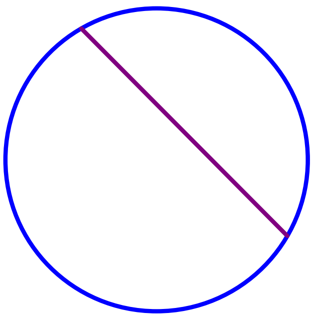
$$P(1) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} + 1 = 2.$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Veja na prática como isso acontece. Suponha um plano na forma de uma pizza e queremos dar um corte nela. É obvio que teremos esse plano (pizza) dividido em duas partes. Veja as figuras. Na figura (a) aparece o plano em forma de pizza sem o corte e na figura (b) aparece o plano dividido em duas partes com um corte.



$Figura(a)$



$Figura(b)$

Agora, assumiremos que $P(n)$ é verdadeira, ou seja

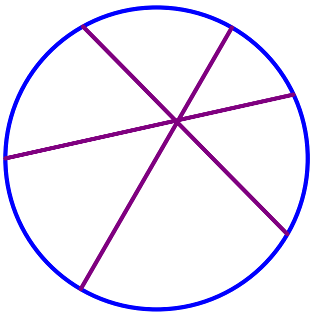
$$P(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1,$$

e iremos mostrar, pelo Princípio da Indução Finita, que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja,

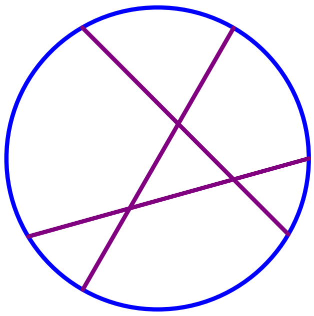
$$P(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} + 1.$$

Traçando-se n retas, obtemos, por hipótese, $\dfrac{n\cdot(n+1)}{2} + 1$ partes. O que se deve entrar em discusão é qual seria a forma de cortar o plano com $n+1$ retas para obtermos o maior número de partes possíveis.

Iremos obter o maior número de partes se a reta de ordem $n+1$ cortar cada uma das outras retas em pontos que não sejam de intersecção. Observe as figuras abaixo para esse entendimento.



$Figura(c)$



$Figura(d)$

Observe que na figura (c) a reta de ordem $n+1$ corta as outras retas na intersecção, o que divide o plano em seis partes, enquanto que na figura (d) a reta não corta na intersecção e divide o plano em sete partes.

Além disso, a reta de ordem $n+1$ ao cortar a primeira reta, divide em dois pedaços a parte que se encontrava inicialmente. Em seguida, divide a parte seguinte, assim que toca a segunda reta e sucessivamente ela vai dividindo em dois espaços as partes em que passa antes de encontrar cada uma das n retas. Com isso são geradas $n+1$ partes a mais do que se tinha. E, portanto,

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n) + (n+1) \\ &= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + 1 + (n+1) \\ &= \frac{n\cdot(n+1) + 2\cdot(n+1)}{2} + 1 \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} + 1. \end{aligned}$$

A propriedade $P(n+1)$ é verdadeira, e, portanto $P(n)$ também é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclui-se que o maior número de partes possível que podemos dividir o plano com n retas é dado por $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2} + 1$.

Problemas

1. Demonstrar por indução que para $n \geqslant 1$ natural

   (a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

   (c) $1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.

2. Demonstrar que

   (a) $n^3 - n$ é um múltiplo de 6 para todo natural n.

   (b) $5^n - 1$ é múltiplo de 24 para todo número natural n par.

   (c) $2^n + 1$ é múltiplo de 3 para todo natural ímpar n.

3. Demonstre que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, ou seja

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

4. Demonstre que a soma dos n primeiros números pares é $n \cdot (n+1)$, ou seja

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n \cdot (n+1).$$

5. Mostre, usando indução, que $1 + 11 + \cdots + 11\cdots1 = \dfrac{10}{81}(10^n - 1) - \dfrac{n}{9}$, onde n representa a quantidade de "uns" presentes no último termo da expressão.

6. Mostre por indução que um polígono convexo de n lados possui exatamente $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

7. **Progressão aritmética (P.A.)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se o termo anterior com uma constante, chamada **razão da P.A.**, indicada por r.
   Mostre, por indução, que o termo geral de uma P.A. é dado por

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

8. Usando o Pricípio da Indução Finita, mostre que a soma dos n termos de uma P.A. é dada por
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

9. **Progressão geométrica (P.G.)** é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante, chamada **razão da P.G.**, indicada por q.
Mostre, por indução, que o termo geral de uma P.G. é dado por
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

10. Mostre, pelo Princípio da Indução Finita, que a soma dos n termos de uma P.G. é dada por
$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ onde } q \neq 1.$$

11. **(A Moeda Falsa do Rei)** Uma das 3^n moedas de um Rei é falsa e pesa menos que as verdadeiras que tem todas o mesmo peso. Essa diferença de peso é quase imperceptível e não se pode determinar a moeda falsa sem o uso de uma balança de dois pratos. Mostre que com n pesagens o Rei pode descobrir qual é a moeda falsa.

1.2 Princípio da Casa dos Pombos

Nesta seção enunciaremos um princípio, cuja lógica matemática é de uma simplicidade encantadora, mas pouco abordado pelos professores do ensino médio. Este belo princípio, conhecido como Princípio da Casa dos Pombos é de grande valia quando atacamos exemplos onde o uso do raciocínio lógico se faz necessário sem a utilização de fórmulas para resolução dos mesmos.

Proposição 1.2.1. *(PCP - versão simples) Se distribuímos $N+1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos.*

Demonstração: Quando distribuímos um pombo para cada uma das casas existentes, notamos que sobra um pombo para ser distribuído em uma das casas que já existe um pombo nela.

Por outro lado, suponhamos que em cada casa não existe mais do que um pombo, então quando contamos todos os pombos contidos nas N casas, não teremos mais do que N pombos. O que contraria a hipótese de termos $N+1$ pombos. Logo teremos pelo menos uma das casas com mais de um pombo. ∎

Proposição 1.2.2. *(PCP - versão geral) Se distribuímos $Nk+1$ pombos em N casas, então alguma das casas contém pelo menos $k+1$ pombos.*

Demonstração: Suponha que em cada casa não existe mais do que k pombos, então contando todos os pombos contidos nas N casas não teremos mais do que Nk pombos, contradizendo a hipótese de termos $Nk+1$ pombos distribuídos nas N casas.

Sendo $k=1$, teremos a versão simples do Princípio da Casas dos Pombos. ∎

Uma versão alternativa para o Princípio da Casa dos Pombos que pode ser usada como uma aplicação é:

Se a soma dos n números naturais é igual a S, então existe pelo menos um deles que não é maior que $\frac{S}{n}$, assim como existe pelo menos um deles que não é menor que $\frac{S}{n}$.

Observe um bom exemplo do Princípio da Casa dos Pombos enunciado na proposição 1.2.1.

Exemplo 1.2.1. *Num sítio há 310 cajueiros. É conhecido que um cajueiro não contém mais do que 300 frutos. Prove que existem dois cajueiros nesse sítio que têm a mesma quantidade de frutos.*

Note a graciosidade dessa solução, para entender facilmente esse princípio.

Os 310 cajueiros representam os pombos nesse princípio e a quantidade de frutos em cada cajueiro será representada pela casa dos pombos. Teremos cajueiro que pode não colocar frutos, assim como pode colocar apenas um fruto, ou dois, e assim por diante até uma quantidade máxima de 300 frutos no pé. Enumeremos as casas dos pombos de 0 a 300, onde 0 representa o cajueiro que não coloca fruto e 300 representa o cajueiro que coloca 300 frutos e ordenemos os pombos, que representa os cajueiros, de 1º a 310º. Suponha que o 1º cajueiro não ponha fruto, o 2º ponha apenas um fruto, e assim por diante. Observe o esquema a seguir.

Quantidade de frutos no pé (casa dos pombos)	0	1	2	$\cdots$	300
Cajueiro (pombos)	1º	2º	3º	$\cdots$	301º

Note que, ainda sobram nove cajueiros para colocar em uma das posições já ocupadas por algum outro cajueiro. Portanto, teremos dois cajueiros ou mais que tenham a mesma quantidade de frutos.

Observe outro exemplo.

Exemplo 1.2.2. *Em uma reunião há 20 pessoas. Mostre que nessa reunião existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas.*

Neste caso, as 20 pessoas são representados pelos pombos e as casas dos pombos, que representam a quantidade de pessoas conhecidas por cada pessoa, são enumeradas de 0 a 19, onde zero indica que a pessoa não conhece ninguém e 19 indica que a pessoa conhece todos os outros da reunião. Nessa reunião, não existe a possibilidade de ocorrer, simultaneamente, não conhecer ninguém e conhecer a todos. Logo, uma das casas, 0 ou 19, permanece desocupada. Enumerando de 0 a 19 o número de pessoas conhecidas e ordenando as 20 pessoas da reunião, temos:

Quantidade de pessoas conhecidas (casa dos pombos)	0	1	2	$\cdots$	19
Pessoas (pombos)	1ª	2ª	3ª	$\cdots$	X

ou

Quantidade de pessoas conhecidas (casa dos pombos)	0	1	2	$\cdots$	19
Pessoas (pombos)	X	1ª	2ª	$\cdots$	19ª

Logo, a próxima pessoa deverá ser alocada em uma das casas já existentes e, assim, teremos duas pessoas com o mesmo número de conhecidos nessa reunião.

Perceba que usamos argumentos para a resolução desse exemplo, sem a necessidade de fórmulas. Isso nos obriga a usar o raciocínio de maneira mais elevada, o que é importante para o nosso caminhar profissional. Dessa forma poderemos encarar os problemas com mais seriedade e tranquilidade para solucioná-los.

Exemplo 1.2.3. *Num colégio com 16 salas são distribuídas canetas nas cores preta, azul e vermelha para realizar uma prova de concurso. Se cada sala recebe canetas da mesma cor, então prove que existem pelo menos seis salas que receberam canetas de mesma cor.*

Dessa forma, as 16 salas serão representadas pelos pombos e as cores das canetas serão representadas pelas casas. Enumeremos as salas de 1 a 16. Suponha que as salas de 1 a 5 receberam canetas de cor preta, as salas de 6 a 10 receberam canetas de cor azul, e as salas de 11 a 15 receberam canetas de cor vermelha, restando uma sala que recebeu canetas de uma dessas cores já distribuídas. Logo, teremos seis salas que receberam canetas de mesma cor.

Perceba, novamente, que não usamos fórmulas para solucionar o exemplo, apenas uma simples organização do raciocínio.

Problemas

1. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há pelo menos duas que fazem aniversário no mesmo mês?

2. Mostre que, em um grupo de 50 pessoas, há sempre pelo menos cinco que nasceram no mesmo mês.

3. Em uma reunião há n pessoas. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de outros participantes admitimos que conhecer seja uma relação simétrica, ou seja, se a conhece b, então b conhece a.

4. (Princípio das Gavetas de Dirichlet[1]) Se $n + 1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então, pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

5. Cinco pontos são tomados sobre a superfíe de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor que, ou igual a, $\sqrt{2}$.

6. Mostre que em qualquer conjunto de oito inteiros há sempre dois deles cuja diferença é um múltiplo de sete.

7. Consideremos um conjunto formado por 10 números naturais diferentes. Se calcularmos todas as diferenças entre esses números, pelo menos uma dessas diferenças é um múltiplo de 9?

8. Em um campeonato, cada dois times jogam entre si uma única vez. Mostre que, em qualquer momento, há sempre dois times que disputaram o mesmo número de partidas.

9. Do conjunto $A = \{1,\ 2, \cdots,\ 99,\ 100\}$, escolhemos ao acaso 51 números. Demonstrar que entre os números escolhidos sempre existem dois que são consecutivos.

10. Escolhem-se 7 pontos no interior de um retângulo de dimensões 2×3. Demonstrar que sempre é possível encontrar dois pontos tal que sua distância é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

11. Dadas seis pessoas numa festa, demonstrar que necessariamente existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente. Suponha que a relação de conhecer é simétrica.

[1]Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), matemático alemão a quem se atribui a moderna definição formal de função.

12. (IMO1985). Dado um conjunto M com 1985 inteiros positivos distintos, nenhum dos quais tem divisores primos maiores do que 23, mostre que há 4 elementos em M cujo produto é uma quarta potência.

13. Em uma pesquisa de rua, cada entrevistado respondeu a quatro perguntas, podendo sua resposta ser *sim* ou *não*, para cada uma das perguntas. Qual o número mínimo de entrevistados para garantirmos que duas pessoas respondam igualmente a todas as perguntas?

14. Se n e m são números naturais, então o conjunto $A = \{m+1,\ m+2,\ \cdots,\ m+n\}$ possui algum divisor de n.

15. Demonstrar que todo inteiro tem um múltiplo cuja representação decimal começa com o bloco de dígitos 1234567890.

16. Dado um número inteiro positivo n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1 apenas. (Por exemplo, se $n = 3$, temos 111 ou 1.101, etc.)

17. Prove que entre $n+1$ elementos escolhidos no conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n\}$ existem dois que são primos relativos.

Capítulo 2

Alguns Aspectos da Divisibilidade na Álgebra dos Números Inteiros

Neste capítulo, estudaremos o conceito de divisibilidade nos conjuntos dos inteiros. Sem diminuir a importância das operações de adição, subtração e multiplicação, temos na divisão de números inteiros uma fonte inesgotável de problemas interessantes dentro da Matemática. Apesar da simplicidade do conceito, a construção do formalismo matemático deste conceito é a condição necessária para que o professor possa desenvolver a teoria de forma natural e consistente.

2.1 Divisibilidade

Definição 2.1.1. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, dizemos que b divide a, e escrevemos $b \mid a$, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bc$. Caso b não divida a, escrevemos $b \nmid a$.*

Dado um número inteiro $b \neq 0$, se b dividir a, dizemos que b é um **divisor** de a, que a é **divisível** por b ou ainda que a é um **múltiplo** de b. Se $b \mid a$ e $b > 0$, então b é um **divisor positivo** de a.

A proposição que segue estabelece propriedades básicas da relação de divisibilidade. Salientamos que estas propriedades são muito relevantes no desenvolvimento da teoria e, portanto, devemos dar a elas a atenção necessária para um desenvolvimento da mesma.

Proposição 2.1.1. *Sejam a, b e c inteiros não nulos e x, y inteiros quaisquer.*

(a) Se $b \mid a$ e $a \mid b$, então $a = \pm b$.

(b) Se $c \mid b$ e $b \mid a$, então $c \mid a$.

(c) Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid (ax + by)$.

(d) Se $b \mid a$, então $|b| \leqslant |a|$.

(e) Se $c \mid b$, então $c \mid ab$.

(f) Se $b \mid a$, então $bc \mid ac$.

Demonstração:

(a) Se m e n são inteiros tais que $a = bm$ e $b = an$, então $a = (an) \cdot m = a \cdot (mn)$ e, daí,

$$m \cdot n = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{e} \quad n = 1 \\ m = -1 & \text{e} \quad n = -1 \end{cases}, \ m, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Segue que $a = \pm b$.

(b) Se $b = cn$ e $a = bm$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então $a = (cn) \cdot m = c \cdot (mn)$, com $mn \in \mathbb{Z}$. Logo, $c \mid a$.

(c) Se $a = cm$ e $b = cn$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então $ax + by = cmx + cny = (mx + ny) \cdot c$, com x e $y \in \mathbb{Z}$. Logo, $c \mid (ax + by)$.

(d) Se $a = bm$, com $m \in \mathbb{Z}$. Tomando os módulos, temos que $|a| = |b||m|$. Como $a \neq 0$, temos que $m \neq 0$, logo $1 \leqslant |m|$ e, consequentemente, $|b| \leqslant |b||m| = |a|$.

(e) Se $b = cn$, com $n \in \mathbb{Z}$, então $ab = acn$, logo $ab = (an) \cdot c$ e consequentemente $c \mid ab$.

(f) Se $a = bm$, com $m \in \mathbb{Z}$, então $ac = cbm$ e consequentemente $bc \mid ac$. ∎

2.2 Divisão Euclidiana

Mesmo quando um número b inteiro não nulo não divide um número inteiro a, é possível efetuar a divisão de a por b com resto.

Teorema 2.2.1. *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = b \cdot q + r, \ \textit{com} \ 0 \leqslant r < |b|$$

Demonstração:

Existência:

Suponha $b > 0$, e seja q o maior inteiro tal que $q \leqslant \dfrac{a}{b}$. Então, pela observação acima, $q \leqslant \dfrac{a}{b} < q + 1$, ou seja, $b \cdot q \leqslant a < b \cdot (q + 1)$. Somando $-b \cdot q$ a esta desigualdade, obtemos que $0 \leqslant a - b \cdot q < b$. Portanto, definindo $r = a - b \cdot q$, segue que $a = b \cdot q + r$, com $0 \leqslant r < |b|$, pois $b > 0$.

No caso de $b < 0$, então $-b > 0$. Portanto, pelo caso acima, existem q, $r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = (-b) \cdot q + r$, com $0 \leqslant r < -b$. Daí $a = b \cdot (-q) + r$, com $0 \leqslant r < -b = |b|$. Provando, dessa forma, a primeira parte do teorema.

Verificaremos, agora, a unicidade:

Suponha que $a = b \cdot q + r = b \cdot q' + r'$, onde q, q', r, $r' \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant r < |b|$ e $0 \leqslant r' < |b|$. Pela igualdades, temos que

$$b \cdot q - b \cdot q' = r' - r \Rightarrow b \cdot (q - q') = r' - r.$$

Então

$$|r' - r| < |b|$$

e

$$b \cdot (q - q') = r' - r.$$

Note que $q \neq q'$, então $|q - q'| \geqslant 1$, de modo que

$$|b| \leqslant |b| \cdot |q - q'| = |r - r'| < |b|.$$

Uma contradição. Logo $q = q'$ e, daí, $r = r'$. ■

Para o teorema 2.2.1, é importante tomar nota de uma observação.

Dado $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, sua **parte inteira** $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \in \mathbb{R}$ é definida por

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = max\{n \in \mathbb{Z}; n \leqslant \frac{a}{b}\}.$$

Se $b > 0$, então

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \text{ e } r = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b.$$

De outro modo, para $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = n \Leftrightarrow n \leqslant \frac{a}{b} < n + 1.$$

Tais inteiros q e r são, respectivamente, o **quociente** e o **resto** da divisão de a por b.

2.3 Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum

Nesta seção, trataremos das definições de Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum, assim como construíremos a teoria necessária ao desenvolvimento desse tópico.

Falaremos da decomposição de um número inteiro como produto de números primos.

2.3.1 Máximo Divisor Comum

Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito *divisor comum* de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$.

Definição 2.3.1. *Dados dois números inteiros a e b, dizemos que um número inteiro $d > 0$ é o máximo divisor comum de a e b se d é um divisor comum de a e b e d é divisível por todo divisor comum de a e b.*

Observe que a definição acima nos diz que se existe um número c que é divisor comum de a e b, então c divide d.

Observe que dados a, $b \in \mathbb{Z}$, se existir o máximo divisor comum de a e b, denotado por $mdc(a, b)$, então:

$$mdc(a, b) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b).$$

Dessa forma, para efeito de cálculo do máximo divisor comum de dois números inteiros, podemos sempre supô-los não negativos.

Lema 2.3.1. *Sejam a, b, $n \in \mathbb{Z}$. Se existe $mdc(a, b - na)$, então, $mdc(a, b)$ existe e*

$$mdc(a, b) = mdc(a, b - na)$$

Demonstração: Seja $d = mdc(a, b - na)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b - na)$, segue que $d \mid n \cdot a$, então $d \mid b$. Logo d é um divisor comum entre a e b. Supondo agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e $b - na$ e, portanto, $c \mid d$. Completando a demonstração do lema. ■

2.3.2 Propriedades do mdc

Nesta subseção demonstraremos propriedades do máximo divisor comum que são relevantes ao que nos propomos a fazer. Dados $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, denotaremos o conjunto $\{y = d \cdot n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ por $d\mathbb{Z}$.

Teorema 2.3.1. *Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos. Se $d = min(\{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N})$, então d é o máximo divisor comum de a e b e*

$$\{xa + by;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} = d\mathbb{Z} := \{x;\ x = ld;\ l \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração: Suponha que c é um divisor comum de a e b. Consequentemente, c divide todos os números naturais da forma $xa + yb$. Portanto, c divide todos os elementos de $\{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\}$ e, dessa forma, $c \mid d$.

Tomando $z \in \{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$, suponha, por absurdo, que $d \nmid z$. Portanto, pela divisão euclidiana,

$$z = d \cdot q + r, \text{ com } 0 < r < d. \tag{2.1}$$

Como $z,\ d \in \{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$ tem-se que $z = xa + yb$ e $d = ma + nb$, para alguns $x,\ y,\ m,\ n \in \mathbb{Z}$, segue-se da equação 2.1 que $xa + yb = (ma + nb) \cdot q + r$. Donde concluímos que

$$r = (x - qm) \cdot a + (y - qn) \cdot b$$

e, portanto, $r \in \{xa+yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$. Um absurdo, pois $d = min\{xa+yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$ e $r < d$. Em particular, $d \mid a$ e $d \mid b$. Assim, provamos que d é o máximo divisor comum de a e b.

Agora, provaremos que $\{xa+yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} = d\mathbb{Z}$. Dado que todo elemento do conjunto $\{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\}$ é divisível por d, temos que $\{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} \subset d\mathbb{Z}$. Por outro lado, para todo $w \in d\mathbb{Z}$, temos que

$$w = ld = l \cdot (ma + nb) = (lm) \cdot a + (ln) \cdot b = xa + yb,\ x = lm \text{ e } y = ln$$

e, portanto, $w \in \{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\}$. Logo, $d\mathbb{Z} \subset \{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\}$. Dessa forma, concluímos que $\{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} = d\mathbb{Z}$. ■

Uma consequência intuitiva do teorema anterior é o corolário abaixo.

Corolário 2.3.1. *Quaisquer que sejam $a,\ b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que*

$$mdc(na, nb) = n \cdot mdc(a, b).$$

Demonstração: Note que

$$\{n \cdot xa + n \cdot yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} = \{n \cdot (xa + yb);\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} = \{w = n \cdot z;\ z \in \{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\}\}.$$

Agora o resultado segue-se do teorema 2.3.1 e do fato de que

$$min(\{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}) = n \cdot min\{xa + yb;\ x,\ y \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}\}.$$

■

Corolário 2.3.2. *Dados $a,\ b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, tem-se que*

$$mdc\left(\frac{a}{mdc(a,b)}, \frac{b}{mdc(a,b)}\right) = 1.$$

Demonstração: Pelo corolário 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned} mdc(a,b) \cdot mdc\left(\tfrac{a}{mdc(a,b)}, \tfrac{b}{mdc(a,b)}\right) &= mdc\left(mdc(a,b)\frac{a}{mdc(a,b)}, mdc(a,b)\frac{b}{mdc(a,b)}\right) \\ &= mdc(a,b), \end{aligned}$$

o que prova o resultado. ∎

A seguir enunciaremos uma proposição, cujo resultdao é de suma importância para nossas pretensões.

Definição 2.3.2. *Dois números inteiros serão ditos **primos entre si**, ou **coprimos**, se o único divisor positivo de ambos é 1.*

A seguir demonstraremos uma caracterização de números primos muito útil do ponto de vista teórico e que facilita o reconhecimento de um número primo.

Proposição 2.3.1. *Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$.*

Demonstração: Suponha que a e b são primos entre si. Logo $mdc(a,b) = 1$. Então, pelo teorema 2.3.1, temos que existem números inteiros m e n tais que $ma+nb = mdc(a,b) = 1$.

Reciprocamente, suponha que existam números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$. Se $d = mdc(a,b)$, temos que $d \mid (ma+nb)$, o que mostra que $d \mid 1$, e, portanto, $d = 1$. ∎

Teorema 2.3.2. *(Lei de Gauss) Sejam a, b e c números inteiros. Se $a \mid bc$ e $mdc(a,b) = 1$, então $a \mid c$.*

Demonstração: Se $a \mid bc$, então existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot c = a \cdot e$. Por outro lado, se $mdc(a,b) = 1$, então, pela proposição 2.3.1, temos que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ma + nb = 1. \tag{2.2}$$

Multiplicando por c ambos os membros da equação 2.2, obtemos:

$$ma \cdot c + nb \cdot c = c.$$

Dessa forma, substiuíndo $b \cdot c$ por $a \cdot e$ nesta última igualdade, temos

$$c = mac + nae = a \cdot (mc + ne).$$

Consequentemente, $a \mid c$. ∎

Corolário 2.3.3. *Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com b e c não ambos nulos, temos que*

$$b \mid a \quad e \quad c \mid a \Leftrightarrow \frac{bc}{mdc(b,c)} \mid a.$$

Demonstração: Como $b \mid a$ e $c \mid a$, temos que $a = nb = mc$ para algum $n, m \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\frac{n \cdot b}{mdc(b,c)} = \frac{m \cdot c}{mdc(b,c)}. \tag{2.3}$$

Por outro lado, pelo corolário 2.3.2, temos que $mdc\left(\frac{b}{mdc(b,c)}, \frac{c}{mdc(b,c)}\right) = 1$, e claramente $\frac{b}{mdc(b,c)} \mid m$ na equação 2.3, o que implica que $\frac{b \cdot c}{mdc(b,c)} \mid m \cdot c$. Como $m \cdot c = a$, a implicação direta fica provada e a recíproca é imediata. ∎

O conceito de **máximo divisor comum** entre dois números pode ser generalizado para uma quantidade finita de números.

De fato, um número natural d será dito mdc de uma quantidade finita $a_1, ..., a_n$ de números inteiros, não todos nulos, se d é um divisor comum de $a_1, ..., a_n$ e se c é um divisor comum de $a_1, ..., a_n$, então $c \mid d$.

2.3.3 Mínimo Múltiplo Comum

Diremos que um número inteiro é um *múltiplo comum* de dois números inteiros dados se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Definição 2.3.3. *Diremos que um número inteiro $m \geqslant 0$ é um mínimo múltiplo comum dos números inteiros a e b, se m é um múltiplo comum de a e b, e se c é um múltiplo comum de a e b, então $m \mid c$.*

Como ocorre com o mdc, o mínimo múltiplo comum de a e b, se existe, denotado por $mmc(a, b)$, satisfaz a relação abaixo:

$$mmc(-a, b) = mmc(a, -b) = mmc(-a, -b) = mmc(a, b).$$

Assim, para efeito de cálculo do mínimo múltiplo comum de dois números, podemos sempre supô-los não negativos.

Proposição 2.3.2. *Dados dois números inteiros a e b, temos que $mdc(a, b)$ existe e*

$$mmc(a, b) \cdot mdc(a, b) = |a| \cdot |b|.$$

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$, a igualdade acima é trivialmente satisfeita. Seja $m = \dfrac{a \cdot b}{mdc(a, b)}$ e, sem perda de generalidade, suponha $a,\ b \in \mathbb{N}$. Como

$$m = \frac{a \cdot b}{mdc(a, b)} = \frac{b \cdot a}{mdc(a, b)},$$

temos que $a \mid m$ e $b \mid m$. Portanto, m é um múltiplo comum de a e b. Seja c um múltiplo comum de a e b; logo, $c = na = n'b$. Segue daí que

$$n \cdot \frac{a}{mdc(a, b)} = n' \cdot \frac{b}{mdc(a, b)}.$$

Pelo corolário 2.3.2, $\dfrac{a}{mdc(a, b)}$ e $\dfrac{b}{mdc(a, b)}$ são primos entre si. Segue-se, então, que $\dfrac{a}{mdc(a, b)}$ divide n', e, portanto, $m = \dfrac{a \cdot b}{mdc(a, b)}$ divide $n'b$ que, é igual a c. Logo, $m = mmc\ (a,\ b)$ e daí segue a relação. ■

Vale salientar um resultado que segue imediatamente da proposição 2.3.2:

Corolário 2.3.4. *Se a e b são números inteiros primos entre si, então $mmc(a, b) = |a \cdot b|$.*

Assim como fizemos com o máximo divisor comum, podemos generalizar o conceito de **mínimo múltiplo comum**. De fato, dado um número natural m e números inteiros $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$, não nulos, dizemos que m é mínimo múltiplo comum desses números, se para todo múltiplo comum m' dos números $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$, tem-se que $m \mid m'$.

Proposição 2.3.3. *Sejam $a_1, \cdots,\ a_n$ números inteiros não nulos. Então existe o número $mmc(a_1, \cdots,\ a_n)$ e*

$$mmc(a_1, \cdots,\ a_{n-1},\ a_n) = mmc(a_1, \cdots,\ a_{n-2},\ mmc(a_{n-1},\ a_n)).$$

Vejamos um exemplo que ilustra a proposição 2.3.3.

Exemplo 2.3.1. *Determine o mínimo múltiplo comum entre* $4,\ 6$ *e* 12.

Observe uma solução.

Denotemos $m(4),\ m(6)$ e $m(12)$ como os múltiplos de 4, 6 e 12 respectivamente. Os múltiplos desses números são

$$\begin{array}{lcl} m(4) & = & \{0,\ 4,\ 8,\ \mathbf{12},\ 16,\ 20,\ \mathbf{24},\ 28,\ 32,\ \mathbf{36},\ 40,\ 44,\ \mathbf{48},\ 52,\ 56,\ \mathbf{60},\ \cdots\} \\ m(6) & = & \{0,\ 6,\ \mathbf{12},\ 18,\ \mathbf{24},\ 30,\ \mathbf{36},\ 42,\ \mathbf{48},\ 54,\ \mathbf{60},\ \cdots\} \\ m(12) & = & \{0,\ \mathbf{12},\ \mathbf{24},\ \mathbf{36},\ \mathbf{48},\ \mathbf{60},\ \cdots\} \end{array}$$

Perceba que o menor múltiplo comum entre esses números é o 12. Logo, o $mmc(4,\ 6,\ 12)$ é o número 12.

Veja outra solução pelo processo da decomposição simultânea.

Colocamos os números 4, 6 e 12 em uma linha e fazemos a divisão desses números pelo fator primo colocado na última coulna.

4	**6**	**12**	**2**
2	3	6	

Colocamos abaixo desses números o resultado da divisão deles pelo número colocado na última coluna. Se no resultado desta divisão ainda, assim, aparecer números que são divisíveis pelo mesmo fator primo, realizaremos a divisão destes resultados pelo mesmo fator primo. Quando não existe mais nenhum número no resultado da divisão mencionada anteriormente que seja divisível por este fator primo, repetiremos o processo anterior com o próximo fator primo.

4	**6**	**12**	**2**
2	3	6	**2**
1	3	3	**3**
1	1	1	

Para determinar o mínimo múltiplo comum basta multiplicarmos todos os fatores que se encontram na última coluna, ou seja, $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Portanto, $mmc(4,\ 6,\ 12) = 12$.

Agora, usando a proposição 2.3.3, daremos uma solução mais simplificada.

$$mmc(4,\ 6,\ 12) = mmc(4,\ mmc(6,\ 12)) = mmc(4,\ 12) = 12.$$

2.4 Números Primos

Nesta seção definiremos o conceito de número primo, um dos conceitos mais importante da Teoria dos Números. Assim como desenvolveremos alguns aspectos teóricos relativos a esse conceito capaz de dar solidez e consistência a essa teoria e enunciaremos o **Teorema Fundamental da Aritmética**.

Definição 2.4.1. *Um número natural p, $p > 1$, é chamado de número primo se os únicos divisores positivos de p é o próprio p e o número 1.*

Uma consequência imediata da definição acima é a seguinte afirmação: dados dois números primos p e q e um número inteiro a qualquer, temos

(i) Se $p \mid q$, então $p = q$.

(ii) Se $p \nmid a$, então $mdc(p, a) = 1$.

Demonstração:

(i) Como $p \mid q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que acarreta $p = q$.

(ii) Se $mdc(p, a) = d$, temos que $d \mid p$ e $d \mid a$. Portanto, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$ e, consequentemente, $d = 1$. ■

Um número inteiro maior que 1 e que não é primo será chamado de *número composto*.

Proposição 2.4.1. ***(Lema de Euclides)*** *Sejam $a,\ b,\ p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p \mid a \cdot b$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Demonstração: Dividiremos a demonstração em duas situações: $(p \mid a \cdot b)$ ou $(p \nmid a$ e $p \nmid b)$.

Se $p \mid a \cdot b$ e $p \nmid a$, então $p \mid b$. Como $p \mid a \cdot b$, então existe um número c tal que $a \cdot b = p \cdot c$. Mas $p \nmid a$, logo $mdc(p, a) = 1$ e portanto $p \mid b$.

Por outro lado, Se $p \mid a \cdot b$ e $p \nmid b$, então $p \mid a$. Como $p \mid a \cdot b$, então existe um número e tal que $a \cdot b = p \cdot e$. Mas $p \nmid b$, logo $mdc(p, b) = 1$ e portanto $p \mid a$. ■

Corolário 2.4.1. *Sejam p, $p_1, \cdots, p_n$ n números primos. Se $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \cdots, n$.*

Finalizaremos a seção com o Teorema Fundamental da Aritmética. Um teorema de conteúdo relevante no que diz respeito ao estudo dos números primos.

Teorema 2.4.1. ***(Teorema Fundamental da Aritmética)*** *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração: Usaremos o Princípio da Indução.

Se $n = 2$, o resultado é facilmente verificado, pois 2 é primo.

Suponha que a afirmação seja verdadeira para todo $2 \leqslant n < N$, ou seja, ou n é primo ou $n = p_i \cdot p_2 \cdots p_r$, onde p_i é primo e $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$.

Se N é primo, nada temos a demonstrar. Se N é um número composto, então existe $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $N = p \cdot q$, com $1 < p < N$ e $1 < q < N$. Portanto, pela hipótese de indução tem que existem números primos $p_1, p_2, \cdots, p_r$ e $q_1, q_2, \cdots, q_s$ tais que $p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$ e $q = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$. Portanto,

$$N = p \cdot q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s,$$

ou seja, N se decomponha como produto de números primos.

Mostraremos agora a unicidade da decomposição por indução. Para $n = 2$, é verdade. Suponha válida para todo m, com $2 \leqslant m < n$.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s \tag{2.4}$$

onde p_i, q_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ e $1 \leqslant i \leqslant s$ são números primos. Segue de 2.4 que $p_1 \mid q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$. Donde concluímos que $p_1 \mid q_j$ para algum $j \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Sem perda de generalidade, reordenando se necessário, tem-se que $p_1 = q_1$. Portanto

$$p_2 \cdot p_3 \cdots p_r = q_2 \cdot q_3 \cdots q_s.$$

Como

$$p_2 \cdot p_3 \cdots p_r = q_2 \cdot q_3 \cdots q_s$$

é menor que n, tem-se pela hipótese de indução, que $r = s$. Novamente, invocando o corolário 2.4.1, concluímos que p_i e q_j são iguais aos pares e, portanto, reordenando se necessário, que $p_2 = q_2, \cdots, p_r = q_s$. ∎

Convém observar que estávamos usando o Princípio da Indução Finita em um conteúdo matemático da álgebra (divisibilidade). Isso nos mostra que os conteúdos matemáticos não são completamente independentes, quase sempre as ferramentas matemáticas utilizadas permeiam os vários ramos da Matemática. O Princípio da Indução Finita é uma dessas ferramentas, um instrumento bastante eficaz na demonstração de várias afirmações matemáticas em diversas áreas.

Teorema 2.4.2. *Dado um número inteiro $n \neq 0,\ 1,\ -1$, existem primos $p_1 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, univocamente determinados, tais que*

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Proposição 2.4.2. *Sejam $p_1, \cdots, p_r$ números primos e $n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ um número natural escrito nesta forma. Se n' é um divisor positivo de n, então*

$$n' = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r},$$

onde $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$, para $i = 1, \cdots, r$.

Demonstração: Seja n' um divisor de n e seja p^β a potência de um primo p que faz parte da decomposção de n' em fatores primos. Como $p^\beta \mid n$, segue que p^β divide algum $p_i^{\alpha_i}$, para algum $i \in \{1, \cdots, r\}$. Consequentemente, $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha_i$. Por outro lado, por ser primo com os demais $p_j^{\alpha_j},\ j \neq i,\ j \in \{1,\ 2, \cdots, r\}$, segue-se que $p = p_i$. ∎

Teorema 2.4.3. *Sejam $a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ e $b = \pm p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}$, com p_i primo, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

$$\gamma_i = min\{\alpha_i,\ \beta_i\} \text{ e } \delta_i = max\{\alpha_i,\ \beta_i\},\ i = 1, \cdots, n,$$

tem-se que

$$mdc(a,\ b) = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_n^{\gamma_n} \text{ e } mmc(a,\ b) = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdots p_n^{\delta_n}.$$

Demonstração: Note que o número $p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_n^{\gamma_n}$ é um divisor comum de a e b; logo, $c = \pm p_1^{\varepsilon_1} \cdot p_2^{\varepsilon_2} \cdots p_r^{\varepsilon_r}$, onde $\varepsilon_i \leqslant min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e, portanto, $c \mid p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdots p_n^{\gamma_n}$.

