

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA – IF
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

ADHEMAR RANCIARO NETO

ESTUDO DE SÉRIES DE TEMPO FINANCEIRAS SOB A PERSPECTIVA DO
TEOREMA DAS SEÇÕES DE LÉVY.

Maceió
2013

ADHEMAR RANCIARO NETO

ESTUDO DE SÉRIES DE TEMPO FINANCEIRAS SOB A PERSPECTIVA DO
TEOREMA DAS SEÇÕES DE LÉVY.

Dissertação apresentada como requisito
parcial à obtenção do título de Mestre em
Física do Programa de Pós-Graduação em
Física da Matéria Condensada da
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

Orientador: Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria.

Maceió
2013

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

R185e Ranciaro Neto, Adhemar.
 Estudo de séries de tempo financeiras sob a perspectiva do teorema
 das seções de Lévy / Adhemar Ranciaro Neto. – 2013.
 74 f. : il.

Orientador: Iram Marcelo Gléria.
Dissertação (Mestrado em Física da Matéria Condensada) –
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 71-74.

1. Finanças. 2. Teorema do limite central. 3. Ativos financeiros –
Negociação. 4. Estratégias de negociação. 5. Mercado financeiro –
Análise temporal. I. Título.

CDU: 530.182:519.21



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“ESTUDO DE SÉRIES DE TEMPO FINANCEIRAS SOB A
PERSPECTIVA DO TEOREMA DAS SEÇÕES DE LÉVY”.

por

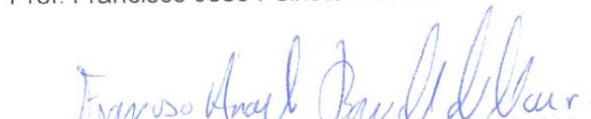
Adhemar Ranciaro Neto

A Banca Examinadora composta pelos professores Iram Marcelo Gléria (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Francisco José Peixoto Rosário, da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade Federal de Alagoas, e Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 25 de junho de 2013


Prof. Iram Marcelo Gléria


Prof. Francisco José Peixoto Rosário


Prof. Francisco Anacleto B. F. Moura (IF- UFAL)

Para minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Aos membros do Instituto de Física pela contribuição para a realização do projeto, em especial, à figura do Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidélis de Moura;

Aos discentes do mestrado, cuja convivência me permitiu desfrutar momentos de boas gargalhadas e de reflexões sobre Física.

Ao professor Iram Marcelo Gléria, pela orientação do trabalho e, também, pelo incentivo ao hercúleo desafio de pensar livremente;

Aos professores doutores Francisco Anacleto Barros Fidélis de Moura e Francisco José Peixoto Rosário pela composição da banca de defesa, pelos comentários oferecidos e pelas reflexões propostas, que contribuíram muito para este trabalho.

À família Bandini pelo apoio emocional.

*“Se, em longo prazo, somos criadores do nosso destino, de imediato somos escravos das
ideias que criamos”
(Friedrich August von Hayek)*

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi o de estudar séries temporais financeiras fundamentadas em uma perspectiva de alteração de medida de tempo, baseada no acúmulo de volatilidade dos retornos relativos aos preços observados. Esta escala foi utilizada por dois motivos: o primeiro está relacionado à proposta de Ludwig von Mises sobre a ideia de tempo em um sistema econômico e o segundo está associado à capacidade que tal medida tem de acelerar o processo de convergência de distribuição de uma sequência de variáveis aleatórias para a Gaussiana, de acordo com o teorema das seções de Lévy. Com base nesta nova escala temporal, foi elaborado um tipo de estratégia de negociação de ativos tendo seus retornos médios e risco sido avaliados em comparação com uma estratégia utilizando o tempo em unidades diárias. Os resultados obtidos motivaram a reflexão sobre as estatísticas utilizadas e os procedimentos para a mensuração de desempenho de cada estratégia.

Palavras-chave: Finanças. Teorema do limite central. Estratégias de negociação de ativos financeiros.

ABSTRACT

This study aimed to analyze financial time series grounded on a perspective of time measure changing, based on accumulation of volatility of returns relative to the prices observed. Such a scale was used for two reasons: the first one is related to Ludwig Von Mises' proposition of time concept in an economic system and the second one is related to the acceleration of convergence in Gaussian distribution of a sequence of random variables, according to Lévy sections theorem. By means of implementation of this new timeline, we designed a type of trading asset strategy which its resulting average returns and risk were compared to a strategy using daily time unit. Results suggested reflection about statistical and measurement procedures applied to the data.

Keywords: Finance. Central limit theorem. Financial asset trading strategies.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Evolução temporal diária do índice BOVESPA (fechamento) e de sua taxa de retorno logarítmico. 34
- Figura 2 – Evolução temporal diária do índice DAX (fechamento) e de sua taxa de retorno logarítmico. 34
- Figura 3 – Curtose dos retornos (IBOVESPA) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta \zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva representa um tipo de volatilidade local escolhida para compor a seção ζ . 36
- Figura 4 – Média dos retornos do índice IBOVESPA ($M\Delta \zeta$) *versus* seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes q . Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma\Delta \zeta$) *versus* seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes q . Média dos retornos ($M\Delta \zeta$) *versus* intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma\Delta \zeta$) *versus* intervalo de tempo (canto inferior direito). 37
- Figura 5 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta \zeta$) *versus* seção de Lévy para o IBOVESPA. 38
- Figura 6 – Retorno médio *versus* tempo (lado esquerdo) e Volatilidade *versus* tempo (lado direito) para valores diferentes de q do IBOVESPA. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 38
- Figura 7 – Retorno médio *versus* Volatilidade para o IBOVESPA. Cada linha é diferenciada apenas pelo *lag* utilizado para se medir a volatilidade local dos termos da série (q). A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 39
- Figura 8 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta \zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 1$. 39
- Figura 9 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta \zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 5$. 40
- Figura 10 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta \zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 15$. 40
- Figura 11 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta \zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos

- respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 1$. 42
- Figura 12 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 5$. 42
- Figura 13 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 15$. 43
- Figura 14 – Curtose dos retornos (IBOVESPA) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta\zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva representa um tipo de volatilidade local escolhida para compor a seção ζ . 44
- Figura 15 – Média dos retornos do índice IBOVESPA ($M\Delta\zeta$) versus seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma\Delta\zeta$) versus seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Média dos retornos ($M\Delta\zeta$) versus intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma\Delta\zeta$) versus intervalo de tempo (canto inferior direito). 45
- Figura 16 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta\zeta$) versus seção de Lévy para o IBOVESPA. 45
- Figura 17 – Retorno médio versus tempo (lado esquerdo) e Volatilidade versus tempo (lado direito) para diferentes *proxies* de *mi2* do IBOVESPA. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 46
- Figura 18 – Retorno médio versus Volatilidade para o IBOVESPA. Cada linha é diferenciada apenas pelo tipo de *proxy* utilizada para se medir a volatilidade local dos termos da série. A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 46
- Figura 19 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e foi utilizada a medida de volatilidade local HL. 47
- Figura 20 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e foi utilizada a medida de volatilidade local HLOC. 48

- Figura 21 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e foi utilizada a medida de volatilidade local estimada por GARCH (1,1). 48
- Figura 22 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade local HL. 49
- Figura 23 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade local HLOC. 49
- Figura 24 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade local estimada por um processo GARCH (1,1). 50
- Figura 25 – Curtose dos retornos (DAX) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta\zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva foi obtida a partir de valores de q referentes ao cálculo das volatilidades locais para a composição da seção ζ . 54
- Figura 26 – Curtose dos retornos (DAX) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta\zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva representa um tipo de volatilidade local escolhida para compor a seção ζ . 54
- Figura 27 – Média dos retornos do índice DAX ($M\Delta\zeta$) *versus* seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes q . Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma\Delta\zeta$) *versus* seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes q . Média dos retornos ($M\Delta\zeta$) *versus* intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma\Delta\zeta$) *versus* intervalo de tempo (canto inferior direito). 55
- Figura 28 – Média dos retornos do índice DAX ($M\Delta\zeta$) *versus* seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma\Delta\zeta$) *versus* seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Média dos retornos ($M\Delta\zeta$) *versus* intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma\Delta\zeta$) *versus* intervalo de tempo (canto inferior direito). 55
- Figura 29 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta\zeta$) *versus* seção de Lévy para retornos do índice DAX. 56

- Figura 30 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta\zeta$) *versus* seção de Lévy para retornos do índice DAX utilizando as medidas de volatilidade local HL, HLOC e GARCH (1,1). 56
- Figura 31 – Retorno médio *versus* tempo (lado esquerdo) e Volatilidade *versus* tempo (lado direito) para valores diferentes de q do índice DAX. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 57
- Figura 32 – Retorno médio *versus* tempo (lado esquerdo) e Volatilidade *versus* tempo (lado direito) para diferentes *proxies* de **mi2** do DAX. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 58
- Figura 33 – Retorno médio *versus* Volatilidade para o índice DAX. Cada linha é diferenciada apenas pelo *lag* utilizado para se medir a volatilidade local dos termos da série (q). A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 58
- Figura 34 – Retorno médio *versus* Volatilidade para o DAX. Cada linha é diferenciada apenas pelo tipo de *proxy* utilizada para se medir a volatilidade local dos termos da série. A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão). 59
- Figura 35 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 1$. 59
- Figura 36 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 5$. 60
- Figura 37 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 15$. 60
- Figura 38 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e volatilidade local HL. 61
- Figura 39 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e volatilidade local HLOC. 61
- Figura 40 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e

distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e volatilidade local GARCH (1,1). 62

- Figura 41 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q=1$. 63
- Figura 42 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q=5$. 63
- Figura 43 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q=15$. 64
- Figura 44 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade HL. 64
- Figura 45 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade HLOC. 65
- Figura 46 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade GARCH (1,1). 65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descrição das séries temporais.	33
Tabela 2 – Estatísticas descritivas, testes de normalidade da distribuição de frequências (Jarque-Bera) e intervalos de confiança para as autocorrelações das séries temporais de retornos logarítmicos.	35
Tabela 3 – Valores das estatísticas descritivas dos retornos normalizados do IBOVESPA ($r\Delta\zeta/\zeta$) para diferentes <i>proxies</i> de volatilidade e para seções ζ distintas.	51
Tabela 4 – Valores das estatísticas descritivas dos intervalos de carregamento do IBOVESPA para diferentes <i>proxies</i> de volatilidade e para seções ζ distintas.	52
Tabela 5 – Valores das estatísticas descritivas dos retornos normalizados do DAX ($r\Delta\zeta/\zeta$) para diferentes <i>proxies</i> de volatilidade e para seções ζ distintas.	67
Tabela 6 – Valores das estatísticas descritivas dos intervalos de carregamento do DAX para diferentes <i>proxies</i> de volatilidade e para seções ζ distintas.	68

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

iiid.	Conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas
IBOVESPA	Índice que relaciona as ações mais negociadas da Bolsa de Valores de São Paulo (BM&F BOVESPA)
DAX	Índice calculado para uma carteira das ações das 30 maiores empresas, em volume de negócios, na bolsa de valores de Frankfurt (<i>Deutsche Börse Group</i>).
HL	Abreviatura para o estimador de volatilidade local diária que utiliza os preços máximos e mínimos diários.
HLOC	Abreviatura para o estimador de volatilidade local diária que utiliza os preços máximos, mínimos, de abertura e de fechamento diários.
ARCH	Heterocedasticidade condicional autorregressiva
GARCH	Heterocedasticidade condicional autorregressiva generalizada

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Volatilidade dos mercados financeiros e tempo.	16
1.2	Estratégias de negociação de ativos no mercado financeiro baseadas em evolução de preços.	19
1.3	Objetivo	19
2	MÉTODO	21
2.1	Teorema das Seções de Lévy	21
2.2	Uso em séries temporais	22
2.2.1	<i>Proxies</i> para a volatilidade local	24
2.2.2	Modelo Generalizado de Heterocedasticidade Condicional Autoregressiva (GARCH).....	26
2.3	Estratégia de negociação de ativos com base no uso das seções de Lévy.	28
2.4	Análise de risco e retorno	31
3	RESULTADOS	33
3.1	Descrição das séries temporais utilizadas.	33
3.2	Comparação das estratégias de negociação de ativos utilizando o tempo físico e as seções de Lévy	35
3.2.1	Análise do IBOVESPA	35
3.2.2	Análise do índice DAX.	53
4	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

1.1 Volatilidade dos mercados financeiros e tempo.

Ao se analisar uma série temporal de preços de produtos relacionados ao mercado financeiro, três fatos merecem consideração: a) que são fracas as evidências de previsibilidade de retornos de ativos em períodos curtos (1); b) a distribuição de frequência dos retornos de diversos ativos apresentam caudas mais grossas que a distribuição Gaussiana, havendo indícios de maior chance de ocorrência de retornos extremos (2); e c) existem períodos de elevada intensidade de flutuação de preços e períodos de calma. Tais variações não tendem a ser isoladas em pequenos intervalos: mudanças de grau elevado, não importando se acarreta em aumento ou diminuição do valor do ativo, ocorrem sequencialmente, assim como as flutuações de menor intensidade (3).

O nível de flutuação dos preços no mercado financeiro é chamado de volatilidade. De acordo com o fato (c) no parágrafo anterior, a volatilidade tende a variar no tempo formando *clusters* ao longo da série temporal de preços. Diversas propostas para a mensuração de tal grandeza foram realizadas (2, 4, 5, 6). Dentre os modelos existentes, Robert Engle foi quem utilizou uma função autorregressiva baseada na informação passada contida no conjunto de dados para captar o efeito de agrupamento de volatilidade da inflação no Reino Unido em 1982 (7). A partir de então, derivações de seu modelo autorregressivo de heterocedasticidade condicional foram criadas para incorporar as inovações existentes em pesquisas envolvendo séries financeiras.

A existência de tal fenômeno (volatilidade variável no tempo) levou economistas a buscarem explicações sobre fatores intervenientes na determinação da volatilidade nas séries financeiras: influência de variáveis macroeconômicas, comportamento dos agentes e fatores institucionais.

Dentre os diversos trabalhos publicados a respeito do tema, foram constatados os seguintes fatos:

- a) Movimentos para baixo nos preços tendem a estar acompanhados de níveis crescentes de volatilidade durante períodos curtos de tempo (8,9). Tal situação foi denominada efeito alavancagem (assimetria de volatilidade);
- b) A volatilidade do mercado financeiro está associada de forma positiva ao número e ao volume de negociações (10-12);
- c) Existe contribuição referente à chegada de informação no mercado para a volatilidade dos preços (13); e
- d) Variáveis macroeconômicas possuem relação fraca com a volatilidade dos mercados financeiros (14).

Dessa forma, as interações de indivíduos neste tipo de mercado contribuem para a geração de heterocedasticidade condicional na série de retornos.

Ao se mensurar o efeito do volume de negociações sobre os preços, Clark (10) chamou a atenção para o fato de que o próprio uso da medida de tempo físico poderia contribuir para a geração de volatilidade nos preços de ativos. Este autor propôs trabalhar com uma escala de tempo batizada de “tempo operacional”, construída utilizando o número de negócios ocorridos em intervalos fixos de tempo físico. Tal variável possuía características aleatórias e foi incorporada como variável independente em um modelo de determinação de variação de preços. Outros modelos de deformação de tempo foram aplicados na análise de grandezas macroeconômicas (15,16).

Em decorrência dos estudos abordados, surge uma questão relativa à vinculação entre tempo, interações dos indivíduos e volatilidade. Haveria alguma relação entre tais variáveis?

O economista Ludwig Von Mises, proveniente da Escola Austríaca de pensamento econômico, propôs que o estudo da ciência Economia deveria estar contido em uma área do conhecimento que visa a desenvolver um arcabouço teórico geral sobre a ação humana no tempo, denominada de Praxeologia (17).

De acordo com o estudioso (17), a ideia de ação humana está associada a comportamento propositado cujo pré-requisito para sua ocorrência está associado à busca de uma situação futura de menor desconforto, caso o indivíduo acredite estar em situação menos favorecida e tenha expectativa de que o comportamento inserido no momento da ação irá afastar ou aliviar seu desconforto. Do conjunto de ações individuais surge, ao longo do tempo,

o fenômeno de cooperação social envolvendo trocas voluntárias e divisão de trabalho. Desta forma, desenvolve-se o processo de mercado. A formação de preços é dada pelo conjunto de ações dos seres humanos relativas à valoração e à avaliação realizadas no âmbito do mercado.

Todavia, para que uma ação possa existir e ser executada é necessário definir apropriadamente o tempo. Von Mises (17) que só faz sentido haver sequência temporal em um universo mutável. Assim, a consciência para o ser humano sobre a passagem do tempo está vinculada à ação empregada por ele. O presente é dado pela duração de ocorrência das condições e oportunidades oferecidas à ação, o passado refere-se ao instante em que algo não pode mais ser feito porque já se passou o momento de fazê-lo e o futuro, ao instante em que ainda não se chegou o momento de se realizar a ação.

Deste modo, o fluxo temporal relacionado à ação humana não se enquadra na proposta newtoniana de tempo, como um fluxo contínuo e independente do estado do sistema.

A conexão aparente entre a ação no mercado financeiro (atitudes referentes à entrada ou à saída deste mercado, compra e venda de produtos), tempo e volatilidade incentivou a busca de uma forma de medida temporal em que se pudesse mitigar os efeitos relacionados a variações bruscas de preços, dado que estas podem ocorrer devido a se observar tal fenômeno em uma escala de tempo não adequada ao processo de mercado.

Recentemente, com o intuito de se buscar por convergência para distribuição gaussiana em uma sequência de variáveis aleatórias dependentes (série de tempo), foi proposta (18) uma medida temporal baseada no Teorema das Seções de Lévy que se resumia ao cálculo da razão entre o acúmulo de volatilidade em uma sequência e a variância total da série observada, assim, reduzindo a possibilidade de ocorrência de eventos extremos (retornos de elevado valor absoluto), comum às distribuições construídas a partir de dados financeiros (1).

Tal ideia parece estar em consonância com os resultados empíricos obtidos entre volatilidade, ação no mercado e a teoria desenvolvida, que vincula o tempo à ação humana. Isto posto, torna-se razoável admitir uma escala de tempo baseada no acúmulo de volatilidade dos preços de séries financeiras.

1.2 Estratégias de negociação de ativos no mercado financeiro baseadas em evolução de preços.

Diversos estudos em finanças tiveram por objetivo encontrar padrões nos preços de ativos negociados em mercados financeiros para que fossem criadas regras de negociação com a finalidade de se auferir lucro (19-22). Nesses estudos, a busca por padrões estava vinculada somente às séries de preços dos produtos.

Ao se avaliar o lucro das estratégias baseadas no resultado dos retornos passados, aquele se divide em dois componentes: um relacionado à previsibilidade dos retornos dos ativos e outro que surge devido à variação contemporânea nos retornos médios dos ativos que compõem o *portfolio* (19).

Ao se buscar por padrões relacionados aos retornos passados, Brock *et al.* (20) apresentou regras de negociação baseadas em movimentos das medias móveis de curto prazo e de longo prazo para dados diários do índice Dow Jones.

Além disso, foram efetuados estudos empregando Redes Neurais para detectar sinais de compra e de venda de ativos (21).

Foram também estudadas estratégias baseadas em comportamentos não lineares dos retornos. Dentre as não linearidades observadas foram verificadas assimetrias nas diferenças de preços nas séries: diferenças positivas tendem a persistir por mais tempo que retornos negativos. Dessa forma, determinar sinais para a compra e venda de ativos torna-se importante para incrementar a preditividade de lucro (22).

Tais estudos utilizaram valores de preços apurados em escala de tempo físico. Não foram encontrados estudos que abordem regras de compra e de venda em cenário com a medida de tempo apropriada aos fatos elencados no item 1.1.

1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho foi o de propor uma estratégia de negociação de ativos com base na mudança de medida temporal, baseada em acúmulo de volatilidade, para que fosse

avaliada a intensidade de diminuição dos riscos associados a valores fixos de retornos esperados ao longo da série financeira analisada.

Tal estratégia foi comparada com uma regra similar de negociação efetuada na escala de tempo físico.

2 MÉTODO

2.1 Teorema das Seções de Lévy

Por se tratar de um assunto que possui baixa projeção na literatura, a descrição do teorema das seções de Lévy segue de acordo com as definições e sequências explicativas propostas em (18, 23, 24).

Seja uma sequência de variáveis aleatórias X_n ($n \in \mathbb{N}$) com probabilidade condicional de uma observação $x_n \in X_n$ dada por $P(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Os termos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} são, respectivamente, realizações de X_1, X_2, \dots, X_{n-1} . A média condicional de X_n é dada por:

$$\begin{aligned} \mu_{n-1} &= E(X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = \langle X_n \rangle_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_n P(x_n|x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) dx_n \end{aligned} \quad (1)$$

E a variância:

$$\begin{aligned} m_{n-1}^2 &= E((X_n - \mu_{n-1})^2|X_1, \dots, X_{n-1}) = \langle (X_n - \mu_{n-1})^2 \rangle_{x_1, \dots, x_{n-1}} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_n - \\ &- \mu_{n-1})^2 P(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) dx_n \end{aligned} \quad (2)$$

Onde $E(X|Y)$ ou $\langle X \rangle_y$ são representações do valor esperado de uma variável aleatória X condicional a Y .

A partir de m_{n-1}^2 (apresentado na equação 2), definiu-se a soma :

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n m_i^2 \quad (3)$$

Onde λ_n representa a soma se variâncias condicionais de uma sequência de variáveis aleatórias de índices 1 a n .

Seja, agora, a condição:

$$\lambda_{n-1} \leq \zeta < \lambda_n \quad (4)$$

O número ζ ($\zeta \in \mathbb{R}$) representa a seção ζ e a desigualdade acima (equação 4) é denominada condição de seção. Uma sequência de observações x_1, x_2, \dots, x_n pertence à seção ζ se a equação (4) for satisfeita.

A soma dos elementos de uma sequência de variáveis aleatórias que obedecem à condição da equação (4), para uma seção ζ , é uma variável aleatória nomeada $S_\zeta = x_1 + \dots + x_n$. Sua variância é dada por M_ζ^2 .

A partir das definições acima, o Teorema das seções de Lévy é enunciado da seguinte forma (extraído de (18)):

Teorema: Para médias condicionais nulas $\mu_n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) e para uma sequência de variáveis aleatórias X_n ($n \in \mathbb{N}$) satisfazendo a condição de Lindeberg, (ver (23,24)) a sequência $S_\zeta/\sqrt{\zeta}$ converge em distribuição para uma normal (Gaussiana) com média zero e variância unitária, ou seja:

$$S_\zeta/\sqrt{\zeta} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Além de $S_\zeta/\sqrt{\zeta}$, a sequência de variáveis aleatórias S_ζ/M_ζ também converge em distribuição para uma gaussiana de média zero e variância 1.