Note também que o número $p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdots p_n^{\delta_n}$ é um múltiplo comum de a e b. Seja m um múltiplo comum de a e b; logo, $m = \pm p_1^{\varpi_1} \cdot p_2^{\varpi_2} \cdots p_r^{\varpi_r}$, onde $\varpi_i \geqslant max\{\alpha_i,\ \beta_i\}$ e, portanto, $m = p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdots p_n^{\delta_n} \cdot q$. ■

2.5 Aritmética dos Restos e Suas Aplicações

Nesta seção introduziremos o conceito de congruência modular. Esse conceito é uma ferramenta muito útil para trabalharmos com divisibilidade. Acrescentaremos também, alguns conceitos de divisibilidade.

Definição 2.5.1. *Se a, b e m são números inteiros, com $m > 0$, dizemos que a é congruente a b módulo m, se $m \mid (a - b)$. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escrevemos*

$$a \equiv b\ (mod\ m).$$

Quando a relação $a \equiv b\ (mod\ m)$ for falsa, diremos que a e b *não são congruentes*, ou que são *incongruentes*, módulo m. Escreveremos, nesse caso, $a \not\equiv b\ (mod\ m)$.

Um exemplo simples que podemos citar é que $18 \equiv 3\ (mod\ 5)$, pois $5 \mid (18 - 3)$. Assim como, podemos falar que $30 \not\equiv 25\ (mod\ 4)$, pois $4 \nmid (30 - 25)$.

Como o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 é sempre nulo, temos que $a \equiv b\ (mod\ 1)$, quaisquer que sejam a e $b \in \mathbb{Z}$. Salientamos que a congruência módulo 1 não acrescenta substancialmente nada a aritmética. E por esta razão, iremos considerar sempre $m > 1$.

Decorre imediatamente da definição, que a congruência módulo m, com m fixo, é uma relação de equivalência. Mostraremos esse fato a seguir.

Proposição 2.5.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$, tem-se que*

(i) $a \equiv a\ (mod\ m)$,

(ii) Se $a \equiv b\ (mod\ m)$, *então* $b \equiv a\ (mod\ m)$,

(iii) Se $a \equiv b\ (mod\ m)$ *e* $b \equiv c\ (mod\ m)$, *então* $a \equiv c\ (mod\ m)$.

Demonstração:

(i) Basta observar que $m \mid a - a = 0$.

(ii) Se $m \mid a - b$, então $m \mid -(a - b)$. Donde, segue que $m \mid b - a$.

(iii) Se $m \mid a - b$ e $m \mid b - c$, então $m \mid (a - b) + (b - c)$. Segue, daí, que $m \mid a - c$. ■

Para verificar se dois números são congruentes módulo m, não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos. É suficiente, apenas, aplicar o seguinte resultado:

Proposição 2.5.2. *Suponha que a, $b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \ (mod\ m)$ se e somente se, $m \mid (b - a)$.*

Demonstração: Sejam $a = m \cdot q + r$, com $0 \leqslant r < m$ e $b = m \cdot q' + r'$, com $0 \leqslant r' < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$b - a = m \cdot (q' - q) + (r' - r).$$

Portanto, $a \equiv b \ (mod\ m)$ se, e somente se, $r = r'$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m \mid (b - a)$, já que $|r - r'| < m$. ■

O que torna útil e poderosa a noção de congruência é o fato de ser uma relação de equivalência compatível com as operações de adição e multiplicação nos inteiros, conforme veremos na proposição a seguir.

Proposição 2.5.3. *Sejam a, b, c, d, $m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.*

(i) Se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$, então $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$.

(ii) Se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $\equiv d \ (mod\ m)$, então $a \cdot c \equiv b \cdot d \ (mod\ m)$.

Demonstração: Suponhamos que $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$. Logo, temos que $m \mid (b - a)$ e $m \mid (d - c)$.

Para mostrar (i), basta observar que $m \mid (b-a)+(d-c)$ e, portanto, $m \mid (b+d)-(a+c)$. Provando, dessa forma (i).

Na prova de (ii), basta observar que $b \cdot d - a \cdot c = d \cdot (b - a) + a \cdot (d - c)$ e concluir que $m \mid b \cdot d - a \cdot c$. ■

Corolário 2.5.1. *Para todos $n \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \ (mod\ m)$, então tem-se que $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$.*

Demonstração: Faremos a demonstração desse corolário usando a indução sobre n. Note que trivialmente a relação é válida para $n = 1$, pois

$$a \equiv b \ (mod \ m).$$

Suponha, por indução, que $a^n \equiv b^n \ (mod \ m)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que a congruência é válida para $n + 1$, ou seja,

$$a^{n+1} \equiv b^{n+1} \ (mod \ m).$$

Temos que $a \equiv b \ (mod \ m)$ e pela hipótese de indução $a^n \equiv b^n \ (mod \ m)$. Portanto, pela proposição 2.5.3, temos que

$$a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \ (mod \ m).$$

Daí, $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \ (mod \ m)$. Portanto, por indução, concluímos que $a^n \equiv b^n \ (mod \ m)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Com a notação de congruências, o Pequeno Teorema de Fermat[1] enuncia-se como se segue:

Se p é primo e $a \in \mathbb{Z}$, então

$$a^p \equiv a \ (mod \ p).$$

Além disso, se $p \nmid a$, então

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod \ p).$$

Proposição 2.5.4. *Sejam* $a, \ b, c, \ m \in \mathbb{Z}$, *com* $m > 1$. *Então,*

$$a + c \equiv b + c \ (mod \ m) \Leftrightarrow a \equiv b \ (mod \ m).$$

Demonstração: Se $a \equiv b \ (mod \ m)$, segue imediatamente da proposição 2.5.3, que $a + c \equiv b + c \ (mod \ m)$, pois $c \equiv c \ (mod \ m)$.

Reciprocamente, se $a + c \equiv b + c \ (mod \ m)$, então $m \mid (b + c) - (a + c)$, o que implica que $m \mid (b - a)$ e, consequentemente, $a \equiv b \ (mod \ m)$. ■

A proposição acima nos diz que, para as congruências, vale o cancelamento com relação à adição. entretanto, não vale, em geral, o cancelamento para a multiplicação, como

[1]Pierre de Fermat, nascido na primeira de década do século $XVII$, foi um matemático e cientista francês.

se pode verificar no exemplo a seguir. Como $6 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 24$ e $8 \mid 24$, temos que $6 \cdot 9 \equiv 6 \cdot 5 \ (mod\ 8)$, e, no entanto, $9 \nmid 5 \ (mod\ 8)$.

No entanto, daremos a seguir um resultado relacionado com o cancelamento multiplicativo.

Proposição 2.5.5. *Sejam $a,\ b,\ c,\ m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Temos que*

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \ (mod\ m) \Leftrightarrow a \equiv b \left(mod\ \frac{m}{mdc(c,\ m)} \right).$$

Demonstração: temos, pelo corolário 2.3.2, que $\frac{m}{mdc(c, m)}$ e $\frac{c}{mdc(c, m)}$ são coprimos e por hipótese que

$$a \cdot c \equiv b \cdot c \ (mod\ m).$$

Pela proposição 2.5.1, podemos observar que

$$m \mid (b - a) \cdot c,$$

sendo que pela definição 2.1.1, temos que

$$m = (b - a) \cdot c \cdot k,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Dividindo ambos os membros da igualdade por $mdc(c,\ m)$, obtemos

$$\frac{m}{mdc(c,\ m)} = \frac{(b - a) \cdot c}{mdc(c,\ m)} \cdot k,$$

o que implica dizer que

$$\frac{m}{mdc(c,\ m)} \mid \frac{(b - a) \cdot c}{mdc(c,\ m)}.$$

Como já foi observado no início da demonstração que $\frac{m}{mdc(c,\ m)}$ e $\frac{c}{mdc(c,\ m)}$ são coprimos, pelo corolário 2.3.2, segue que

$$\frac{m}{mdc(c,\ m)} \mid (b - a).$$

Donde,

$$a \equiv b \left(mod\ \frac{m}{mdc(c,\ m)} \right).$$

Reciprocamente, se

$$a \equiv b \left(mod \ \frac{m}{mdc(c,\ m)}\right),$$

temos pela definição 2.1.1 e proposição 2.5.1 que

$$\frac{m}{mdc(c,\ m)} \mid (b-a),$$

ou seja,

$$\frac{m}{mdc(c,\ m)} = (b-a) \cdot \frac{c}{mdc(c,\ m)} \cdot k,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$, pois $\frac{m}{mdc(c,\ m)}$ e $\frac{c}{mdc(c,\ m)}$, pelo corolário 2.3.2, são primos entre si.

Logo,

$$m = (b-a) \cdot c \cdot k,$$

e, portanto,

$$m \mid (b-a) \cdot c.$$

Donde, segue que

$$a \cdot c \equiv b \ (mod \ m)$$

■

Segue, agora, alguns critérios de divisibilidade. Primeiro, veremos o critério de divisibilidade por 5 ou 10.

Proposição 2.5.6. *Seja a um número inteiro, cuja representação no sistema decimal é $r_n r_{n-1} \cdots r_1 r_0$. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 5 (respectivamente por 10) é que r_0 seja 0 ou 5 (respectivamente 0).*

Demonstração: Sendo $a = 10 \cdot (r_n \cdots r_1) + r_0$, temos que a é divisível por 5 se, e somente se, r_0 é divisível por 5, e, portanto, $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$. Por outro lado, a é divisível por 10 se, e só se, r_0 é divisível por 10, o que somente ocorre quando $r_0 = 0$. ■

Agora, veremos o critério de divisibilidade por 3 ou 9.

Proposição 2.5.7. *Seja a um número inteiro, cuja representação no sistema decimal é $r_n r_{n-1} \cdots r_1 r_0$. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 3 (respectivamente por 9) é que $r_n + \cdots + r_1 + r_0$ seja divisível por 3 (respectivamente por 9).*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} a-(r_n+\cdots+r_1+r_0) &= r_n\cdot 10^n+\cdots+r_1\cdot 10+r_0-(r_n+\cdots+r_1+r_0)\\ &= r_n\cdot(10^n-1)+\cdots+r_1\cdot(10-1). \end{aligned}$$

Como o termo à direita na igualdade acima é divisível por 9, temos que

$$a=(r_n+\cdots+r_1+r_0)+9q,$$

para algum $q\in\mathbb{Z}$. De onde segue o resultado. ■

Agora, vejamos o critério de divisibilidade por 11.

Proposição 2.5.8. *Seja a um número inteiro, cuja representação no sistema decimal é $r_nr_{n-1}\cdots r_1r_0$. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 11 é que $r_0-r_1+r_2-r_3+\cdots+r_n$ seja divisível por 11.*

Demonstração: Usando a notação de congruência, é fácil observar que $10\equiv -1\ (mod\ 11)$, e também que $10^{2k}\equiv 1\ (mod\ 11)$ e $10^{2k-1}\equiv -1\ (mod\ 11)$, com $k\in\mathbb{N}$. Seja $a=r_n\cdots r_1r_0$ um número escrito no sistema decimal. Temos, então que

$$\begin{array}{lcrl} r_0 & \equiv & r_0 & (mod\ 11)\\ r_1\cdot 10 & \equiv & -r_1 & (mod\ 11)\\ r_2\cdot 10^2 & \equiv & r_2 & (mod\ 11)\\ \vdots & & \vdots & \\ r_{2k-1}\cdot 10^{2k-1} & \equiv & -r_{2k-1} & (mod\ 11)\\ r_{2k}\cdot 10^{2k} & \equiv & r_{2k} & (mod\ 11) \end{array}$$

Somando membro a membro, as congruências acima, temos que

$$a\equiv r_0-r_1+r_2-r_3+\cdots-r_{2k-1}+r_{2k}\ (mod\ 11).$$

Portanto, a é divisível por 11 se, e somente se, o número

$$a_0-a_1+\cdots-a_{2k-1}+a_{2k}$$

é divisível por 11. ■

Problemas

1. Para cada par de números inteiros a e b dados abaixo, ache $mdc\ (a,\ b)$ e determine números inteiros m e n tais que $mdc\ (a,\ b) = ma + nb$.
   (a) 637 e 3 887
   (b) 648 e 1 218
   (c) 551 e 874
   (d) 7 325 e 8 485.
2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que
   (a) $mdc\ (n,\ 2n + 1) = 1$;
   (b) $mdc\ (n + 1,\ n^2 + n + 1) = 1$;
   (c) $mdc\ (2n + 1,\ 9n + 4) = 1$;
   (d) $mdc\ (n! + 1,\ (n + 1)! + 1) = 1$.
3. Mostre que todo quadrado perfeito:
   (a) deixa resto 0 ou 1 quando dividido por 3;
   (b) deixa resto 0 ou 1 quando dividido po 4;
   (c) deixa resto 0, 1 ou 4 quando dividido por 8.
4. Dados inteiros a_1, a_2 e b, sendo b não nulo, mostre que $b \mid (a_1 - a_2)$ se, e só se, a_1 e a_2 deixam restos iguais na divisão por b.
5. Mostre que o último algarismo de um quadrado perfeito só pode ser 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
6. (Hungria) Para $n \in \mathbb{N}$, prove que o número $8^n - 3^n - 6^n + 1^n$ é um múltiplo de 10.
7. (Hungria) Prove que 5 divide $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$.
8. Mostre que $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} + \cdots + 100^{10}$ é divisível por 101.
9. Encontre o resto que é deixado quando
   (a) $2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004 + 2005^2$ é dividido por 7;
   (b) 2^{100} é dividido por 3;

10. Prove que $(999994)^{2468} - 1$ é divisível por 333331.

11. Encontre o último dígito dos números

    (a) 1989^{2015}

    (b) $777^{777} + 2^{50}$

    (c) $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2015^2$

    (d) 2014^{2014}

    (e) 2015^{2015}

12. Dados oito números inteiros, mostre que existem dois deles cuja diferença é divisível por sete.

13. Encontre o resto da divisão de

    (a) $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ por 7;

    (b) 9^{100} por 8;

    (c) $2014^2 + 2015^2$ por 7.

14. Prove que $n^5 + 4n$ é divisível por 5 qualquer que seja o inteiro n.

15. Prove que $n^3 - n$ é divisível por 24 qualquer que seja o inteiro ímpar n. **Dica.** Prove que o número dado é múltiplo tanto de 2^3 quanto de 3.

16. Encontre o resto da divisão do número 3^{2015} por 7.

17. Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

18. Determine o valor de:

    (a) $25^2 - 24^2$;

    (b) $1975^2 - 1974^2$;

    (c) $555555^2 - 444444^2$;

    (d) $(n + 1)^2 - n^2$.

19. Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$, qual número encontraria no algarismo das unidades?

20. Encontre o produto

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{225}\right).$$

21. Quantos zeros existem no final do número $9^{2015}+1$?

22. Existe um número de 8 algarismos da forma

$$9999****$$

que é um quadrado perfeito?

23. Qual o menor número inteiro positivo n tal que

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0,01?$$

24. Mostre que se o produto $N=(n+6m)\cdot(2n+5m)\cdot(3n+4m)$ é múltiplo de 7, com m e n números naturais, então N é múltiplo de $7^3=343$.

25. Seja a um número inteiro positivo tal que a é múltiplo de 5, $a+1$ é múltiplo de 7, $a+2$ é múltiplo de 9 e $a+3$ é múlitplo de 11. Determine o menor valor que a pode assumir.

26. Determine todos os números naturais m e n tais que

$$2^8+2^{11}+2^m=n^2.$$

27. O número $3^{444}+4^{333}$ é divisível por 5?

28. Quais os cubos perfeitos que dividem 9^4?

29. **(ENQ 2015.1)** Sejam a, b e c inteiros tais que $a^3+b^3+c^3$ é divisível por 9. Mostre que pelo menos um dos inteiros a, b ou c é divisível por 3.

30. **(ENQ 2014.1)** O máximo divisor comum de dois inteiros positivos é 20. Para se chegar a esse resultado pelo processo das divisões sucessivas, os quocientes encontrados foram, pela ordem, 1, 5, 3, 3, 1 e 3. Encontre os dois números.

Capítulo 3

Alguns Tópicos de Geometria Euclidiana

3.1 Congruência de Triângulos

Veremos alguns casos onde serão analisados as condições necessárias e suficientes para que tenhamos dois triângulos sendo considerados "iguais". Veremos, também, algumas consequências interessantes desses conjuntos de condições, como a desigualdade triangular e os vários tipos de quadriláteros notáveis [7].

A seguir, definiremos ângulo. Iremos utilizar essa definição em algumas situações.

Definição 3.1.1. *Dadas, no plano, duas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*, um* ***ângulo*** *de vértice* O *e lados* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*.*

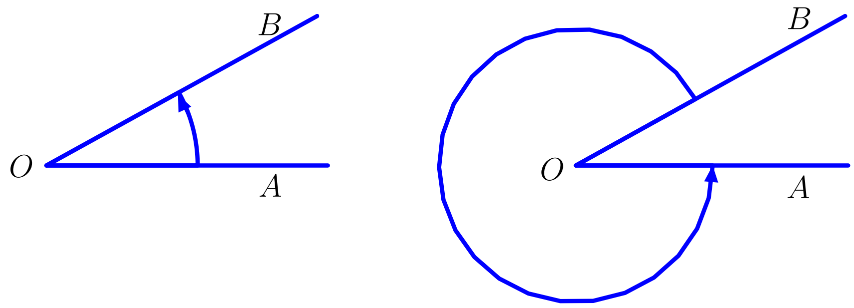


Figura 3.1: ângulos no plano.

Um ângulo pode ser convexo ou não convexo. Na figura 3.1, o ângulo da esquerda é convexo, ao passo que o da direita é não convexo. Denotamos um ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$

e $\overrightarrow{OB}$ escrevendo $\widehat{AOB}$. O contexto deixará claro se estamos nos referindo ao ângulo convexo ou ao não convexo.

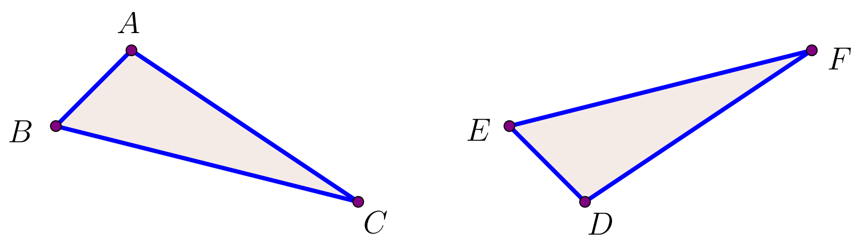
Definição 3.1.2. *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando esses segmentos possuem a mesma medida, ou seja, $AB = CD$. Diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida.*

Observe que, com esta definição, as propriedades da igualdade de números passa a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Como consequência, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si. O mesmo valendo para ângulos.

Usaremos o símbolo de igualdade para representar a congruência entre dois objetos. Assim, $AB = CD$ deve ser lido como *AB é congruente a CD* e $\widehat{A} = \widehat{B}$ deve ser lido como *ângulo A é congruente ao ângulo B.*

Definição 3.1.3. *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Suponha que os triângulos ABC e DEF da figura abaixo sejam congruentes.



Suponha que a correspondência abaixo

$$\begin{array}{ccc} A & \leftrightarrow & D \\ B & \leftrightarrow & E \\ C & \leftrightarrow & F \end{array}$$

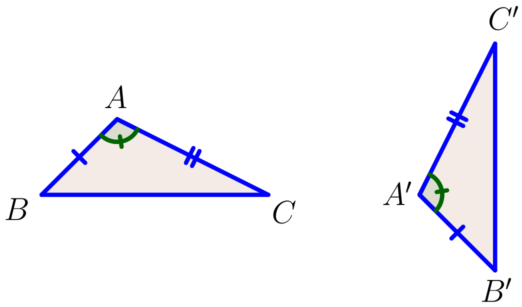
define a congruência entre os triângulos ABC e DEF. Então valem, simultâneamente, as seguintes relações:

$$\begin{array}{rclrclrcl} AB & = & DE; & BC & = & EF; & AC & = & DF; \\ \widehat{C} & = & \widehat{F}; & \widehat{A} & = & \widehat{D}; & \widehat{B} & = & \widehat{E}. \end{array}$$

Nesta seção, enunciaremos os principais resultados de congruência de triângulos necessários para atacar diversos problemas relacionados a geometria euclidiana.

Axioma 3.1.1. *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

Este axioma é conhecido como o caso de congruência **lado, ângulo, lado (LAL)**. Ele é de fácil compreensão e sua aceitação se dar por argumentos puramente geométricos. Se, de alguma forma, movermos de forma rígida a figura do triângulo ABC conseguiremos sobrepor a figura sobre o outro triângulo.



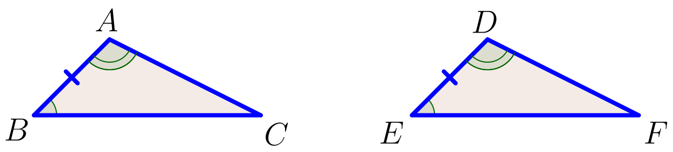
Simbolicamente, traduziremos o caso de congruência em questão da seguinte forma: Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$, dizemos que os triângulos em questão são congruentes.

A partir desse axioma, provaremos outros casos de congruência de triângulos. Os dois próximos resultados tratarão dos casos **ângulo, lado, ângulo (ALA)** e **lado, lado, lado (LLL)**.

Teorema 3.1.1. ***(Caso ALA)*** *Dados dois triângulos quaisquer ABC e DEF, se temos $\widehat{A} = \widehat{D}, AB = DE$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF, satisfazendo as hipóteses do teorema, ou seja, $\widehat{A} = \widehat{D}, AB = DE$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$.

A técnica empregada aqui é idêntica a usada na proposição anterior. Iremos provar que esses triângulos admitem outro lado idêntico. Comparando AC com DF, teremos três posibilidades:



(i) $AC = DF$;

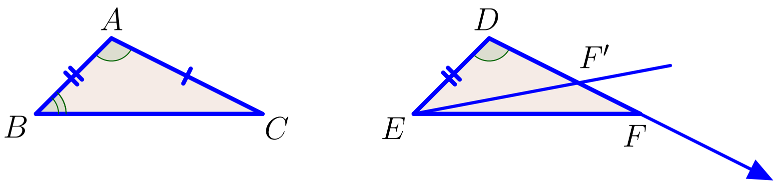
(ii) $AC < DF$;

(iii) $AC > DF$.

Note que, se ocorre (i), nada mais temos a demonstrar. O resultado segue, então, do axioma 3.1.1, ou seja,

$$\Delta ABC = \Delta DEF.$$

Se ocorre (ii), tome um ponto F' na semirreta $\overrightarrow{DF}$ tal que $DF' = AC$ e considere o triângulo DEF'. Veja figura abaixo.



Portanto, pelo axioma 3.1.1, obtemos que:

$$\Delta ABC = \Delta DEF',$$

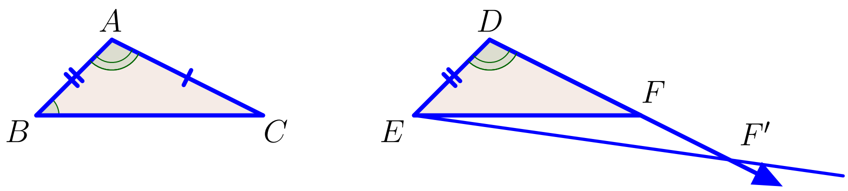
uma vez que $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $AC = DF'$.

Dessa forma, $\widehat{F'} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{DEF'}$. Por outro lado,

$$\widehat{E} = \widehat{DEF'} + \widehat{F'EF}.$$

Donde concluímos que $\widehat{F'EF} = 0$ e, portanto, uma contradição, pois $F'EF > 0$. Logo, não pode ocorrer (ii).

Se ocorrer (iii), tome F' na semirreta $\overrightarrow{DF}$ tal que $DF' = AC$.



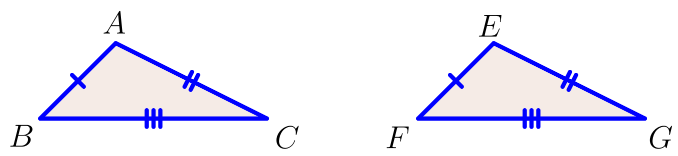
Como $AB = DE$, $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $AC = DF'$, por construção, segue-se pelo axioma 3.1.1, que:

$$\Delta ABC = \Delta DEF'.$$

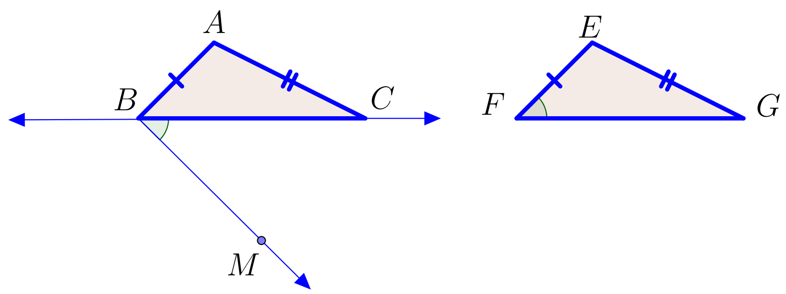
Consequentemente, $\widehat{B} = \widehat{DEF'}$. Como, por hipotese, $\widehat{B} = \widehat{E}$, segue-se que $\widehat{E} = \widehat{DEF'}$. Donde concluímos que $\widehat{FEF'} = 0$ e, portanto, uma contradição, com o fato de $\widehat{FEF'} > 0$. Assim, (iii) também não pode ocorrer. ■

Teorema 3.1.2. ***(Caso LLL)*** *Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

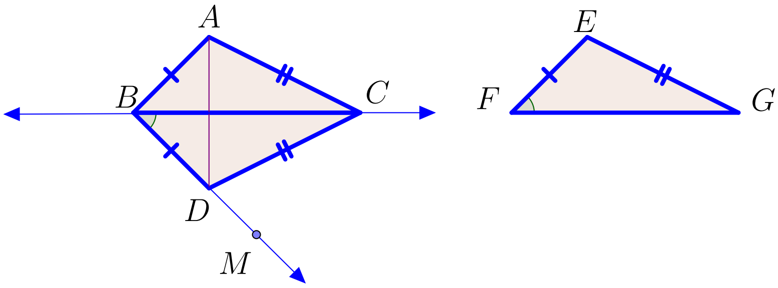
Demonstração: Considere os triângulos ΔABC e ΔEFG, tais que, temos os segmentos $AB = EF$, $BC = FG$ e $AC = EG$.



Trace a semirreta $\overrightarrow{BM}$ no semi-plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ de tal forma que o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BM}$ seja igual ao ângulo $\widehat{F}$.



Na semirreta $\overrightarrow{BM}$ marque um ponto D tal que $BD = EF$.



Dessa forma, temos que

$$\Delta DBC = \Delta EFG \tag{3.1}$$

uma vez que $\widehat{CBD} = \widehat{F}$, $BD = EF$ e $BC = FG$.

Observe que de 3.1 tem-se necessariamente que $DC = EG$. Portanto, os triângulos ABD e ACD são isósceles. Logo, $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$ e $\widehat{ADC} = \widehat{DAC}$. Donde, concluímos que

$$\widehat{A} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{BDA} + \widehat{ADC} = \widehat{D},$$

ou seja,

$$\widehat{A} = \widehat{D}.$$

Portanto, $\Delta ABC = \Delta DBC$, uma vez que $\widehat{A} = \widehat{D}$, $AB = BD$ e $AC = DC$. Então,

$$\Delta ABC = \Delta DBC \overset{3.1}{=} \Delta EFG.$$

Consequentemente, obtemos que

$$\Delta ABC = \Delta EFG.$$

■

3.2 Algumas Aplicações de Congruência

Nesta seção nos deteremos em algumas aplicações de nosso interesse, onde a congruência de triângulos é a ferramenta utilizada na solução destas aplicações.

Definição 3.2.1. *Dado um ângulo $\widehat{AOB}$, a* ***bissetriz*** *de $\widehat{AOB}$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos ainda que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $\widehat{AOB}$.*

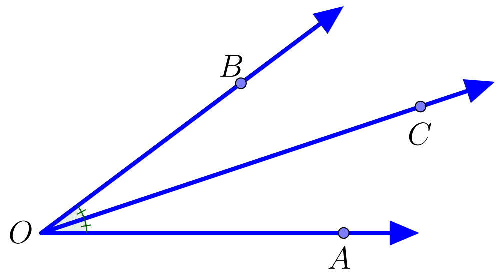
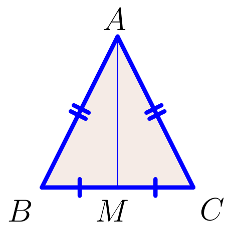


Figura 3.2: bissetriz OC

Proposição 3.2.1. *Se ABC é um triângulo isósceles em base BC, então os ângulos da base são iguais, ou seja, $\widehat{B} = \widehat{C}$.*

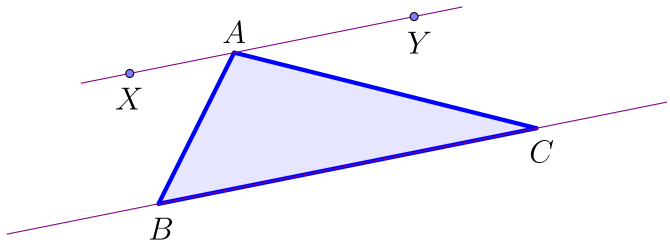
Demonstração: No triângulo ABC tem-se que o lado BC é base do triângulo isósceles e $AB = AC$. Seja M o ponto médio de base BC.



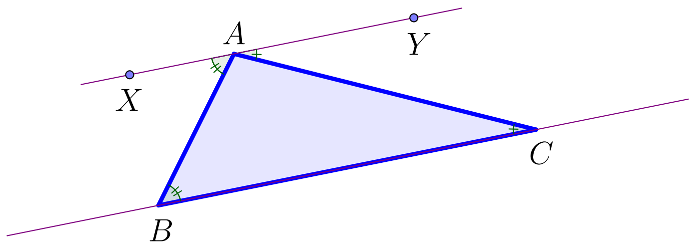
Considere então, os triângulos AMB e AMC. Como AM é lado comum dos dois triângulos, $AB = AC$ e $BM = CM$, o Teorema 3.1.2 nos garante que os triângulos AMB e AMC são congruentes . Donde concluímos que $\widehat{B} = \widehat{C}$. ■

Proposição 3.2.2. *Dado um triângulo ABC, a soma dos ângulos internos desse triângulo é $180°$, ou seja, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC, seja $\overleftrightarrow{XY}$ a reta passando pelo vértice A e paralela à reta que contem o lado BC.



Desta forma, como $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{XY}$, temos que os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{B}$ são, respectivamente, iguais aos ângulos $\widehat{YAC}$ e $\widehat{XAB}$, uma vez que são alternos internos. Assim teremos a situação representada na figura abaixo.



Por outro lado o ângulo $\widehat{XAY}$ é um ângulo raso e, portanto,

$$\widehat{XAB} + \widehat{A} + \widehat{YAC} = 180°.$$

Assim sendo, temos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°.$$

■

Corolário 3.2.1. *Se um triângulo é equilátero, então os ângulos internos desse triângulo são todos iguais a* $60°$.

Antes de iniciarmos o próximo corolário, faz-se necessário definirmos o ângulo externo de um triângulo.

Definição 3.2.2. *Ângulo externo de um triângulo é aquele que é adjacente e suplementar a um dos seus ângulos internos. Na figura 3.3, o ângulo* $\widehat{ACX}$ *é um ângulo externo do triângulo* ABC.

Corolário 3.2.2. *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

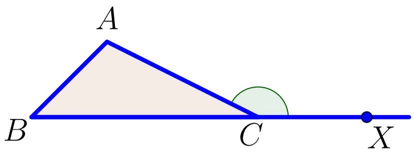
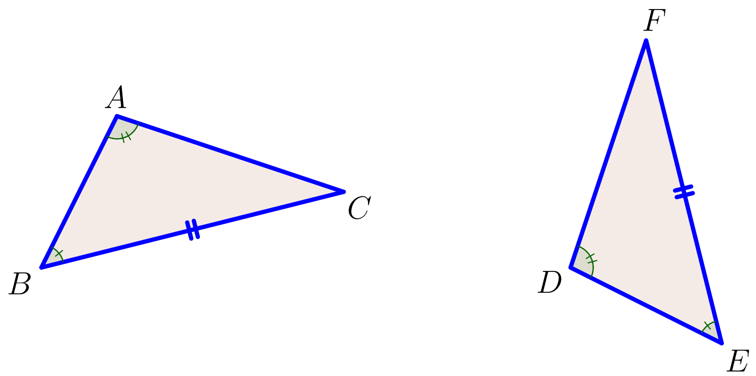


Figura 3.3: Ângulo externo de um triângulo.

Demonstração: Basta observar a figura 3.3, e que a proposição 3.2.2 nos garante que $\widehat{ACX} = 180° - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$. ■

Corolário 3.2.3. *Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

Demonstração: Considere os triângulos ABC e DEF onde $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $BC = EF$.



Pela proposição 3.2.2, temos que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \Rightarrow \widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B}. \tag{3.2}$$

Por hipótese, temos que $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$. Usando esse fato na equação 3.2, obtemos que $\widehat{C} = 180° - \widehat{D} - \widehat{E}$.

Dessa forma, obtemos que $\widehat{C} = \widehat{F}$.

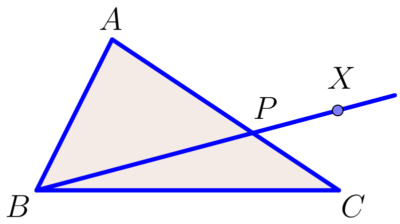
Portanto, temos que $\widehat{A} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{F}$ e $BC = EF$. Assim, o teorema 3.1.1 nos garante que os triângulos ABC e DEF são congruentes ■

3.3 A Desigualdade Triangular

Nesta seção iremos mostrar que, em todo triângulo, os comprimentos dos lados guardam uma certa relação, conhecida como **desigualdade triangular**. Começaremos estabelecendo uma relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos a eles opostos.

Proposição 3.3.1. *Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{B} > \widehat{C}$, então $AC > AB$.*

Demonstração: Como $\widehat{B} - \widehat{C} > 0$, podemos traçar a semirreta $\overrightarrow{BX}$, intersectando o interior de ABC e tal que $\widehat{CBX} = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right)$.



Observe que o ângulo $\widehat{APB}$ é um ângulo externo do triângulo BPC. Sendo assim, o corolário 3.2.2 nos garante que

$$\widehat{APB} = \widehat{CBP} + \widehat{C} = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right) + \widehat{C} = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right).$$

Mas, como

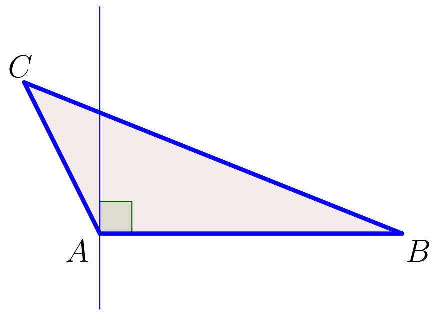
$$\widehat{ABP} = \widehat{B} - \frac{1}{2}\left(\widehat{B} - \widehat{C}\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right),$$

segue que o triângulo ABP é isósceles de base BP. Portanto,

$$AB = AP < AC.$$

■

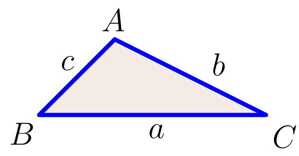
Corolário 3.3.1. *Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{A} \geqslant 90°$, então BC é seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo a hipotenusa é o maior lado.*



Demonstração: Basta observar que, se $\widehat{A} \geqslant 90°$, então $\widehat{A}$ é o maior ângulo do triângulo ABC, de modo que BC é, pela proposição 3.3.1, o maior lado. ∎

Proposição 3.3.2. *(**Desigualdade triangular**) Em todo triângulo, cada lado tem um comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração: Considere um triângulo ABC, tal que $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$.



Mostraremos que $a < b+c$, sendo a demonstração das demais desigualdades totalmente análoga. Escolha um ponto D na semireta CA tal que $CD > CA$ e $AD = AB$. Observe que por construção o triângulo ABD é isósceles e, portanto, os ângulos $\widehat{D}$ e $\widehat{ABD}$ são congruentes.

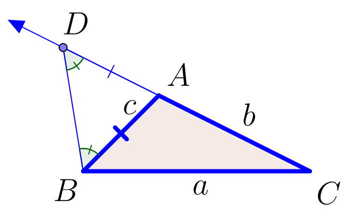


Figura 3.4: Desigualdade triangular

Perceba que, por construção, $CD = AC + AD = b + c$. No triângulo BCD na figura 3.4, observamos que $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = \widehat{CBA} + \widehat{D}$, pois $\widehat{D} = \widehat{ABD}$. Portanto $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} < \widehat{CBD}$. ∎

Vejamos um exemplo para ilustrar a desigualdade triangular.

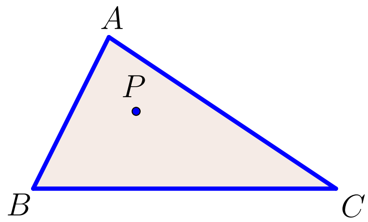
Exemplo 3.3.1. *Se P é um ponto situado no interior de um triângulo ABC, então:*

a) $PB + PC < AB + AC$.

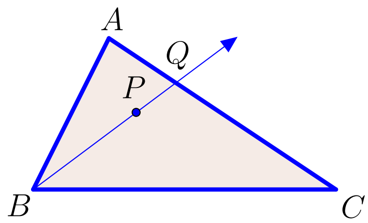
b) $PA + PB + PC < AB + AC + BC$.

Analise uma solução

a) Considere P um ponto qualquer no interior do triângulo ABC.



Prolongue a semirreta $\overrightarrow{BP}$ até que a mesma encontre o lado AC no ponto Q.



Aplicando a desigualdade triangular no triângulo CPQ, obtemos a desigualdade

$$PC < PQ + QC.$$

Somando-se PB a ambos membros dessa desigualdade teremos o seguinte

$$PB + PC < PB + (PQ + QC) = BQ + QC \tag{3.3}$$

Usando a desigualdade triangular no triângulo ABQ obtemos que $BQ < AB + AQ$. Essa informação juntamente com a equação 3.3 produz a seguinte desigualdade

$$PB + PC < AB + AQ + QC.$$

Por outro lado, $AQ + QC = AC$ e, portanto

$$PB + PC < AB + AC.$$

b) Vimos no item anterior que $PB+PC < AB+AC$. De maneira inteiramente análoga obtemos as seguintes desigualdades:

$$PA + PB < AC + BC$$

e

$$PA + PC < AB + BC$$

Somando-se ordenadamente essas três desigualdades, obtemos:

$$PA + PB + PA + PC + PB + PC < AC + BC + AB + BC + AB + AC.$$

Donde segue-se que:

$$2 \cdot (PA + PB + PC) < 2 \cdot (AB + AC + BC),$$

ou seja,

$$(PA + PB + PC) < (AB + AC + BC).$$

■

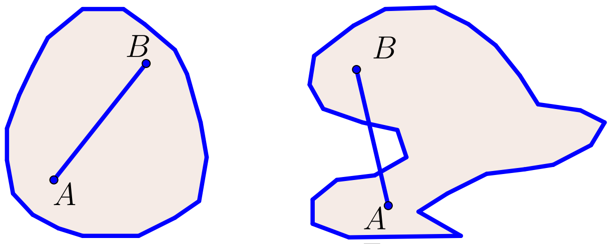
3.4 Quadriláteros Notáveis

Nesta seção iremos estudar alguns dos quadriláteros notáveis. Mostraremos a definição de *paralelogramo* e algumas proposições envolvendo esse quadrilátero. Depois definiremos *trapézio*, *retângulo* e *losango*. Esse é um tópico bem interessante pela necessidade de definirmos precisamente esses quadriláteros, para não confundirmos as características entre eles.

De acordo com a proposta que está sendo fornecida para o leitor, definiremos conjunto convexo, polígono e polígono convexo para um melhor entendimento dos quadriláteros que definiremos a seguir.

Definição 3.4.1. *Uma região no plano chama-se convexo se, quaisquer que sejam dois pontos distintos desse conjunto, o segmento que tem esses pontos por extremidades está contido nesse conjunto.*

Observe que a figura 1 mostra um conjunto convexo e a figura 2 mostra um conjunto não convexo.



$Figura1$ $Figura2$

Definição 3.4.2. *Consideremos um número n $(n \geqslant 3)$ de pontos ordenados $A_1,\ A_2, \cdots,\ A_n$ de modo que três pontos consecutivos sejam não colineares e consideremos os segmentos consecutivos $A_1A_2,\ A_2A_3, \cdots, A_nA_1$. Denomina-se polígono a figura constituída pelos pontos dos n segmentos consecutivos.*

Definiremos, agora, polígono convexo. Dessa forma, iniciaremos a próxima seção com o conhecimento necessário para o desenvolvimento dos conceitos sobre quadriláteros.

Definição 3.4.3. *Denomina-se polígono convexo para aquele polígono cujo interior é um conjunto convexo.*

Na figura 1 temos um polígono convexo e na figura 2 temos um polígono não convexo.

Figura 1 *Figura 2*

3.4.1 Paralelogramo

Definição 3.4.4. *Um paralelogramo é um quadrilátero convexo que possui lados opostos paralelos.*

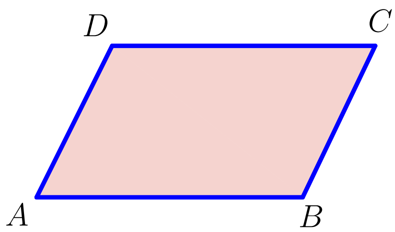
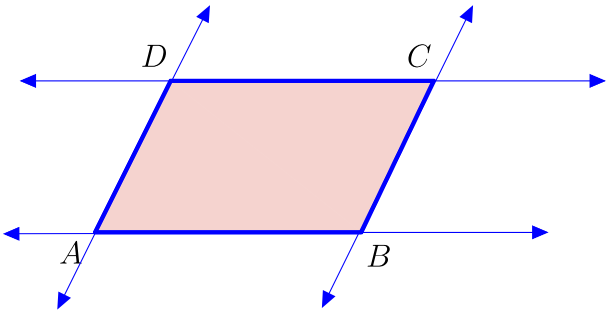


Figura 3.5: Paralelogramo $ABCD$

Proposição 3.4.1. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus ângulos opostos forem iguais.*

Demonstração: Suponha, primeiro, que o quadrilátero convexo $ABCD$ na figura 3.6 é um paralelogramo.



Então $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e, como os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ do paralelogramo são colaterais internos em relação à transversal $\overleftrightarrow{AB}$, temos $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$. Por outro lado, as retas AB e DC são paralelas e, portanto, temos que os ângulos $\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$ e $\widehat{D} + \widehat{C} = 180°$ pois são, respectivamente, colaterais internos com respeito as retas transversais AD e BC. Dessa forma, obtemos que $\widehat{A} = 180° - \widehat{D} = \widehat{C}$. Provando, dessa maneira o resultado.

Da mesma forma, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$.

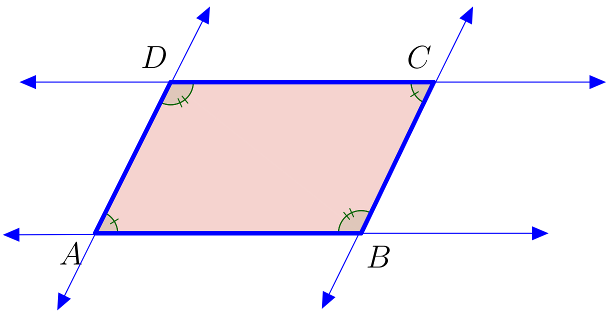
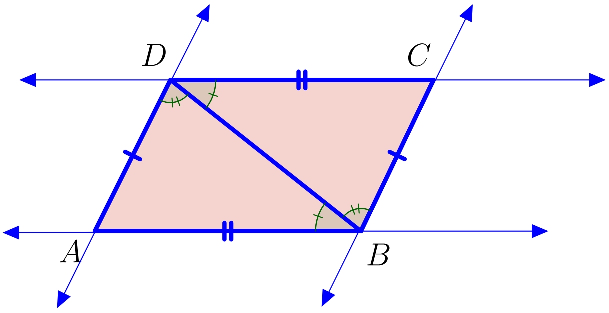


Figura 3.6: $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$.

Então $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{D}$ e, como $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360°$, temos $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{D} = 180°$. Analogamente $\widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$. Como $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$, então $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Da mesma forma, $\widehat{B} + \widehat{C} = 180°$, nos dá $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, de maneira que $ABCD$ tem lados opostos paralelos, portanto um paralelogramo. ■

Proposição 3.4.2. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais.*

Demonstração: Dado o paralelogramo $ABCD$, considere sua diagonal BD. Como $AD \parallel BC$ e $AB \parallel DC$ temos, respectivamente, que $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ e $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$

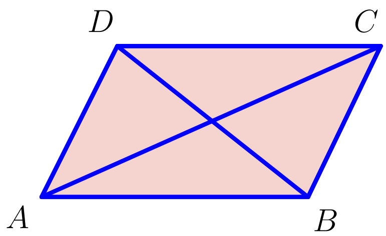


(alternos internos). Assim sendo, pelo teorema 3.1.1, garantimos que os triângulos ABD e CDB são congruentes. E, portanto, $AB = CD$ e $AD = BC$.

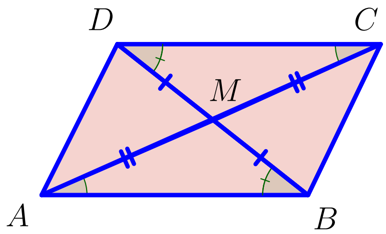
Reciprocamente, suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo de modo que $AB = CD$ e $AD = BC$. Portanto, pelo teorema 3.1.2, os triângulos ABD e CDB são congruentes. Dessa forma, segue-se os ângulos $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ e $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$, sendo alternos internos e, portanto, nessas condições, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Conclui-se, dessa forma, que o quadrilátero convexo $ABCD$ é um paralelogramo. ■

Proposição 3.4.3. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.*

Demonstração: Considerando o paralelogramo $ABCD$ abaixo, trace as diagonais AC e BD.



Como $ABCD$ é paralelogramo, temos que AB é paralelo a DC e, portanto, $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ e $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ pois são, respectivamente, alternos internos. Por outro lado, pelo teorema 3.1.1, os triângulos ABM e CDM são, respectivamente, congruentes. Dessa forma, $AM = CM$ e $BM = DM$ e, portanto, o ponto M é o ponto médio das diagonais.



Por outro lado, seja M o ponto médio das diagonais desse quadrilátero, ou seja, $AM = CM$ e $BM = DM$. Como $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$, pois são ângulos opostos pelo vértice, temos pelo teorema 3.1.1 que os triângulos ABM e CDM são congruentes. Analogamente, concluímos que os triângulos BCM e DAM são congruentes. Dessa forma, $AB = CD$ e $BC = AD$ e, portanto, $ABCD$ é um paralelogramo. ∎

Ao estudarmos triângulos e suas propriedades, convém verificarmos alguns aspectos importantes na construção do triângulo medial, ou seja, do triângulo formado pelo seus pontos médios. É interessante analisarmos que nesses triângulos se aplicam todas as propriedades que caracterizam o paralelogramo.

Dado um triângulo ABC qualquer, o triângulo formado pelos pontos médios da lados desse triângulo é chamado de **triângulo medial**.

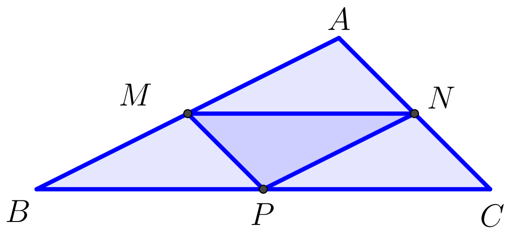


Figura 3.7: triângulo MNP é o triângulo medial de ABC

.

Na figura 3.7 temos vários quadriláteros. Observando o que já foi feito até agora é fácil ver que os quadriláteros $BPNM$, $PCNM$ e $AMPN$ são paralelogramos.

3.4.2 Trapézio

Definição 3.4.5. *Um trapézio é um quadrilátero convexo que possui dois lados paralelos.*

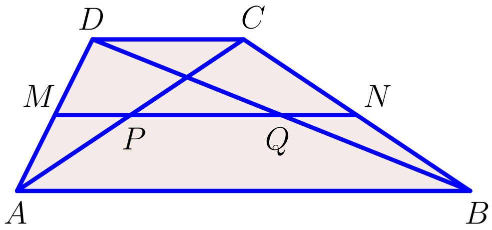


Figura 3.8: Base média MN e mediana de Euler PQ.

É importante saber que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é a **base média** e o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é a **mediana de Euler**[1][7].

Proposição 3.4.4. *Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC. Sejam, ainda, M e N, respectivamente, os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, e P e Q os pontos médios das diagonais AC e BD, também respectivamente. Então:*

(i) M, N, P *e* Q *são colineares e* $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ *e* $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

(ii) $MN = \dfrac{1}{2} \cdot (AB + CD)$ *e* $PQ = \dfrac{1}{2} \cdot |AB - CD|$.

Demonstração: Para demonstrar (i), observe a figura 3.9, note que MP é base média do triângulo DCA.

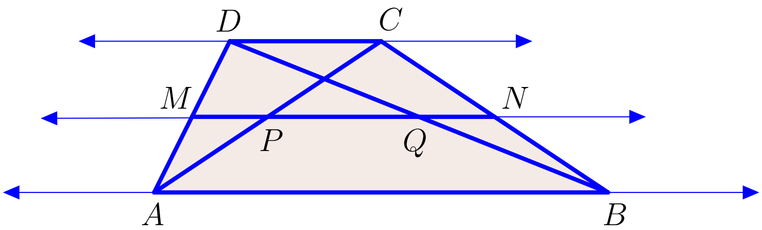


Figura 3.9: Base média MN e mediana de Euler PQ de um trapézio.

Observe na figura 3.9 que M é ponto médio de AD e P é ponto médio de AC, logo MP é base média do triângulo ACD. Portanto $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Por outro lado, MQ é base média do triângulo ABD. Logo, $\overleftrightarrow{MQ} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Como $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, segue que $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{MQ}$. Por outro lado, essas retas têm um ponto em comum e, portanto, as retas $\overleftrightarrow{MP}$ e $\overleftrightarrow{MQ}$ são coincidentes, provando dessa forma que os pontos M, P e Q são colineares.

[1]Leonhard Euler, matemático suíço do século XVIII.

Sendo $\overleftrightarrow{NQ} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{NP} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, conclui-se que as retas $\overleftrightarrow{NQ}$ e $\overleftrightarrow{NP}$ são coincidentes e os pontos M, N, P e Q são colineares e $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Para demonstrar o item (ii), observando a figura 3.9 concluímos que

$$MN = MQ + NQ. \tag{3.4}$$

Observe que MQ e NQ são bases médias, respectivamente, dos triângulos ABD e BCD. Portanto, $MQ = \dfrac{AB}{2}$ e $NQ = \dfrac{CD}{2}$.

Substituindo as igualdades na equação 3.4, conclui-se que

$$MN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD).$$

De maneira análoga,

$$PQ = MQ - MP. \tag{3.5}$$

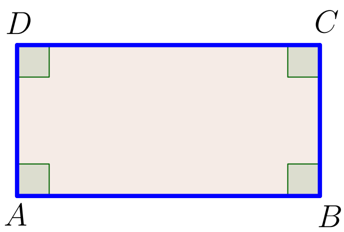
Como MQ e MP são, respectivamente, base média dos triângulos ABD e ACD, temos que $MQ = \dfrac{AB}{2}$ e $MP = \dfrac{CD}{2}$. Substituindo as igualdades na equação 3.5, temos que

$$PQ = \left| \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} \right| = \frac{1}{2} \cdot |AB - CD|.$$

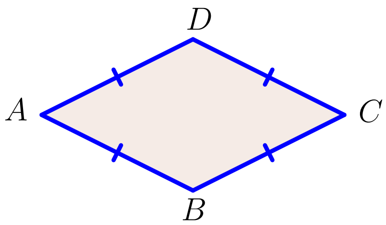
■

3.4.3 Retângulo, losango e quadrado

Definição 3.4.6. ***Um retângulo*** *é um quadrilátero convexo no qual todos os ângulos internos são iguais.*



Definição 3.4.7. ***Um losango*** *é um quadrilátero convexo que apresenta os lados com mesma medida.*



Como os lados opostos de um retângulo são sempre paralelos, então por definição de *paralelogramo*, todo retângulo é um paralelogramo. De maneira análoga, concluímos que todo losango é um paralelogramo.

Proposição 3.4.5. *Um paralelogramo é um retângulo se, e só se, suas diagonais tiverem comprimentos iguais.*

Demonstração: Seja $ABCD$ um retângulo cujas diagonais sejam AC e BD. Pela definição dada de retângulo, temos que todo retângulo é um paralelogramo e, portanto, $AD = BC$. Como $\widehat{DAB} = \widehat{CBA} = 90°$ e AD é um lado comum aos triângulos ABD e ABC, então, pelo teorema 3.1.1, eles são congruentes e, portanto, $AC = BD$.

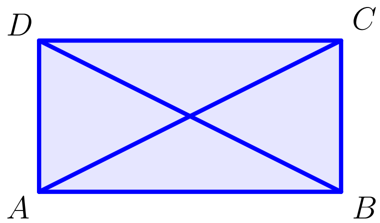
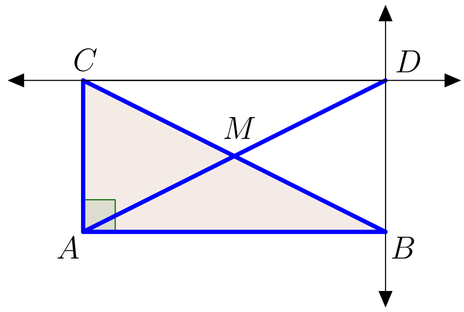


Figura 3.10: Retângulo $ABCD$ e suas diagonais AC e BD

De maneira análoga, sendo o quadrilátero $ABCD$ um paralelogramo com $AC = BD$ e como $AD = BC$ e AB é um lado comum aos triângulos ABD e ABC, temos assim, pelo teorema 3.1.2, que esses triângulos são congruentes. Portanto, $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$. Por outro lado, como $ABCD$ é um paralelogramo temos que $\widehat{DAB} + \widehat{CBA} = 180°$, donde concluímos que $\widehat{DAB} = 90° = \widehat{CBA}$. Analogamente, repetindo argumentos semelhantes aos utilizados anteriormente, com os ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{BCD}$, nos triângulos ACD e BDC ACD e BDC, concluí-se que o paralelogramo ABCD é um retângulo. ■

Corolário 3.4.1. *A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da medida da hipotenusa.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo em A. Trace, por B, uma reta paralela a AC e, por C, uma reta paralela a AB. Sendo D o ponto de intersecção dessas retas.



Como, por construção, o lado AC do triângulo é paralelo à reta $\overleftrightarrow{BD}$, e AB é uma transversal que intersecta AC e $\overleftrightarrow{BD}$, então $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ABD}$ são correspondentes. Como $\widehat{BAC} = 90°$, segue que, $\widehat{BAC}+\widehat{ABD} = 180°$ e $\widehat{ABD} = 90°$. Da mesma forma, $\widehat{ACD} = 90°$ e, como a soma dos ângulos internos do quadrilátero $ABDC$ é $360°$, segue que $\widehat{BDC} = 90°$. Portanto o quadrilátero $ABDC$ é retângulo, donde $AD = BC$ e o ponto M de intersecção das diagonais AD e BC é o ponto médio desses segmentos. Logo,

$$BC = AD = 2 \cdot AM.$$

■

Proposição 3.4.6. *Um paralelogramo é um losango se, e somente se, tiver diagonais perpendiculares.*

Demonstração: Considere o quadrilátero $ABCD$ da figura 3.11 um losango de diagonais AC e BD.

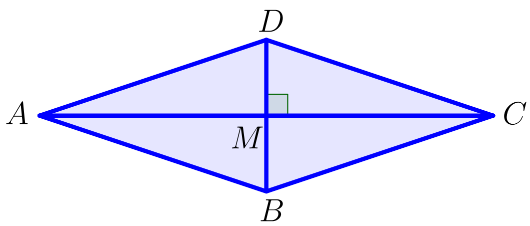


Figura 3.11: Losango $ABCD$.

Como, por definição, $AB = AD$, $CB = CD$ e AC é um lado comum aos triângulos ABC e ADC, temos, pelo teorema 3.1.2, que os triângulos ABC e ADC são congruentes. Portanto, segue-se dessa congruência, que $\widehat{DAM} = \widehat{BAM}$ e $\widehat{DCM} = \widehat{BCM}$.

Dessa forma, AM é bissetriz do ângulo $\widehat{BAD}$ do triângulo ABD. Como esse triângulo é isosceles com base BD, segue-se que AM é altura relativa à base BD do referido triângulo. Consequentemente M é o ponto médio de BD e, assim os triângulos AMD e AMB são congruentes. Portanto, a medida do ângulo $\widehat{AMD}$ é 90º. Donde segue que a reta BD é perpendicular à reta $AM = AC$, ou seja, o que queríamos provar.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um paralelogramo cujas as diagonais AC e BD são perpendiculares. Como $ABCD$ é um paralelogramo, temos que suas diagonais se cortam ao meio. Dessa forma, no triângulo ADC, o segmento DM é mediana e altura relativa ao lado AC. Dessa forma, temos que $AD = CD$. Por outro lado, $AD = BC$ e $AB = CD$ e, portanto o paralelogramo $ABCD$ é um losango. ■

Definição 3.4.8. *Um quadrilátero é um quadrado quando for um retângulo e um losango, simultaneamente.*

Assim, quadrados são quadriláteros de ângulos iguais e lados iguais. Suas diagonais são também iguais e perpendiculares, se intersectam ao meio e formam ângulos de 45° com os lados do quadrilátero.

3.5 Lugares Geométricos Básicos

Definição 3.5.1. *Dada uma propriedade relativa a pontos do plano, o* ***lugar geométrico (LG)*** *dos pontos que possuem a propriedade é o subconjunto do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*

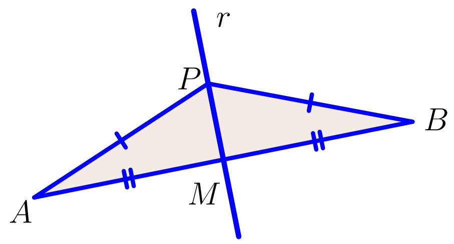
(i) Todo ponto do subconjunto possui a dada propriedade;

(ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade pertence ao subconjunto.

Definição 3.5.2. *Dado um segmento de reta AB, seja $M = \dfrac{(A+B)}{2}$ o ponto médio desse segmento. Chamamos de mediatriz do segmento AB a reta r passando por M e que é perpendicular à reta AB.*

Proposição 3.5.1. *Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o LG dos pontos do plano que equidistam de A e de B e os pontos que equidistam de dois pontos A e B pertencem a mediatriz do segmento AB.*

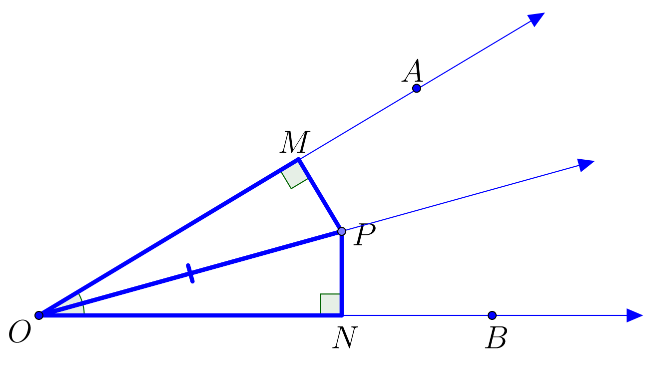
Demonstração: Seja M o ponto médio e r a mediatriz de AB. Dado P pertencente a reta r, temos que o triângulo ABP é isósceles uma vez que PM é mediana e altura desse triângulo.



Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $AP = BP$. Então o triângulo ABP é isósceles de base AB. Segue que a mediana e a altura relativas a AB coincidem. Como a mediana do triângulo APB relativa a base AB é o segmento PM, segue que PM é perpendicular ao segmento AB. Logo $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de AB. ■

Proposição 3.5.2. *Seja P um ponto de um determinado ângulo $\widehat{AOB}$. Se P pertence a esse ângulo, então $d\left(P, \overrightarrow{OA}\right) = d\left(P, \overrightarrow{OB}\right)$ se, e somente se, P pertence a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.*

Demonstração: Suponha que P seja um ponto no interior do ângulo $\widehat{AOB}$, tal que $PM = PN$, onde M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.



Então, pelo teorema 3.1.2, os triângulos retângulos MOP e NOP são congruentes, uma vez que OP é lado comum e $PM = PN$. Dessa forma, $\widehat{MOP} = \widehat{NOP}$ e, portanto, o ponto P pertence a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

Reciprocamente, suponha que P pertence à bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$ e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Os triângulos retângulos OMP e ONP são congruentes pelo corolário 3.2.3, uma vez que $\widehat{MOP} = \widehat{NOP}$, $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90°$ e OP é lado comum aos mesmos. Daí, $PM = PN$, ou seja, $d\left(P, \overrightarrow{OA}\right) = d\left(P, \overrightarrow{OB}\right)$.

3.6 Teorema de Thales

Nesta seção do trabalho iremos utilizar um importante conjunto de ferramentas que são imprescindíveis e nos permitirão realizar o estudo sistemático das aspectos métricos da Geometria Euclidiana, comparando razões de comprimentos de segmentos.

Considere a seguinte situação: três retas paralelas r, s e t são intersectadas pelas retas u e u', conforme a figura 3.12.

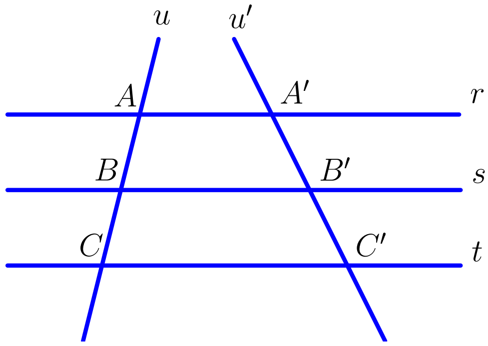


Figura 3.12: retas paralelas cortadas por transversais com $AB = BC$

Dividindo os segmentos AB e BC em m e n partes iguais, respectivamente, na figura 3.12, então, teríamos $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{m}{n}$, com m e $n \in \mathbb{N}$. E utilizando várias vezes as aplicações do teorema da base média de um trapézio, garantimos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}.$$

Daí, concluímos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

é válida sempre que o primeiro ou o segundo membro for um número racional.

Suponha, agora que $AB = BC$, então teremos que $A'B' = B'C'$. Onde, pode-se observar que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = 1.$$

Considerando $AB \neq BC$ e ainda que $\dfrac{AB}{BC}$ seja um número racional, pelo exemplo na figura 3.13, temos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}.$$

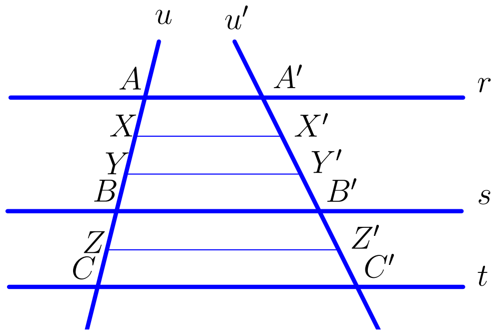


Figura 3.13: retas paralelas cortadas por transversais com $AB \neq BC$

Dividindo, assim, os segmentos AB e BC em três e duas partes iguais respectivamente, obtemos X, Y e Z em u, tais que

$$AX = XY = YB = BZ = ZC$$

e traçando por X, Y e Z paralelas às retas r, s e t, as quais intersectam u' respectivamente em X', Y' e Z', então aplicando algumas vezes o teorema da base média de um trapézio, temos

$$A'X' = X'Y' = Y'B' = B'Z' = Z'C'$$

e, portanto,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{3}{2}.$$

Diante do exposto, uma pergunta natural a fazer agora é a seguinte: será que a relação para a razão entre os segmentos também é válida para quando um dos membros da igualdade for um número irracional? A resposta é sim. E para o leitor entender o sim dado a pergunta inicial, deixaremos como referência [6], p. 139, para que o mesmo possa pesquisar sobre tal afirmação.

Essa breve discussão que acabamos de ter reflete um dos resultados fundamentais da Geometria Euclidiana plana, denominado **Teorema de Thales**[2], o qual iremos enunciar a seguir.

Proposição 3.6.1. *Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos A, $A' \in r$, B, $B' \in s$ e C, $C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares.*

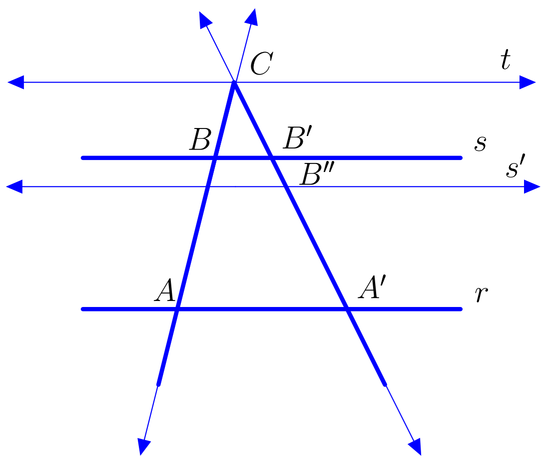
[2]Thales de Mileto, matemático grego do século VII a.C.

Então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Tão importante quanto o teorema de Thales é a sua *recíproca parcial*, a qual será enunciada a seguir, também devida a Thales de Mileto.

Corolário 3.6.1. *Sejam dados, no plano, retas r, s e pontos A, $A' \in r$, B, $B' \in s$, com $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{C\}$. Se $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C}$, então a reta r é paralela à reta s.*



Demonstração: Dado o ponto B e a reta r, sabemos dos axiomas de Euclides que existe uma única reta s' passando por B e que é paralela a reta r. Seja B'' o ponto de intersecção da reta s' com a reta $A'B'$. Traçando uma reta t que passa pelo ponto C e é paralela as retas r e s', obtemos, pelo Teorma de Tales, que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B''}{B''C}$. Por outro lado, decorre de nossas hipoteses que:

$$\frac{A'B'}{B'C} = \frac{A'B''}{B''C}.$$

Donde segue que $B' = B''$, ou seja, $s = s'$ e, portanto, $s \parallel r$. ∎

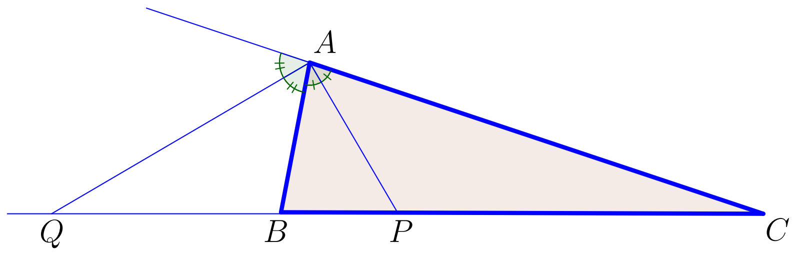
A seguir enunciaremos e demonstraremos uma aplicação interessante do Teorema de Tales, conhecido na literatura como Teorema da Bissetriz.

Proposição 3.6.2. *Seja ABC um triângulo tal que os comprimentos de AB e AC são diferentes. Logo,* *(i) Se P é o pé da bissetriz interna e Q é o pé da bissteriz externa relativas ao lado BC, então*

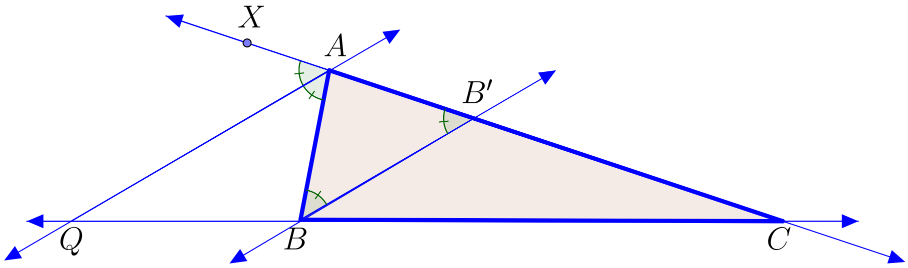
$$\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BA}{AC}.$$

(ii) Se $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, então temos

$$\begin{cases} BP = \dfrac{ac}{b+c} \\ \\ PC = \dfrac{ab}{b+c}. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} BQ = \dfrac{ac}{|b-c|} \\ \\ QC = \dfrac{ab}{|b-c|}. \end{cases}$$



Demonstração: Para o item (i), mostremos que $\dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{BA}{AC}$. Suponha que $AB < AC$. Trace pelo ponto B, a paralela à reta $\overleftrightarrow{AQ}$ e marque seu ponto de interseção B' com o lado AC do triângulo.



Como $\overleftrightarrow{QA} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{AQ}$ é bissetriz de $\widehat{BAX}$, obtemos

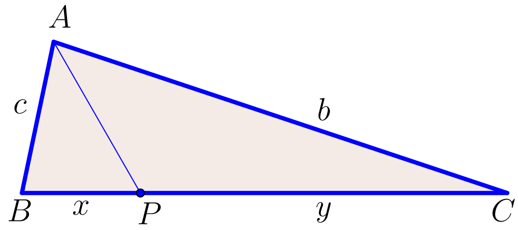
$$\widehat{ABB'} = \widehat{BAQ} = \widehat{QAX} = \widehat{BB'A}.$$

Portanto, o triângulo ABB' é isósceles de base BB', de maneira que $AB' = AB$. Agora, aplicando o teorema de Thales às retas paralelas $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$, intersectadas pelas retas $\overleftrightarrow{CQ}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, obtemos

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{AB'}{AC} = \frac{BA}{AC}.$$

A prova de que a igualdade $\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC}$ é satisfeita, deixaremos para o leitor como exercício e o caso em que $AB > AC$ pode ser tratado de modo análogo.

Quanto ao item (ii), segue imediatamente do item (i). Sendo $BP = x$ e $CP = y$, temos $x + y = a$ e, pelo item (i), $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$.



Resolvendo o sistema de duas equações

$$\begin{cases} x + y = a \\ \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

obtemos $x = \frac{ac}{b+c}$ e $y = \frac{ab}{b+c}$.

As demais relações do item (ii) são provadas de modo análogo. ■

3.7 Semelhança de Triângulos

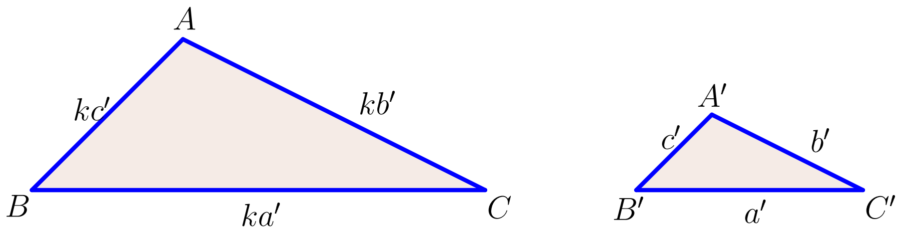
Nesta seção iremos estudar o conceito de semelhança de triângulos, o qual generaliza a noção de congruência e algumas aplicações desse conceito.

Definição 3.7.1. *Dois triângulos são* ***semelhantes*** *quando existir uma correspodência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de tal forma que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos dos lados correspondentes seja sempre a mesma.*

Quando pudermos *dilatar* e/ou *girar* e/ou *refletir* e/ou *transladar* um deles, obtendo o outro ao final de tais operações, então podemos falar que os triângulos são semelhantes.

A seguir, introduziremos o conceito de **razão de semelhança** e depois enunciaremos os **casos de semelhança de triângulos** usuais.

Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos onde há a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, onde $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$.



Então existe um número k real e positivo tal que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k.$$

Tal real positivo k é denominado **razão de semelhança** entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nessa ordem. Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$ para indicar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes com a correspondência $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

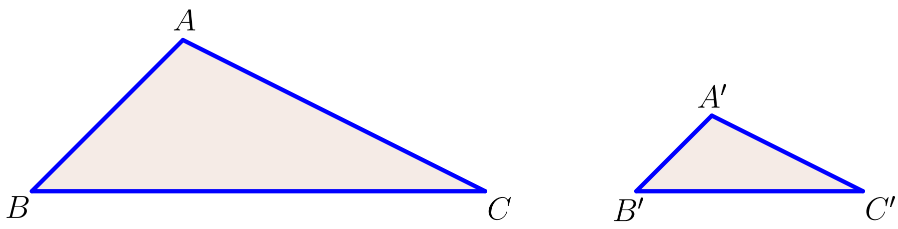
A proposição a seguir enuncia o primeiro caso de semelhança de triângulos e será conhecido como o **caso LLL**.

Proposição 3.7.1. *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano tais que*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Demonstração: Sejam ABC e $A'B'C'$ os triângulos em questão.



Sendo k o valor comum das razões do enunciado, temos $AB = k \cdot A'B'$, $BC = k \cdot B'C'$ e $AC = k \cdot A'C'$. Suponha, sem perda de generalidade, $k > 1$ e marque o ponto $B'' \in AB$ tal que $AB'' = A'B'$.

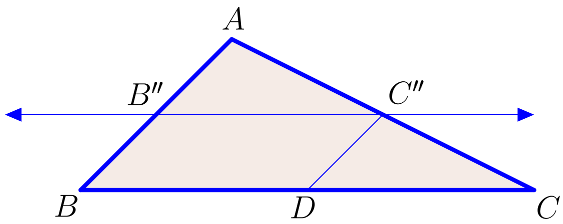


Figura 3.14: o caso de semelhança LLL

Sendo C'' a interseção, com o lado AC, da reta que passa por B'' e é paralela ao lado BC, segue do teorema de Thales que

$$\frac{AC''}{AC} = \frac{AB''}{AB} = \frac{1}{k},$$

de maneira que $AC'' = \frac{1}{k} \cdot AC = A'C'$.