As variâncias de $S_\zeta/\sqrt{\zeta}$ e de S_ζ/M_ζ não são iguais para uma dada seção ζ , apesar de possuírem a mesma curtose e a mesma assimetria.

É possível observar que não se requer que a sequência X_n seja estacionária ou que seus termos sejam independentes. Somente devem obedecer as condições de média condicional nula e de contribuição pequena da variância de cada X_i ($i = 1, \dots, n$) sobre M_ζ^2 .

2.2 Uso em séries temporais

Os valores observados em uma série de tempo $(x_i)_{i=1, \dots, N}$ com N representando número do elementos pertencentes a aquela podem ser considerados uma única realização de um processo aleatório.

Com o objetivo de tornar viável o uso das seções de Lévy em séries temporais foi desenvolvido em (18) uma técnica para a determinação de S_ζ . Esta abordagem somente pode ser efetuada se for desenvolvido um procedimento para o cálculo das volatilidades locais m_n^2 .

A cada elemento da série está associado um valor de volatilidade. Portanto, torna-se tarefa árdua encontrar candidatos para assumir o papel desta variável. Diversos autores debruçaram-se sobre tal questão e, conseqüentemente, foram construídas *proxies* para a volatilidade.

Na seção 2.2.1. foram apresentadas algumas formas de cálculo da volatilidade local (m_n^2).

Retornando ao processo de obtenção de S_ζ , é necessário partir para a construção de uma subsérie de X : o conjunto de observações $(y_i)_{i=1, \dots, N-2q}$, onde $y_i = x_{i+q}$ e q é o *lag* obtido na construção da *proxy* de volatilidade obtida na equação (9). Caso seja utilizada outra expressão representativa na aferição de volatilidade deve-se considerar $q = 0$.

A variável S_ζ foi descrita com uma coleção de todas as somas de y_i que satisfaçam a condição de seção ζ . O primeiro elemento deste conjunto de adições tem como primeira parcela y_1 , no segundo elemento y_2 aparece como primeira parcela da soma cujos termos findam quando o acúmulo de variâncias (volatilidades) obedecerem à regra de seção ζ .

Ao ocorrer tal pausa na soma, inicia-se um novo elemento da coleção (ou seja, começam novas adições) sendo que o termo inicial da série a ser somada passa a ser a observação no instante seguinte àquela que está presente como termo do elemento anterior da coleção.

Em termos matemáticos, a expressão para S_ζ torna-se:

$$S_\zeta = \left(\sum_{i=1}^{n_1} y_i, \sum_{i=1}^{n_2} y_{i+1}, \sum_{i=1}^{n_3} y_{i+2}, \dots, \sum_{i=1}^{n_{j_\zeta}} y_{i+j_\zeta-1} \right) \quad (5)$$

Onde, $n_\zeta = (n_1, n_2, \dots, n_{j_\zeta})$ é o vetor que contém o número de termos de y_i relacionados a cada elemento de S_ζ . O valor j_ζ ($j_\zeta \in [0, N - 2q]$) é o número de parcelas da última soma possível para a série de tempo analisada obedecendo á condição de seção ζ .

Tal condição é dada por:

$$m_i^2 + m_{i+1}^2 + \dots + m_{n_i-1}^2 \leq \zeta < m_i^2 + m_{i+1}^2 + \dots + m_{n_i}^2 \quad (6)$$

Neste trabalho foram estudadas séries de retornos financeiros de ativos listados em 3.1. O tipo de retorno adotado foi o retorno logarítmico. O método para sua obtenção provém de (1).

Dada uma série de preços, o retorno logarítmico com preço base no instante t pode ser calculado por:

$$r(t) = \ln P_{t+1} - \ln P_t \quad (7)$$

Onde P_t é o preço no instante t .

Para um *lag* temporal Δ , procede-se conforme especificado na expressão a seguir:

$$r_\Delta(t) = \ln P_{t+\Delta} - \ln P_t \quad (8)$$

Onde $r_\Delta(t)$ é o retorno acumulado Δ instantes de tempo a partir do instante t .

Ao se considerar $y_i = r(i)$, portanto, tem-se que $\sum_{i=k}^{k+\Delta} y_i = r_\Delta(k)$.

Tal propriedade dos retornos logarítmicos mostrou-se útil para que S_ζ tivesse uma interpretação adequada: é a variável aleatória que representa os retornos acumulados durante períodos que satisfazem a condição de seção ζ .

Esta interpretação deu ensejo à proposição de uma estratégia de negociação de ativos que foi discutida na seção 2.3.

2.2.1 *Proxies* para a volatilidade local

Para os fins deste trabalho houve a preocupação de somente se buscar formas de cálculo de volatilidade para retornos diários de uma série temporal de preços. Para valores de volatilidade apropriados para o uso com dados intradiários, deve-se proceder à leitura de (6,25-28). Estes estudos apresentam a ideia de volatilidade realizada e os efeitos sobre as

variações de preços relacionados à microestrutura de mercado, perceptíveis com o estudo de dados de alta frequência.

Foram descritas, abaixo, algumas formas de determinação daquela variável utilizadas neste texto. Uma observação: há autores que definem o termo volatilidade como sendo a raiz quadrada das *proxies* apresentadas abaixo (2). Optou-se, por aqui, em não acompanhar tal terminologia ficando com as definições propostas em (18,29).

Técnica proposta por (18): volatilidade local utilizando o elemento da série a ser analisado (elemento central), q observações à esquerda e q observações à direita. Logo, o desvio quadrático médio desses $2q + 1$ termos é a volatilidade local da série.

$$m_n^2 = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=n-q}^{n+q} x_i^2 - \left(\frac{1}{2q+1} \sum_{i=n-q}^{n+q} x_i \right)^2 \quad (9)$$

Os proponentes da expressão utilizaram $q = 2$ em suas análises.

Outra sugestão de medida de volatilidade proposta em (30) consiste em utilizar o desvio quadrático de uma observação em relação à média temporal da série:

$$m_n^2 = (x_n - \bar{x})^2 \quad (10)$$

onde, x_n é a realização no instante n e \bar{x} é a média temporal da série estudada. Quando o processo for estacionário com média igual a zero, tem-se:

$$m_n^2 = (x_n)^2 \quad (11)$$

Além do uso dos valores dos preços, é possível incorporar, no cálculo da volatilidade local, os valores do maior e do menor preço negociado no dia. A medida H-L definida por Parkinson (31) para um processo de preços caracterizado por um movimento browniano geométrico:

$$m_n^2 = \frac{(\ln H_n - \ln L_n)^2}{4 \ln 2} \quad (12)$$

onde H_n é o maior preço registrado no dia n e L_n é o menor preço registrado no dia n .

Mais uma medida de volatilidade, derivada da medida H-L, proposta por Garman e Klass (5) utiliza, além das informações dos preços máximos e mínimos intradiários, o valor dos preços de abertura e de fechamento (H-L-O-C) dados por

$$m_n^2 = 0,5 \left(\ln \frac{H_n}{L_n} \right)^2 - 0,39 \left(\ln \frac{p_{fn}}{p_{an}} \right)^2 \quad (13)$$

onde p_{fn} é o preço de fechamento do dia n e p_{an} é o preço de abertura do dia n .

A última *proxy* de volatilidade apresentada é obtida de forma indireta (estimada) por meio dos modelo Generalizado de Heterocedasticidade Condicional Autorregressiva. Pela extensão de seus conceitos e aplicações, este assunto foi abordado na seção 2.2.2.

2.2.2 Modelo Generalizado de Heterocedasticidade Condicional Autoregressiva (GARCH)

Em séries financeiras as volatilidades tendem a se agrupar. É possível verificar intervalos de tempo com baixa oscilação dos retornos seguidos de outros intervalos com altas variações destes.

Robert F. Engle (7) propôs um modelo que levasse em conta esse fato na estimação de uma série de taxas de inflação para o Reino Unido. Conseqüentemente, conseguiu capturar a persistência de volatilidade na série. O tipo de modelo empregado para análise do conjunto de dados em questão foi o pertencente à família ARCH (*Autorregressive Conditinonal Heteroscedasticity*). Estudos subsequentes (32-35) foram realizados para determinar procedimentos de aplicação, testes estatísticos e estimação de parâmetros.

A ideia é estimar o valor das volatilidades (variâncias condicionais) com base no procedimento de máxima verossimilhança utilizando a distribuição normal ou t de Student.

Seja o seguinte modelo para variáveis aleatórias em série de tempo (r_t):

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (14)$$

Onde μ é uma constante e ε_t é o termo de erro estocástico (inovação) de r_t .

Ocorre que o termo de erro pode não possuir mais variância constante, podendo ser modelado da seguinte forma:

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \vartheta_t \quad (15)$$

Onde h_t é a variância local (volatilidade estimada) e ϑ_t é um ruído branco (distribuição iid. com média zero e variância 1).

Para um processo ARCH de ordem q , o fator de escala h_t é função dos quadrados das inovações dos retornos passados:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (16)$$

Onde os coeficientes $\omega > 0$ e $\alpha_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, q\}$ para que se garanta que $h_t > 0$. A variância não condicional de r_t é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i} \quad (17)$$

Para algumas séries temporais é necessário, às vezes, utilizar modelos ARCH de ordem muito elevada devido à persistência de volatilidade em séries de retorno financeiras. O custo computacional torna-se alto e o modelo fica dependente de muitas variáveis defasadas (36,37). No intuito de se desenvolver um modelo parcimonioso, Bollerslev (38) e Taylor (39) propuseram o modelo generalizado de heterocedasticidade condicional autorregressiva de ordens p e q (GARCH (p,q)), onde p refere-se ao número de defasagens de h_t , que passa a compor o modelo de variância condicional dado por:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (18)$$

Onde, $\omega > 0$, α_i e β_j são parâmetros e, para o modelo GARCH (1,1), é necessário que $\alpha_1 \geq 0$ e $\beta_1 \geq 0$ para garantir que h_t seja positivo.

A variância não condicional de r_t é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad (19)$$

O modelo GARCH (p,q) é fracamente estacionário (estacionário em covariância) se, e somente se, $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$.

Apesar de existirem muitas derivações dos modelos ARCH/GARCH, as descobertas de propriedades do modelo GARCH (1, 1) e seu uso para a estimação de volatilidade de séries de retornos financeiros é extenso na literatura, por exemplo, em (40,41).

Neste trabalho foi utilizado o modelo GARCH (1, 1) para se estimar a volatilidade local h_t . Para a obtenção desta, foi empregado o método de quase máxima verossimilhança com distribuição normal das inovações (média zero e variância h_t) (37).

A função de verossimilhança dos erros dos retornos é dada por:

$$L_n(\theta) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}\right)} \quad (20)$$

Onde $\theta = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q)$ é o vetor de parâmetros, $\varepsilon_t = r_t - \mu$ e $h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$ para $t = 1 \dots n$

As estimativas de ω , α_i , β_i e das volatilidades h_t são os valores que maximizam $L_n(\theta)$.

2.3 Estratégia de negociação de ativos com base no uso das seções de Lévy.

O objetivo do desenvolvimento de um tipo de estratégia de negociação com base nas seções de Lévy está relacionado à busca de estabilidade temporal de parâmetros associados ao risco financeiro devido à rápida convergência da distribuição de probabilidade da série temporal para curva Gaussiana em relação ao uso do tempo físico (18,29). A medida de tempo passa a ser regida pelo acúmulo de volatilidade local presente nos dados não havendo, dessa forma, intervalos fixos entre observações das variáveis.

Para que a estratégia relacionada às seções de Lévy fosse submetida a uma avaliação comparativa, foi elaborado um procedimento de negociação similar com base no tempo físico, que serviu de *benchmark* para a verificação da superioridade da primeira sobre a segunda.

O princípio básico das estratégias de negociação de ativos está relacionado a se determinar uma regra em que, ao se efetuar uma compra (venda) em um instante t , procede-se a uma venda (compra) em $t + \Delta t$, ($\Delta t > 0$) sendo que o valor esperado de $r_{\Delta t}(t) = \ln \frac{P_{t+\Delta t}}{P_t}$

seja positivo (negativo). Utiliza-se o valor esperado do retorno ao longo do tempo, pois esta é uma variável estocástica.

O retorno médio é definido, para um intervalo fixo de tempo Δt , por:

$$M_{\Delta t} = \langle r_{\Delta t}(t) \rangle \quad (21)$$

Onde a média é calculada em todos os instantes em que o ativo é comprado. Por simplicidade, assume-se que sempre é comprada a mesma quantidade de ativos em cada instante t e esta é vendida integralmente em Δt após a compra. O valor Δt foi chamado, neste trabalho, de tempo de carregamento do ativo. Além disso, a frequência f das compras é constante.

Uma medida associada ao risco de retorno implícito na operação de compra do ativo em t e na venda deste em $t + \Delta t$ é dada pelo desvio padrão de $r_{\Delta t}(t)$ (volatilidade), dado por:

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{\langle (r_{\Delta t}(t) - M_{\Delta t})^2 \rangle} \quad (22)$$

Em geral, os retornos logarítmicos não possuem a mesma distribuição para intervalos de tempo Δt distintos, implicando na existência de intervalos de confiança para a média diferentes, dada uma mesma probabilidade. Além disso, para cada ativo diferente, a série temporal de retornos correspondente não apresenta a mesma distribuição de probabilidade.

Portanto, uma análise gaussiana de risco relacionado à variabilidade dos retornos dos ativos somente seria possível, se realizada para intervalos de tempo Δt muito grandes.

Com base no teorema das seções de Lévy é possível determinar um intervalo de tempo de carregamento de ativos em que a análise de risco estivesse associada a parâmetros estáveis no tempo (momentos da distribuição tais como média e variância) e válida para qualquer ativo financeiro.

Tal possibilidade encontra-se no fato de que, ao se utilizar uma seção de Lévy (ζ) no lugar de Δt , a convergência da série de retornos para a distribuição próxima à normal é mais rápida. Tal situação foi verificada a partir da análise de variação da curtose dos retornos de séries financeiras heterocedásticas que ficaram bem próximos do valor 3 – equivalente à gaussiana (18,29).

Ao se efetuar a conversão do tempo de carregamento Δt , para o tempo expresso em termos de ζ , há uma transformação na natureza da medição daquela grandeza de determinística para aleatória. Com isso, os tempos de carregamento para as seções de Lévy tornam-se variáveis ao longo da série de retornos e para ativos diferentes, dependendo somente do acúmulo de volatilidade local destes.

A estratégia elaborada para atender à ideia de mudança temporal do parágrafo anterior tem como pressupostos frequência determinística de compra do ativo, volume fixo e igual de compra e venda. Dessa forma, para uma compra efetuada no instante t , a venda será efetuada em t' , sendo $t' = t + \Delta\zeta(t)$, onde $\Delta\zeta(t)$ é obtido por meio do procedimento de acumulação de volatilidades locais (m_n^2) apresentado na equação (6) sendo que $i = t$, $n_i = t'$ e ζ é a seção adotada.

Portanto, o retorno para um tempo de carregamento $\Delta\zeta(t)$ assume a forma $r_{\Delta\zeta}(t) = \ln \frac{P_{t'}}{P_t}$, com as respectivas expressões para o cálculo de sua média e de seu desvio padrão (eqs. (23) e (24), respectivamente)

$$M_{\Delta\zeta} = \langle r_{\Delta\zeta}(t) \rangle \quad (23)$$

$$\sigma_{\Delta\zeta} = \sqrt{\langle (r_{\Delta\zeta}(t) - M_{\Delta\zeta})^2 \rangle} \quad (24)$$

Onde ambos são calculados para uma seção fixa ζ e para diferentes tempos de compra t .

Para uma determinada seção ζ , o tempo médio de carregamento para os diferentes instantes t de compra é dado por:

$$\Delta\zeta = \langle \Delta\zeta(t) \rangle \quad (25)$$

Já a estratégia utilizada como base para comparação, utiliza frequência determinística de compra do ativo, volume fixo e igual de compra e venda e valores constantes de Δt . As estatísticas utilizadas para avaliar retorno e volatilidade foram expressas nas equações (21) e (22).

2.4 Análise de risco e retorno

Para se efetuar a comparação entre a estratégia-base e a estratégia com base nas seções de Lévy, foi realizada a observação dos diagramas de desvio padrão dos retornos *versus* retorno médio para diferentes intervalos de tempo de carregamento dos ativos.

O objetivo foi o de verificar qual estratégia oferecia a menor variabilidade para valores dados de retorno.

Para comparar os efeitos da mudança na escala temporal sobre o perfil de desvios em relação à média de uma variável para as diferentes estratégias, foi proposta a seguinte medida:

$$D = \int_{M_o}^{M_f} \sigma_{\Delta t} dM_{\Delta t} - \int_{M_o}^{M_f} \sigma_{\Delta \zeta} dM_{\Delta \zeta} \quad (26)$$

Onde as integrais são referentes às curvas de desvio padrão *versus* retorno médio entre as estratégias base (integral da esquerda) e a que tem por objetivo alterar a forma de se medir o tempo (integral da direita).

Se o valor de D for positivo, isso indica que há uma redução de riscos de investimento para retornos esperados contidos no intervalo $[M_o, M_f]$ ao se utilizar a estratégia com base nas seções de Lévy. Quanto mais restrito for tal subconjunto, maiores são as diminuições em seu desvio padrão.

Tanto os retornos médios, como os desvios padrão e a escala de tempo $\Delta \zeta$ são aleatórios com distribuição desconhecida: a medida D possui caráter estocástico. Portanto, foram feitas reamostragens nos valores dos retornos utilizando um procedimento de *bootstrap* (42,43) para uma sequência de variáveis aleatórias que apresenta heterocedasticidade condicional. Há um resumo de métodos de *bootstrap* aplicado a modelos econométricos em (44)

Tal procedimento foi aplicado para a determinação de distribuições empíricas relacionadas a testes estatísticos construídos de forma a se efetuar a comparação de performances de estratégias baseadas em análise técnica (45).

A partir da estimação das volatilidades locais com o modelo GARCH (1,1), foram geradas novas séries de retornos a partir da reamostragem, com reposição, dos resíduos

normalizados estimados para a série original e novos valores de volatilidade h_t foram obtidos para as séries mais recentes (46). A partir de cada série nova formada, foi calculado D . Tal procedimento foi repetido 10.000 vezes, desta forma, gerando, para cada ciclo, um valor de D .

O objetivo foi o de verificar se o valor de D , obtido na série temporal inicial, era positivo, com base na distribuição amostral gerada.

3 RESULTADOS

3.1 Descrição das séries temporais utilizadas.

Neste tópico foram apresentadas as estatísticas descritivas referentes às séries temporais financeiras utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

Na Tabela 1 foram dispostos o nome do instrumento a que pertence a série financeira, o número de pontos analisados, as datas inicial e final de cada conjunto de dados. Os dados referentes aos índices de bolsas (IBOVESPA – Brasil e DAX – Alemanha) foram coletados no sítio da internet YAHOO FINANCE (<http://finance.yahoo.com>).

Tabela 1 – Descrição das séries temporais.

Nome da série	Número de pontos	Data inicial	Data final
IBOVESPA	4952	27 abr. 1993	03 mai. 2013
DAX	5681	26 nov. 1990	03 mai. 2013

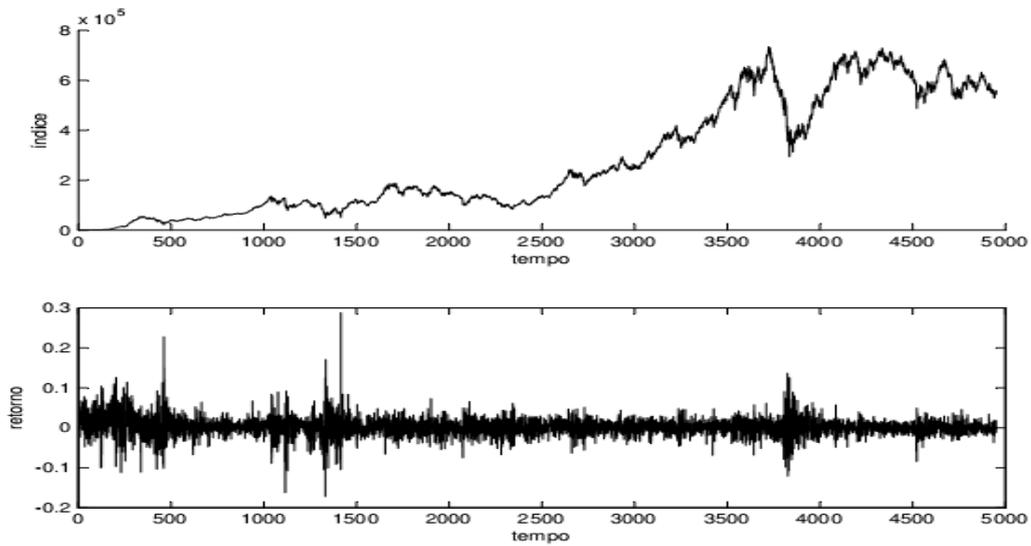
Fonte: YAHOO FINANCE (<http://finance.yahoo.com>).

A evolução temporal dos valores dos preços/índices e dos respectivos retornos utilizando a frequência especificada na Tabela 1 foi apresentada, para cada série, nas figuras 1 e 2 abaixo:

As estatísticas descritivas dos retornos das séries foram disponibilizadas na Tabela 2: Média, desvio padrão, assimetria, curtose, teste de Jarque-Bera para normalidade dos retornos (valor-p) e os coeficientes de autocorrelação até a décima defasagem, juntamente com o intervalo de confiança para autocorrelação igual a zero com probabilidade de 95%.