Trace, agora, uma reta paralela ao lado AB passando por C'', a qual intersecta o lado BC no ponto D, conforme figura 3.14. Então, $B''C''DB$ é um paralelogramo, e pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{AC''}{AC} = \frac{AB''}{AB} = \frac{1}{k}.$$

Logo, $B''C'' = \frac{1}{k} \cdot BC = B'C'$.

Dessa forma mostramos que

$$AB'' = A'B', \quad AC'' = A'C' \quad \text{e} \quad B''C'' = B'C'.$$

Por outro lado, observe que os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, pelo **caso LLL** de congruência, temos que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e, portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. ■

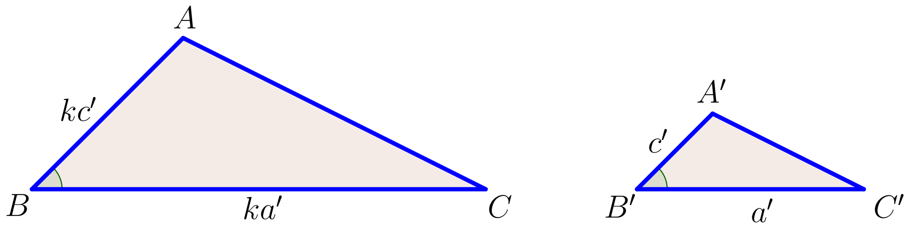
Para os dois casos seguintes de semelhança de triângulos, deixaremos a cargo do leitor a realizar as suas demonstrações. O critério para a semelhança de dois triângulos a seguir é conhecido como o **caso LAL** de semelhança.

Proposição 3.7.2. *Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano tais que*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k \quad e \quad \widehat{B} = \widehat{B'}.$$

Então, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

Em particular, $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$ *e* $\dfrac{AC}{A'C'} = k$.



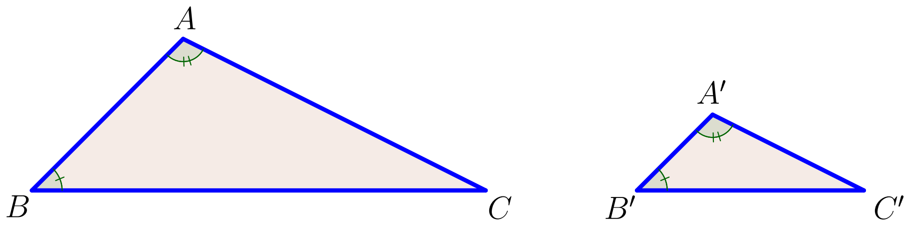
Esse próximo critério é conhecido como **caso AA** de semelhança de triângulos.

Proposição 3.7.3. *Sejam* ABC *e* $A'B'C'$ *triângulos no plano, tais que*

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \quad e \quad \widehat{B} = \widehat{B'}.$$

Então os triângulos ABC *e* $A'B'C'$ *são semelhantes, com a correspondência de vértices* $A \leftrightarrow A', \quad B \leftrightarrow B', \quad C \leftrightarrow C'$. *Em particular,*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$



Um dos assuntos que devemos explorar intensamente nos casos de semelhança de triângulos é o chamado **relações métricas no triângulo retângulo**. A seguir enunciaremos uma proposição com as relações métricas que envolvem os elementos de um triângulo retângulo.

Proposição 3.7.4. *Seja* ABC *um triângulo retângulo, com catetos* $AB = c$, $AC = b$ *e hipotenusa* $BC = a$. *Sendo* H *o pé da altura relativa à hipotenussa,* $CH = m$, $BH = n$ *e* $AH = h$, *temos:*

(i) $a \cdot h = b \cdot c$.

(ii) $b^2 = a \cdot m$ *e* $c^2 = a \cdot n$.

(iii) $a^2 = b^2 + c^2$.

(iv) $h^2 = m \cdot n$.

Para todas as demonstrações iremos nos orientar pela figura 3.15.

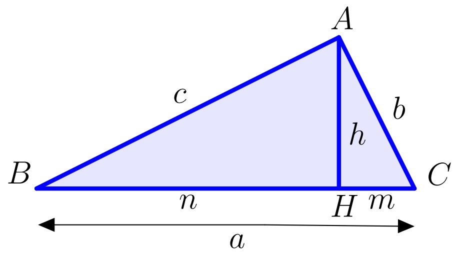


Figura 3.15: relações métricas num triângulo retângulo.

Demonstração: Para provar os itens (i) e (ii), observemos que $\widehat{AHB} = \widehat{CAB}$ e também que $\widehat{ABH} = \widehat{CBA}$. Dessa forma, pela proposição 3.7.3, os triângulos BAH e BCA são semelhantes, com a correspondência dos vértices $A \leftrightarrow C$, $\quad H \leftrightarrow A$, $\quad B \leftrightarrow B$. Assim,

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{e} \quad \frac{BH}{AB} = \frac{AH}{BC}$$

ou, ainda,

$$\frac{h}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \frac{n}{c} = \frac{c}{a}.$$

Donde, segue que

$$a \cdot h = b \cdot c \text{ e } c^2 = a \cdot n.$$

A relação $b^2 = a \cdot m$ é provada de maneira análoga.

Somando membro a membro as duas relações do item (ii), teremos a igualdade $a(m + n) = b^2 + c^2$. Mas, uma vez que $m + n = a$, teremos $a^2 = b^2 + c^2$. Provando, dessa forma, o item (iii).

Novamente, multiplicando membro a membro as duas relações do item (ii), obtemos $a^2 \cdot m \cdot n = (b \cdot c)^2$ ou ainda,

$$m \cdot n = \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 = h^2,$$

onde utilizamos o item (i) na última igualdade acima. ■

É óbvio que o professor ao apresentar o assunto, poderia explorar a semelhança de triângulos para as demonstrações dos itens (iii) e (iv). Esta parte é critério do professor, ficando, isso, apenas como sugestão.

O item (iii) da proposição acima é o conteúdo do famoso **teorema de Pitágoras**[3]. Alguns resultados interessantes desse teorema podem ser observados quando determinamos a diagonal de um quadrado ou a altura de um triângulo equilátero, os quais enunciaremos e demonstraremos a seguir.

Corolário 3.7.1. *As diagonais de um quadrado de lado a medem $a\sqrt{2}$.*

Demonstração: Se $ABCD$ é um quadrado de lado a e diagonais AC e BD, então o triângulo formado por dois de seus lados consecutivos e a diagonal que une os seus vértices é retângulo e isósceles. Na figura 3.16, temos representado a situação acima.

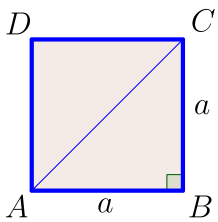


Figura 3.16: diagonal de um quadrado em função de seu lado.

Daí, o teorema de Pitágoras fornece

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2} \\ &= a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.7.2. *As alturas de um triângulo equilátero de lado a medem $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.*

Demonstração: Sejam ABC um triângulo equilátero de lado a e M o ponto médio do lado BC.

[3]Pitágoras de Samos, filósofo e matemático grego, 571 a.C ou 570 a.C à 497 a.C ou 496 a.C.

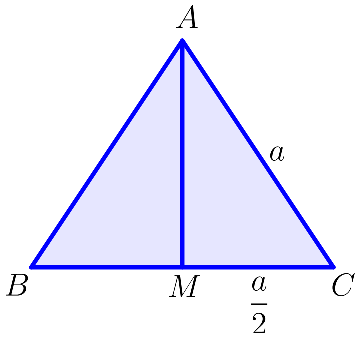


Figura 3.17: altura de um triângulo equilátero.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ACM da figura 3.17, obtemos

$$\begin{aligned} AM^2 &= AC^2 - CM^2 \\ &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3a^2}{4}. \end{aligned}$$

Donde segue o resultado. ∎

3.8 Alguns Teoremas de Semelhança de Triângulos

Nesta seção abordaremos alguns resultados relevantes do ponto de vista histórico sobre semelhaças de triângulos.

O primeiro resultado estabelece uma recíproca do teorema da bissetriz. Verifique que, em todo triângulo, as bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice são perpendiculares. Vejamos este resultado.

Proposição 3.8.1. *Seja ABC um triângulo e P e Q pontos sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, com $P \in BC$ e $Q \notin BC$. Se*

$$\widehat{PAQ} = 90^\circ \text{ e } \frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC},$$

então AP é a bissetriz interna e AQ é a bissetriz externa de $\widehat{BAC}$.

Demonstração: Trace, pelo ponto P, a reta paralela a $\overleftrightarrow{AQ}$, e sejam U e V seus pontos de interseção com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente.

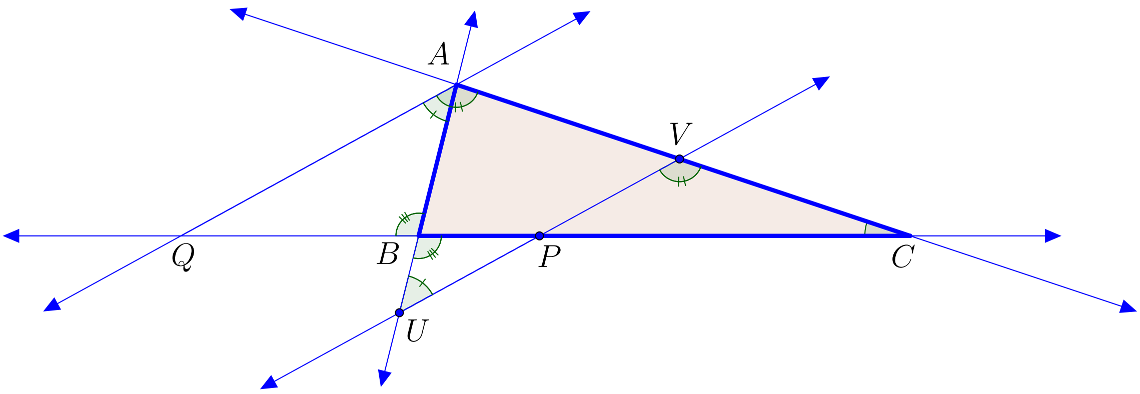


Figura 3.18: recíproca do teorema da bissetriz.

Como $\widehat{BUP} = \widehat{BAQ}$ e $\widehat{PVC} = \widehat{QAC}$ e $\widehat{UBP} = \widehat{ABQ}$, pois são, respectivamente, ângulos alternos internos, correspondentes e opostos pelo vértice. Segue-se, pela proposição 3.7.3, que

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{PU}{QA} \text{ e } \frac{PC}{CQ} = \frac{PV}{AQ}.$$

Mas, como $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{PC}{QC}$ por hipótese, as relações de semelhança acima nos diz que

$$\frac{PU}{QA} = \frac{PV}{AQ},$$

ou seja, $PU = PV$. Agora, de $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{UV} \parallel \overleftrightarrow{AQ}$ temos $\overleftrightarrow{UV} \perp \overleftrightarrow{AP}$. Dessa forma, como AP é mediana e altura do triângulo AUV, temos que AP é bissetriz de $\widehat{UAV}$ e, daí, de $\widehat{BAC}$.

Por fim, como a bissetriz externa relativa ao vértice A é perpendicular à bissetriz interna, temos que AQ é bissetriz externa de $\widehat{BAC}$. ■

Podemos, agora, enunciar e provar o primeiro teorema desta seção, conhecido como o teorema de Apolônio, devido a Apolônio de Perga[4].

Teorema 3.8.1. *Dados um número real positivo $k \neq 1$ e pontos B e C no plano, o* ***lugar geométrico*** *dos pontos A do plano tais que $AB = k \cdot AC$ é o círculo com diâmetro PQ, onde $P \in BC$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC}$ são os pontos tais que*

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BQ}{QC} = k.$$

[4]Apolônio de Perga, matemático grego do século III a.C. Apolônio deu grandes contribuições à Geometria Euclidiana, notadamente ao estudo das *cônicas*.

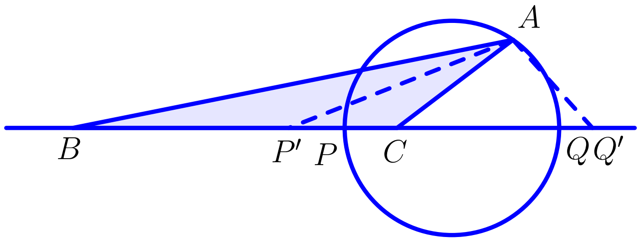


Figura 3.19: círculo de Apolônio sobre BC na razão k.

Demonstração: Se $A \neq P$ e $A \neq Q$ é um ponto tal que $AB = k \cdot AC$, então $A \notin \overleftrightarrow{BC}$. Sejam, pois P', $Q' \in \overleftrightarrow{BC}$ respectivamente os pés da bissetriz interna e externa do triângulo ABC, traçadas a partir de A. Segue da proposição 3.6.2 que

$$\frac{BP'}{P'C} = \frac{BQ'}{Q'C} = \frac{BA}{AC} = k$$

e, obtemos $P' = P$ e $Q' = Q$. Mas, como $\widehat{P'AQ'} = 90°$, segue que A pertence ao círculo de diâmetro PQ.

Reciprocamente, se $A \neq P$, Q é um ponto sobre o círculo de diâmetro PQ, então $A \notin \overleftrightarrow{BC}$ e $\widehat{PAQ} = 90°$. Como $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{BQ}{QC} = k$, segue da proposição 3.8.1 que, no triângulo ABC, AP é bissetriz interna e AQ é bissetriz externa. Portanto, pelo teorema da bissetriz, enunciado na proposição 3.6.2, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC} = k,$$

onde A pertence ao lugar geométrico desejado. ■

O lugar geométrico descrito no enunciado do teorema 3.8.1 é conhecido como o **círculo de Apolônio** relativo a (B, C), na razão $k \neq 1$. Em particular, observe que os círculos de Apolônio relativos a (B, C) e (C, B), ambos na razão $k \neq 1$, são distintos.

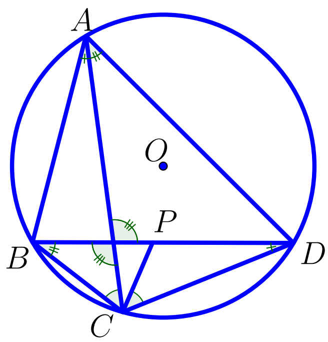
A próxima aplicação de semelhança é um famoso teorema sobre quariláteros inscritíveis, devido a Cláudio Ptolomeu[5], conhecido como **teorema de Ptolomeu**.

[5]Cláudio Ptolomeu, matemático e astrônomo grego do século II d.C., deu grandes contribuições à Geometria Euclidiana. Ptolomeu é mais conhecido por seus trabalhos como astrônomo, principalmente por haver proposto a (equivocada) Teoria Geocêntrica, segundo a qual a Terra ocupava o centro do Universo.

Proposição 3.8.2. *Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então*

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Demonstração: Considere um quadrilátero $ABCD$ inscritível em uma circunferência de centro O. Marque o ponto P sobre a diagonal BD do quadrilátero $ABCD$, tal que $\widehat{PCD} = \widehat{ACB}$.



Como $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, pois possuem o mesmo arco $\widehat{BC}$, os triângulos ABC e DPC são semelhantes pelo proposição 3.7.3 e, daí,

$$\frac{AB}{DP} = \frac{AC}{CD}. \tag{3.6}$$

Da mesma forma, os triângulos ADC e BPC também são semelhantes pela proposição 3.7.3, de tal forma que

$$\frac{BP}{BC} = \frac{AD}{AC}. \tag{3.7}$$

Como $BD = DP + BP$, temos das equações 3.6 e 3.7 que

$$DP = \frac{AB \cdot CD}{AC} \text{ e } BP = \frac{AD \cdot BC}{AC}.$$

Então,

$$BD = \frac{AB \cdot CD}{AC} + \frac{AD \cdot BC}{AC}.$$

Concluí-se que

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD.$$

■

A seguir, uma consequência interessante do teorema de Ptolomeu.

Corolário 3.8.1. *Se ABC é um triângulo equilátero e P é um ponto qualquer sobre o arco menor $\widehat{BC}$ de seu círculo circunscrito, então $PB + PC = PA$.*

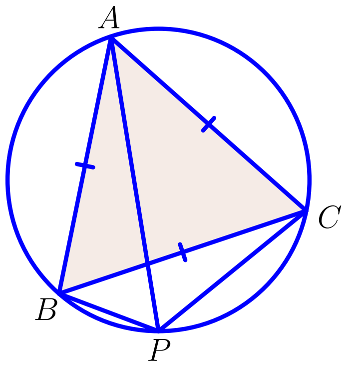


Figura 3.20: corolário do teorema de Ptolomeu

Demonstração: Aplicando o teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$ da figura 3.20, obtemos

$$AB \cdot PC + AC \cdot PB = AP \cdot BC.$$

Em seguida, cancelando os comprimentos iguais $AB = AC = BC$, chegamos ao resultado esperado. ■

Mostraremos, agora, dois teoremas importantes devido a Leonhard Euler[6]. O primeiro deles é conhecido na literatura como o **teorema de Euler**.

Teorema 3.8.2. *Se O, G e H são respectivamente o circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo ABC, então:*

(i) $AH = 2 \cdot OM$, *onde M é o ponto médio de BC.*

(ii) H, G *e* O *são colineares, com* $G \in HO$ *e* $HG = 2 \cdot GO$.

Demonstração: Como O é circuncentro do triângulo ABC da figura 3.21, temos que o triângulo OBC é isósceles de base BC e M é ponto médio da base BC, logo OM é altura do triângulo OBC em relação à base BC. Dessa forma, temos que OM é paralelo ao segmento AH e MN é paralelo ao lado AB, logo os ângulos $\widehat{OMN}$ e $\widehat{HAB}$ são iguais.

[6]Leonhard Euler é suíço e viveu no século XVIII, é até hoje o matemático que mais publicou trabalhos relevantes.

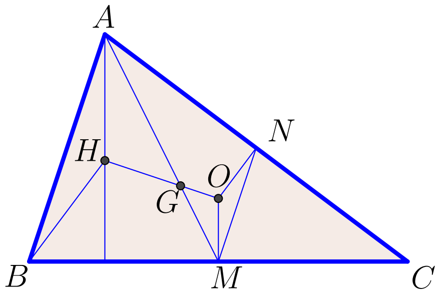


Figura 3.21: a reta de Euler da reta HO de ABC.

Analogamente o segmento ON é altura do triângulo OAC, onde $ON \parallel BH$ e os ângulos $\widehat{ONM}$ e $\widehat{HBA}$ são iguais.

Pela proposição 3.7.3, os triângulos OMN e HAB são semelhantes. Daí, conclui-se que

$$\frac{OM}{AH} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Donde, segue que

$$AH = 2 \cdot OM.$$

Para demonstrar o item (i), considere G' o ponto de interseção dos segmentos AM e HO, então $\widehat{OG'M} = \widehat{HG'A}$ (oposto pelo vértice). Também, como $\overleftrightarrow{OM} \parallel \overleftrightarrow{AH}$, segue que $\widehat{OMG'} = \widehat{HAG'}$ (alternos internos). Portanto, os triângulos MOG' e AHG' são congruentes pela proposição 3.7.3 e, daí,

$$\frac{OG'}{HG'} = \frac{MG'}{AG'} = \frac{OM}{AH} = \frac{1}{2},$$

onde utilizamos o item (i) na última igualdade acima. Segue daí que G e G' são pontos do segmento AM, tais que

$$\frac{AG'}{MG'} = \frac{AG}{MG}.$$

Portanto, devemos ter $G = G'$. ∎

Nas notações do resultado acima, dizemos que $\overleftrightarrow{HO}$ é a **reta de Euler** e HO é a **mediana de Euler** do triângulo ABC.

Teorema 3.8.3. *Em todo triângulo, o circuncentro do triângulo órtico*[7] *coincide com o ponto médio da mediana de Euler. Ademais, o círculo circunscrito ao triângulo órtico é*

[7]**Triângulo órtico** é o triângulo cujos vértices são os pés das alturas de um triângulo não retângulo.

também circunscrito ao triângulo medial, passa pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices do triângulo ao ortocentro e tem raio igual à metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.

Demonstração: Sejam ABC um triângulo com circuncentro O e ortocentro H, tal que M é o ponto médio de BC, A' é o ponto médio de AH e R é o raio do círculo circunscrito a ABC, conforme figura 3.22.

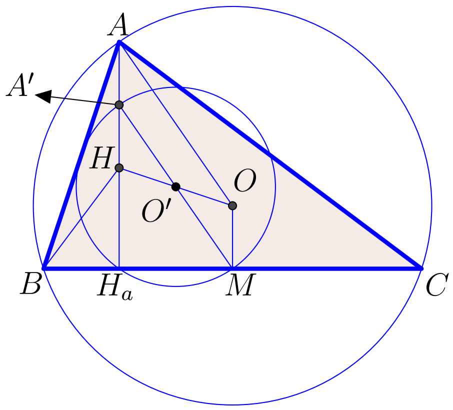


Figura 3.22: o círculo de Euler do triângulo ABC.

Como $AA' \parallel OM$ e, pelo teorema 3.8.2, $AA' = OM$, segue-se que o quadrilátero $AA'MO$ é um paralelogramo e, portanto, $A'M = AO = R$.

Por outro lado, como $A'H \parallel OM$ e também pelo teorema 3.8.2 $A'H = OM$, segue-se que o quadrilátero $A'HMO$ da figura 3.23 é um paralelogramo.

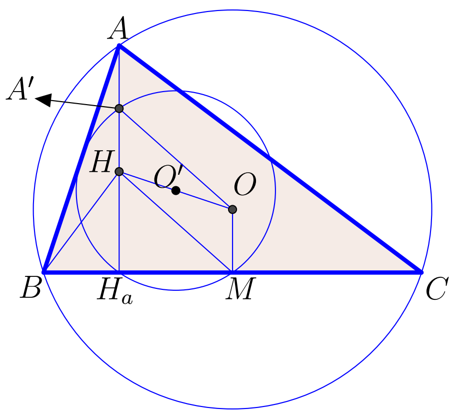


Figura 3.23: o círculo de Euler do triângulo ABC.

Portanto suas diagonais cortam-se ao meio, de forma que, sendo O' o ponto médio de

HO, concluímos que O' também é médio de $A'M$. Assim,

$$O'A' = O'M = \frac{1}{2} \cdot A'M = \frac{R}{2}.$$

Seja, agora, H_a o pé da altura relativa a BC. Como em todo triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da mesma, visto no corolário 3.4.1, segue que no triângulo $A'H_aM$, da figura 3.22, temos

$$O'H_a = \frac{1}{2} \cdot A'M = \frac{R}{2}.$$

Em particular, o círculo de centro O' e raio igual a $\frac{R}{2}$ passa por A', M e H_a. Por fim, com o mesmo argumento é válido em relação as outra duas alturas. ■

O círculo descrito na demonstração desse teorema é conhecido como o **círculo de Euler** do triângulo ABC.

O Teorema a seguir é conhecido como Teorema de Stewart[8], ele mostra a relação entre as medidas dos lados de um triângulo e uma ceviana qualquer.

Teorema 3.8.4. *Dados um triângulo ABC e um ponto D do lado BC, vale a relação*

$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m - d^2 \cdot a = a \cdot m \cdot n,$$

sendo a, b e c as medidas dos lados BC, AC e AB, respectivamente, d a medida da ceviana e m e n as medidas dos segmentos determinados pela ceviana AD no lado BC.

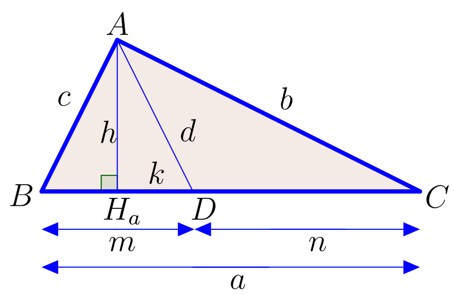


Figura 3.24: Elementos do triângulo para o Teorema de Stewart.

Demonstração: Supondo o ângulo $\widehat{B}$ agudo, como na figura 3.24, seja k a medida

[8]Matthew Stewart (1717-1785) foi um matemático escocês. Sua obra mais conhecida é *Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics.*

da projeção da ceviana AD sobre o lado BC. No triângulo ABH_a, valem as relações, provenientes do teorema de Pitágoras:

$$c^2 = (m-k)^2 + h^2 \text{ e } h^2 = d^2 - k^2.$$

Logo,

$$c^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot k + k^2 + d^2 - k^2,$$

donde

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2 \cdot m \cdot k \tag{3.8}$$

Procedendo da mesma forma no triângulo ACH_a, temos

$$b^2 = (n+k)^2 + h^2 \text{ e } h^2 = d^2 - k^2.$$

Logo,

$$b^2 = n^2 + 2 \cdot n \cdot k + k^2 + d^2 - k^2,$$

daí

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2 \cdot n \cdot k \tag{3.9}$$

Multiplicando 3.8 por n e 3.9 por m, obtemos:

$$c^2 \cdot n = m^2 \cdot n + d^2 \cdot n - 2 \cdot m \cdot n \cdot k$$

e

$$b^2 \cdot m = n^2 \cdot m + d^2 \cdot m + 2 \cdot m \cdot n \cdot k.$$

Somando-se os dois membros das igualdades, vem:

$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m = m \cdot n \cdot (m+n) + d^2 \cdot (m+n).$$

Como $m + n = a$, temos:

$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m - d^2 \cdot a = a \cdot m \cdot n.$$

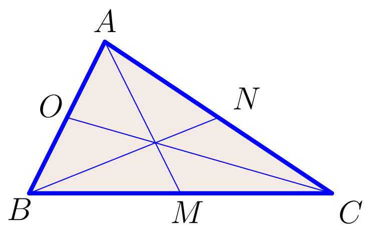
■

Uma demonstração análoga pode ser feita no caso do ângulo B ser obtuso ou reto.

Vejamos, agora, dois exemplos que ilustram esse teorema.

Exemplo 3.8.1. *Em todo triângulo, a soma dos quadrados das medidas das medianas é igual a* $\frac{3}{4}$ *da soma dos quadrados das medidas dos lados.*

Considere o triângulo ABC, de lados $BC = a,\ AC = b$ e $AB = c$. Suas medianas são $AM = m_a,\ BN = m_b$ e $CO = m_c$.



Aplicando o Teorema de Stewart para a mediana m_a, obtém-se:

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} - m_a^2 \cdot a = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$$

ou

$$\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - m_a^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Analogamente, obtêm-se para as mediamas m_b e m_c, respectivamente:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - m_b^2 = \frac{b^2}{4} \quad e \quad \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - m_c^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Somando-se as três últimas equações, obtemos

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

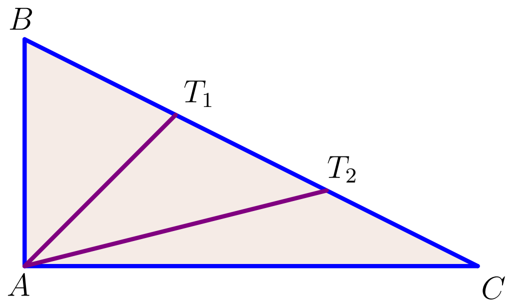
que é o que queríamos provar.

Exemplo 3.8.2. *Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas das distâncias do vértice do ângulo reto aos pontos de trisecção da hipotenusa é igual a* $\frac{5}{9}$ *do quadrado da medida da hipotenusa.*

Seja ABC um triângulo retângulo em A, de lados $BC = a,\ AC = b$ e $AB = c$. Sejam T_1 e T_2 os pontos que dividem a hipotenusa em três partes iguais.

Logo,

$$BT_1 = T_1T_2 = T_2C = \frac{a}{3}.$$



Se $AT_1 = d_1$, aplicando, também, o Teorema de Stewart no triângulo ABC para a ceviana AT_1, obtemos

$$b^2 \cdot \frac{a}{3} + c^2 \cdot \frac{2a}{3} - d_1^2 \cdot a = a \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \Leftrightarrow \frac{b^2}{3} + \frac{2c^2}{3} - d_1^2 = \frac{2a^2}{9}.$$

Analogamente, se $AT_2 = d_2$, aplicando-se o Teorema de Stewart no triângulo ABC para a ceviana AT_2, obtemos:

$$\frac{2b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - d_2^2 = \frac{2a^2}{9}.$$

Somando-se as duas últimas equações, obtemos

$$b^2 + c^2 - d_1^2 - d_2^2 = \frac{4a^2}{9}.$$

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos $b^2 + c^2 = a^2$. Logo,

$$a^2 - d_1^2 - d_2^2 = \frac{4a^2}{9},$$

ou seja,

$$d_1^2 + d_2^2 = \frac{5a^2}{9}.$$

Provando, dessa forma, o exemplo.

3.9 Áreas de Figuras Planas

Quando medimos uma grandeza significa dizer que estamos comparando com outra de mesma espécie tomada como unidade. Nesta seção, estabelecer essas medidas para a região do plano delimitado por uma figura plana. Esta medida será denominada *área* desta região.

Para encontrar a área de uma determinada região do plano, deveremos comparar sua superfície com a de uma outra região tomada como unidade. O resultado dessa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes essa região contém a região tomada como unidade de área.

Adotamos como unidade de área o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Chamaremos de *quadrado unitário*.

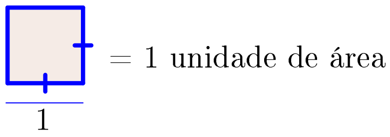
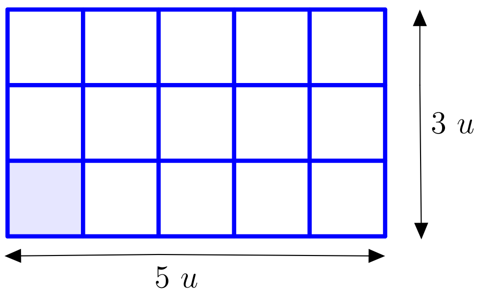


Figura 3.25: a unidade de área.

Caso o lado de um quadrado tenha 1 *unidade* (u) *de comprimento*, a unidade de área será chamada de *unidades quadradas* e representado por u^2. A área delimitada pelos lados de um polígono exprime quantas vezes esse polígono contém a unidade de área, como já foi dito. Isto é fácil perceber, por exemplo, quando desejamos conhecer a área de um retângulo cujos lados medem 5 u e 3 u.



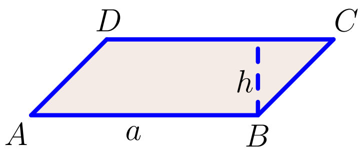
A unidade de área cabe 15 vezes no retângulo e, por isso, sua área é de 15 unidades quadradas (15 u^2). É fácil ver que se as medidas dos lados de um retângulo são números inteiros a e b, então a sua área é o produto desses números:

$$S = a \cdot b.$$

Em particular, se a medida do lado de um quadrado é um número inteiro n, sua área é igual a n^2. Não podemos restringir esse conceito apenas para os números inteiros. Devemos perceber que é possível determinar a área usando medidas para os lados com números racionais. Como exemplo, verifique qual a área de um retângulo cujos lados medem $9,6\ cm$ e $\dfrac{5}{3}\ cm$.

3.9.1 Área do Paralelogramo

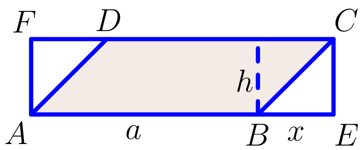
Consideremos o paralelogramo $ABCD$, na figura abaixo, com base $AB = a$ e altura h.



Na proposição abaixo, mostraremos que quando conhecemos a área de um retângulo podemos explicitar a área de um paralelogramo.

Proposição 3.9.1. *A área S de um paralelogramo de base a e altura h é igual a $S = a \cdot h$.*

Demonstração: Considere um paralelogramo $ABCD$ de base a e altura h, completemos o paralelogramo com os triângulos retângulos congruentes (verifique) BEC e DFA para obtermos o retângulo $AECF$.



Agora verificamos que a área do paralelogramo é dado pela diferença entre a área do retângulo e a área dos dois triângulos.

$$S_{ABCD} = S_{AECF} - 2 \cdot S_{BEC}(ou\ S_{DFA}) = S_{ABCD} = (a + x) \cdot h - x \cdot h = a \cdot h$$

■

3.9.2 Área do Triângulo

Proposição 3.9.2. *A área S do triângulo de base a e altura h é dada pelo semiproduto da base a e altura h.*

Demonstração: Para obter a área de um triângulo ABC, escolha um lado para chamar de base. Seja então BC a base e suponha que a base tenha comprimento a e qua a altura relativa a essa base tenha tamanho h.

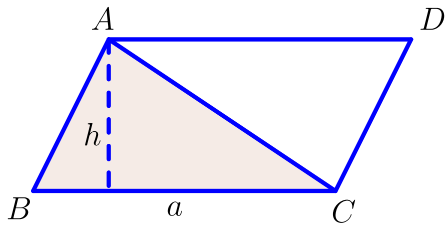


Figura 3.26: triângulo ABC de base a e altura h.

Pelos vértices C e A, trace, respectivamente, retas paralelas aos lados AB e BC. Seja D o ponto de intersecção entre essas duas retas. Considerando o paralelogramo $ABCD$ temos que sua área é $a \cdot h$. Temos, agora, qua a área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo $ABCD$.

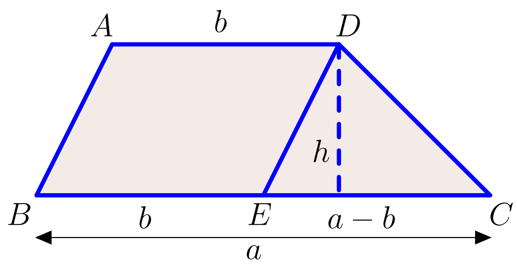
$$S = \frac{a \cdot h}{2}.$$

■

3.9.3 Área do Trapézio

Proposição 3.9.3. *A área S do trapézio de base a e altura h é dado pelo produto da base média do trapézio*[9] *pela altura.*

Demonstração: Consideremos o trapézio $ABCD$ com base maior $BC = a$, base menor $AD = b$ e altura h, como na figura.



Traçando o segmento DE paralelo a AB, o trapézio $ABCD$ fica dividido no paralelogramo $ABED$ de base b e altura h e no triângulo ECD de base $(a - b)$ e altura h. Como já sabemos as áreas dessas figuras, fica claro que a área S do trapézio é a soma das áreas do paralelogramo e do triângulo, ou seja

[9]Chamamos de base média de um trapézio ao segmento de reta que une os pontos médios dos lados opostos não paralelos. Sua medida é a média aritmética das bases.

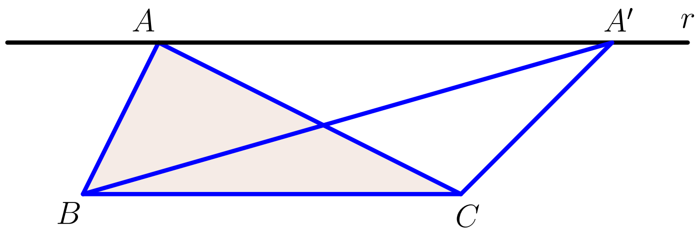
$$S = b \cdot h + \frac{(a-b) \cdot h}{2} = \frac{2b \cdot h + a \cdot h - b \cdot h}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}.$$

■

3.9.4 Propriedades Geométricas Importantes

Propriedade 1

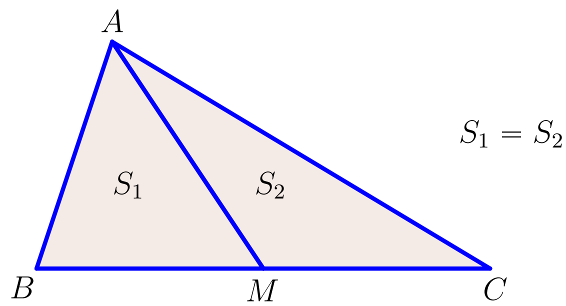
A área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.



A reta r é paralela a BC. Os triângulos ABC e $A'BC$ têm mesma área pois possuem mesma base e mesma altura.

Propriedade 2

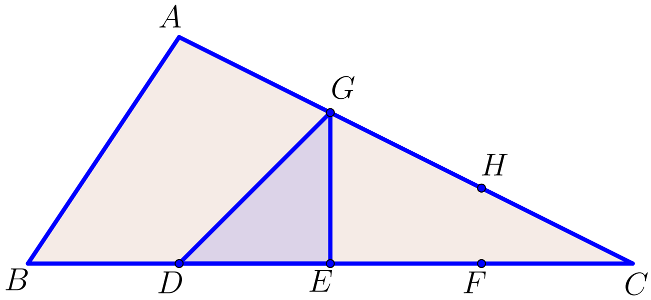
Em um triângulo, uma mediana divide esse triângulo em duas regiões com áreas iguais.



Como M é ponto médio de BC, então os triângulos ABM e ACM possuem a mesma medida da base e mesma altura, e, portanto possuem a mesma área. Como sabemos na literatura, triângulos que apresentam a mesma área são denominados *triângulos equivalentes*.