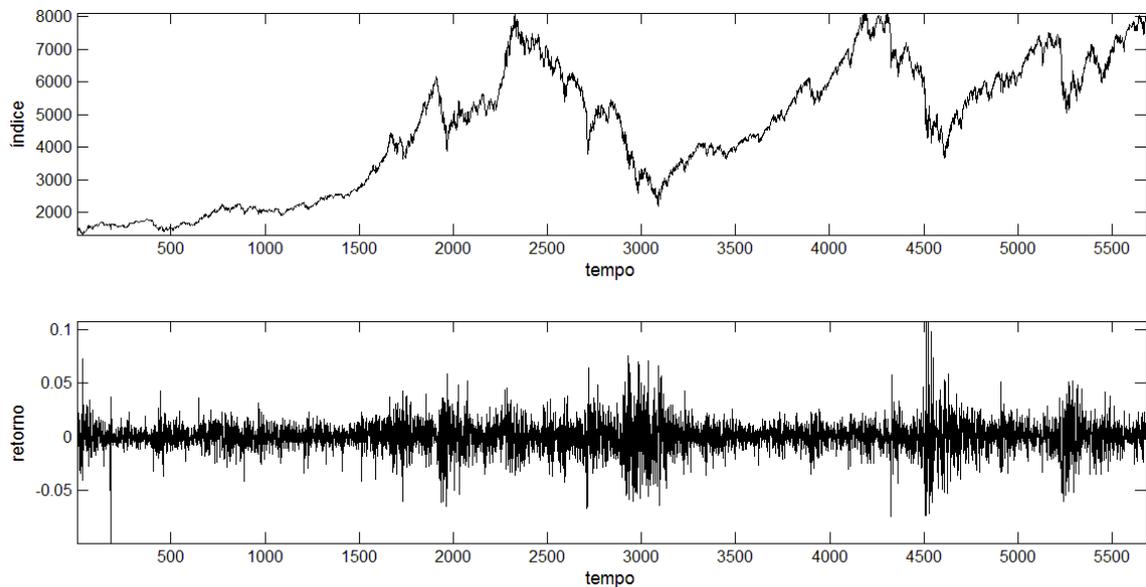
No caso do IBOVESPA, a distribuição dos retornos apresenta curtose elevada e assimetria de, aproximadamente, 0,5. A não normalidade dos dados com base no teste de Jarque-Bera é evidente (valor-p < 1%) e as autocorrelações do 1º lag e a partir do 8º lag ficam afastadas do intervalo de confiança, porém apresentam valores inferiores a 0,1, o que evidencia sua fraca intensidade.

Figura 1 – Evolução temporal diária do índice BOVESPA (fechamento) e de sua taxa de retorno logarítmico.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 2 – Evolução temporal diária do índice DAX (fechamento) e de sua taxa de retorno logarítmico.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Para o índice DAX, verificou-se que as estatísticas relacionadas aos retornos - média, desvio padrão, assimetria e curtose – apresentaram valores inferiores aos da série do IBOVESPA. A hipótese nula de distribuição gaussiana foi rejeitada (valor $-p$ Jarque-Bera $< 0,001$) e as autocorrelações até a décima defasagem encontram-se dentro do intervalo de

confiança de probabilidade 95%. Ou seja, não foi possível rejeitar a possibilidade de que o valor da estatística seja zero para uma ou mais defasagens.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas, testes de normalidade da distribuição de frequências (Jarque-Bera) e intervalos de confiança para as autocorrelações das séries temporais de retornos logarítmicos.

Estatística	IBOVESPA	DAX
Média	0,0016	0,0003
Desvio Padrão	0,0243	0,0145
Assimetria	0,4856	-0,0981
Curtose	12,6851	7,6497
Teste Jarque-Bera (Valor p)	< 0,001	< 0,001
Autocorrelação		
Intervalo de confiança (95%)	[-0,0285; 0,0285]	[-0,0265; 0,0265]
<i>Lag</i> 1	0,0589	-0,0015
<i>Lag</i> 2	-0,0064	-0,0194
<i>Lag</i> 3	-0,0130	-0,0448
<i>Lag</i> 4	-0,0123	0,0390
<i>Lag</i> 5	-0,0095	-0,0311
<i>Lag</i> 6	-0,0177	-0,0239
<i>Lag</i> 7	0,0263	-0,0111
<i>Lag</i> 8	0,0725	0,0194
<i>Lag</i> 9	0,0758	-0,0115
<i>Lag</i> 10	0,0645	-0,0019

Fonte: Ranciaro Neto (2013).

3.2 Comparação das estratégias de negociação de ativos utilizando o tempo físico e as seções de Lévy.

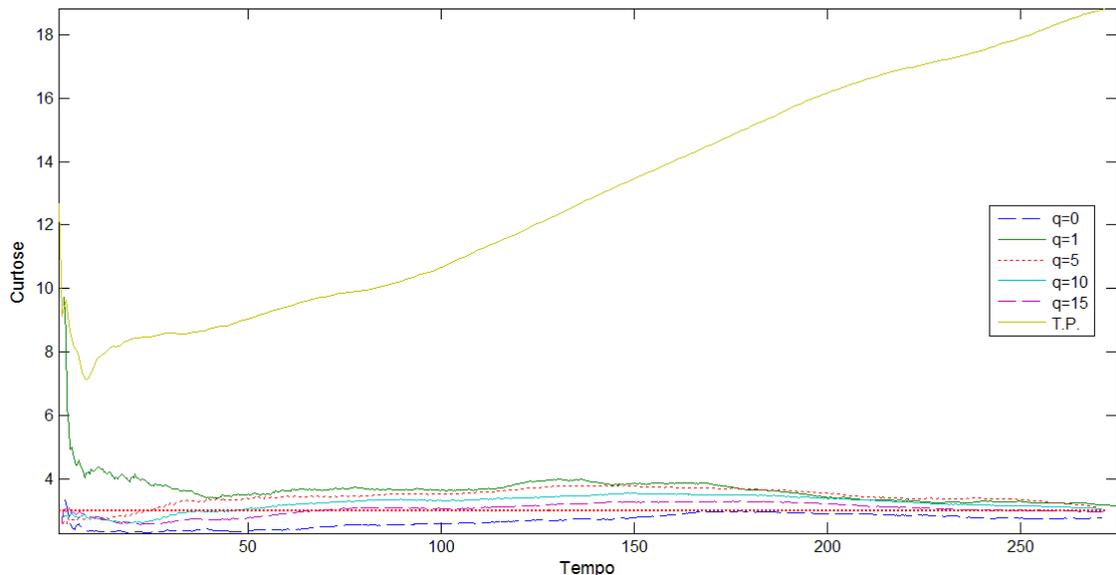
3.2.1 Análise do IBOVESPA

Utilizando a série de dados do IBOVESPA, foram efetuados os cálculos das estratégias de compra e de venda utilizando as abordagens propostas nos itens 2.3 e 2.4 deste trabalho. A frequência de compra dos ativos foi considerada diária e as compras e vendas são executadas com o valor do fechamento do dia.

As formas de volatilidade, para uso na determinação do instante de compra ou de venda, apresentadas em (18) e em (30) foram empregadas na geração dos resultados observados nas figuras 3 a 13 para q variando de 0 a 15. As demais figuras deste item apresentam o resultado oriundo da aplicação de outras formas da medida de variação local de retornos.

A rápida convergência da curtose dos retornos para o valor equivalente ao da distribuição normal (igual a 3) está ilustrada na figura 3.

Figura 3 – Curtose dos retornos (IBOVESPA) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta\zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva representa um tipo de volatilidade local escolhida para compor a seção ζ .



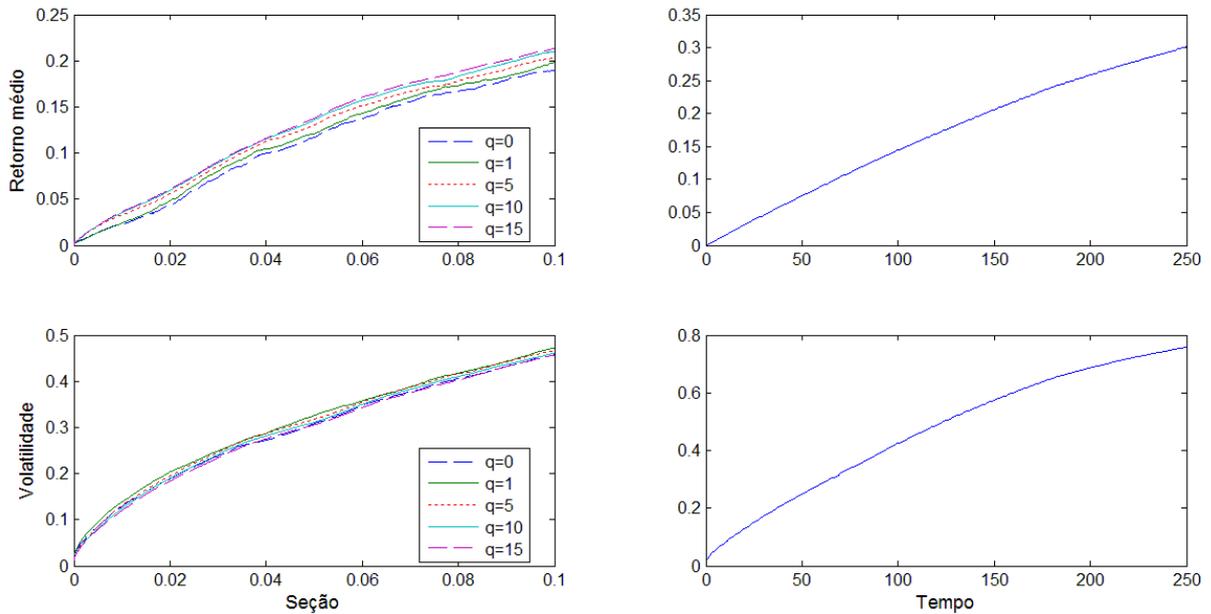
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Na figura 4, foi possível verificar o valor do retorno médio do IBOVESPA que se obteve na série temporal para cada seção de Lévy e para cada instante de tempo físico. Imaginado que o agente efetue compras com uma periodicidade diária e que realize as respectivas vendas após a volatilidade acumulada dos retornos alcançar a condição de seção, é possível vislumbrar uma distribuição de frequências das mudanças de preços. Na figura estão descritos, portanto, a média e o desvio padrão daquela. Observe que, à medida que q aumenta, os retornos médios do IBOVESPA aumentam para cada seção. O mesmo não se pode afirmar para o desvio padrão dentro do intervalo analisado.

Operação semelhante foi realizada para os retornos descritos ao longo do tempo físico, com a diferença que as mesmas estatísticas descritivas foram calculadas para intervalos de tempo determinados entre compra e venda do IBOVESPA ao longo da série toda.

Foi descrita, na figura 5, a relação entre o intervalo de tempo médio entre compra e venda do IBOVESPA para cada seção de Lévy. Há uma aparente linearidade no comportamento das duas variáveis para os valores de q analisados.

Figura 4 – Média dos retornos do índice IBOVESPA ($M_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes q . Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes q . Média dos retornos ($M_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto inferior direito).



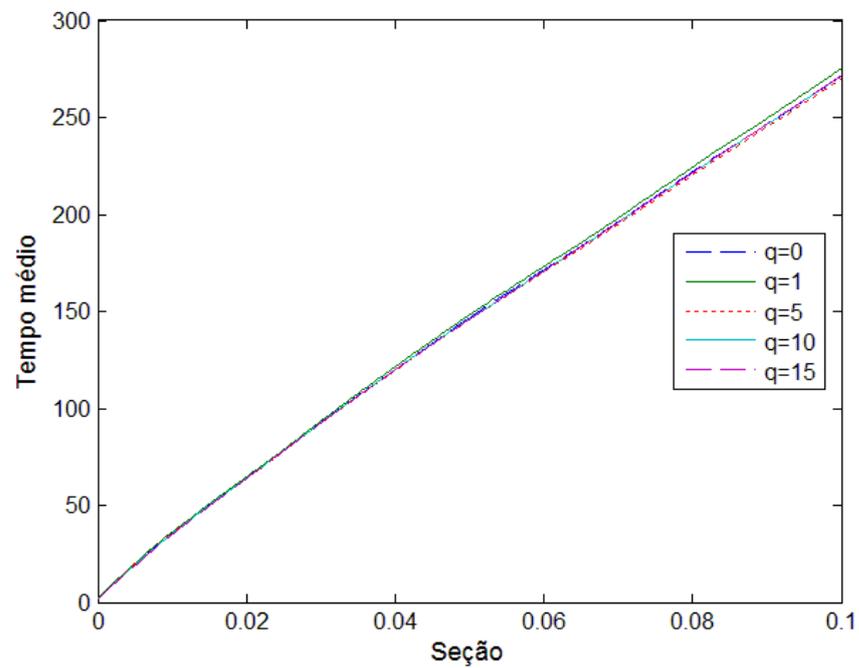
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Os diagramas da figura 6 representam as curvas de risco (desvio padrão da distribuição de retornos) e retorno médio aferidos sob uma mesma escala temporal. Para o IBOVESPA, a estratégia empregada utilizando as seções de Lévy oferecem retornos médios menores que a estratégia temporal (que utiliza intervalos fixos de tempo para o carregamento de ativos), porém com risco menor.

Ao elaborar a curva de risco-retorno (**Erro! Fonte de referência não encontrada.** 7) com o objetivo de melhor visualizar o efeito conjunto dos gráficos da **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, foi possível observar que a estratégia baseada nas seções de Lévy tende a apresentar riscos menores que a outra estratégia a partir de um retorno médio de 6%. Logo, o período médio de carregamento do ativo para que as seções de Lévy apresentem uma relação desvio padrão – retorno mais favorável é de, aproximadamente, 40 dias para os valores observados da série IBOVESPA.

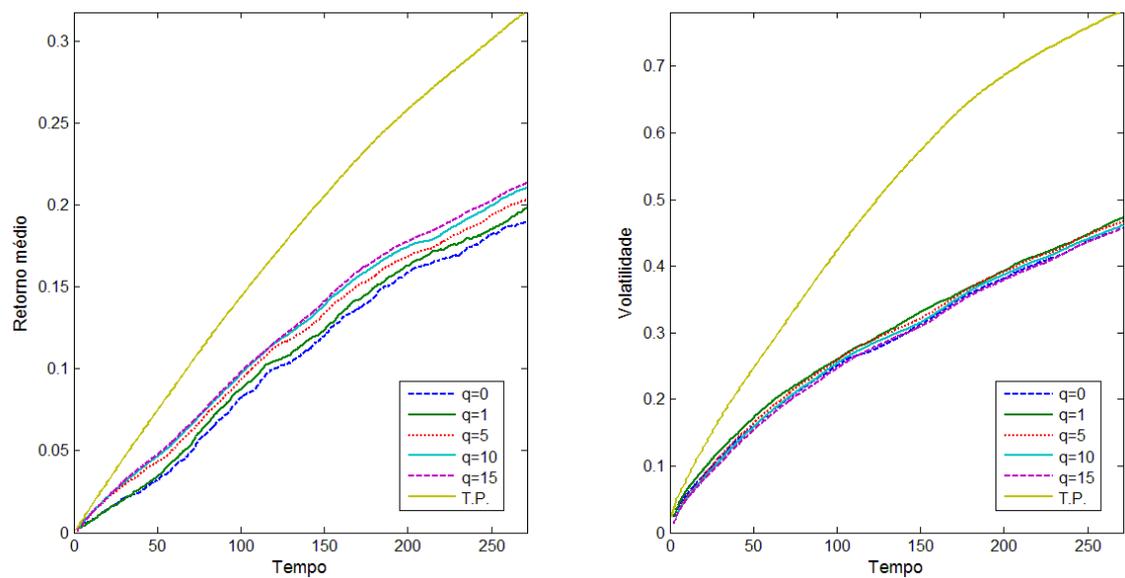
As distribuições dos retornos e dos tempos físicos de carregamento do ativo para três seções distintas ($\zeta = 0,0016$; $\zeta = 0,05$; e $\zeta = 0,1$) foram dispostas nas figuras 8 a 13.

Figura 5 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta\zeta$) versus seção de Lévy para o IBOVESPA.



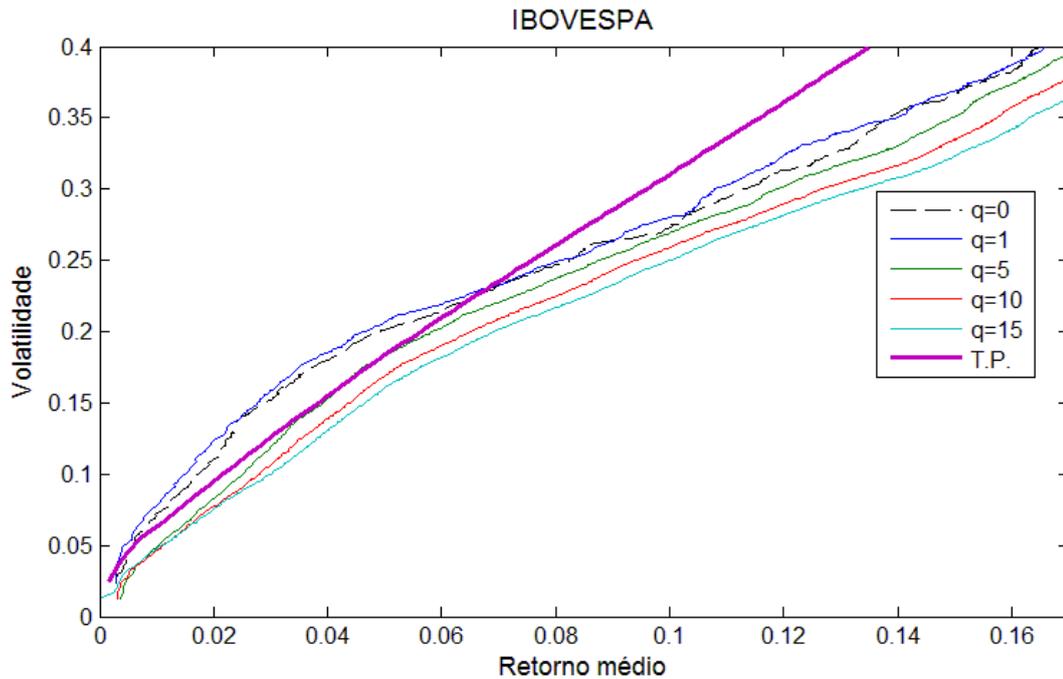
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 6 – Retorno médio versus tempo (lado esquerdo) e Volatilidade versus tempo (lado direito) para valores diferentes de q do IBOVESPA. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).



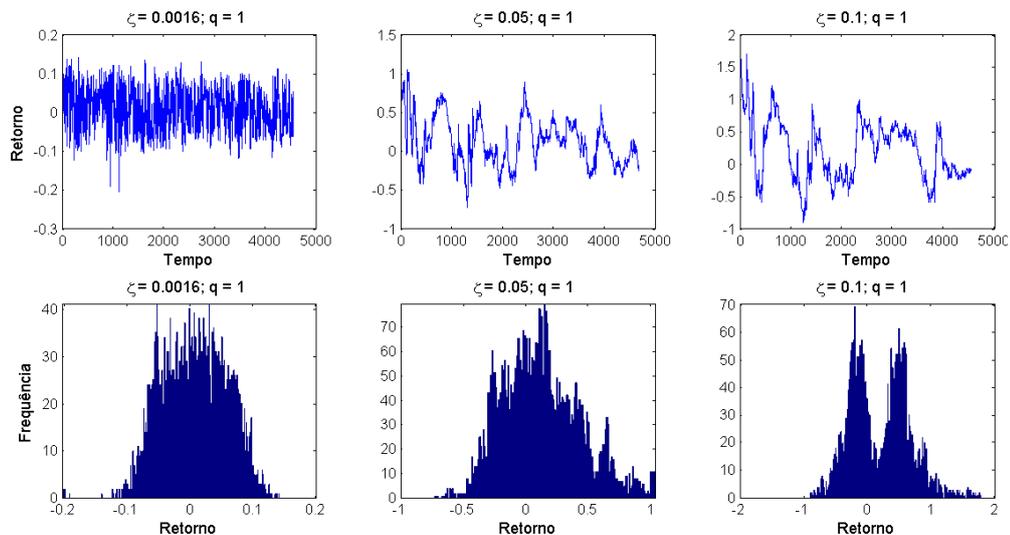
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 7 – Retorno médio versus Volatilidade para o IBOVESPA. Cada linha é diferenciada apenas pelo lag utilizado para se medir a volatilidade local dos termos da série (q). A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).



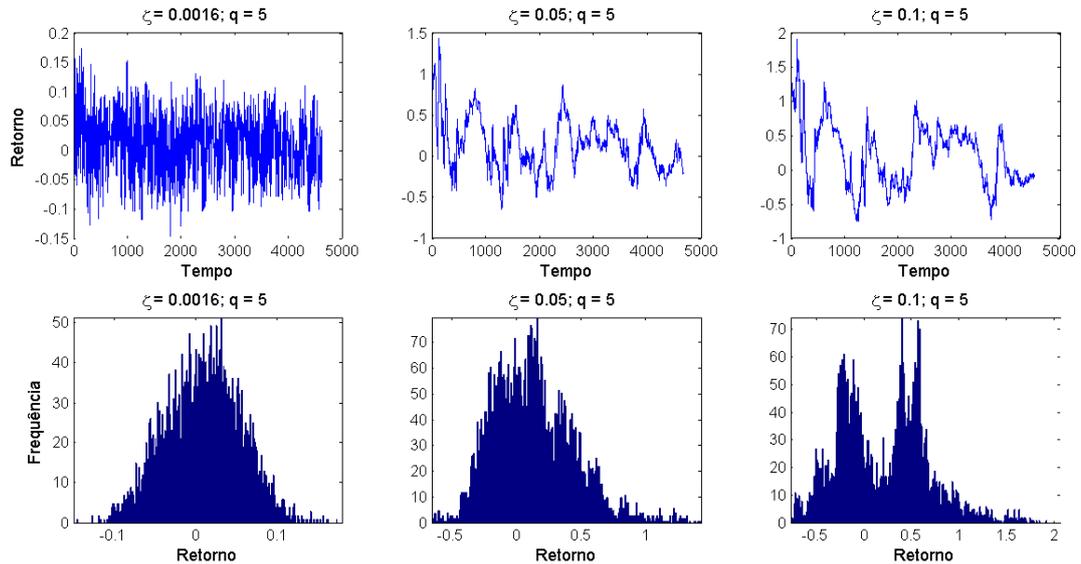
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 8 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 1$.



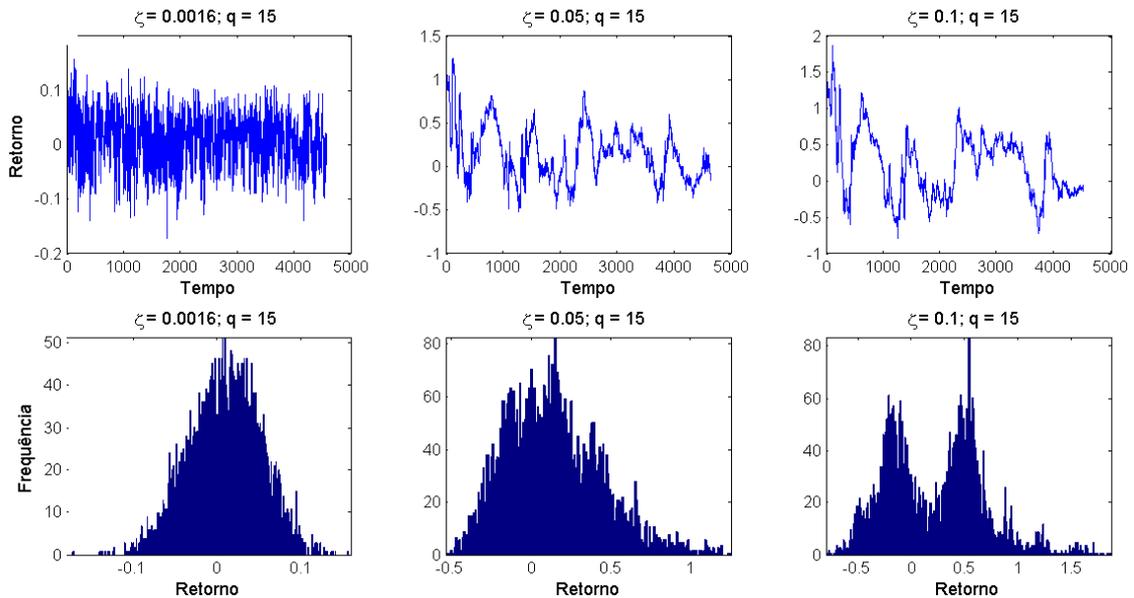
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 9 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 5$.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 10 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 15$.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Nas figuras de 8 a 10, em quaisquer valores adotados para q , foi possível observar uma distribuição com forma conhecida dos retornos para as seções de tamanho pequeno ($\zeta = 0,0016$) e, para seções maiores, a presença de mais picos foram verificadas para a série de dados do IBOVESPA. A aparente contradição encontrada entre dados e o teorema das seções de Lévy pode estar relacionada ao fato de que uma de suas condições parece não se verificar em tal série de tempo, relacionada a contribuições pequenas da variância local sobre a variância de S_ζ . A existência de “quebras” de alta e de baixa volatilidade na série pode ter sido um dos fatores responsáveis pela violação a uma das bases do pressuposto da convergência em distribuição para a Gaussiana. Porém, os valores das estatísticas descritivas: média, desvio padrão, assimetria e curtose de $\frac{S_\zeta}{\sqrt{\zeta}}$ aproximaram-se dos momentos da normal padrão.

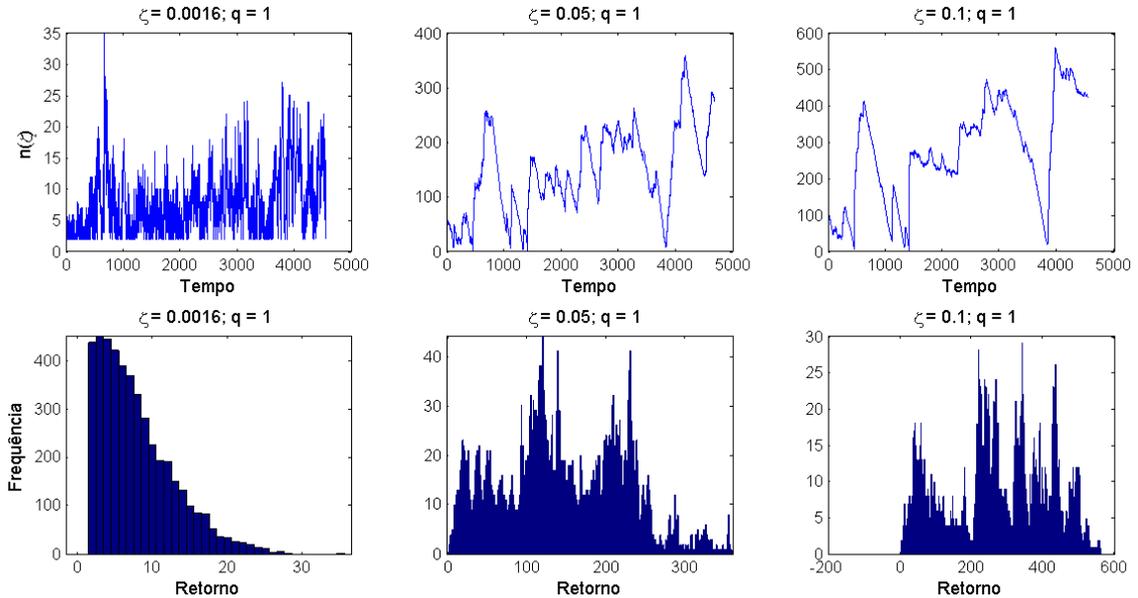
Constatação similar no que se refere à curva de frequências foi feita com base no conteúdo das figuras 11 a 13. Para valores pequenos da seção ($\zeta = 0,0016$) a distribuição dos tempos médios de carregamento do IBOVESPA possuía forma definida. À medida que os valores de ζ aumentavam, os histogramas deixavam de aparentar desenhos simples para apresentar mais de um máximo local de frequência.

As estatísticas descritivas encontradas nos retornos e nos intervalos de carregamento para as diferentes volatilidades locais e para ζ distintos foram inseridas nas tabelas 3 e 4, respectivamente.

A curtose dos retornos aproximou-se do valor 3 ao se aumentar a seção para os diferentes níveis de volatilidade local, enquanto que a assimetria teve seu valor aumentado para mais de 1, quando do uso da volatilidade local HLOC. Para quase todas as medidas de volatilidades a assimetria foi negativa em $\zeta = 0,0016$, exceto para HLOC em que o valor calculado na amostra foi próximo de zero;

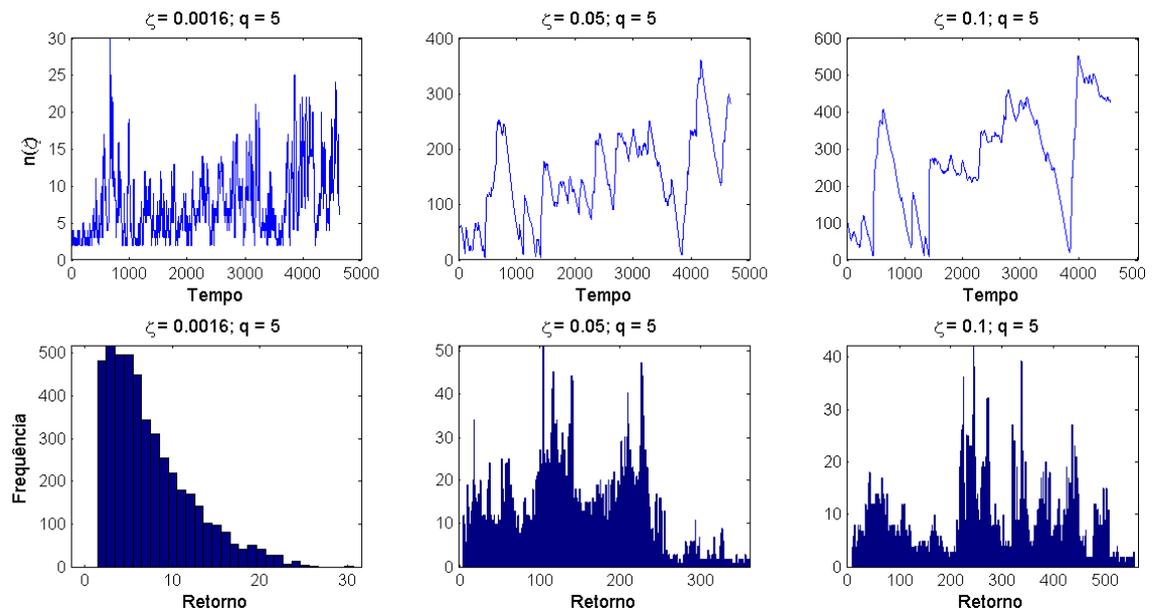
Para o caso dos tempos de carregamento, é possível perceber que, tanto sua média quanto seu desvio padrão aumentam em relação a ζ . A assimetria tende a ficar negativa, da ordem de -0,1 na amostra para as volatilidades calculadas utilizando-se o q ; para as volatilidades do tipo HL e HLOC a estatística se aproxima de zero e, para o GARCH (1,1), aquela assume valor negativo (-0,32). No caso da curtose, seu valor tende a se aproximar de 2 exceto para as *proxies* HL e HLOC.

Figura 11 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 1$.



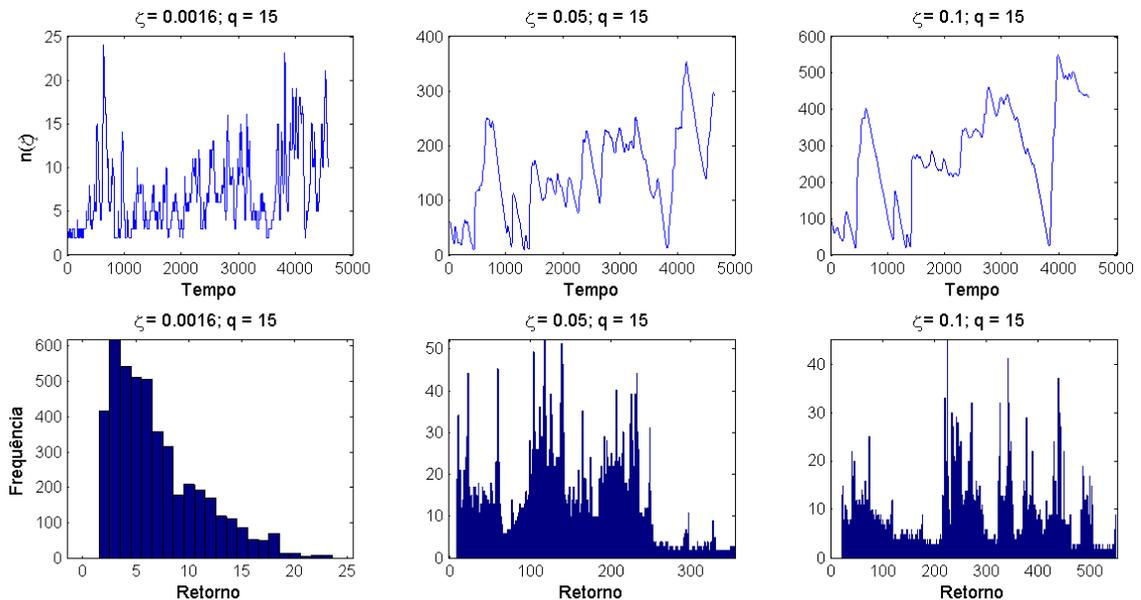
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 12 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 5$.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 13 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 15$.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Ao utilizar as outras medidas de volatilidade (propostas em 2.2.1 e em 2.2.2 para se estudar o efeito da estratégia proposta utilizando as seções de Lévy para o IBOVESPA, foram verificados os seguintes fatos:

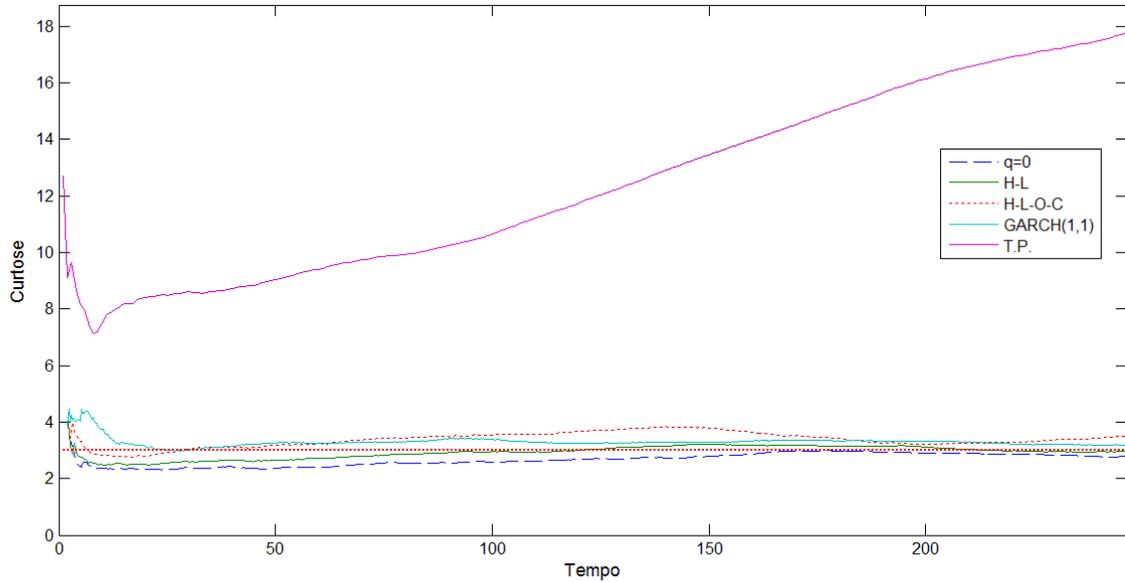
- A curtose dos retornos (figura 14) apresenta rápida convergência para o valor próximo a 3 (gaussiana).
- Os tipos de volatilidade local que produzem os menores retornos médios e o menor desvio padrão destes é o desvio médio quadrático ($q = 0$) e a estimada por um processo GARCH (1,1) (figura 15).
- O tempo médio de carregamento do IBOVESPA é variável de acordo com a *proxy* adotada para volatilidade local em uma dada seção ζ . O período médio entre compra e venda é maior para H-L-O-C, que utiliza os preços de abertura, de fechamento, máximo e mínimo diários. Em ordem decrescente de tempo, seguem as volatilidades H-L, desvio quadrático médio com $q = 0$ e as estimadas pelo processo GARCH (1,1) (figura 16).

Os gráficos de retorno médio e de desvio padrão dos retornos em relação ao tempo físico de tempo físico de carregamento do IBOVESPA apresentam menores retornos e

menor risco para a estratégia baseada nas seções de Lévy em relação à estratégia que envolve o tempo físico. Os resultados são aproximadamente os mesmos para as diferentes medidas de m_n^2 adotadas (figura

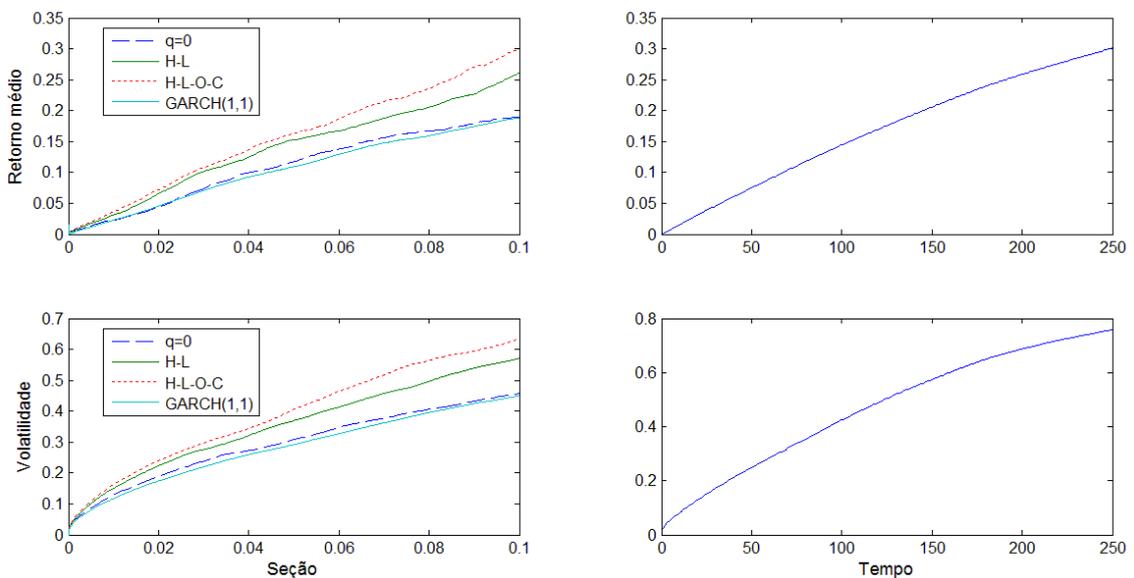
- d) Figura 17 17).
- e) A curva de risco-retorno relativa ao IBOVESPA ilustra que, para uma mesma quantidade de risco (desvio padrão dos retornos para dado tempo entre duas operações distintas: compra e venda), o retorno médio apresentado pela estratégia relativa à aplicação das seções de Lévy torna-se maior que o da estratégia-base a partir de 5% para a volatilidade local medida pelo GARCH (1,1) e de 6% para os demais estimadores. Isso significa que a primeira estratégia gera retornos de menor variabilidade para uma dada seção em comparação com a dispersão dos retornos para o intervalo de tempo correspondente à execução da segunda estratégia (figura 18). É possível que, com o fato de o tempo de carregamento ser aleatório para as seções de Lévy, já que este depende da variância local acumulada, parte da dispersão de seu respectivo retorno médio seja absorvida pelo simples fato de se alterar a natureza da escala temporal (determinística para aleatória).

Figura 14 – Curtose dos retornos (IBOVESPA) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta\zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva representa um tipo de volatilidade local escolhida para compor a seção ζ .



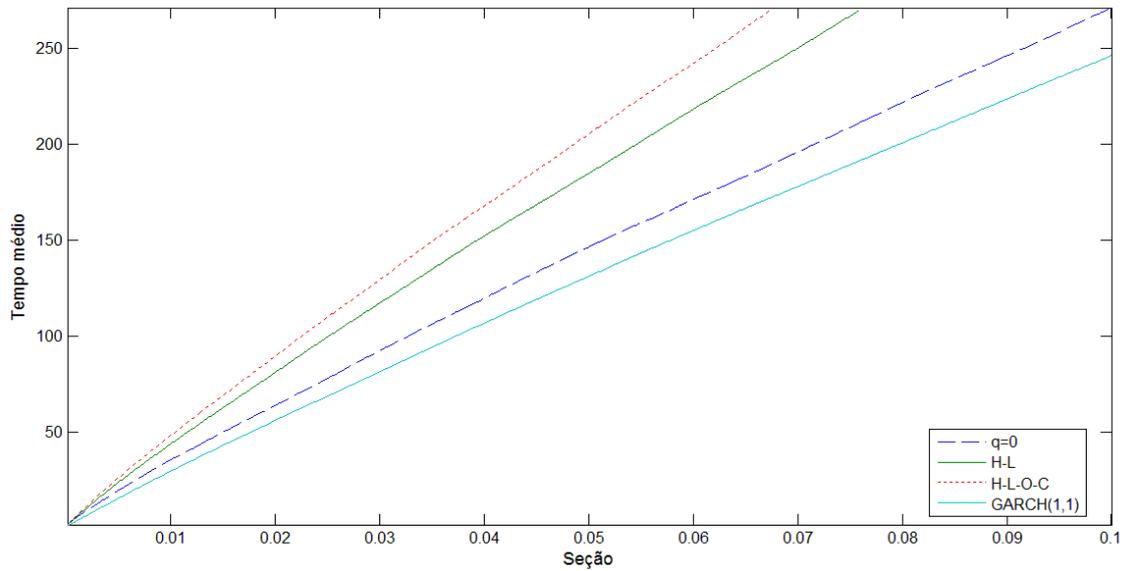
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 15 – Média dos retornos do índice IBOVESPA ($M_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Média dos retornos ($M_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto inferior direito).



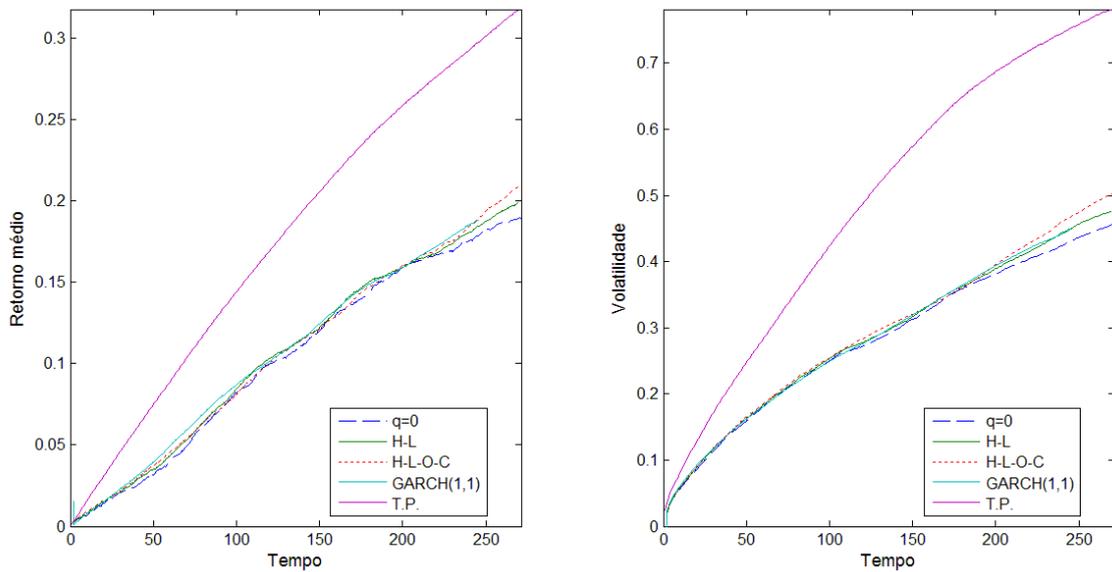
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 16 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta\zeta$) versus seção de Lévy para o IBOVESPA.