Vejamos, agora, uma aplicação dessa propriedade através de um exemplo simples.

Exemplo 3.9.1. *O triângulo ABC tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H. Qual é a área do triângulo GDE?*



Observe o triângulo ABC na figura 3.27 com as cevianas[10] BG e BH.

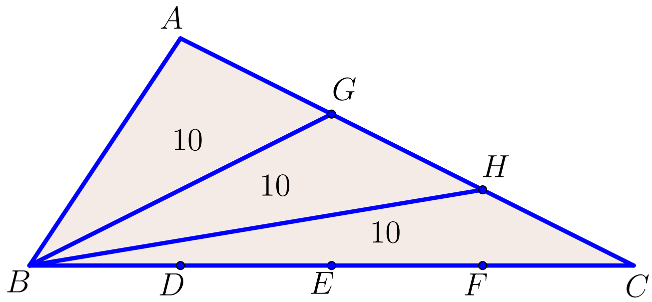


Figura 3.27: triângulo ABC de cevianas BG e BH

Pela **propriedade 2** da subseção 3.9.4 os triângulos BAG, BGH e BHC da figura 3.27 têm mesma área. Cada um tem área igual a 10 e o triângulo BGC tem área igual a 20. Observe agora o triângulo BGC com as cevianas GD, GE e GF.

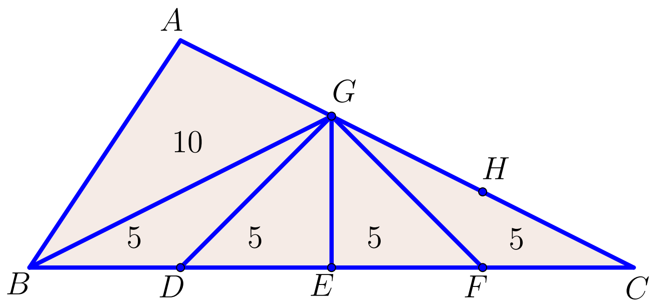


Figura 3.28: triângulo ABC cevianas GD, GE e GF.

Pela mesma **propriedade 2** da subseção 3.9.4, os triângulos GBD, GDE, GEF e GFC da figura 3.28 têm mesma área. Logo, cada um deles tem área 5. A área do

[10] **Ceviana** é qualquer segmento de reta que une um vértice do triângulo a um ponto qualquer interior do lado oposto.

triângulo GDE é igual a 5. Note que para a solução do problema não foi necessário o uso explícito de fórmulas, uma vez que apenas uma propriedade simples e convenientemente aplicada resolveu a questão.

Verificando a solução é interessante observar que, quando usamos essas propriedades, os cálculos se tornam mais fáceis e atrativos para a resolução do problema.

Propriedade 3

Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases.

A afirmação tem comprovação imediata a partir da fórmula que define a área do triângulo.

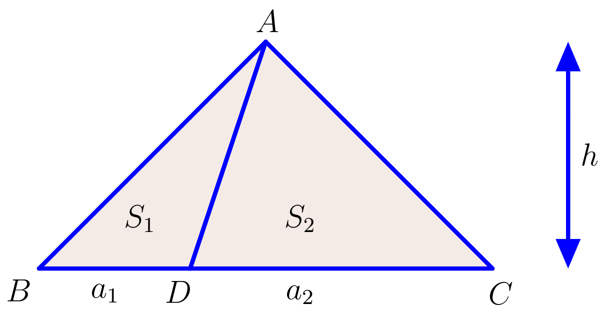


Figura 3.29: triângulos ABD e ADC têm mesma altura e bases diferentes.

Como $S_1 = \dfrac{a_1 \cdot h}{2}$ e $S_2 = \dfrac{a_2 \cdot h}{2}$, temos que a relação entre as áreas S_1 e S_2 é dada por

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{a_1 \cdot h}{2}}{\dfrac{a_2 \cdot h}{2}} = \frac{a_1}{a_2}.$$

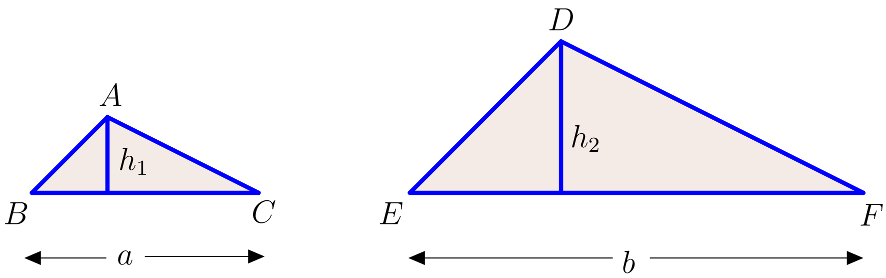
Assim, temos a confirmação da propriedade 3.

Propriedade 4

A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observe na figura abaixo dois triângulos semelhantes ABC e DEF com bases a e b e alturas h_1 e h_2.

Sendo os triângulos semelhantes, então a razão entre as bases é a mesma razão entre



as alturas. Essa razão é um número que chamamos de razão de semelhança.

$$\frac{a}{b} = \frac{h_1}{h_2} = k.$$

Fazendo a razão entres as áreas S_1 e S_2 desses triângulos, temos

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\dfrac{a \cdot h_1}{2}}{\dfrac{b \cdot h_2}{2}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2$$

De modo geral, podemos afirmar que *a razão entre as áreas de figuras semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança*, visto que qualquer figura plana pode ser dividida em triângulos e a propriedade 4 nos ajuda a provar isso, porém não faremos essa demonstração.

3.10 Área do Círculo

Antes de falarmos sobre a área do círculo, é interessante fazer um comentário sobre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. A razão entre essas duas grandezas dá sempre o mesmo valor, ou seja, independe do tamanho da circunferência, pois todas as circunferências são semelhantes entre si. Se C é o comprimento da circunferência de raio R, então

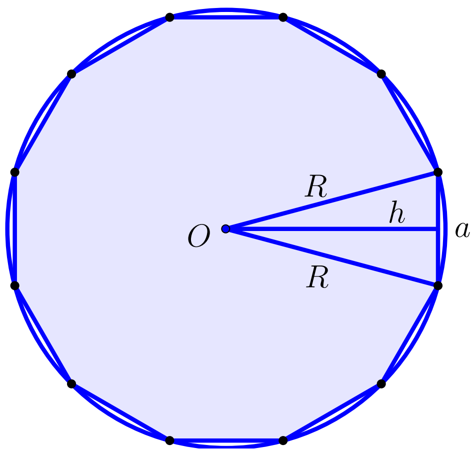
$$\frac{C}{2R} = \pi$$

por definição.

Devemos, então, definir agora o que seria o comprimento de uma circunferência.

Definição 3.10.1. *O comprimento de uma circunferência é o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos regulares inscritos e cujas aproximações por excesso são os perímetros dos polígonos regulares circunscritos.*

Usando a definição de aproximação por falta, considere um polígono regular com n lados (n suficientemente grande) inscrito em uma circunferência de raio R. Iremos dividir o polígono regular em triângulos isósceles iguais, todos com vértice no centro da circunferência. Cada triângulo tem dois lados iguais a R, um lado igual a a, que é lado do polígono, e altura h relativa a essa base.



A área S_n desse polígono é dado por

$$S_n = n \cdot \frac{a \cdot h}{2} = \frac{(n \cdot a) \cdot h}{2} = \frac{p_n \cdot h}{2},$$

onde p_n é o perímetro do polígono de n lados. Quando n cresce indefinidamente, p_n aproxima-se do comprimento da circunferência e h aproxima-se do raio. Portanto, fazendo n arbitrariamente grande temos que a área S_n aproxima-se da área S do círculo de raio R. Ou seja,

$$S = \frac{2\pi \cdot R \cdot R}{2} = \pi \cdot R^2.$$

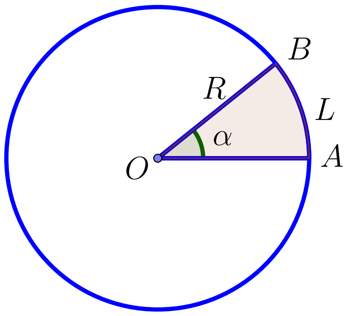
3.10.1 Áreas de setores

Algumas vezes será necessário calcular áreas de setores. Note que a área de um setor de um círculo é proporcional ao ângulo central ou, ainda, proporcional ao comprimento do seu arco. Se dobrarmos o ângulo central, dobramos a área do setor, triplicando o ângulo central, triplicamos a área do setor, e assim por diante.

Fazendo uma regra de três simples entre as áreas e os ângulos do círculo e do setor circular, não necessariamente nessa ordem, obtemos as seguintes relações:

(i) quando os ângulos são medidos em graus

$$S = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot R^2,$$



(ii) quando os ângulos são medidos em radianos

$$S = \frac{\alpha}{2} \cdot R^2.$$

Por outro lado, como a área do setor circular também é proporcional ao comprimento L do seu arco, podemos exprimir sua área dessa forma

$$S = \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{L \cdot R}{2}.$$

Essa fórmula é bastante interessante, pois o formato $\dfrac{L \cdot R}{2}$ dá a ideia de um "triângulo" de base L e altura R.

3.11 Problemas

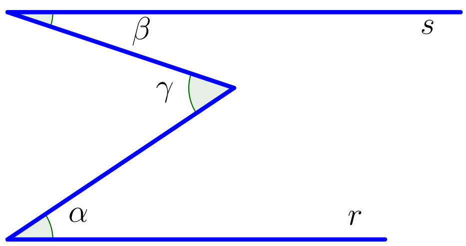
1. Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, prove que a bissetriz, a mediana e a altura relativas a BC coincidem.

2. Sejam ΔABC um triângulo e P, M e H respectivamente os pés da bissetriz interna, mediana e altura relativas ao lado BC. Se P e H ou M e H coincidirem, prove que ΔABC é isósceles de base BC

3. Em um triângulo ABC temos $\hat{A} = 90^{\circ}$. Sendo $P \in AC$ o pé da bissetriz interna relativa a B e sabendo que a distância de P ao lado BC é igual a $2\ cm$, calcule o comprimento do segmento AP.

4. ABC é um triângulo isósceles de base BC e $D \in AB$, $E \in AC$ são pontos tais que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Sendo F o ponto de intresecção dos segmentos CD e BE, mostre que $\overline{BF} = \overline{CF}$.

5. Na figura abaixo, se $r \parallel s$, prove que $\alpha + \beta = \gamma$.



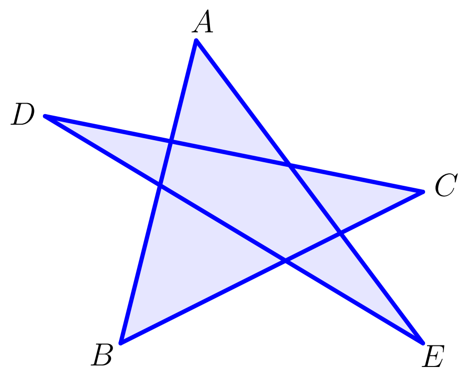
6. Em um triângulo ABC, seja M o ponto médio do lado BC. Se $\overline{AM} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$, mostre que $\widehat{BAC} = 90°$.

7. Se I é o ponto de intersecção das bissetrizes internas traçadas a partir dos vértices B e C de um triângulo ABC, prove que $\widehat{BIC} = 90° + \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

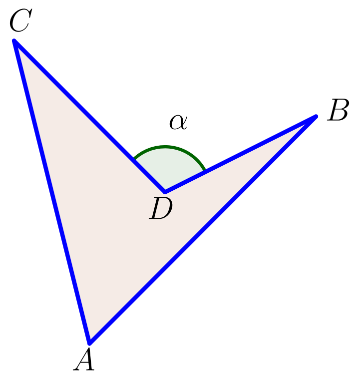
8. Em um triângulo ABC, seja I_a o ponto de intersecção das bissetrizes externas relativas aos vértices B e C. Prove que $\widehat{BI_aC} = 90° - \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

9. No triângulo ABC, o ponto $D \in BC$, é o pé da bissetriz interna relativva a A. Prove que $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = \hat{B} - \hat{C}$.

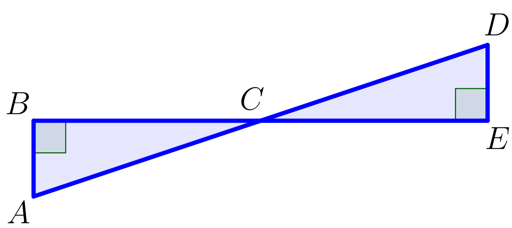
10. Calcule a soma dos ângulos nos vértices $A,\ B,\ C,\ D,\ e\ E$ da estrela de cinco pontas da figura abaixo.



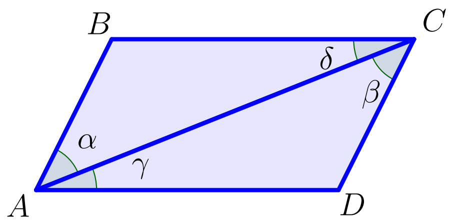
11. Na figura abaixo, prove que $\alpha = \widehat{BAC} + \widehat{ACD} + \widehat{ABD}$.



12. Na figura, sabendo que C é ponto médio de BE, prove que os triângulos ABC e DEC são congruentes.



13. Na figura, sabendo que $\alpha \equiv \beta$ e $\gamma \equiv \delta$, prove que os triângulos ABC e CDA são congruentes.



14. Sejam P_1 e P_2 pontos no interior de um segmento AB, tais que

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{P_2B}}$$

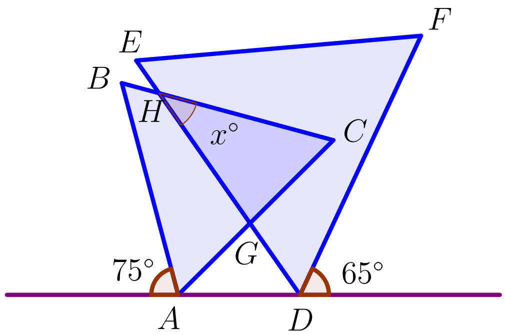
Prove que os pontos P_1 e P_2 coincidem.

15. Dados segmentos de comprimentos a e b, dizemos que um segmento de comprimento x é a **terceira proporcional** de a e b (nessa ordem) se

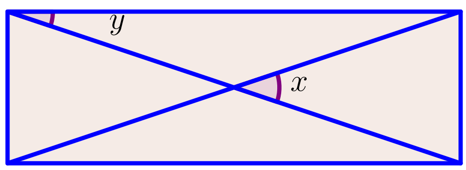
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Mostre como construir, com régua e compasso, um segmento de tal comprimento x.

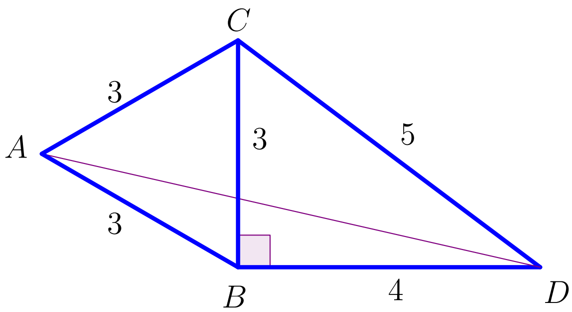
16. Na figura, os dois triângulos ABC e CDE são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?



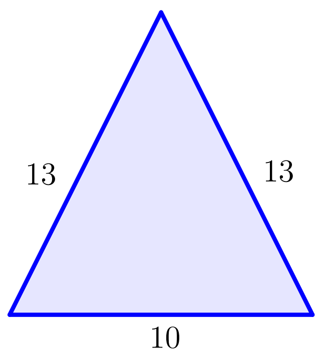
17. A figura mostra um retângulo e suas diagonais. Qual a relação entre os âmgulos x e y da figura?



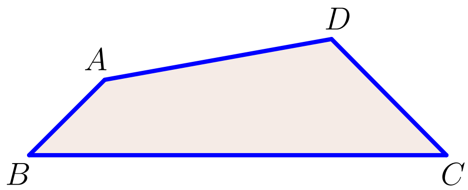
18. Na figura ΔABC é um triângulo equilátero de 3 cm de lado e o triângulo retângulo ΔBCD tem lados 3 cm, 4 cm e 5 cm. Calcule a distância entre os pontos A e D.



19. Um triângulo isósceles tem base medindo 10 cm e dois lados iguais a 13 cm. É possível mudar a base do triângulo e obter outro triângulo isósceles com mesma área?

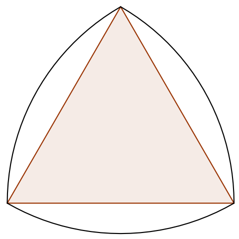


20. No quadrilátero $ABCD$, tem-se: $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$, e a medida do segmento DB é um inteiro. Determine DB.



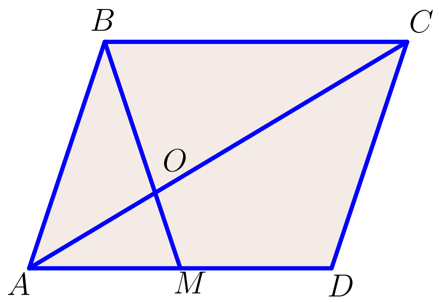
21. O triângulo de Reuleaux[11] é um disco formado a partir de um triângulo equilátero, agregando arcos de circunferência com centros nos vértices do triângulo e raios iguais ao lado de um triângulo.

[11]Franz Reuleaux (30 de setembro de 1829 - 20 de agosto de 1905) foi um Engenheiro Mecânico Alemão conhecido como Pais da Cinemática. O triângulo que leva seu nome é uma curva de largura constante e com base em um triângulo equilátero. Todos os pontos de um lado estão equidistantes do vértice oposto.



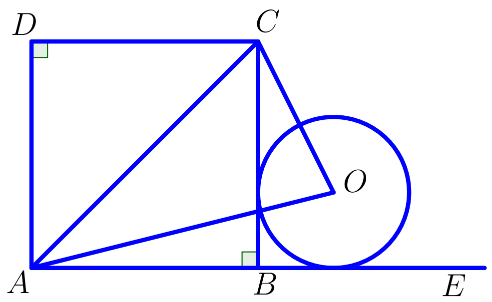
Qual é a área de um triângulo de Reuleaux, se o triângulo equilátero tem lado de medida 1 cm?

22. Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo, e M é o ponto médio do segmento AD.



Se a área do quadrilátero $MOCD$ é igual a 5 cm^2, calcule a área do triângulo AOM.

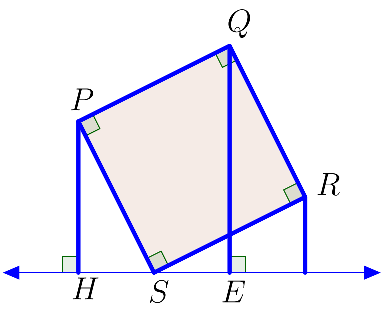
23. Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado, e a circunferência de centro O é tangente aos segmentos DE e CD.



(a) Mostre que se L_1 é a reta que passa por AC e L_2 é a reta que passa por BO, então L_1 e L_2 são paralelas.

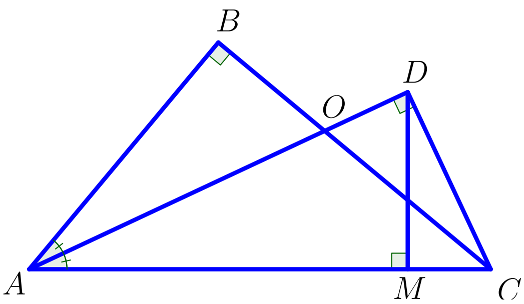
(b) Sabendo que a área do quadrado $ABCD$ é igual a 36 cm^2, calcule a área do triângulo ACO.

24. Na figura, $PQRS$ é um quadrado, $QE = 17$, e $PH = 12$.



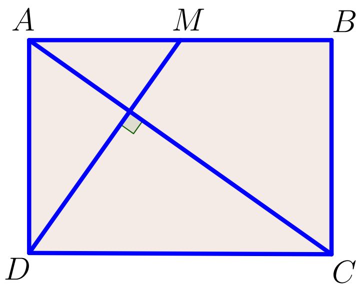
Calcule SE.

25. Na figura, $OC = 12$ e $DM = 10$.



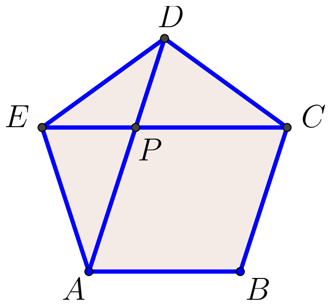
Calcule BO.

26. A figura mostra um retângulo $ABCD$ de lado $AD = 4$ e onde o ponto M é o ponto médio do segmento AB.



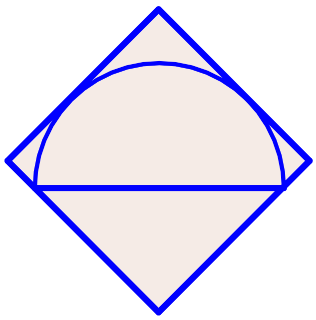
Sabendo que os segmentos AC e DM são ortogonais, calcule a área do retângulo $ABCD$.

27. **(ENQ 2015.1)** As diagonais AD e CE do pentágono regular $ABCDE$ de lados de medida a, intersectam-se no ponto P. Determine AP e PD em função de a.



28. Considere o triângulo ABC de lados a, b, c e alturas h_a, h_b e h_c relativvas respectivamente aos lados a, b e c. Prove que o triângulo ABC é semelhante a um triângulo de lados $\dfrac{1}{h_a}$, $\dfrac{1}{h_b}$ e $\dfrac{1}{h_c}$.

29. Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado?



Capítulo

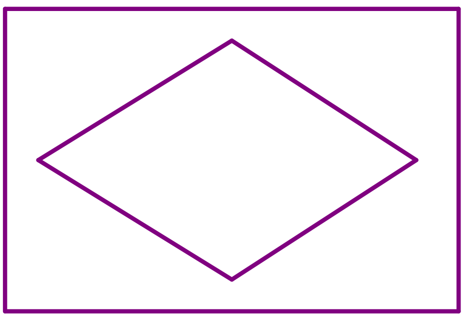
4

Princípio Fundamental de Contagem

Problemas de contagem estão entre os considerados mais difíceis pelos professores do Ensino Médio[5]. Um dos motivos é que esse assunto só é introduzido na metade do Ensino Médio, apesar de serem utilizadas técnicas matemáticas elementares de operações aritméticas. É fácil ver que o professor pode desenvolver uma introdução desse assunto no Ensino Fundamental, auxiliado pelos conteúdos programáticos presentes em cada série. Afinal de contas, os problemas desses assunto, em sua grande maioria, podem ser resolvidos com raciocínio simples sem exigir o uso de fórmulas complicadas. A proposta nesse capítulo é utilizar técnicas de resolução através do raciocínio sem nos preocuparmos com determinadas fórmulas.

Vejamos um exemplo simples para iniciarmos esse assunto.

Exemplo 4.0.1. *Em um determinado país, o governo decidiu realizar um plebiscito para definir as cores da Bandeira Nacional. O formato da bandeira é retangular com um losango desenhado, conforme a figura, e as cores para serem escolhidas duas são verde, amarelo, azul e cinza.*



Liste todas as possíveis bandeiras. Que quantidade é essa?

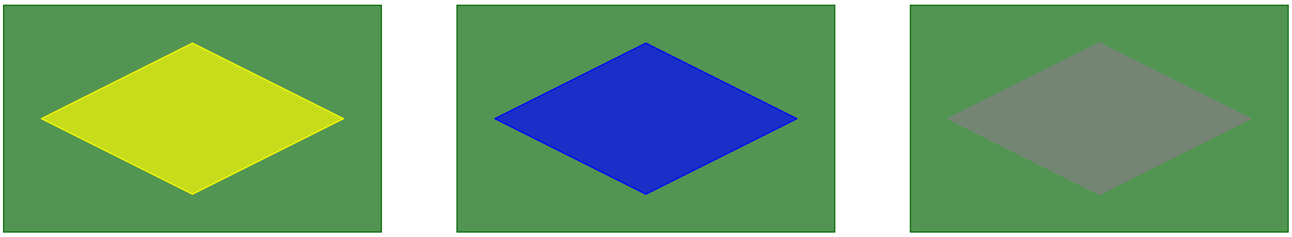
Observe uma estratégia de solução desse exemplo.

É importante ter um procedimento sistemático para listar todas as possíveis bandeiras, sem repetí-las. Para tal, devemos identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas. No caso deste problema, uma forma natural para planejar o preenchimento da bandeira é escolher a cor a ser utilizada para a parte externa e, depois, escolher a cor do losango.

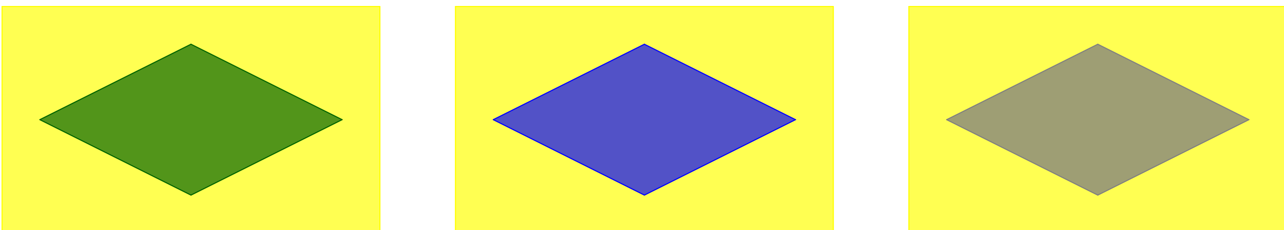
A primeira decisão pode ser feita de quatro modos diferentes, já que a cor externa pode ser qualquer uma das cores disponíveis. Uma vez tomada essa decisão, não podemos mais repetir essa cor, restando então a opção de escolher três das cores disponíveis.

Podemos, então, listar todas as possíveis bandeiras.

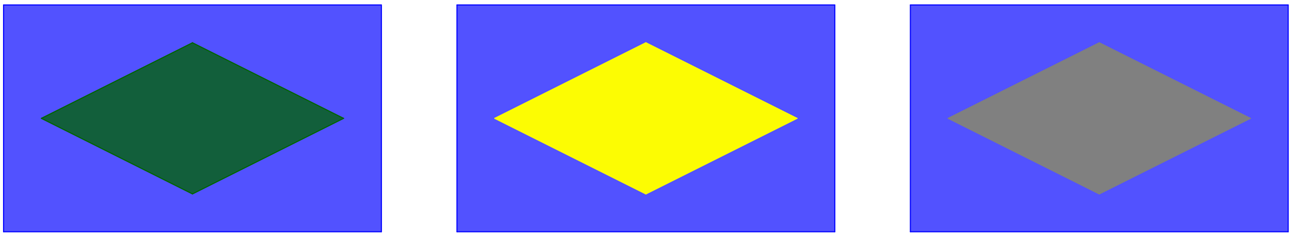
Com a cor externa verde



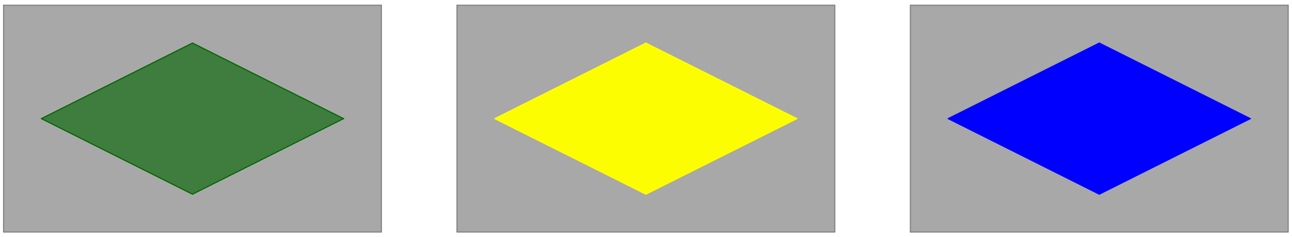
Com a cor externa amarela



Com a cor externa azul



Com a cor externa cinza



Portanto, temos 12 tipos de bandeira para ser escolhida uma.

Note que a escolha da cor para pintar o losango muda de acordo com a decisão da cor usada para a parte externa, porém a quantidade continua sendo a mesma, já que, qualquer que seja a cor externa escolhida, há sempre três cores restantes para o losango. Logo, poderíamos ter usado o seguinte raciocínio para contar o número de possíveis bandeiras, sem listá-las:

A cor externa pode ser escolhida de quatro modos diferentes. Qualquer que seja esta escolha, a cor do losango pode ser escolhida de três modos. Logo, o número total é de $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$ possibilidades. Esse método é conhecido como **Princípio Multiplicativo** ou **Princípio Fundamental da Contagem**.

Podemos, então, enunciar o Princípio Fundamental da Contagem assim:

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de m_1 modos, e qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de m_2 modos, e assim, continuamente, até a decisão D_n, que pode ser tomada de m_n modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões $D_1,\ D_2, \cdots ,\ D_n$ é igual a $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ modos de se tomar a decisão.

Vejamos um exemplo para ilustrar esse enunciado.

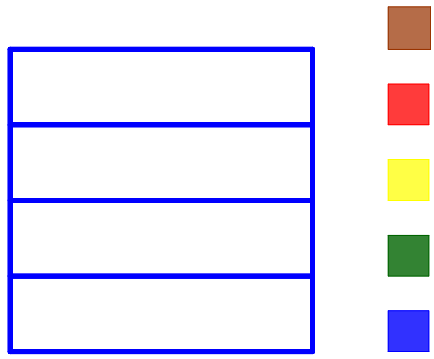
Exemplo 4.0.2. *Em uma sala há dez pessoas e apenas cinco cadeiras para sentar. De quantas maneiras podemos acomodar cinco pessoas sentadas das dez pessoas existentes na sala?*

Uma solução simples pode ser feita para demonstrar o enunciado é a seguinte:

Enumeramos as pessoas de 1 a 10 e nomeamos as cadeiras de A a E. A nossa primeira decisão D_1 é escolher qual pessoa irá se sentar na cadeira A, o que pode ser feito de 10 maneiras, pois há 10 pessoas na sala. Escolhida essa pessoa, então a decisão D_2 seria escolher qual das nove pessoas restantes sentaria na cadeira B, o que pode ser feito de nove maneiras. Fazendo, assim, até a decisão D_5, que seria escolher dentre as seis pessoas restantes qual sentaria na cadeira E, pois já acomodaríamos nas cadeiras C e D as oito e sete pessoas, respectivamente, que se encontrariam na sala. Portanto, há $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30.240$ modos diferentes de escolher cinco dentre as dez pessoas para se sentarem nas cadeiras presentes nessa sala.

Vejamos um outro exemplo com um nível um pouco mais elevado.

Exemplo 4.0.3. *Para pintar a bandeira da figura, há cinco cores disponíveis.*



De quantos modos ela pode ser pintada de modo que faixas adjacentes tenham cores diferentes?

É nessa parte do assunto que acho que ele começa a ficar interessante, pois passamos por isso todos os dias da nossa vida, que é a tomada de decisão. Se tomarmos uma decisão errada, poderemos ter dificuldade na resolução do problema, ou até, então, não conseguiremos resolvê-lo.

Vejamos uma solução. O primeiro passo é escolhermos a ordem em que iremos pintar a bandeira. Dê preferência a uma sequência lógica e natural. Por exemplo, iremos pintá-la de baixo para cima. Após essa escolha, temos que há cinco cores para a primeira faixa da parte de baixo para pintá-la. Escolhida essa cor, não poderemos mais usá-la na faixa superior a ela, portanto teremos quatro cores disponíveis para pintar a segunda faixa. Para a terceira faixa, não poderemos utilizar a cor usada na segunda faixa, mas poderemos usar a cor que foi pintada a primeira, e portanto, temos quatro cores disponíveis para pintar a terceira faixa, assim como, teremos quatro cores para pintarmos a quarta faixa. Logo, temos $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$ maneiras de pintarmos essa bandeira.

Veja outro exemplo em que temos que ter o cuidado na hora de tomar a decisão.

Exemplo 4.0.4. *Quantos são os números de quatro dígitos distintos?*

Esse é um exemplo clássico em que devemos ficar atentos ao fato de que não podemos colocar o dígito zero na frente dos outros três números. Essa é uma dificuldade simples, mas que não podemos deixá-la para depois em nossa decisão de resolução do problema. Portanto, devemos enumerar os dígitos da esquerda para a direita, onde no primeiro dígito pode ser escolhido de nove modos. Como não podemos repetir o algarismo, então o que foi usado no primeiro dígito não poderá ser mais usado, porém o algarismo zero já pode ser usado, o que nos dá nove modos de preencher o segundo dígito. A partir daí, temos oito modos de preenchermos o terceiro dígito e sete de preenchermos o quarto dígito, no total de $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$ números de quatro algarismos distintos.

Um exemplo que me fascina, onde já vi duas formas de se resolver e o que comprova que a decisão errada nos dá a dificuldade de resolver o problema é esse que segue.

Exemplo 4.0.5. *Numa escola os professores das disciplinas de Biologia, Física, Matemática e Química escolheram uma semana do mês de setembro para aplicar suas provas sem combinar o dia um com o outro. De quantas formas podem ser realizadas essas provas nessa semana?*

Como professores, poderíamos ter a sensibilidade de notar que poderíamos ter as quatro provas em um dia só, bem como ter uma prova a cada dia, com um dia sem prova. Essa forma de raciocinar para resolver o exemplo dá certo, porém é uma decisão que nos proporciona muita conta, o que tornaria cansativo sua resolução. Veja uma simples solução para esse exemplo.

Cada professor de uma determinada disciplina pode escolher um dentre os cinco dias existentes naquela semana para escolher aplicar sua prova, sem se preocupar com o dia das provas das outras disciplinas. Como são quatro disciplinas, teremos $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ maneiras de serem aplicadas as provas nessa semana.

Um exemplo que é do nosso cotidiano

Exemplo 4.0.6. *Quantas placas automotivas são possíveis, sabendo que em determinado estado as placas podem iniciar com as letras N ou M? Obs: Há 26 letras em nosso alfabeto e podemos trabalhar com 10 dígitos. As placas automotivas são compostas por três letras seguidas e quatro números.*

Devemos começar pela nossa maior restrição, que nesse caso é a primeira letra da placa já que ela só admite duas letras nela. Como não há restrição de repetição então podemos usar as 26 letras para a segunda e para a terceira letra, assim como para cada dígito dos números há 10 possibilidades, dando um total de $2 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 13.520.000$ placas automotivas nesse estado.

Vejamos um exemplo interessante, onde precisamos ter postura para tomar a decisão correta no problema e não adiar as dificuldades para resolvê-lo.

Exemplo 4.0.7. *Quantos são os números pares de quatro dígitos distintos?*

Iremos separar em dois casos disjuntos. Começando com os números que terminam em zero, nesse caso, a casa das unidades está definida com o algarismo zero. Portanto, temos $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$ números.

Agora, aqueles números que são pares, mas não terminem, nem começem com zero. Assim, teremos $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1792$ números.

Dessa forma, conclui-se que há $504 + 1792 = 2296$ números pares com quatro dígitos distintos.

Problemas

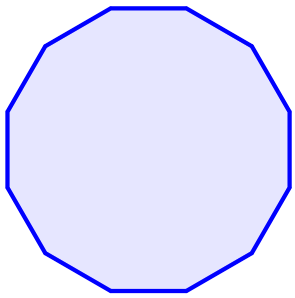
1. Em uma sala há uma turma de dez alunos. Precisa-se escolher uma comissão de três alunos para representar essa turma, sendo a comissão composta por: um porta-voz, um diretor de artes e um assessor técnico. Nenhum aluno pode acumular cargos.

   (a) De quantas maneiras esta comissão pode ser formada?

   (b) Quantas comissões diferentes podem ser dormadas com os alunos Leandro, Renato e Marcelo?

   (c) Considere agora comissões sem cargos específicos. Use os itens (a) e (b) anteriores para descobrir quantas comissões sem cargos específicos podem ser formadas.

2. A seguinte figura mostra um dodecágono regular.



   Responda:

   (a) Quantos triângulos equiláteros podem ser formados de modo que seus três vértices sejam vértices do dodecágono?

   (b) Quantos retângulos escalenos podem ser formados de modo que seus três vértices sejam vértices do dodecágono?

3. Numa lista de todos os números de 5 algarismos distintos que se formam com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5$, esses números estão ordenados em ordem crescente.

   (a) Qual o número que ocupa a posição 10 da lista?

   (b) Qual o número que ocupa a posição 85 da lista?

4. Num grupo de 20 pessoas, algumas pessoas trocam apertos de mão.

   (a) Contamos quantos apertos de mão cada pessoa deu e somamos todos esses números. Mostre que o resultado é par.

(b) É possível que num grupo de 99 pessoas cada pessoa tenha dado exatamente três apertos de mão?