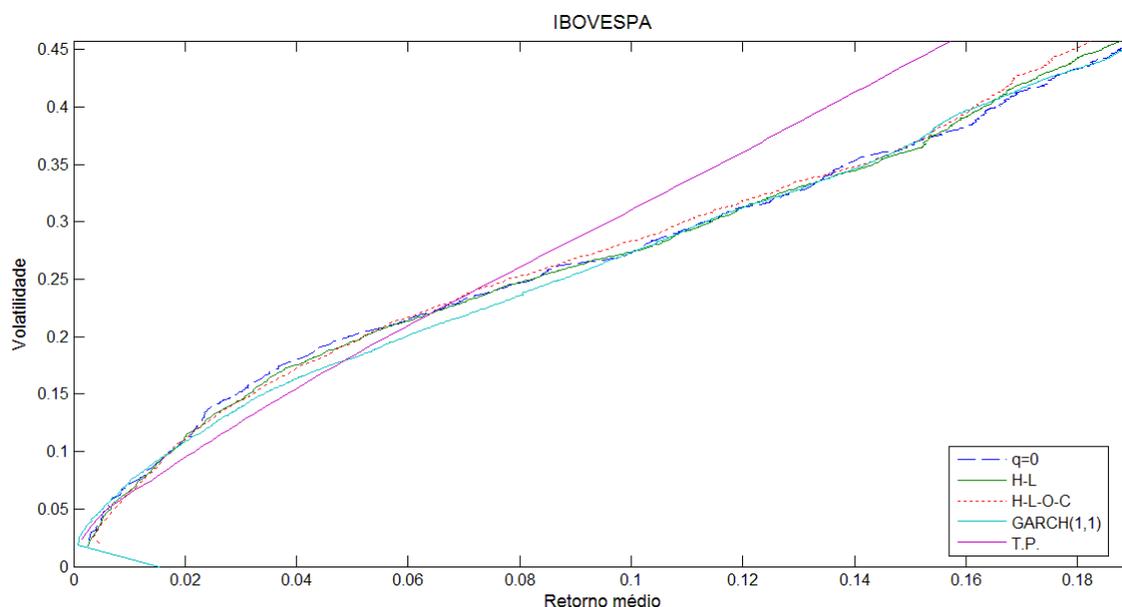
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 17 – Retorno médio versus tempo (lado esquerdo) e Volatilidade versus tempo (lado direito) para diferentes *proxies* de m_t^2 do IBOVESPA. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

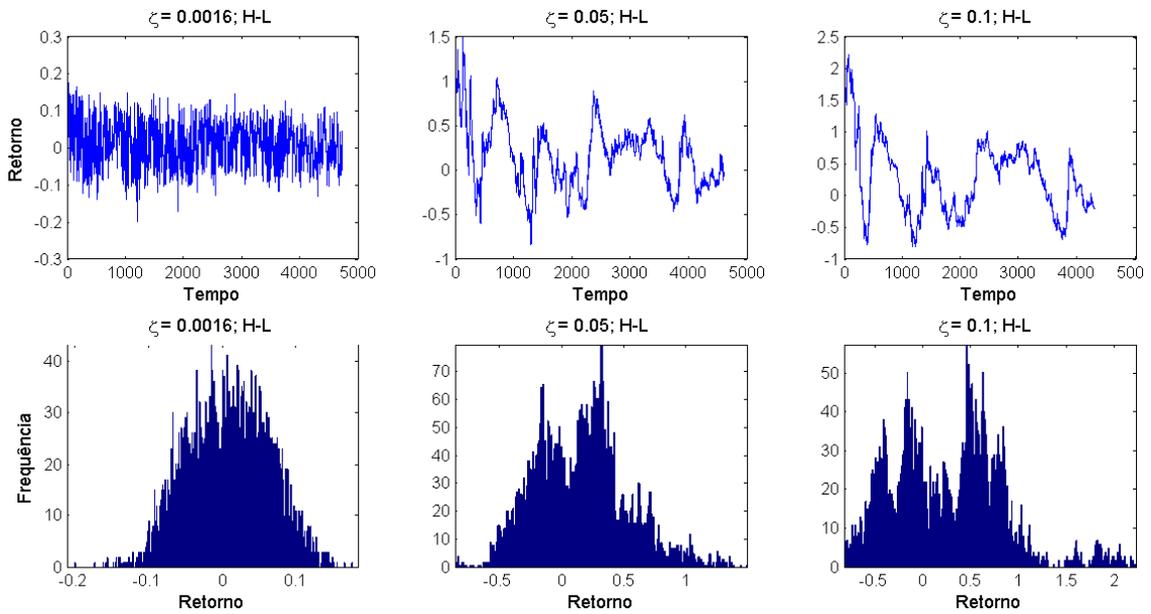
Figura 18 – Retorno médio *versus* Volatilidade para o IBOVESPA. Cada linha é diferenciada apenas pelo tipo de *proxy* utilizada para se medir a volatilidade local dos termos da série. A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

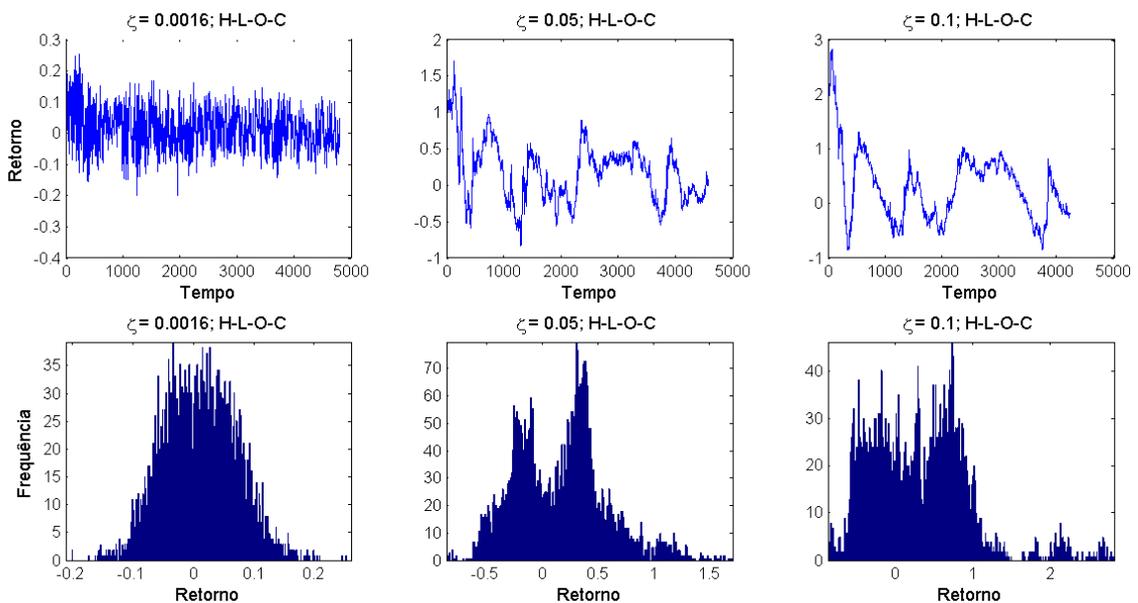
- f) A distribuições de retornos ao longo de uma seção para estimadores distintos de volatilidade local tiveram sua variância aumentada à medida que se aumentou o tamanho da seção. O problema das “quebras” de volatilidade (limites entre os *clusters* de volatilidade), que faz com que exista contribuição significativa na variância da soma dos retornos logarítmicos, prejudica a convergência da série para a normalidade em distribuição. As observações dos retornos ao longo do tempo evidenciam perda de estacionaridade ao se elevar ζ , não importando a forma funcional do estimador de volatilidade local (figuras 19, 20 e 21). Conforme salientado anteriormente, os valores das estatísticas assimetria e curtose, em algumas situações, ficaram afastados significativamente das aferições próprias da distribuição gaussiana (Ver Tabela 3).
- g) Os tempos de carregamento para as volatilidades HL, HLOC e GARCH (1,1) apresentaram curvas de frequência semelhantes para as seções analisadas. Foi possível perceber uma mudança de forma na distribuição dos valores de modo a apresentar, em $\zeta = 0,1$ pelo menos dois picos de frequência. Informações sobre as estatísticas estudadas foram já apresentadas (Ver Tabela 4).

Figura 19 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e foi utilizada a medida de volatilidade local HL.



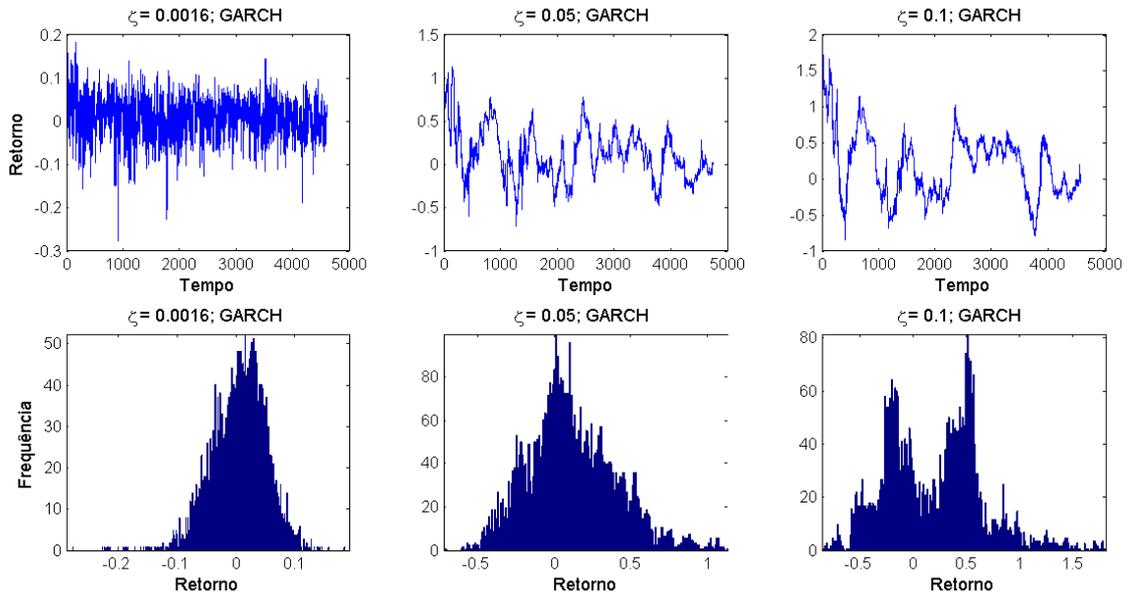
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 20 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e foi utilizada a medida de volatilidade local HLOC.



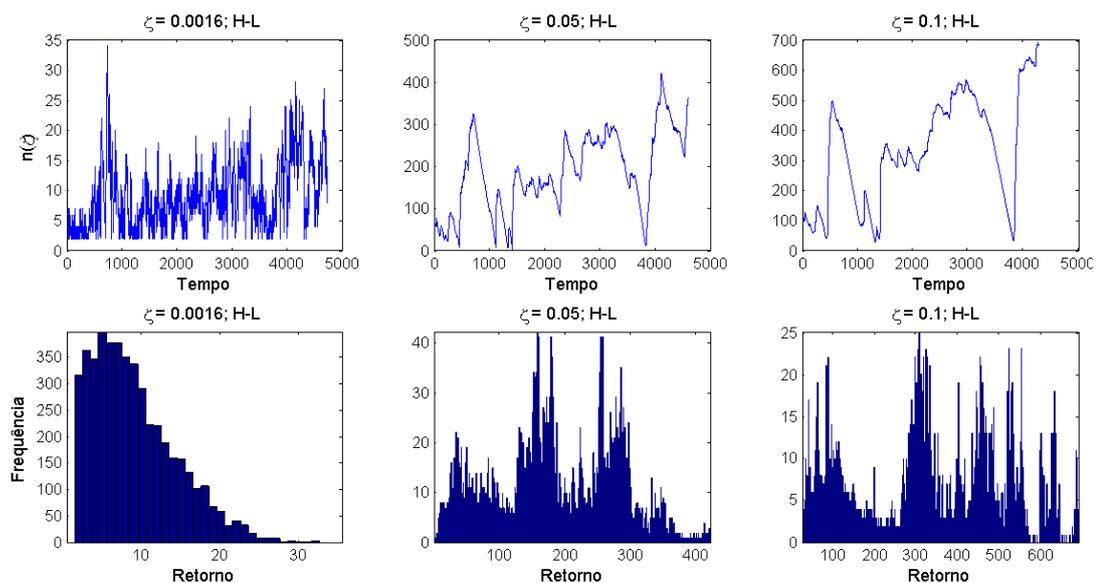
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 21 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e foi utilizada a medida de volatilidade local estimada por GARCH (1,1).



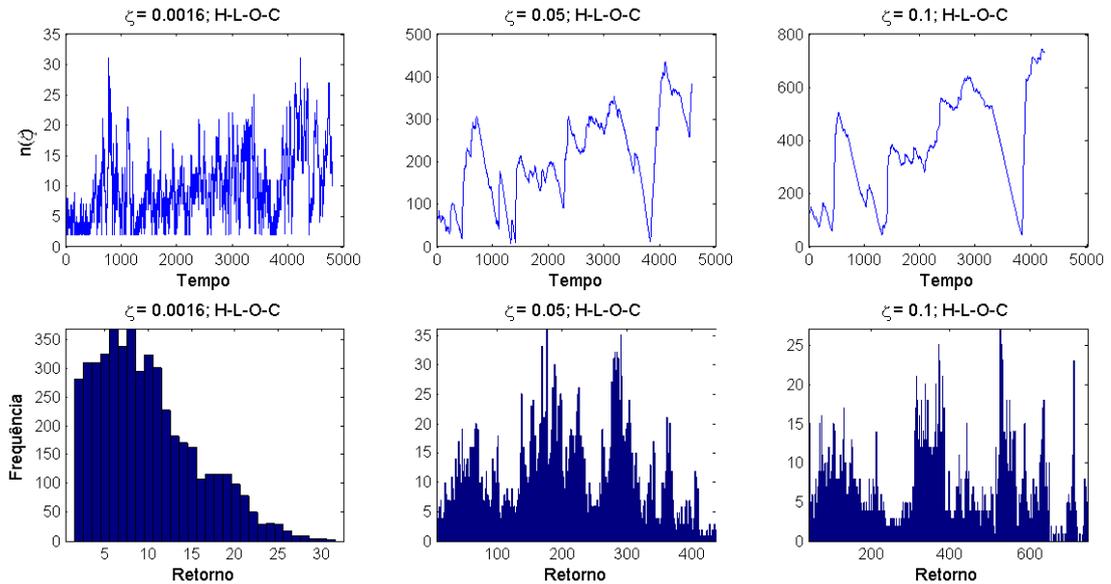
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 22 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade local HL.



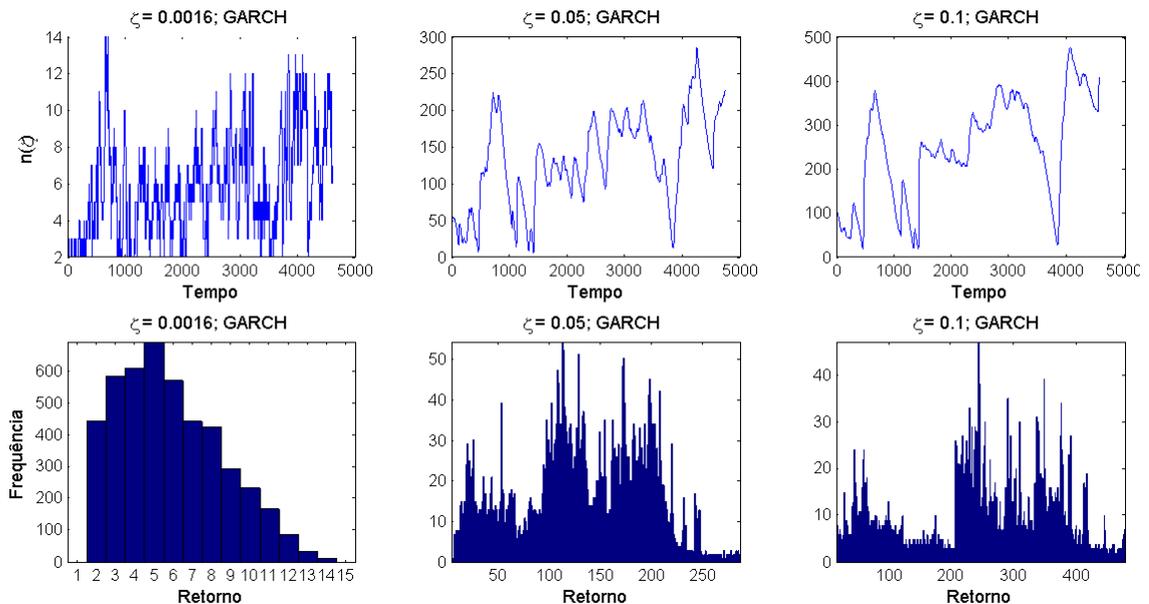
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 23 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade local HLOC.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 24 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade local estimada por um processo GARCH (1,1).



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Para o IBOVESPA, o valor de D encontrado foi de 0,0056. Após a realização de 10000 reamostragens das inovações de um processo GARCH (1,1), para a determinação da distribuição empírica de D , verificou-se que, 29,64% dos valores são negativos e que a porcentagem dos graus de D reamostrados menores que 0,0056 é igual a 37,59%. Desta forma, não se pode afirmar que a estratégia das seções de Lévy gera melhores resultados que a estratégia-base, de acordo com as propriedades da medida D . Tal hipótese somente seria aceita se, pelo menos, 95% das reamostragens de D fossem inferiores a 0,0056.

Tabela 3 – Valores das estatísticas descritivas dos retornos normalizados do IBOVESPA ($r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$) para diferentes *proxies* de volatilidade e para seções ζ distintas.

Vol. Local	Seção (ζ)	Média			Desvio padrão			Assimetria			Curtose		
		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança	
			Inferior	Superior									
q=1	0,0016	0,155	-2,301	2,610	1,253	1,227	1,279	-0,033	-0,104	0,038	2,346	2,204	2,489
	0,0500	0,524	-2,177	3,225	1,378	1,350	1,406	0,379	0,308	0,449	2,771	2,630	2,911
	0,1000	0,578	-2,225	3,382	1,430	1,402	1,460	0,362	0,292	0,432	2,841	2,701	2,982
q=5	0,0016	0,189	-2,208	2,586	1,223	1,198	1,248	-0,417	-0,487	-0,347	4,243	4,103	4,384
	0,0500	0,578	-2,204	3,361	1,420	1,391	1,449	0,703	0,632	0,773	3,787	3,646	3,927
	0,1000	0,619	-2,241	3,480	1,459	1,430	1,489	0,497	0,427	0,567	3,206	3,065	3,346
q=15	0,0016	0,159	-2,042	2,360	1,123	1,101	1,146	-0,242	-0,311	-0,173	2,957	2,818	3,095
	0,0500	0,587	-2,067	3,241	1,354	1,327	1,381	0,658	0,589	0,728	3,330	3,191	3,469
	0,1000	0,628	-2,140	3,397	1,412	1,384	1,441	0,527	0,458	0,597	3,106	2,967	3,245
HL	0,0016	0,178	-2,513	2,869	1,373	1,346	1,401	-0,064	-0,134	0,005	2,482	2,342	2,622
	0,0500	0,660	-2,537	3,857	1,631	1,599	1,664	0,442	0,372	0,511	3,224	3,084	3,364
	0,1000	0,726	-2,695	4,148	1,745	1,711	1,781	0,730	0,660	0,800	3,697	3,558	3,837
HLOC	0,0016	0,228	-2,695	3,152	1,491	1,462	1,522	0,099	0,030	0,169	2,838	2,699	2,976
	0,0500	0,694	-2,786	4,175	1,775	1,740	1,812	0,513	0,444	0,582	3,373	3,234	3,512
	0,1000	0,810	-2,953	4,574	1,920	1,882	1,959	1,123	1,054	1,193	5,189	5,050	5,328
GARCH (1,1)	0,0016	0,098	-2,102	2,299	1,122	1,100	1,145	-0,425	-0,495	-0,356	4,186	4,048	4,325
	0,0500	0,480	-2,066	3,027	1,299	1,273	1,325	0,485	0,416	0,554	3,303	3,165	3,442
	0,1000	0,559	-2,176	3,294	1,395	1,368	1,424	0,513	0,443	0,582	3,321	3,183	3,460

Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Tabela 4 – Valores das estatísticas descritivas dos intervalos de carregamento do IBOVESPA para diferentes proxies de volatilidade e para seções ζ distintas.

Vol. Local	Seção (ζ)	Média			Desvio padrão			Assimetria			Curtose		
		n(ζ)	Int. confiança		n(ζ)	Int. confiança		n(ζ)	Int. confiança		n(ζ)	Int. confiança	
			Inferior	Superior		Inferior	Superior		Inferior	Superior		Inferior	Superior
	0,0016	8,040	-2,071	18,152	5,157	5,054	5,266	1,215	1,144	1,286	4,687	4,545	4,829
q=1	0,0500	146,603	-6,0734	299,279	77,8775	76,3293	79,4902	0,181	0,111	0,251	2,397	2,256	2,537
	0,1000	262,709	-22,897	548,317	145,682	142,786	148,699	-0,160	-0,230	-0,089	1,997	1,857	2,138
	0,0016	7,457	-2,209	17,125	4,931	4,833	5,033	1,175	1,105	1,245	4,258	4,117	4,398
q=5	0,0500	145,473	-5,952	296,900	77,239	75,704	78,839	0,202	0,132	0,273	2,470	2,329	2,610
	0,1000	260,969	-21,904	543,842	144,288	141,419	147,276	-0,146	-0,216	-0,076	2,015	1,874	2,155
	0,0016	6,678	-1,995	15,352	4,4246	4,3377	4,5150	0,9657	0,8963	1,0351	3,6449	3,5061	3,7836
q=15	0,0500	141,064	-16,304	298,433	80,2714	78,6955	81,9122	0,1341	0,0647	0,2034	2,3858	2,2470	2,5245
	0,1000	254,691	-39,546	548,928	150,086	147,139	153,153	-0,130	-0,199	-0,060	1,9418	1,8031	2,0806
	0,0016	9,115	-1,489	19,721	5,409	5,302	5,520	0,918	0,848	0,988	3,628	3,488	3,768
HL	0,0500	179,913	-10,301	370,128	97,025	95,107	99,023	-0,029	-0,099	0,040	2,197	2,057	2,337
	0,1000	302,107	-78,016	682,230	193,894	190,061	197,886	-,0266	-,0964	0,043	1,855	1,715	1,994
	0,0016	9,922	-1,473	21,318	5,812	5,698	5,931	0,802	0,732	0,871	3,144	3,005	3,283
HLOC	0,0500	195,850	-16,147	407,847	108,136	106,013	110,346	-0,065	-0,135	0,003	2,119	1,980	2,258
	0,1000	322,637	-95,560	740,835	213,316	209,128	217,676	0,042	-0,026	0,112	1,876	1,737	2,015
	0,0016	5,636	-0,077	11,350	2,914	2,857	2,974	0,334	0,265	0,404	2,652	2,513	2,791
GARCH (1,1)	0,0500	129,670	5,374	253,965	63,401	62,156	64,697	-0,161	-0,230	-0,091	2,251	2,113	2,390
	0,1000	233,741	-12,189	479,672	125,445	122,983	128,009	-0,320	-0,389	-0,250	2,051	1,912	2,190

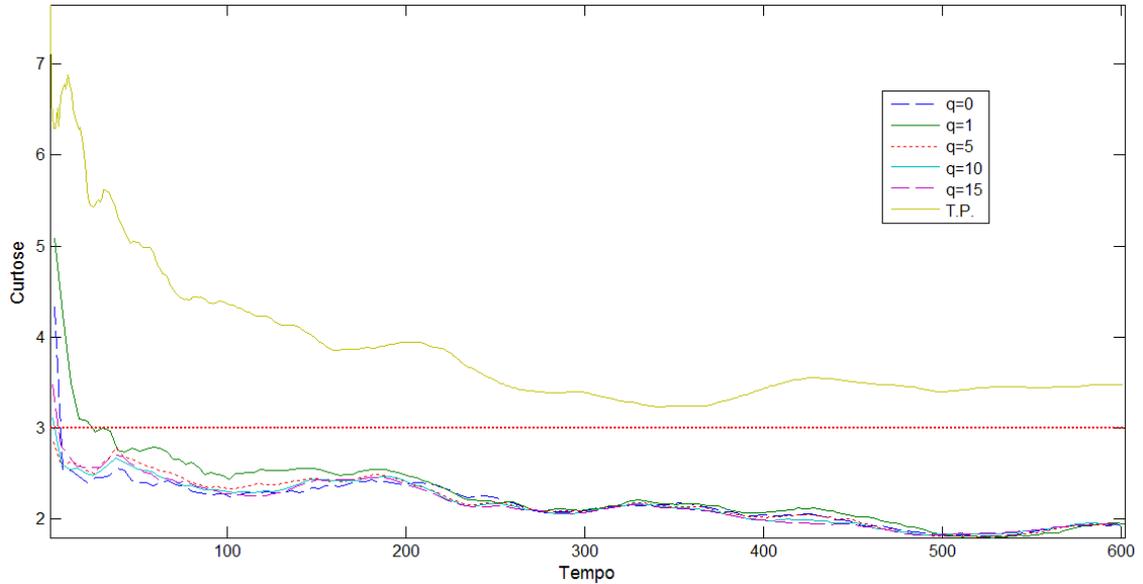
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

3.2.2 Análise do índice DAX.

Para o índice da bolsa de Frankfurt, foram observados os seguintes fatos:

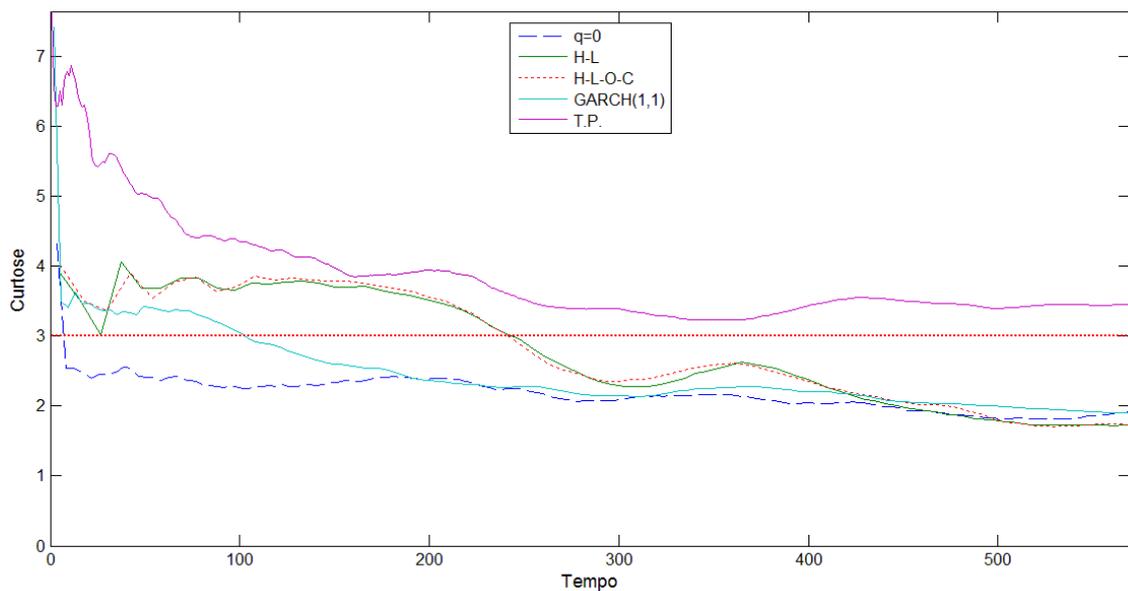
- a) A curtose dos retornos da estratégia-base aproxima-se do valor 3 em um intervalo de tempo superior à dos retornos utilizando as seções de Lévy para estimadores de volatilidade baseados no aumento do tamanho da subamostra ($2q + 1$) utilizada para a variância (figura 25) e para outras *proxies* relacionadas à mudança de retornos (figura 26). No caso do IBOVESPA, a série de retornos resultante da estratégia base tem a curtose convergindo para 3 para valores muito elevados de Δt . Para o caso das seções de Lévy, a estatística referente ao IBOVESPA converge para 3 enquanto que, para o DAX, a curtose aproxima-se de 2 no mesmo intervalo de tempo.
- b) A evolução dos retornos médios e de seus respectivos desvios padrão em relação às seções de Lévy e ao tempo físico foi monótona crescente para a série DAX, tanto para as volatilidades locais baseadas em q (figura 27) como para as demais estimativas de volatilidade local (figura 28). Comportamento semelhante foi observado para o índice IBOVESPA.
- c) O tempo médio de carregamento do ativo (DAX) aumenta com o incremento da seção ζ . Para os diferentes valores de q , as curvas estão sobrepostas na maior parte dos pontos (figura 29). Para HL e HLOC, a trajetória das curvas afasta-se dos gráficos de $q = 0$ e de GARCH (1,1) até o tempo médio aproximado de 450 dias. Após este instante, as curvas tendem a ficar paralelas entre si (figura 30).
- d) O retorno médio do DAX para a estratégia das seções de Lévy é maior que o relativo à estratégia base ao longo dos intervalos de carregamento do ativo. Sua variabilidade (dos retornos) permanece quase igual em qualquer uma das duas estratégias somente havendo diferenças significativas a partir de 400 dias de carregamento. Tal constatação difere da realizada para o IBOVESPA, pois este índice possuía retornos médios e desvio padrão associado a eles menores para a estratégia envolvendo as seções de Lévy durante o intervalo observado (figura 31). O emprego das volatilidades locais HL e HLOC geraram retornos médios muito afastados do uso das medidas com q e do GARCH (1,1) (figura 32).

Figura 25 – Curtose dos retornos (DAX) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta\zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva foi obtida a partir de valores de q referentes ao cálculo das volatilidades locais para a composição da seção ζ .



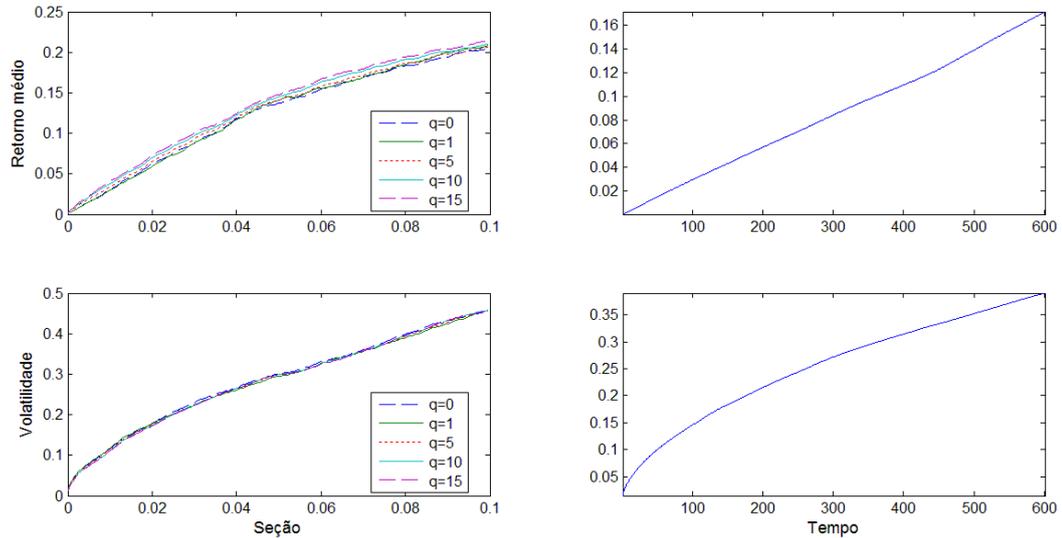
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 26 – Curtose dos retornos (DAX) em função dos valores de Δt para a estratégia que utiliza o tempo físico (T.P.) e em função do tempo de carregamento médio ($\Delta\zeta$) para a estratégia baseada nas seções de Lévy. Cada curva representa um tipo de volatilidade local escolhida para compor a seção ζ .



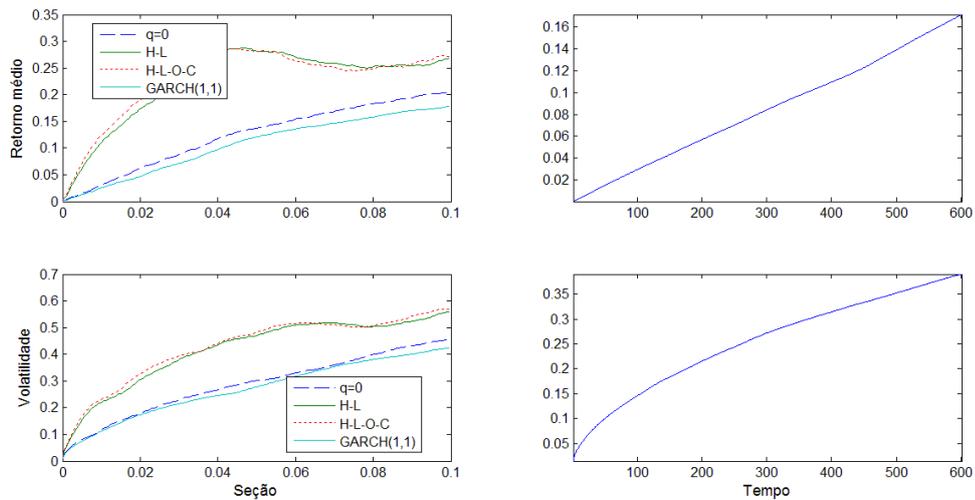
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 27 – Média dos retornos do índice DAX ($M_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes q . Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes q . Média dos retornos ($M_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto inferior direito).



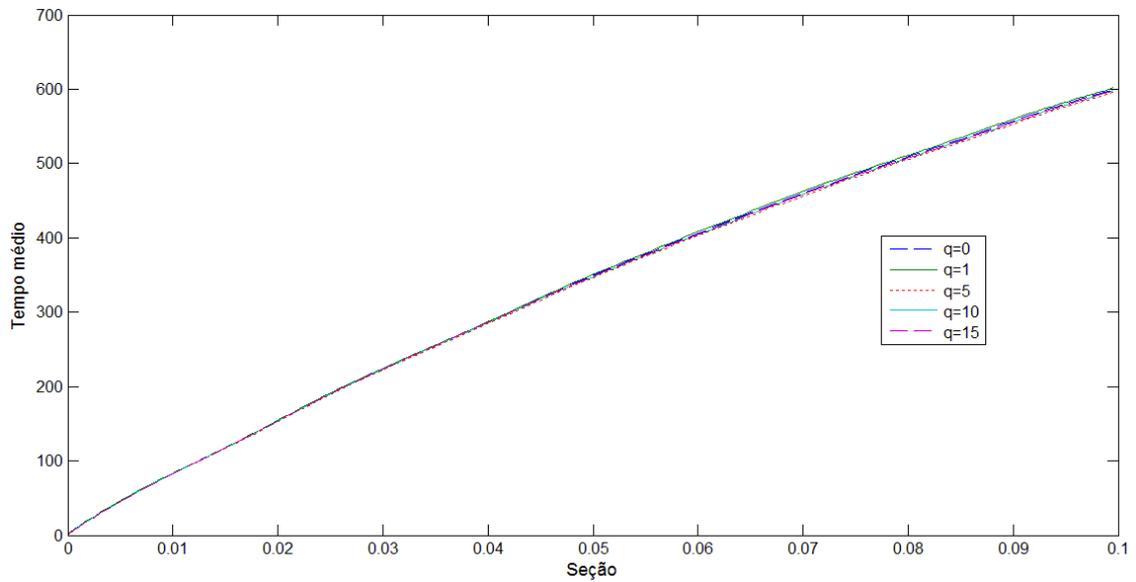
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 28 – Média dos retornos do índice DAX ($M_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto superior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Volatilidade dos retornos do mesmo índice ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus seção ζ (canto inferior esquerdo) para diferentes *proxies* de volatilidade. Média dos retornos ($M_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto superior direito). Volatilidade dos retornos ($\sigma_{\Delta\zeta}$) versus intervalo de tempo (canto inferior direito).



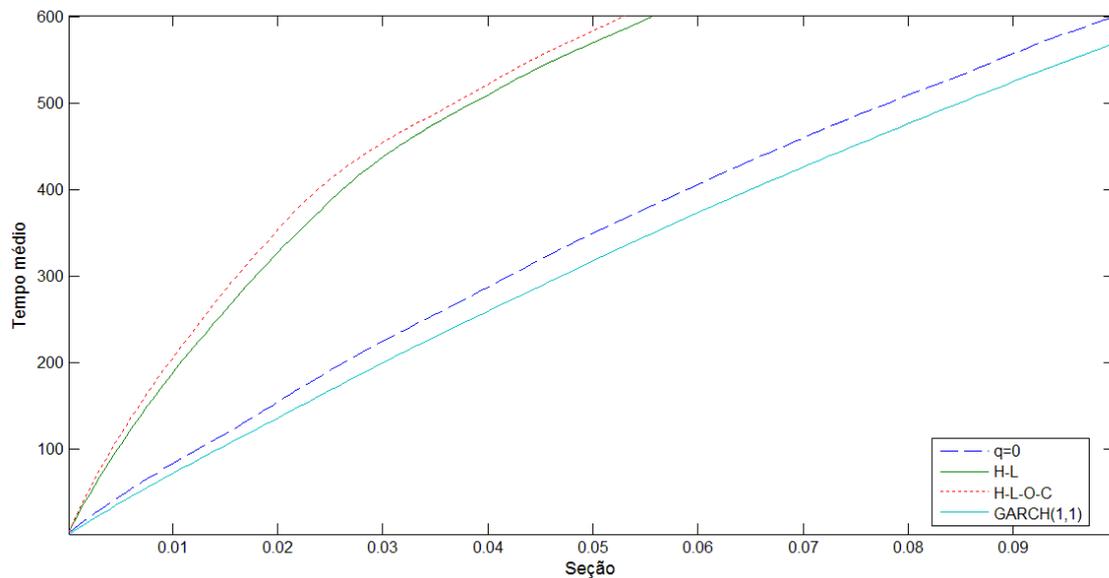
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 29 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta\zeta$) versus seção de Lévy para retornos do índice DAX.



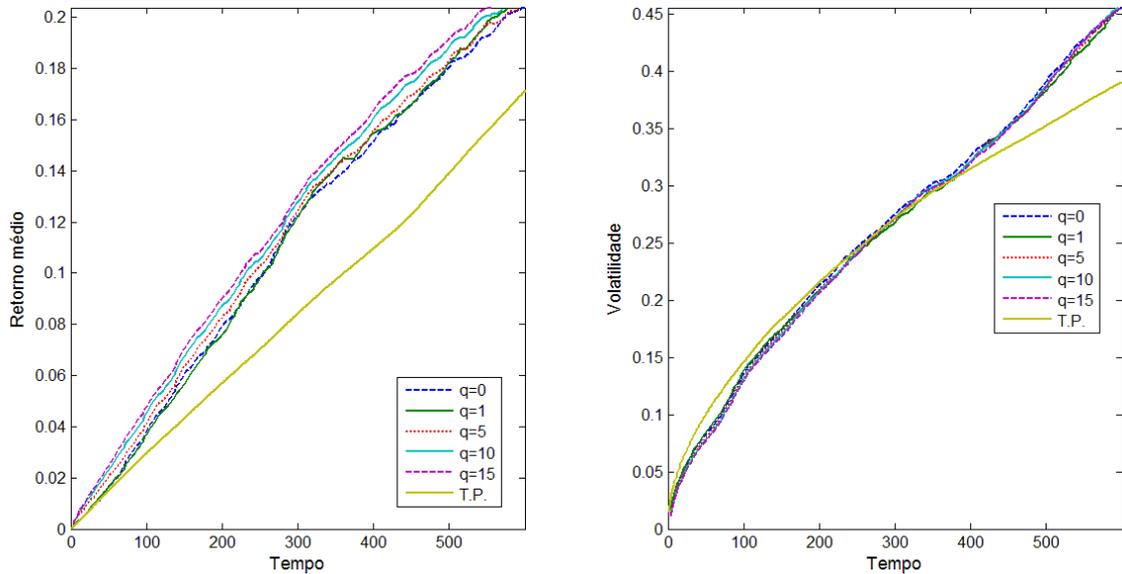
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 30 – Tempo físico médio entre posição comprada (vendida) e vendida (comprada) ($\Delta\zeta$) versus seção de Lévy para retornos do índice DAX utilizando as medidas de volatilidade local HL, HLOC e GARCH (1,1).



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 31 – Retorno médio *versus* tempo (lado esquerdo) e Volatilidade *versus* tempo (lado direito) para valores diferentes de q do índice DAX. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).

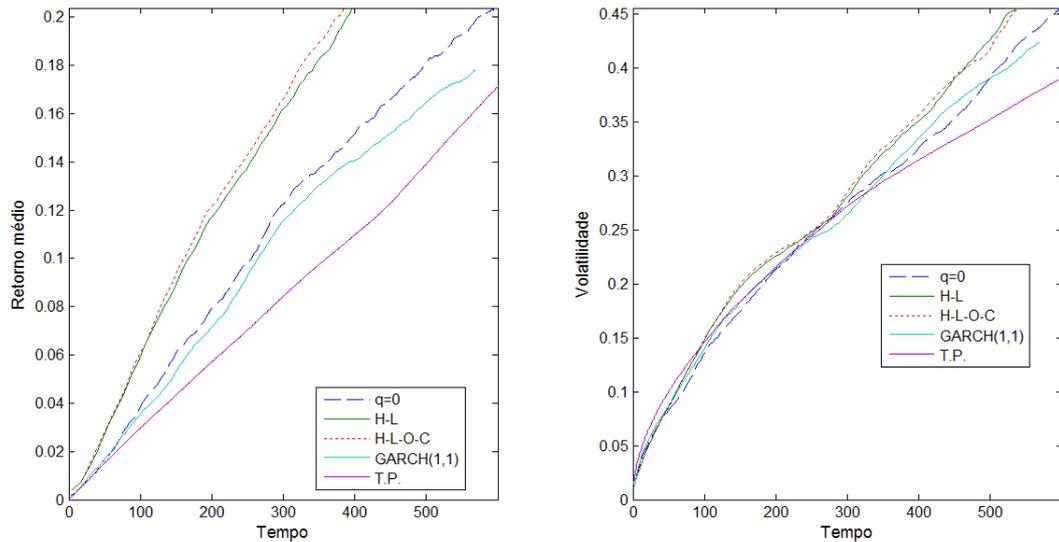


Fonte: Ranciaro Neto (2013).

- e) Os níveis de desvio padrão para os retornos médios do índice DAX apresentaram menores valores para a estratégia que utiliza o acúmulo de volatilidade associado ao tempo de carregamento do que para a estratégia que envolve o uso do tempo físico em todo o intervalo de retornos observado (figura 33). Quando foi utilizado como estimador de volatilidade local a descrição da série pelo processo GARCH (1.1), há uma região, dentro do intervalo observado em que o desvio padrão dos retornos referente às seções de Lévy supera o relativo à estratégia-base.
- f) Da mesma forma que observado para o IBOVESPA, ao se aumentar o tamanho da seção ζ , a forma da distribuição dos retornos do DAX tende a deixar de ser concentrada, ficando mais dispersa e com mais de um pico de frequência. Tal ocorrência foi observada para as *proxies* de volatilidade elencadas nas figuras 35 a 40. Além disso, foi verificada a perda do caráter estacionário da distribuição temporal dos retornos ao longo dos intervalos de carregamento à medida que o valor da seção ζ aumenta. De acordo com a Tabela 5, a média dos retornos é crescente com o aumento de ζ , exceto para as volatilidades HL e HLOC. O desvio padrão apresentou comportamento semelhante ao da estatística anterior. Os valores de assimetria convergiram para próximo de zero, exceto para HLOC

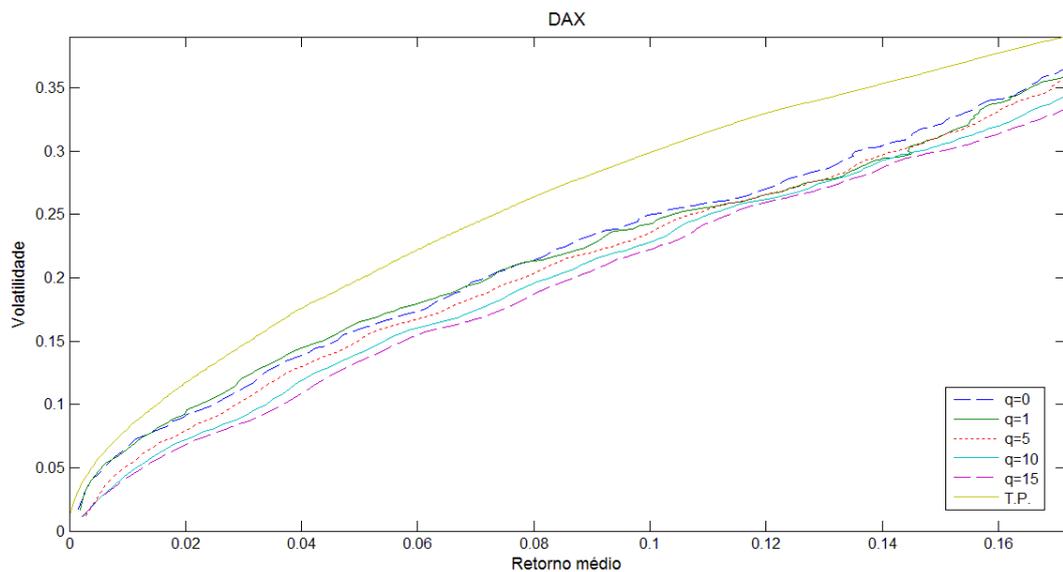
(0,107) e GARCH (1,1) (0,513). A curtose diminuiu com o aumento da seção ζ para valores inferiores a 2 em todas as estimativas de volatilidade local.

Figura 32 – Retorno médio *versus* tempo (lado esquerdo) e Volatilidade *versus* tempo (lado direito) para diferentes *proxies* de m_i^2 do DAX. T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança de escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).