5. O pai de Victor e Mayara chegou à casa carregando dez brinquedos distintos e enumerados de 1 a 10 e disse a eles que o brinquedo número 1 é para Victor e o de número 2 é para Mayara. Porém, seus filhos poderão ficar com mais brinquedo, contanto que deixem ao menos um para seu pai. De quantos modos Victor e Mayara poderão dividir entre eles o restante dos brinquedos?

6. Um aluno escreveu todos os número inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.

   (a) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?

   (b) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?

7. Quatro times disputaram um torneio de futebol em que cada um jogou uma vez contra cada um dos outros. Quando uma partida terminava empatada, cada time ganhava um ponto, caso contrário, o vencedor ganhava três pontos e o perdedor zero. A tabela mostra a pontuação final do torneio. Quantos foram os empates?

Time	**Pontos**
A	5
B	3
C	3
D	2

8. Deseja-se colorir os círculos das Figuras 1, 2 e 3 de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

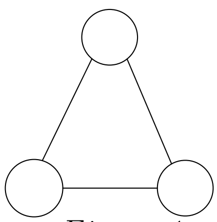


Figura 1

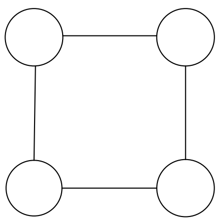


Figura 2

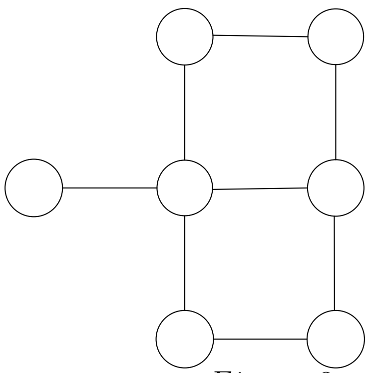


Figura 3

(a) De quantas maneiras diferente podemos colorir a Figura 1?

(b) De quantas maneiras diferente podemos colorir a Figura 2?

(c) De quantas maneiras diferente podemos colorir a Figura 3?

9. **(ENQ 2014.2)** Considere que foram efetuadas todas as permutações possíveis dos algarismos que compõem o número 78523, listando os números obtidos em ordem crescente.

(a) Determine a posição ocupada pelo número 78523.

(b) Calcule a soma de todos os números listados.

10. Na tabela abaixo, o objetivo é preencher um tabuleiro de duas linhas e 2015 colunas com algarismos $0's$ e $1's$ de modo que dois números vizinhos iguais de uma mesma linha impedem que se preencha com número iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, na tabela abaixo, os valores de A e B não podem ser iguais.

0	1	0	$\cdots$	1	1	$\cdots$
1	1	0	$\cdots$	A	B	$\cdots$

Determine o número de possíveis preenchimentos distintos de tal tabuleiro seguindo as regras.

11. **(ENA PROFMAT - 2014)** Um cubo tem as faces numeradas de 1 a 6 (faces opostas não somam 7 necessariamente). São feitos 2 lançamentos. No primeiro lançamento, a soma dos números gravados nas 4 faces laterais é 15. Num segundo lançamento, a soma dos números gravados nas 4 faces laterais é 12. Qual o número que está na face oposta à face do 6?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

(e) 5

12. **(ENA PROFMAT - 2014)** Uma pessoa precisa ativar o alarme de sua residência cuja senha é formada por quatro algarismos distintos e ela lembra apenas que o primeiro algarismo é 5 e que o último é 3. A central do alarme permite apenas uma tentativa a cada 2 minutos. Na pior situação possível, qual é a maior duração de tempo que ela poderá levar para ativar o alarme digitando senha após senha?

(a) $1\ h\ 22\ min$

(b) $1\ h\ 50\ min$

(c) $2\ h\ 02\ min$

(d) $2\ h\ 10\ min$

(e) $2\ h\ 20\ min$

13. **(ENA PROFMAT - 2014)** Quantas palavras podemos escrever com as seis letras a, b, c, d, e, f, sem repetir letras, de modo que as letras a, b, c sempre apareçam na ordem alfabética?

(a) 120

(b) 240

(c) 360

(d) 715

(e) 720

14. **(ENA PROFMAT - 2015)** Uma escola de educação básica possui 12 professores de matemática, sendo que oito atuam exclusivamente no Ensino Fundamental e quatro atuam exclusivamente no Ensino Médio. Para a organização da 1ª Olimpíada de Matemática da escola, será formada uma comissão de cinco professores de matemática, de modo que pelo menos um deles seja professor do Ensino Médio. De quantas maneiras essa comissão poderá ser formada?

15. **(ENA PROFMAT - 2015)** Em um certo país, os possíveis números de telefones celulares eram formados por oito algarismos, utilizando-se dígitos de 0 a 9, iniciados, obrigatoriamente, com 9, 8 ou 7. Com o crescimento da população, houve a necessidade de se criar novos números. Os números antigos foram mantidos, apenas recebendo um algarismo 9 em seu início, passando assim a ter 9 algarismos. Já os

números novos, formados também com nove algarismos, têm a única restrição de começar com o dígito 9. Desta maneira, quantos números a mais foram criados?

16. **(OBM 2005)** Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. O relógio varia das 00:00 às 23:00 horas. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

Capítulo 5

Soluções dos Problemas

5.1 Tópicos de Matemática Elementar

5.1.1 Princípio da Indução Finita

1.

(a) Queremos validar a fórmula

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Note que

$$P(1) : 1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

é verdadeira.

Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n)$ é verdadeira, isto é,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

A partir da hipótese de indução, iremos provar que $P(n+1)$ também é verdadeira.

De fato, somando $(n+1)^2$ a ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)+6\cdot(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot[n\cdot(2n+1)+6\cdot(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot[(2n^2+n+6n+6)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot[(2n^2+4n+2)+(n+1)+(2n+2)+1]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot[2\cdot(n+1)^2+(n+1)+2(n+1)+1]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]\cdot[2(n+1)+1]}{6},
\end{aligned}$$

estabelecendo, assim, a veracidade de $P(n+1)$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Da mesma forma, queremos validar a fórmula

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

Perceba que

$$P(1): 1^3=1^2$$

é verdadeira e que a igualdade

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

é válida.

Suponha, então que para algum $n \in \mathbb{N}$ a expressão $P(n)$ seja verdadeira. Somando

$(n+1)^3$ em ambos membros da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4 \cdot (n+1)]}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} \\ &= \left[\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}\right]^2, \end{aligned}$$

sendo verdade para $P(n+1)$.

Logo, a igualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Queremos validar a fórmula

$$P(n) : 1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Note que

$$P(1) : 1 = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

é verdadeira.

Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n)$ é verdadeira, isto é,

$$1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

A partir da hipótese de indução iremos provar que $P(n+1)$ também é verdadeira.

De fato, somando $(-1)^n \cdot (n+1)^2$ a ambos os membros da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} 1 - 2^2 + \cdots + (-1)^n \cdot (n+1)^2 &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (-1)^n \cdot (n+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^n}{(-1)} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (-1)^n \cdot (n+1)^2 \\ &= -(-1)^n \cdot (n+1) \cdot \left[\frac{n}{2} - \frac{2 \cdot (n+1)}{2}\right] \\ &= -(-1)^n \cdot (n+1) \cdot \left[-\frac{(n+2)}{2}\right] \\ &= (-1)^n \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}, \end{aligned}$$

estabelecendo a veracidade para $P(n+1)$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.

(a) Queremos provar que

$$P(n) : n^3 - n = 6k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Note que

$$P(1) : 1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$$

é verdadeira.

Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n)$ é verdadeira, isto é,

$$n^3 - n = 6k.$$

A partir da hipótese de indução iremos provar que $P(n+1)$ também é verdadeira.

De fato, substituindo n por $n+1$, temos que

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= (n+1)\cdot[(n+1)^2 - 1] \\
&= (n+1)\cdot[n^2 + 2n] \\
&= n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n \\
&= n^3 + 3n^2 - n^2 + n^2 + 3n - n \\
&= (n^3 - n) + 3n\cdot(n+1) \\
&= 6k + 3\cdot 2t \\
&= 6\cdot(k+t).
\end{aligned}$$

Estabelecendo a veracidade para $P(n+1)$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $n^3 - n$ é um múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Queremos provar que

$$P(n) : 5^n - 1 = 24\cdot t, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \text{ é par.}$$

Usando que $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$, aplicaremos o Princípio da Indução Finita sobre $k \in \mathbb{N}$.

Note que

$$P(2\cdot 1) : 5^{2\cdot 1} - 1 = 24$$

é verdadeira para $k = 1$.

Suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(2k)$ é verdadeira, isto é,

$$5^n - 1 = 5^{2k} - 1 = 24\cdot t.$$

A partir da hipótese de indução iremos provar que $P(2\cdot(k+1))$ também é verdadeira.

De fato, multiplicando ambos os membros por 5^2, obtemos

$$\begin{aligned}
5^{2k}\cdot 5^2 - 1\cdot 5^2 &= 24\cdot t\cdot 5^2 \\
5^{2k+2} - (24+1) &= 24\cdot t\cdot 25 \\
5^{2k+2} - 1 &= 24\cdot(25\cdot t + 1).
\end{aligned}$$

Temos, então a veracidade de $P(2\cdot(k+1))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Provando, assim, pelo Princípio da Indução Finita que $5^n - 1$ é um múltiplo de 24, para todo $n \in \mathbb{N}$, com

n par.

(c) Queremos provar que

$$P(n) : 2^n + 1 = 3 \cdot t, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, n \text{ é ímpar.}$$

ou

$$P(k) : 2^{2k-1} + 1 = 3 \cdot t, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Usando que $n = 2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}$, note que

$$P(2 \cdot 1 - 1) : 2^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 3$$

é verdadeira.

Suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(n) = P(2k - 1)$ é verdadeira, isto é

$$2^n + 1 = 2^{2k-1} + 1 = 3 \cdot t.$$

A partir da hipótese de indução iremos provar que $P(2 \cdot k + 1)$ também é verdadeira. De fato, multiplicando ambos os membros por 2^2, obtemos

$$\begin{aligned} 2^{2k-1} \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 &= 3 \cdot t \cdot 2^2 \\ 2^{2k+1} + (3 + 1) &= 3 \cdot t \cdot 4 \\ 2^{2k+1} + 1 &= 3 \cdot (4 \cdot t - 1). \end{aligned}$$

Temos, então a veracidade de $P(2k+1)$. Provando, assim, pelo Princípio da Indução Finita que $2^n + 1$ é um múltiplo de 3, para todo $n \in \mathbb{N}$, com n ímpar.

3. Observe que $P(1)$ é verdadeira, pois

$$1 = 1^2.$$

Suponha $P(n) = n^2$ verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

seja válida e devemos mostrar que $P(n + 1) = (n + 1)^2$ é verdadeira. Somando a ambos os membros $2n + 1$, pois essa é a expressão que indica o próximo número ímpar após $2n - 1$, temos que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) &= n^2 + (2n+1) \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

também é verídica. Logo, a igualdade é válida para todo o número $n \in \mathbb{N}$.

4. Observe que $P(1)$ é verdadeira, pois

$$P(1) = 1 \cdot (1+1) = 2.$$

Supondo $P(n)$ verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n \cdot (n+1)$$

é válida, devemos mostrar que $P(n+1) = (n+1) \cdot (n+2)$ é verdadeira.

Somando a ambos os membros $2n + 2$, pois essa é a expressão que indica o próximo número par após $2n$, temos que

$$\begin{aligned} 2 + 4 + \cdots + 2n + (2n+2) &= n \cdot (n+1) + (2n+2) \\ &= n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1) \\ &= (n+1) \cdot (n+2). \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é válida para $P(n+1)$. Logo, a igualdade $2 + 4 + \cdots + 2n = n \cdot (n+1)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Observe que $P(1)$ é verdade, pois

$$P(1) : 1 = \frac{10}{81} \cdot \left(10^1 - 1\right) - \frac{1}{9}.$$

Supondo $P(n)$ verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$1 + 11 + \cdots + \underbrace{1 \cdots 1}_{n\ uns} = \frac{10}{81} \cdot (10^n - 1) - \frac{n}{9}$$

é válida, devemos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira.

Acrescendo $\underbrace{11\cdots1}_{n+1\ uns}$ a ambos os membros, temos que

$$\begin{aligned}
1+\cdots+\underbrace{1\cdots1}_{n\ uns}+\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)\ uns} &= \frac{10}{81}\cdot(10^n-1)-\frac{n}{9}+\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)\ uns}\\
&= \frac{10}{81}\cdot(10^n-1)-\frac{n}{9}+\frac{1}{9}\cdot\left(9\cdot\left(\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)\ uns}\right)\right).
\end{aligned}$$

Visto que

$$\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)\ uns}=1+10+\cdots+10^n$$

é uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 1 e razão igual a 10, temos que sua soma é igual a

$$S=\frac{10^{n+1}-1}{9},$$

portanto

$$\begin{aligned}
1+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)\ uns} &= \frac{10}{81}\cdot(10^n-1)-\frac{n}{9}+\frac{9}{9}\cdot\left(\frac{10\cdot10^n-1}{9}\right)\\
&= \frac{10}{81}\cdot(10^n-1)-\frac{n}{9}+\frac{10}{81}\cdot9\cdot10^n-\frac{1}{9}\\
&= \frac{10}{81}\left(10^n-1+9\cdot10^n\right)-\frac{n+1}{9}\\
&= \frac{10}{81}\left(10^{n+1}-1\right)-\frac{n+1}{9}
\end{aligned}$$

Donde segue o resultado.

6. Note que a fórmula $d(n)=\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$ é verdadeira para $n=3$, onde temos que

$$d(3)=\frac{3\cdot(3-3)}{2}=0,$$

pois, sendo $d(n)$ definido como o número de diagonais de um polígono de n lados e um triângulo não há diagonais, temos $d(3)=0$.

Supondo, agora, que a fórmula seja verdade para algum $n\in\mathbb{N}$, mostraremos que

$d(n+1)$ também é verdade, ou seja,

$$d(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n-2)}{2}.$$

Quando acrescentamos um vértice para determinarmos a nova quantidade de diagonais, teremos a quantidade das antigas diagonais, acrescido de uma diagonal que era lado do polígono de n lados e surge $(n-2)$ novas diagonais, assim, temos:

$$\begin{aligned} d(n+1) &= d(n) + 1 + (n-2) \\ &= \frac{n\cdot(n-3)}{2} + n - 1 \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)\cdot(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

7. Note que a fórmula $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ é verdadeira para $n = 1$, onde temos que

$$a_1 = a_1 + (1-1)\cdot r.$$

Supondo, agora, que a fórmula seja verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, somando r a ambos os lados da igualdade, segue

$$a_n + r = a_{n+1} = a_1 + (n-1)\cdot r + r = a_1 + n\cdot r,$$

o que mostra que a fórmula é verdadeira para $n+1$. Portanto, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Observe que $P(1)$ é verdadeira para $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$, pois

$$P(1) : S_1 = \frac{(a_1 + a_1)\cdot 1}{2} = a_1.$$

Suponha verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, $P(n) : S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$. Para obter a soma dos $n+1$ elementos dessa sequência basta acrescermos o último elemento à soma dos n elementos. Portanto, temos que

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

Donde,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} + a_{n+1} \\ &= \frac{a_1 \cdot n + a_n \cdot n + 2 \cdot a_{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Sendo, $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ e $a_{n+1} = a_1 + n \cdot r$, segue que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{a_1 \cdot n + a_1 \cdot n + n^2 \cdot r - r \cdot n + 2 \cdot a_1 + 2 \cdot n \cdot r}{2} \\ &= \frac{2 \cdot a_1 \cdot n + 2 \cdot a_1 + n^2 \cdot r + n \cdot r}{2} \\ &= \frac{2 \cdot a_1 \cdot (n+1) + n \cdot r \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_1 + n \cdot r) \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n+1)}{2}. \end{aligned}$$

O que mostra que a propriedade $P(n+1)$ também é válida. Portanto é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Observe que $P(1)$ é verdadeira para $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, pois

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}.$$

Suponha verdade para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Multiplicando por q ambos os membros dessa igualdade, temos que

$$a_n \cdot q = a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n.$$

O que mostra que a fórmula é correta para $n+1$. Portanto é válida para para todo

$n \in \mathbb{N}$.

10. Observe que $P(1)$ é verdadeira para $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, pois

$$S_1 = \frac{a_1 \cdot (q^1 - 1)}{q - 1} = a_1.$$

Observe que $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$ e que para obter a soma dos $(n + 1)$ termos, temos $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. Logo,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} + a_1 \cdot q^n \\ &= \frac{a_1 \cdot q^n - a_1 + a_1 \cdot q^n \cdot q - a_1 \cdot q^n}{q - 1} \\ &= \frac{a_1 \cdot (q^{n+1} - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

O que mostra que a propriedade $P(n+1)$ é verdadeira e conclui-se que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

11. **(A Moeda Falsa do Rei)** Para $n = 1$ temos três moedas. Coloca-se uma em cada prato e deixa-se a outra de fora. Assim, descobre-se facilmente a falsa, uma vez que se os pratos ficam equilibrados a moeda falsa está de fora, caso contrário, a moeda falsa é a que fica no prato mais alto. Suponha que, para algum n, com n pesagens possa descobrir a moeda falsa dentre as 3^n moedas. Considerando 3^{n+1} moedas, basta dividí-las em três grupos de 3^n moedas, visto que $3^{n+1} = 3^n \cdot 3$, e com um método parecido para o caso $n = 1$ descobre-se com uma só pesagem em qual destes três grupos a moeda está. Assim sendo, realiza-se as n pesagens necessárias para se descobrir a moeda falsa no grupo que a contém. Com isso o número de pesagens será $n + 1$. A demosntração está concluída.

5.1.2 Princípio da Casa dos Pombos

1. Sendo os meses do ano as casas e as pessoas os pombos, então pelo Princípio da Casa dos Pombos, teremos no mínimo treze pessoas, pois devemos alocar uma pessoa em cada mês e sobrar uma das treze para garantirmos a presença de duas pessoas no mesmo mês.

2. Tendo quatro pessoas em cada mês, totalizando 48 pessoas, então sobra duas para colocar em qualquer mês para garantirmos pelo PCP que teremos mês com pelo menos cinco pessoas fazendo aniversário.

3. Considere as n pessoas como os pombos e considere o número de conhecidos como as casas. Embora haja n casas, pois o número de conhecidos pode varia de 0 a $n-1$, no máximo $n-1$ casas são usadas, pois é impossível haver, ao mesmo tempo, pessoas com 0 conhecido e com $n-1$ conhecidos. Portanto, pelo Princípio da Casa dos Pombos haverá duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.

4. De imediato. Usando o princípio da indução, podemos comprovar isso.

5. Dividindo esse quadrado em quatro quadrados iguais de lado 1 e colocando quatro desses pontos nos vértices desse quadrado, resta-nos colocar o quinto ponto de modo que seja a maior distância possível para os pontos localizados nos vértices. Sendo assim, esse ponto será colocado no encontro da diagonal do quadrado maior de modo que a distância deste para os outros pontos é de $\sqrt{2}$, e qualquer outro local para esse ponto dentro do quadrado será menor que $\sqrt{2}$ para um dos pontos localizado no vértice.

6. Considere um conjunto $P = \{p_1,\ p_2, \cdots, p_8\}$ de oito números inteiros quaisquer, onde iremos considerar como os pombos, usando o princípio da casa dos pombos. Ao dividirmos qualquer número por sete, este pode deixar restos $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, ou\ 6$. Considere, assim, o conjunto $C = \{c_0, \cdots,\ c_6\}$ como o conjunto que deixa restos 0 a 6 quando dividido por sete, respectivamente. Seja cada elemento de C as casas onde iremos colocar cada elemento do conjunto P. Dessa forma, teremos pelo menos dois elementos do conjunto P que deixam o mesmo resto quando dividido por 7. Logo, a diferença entre esses dois números será um múltiplo de 7.

7. Sempre existe uma diferença que é múltiplo de 9. De fato, quando dividimos um número por 9, podemos encontrar nove restos diferentes. Logo, entre os 10 números do conjunto, pelo menos dois deles têm mesmo resto quando dividido por 9. Quando fazemos a diferença desses dois números que têm o mesmo resto, obtemos um número com resto zero, ou seja, divisível por 9.

8. Suponha que em um campeonato haja n times. Como cada time joga apenas uma vez com outro time, então cada time jogará $(n-1)$ vezes. Considere o número de jogos de um time como a casa dos pombos e os times que participam desse campeonato como os pombos. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, teremos n times

para alocar nas $(n-1)$ casas dos pombos. Logo, teremos sempre, pelo menos dois times, que terão jogados o mesmo número de partidas.

9. Para provar isto, escolhamos gavetas adequadas ao problema. Distribuímos os números do conjunto A em 50 gavetas assim construídas:

$$\{1,\ 2\};\{3,\ 4\};\cdots;\{99,\ 100\}.$$

Como há 50 gavetas das quais retiramos 51 números, sempre existirá uma gaveta da qual escolhemos dois números e estes, graças à nossa construção, serão consecutivos.

10. Divida o retângulo como a união de seis quadrados de lado 1, e observe que dois dos sete pontos devem estar num mesmo quadrado.

11. Considere uma das pessoas, que chamaremos de P. Como há outras cinco pessoas na festa, ou há três pessoas que P conhece, ou há três pessoas que P não conhece. Suponha a primeira alternativa, sem perda de generalidade. Se há duas dessas três pessoas que P conhece que se conhecem, junto com P teríamos três pessoas que se conhecem mutuamente. Caso contrário, essas três pessoas que P conhece são três pessoas que se desconhecem mutuamente.

12. Os possíveis fatores primos dos elementos de M são os seguintes nove primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Dado um subconjunto de M com mais de $512 = 2^9$ elementos, haverá dois deles em cuja a fatoração prima as paridades dos expoentes de cada primo coincidem e portanto o seu produto será um quadrado perfeito. Usando repetidamente esse argumento, obtemos 737 pares disjuntos de elementos de M tais que o produto dos elementos de cada par é um quadrado perfeito (de fato, se retirarmos de M menos de 737 pares de elementos distintos, sobram pelo menos $1985-2\cdot 736 = 513$ elementos, dos quais podemos obter um novo par). Agora, como há mais de 512 elementos em que o produto dos elementos é um quadrado perfeito, e os primos que dividem cada um desses produtos estão entre os nove primos listados acima, haverá dois desses pares para os quais, se tomarmos o expoente de cada um desses primos no produto dos termos do par e os dividirmos por 2, as paridades do resultado coincidirão, e portanto o produto dos quatro termos desses dois pares será uma quarta potência.

13. Precisamos saber qual o número de respostas diferentes que podem surgir na pesquisa. Como para cada pergunta há duas respostas diferentes, portanto há 16 maneiras diferentes de responder a pesquisa. Logo, deverá haver no mínimo 17 entre-

vistados para garantirmos que haja duas pessoas com a mesma resposta. Note que as respostas fazem o papel das casas e os entrevistados o papel dos pombos.

14. No conjunto $A = \{m+1,\ m+2, \cdots,\ m+n\}$ temos n números diferentes. Se não existisse nenhum múltiplo de n, quando dividíssemos os números do conjunto A por n, os restos pertenceriam ao conjunto $B = \{1,\ 2, \cdots,\ n-1\}$, que possui $n-1$ elementos. Logo, devem existir dois números $m+i$ e $m+j$, com $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tais que o resto da divisão de $m+i$ por n é o mesmo que o resto da divisão de $m+j$ por n. Logo, $m+j-(m+i)$ é um múltiplo de n, o que implica que $n > j-i \geqslant 1$ é um múltiplo de n menor que n absurdo!). Logo deve existir algum múltiplo de n no conjunto A.

15. Se m e n são inteiros positivos, pelo exemplo anterior um dos números $m+1,\ m+2, \cdots,\ m+n$ é um múltiplo de n. Assim, dado n um inteiro qualquer, escolhe-se $m = 1234567890 \cdot 10^{n+1}$. Deste modo, todos os inteiros $m+1,\ m+2, \cdots,\ m+n$ começam com 1234567890 e algum deles é múltiplo de n.

16. Consideramos os $n+1$ números

$$1,\ 11,\ 111, \cdots,\ \underbrace{111\cdots1}_{(n+1)\ vezes} \tag{5.1}$$

como sendo os pombos e n casas enumeradas com os números

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n-1,$$

ou seja, com os possíveis restos na divisão por n. Similarmente ao exemplo anterior existem dois números na lista 5.1 que deixam o mesmo resto na divisão por n e, portanto, a diferença entre o maior e o menor é múltiplo de n. Obviamente a diferença entre dois números quaisquer da lista 5.1 resulta em um número fornado apenas pelos algarismos 0 e 1.

17. Os pombos representam os $n+1$ números escolhidos do conjunto $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n\}$ e as casas são escolhidas como sendo os n conjuntos:

$$C_j = \{2j-1,\ 2j\},\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

isto é, em C_1 só colocaremos o 1 e o 2, em C_2 o 2 e o 3, e assim sucessivamente.

Logo, pelo Princípio da Casa dos Pombos, quando distribuímos os $n+1$ números nos n conjuntos C_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, dois deles ficarão juntos em algum conjunto C_j, ou seja, esses números serão consecutivos e portanto primos entre si.

5.2 Alguns Aspectos da Divisibilidade na Álgebra

1. Faremos apenas o item (a), deixando os outros itens como exercício para o leitor.

(a)

$$\begin{aligned} mdc\,(637,\ 3887) &= mdc\,(637,\ 3887 - 6 \cdot 637) = mdc\,(637,\ 65) \\ &= mdc\,(637 - 9 \cdot 65,\ 65) = mdc\,(52,\ 65) \\ &= mdc\,(52,\ 65 - 52 \cdot 1) \\ &= mdc\,(52,\ 13) = 13. \end{aligned}$$

Determinando m e n, temos:

$$\begin{aligned} 13 &= 65 - (637 - 9 \cdot 65) \\ &= 10 \cdot 65 - 637 \\ &= 10 \cdot (3887 - 6 \cdot 637) - 637 \\ &= 10 \cdot 3887 - 61 \cdot 637. \end{aligned}$$

Logo, $m = -61$ e $n = 10$.

2. Faremos apenas o item (a), deixando os outros itens como exercício para o leitor.

(a)

$$\begin{aligned} mdc\,(n,\ 2n+1) &= mdc\,(n,\ 2n+1-2 \cdot n) \\ &= mdc\,(n,\ 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

3.

(a) Todo número quando dividido por três, deixa resto $0,\ 1$, ou 2, ou seja, podem ser escritos na forma $3k,\ 3k+1$, ou $3k+2$. Devemos elevar ao quadrado cada expressão dessa e ver o que acontece.

Elevando ao quadrado $3k$, temos

$$(3k)^2 = 9k^2 = 3k',$$

onde $k' = 3k^2$, e $(3k)^2$ deixa resto zero quando dividido por 3.

Elevando ao quadrado $3k+1$, temos

$$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3k' + 1,$$

onde $k' = 3k^2 + 2k$ e $(3k+1)^2$ deixa resto 1 quando dividido por 3.

Elevando ao quadrado $3k+2$, temos

$$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3k' + 1,$$

onde $k' = 3k^2 + 4k + 1$, e $(3k+2)^2$ deixa resto 1 quando dividido por 3.

Portanto, todo número quadrado perfeito deixa resto zero ou 1 quando dividido por 3.

b) Idêntico ao item anterior. Veja o que acontece com as expressões $4k, 4k+1, 4k+2$ e $4k+3$ quando elevadas ao quadrado.

$$\begin{array}{ll}
(4k)^2 = 16k^2, & \textit{deixa resto } 0 \textit{ quando dividido por } 4.\\
(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1, & \textit{deixa resto } 1 \textit{ quando dividido por } 4.\\
(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4, & \textit{deixa resto } 0 \textit{ quando dividido por } 4.\\
(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9, & \textit{deixa resto } 1 \textit{ quando dividido por } 4.
\end{array}$$

Portanto, todo número quadrado perfeito deixa resto 0 ou 1 quando dividido por 4.

c) Da mesma forma, eleva-se ao quadrado as expressões

$$8k,\ 8k+1,\ 8k+2,\ 8k+3,\ 8k+4,\ 8k+5,\ 8k+6 \mathrm{e} 8k+7.$$

$$\begin{array}{ll}
(8k)^2 = 64k^2, & \textit{deixa resto } 0 \textit{ quando dividido por } 8.\\
(8k+1)^2 = 64k^2 + 16k + 1, & \textit{deixa resto } 1 \textit{ quando dividido por } 8.\\
(8k+2)^2 = 64k^2 + 32k + 4, & \textit{deixa resto } 4 \textit{ quando dividido por } 8.\\
(8k+3)^2 = 64k^2 + 48k + 9, & \textit{deixa resto } 1 \textit{ quando dividido por } 8.\\
(8k+4)^2 = 64k^2 + 64k + 16, & \textit{deixa resto } 0 \textit{ quando dividido por } 8.\\
(8k+5)^2 = 64k^2 + 80k + 25, & \textit{deixa resto } 1 \textit{ quando dividido por } 8.\\
(8k+6)^2 = 64k^2 + 96k + 36, & \textit{deixa resto } 4 \textit{ quando dividido por } 8.\\
(8k+7)^2 = 64k^2 + 112k + 49, & \textit{deixa resto } 1 \textit{ quando dividido por } 8.
\end{array}$$

Logo, todo número quadrado perfeito deixa resto 0, 1 ou 4 quando dividido por 8.

4. Mostraremos, primeiro, a ida, ou seja

$$b \mid (a_1 - a_2) \Rightarrow a_1 = b \cdot q_1 + r_1 \ e \ a_2 = b \cdot q_2 + r_2, \ com \ r_1 = r_2.$$

Suponha que $a_1 = b \cdot q_1 + r_1$ e $a_2 = b \cdot q_2 + r_2$, com $r_1 < b$ e $r_2 < b$, mostraremos que $r_1 = r_2$.

Sendo

$$a_1 - a_2 = b \cdot q_1 + r_1 - b \cdot q_2 - r_2 = b \cdot (q_1 - q_2) + (r_1 - r_2),$$

mas

$$b \mid (a_1 - a_2), \ b \mid b \cdot (q_1 - q_2) \text{ e } |r_1 - r_2| < b,$$

logo

$$r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2.$$

Portanto, a_1 e a_2 deixam restos iguais na divisão por b.

Reciprocamente, mostraremos a volta, ou seja

$$a_1 = b \cdot q_1 + r_1 \text{ e } a_2 = b \cdot q_2 + r_2, \ com \ r_1 = r_2 \Rightarrow b \mid (a_1 - a_2).$$

Sendo,

$$a_1 - a_2 = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 \text{ e } r_1 = r_2,$$

então,

$$a_1 - a_2 = b(q_1 - q_2).$$

Portanto, $b \mid (a_1 - a_2)$. ■

5. Se

$$\alpha = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 = (a_n \cdot 10^n)^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n \cdot a_0 + \cdots + a_0^2.$$

Assim, todas as parcelas terminam em zero com exceção de a_0^2 quando $a_0 \neq 0$. Logo basta observarmos o que acontece com o último algarismo de um número ao o elevarmos ao quadrado. $0^2 = 0, \ 1^2 = 1, \ 2^2 = 4, \ 3^2 = 9, \ 4^2 = 16, \ 5^2 = 25, \ 6^2 = 36, \ 7^2 = 49, \ 8^2 = 64, \ 9^2 = 81$. Logo, todo número quadrado perfeito termina em $0, \ 1, \ 4, \ 5, \ 6$, ou 9.

6. Devemos provar que o número $8^n - 3^n - 6^n + 1^n$ é divisível por 2 e por 5. Use o fato

de que

$$8 \equiv 3\ (mod\ 5) \Rightarrow 8^n \equiv 3^n\ (mod\ 5) \Rightarrow 8^n - 3^n \equiv 0\ (mod\ 5),$$

assim como

$$6 \equiv 1\ (mod\ 5) \Rightarrow 6^n \equiv 1^n\ (mod\ 5) \Rightarrow 6^n - 1^n \equiv 0\ (mod\ 5).$$

Então,

$$(8^n - 3^n) - (6^n - 1^n) \equiv 0\ (mod\ 5).$$

E o número $8^n - 3^n - 6^n + 1^n$ é divisível por 5.

Da mesma forma, temos que

$$8 \equiv 6\ (mod\ 2) \Rightarrow 8^n \equiv 6^n\ (mod\ 2) \Rightarrow 8^n - 6^n \equiv 0\ (mod 2),$$

e

$$3 \equiv 1\ (mod\ 2) \Rightarrow 3^n \equiv 1^n\ (mod\ 2) \Rightarrow 3^n - 1^n \equiv 0\ (mod\ 2).$$

E o número $8^n - 3^n - 6^n + 1^n$ também é divisível por 2. Portanto, esse número é divisível por 10.

7. Note que

$$1^{99} \equiv 1\ (mod\ 5),$$

$$\begin{aligned} 2^2 \equiv -1\ (mod\ 5) \quad &\Rightarrow \quad (2^2)^{49} \equiv -1\ (mod\ 5) \Rightarrow 2^{98} \cdot 2 \equiv -1 \cdot 2 \left(\frac{mod\ 5}{mdc(5,\ 2)} \right) \\ &\Rightarrow \quad 2^{99} \equiv -2\ (mod\ 5), \end{aligned}$$

$$3^2 \equiv -1\ (mod\ 5) \Rightarrow 3^{98} \equiv -1\ (mod\ 5) \Rightarrow 3^{99} \equiv -3\ (mod\ 5),$$

$$4 \equiv -1\ (mod\ 5) \Rightarrow 4^{98} \equiv 1\ (mod\ 5) \Rightarrow 4^{99} \equiv 4\ (mod\ 5)$$

e

$$5^{99} \equiv 0\ (mod\ 5).$$

Agora, temos

$$1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99} \equiv 1 + (-2) + (-3) + 4 + 0\ (mod\ 5).$$

Portanto, o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é divisível por 5.

8. Seja $S = 1^{10} + 2^{10} + \cdots + 100^{10}$ ou $S = 100^{10} + 99^{10} + \cdots + 1^{10}$. Somando-se as duas igualdades, obtemos:

$$2S = (1^{10} + 100^{10}) + (2^{10} + 99^{10}) + \cdots + (99^{10} + 2^{10}) + (100^{10} + 1^{10}).$$

Aplicando-se o conceito de congruência, percebemos que:

$$\begin{array}{lcl} 100^{10} & \equiv & 1^{10}\ (mod\ 101) \\ 99^{10} & \equiv & 2^{10}\ (mod\ 101) \\ & & \cdots \\ 51^{10} & \equiv & 50^{10}\ (mod\ 101), \end{array}$$

e assim basta observamos as congruências de 1^{10} até 1^50.

Observamos que

$$\begin{array}{lclclclcll} 1^{10} & \equiv & 6^{10} & \equiv & 14^{10} & \equiv & 17^{10} & \equiv & 36^{10} & \equiv 1\ (mod\ 101) \\ 10^{10} & \equiv & 32^{10} & \equiv & 39^{10} & \equiv & 41^{10} & \equiv & 44^{10} & \equiv -1\ (mod\ 101) \\ 26^{10} & \equiv & 27^{10} & \equiv & 38^{10} & \equiv & 40^{10} & \equiv & 46^{10} & \equiv 6\ (mod\ 101) \\ 4^{10} & \equiv & 24^{10} & \equiv & 33^{10} & \equiv & 43^{10} & \equiv & 45^{10} & \equiv -6\ (mod\ 101) \\ 2^{10} & \equiv & 12^{10} & \equiv & 28^{10} & \equiv & 29^{10} & \equiv & 34^{10} & \equiv 14\ (mod\ 101) \\ 13^{10} & \equiv & 19^{10} & \equiv & 20^{10} & \equiv & 23^{10} & \equiv & 37^{10} & \equiv -14\ (mod\ 101) \\ 8^{10} & \equiv & 11^{10} & \equiv & 15^{10} & \equiv & 35^{10} & \equiv & 48^{10} & \equiv 17\ (mod\ 101) \\ 9^{10} & \equiv & 21^{10} & \equiv & 25^{10} & \equiv & 47^{10} & \equiv & 49^{10} & \equiv -17\ (mod\ 101) \\ 5^{10} & \equiv & 16^{10} & \equiv & 22^{10} & \equiv & 30^{10} & \equiv & 31^{10} & \equiv 36\ (mod\ 101) \\ 3^{10} & \equiv & 7^10 & \equiv & 18^{10} & \equiv & 42^{10} & \equiv & 50^{10} & \equiv -36\ (mod\ 101) \end{array}$$

$$2S \equiv 2\cdot 5\cdot(1-1) + 2\cdot 5\cdot(6-6) + 2\cdot 5\cdot(14-14) + 2\cdot 5\cdot(17-17) + 2\cdot 5\cdot(36-36)\ (mod\ 101);$$

ou seja, $2S \equiv 0\ (mod\ 101)$ e $S \equiv 0\ (mod\ 101)$, o que significa que 101 divide S.

9.

(a) Note que 2002 é múltiplo de 7, portanto $2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ também é. Basta saber o resto que é deixado em 2005^2 quando dividido por 7.

$$2005 \equiv 3\ (mod\ 7) \Rightarrow 2005^2 \equiv 9\ (mod\ 7) \Rightarrow 2005^2 \equiv 2\ (mod\ 7).$$

Portanto $2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004 + 2005^2$ deixa resto 2 quando dividido por 7.

(b) Basta seguir

$$4 \equiv 1 \ (mod\ 3) \Rightarrow 4^{50} \equiv 1 \ (mod\ 3).$$

Logo, 4^{50} deixa resto 1 quando dividido por 3.

10. É só observar que

$$\begin{aligned} 999994 \equiv 1 \ (mod\ 333331) \quad &\Rightarrow \quad 999994^{2468} \equiv 1^{2468} \ (mod\ 333331) \\ &\Rightarrow \quad 999994^{2468} - 1 \equiv 0 \ (mod\ 333331). \end{aligned}$$

Logo, $999994^{2468} - 1$ é divisível por 333331.

11. Nesses casos, só é necessário observar o que acontece com o último algarismo do número após a elevação do expoente.

(a) Note que $9^{2k} = \cdots 1$ e $9^{2k+1} = \cdots 9$, com $k \in \mathbb{N}$.

Como 2015 é da forma $2k + 1$, então o último dígito do número 1989^{2015} é 9.

(b) Observando a sequência

$$\begin{array}{ccccccc} 7^1 = 7 & ; & 7^2 = 49 & ; & 7^3 = 343 & ; & 7^4 = 2401 \\ 7^5 = 16807 & ; & \cdots & & & & \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

Note que os últimos dígitos se repetem a partir da quinta potência.

Temos que $777 = 4 \cdot 194 + 1$ e o número $777^{777} = 777^{4 \cdot 194+1}$ tem 7 no último dígito.

e

$$\begin{array}{ccccccc} 2^1 = 2 & ; & 2^2 = 4 & ; & 2^3 = 8 & ; & 2^4 = 16 \\ 2^5 = 32 & ; & \cdots & & & & \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

Da mesma forma $2^{50} = 2^{4 \cdot 12+2}$ e deixa 4 no último dígito da potência.

Logo, $777^{777} + 2^{50}$ tem em seu último algarismo o número 1, pois $7 + 4 = 11$.

(c) Faça a potenciação de $1^2 = 1$ até $20^2 = 400$ e perceba que o último dígito da soma dessas potência é igual a zero. Portanto até 2000 que é um múltiplo de 20, o último algarismo da soma, também é zero. Resta ver a soma dos últimos 15 números. Quando você distribuir, perceberá que o último algarismo da soma de 2001^2 a 2015^2 também é zero. Portanto, o último dígito da soma $1^2 + \cdots 2015^2$ é zero.

(d) Observe que

$$\begin{array}{ccc} 4^1 = 4 & ; & 4^2 = 16 \\ 4^3 = 64 & ; & 4^4 = 256 \\ \vdots & & \end{array}$$

Todo número na forma 4^{2k-1} termina com o dígito 4 e na forma 4^{2k} tem último dígito igual a 6, com $k \in \mathbb{N}^*$. (Teste por indução. É fácil.).

(e) Qualquer potência de um número cujo último dígito é 5, termina em 5.

12. Todos os números podem se escritos na forma $7n$, $7n+1$, $7n+2$, $7n+3$, $7n+4$, $7n+5$ e $7n+6$. Temos sete formas de números, usando o Princípio da Casa dos Pombos, o próximo número teria um desses formatos, onde a diferença entre dois números com o mesmo resto, seria um múltiplo de 7.

13.

(a) Temos que $1989 \equiv 1\ (mod\ 7)$, $1990 \equiv 2\ (mod 7)$, $1991 \equiv\ 3\ (mod 7)$ e $1992 \equiv 4\ (mod\ 7)$ o que implica dizer que $1992^3 \equiv 1\ (mod\ 7)$, logo

$$1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1\ (mod\ 7).$$

Portanto, $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^3$ é divisível por 7

(b) Note que

$$9 \equiv 1\ (mod\ 8) \Rightarrow 9^{100} \equiv 1\ (mod\ 8)$$

(c) Observe que

$$\begin{array}{rclcrcl} 2014 & \equiv & 5\ (mod\ 7) & \Rightarrow & 2014^2 & \equiv & 5^2\ (mod\ 7) \\ & & & & & \equiv & 4\ (mod\ 7) \\ 2015 & \equiv & 6\ (mod\ 7) & \Rightarrow & 2015^2 & \equiv & 6^2\ (mod\ 7) \\ & & & & & \equiv & 1\ (mod\ 7) \end{array}$$

Logo,

$$2014^2 + 2015^2 \equiv 4 + 1\ (mod\ 7).$$

14. Seja

$$n^5 + 4n = n \cdot (n^4 + 4),$$

se $5 \mid n$ nada a demonstrar, mas se $5 \nmid n$, então devemos mostrar que $5 \mid (n^4 + 4)$.

Pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p) \Rightarrow n^{5-1} \equiv 1\ (mod\ 5) \Rightarrow n^4 \equiv -4\ (mod\ 5) \Rightarrow n^4 + 4 \equiv 0\ (mod\ 5).$$

Portanto, $n^5 + 4n$ é divisível por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Seguindo a dica, iremos mostrar que $n^3 - n$ é múltiplo de 2^3 e de 3.

    Substituindo n por $2k - 1$, para $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n \cdot (n^2 - 1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n+1) \\ &= (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot 2k \\ &= 4 \cdot (2k-1) \cdot k \cdot (k-1) \end{aligned}$$

    Note que $k \cdot (k-1)$ são números consecutivos, portanto é um número par. Logo $4 \cdot (2k-1) \cdot k \cdot (k-1)$ é um múltiplo de 8.

    Perceba, também que,

$$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1).$$

    Onde $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ são três números consecutivos e, portanto, é um múltiplo de 3. Logo $n^3 - n$ é um múltiplo de 24 para qualquer inteiro n ímpar.

16. Observe que

$$\begin{aligned} 3^3 \equiv -1\ (mod\ 7) &\Rightarrow (3^3)^{671} \equiv (-1)^{671}\ (mod\ 7) \Rightarrow 3^{2013} \equiv -1\ (mod\ 7) \\ &\Rightarrow 3^{2013} \cdot 3^2 \equiv -1 \cdot 3^2 \left(\frac{mod\ 7}{mdc(3^2,\ 7)}\right) \Rightarrow 3^{2015} \equiv 5\ (mod\ 7). \end{aligned}$$

    Portanto, o resto da divisão de 3^{2015} por 7 é 5.

17. Usando o conhecimento de congruência, temos que

$$\begin{aligned} 2222 \equiv 3\ (mod\ 7) &\Rightarrow 2222^3 \equiv -1\ (mod\ 7) \Rightarrow (2222^3)^{1851} \equiv (-1)^{1851}\ (mod\ 7) \\ &\Rightarrow 2222^{5553} \cdot 2222^2 \equiv (-1) \cdot 2222^2 \left(\frac{mod 7}{mdc(2222^2,\ 7)}\right) \\ &\Rightarrow 2222^{5555} \equiv -2\ (mod\ 7). \end{aligned}$$

Assim como,

$$\begin{aligned} 5555 \equiv 4\ (mod\ 7) &\Rightarrow 5555^4 \equiv 1\ (mod\ 7) \Rightarrow \left(5555^4\right)^{555} \equiv 1\ (mod\ 7) \\ &\Rightarrow 5555^{2220} \cdot 5555^2 \equiv 1 \cdot 5555^2\ (mod\ 7) \\ &\Rightarrow 5555^{2222} \equiv 2\ (mod\ 7). \end{aligned}$$

Logo, $2222^{5555} + 5555^{2222}$ deixa resto $-2 + 2 = 0$ quando dividido por 7, portanto esse número é divisível por 7.

18. Resolução dos itens (c) e (d) usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

(c)

$$\begin{aligned} 555.555^2 - 444.444^2 &= (555.555 + 444.444) \cdot (555.555 - 444.444) \\ &= 999.999 \cdot 111.111 \\ &= (1.000.000 - 1) \cdot 111.111 \\ &= 111.111.000.000 - 111.111 \\ &= 111.110.888.889. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} (n+1)^2 - n^2 &= (n + 1 + n) \cdot (n + 1 - n) \\ &= (2n + 1) \cdot 1 \\ &= 2n + 1. \end{aligned}$$

Utilize o item (d) para resolver os itens (a) e (b).

19. O algarismo final de 9867^3 é o mesmo que o de 7^3, isto é, 3; o algarismo final de 9867^2 é o mesmo que o de $7^2 = 49$, isto é, 9. Se de um número terminado em 3 subtraímos outro terminado em 9, o algarismo final do resultado é 4.

20. Cada um dos fatores é da forma diferença de quadrados isto é $a^2 - b^2$, onde $a = 1$. Temos que

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{225}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{15^2}\right).$$

Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{225}\right) &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}_{1}\cdots\underbrace{\frac{15}{14}\cdot\frac{14}{15}}_{1}\cdot\frac{16}{15}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15}\\
&= \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

21. A tabela abaixo mostra como aparece em ordem, dezena e unidade, os dois últimos algarismos de algumas potências de 9.

n	dois últimos algarismos de 9^n	n	dois últimos algarismos de 9^n
0	01	6	41
1	09	7	69
2	81	8	21
3	29	9	89
4	61	10	01
5	49	11	09

Observe que a partir de 9^{10} os dois últimos algarismos são os mesmos, formando uma sequência periódica, de período 10. Como $2015 = 10\cdot 201 + 5$ e os dois últimos algarismos de $9^{10\cdot 201}$ são 01, segue que os dois últimos algarismos de 9^{2015} são os dois últimos algarismos de 9^5, ou seja 49. Daí os dois últimos algarismos de $9^{2015}+1$ são iguais a $49+1=50$. Portanto existe um único zero no final do número $9^{2015}+1$.

22. Seja x um número de oito algarismos da forma

$$x = 9999 * * * *.$$

Como o menor desses números é 99.990.000 e o maior é 99.999.999, temos que:

$$99.990.000 \leqslant x \leqslant 99.999.999.$$

Observemos que $10^8 = 100.000.000 = 99.999.999 + 1$. Então $99.990.000 \leqslant x < 10^8$.

Como $10^8 = (10^4)^2 = 10.000^2$, temos que $99.990.000 \leqslant 10.000^2$. Agora o maior quadrado perfeito menor que 10.000^2 é igual a

$$9.999^2 = (10.000-1)^2 = 10.000^2-20.000+1 = 100.000.000-20.000+1 = 99.980.001.$$

Como $99.980.001 < 99.990.000$ concluímos que $9.999^2 < x < 10.000^2$. Isto mostra que x está compreendido entre dois quadrados perfeitos consecutivos. Portanto, x não pode ser um quadrado perfeito.

23. A inequação $\sqrt{n}-\sqrt{n-1} < 0,01$ é equivalente a $\sqrt{n} < 0,01+\sqrt{n-1}$. Como os dois lados desta inequação são números positivos, podemos elevar esses dois membros ao quadrado para obter a inequação equivalente:

$$\left(\sqrt{n}\right)^2 < \left(0,01 + \sqrt{n-1}\right)^2 \Leftrightarrow n < 0,01^2 + 0,02\sqrt{n-1} + n - 1.$$

Daí, obtemos

$$\sqrt{n-1} > \frac{1-0,01^2}{0,02} = \frac{1-\dfrac{1}{100^2}}{\dfrac{2}{100}} = \frac{100^2-1}{200}.$$

Elevando novamente ao quadrado os dois lados (não negativos) desta inequação, obtemos:

$$n-1 > \frac{(100^2-1)^2}{200^2} = \frac{100^4 - 2\cdot 100^2 + 1}{4\cdot 100^2} = \frac{100^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot 100^2},$$

ou seja,

$$n-1 > 2.500 - \frac{1}{2} + \frac{1}{40.000} \Leftrightarrow n > 2.500 - \frac{1}{2} + \frac{1}{40.000} + 1 \Leftrightarrow n > 2.500 + \frac{1}{2} + \frac{1}{40.000}.$$

Uma vez que temos $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{40.000} < 1$, é fácil observar que o menor número inteiro maior que $2.500 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{40.000}$ é 2.501.

Daí concluímos que o menor número inteiro positivo que satisfaz a desigualdade dada é o número 2.501.

24. Inicialmente, observemos que:

$$\begin{aligned} N &= (n+6m)\cdot(2n+5m)\cdot(3n+4m) \\ &= (n+7m-m)\cdot(2n+7m-2m)\cdot(3n+7m-3m) \\ &= (n-m+7m)\cdot[2\cdot(n-m)+7m]\cdot[3\cdot(n-m)+7m] \\ &= (k+7m)\cdot(2k+7m)\cdot(3k+7m), \end{aligned}$$

onde $k = n - m$.

Afirmamos que se N é múltiplo de 7, então k é múltiplo de 7. De fato, como 7 é primo e divide N, então um dos fatores $k+7m$, $2k+7m$ ou $3k+7m$ é múltiplo de 7. Temos:

(i) Se $k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{k+7m}{7} = \dfrac{k}{7} + m$ é inteiro, logo k é múltiplo de 7. Segue que $2k$ e $3k$ também são múltiplos de 7 e portanto os três fatores $k+7m$, $2k+7m$ e $3k+7m$ são múltiplos de 7. Concluímos que N é múltiplo de 7^3.

(ii) Se $2k+7m$ é múltiplo de 7, então $\dfrac{2k+7m}{7} = \dfrac{2k}{7} + m$ é inteiro, logo $2k$ é múltiplo de 7. Como 2 e 7 são primos entre si, segue que k é múltiplo de 7, o que leva ao caso anterior.

(iii) Se $3k+7m$ é múltiplo de 7, analogamente concluímos que k é múltiplo de 7.

25. As condições do problema equivalem a dizer que:

$$2a-5 = 2\cdot(a+1)-7 = 2\cdot(a+2)-9 = 2\cdot(a+3)-11,$$

é múltiplo de 5, 7, 9 e 11, donde é múltiplo de $5\cdot 7\cdot 9\cdot 11 = 3.465$. Assim, o menor valor de a é tal que $2a-5 = 3.465$, ou seja, $a = 1.735$.

26. De $2^8 + 2^{11} + 2^m = n^2$, m, $n \in \mathbb{N}$, segue $2^m = (n-48)\cdot(n+48)$.

Logo, $n+48 = 2^q$ e $n-48 = 2^p$, com $p+q = m$ e $p < q$.

Assim, $2^q - 2^p = 2^p\cdot(2^{q-p}-1) = 96 = 2^5\cdot 3$ e, como $2^{q-p}-1$ é ímpar, segue que $2^p = 2^5$ e $2^{q-p}-1 = 3$.

Daí, $p = 5$, $q-p = 2$, $q = 7$ e, portanto, $m = 12$ e $n = 80$.

27. Note que

$$\begin{aligned} 3^2 &\equiv -1\ (mod\ 5) \\ (3^2)^{222} &\equiv 1\ (mod\ 5), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 4 &\equiv -1\ (mod\ 5) \\ 4^{333} &\equiv -1\ (mod\ 5). \end{aligned}$$

Portanto, $3^{444}+4^{333}$ deixa resto $-1+1=0$ quando dividido por 5. Logo, $3^{444}+4^{333}$ é divisível por 5.

28. Um cubo perfeito é um número da forma a^3, onde a é um número natural. Como $9^4=(3^2)^4=3^8$, os cubos perfeitos que dividem 3^8, são 3^3 e $(3^2)^3=3^6$.

29. Observamos primeiramente que, se um número n não é divisível por 3 ent]ao ele é da forma $3k+1$ ou $3k+2$, logo n^3 é da forma $9k+1$ ou $9k+8$.

Suponha que nenhum dos inteiros a, b e c seja divisível por 3. Segue que os cubos desses números são da forma $9k+1$ ou $9k+8$.

Considerando todas as possibilidaes para a soma de três cubos, a soma $a^3+b^3+c^3$ será da forma $9k+1$, $9k+3$, $9k+6$ ou $9k+8$:

			a^3+b3+c^3
$9k_1+1$	$9k_2+1$	$9k_3+1$	$9k+3$
$9k_1+1$	$9k_2+1$	$9k_3+8$	$9k+1$
$9k_1+1$	$9k_2+8$	$9k_3+8$	$9k+8$
$9k_1+8$	$9k_2+8$	$9k_3+8$	$9k+6$

Portanto, obtemos $a^3+b^3+c^3$ não divisível por 9.

Outra solução: Observamos primeiramente que, se um número n não é divisível por 3 então ele é da forma $3k+1$ ou $3k+2$, logo n^3 é da forma $9k+1$ ou $9k+8$.

Portanto, se n não é divisível por 3 então $n^3\equiv 1\ (mod\ 9)$ ou $n^3\equiv 8\ (mod\ 9)$.

Suponha que nenhum dos inteiros a, b e c seja divisível por 3. Segue que os cubos desses números congruentes a 1 ou a 8 módulo 9.

Considerando todas as possibilidades para a soma de três cubos teremos:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &\equiv 1+1+1 \equiv 3\ (mod\ 9) \\ a^3+b^3+c^3 &\equiv 1+1+8 \equiv 1\ (mod\ 9) \\ a^3+b^3+c^3 &\equiv 1+8+8 \equiv 8\ (mod\ 9) \\ a^3+b^3+c^3 &\equiv 8+8+8 \equiv 6\ (mod\ 9) \end{aligned}$$

Portanto, obtemos $a^3+b^3+c^3$ não divisível por 9.

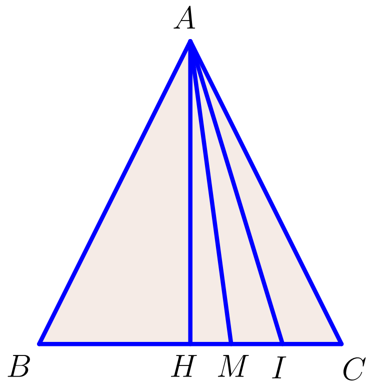
30. Utilizando o processo das divisões sucessivas, para os inteiros positivos a, b, obtém-se:

$$\begin{aligned}
a &= b \cdot 1 + r; & 0 < r < b \\
b &= r \cdot 5 + r_1; & 0 < r_1 < r \\
r &= r_1 \cdot 3 + r_2; & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 \cdot 3 + r_3; & 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3 \cdot 1 + r_4; & 0 < r_4 < r_3 \\
r_3 &= r_4 \cdot 3
\end{aligned}$$

Portanto, $r_4 = (a,\ b) = 20$ e $r_3 = 60$. Substituindo esses valores nas equações anteriores encontra-se $a = 6180$ e $b = 5200$.

5.3 Alguns Tópicos de Geometria Euclidiana

1. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC, e AI, AM e AH, as supostas bissetriz, mediana e altura relativa à base BC, respectivamente.



Vamos mostrar que AI, AM e AH são coincidentes.

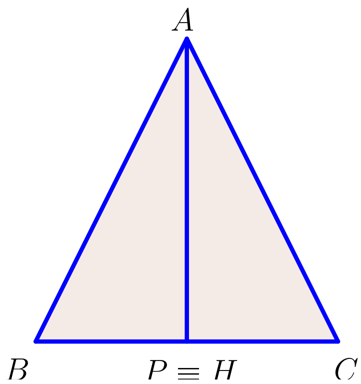
Note que os triângulos ABM e ACM são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$ e AM é coincidente aos dois triângulos.

Os triângulos ABI e ACI são congruentes pelo caso ALA, pois $\widehat{BAI} \equiv \widehat{CAI}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\widehat{ABI} \equiv \widehat{ACI}$, onde $\overline{BI} = \overline{CI}$, logo $I \equiv M$.

Os triângulos ABH e ACH são congruentes pelo caso LAA_O, pois $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\widehat{ABH} \equiv \widehat{ACH}$ e $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90°$, onde $\overline{BH} = \overline{CH}$, logo $H \equiv I \equiv M$.

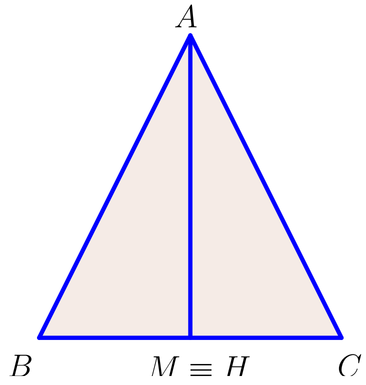
Portanto, AI, AM e AH são coincidentes.

2. Considere o triângulo ABC, onde P coincide com H.

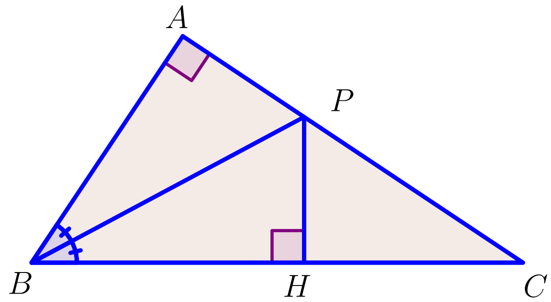


Como $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$, AP é comum aos triângulos BAP e CAP e $\widehat{APB} = \widehat{APC}$, então os triângulos BAP e CAP são congruentes pelo caso ALA, então $AB = AC$ e, portanto, o triângulo ABC é isósceles.

Da mesma forma, pode-se observar que os triângulos AMB e AMC são congruentes pelo caso LAL, com $BM = CM$, $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90°$ e $AM = AH$.

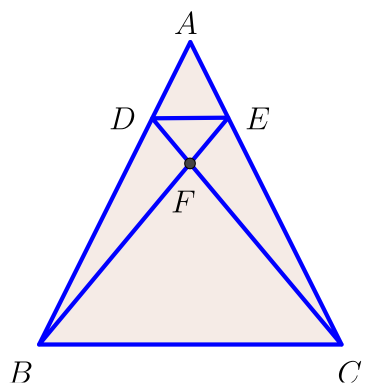


3. Considere o triângulo retângulo ABC, onde $PH = 2\ cm$ é a distância do pé da bissetriz à hipotenusa BC.



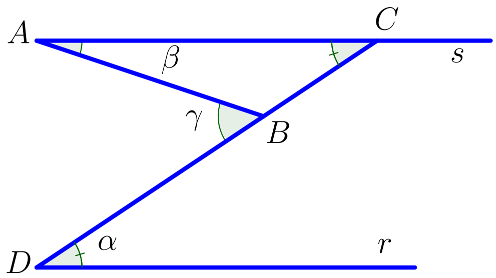
Os triângulos ABP e HBP são congruentes pelo caso LAA_O, pois BP é lado comum aos dois triângulos, $\widehat{ABP} = \widehat{HBP}$ e $\widehat{BAP} = \widehat{BHP} = 90°$, onde $AP = HP = 2\ cm$.

4. Observe o triângulo abaixo



Nele o quadrilátero $BCED$ é um trapézio isósceles, onde $BC \parallel DE$ e $BD = CE$. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $\Delta BCD = \Delta CBE$, o que implica dizer que $\widehat{CEB} = \widehat{BCD}$, portanto o triângulo BCF é isósceles de base BC e $BF = CF$.

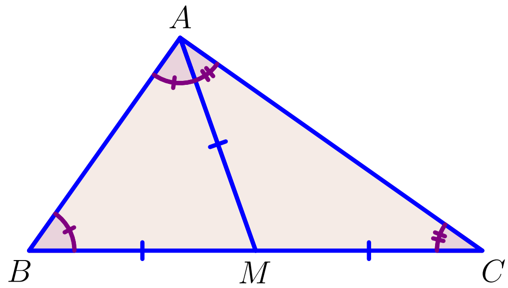
5. Na figura abaixo, prolongue a semirreta $\overrightarrow{DB}$ até tocar em C na reta s. O ângulo $\widehat{BCA}$ é igual a α, pois são alternos internos.



No triângulo ABC, pelo teorema do ângulo externo, temos que

$$\widehat{BCA} + \beta = \gamma \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma.$$

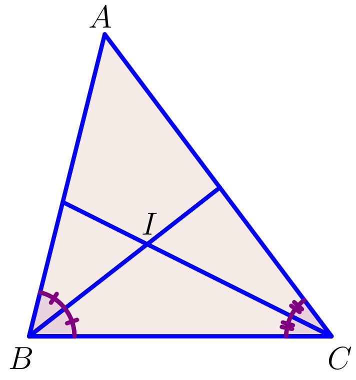
6. Os triângulos ABM e ACM são isósceles de bases AB e AC, respectivamente.



Com isso, $\widehat{ABM} = \widehat{BAM}$ e $\widehat{CAM} = \widehat{ACM}$. Note que a soma dos ângulos $\widehat{ABM}$ e $\widehat{ACM}$ é igual ao $\widehat{BAC}$, isso só acontece no triângulo retângulo.

$$\widehat{ABM} + \widehat{ACM} + \widehat{BAC} = 180° \Rightarrow 2 \cdot \widehat{ABM} + 2 \cdot \widehat{ACM} = 180° \Rightarrow \widehat{BAC} = 90°.$$

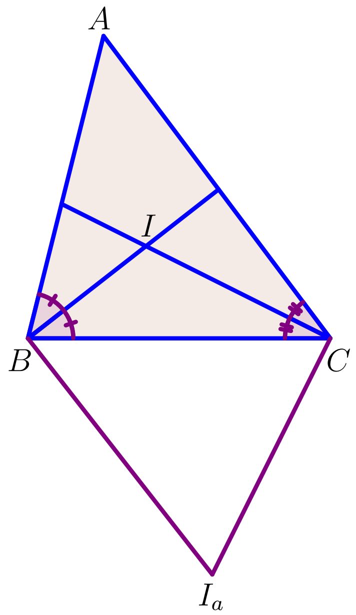
7. Considere o triângulo ABC e I o ponto de itersecção das bissetrizes internas dos vértices B e C.



Já vimos no problema 7 dessa seção que

$$\begin{aligned}
\widehat{BIC} = \widehat{BAC} + \underbrace{\widehat{ABI} + \widehat{ACI}} \quad &\Rightarrow \quad \widehat{BIC} = \widehat{BAC} + \underbrace{\frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C}} \\
&\Rightarrow \quad \widehat{BIC} = \widehat{BAC} + 180^\circ - \widehat{BIC} \\
&\Rightarrow \quad \widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC}.
\end{aligned}$$

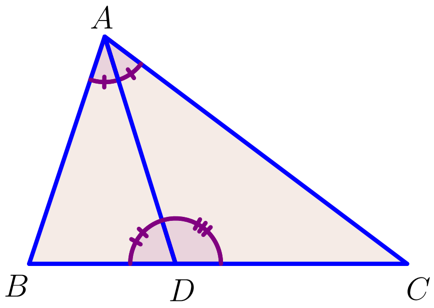
8. Na figura abaixo, observe o quadrilátero IBI_aC.



Temos que

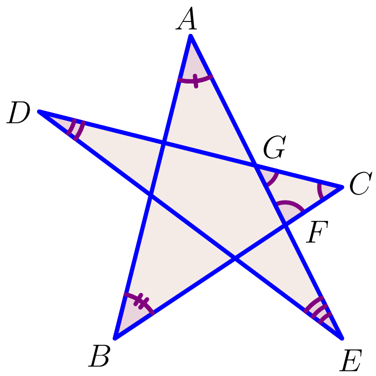
$$\begin{aligned}
\widehat{CIB} + \widehat{IBI_a} + \widehat{BI_aC} + \widehat{I_aCI} = 360^\circ \quad &\Rightarrow \quad 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC} + 90^\circ + \widehat{I}_a + 90^\circ = 360^\circ \\
&\Rightarrow \quad \widehat{I}_a = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}.
\end{aligned}$$

9. Constroi a figura e monta um sistema, usando o teorema do ângulo externo.



$$\left\{\begin{array}{lcl}\frac{1}{2}\widehat{A}+\widehat{B} & = & \widehat{ADC} \\ \\ \frac{1}{2}\widehat{A}+\widehat{C} & = & \widehat{ADB}\end{array}\right. \Rightarrow \widehat{ADC}-\widehat{ADB}=\widehat{B}-\widehat{C}$$

10. Use por duas vezes o teorema do ângulo externo na figura.



Temos que $\widehat{F}=\widehat{A}+\widehat{B}$ e $\widehat{G}=\widehat{D}+\widehat{E}$, portanto

$$\widehat{F}+\widehat{G}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}=180^\circ.$$

11. **Uma solução:** Trace as paralelas DB' e DC' em relação à AB e AC, respectivamente. Temos que $\widehat{BAC}=\widehat{B'DC'}$, $\widehat{ABD}=\widehat{BDB'}$ (Opostos Pelo Vértice) e $\widehat{ACD}=\widehat{CDC'}$, o que conclui que $\alpha=\widehat{BAC}+\widehat{ABD}+\widehat{ACD}$.

Outra solução: Prolongue BD, intersectando AC num ponto P, onde

$$\widehat{DPC}=\widehat{BAC}+\widehat{ABD}.$$

O ângulo α é ângulo externo do triângulo CDP, portanto

$$\alpha = \widehat{DPC} + \widehat{ACD} \Rightarrow \alpha = \widehat{BAC} + \widehat{ABD} + \widehat{ACD}.$$

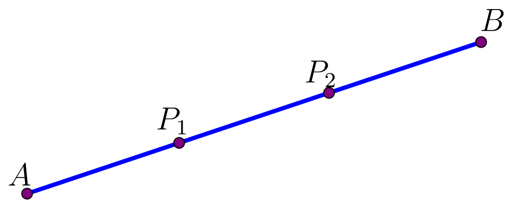
12. Pelo caso de congruência ALA, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC.

13. Note que

$$\alpha = \beta,\ \gamma = \delta \Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA,$$

pelo caso de congruência ALA, pois AC é comum aos dois triângulos.

14. Considere o segmento AB e os pontos internos P_1 e P_2.



Temos que:

$$\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP_2}{P_2B} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB - P_1B}{P_1B} = \frac{AB - P_2B}{P_2B}$$

$$\Rightarrow \quad AB \cdot P_2B - \underbrace{P_1B \cdot P_2B} = AB \cdot P_1B - \underbrace{P_1B \cdot P_2B}$$

$$\Rightarrow \quad P_2B = \frac{AB \cdot P_1B}{AB} \Rightarrow P_2B = P_1B \Rightarrow P_1 \equiv P_2.$$

15. Construir a figura.

16. Como ABC e DEF são triângulos equiláteros, cada um dos seus ângulos internos mede $60°$. No triângulo AGD, temos

$$\widehat{GAD} = 180° - 75° - 60° = 45°$$

e

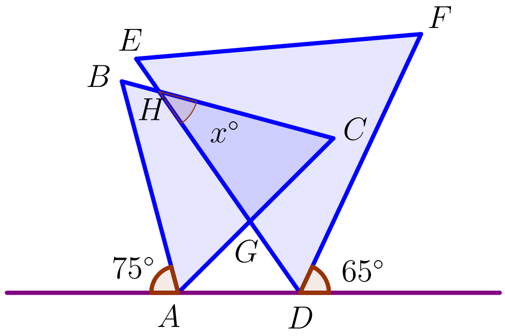
$$\widehat{GDA} = 180° - 65° - 60° = 55°.$$

Portanto, $\widehat{AGD} = 180° - 45° - 55° = 80°$. Logo, no triângulo CGH temos

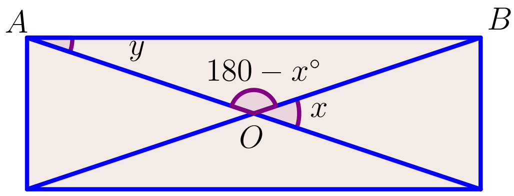
$$x + 80° + 60° = 180°,$$

donde

$$x = 40^\circ.$$



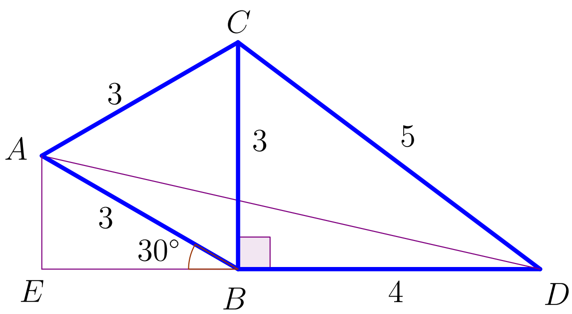
17. Seja O o ponto de interseção das duas diagonais do retângulo. Então $AO = BO$, portanto o triângulo AOB é isósceles e logo $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = y$.



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, no triângulo AOB temos:

$$2y + (180^\circ - y) = 180^\circ \Rightarrow x = 2y.$$

18. Seja E o ponto sobre a reta BD tal que o triângulo AEB seja retângulo no vértice E.



No triângulo retângulo ΔAEB temos:

$$cos\ 30^\circ = \frac{EB}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EB}{3} \Rightarrow EB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ 30^\circ = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AE}{3} \Rightarrow AE = \frac{3}{2}.$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AED obtemos

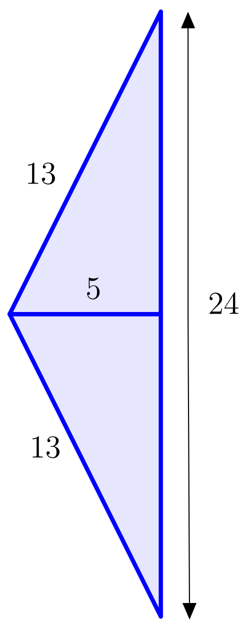
$$AD^2 = AE^2 + ED^2 \Rightarrow AD^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 4\right)^2 \Rightarrow AD^2 = 25 + 12\sqrt{3}.$$

Daí, concluímos que $AD = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}\ cm$.

19. Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base coincide com a mediana. Traçando esta altura, obtemos dois triângulos retângulos com catetos medindo h e 5 e hipotenusa 13. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow h = \sqrt{144} = 12.$$

Logo, a área do triângulo é $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 60\ cm^2$.



20. Lembre que, num triângulo, qualquer lado é maior que a diferença e menor que a soma dos outros dois. Do triângulo ADB temos

$$AD - AB < BD < AD + AB,$$

e do triângulo CBD segue que

$$BC - CD < BD < BC + CD.$$

Substituindo os valores conhecidos obtemos:

$$9 - 5 < BD < 5 + 9 \; e \; 17 - 5 < BD < 17 + 5,$$

ou seja,

$$4 < BD < 14 \; e \; 12 < BD < 22.$$

Das duas desigualdades concluímos que

$$12 < BD < 14.$$

Como BD é inteiro, só podemos ter $BD = 13$.

21. O triângulo de Reuleaux é formado por 4 regiões: um triângulo equilátero e três calotas. cada calota é um sexto de um círculo de raio 1 do qual foi retirado um triângulo equilátero de lado 1.

    Pelo Teorema de Pitágoras, a altura do triângulo equilátero é:

    $$h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

    logo a área do triângulo vale:

    $$\frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\; cm^2.$$

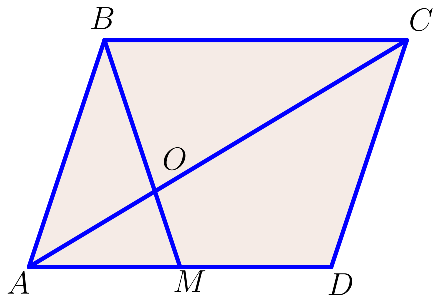
    A área de um setor circular é um sexto da área do círculo, ou seja, igual a $\frac{\pi}{6}$. Logo, a área da calota é a diferença:

    $$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

    Portanto, a área do triângulo de Reuleaux é

    $$3 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\; cm^2.$$

22. Os segmentos AD e BC são paralelos. Então, valem as seguintes igualdades entre os ângulos: $\widehat{OAM} = \widehat{OCB}$ e $\widehat{OBC} = \widehat{OMA}$



Logo, pelo caso **Ângulo-Ângulo**, os triângulos AOM e COB são semelhantes. Como o ponto M é o ponto médio do segmento AD, temos que

$$BC = AD = 2 \cdot AM.$$

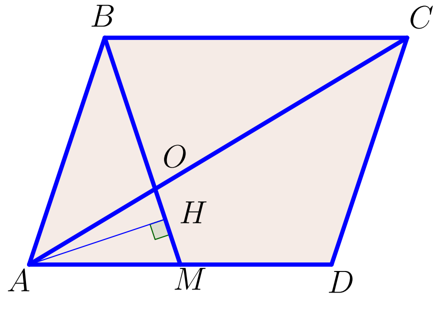
Portanto, a proporção entre as medidas dos triângulos AOM e COB é de 1 para 2, isto é, o comprimento de cada lado, e também da altura, do triângulo COB mede o dobro do comprimento do seu lado correspondente no triângulo AOM. Isso mostra que

$$BO = 2 \cdot OM.$$

Como a altura do triângulo AOM é o dobro da altura do triângulo COB, então a proporção entres suas áreas é de 1 para 4, ou seja

$$\frac{S_{AOM}}{S_{COB}} = \frac{1}{4}.$$

Note que o segmento AH funciona como altura comum para os triângulos BAO e OAM como mostra a figura abaixo:



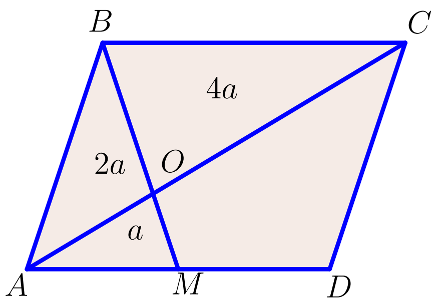
Concluímos assim que

$$S_{BAO} = \frac{BO \cdot AH}{2} = 2 \cdot \frac{OM \cdot AH}{2} = 2 \cdot S_{OAM}.$$

De maneira análoga, os triângulos BAO e OBC compartilham a mesma altura. Como $OC = 2 \cdot AO$, então

$$S_{OBC} = 2 \cdot S_{AOB}.$$

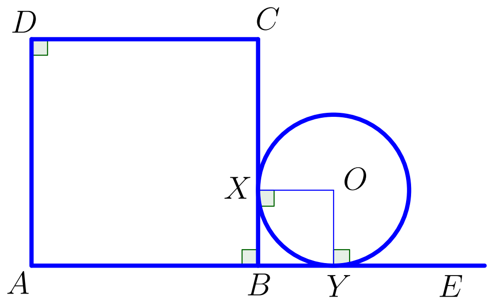
Chamemos de a a medida da área do triângulo AOM. Acima, acabamos de mostrar que a área do triângulo AOB é igual a $2a$, e que a área do triângulo OBC é igual a $4a$, como mostrado na figura a seguir:



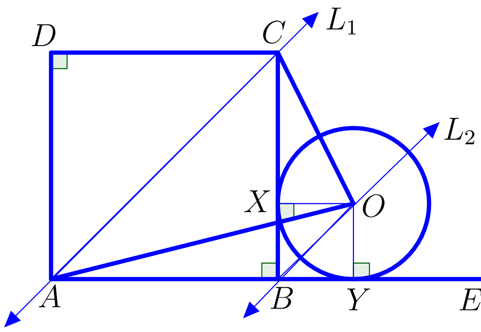
Agora, observe que os triângulos ABC e ADC são congruentes, pelo **caso LLL**. Logo esses dois triângulos têm a mesma área. Como a área do triângulo ABC é igual a $6a$, para que o triângulo ACD tenha a mesma área é necessário que a área do quadrilátero $MOCD$ seja igual a $5a$. Pelo dado do problema temos que $5a = 5\ cm^2$. Daí decorre que $a = 1\ cm^2$. Segue que a área do triângulo AOM é igual a 1.