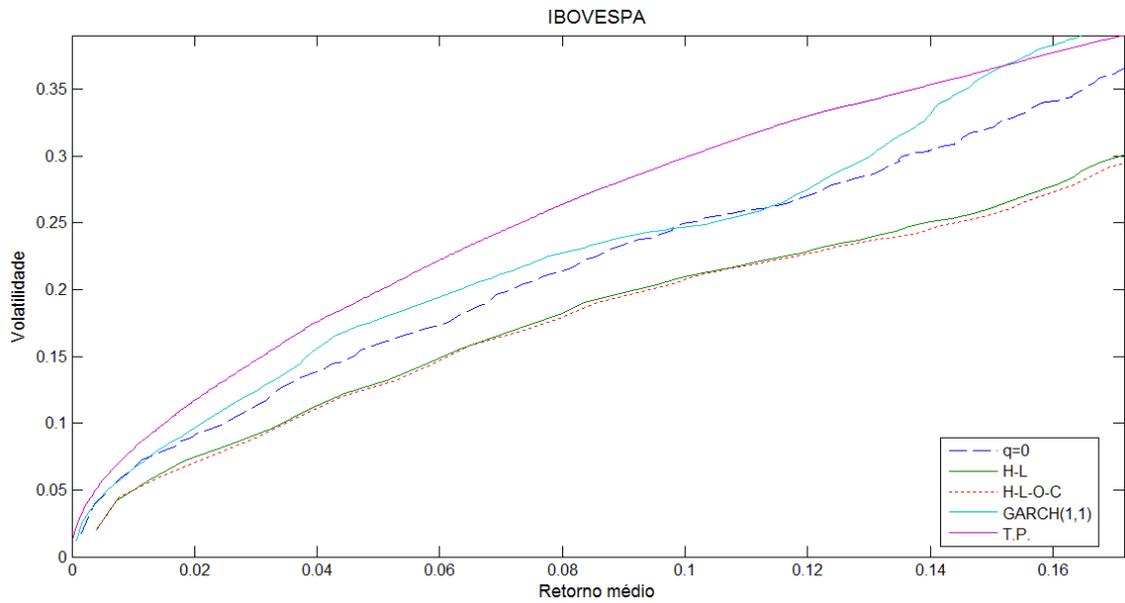
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 33 – Retorno médio *versus* Volatilidade para o índice DAX. Cada linha é diferenciada apenas pelo *lag* utilizado para se medir a volatilidade local dos termos da série (q). A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).



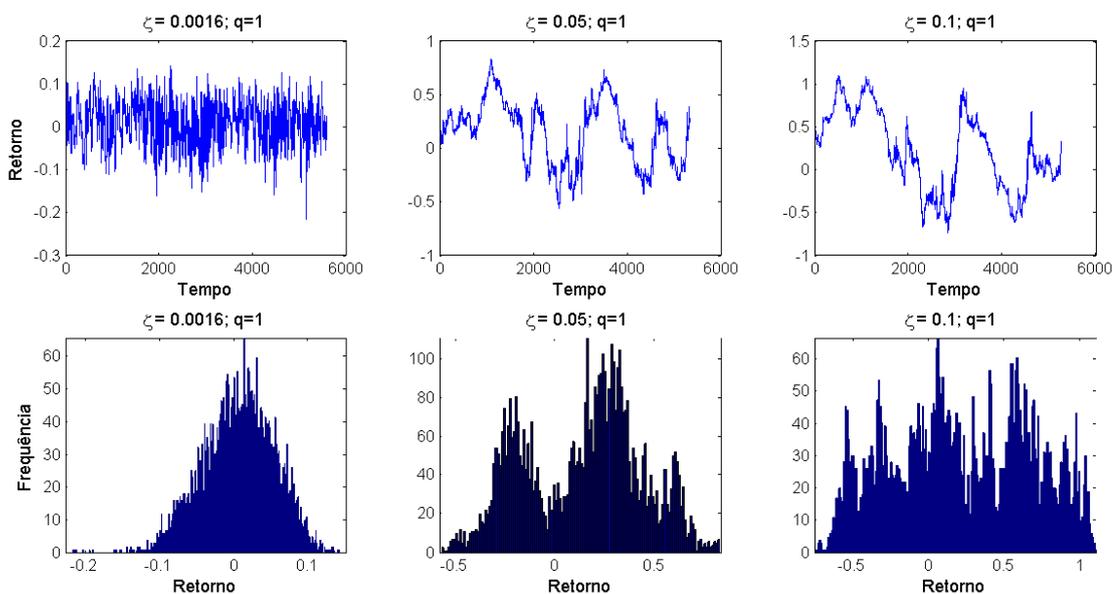
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 34 – Retorno médio versus Volatilidade para o DAX. Cada linha é diferenciada apenas pelo tipo de *proxy* utilizada para se medir a volatilidade local dos termos da série. A legenda T.P. representa a série de tempo que não passou pela mudança da escala temporal em termos de acúmulo de variância (T.P. = tempo padrão).



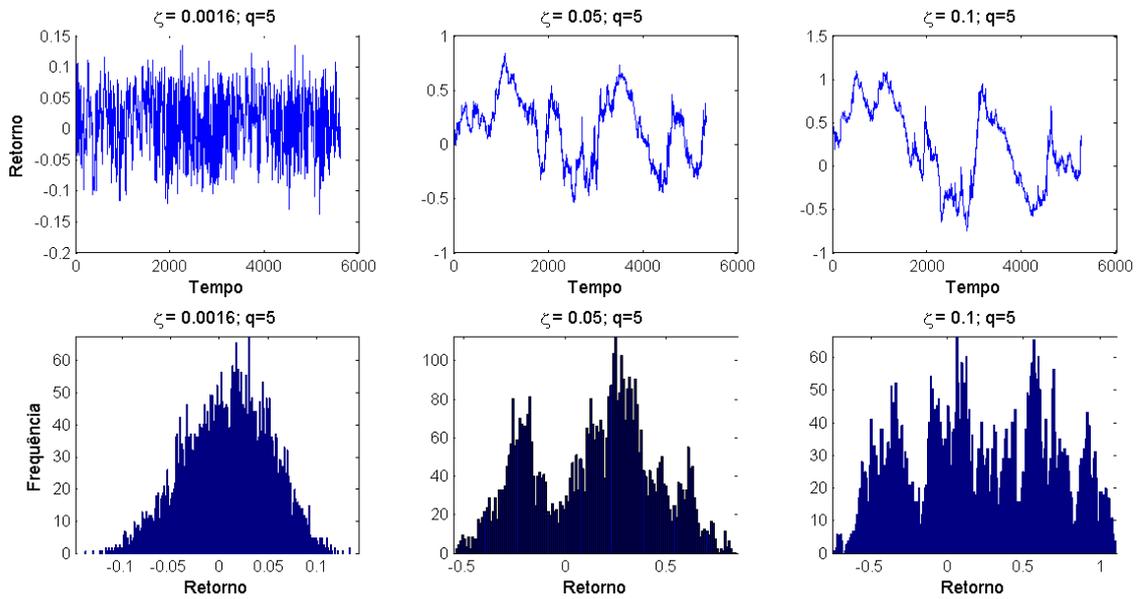
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 35 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 1$.



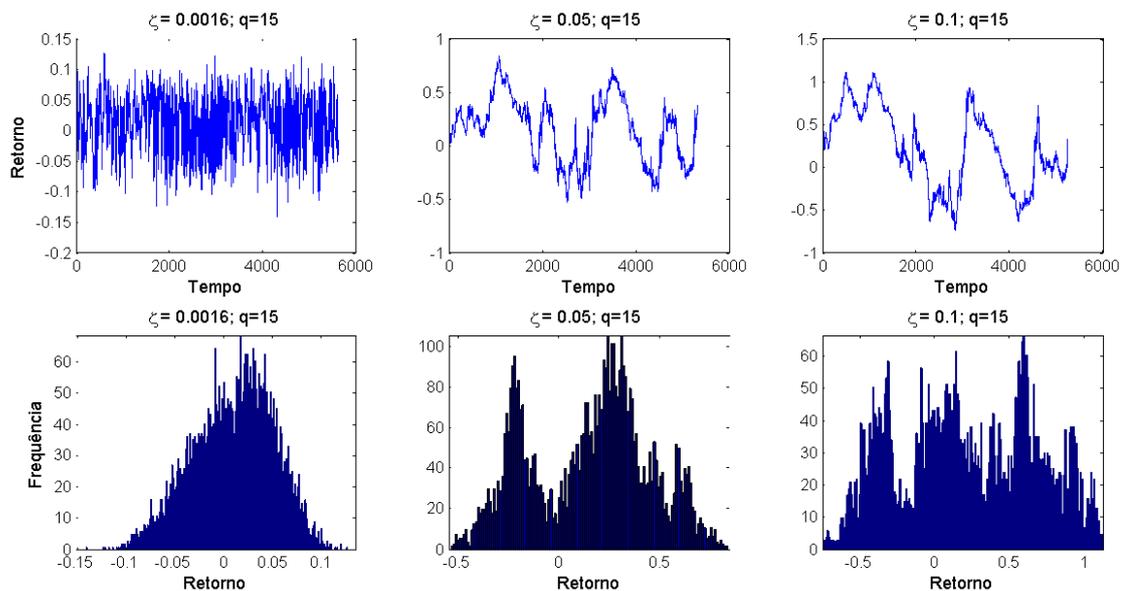
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 36 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 5$.



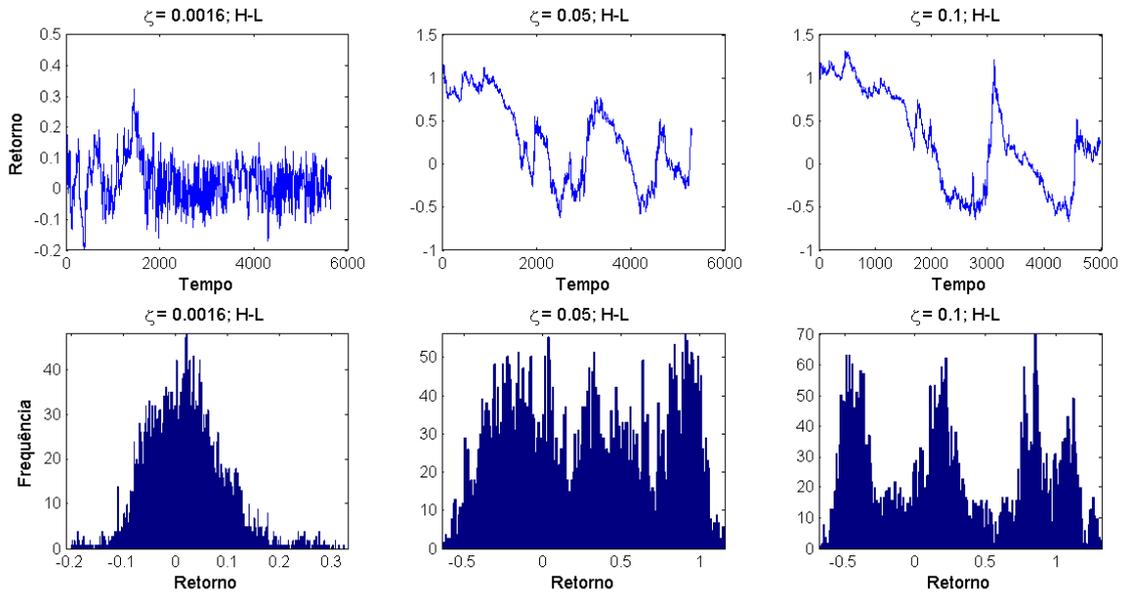
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 37 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q = 15$.



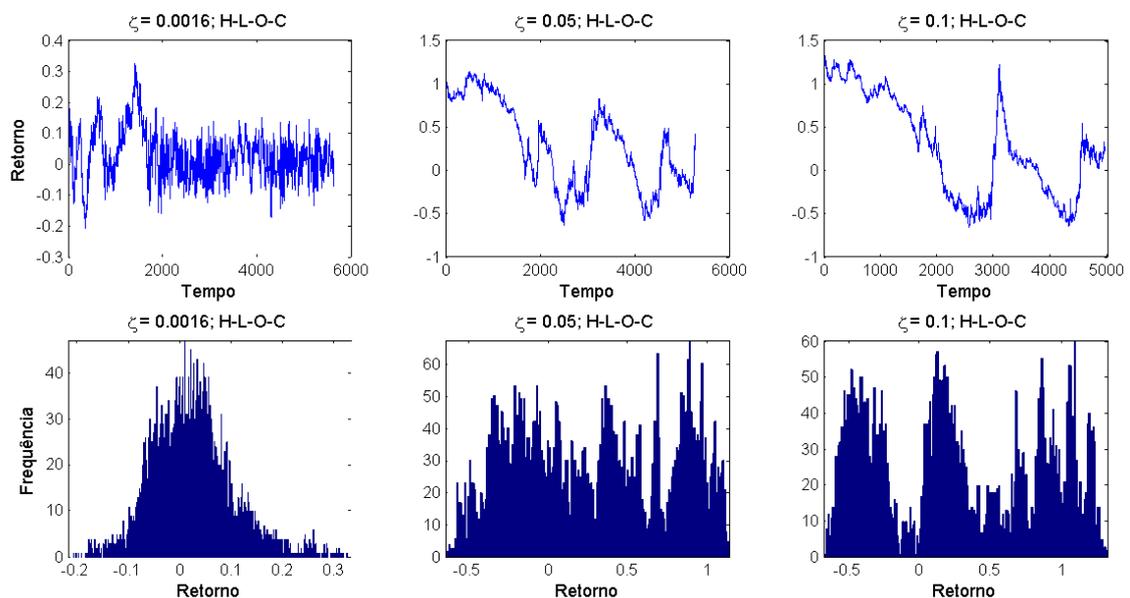
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 38 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e volatilidade local HL.



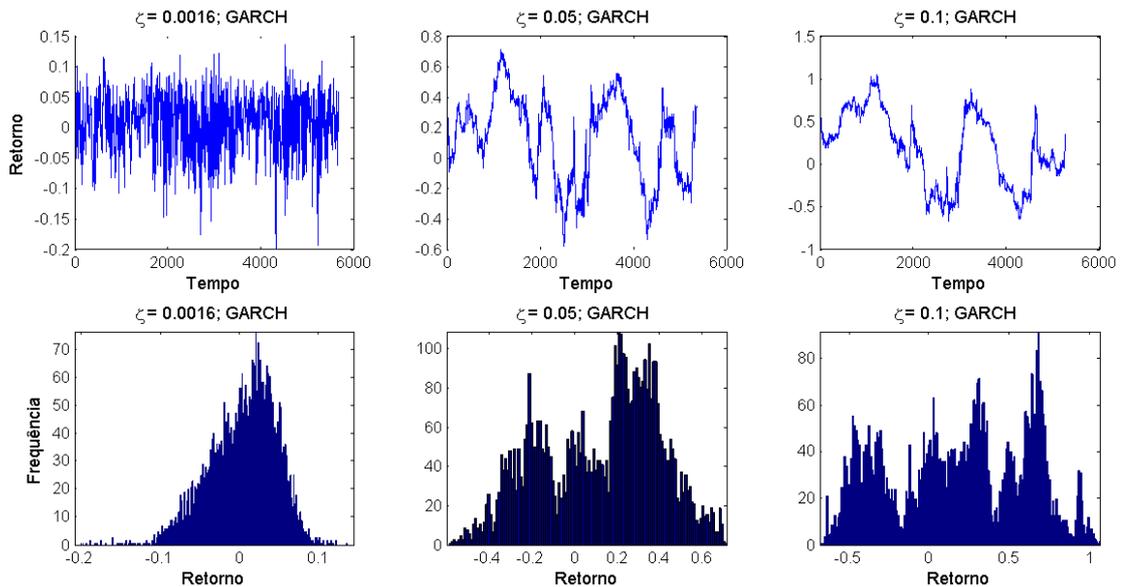
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 39 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e volatilidade local HLOC.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 40 – Distribuição dos retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e volatilidade local GARCH (1,1).



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

- g) A distribuição dos intervalos de carregamento de um ativo atrelado ao índice DAX para as diferentes seções apresentou o mesmo comportamento em relação à série de tempo do IBOVESPA. Em $\zeta = 0,0016$, a curva de frequência apresentou uma só cauda e, nos valores de $\zeta = 0,05$ e $\zeta = 0,1$, foram percebidas a presença de mais de um pico de frequência em cada histograma de $n(\zeta)$. (figuras 41 a 46).
- h) A

Tabela 5 – Valores das estatísticas descritivas dos retornos normalizados do DAX ($r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$) para diferentes *proxies* de volatilidade e para seções ζ distintas.

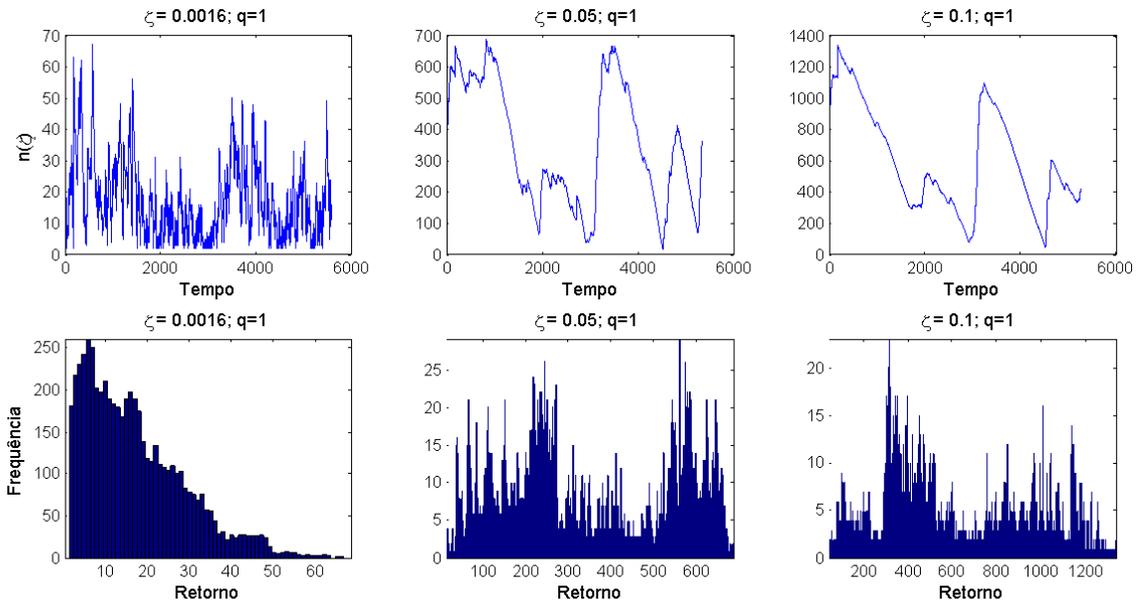
Vol. Local	Seção ζ	Média			Desvio padrão			Assimetria			Curtose		
		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança	
			Inferior	Superior									
q=1	0,00												
	16	0,1			1,1			0,2	-		3,1		
		27	-2,204	2,458	89	1,167	1,211	59	0,324	-0,195	03	2,974	3,232
	0,05	0,6	-1,955	3,217	1,3	1,295	1,345	-	-	-0,054	2,1	2,031	2,294

	00	31			19			0,1	0,186		62			
								20						
	0,10							-						
	00	0,6			1,4			0,0	-		1,9			
		60	-2,181	3,501	49	1,422	1,477	23	0,089	0,044	42	1,810	2,075	
								-						
	0,00													
	16	0,1			1,1			0,1	-		2,6			
		97	-1,960	2,355	01	1,081	1,121	90	0,254	-0,126	03	2,474	2,731	
								-						
q=5	0,05													
	00	0,6			1,3			0,1	-		2,1			
		30	-1,990	3,250	37	1,312	1,363	19	0,185	-0,053	39	2,007	2,271	
								-						
	0,10													
	00	0,6			1,4			0,0	-		1,9			
		54	-2,180	3,487	46	1,418	1,474	04	0,070	0,062	24	1,791	2,056	
								-						
	0,00													
	16	0,2			1,0			0,2	-		2,5			
		47	-1,790	2,284	39	1,020	1,059	62	0,326	-0,198	84	2,455	2,712	
								-						
q=15	0,05													
	00	0,6			1,3			0,1	-		2,1			
		61	-1,953	3,274	33	1,308	1,359	07	0,173	-0,041	23	1,991	2,255	
								-						
	0,10	0,6			1,4			0,0	-		1,9			
		00	75	-2,157	3,506	44	1,417	1,473	02	0,065	0,068	39	1,806	2,072
								-						
	0,00	0,4			1,7			0,4			4,0			
		16	62	-3,059	3,982	96	1,763	1,830	95	0,431	0,559	64	3,936	4,192
								-						
	0,05	1,2			2,1			0,0	-		1,7			
HL		00	61	-2,858	5,380	01	2,062	2,142	39	0,027	0,105	36	1,603	1,868
								-						
	0,10	0,8			1,7			0,0			1,6			
		00	48	-2,618	4,314	68	1,734	1,803	80	0,012	0,149	81	1,545	1,818
								-						
	0,00	0,5			1,9			0,5			3,9			
		16	81	-3,186	4,347	21	1,887	1,958	64	0,500	0,628	08	3,780	4,036
HLO	0,05	1,2			2,1			0,0	-		1,7			
C		00	62	-2,969	5,493	58	2,118	2,200	48	0,018	0,114	43	1,611	1,875
								-						
	0,10	0,8			1,8			0,1			1,6			
		00	63	-2,678	4,403	06	1,771	1,842	07	0,039	0,175	94	1,557	1,830
								-						
	0,00													
GAR	16	0,1			1,1			0,4	-		3,6			
CH		06	-1,959	2,170	22	1,100	1,145	25	0,495	-0,356	23	3,495	3,751	
(1,1)	0,05	0,5			1,2			0,4			2,1			
		00	40	-1,891	2,972	99	1,273	1,325	85	0,416	0,554	50	2,018	2,281
								-						
	0,10	0,5	-2,069	3,199	1,3	1,368	1,424	0,5	0,443	0,582	1,9	1,779	2,044	

Fonte: Ranciaro Neto (2013).

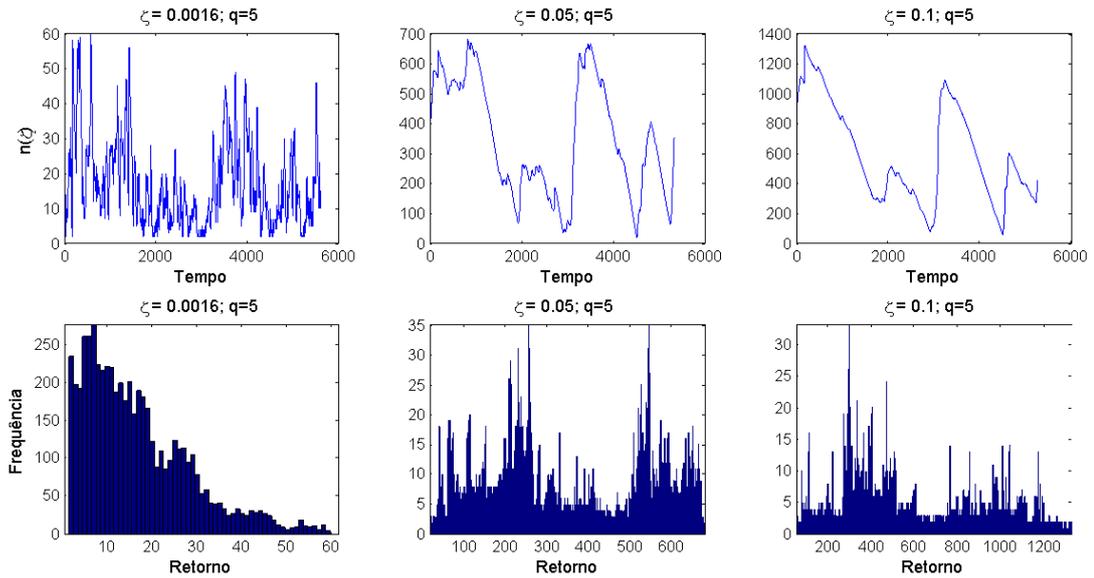
- i) contém os valores das estatísticas descritivas para $n(\zeta)$. As médias e os desvios padrão aumentaram de valor com o incremento de ζ . Os valores de assimetria para $\zeta = 0,0016$ eram maiores que 1, exceto para o GARCH (1,1), igual a 0,377. Ao se aumentar o valor de ζ foi percebida uma queda e posterior aumento da estatística em questão, tendo convergido para, aproximadamente, 0,4 nos casos de volatilidade local medida utilizando-se as distâncias q . Para HL e HLOC o valor convergiu em torno de 0,7 e, para o GARCH (1,1) a medida estacionou em 0,16. A curtose apresentou convergência de valores em torno de 2 para volatilidades locais q , em torno de 2,6 para HL e HLOC e de 1,7 para GARCH (1,1,).