23.

(a) Sejam X e Y os pontos nos quais a circunferência de centro O tangencia os segmentos BC e BE, como ilustrado na figura a seguir. Observemos primeiro que se desenhamos os segmentos que partem do centro O da circunferência e terminam em X e Y, obtemos como resultado um quadrado $BYOX$.

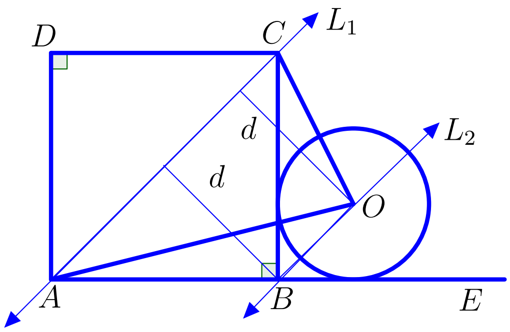


De fato, como X e Y são pontos de tangência, OX deve ser ortogonal a CB e OY deve ser ortogonal a BE. Isso mostra que $BYOX$ é um retângulo. Mas os lados OX e OY são raios para a circunferência e, portanto, têm o mesmo comprimento. Concluímos assim que $BYOX$ é de fato um quadrado. Logo, BO é a diagonal do quadrado $BYOX$, e então $\widehat{OBE} = 45°$.



Como $\widehat{CAB} = 45°$, então as retas L_1 e L_2 são paralelas.

(b) Observe que os triângulos ABC e AOC compartilham a mesma base AC. Por outro lado, a distância do vértice B ao segmento AC e a distância do vértice O ao segmento AC coincidem, ambas, com a distância entre as duas linhas paralelas L_1 e L_2, como podemos ver na figura a seguir.

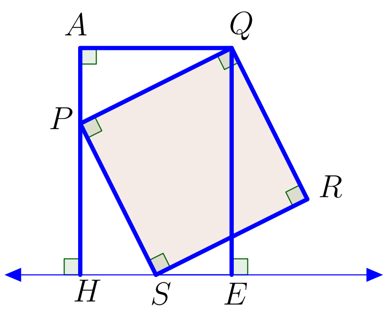


Chamemos de d tal distância. Então, pela fórmula da área de um triângulo, concluímos que

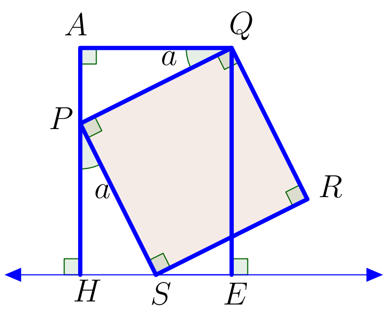
$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot d}{2} = S_{AOC}.$$

Se a área do quadrado $ABCD$ é 36 cm^2, então $S_{ABC} = 18\ cm^2$. Portanto, a área do triângulo AOC é igual a 18 cm^2.

24. Podemos completar o desenho de modo que, na figura seguinte, $HAQE$ seja um retângulo.



Se chamamos $\widehat{HPS} = a°$, então $\widehat{PQA} = a°$. Observe, que deste modo, os triângulos PHS e QAP possuem os mesmos ângulos internos, como ilustrado na figura a seguir.



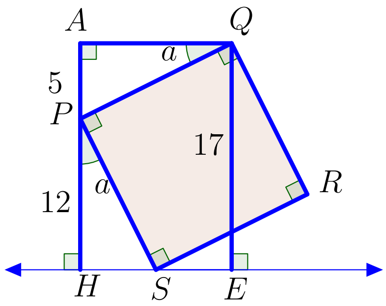
Como $SPQR$ é um quadrado, vemos que o comprimento da hiotenusa do triângulo PHS coincide com o comprimento da hipotenusa do triângulo QAP. Concluímos que PHS e QAP são triângulos congruentes. Logo,

$$AQ = PH = 12.$$

Como $HAQE$ é um retângulo, temos que $AQ = HE$. Logo, temos que

$$HE = 12. \tag{5.2}$$

Pelo mesmo motivo, $AH = QE = 17$ e então $AP = AH - PH = 17 - 12 = 5$, como mostra a figura abaixo.

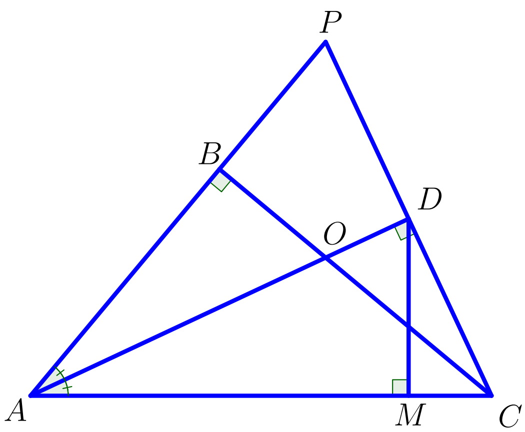


Lembrando que os triângulos PHS e QAP são congruentes, concluímos que

$$HS = AP = 5 \tag{5.3}$$

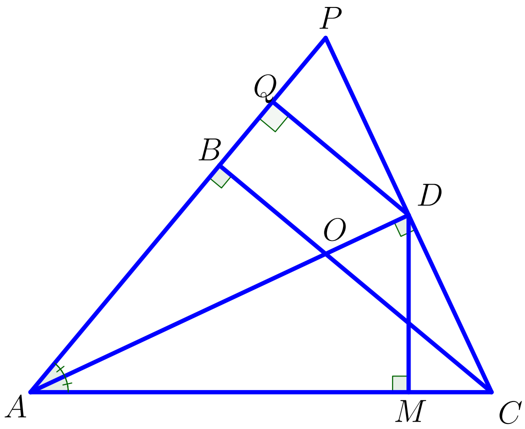
De 5.2 e 5.3 segue-se que $SE = 12 - 5 = 7$.

25. Observemos primeiro que se prolongarmos os segmentos AB e CD, conseguiremos o triângulo APD, congruente ao triângulo ADC, como mostrado na figura seguinte.



Eles são congruentes porque têm os mesmos ângulos internos e compartilham o mesmo cateto AD. Logo, $PD = DC$. Agora, traçamos o segmento QD ortogonal ao segmento PB.

Os triângulos AQD e AMD possuem os mesmos ângulos internos e compartilham a mesma hipotenusa AD. Logo, esses triângulos são congruentes e $QD = DM = 10$.



Por outro lado, como QD e BC são paralelos, então os triângulos PQD e PBC possuem os mesmos ângulos internos. Eles são semelhantes. Como $PC = 2 \cdot PD$, então a proporção dos triângulos é de 1 para 2. Isso implica que

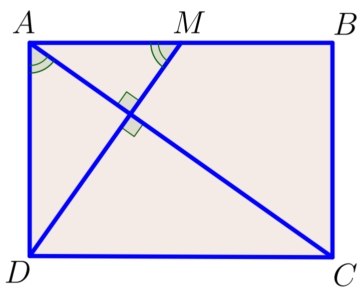
$$BC = 2 \cdot QD = 2 \cdot 10 = 20.$$

Logo, $BO = BC - OC = 20 - 12 = 8$.

26. Chamemos de P o ponto de interseção dos segmentos AC e DM. Como a soma dos ângulos internos do triângulo APM é $180°$, então

$$\widehat{MAP} = 90° - \widehat{AMP}.$$

Mas $\widehat{MAP} + \widehat{PAD} = 90°$. Então, concluímos que $\widehat{PAD} = \widehat{AMP}$. Acabamos de mostrar assim que os triângulos retângulos MAD e ADC possuem os mesmos ângulos internos. Eles são portanto semelhantes.



Aplicando a semelhança entre esses triângulos temos:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{MA}{AD}. \tag{5.4}$$

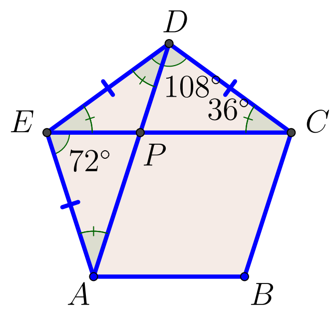
Sabemos que $AD = 4$ e que $DC = 2 \cdot MA$. Usando esses fatos em 5.4 obtemos $MA = 2 \cdot \sqrt{2}$ e portanto $DC = 4 \cdot \sqrt{2}$. Finalmente, a área do retângulo $ABCD$ resulta $AD \cdot DC = 16 \cdot \sqrt{2}$.

27. Cada ângulo interno do pentágono regular tem medida

$$a_i = 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108°.$$

Como $DC = DE$, o triângulo CDE é isóscles de vértice D, e, como $\widehat{CDE} = 180°$, temos

$$\widehat{DCE} = \widehat{DEC} = \frac{180 - 108}{2} = 36°.$$



Como os triângulos CDE e DEA são congruentes (LAL), temos também que $\widehat{DAE} = \widehat{ADE} = 36°$. Como $\widehat{EAP} = 36°$ e $\widehat{PEA} = 108 - 36 = 72°$, temos que $\widehat{EPA} = 180 - 36 - 72 = 72°$, logo o triângulo EAP é isósceles de vértice A. Com isso, $AP = EA = a$.

Os triângulos DPE e DEA possuem, cada um, dois ângulos de medida 36°, fazendo com que seus terceiros ângulos tenham também a mesma medida. Assim, esses triângulos são semelhantes, com

$$\frac{PD}{EA} = \frac{DE}{AD}.$$

Como $EA = DE = a$ e $AD = AP + PD = a + PD$, temos

$$\frac{PD}{a} = \frac{a}{a + PD},$$

logo,

$$a \cdot PD + PD^2 = a^2,$$

e então,

$$PD^2 + a \cdot PD - a^2 = 0.$$

Resolvendo a equação, temos

$$PD = \frac{-a \pm \cdot\sqrt{5a^2}}{2}.$$

Tomando a solução positiva, temos

$$PD = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

28. No triângulo ABC, temos que h_a é a altura relativa ao lado a, h_b é a altura relativa ao lado b e h_c é a altura relativa ao lado c. Sendo assim, podemos escrever três relações que fornecem a mesma área, ou seja, a área do triângulo ABC é

$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

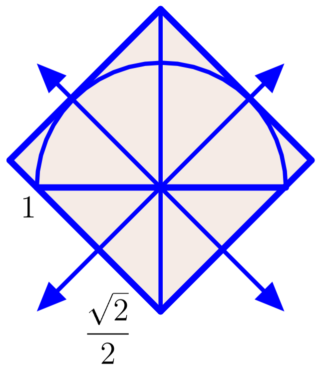
Dessa forma, temos que $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$. Como $a \cdot h_a = \frac{a}{\frac{1}{h_a}}$, podemos reescrever a expressão anterior na forma

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}},$$

o que mostra que os triângulos de lados a, b, c e lados $\frac{1}{\frac{1}{h_a}}$, $\frac{1}{\frac{1}{h_b}}$, $\frac{1}{\frac{1}{h_c}}$ são semelhantes.

29. Trace a diagonal do quadrado que é perpendicular ao diâmetro do semicírculo para localizar o centro do semicírculo. Trace as retas que passam pelo centro do semicírculo e pela intersecção do semicírculo com os lados do quadrado. Como o vértice inferior do quadrado é um ângulo reto então o vértice inferior pertence à circunferência que contém o semicírculo, portanto o segmento que une o centro a este vértice é igual ao raio do semicírculo. Usando as propriedades que aprendemos sobre os triângulos isósceles a respeito de mediana, bissetriz e altura, temos, portanto, as seguintes medidas na figura abaixo.

O quadrado é constituído por dois quadrados, um de lado 1 e outro de lado $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e



dois retângulos de lados 1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo a área S do quadrado é:

$$S = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

5.4 Princípio Fundamental de Contagem

1. (a) Para escolher o porta-voz, temos 10 possibilidades, já que são dez alunos. Escolhido o porta-voz, temos agora 9 possibilidades para escolher o aluno que será o diretor de artes. Finalmente, para escolher o assessor técnico, restam 8 possibilidades. Logo, temos

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

maneiras diferentes para escolher a comissão pedida.

(b) Para a escolha do porta-voz temos três possibilidades dentre Marcelo, Renato e Leandro. Escolhido o porta-voz, restam duas possibilidades para escolher o diretor de artes. Escolhido os dois cargos anteriores, só resta uma possibilidade para escolher o último cargo. Logo, temos

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

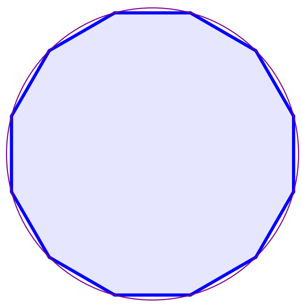
maneiras diferentes para escolher ima comissão que tenha os alunos Marcelo, Leandro e Renato. Uma outra maneira de fazer esse item é listar todas as comissões com todos os alunos.

(c) Não havendo mais cargos, as comissões listadas no item (b) são todas iguais. Para contar quantas são as comissões sem cargo, vamos agrupar as comissões com cargos (porta-voz, diretor de artes e assessor técnico) em grupos de seis que tenham os mesmos três alunos. Como são 720 comissões com cargo, e são grupos de 6 com as mesmas pessoas, obtemos

$$\frac{720}{6} = 120$$

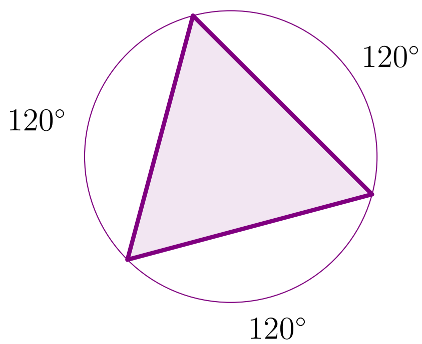
maneiras diferentes de compor uma comissão sem cargos.

2. Podemos inscrever o dodecágono regular em um círculo como mostra a seguinte figura:

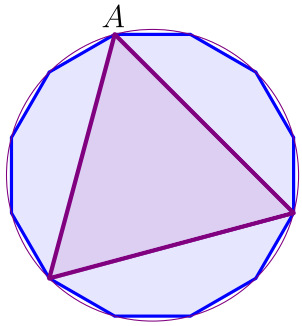


Então os arcos que correspondem a cada um dos lados do dodecágono devem medir $\left(\frac{360}{12}\right)^{\circ} = 30°$.

(a) Os triângulos equiláteros que podemos formar estarão também inscritos no círculo. Sabemos que a medida do arco que corresponde a um lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência deve ser $\left(\frac{360}{3}\right)^{\circ} = 120°$.



Se fixarmos um vértice, digamos A no gráfico, existirá um único triângulo equilátero usando o vértice A.



Podemos contar assim 12 triângulos (um para cada vértice). Neste caso, cada triângulo seria contado três vezes. Concluímos que existem $\frac{12}{3} = 4$ triângulos equiláteros inscritos no dodecágono.

(b) Para contar o número de triângulos escalenos, podemos contar o número total de triângulos e subtrair o número de triângulos isósceles e equiláteros.

Primeiro, contaremos os triângulos isósceles que não são equiláteros. Fixemos um vértice, digamos, A. Existem quatro triângulos isósceles não equiláteros inscritos no dodecágono cujo vértice A corresponde ao ângulo desigual.

Podemos contar, assim, quatro triângulos isósceles por cada vértice do dodecágono, isto é, $4 \cdot 12 = 48$ triângulos isósceles não equiláteros no total.

Contemos o número total de triângulos. Para determinar um triângulo, devemos escolher três vértices no conjunto de 12 vértices do dodecágono. Para escolher o primeiro vértice do triângulo, temos 12 alternativas, para o segundo, 11 e para o terceiro, restam 10. Mas no produto $12 \cdot 11 \cdot 10$ estamos contando várias vezes um mesmo triângulo. Observe que há seis formas possíveis para ordenar os vértices de um triângulo.

Portanto, no produto $12 \cdot 11 \cdot 10$, cada triângulo está sendo contado seis vezes. Concluímos que há, no total, $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$ triângulos inscritos no dodecágono. Daí o número de triângulos escalenos será igual a

$$220 - 4 \cdot 12 - 4 = 168.$$

3. (a) Começamos escrevendo os primeiros números da lista:

$$12345,\ 12354,\ 12435,\ 12453,\ 12534,\ 12543,\ 13245,\ 13254,\ 13425,\ 13452.$$

Logo, o décimo número é 13452.

(b) Para encontrar o número que ocupa a posição 85, percebemos que sempre que um número de cinco dígitos começa com o dígito 1, este número é menor do que um que começa com o número 2. Por sua vez, este número é menor do que um que começa com 3, e assim por diante. Então, contaremos quantos destes números começam com cada um desses algarismos.

Se fixarmos o primeiro dígito, por exemplo 1, vamos ter quatro escolhas para o segundo dígito. Para o terceiro dígito vamos ter só três escolhas. Teremos duas escolhas para o quarto dígito e uma única escolha para o último dígito. Logo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números de cinco dígitos, que serão os primeiros números da lista.

Analogamente, teremos 24 números que começam com 2, que serão os próximos 24 números da lista. Da mesma forma, teremos 24 números que começam com o dígito 3, totalizando 72 números da lista. O que significa dizer que o primeiro número que começa com 4, está na posição 73 e o último na posição 96. Conclui-se que o número na posição 85 começa com 4. Repetimos o processo para determinar o segundo dígito. Temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números que começam com 41, e estes são claramente menores que os números que começam com 42 (que também são 6). Como $72 + 6 + 6 = 84$, temos que o número que ocupa a posição 85 é o primeiro número que começa com 43, ou seja, é o número 43125.

4. (a) Um aperto de mão é dado entre duas pessoas. Logo, quando somamos os apertos de mão de todas as pessoas, cada aperto de mão é contado duas vezes. Logo, a soma de quantas vezes cada pessoa apertou a mão de alguém é par, pois é o dobro de algum número.

   (b) Como são 99 pessoas, se cada uma apertasse a mão de alguém três vezes, isso daria um total de $3 \cdot 99 = 297$ apertos de mão. Pelo item anterior, vimos que esse total de apertos deve ser par. Logo não é possível que cada pessoa tenha dado três apertos de mão.

5. Para cada um dos oito brinquedos restantes, do número 3 ao número 10, deveremos decidir se ele irá pertencer a Victor, ou Mayara ou deverá permanecer com seu pai. Se multiplicarmos então

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{8\ vezes}$$

contaremos as formas de dividir os brinquedos entre Victor, Mayara e seu pai, incluindo os casos que seu pai fica sem nenhum brinquedo. Restará então contar o número de formas de dividir todos os brinquedos entre Victor e Mayara (sem deixar nada para seu pai), e subtrair esse número de 3^8.

Para dividir os brinquedos entre Victor e Mayara deveremos decidir, por cada um dos oito brinquedos, para qual dos dois irá. Assim, teremos

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{8\ vezes}$$

formas de dividir os brinquedos entre eles. Logo, teremos

$$3^8 - 2^8 = 6305$$

formas de dividir os brinquedos.

6. (a) O algarismo 1 não pode ser repetido, porque não é possível escrever 12 como uma soma da forma $1 + 1 + x$, onde x é um algarismo. De fato, como x é no máximo 9, esta soma será no máximo 11. O algarismo 4 não pode ser repetido, pois, neste caso, o número teria que ser 444, que tem três algarismos iguais e não estaria de acordo com o enunciado. Os algarismos 7, 8 e 9 não podem ser repetidos, pois, neste caso, a soma dos algarismos ultrapassaria 12.

   Assim, o algarismo repetido só pode ser 2, 3, 5 ou 6. Com 2, 3 e 5 podemos formar nove números:

   $$228,\ 282,\ 822,\ 336,\ 363,\ 633,\ 552,\ 525,\ e\ 255.$$

   Com o algarismo 6 podemos formar dois números:

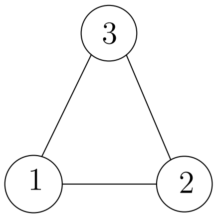
   $$606\ e\ 660.$$

   Portanto, a quantidade de números escrita é 11.

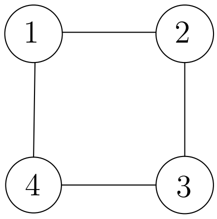
   (b) A soma de três números ímpares é um número ímpar. Logo, nenhum dos números escritos tem os três algarismos ímpares.

7. Cada jogo disputado são distribuídos dois pontos, no caso de empate ou três pontos, caso não ocorra empate. como cada um dos times jogou uma única vez com seus três adversários, foram disputados ao todo seis jogos, nos quais foram distribuídos $5+3+3+2 = 13$ pontos. A única maneira de parcelar 13 pontos em seis parcelas de 2 ou 3 é $13 = 3+2+2+2+2+2$. Logo, cinco dos seis jogos terminaram empatados.

8. (a) Podemos pintar o círculo 1 com qualquer uma das três cores. O círculo 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando duas cores para pintá-lo. O círculo 3 deve ser pintado com a cor que sobrar.



(b) Vamos dividir em dois casos as maneiras de pintar a figura 2.



Primeiro caso: os círculos 1 e 3 são pintados de mesma cor.

Esta cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes. Após essa escolha, a cor do círculo 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como o do círculo 4. O número de maneiras de pintar a figura 2 nesse caso é $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Segundo caso: os círculos 1 e 3 são pintados de cores diferentes.

Nesse caso, a cor do círculo 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor do círculo 3. Para os círculos 2 e 4 há apenas uma possibilidade que é a cor que não foi usada nos círculos 1 e 3. Logo, o número de maneiras de pintar a figura 2, nesse caso, é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

No total, a figura 2 pode ser pintada de $12 + 6 = 18$ maneiras diferentes.

(c) Os círculos de 1 a 4 formam a figura do item anterior e portanto, para pintá-los, há 18 possibilidades. Para pintar o círculo 5, tem-se duas cores disponíveis, pois o círculo 4 já está pintado. Logo, temos $18 \cdot 2 = 36$ possibilidades para pintar os círculos de 1 a 5.

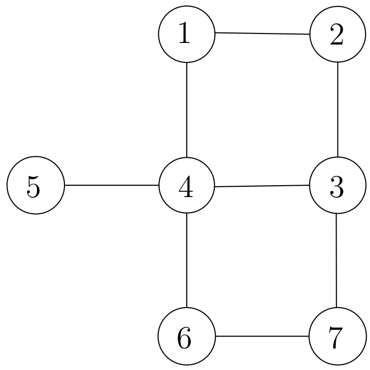
Vamos dividir nossa contagem em dois casos.

Primeiro caso: Os círculos 3 e 6 são pintados de mesma cor.

Nesse caso, temos uma única escolha para a cor do círculo 6 (pois o círculo 3 já foi pintado) e duas para o círculo 7, ou seja, temos $1 \cdot 2 = 2$ possibilidades.

Segundo caso: os círculos 3 e 6 são pintados de cores diferentes.

Nesse caso também temos uma única escolha para a cor do círculo 6 (diferente das cores dos círculos 3 e 4) e sobra apenas uma cor para o círculo 7. Aqui,



temos apenas uma possibilidade. No total há $36 \cdot 2 + 36 \cdot 1 = 108$ maneiras diferentes de pintar a Figura 3.

9.

(a) Para obter a posição do número 78523 nesta lista, calcularemos quantos números estão antes dele na lista. Os primeiros números, nesta lista, são aqueles que iniciam com 2. Permutando os outros 4 algarismos, temos 24 números que iniciam com 2. Os próximos números são os iniciados com 3. Como no caso anterior, trata-se de 24 números. Seguem-se os números iniciados com 5, que também são 24 números. Os próximos números são os iniciados com 72, 73 e 75. Para cada um destes casos, permutandos os outros 3 algarismos, temos mais 6 números. Finalmente, temos os números iniciados com 782 e 783, com 2 números em cada caso. Sendo assim, a posição do número 78523 é

$$3 \cdot 24 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 = 95.$$

(b) Permutando os 5 algarismos, vemos que a lista tem um total de 120 números. Para calcular a soma destes números, devemos perceber que cada algarismo do número 78523 aparece na posição das unidades em 24 números. Assim temos $(7+8+5+2+3) \cdot 24 = 600$ unidades. O mesmo ocorre na posição das dezenas, centenas, milhares e dezenas de milhares. Portanto, a soma é igual a

$$600 \cdot 10000 + 600 \cdot 1000 + 600 \cdot 100 + 600 \cdot 10 + 600 = 6.666.600.$$

10. Existem quatro tipos possíveis de colunas. A saber: $(0,\ 0); (0,\ 1); (1,\ 0) e (1,\ 1)$. As regras se resumem a não preenchermos uma determinada coluna com a mesma configuração da coluna imediatamente anterior. Assim, uma vez escolhido os números de uma determinada coluna, há três opções de preenchimento para a próxima.

No início, podemos preencher livremente como preencher a coluna mais à esquerda e isso pode ser feito de quatro formas. Em sequida, ao preenchermos as próximas colunas à direita, teremos três opções. Portanto, o total de preenchimento é:

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 = 4 \cdot 3^{2014}.$$

11. O cubo tem três pares de faces opostas: $(a_1,\ a_2), (b_1,\ b_2), (c_1,\ c_2)$ e sabemos que $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Na primeira jogada, digamos que as faces de baixo e de cima sejam a_1 e a_2. Como $b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 15$, concluímos que $a_1 + a_2 = 6$.

    Na segunda jogada, digamos que as faces de baixo e de cima sejam b_1 e b_2. Como $a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = 12$, concluímos que $b_1 + b_2 = 9$. Logo,

    $$21 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 6 + 9 + c_1 + c_2 = 21 \Rightarrow c_1 + c_2 = 6.$$

    Temos três pares de faces opostas e quando somamos faces opostas, obtemos os seguintes resultados: 6, 9 ou 6. Somando 6 ao algarismo gravado na sua face oposta, seja ele qual for, resulta em um número maior que 6. Logo, a única possibilidade é que esta soma seja 9, portanto, na face oposta ao 6 deve aparecer o 3.

12. Sabe-se que a senha é formada por quatro algarismos distintos, cujo primeiro dígito é 5 e o último é 3. Do total de 10 algarismos restam oito possibilidades de escolha para o segundo dígito e sete possibilidades de escolha para o terceiro dígito. Assim, temos $8 \cdot 7 = 56$ combinações possíveis. Como não é necessário aguardar dois minutos para a primeira tentativa, mas temos que aguardar um intervalo de tempo de 2 minutos para as demais tentativas o tempo necessário que levará para ativar o alarme será de $2 \cdot (56 - 1) = 110$ minutos, ou seja, 1 hora e 50 minutos.

13. As letras a, b, c formam $3! = 6$ palavras, das quais apenas uma está na ordem desejada. As seis letras (a, b, c, d, e, f) formam $6! = 720$ palavras, das quais interessa a sexta parte, que assim perfazem $720 \div 6 = 120$.

14. Compreendendo que a comissão será formada com a escolha de cinco professores dentre os 12, excetuando-se as possibilidades de comissões compostas exclusivamente por professores do Ensino Fundamental, temos que há cinco vagas para os 12 professores da educação básica, portanto $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$ modos de escolher os cinco professores. Como a ordem de escolha não ocasiona comissões diferentes devemos dividir pela permutação desses cinco professores escolhidos. Logo

há $95040 \div (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 792$ maneiras de escolher os cinco professores da educação básica. Como teremos que ter pelo menos um professor do Ensino Médio, devemos descartar a possibilidade dessa comissão ter apenas professores do Ensino Fundamental. Isso ocorre de $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \div (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 56$ maneiras. Desse modo, há $792 - 56 = 736$ maneiras de formar a comissão.

15. O total de números de nove algarismos tendo o dígito 9 como primeiro é 10^8. Os números antigos de oito algarismos constam no total de $3 \cdot 10^7$ e, introduzindo o dígito 9 como primeiro não altera o total desses números, apenas passam a ter nove algarismos. Portanto, a quantidade de números criados é igual a

$$10^8 - 3 \cdot 10^7 = 10 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^7 = 7 \cdot 10^7.$$

16. Existe uma restrição nos dígitos que marcam as horas e no primeiro dígito que marcam os minutos. Dessa forma, em vez de pensarmos em cada dígito separadamente, vamos pensar em três blocos de algarismos. O primeiro, que é formado pelos dois primeiros algarismos, pode assumir sete valores diferentes (00, 02, 04, 06, 08, 20 ou 22); o segundo é formado apenas pelo terceiro dígito e pode assumir três valores (0, 2 ou 4); e o último dígito pode assumir cinco valores (0, 2, 4, 6 ou 8). Logo, o total de vezes em que todos aparecem pares é $7 \cdot 3 \cdot 5 = 105$.

Capítulo 6

Considerações finais

Para se fazer um entendimento melhor da idealização desse material é necessário que seja exposto a minha formação acadêmica, bem como a minha vida profissional ao longo desses últimos 20 anos.

Sou Engenheiro Agrônomo, formado pela Universidade Federal de Alagoas (UFAL), onde cursei por longos oito anos (1994 a 2002). Nesse período, passei por vários locais de trabalho e foi aí também que tive a oportunidade de ensinar como bolsista através de um convênio que existia entre a UFAL e a Secretaria Estadual de Educação. A oportunidade que surgiu para ensinar foi Física, porém o conhecimento que eu tinha nessa disciplina para ensinar a série que me foi dada era muito pequeno, porém aceitei o desafio, afinal era a realização de um sonho.

Logo após o término do curso de Agronomia, o CESMAC dava oportunidade de fazer um curso de formação pedagógica nas áreas de Matemática, Física, Biologia e Química para professores que atuavam em sala de aula na área da educação, porém não tinham a licenciatura.

Nesse período que estava fazendo o curso de formação pedagógica, a Secretaria Estadual da Educação de Alagoas abriu inscrições para monitoria, onde fiz inscrição e após ser selecionado, passei dois anos como monitor em sala de aula. Após o término desse curso, a Secretaria Estadual abriu edital de concurso para professor efetivo, no qual fui aprovado, e a Secretaria Municipal da Educação (SEMED) abriu o edital do concurso no ano posterior, onde fui aprovado também, onde sou professor efetivo das redes estadual e municipal da educação, até os dias de hoje.

Fiquei quase 10 anos apenas trabalhando sem nenhum tipo de curso ou formação que pudesse ser dado para os professores como forma de aperfeiçoar a didática e seu conhecimento em sala de aula. Foi quando apareceu a oportunidade de ingressar no mestrado, através de uma prova nacional de acesso ao curso do PROFMAT. Fui classificado entre os 30 alunos para fazer o mestrado profissional em Matemática com polo na UFAL.

No primeiro semestre do curso senti muitas dificuldades, pois a linguagem usada e até os assuntos abordados por muitas vezes para mim era incompreensível ou nunca tinha ouvido falar, devido aos cursos que eu tinha feito que não era voltado para a área. Dessa forma, percebi, depois de dez anos em sala de aula, que eu ensinava matemática de uma forma equivocada, onde eu tinha a preocupaçãp apenas de resolver exercícios em sala, sem ter o cuidado em transmitir as definições e as propriedades que ali existem. Isso me despertou para que eu realizasse um trabalho junto aos meus colegas de profissão, onde essa transmissão falha de conhecimentos que eu passava para meus alunos durante esse período que lecionei não acontecesse com esses meus colegas, no qual tinha uma formação acadêmica muito parecida com a minha. Temos na escola, engenheiros, contador, agrônomos que ensinam Matemática e também tem o curso de formação pedagógica.

Outro fato que me chamou atenção, na época que iniciei o mestrado, foi que nessa escola não havia nenhum tipo de preparação para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e, mesmo assim, um aluno conseguiu conquistar menção honrosa na OBMEP 2012. Dessa maneira, resolvi juntar o útil ao agradável, onde a inspiração seria pensar que se é possível um aluno conseguir se destacar nacionalmente sem qualquer tipo de treinamento, então os outros poderiam conseguir, caso houvesse um incentivo para eles. A ideia era motivar os professores a pesquisar questões voltadas para a olimpíada e resolvê-las usando uma linguagem adequada, preocupando-se com o formalismo matemático e aplicando definições, propriedades e teoremas de maneira compreensível para o aluno. Sendo assim, também houve a necessidade de promover encontros entre os professores de Matemática, coordenação e direção para serem debatidos os planejamentos para a realização desses encontros e discutir os conteúdos envolvidos nessas questões para ser apresentado de forma adequada para o aluno.

No ano posterior, começamos a preparação com os alunos e conseguimos um resultado, na OBMEP 2013, melhor do que no ano anterior, com uma medalha de bronze e duas menções honrosas. O que ao nosso ver foi um ganho significativo para a escola e que o trabalho estava no caminho certo. Em 2014, a preparação se estendeu não só para os alunos, mas também para os professores. Idealizamos encontros para discutirmos problemas envolvidos nas olimpíadas, bem como a forma de abordar esses tipos de questões na explanação para o alunado. Esse trabalho vem dado resultado e os professores vêm se mostrando interessados e motivados para esse tipo de situação, pois estamos discutindo formas de como abordar os assuntos envolvidos com os conteúdos de Matemática, onde cada um pontua suas dificuldades e mostra suas habilidades para resolução das questões propostas nesses encontros, onde antes parecia não haver caminhos para resolvê-las.

Foi inspirado nessa experiência e nas dificuldades que passei durante esse período de docência que esse material foi produzido, para motivar o professor que sente dificuldades em resolver problemas que envolvem o rigor matemático, usando as definições, propriedades e teoremas dos assuntos que são abordados em todo o assunto do ensino médio.

Esse material deve ser usado continuamente pelo profissional da educação que leciona Matemática do Ensino Médio e Fundamental para abranger o conhecimento na área e ter ideias para lançar junto a seus colegas de trabalho e alunos, de modo a tornar uma disciplina mais agradável no seu estudo.

Desejo a todos um bom estudo e espero que o material tenha sido de bom agrado e que ele seja aproveitado para motivar você professor que busca sempre um aperfeiçoamento na sua carreira.

Referências Bibliográficas

[1] BERLINGHOFF, W. P., GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas.* 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.

[2] DMITRI, F. $\cdots$ [et al]. *Cículos Matemática: A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[3] IEZZI, G.$\cdots$ [et al]. *Matemática: ciência e aplicações.* Volume 1, 7ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

[4] LIMA, E. L. $\cdots$ [et al]. *A Matemática do ensino médio.* Volume 2, 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] LIMA, E. L. $\cdots$ [et al]. *Temas e Problemas Elementares.* 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[6] MUNIZ NETO, A. C. *Geometria.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[7] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana.* 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] OLIVEIRA, K. I. M. FERNÁNDES, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* 2ª edição - Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[9] PARRA, C. SAIZ, ... [et al]. *Didática da Matemática: reflexões pedagógicas.* Porto Alegre - RS: ARTMED editora, 1996.

[10] Revista Eureka, nº 1.

[11] Revista Cálculo, Matemática Bom Para Todos, edição 12.

[12] Revista do Professor de Matemática, nº 84, ano 32, 2014.

Índice Remissivo