Figura 41 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q=1$.



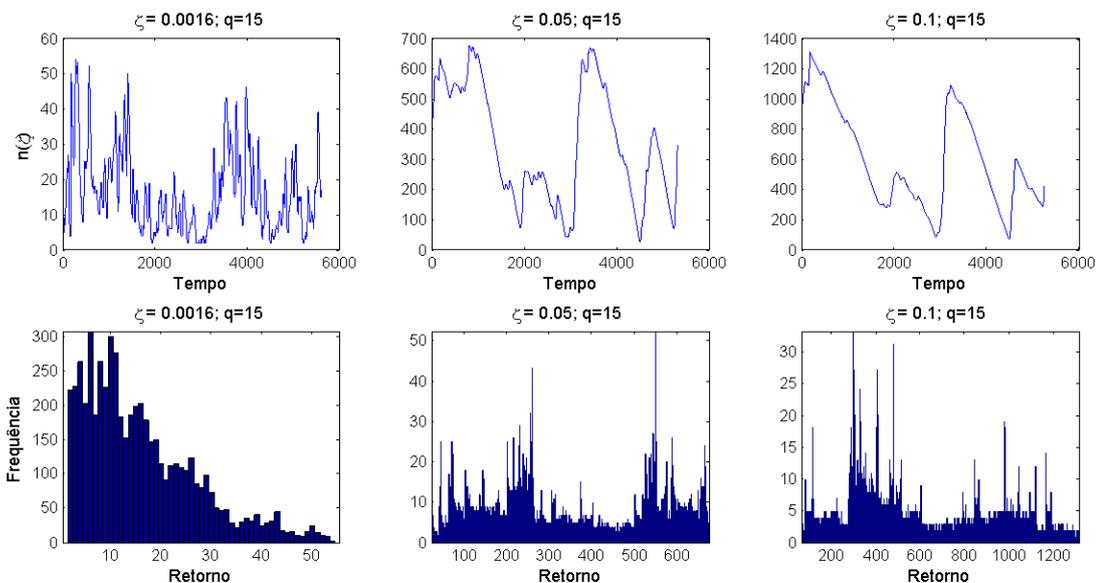
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 42 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q=5$.



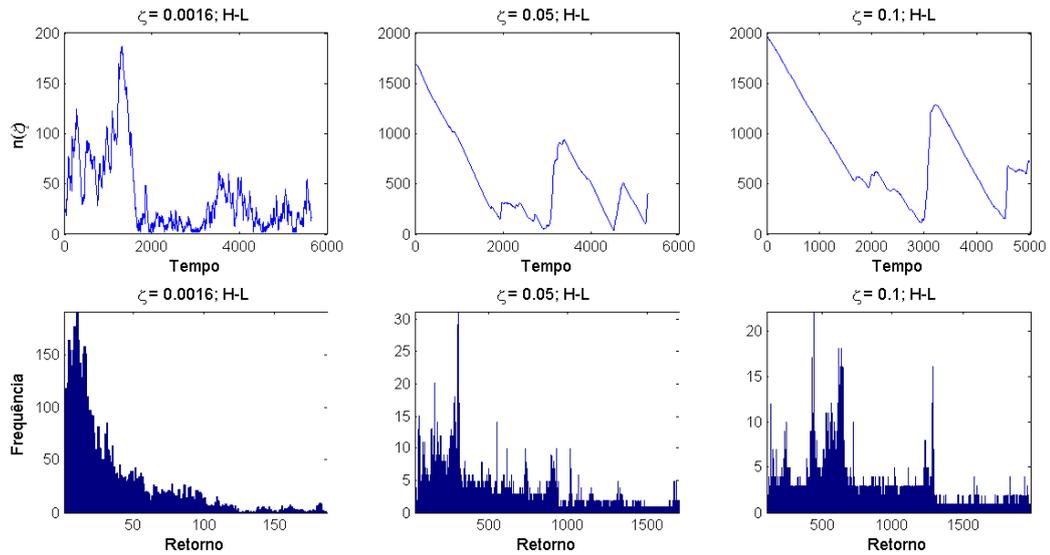
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 43 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e $q=15$.



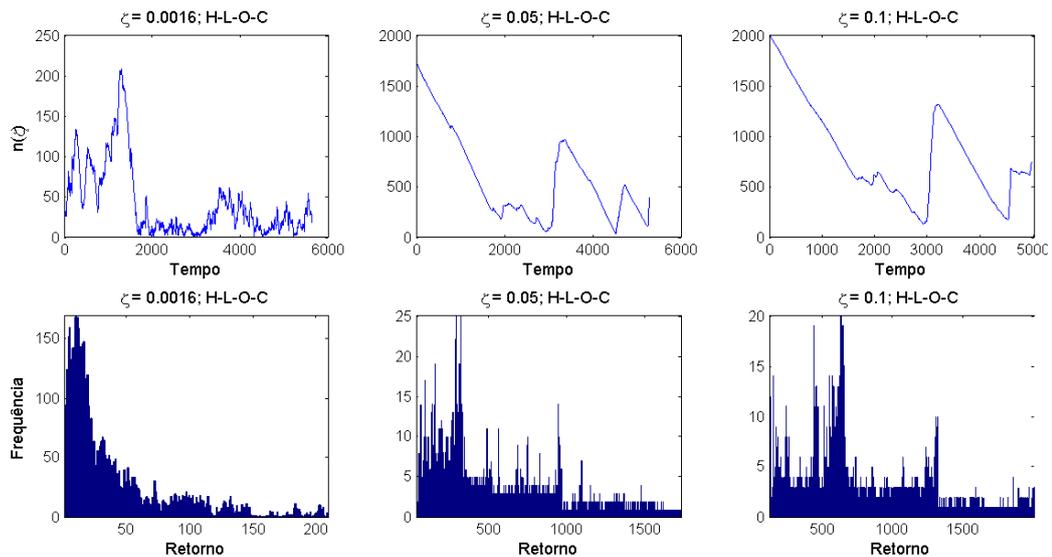
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 44 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade HL.



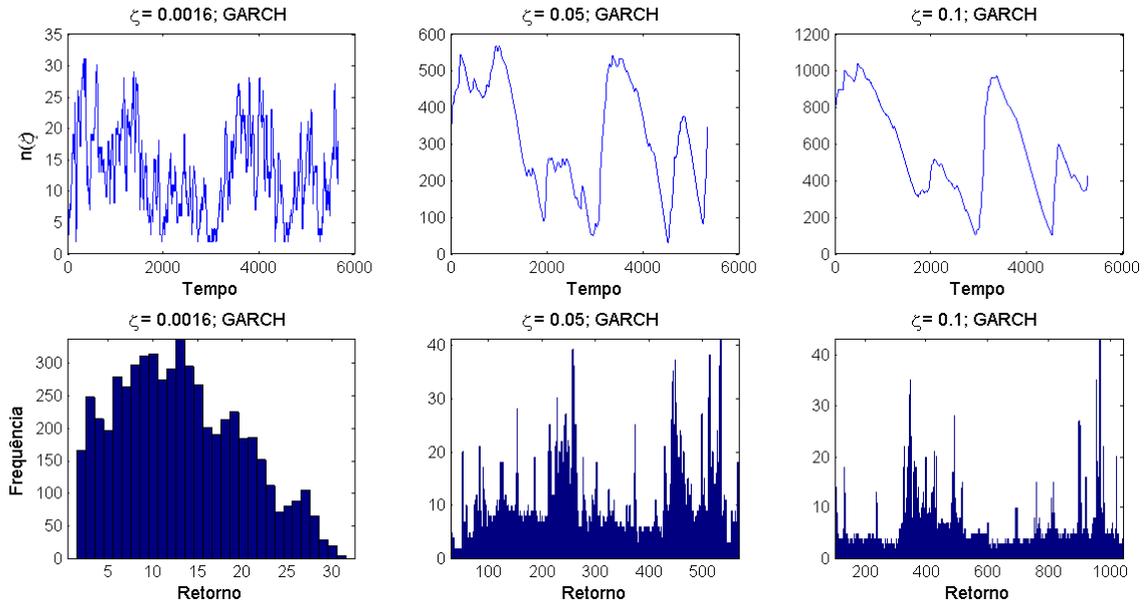
Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 45 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade HLOC.



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Figura 46 – Distribuição do número de elementos ($n(\zeta)$) da sequência de retornos do IBOVESPA obtidos durante intervalo de tempo construído a partir das seções de Lévy $\Delta\zeta(t)$ ao longo do tempo (superior) e distribuição de frequências dos respectivos retornos (inferior). Foram consideradas 3 (três) seções: 0,0016; 0,05; 0,1 e medida de volatilidade GARCH (1,1).



Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Para o DAX, o valor de D encontrado foi de 0,0197. Após a realização de 10000 reamostragens das inovações de um processo GARCH (1,1), para a determinação da distribuição empírica de D , verificou-se que, 39,63% dos valores são negativos e que a porcentagem dos graus de D reamostrados menores que 0,0197 é igual a 86,48%. Desta forma, não se pode afirmar que a estratégia das seções de Lévy gera melhores resultados que a estratégia-base, de acordo com as propriedades da medida D . Tal hipótese somente seria aceita se, pelo menos, 95% das reamostragens de D fossem inferiores a 0,0197.

Tabela 5 – Valores das estatísticas descritivas dos retornos normalizados do DAX ($r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$) para diferentes *proxies* de volatilidade e para seções ζ distintas.

Vol. Local	Seção (ζ)	Média			Desvio padrão			Assimetria			Curtose		
		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança		$r_{\Delta\zeta}/\sqrt{\zeta}$	Int. confiança	
			Inferior	Superior									
q=1	0,0016	0,127	-2,204	2,458	1,189	1,167	1,211	-0,259	-0,324	-0,195	3,103	2,974	3,232
	0,0500	0,631	-1,955	3,217	1,319	1,295	1,345	-0,120	-0,186	-0,054	2,162	2,031	2,294
	0,1000	0,660	-2,181	3,501	1,449	1,422	1,477	-0,023	-0,089	0,044	1,942	1,810	2,075
q=5	0,0016	0,197	-1,960	2,355	1,101	1,081	1,121	-0,190	-0,254	-0,126	2,603	2,474	2,731
	0,0500	0,630	-1,990	3,250	1,337	1,312	1,363	-0,119	-0,185	-0,053	2,139	2,007	2,271
	0,1000	0,654	-2,180	3,487	1,446	1,418	1,474	-0,004	-0,070	0,062	1,924	1,791	2,056
q=15	0,0016	0,247	-1,790	2,284	1,039	1,020	1,059	-0,262	-0,326	-0,198	2,584	2,455	2,712
	0,0500	0,661	-1,953	3,274	1,333	1,308	1,359	-0,107	-0,173	-0,041	2,123	1,991	2,255
	0,1000	0,675	-2,157	3,506	1,444	1,417	1,473	0,002	-0,065	0,068	1,939	1,806	2,072
HL	0,0016	0,462	-3,059	3,982	1,796	1,763	1,830	0,495	0,431	0,559	4,064	3,936	4,192
	0,0500	1,261	-2,858	5,380	2,101	2,062	2,142	0,039	-0,027	0,105	1,736	1,603	1,868
	0,1000	0,848	-2,618	4,314	1,768	1,734	1,803	0,080	0,012	0,149	1,681	1,545	1,818
HLOC	0,0016	0,581	-3,186	4,347	1,921	1,887	1,958	0,564	0,500	0,628	3,908	3,780	4,036
	0,0500	1,262	-2,969	5,493	2,158	2,118	2,200	0,048	-0,018	0,114	1,743	1,611	1,875
	0,1000	0,863	-2,678	4,403	1,806	1,771	1,842	0,107	0,039	0,175	1,694	1,557	1,830
GARCH (1,1)	0,0016	0,106	-1,959	2,170	1,122	1,100	1,145	-0,425	-0,495	-0,356	3,623	3,495	3,751
	0,0500	0,540	-1,891	2,972	1,299	1,273	1,325	0,485	0,416	0,554	2,150	2,018	2,281
	0,1000	0,565	-2,069	3,199	1,395	1,368	1,424	0,513	0,443	0,582	1,912	1,779	2,044

Fonte: Ranciaro Neto (2013).

Tabela 6 – Valores das estatísticas descritivas dos intervalos de carregamento do DAX para diferentes *proxies* de volatilidade e para seções ζ distintas.

Vol. Local	Seção (ζ)	Média			Desvio padrão			Assimetria			Curtose		
		n(ζ)	Int. confiança		n(ζ)	Int. confiança		n(ζ)	Int. confiança		n(ζ)	Int. confiança	
			Inferior	Superior		Inferior	Superior		Inferior	Superior		Inferior	Superior
q=1	0,0016	17,388	-6,361	41,137	12,114	11,894	12,344	1,025	0,960	1,089	3,804	3,676	3,933
	0,05	350,788	-30,043	731,619	194,261	190,638	198,025	0,126	0,061	0,192	1,617	1,486	1,749
	0,1	603,574	-41,204	1248,352	328,898	322,718	335,322	0,408	0,342	0,474	1,997	1,865	2,130
q=5	0,0016	16,864	-6,565	40,292	11,951	11,734	12,176	1,081	1,017	1,145	3,836	3,708	3,964
	0,05	346,736	-28,549	722,022	191,432	187,861	195,142	0,131	0,065	0,197	1,654	1,522	1,785
	0,1	597,624	-45,450	1240,698	328,029	321,868	334,432	0,402	0,336	0,468	1,945	1,813	2,078
q=15	0,0016	16,151	-6,001	38,303	11,300	11,095	11,513	1,027	0,963	1,091	3,575	3,446	3,703
	0,05	348,184	-29,276	725,645	192,541	188,945	196,278	0,138	0,072	0,203	1,648	1,516	1,779
	0,1	599,894	-44,651	1244,439	328,779	322,596	335,206	0,405	0,339	0,471	1,936	1,803	2,068
HL	0,0016	37,475	-36,750	111,700	37,862	37,176	38,575	1,675	1,611	1,739	5,627	5,499	5,755
	0,05	569,561	-265,564	1404,686	425,994	418,018	434,283	0,923	0,857	0,990	2,888	2,755	3,020
	0,1	802,619	-106,474	1711,712	463,718	454,770	473,029	0,716	0,648	0,784	2,660	2,523	2,796
HLOC	0,0016	42,151	-45,416	129,718	44,668	43,858	45,509	1,660	1,596	1,724	5,283	5,155	5,411
	0,05	583,531	-263,010	1430,072	431,817	423,727	440,225	0,892	0,826	0,958	2,789	2,657	2,921
	0,1	826,057	-94,551	1746,665	469,592	460,513	479,037	0,693	0,625	0,762	2,615	2,478	2,751
GARCH (1,1)	0,0016	13,061	-0,323	26,445	6,827	6,704	6,955	0,377	0,313	0,441	2,348	2,221	2,476
	0,05	317,734	23,024	612,445	150,331	147,532	153,239	-0,053	-0,119	0,013	1,733	1,601	1,864
	0,1	571,333	49,563	1093,103	266,153	261,155	271,346	0,160	0,094	0,227	1,759	1,626	1,892

Fonte: Ranciaro Neto (2013).

4 CONCLUSÃO

O estudo de uma estratégia de negociação de ativos financeiros sob a proposta de mudança de escala de medida temporal teve caráter exploratório, com o intuito de se avaliar a sensibilidade dos resultados em relação à medida de volatilidade local escolhida e de se verificar a redução do nível de variabilidade dos retornos. Ao mesmo tempo, foi proposta uma medida de performance que fosse adequada à avaliação do grau de risco da estratégia para determinados níveis de retorno médio.

De modo geral, a curtose dos retornos apresentou queda rápida ao se utilizar as seções de Lévy, estando este resultado em concordância com estudos anteriores (18,29). Todavia, os momentos relativos aos retornos das duas séries de tempo não convergiram para os valores associados a uma distribuição normal padrão, apesar de aqueles não ficarem muito afastados do esperado para uma Gaussiana. Além disso, os histogramas das distribuições de retornos para valores de seção elevados possuíam formato divergente daquela curva de frequência. As contribuições significativas das variâncias individuais de cada retorno para a variância do retorno acumulado podem ter invalidado a condição de Lindeberg, tida como necessária para a convergência em distribuição normal padrão (47).

Dentre os métodos de estimação da volatilidade local para uma série estacionária, de modo geral, foi percebida a discordância entre dois grupos de estimadores: os que utilizavam a expressão padrão da variância de uma amostra de variáveis aleatórias para $2q + 1$ elementos, juntamente com as estimativas do processo GARCH (1,1) e, do outro lado, as volatilidades HL e HLOC, determinadas sob um processo de difusão com incrementos normais. Há métodos mais precisos de determinação de volatilidade, porém utilizam informações intradiárias (4).

A aferição da superioridade da estratégia de negociação envolvendo as seções de Lévy utilizando a medida D, cuja construção tinha por meta determinar a diminuição média de risco em relação a um intervalo de retornos, não resultou na ordenação das estratégias tanto para o IBOVESPA como para o DAX, devido a não se conseguir rejeitar a hipótese de que seu valor poderia ser não positivo em uma distribuição empírica determinada por reamostragens dos resíduos de um processo GARCH (1,1). Tal procedimento de reamostragem foi replicado de

(46), mas não se buscou detalhar, neste trabalho os efeitos da escolha da expressão de medida de performance sobre o método de *bootstrapping*.

De acordo com os dados apresentados, e com a proposta de um olhar diferente sobre a construção temporal para um sistema complexo com as características de um sistema econômico, surgem diferentes questões para pesquisa relacionadas à modelagem matemática da nova escala temporal e de seus efeitos sobre a volatilidade de uma série temporal de preços, à busca por outras estratégias de negociação envolvendo reconhecimento de padrões de retornos ao longo das seções de Lévy. Ademais, o estudo pode ser estendido para se definir mecanismos de negociação com previsibilidade de retornos para vários ativos em conjunto.

REFERÊNCIAS

1. CAMPBELL, J. Y.; LO, A. W.; MACKINLAY, A. C. **The Econometrics of Financial Markets**. Princeton: Princeton University Press, 1997.
2. POON, S.-H. **A practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility**. West Sussex: John Wiley & Sons, 2005.
3. MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. **Journal of Business**, Chicago; v. 36, p. 394-419, 1963.
4. VISSER, M. P. **Volatility Proxies and GARCH Models**. Amsterdam: Proefschrift Universiteit van Amsterdam, 2009. 153 p.
5. GARMAN, M. B.; KLAUS, M. J. On the estimation of security price volatilities from historical data. **Journal of Business**, Chicago; v. 53, n. 1, p. 67-78, 1980.
6. KARATZAS, I.; SHREVE, S. E. **Brownian Motion and Stochastic Calculus**. Nova Iorque: Springer Verlag, 1988.
7. ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. **Econometrica**, Nova Iorque; v. 50, n. 4, p. 987-1007, 1982.
8. BLACK, F. Studies of stock price volatility of changes. In: 1976 Meetings of the Business and Economic Statistics of American Statistical Association., 1976, [S.l.]. **Anais...** [S.l.]: American Statistical Association, 1976. p. 177-181.
9. CHRISTIE, A. C. The stochastic behavior of common stock variances—value, leverage and interest rate effects. **Journal of Financial Economics**, Nova Iorque; v. 10, n. 4, p. 407–432, 1982.
10. CLARK, P. K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. **Econometrica**, Nova Iorque; v. 41, n. 1, p. 135-155, 1973.
11. GALLANT, A. R.; HSIEH, D. A.; TAUCHEN, G. On fitting a recalcitrant series: The pound dollar exchange rate, 1974-1983. In: BARNETT, W. A.; POWELL, J.; TAUCHEN, G. (Org.). **Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. p. 199-242.
12. ANÉ, T.; GEMAN, H. Order flow, transaction clock and normality of asset returns. **The Journal of Finance**, Malden; v. 55, n. 5, p. 2259–2284, 2000.
13. ENGLE, R. F.; NG, V. K. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. **The Journal of Finance**, Malden; v. 48, n. 5, p. 1749–1778, 1993.

14. SCHWERT, G. W. Why does stock market volatility change over time? **The Journal of Finance**, Malden, v. 44, n. 5, p. 1115–1153, 1989.
15. STOCK, J. H. Measuring Business Cycle Time. **Journal of Political Economy**, Chicago; v. 95, p. 1240-1261, 1987.
16. STOCK, J. H. Estimating Continuous-Time Process Subject to Time Deformation: An Application to Postwar U.S. GNP. **Journal of the American Statistical Association**, [S.l.]; v. 83, p. 77-85, 1988.
17. MISES, L. V. **Ação Humana: Um tratado de Economia**. São Paulo: Instituto Ludwig von Mises Brasil, 2010. 1019 p.
18. FIGUEIREDO, A. et al. The Levy sections theorem revisited. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, [S.l.]; v. 40, p. 5783-5794, 2007.
19. CONRAD, J.; KAUL, G. An Anatomy of Trading Strategies. **The Review of Financial Studies**, Oxford; v. 11, n. 3, p. 489-519, 1998.
20. BROCK, W.; LAKONISHOK, J.; LEBARON, B. Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. **The Journal of Finance**, Malden; v. 47, p. 1731–1764, 1992.
21. GENÇAY, R. Optimization of technical trading strategies and the profitability in security markets. **Economics Letters**, [S.l.]; v. 59, p. 249–254, 1998.
22. NAM, K.; WASHER, K. M.; CHU, Q. C. Asymmetric return dynamics and technical trading strategies. **Journal of Banking & Finance**, [S.l.]; v. 29, p. 391-418, 2005.
23. FISCHER, H. **A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory**. Eichstätt: Springer, 2010.
24. LÉVY, P. **Theorie de l’addition de Variables Aleatoires**. Paris: Gauthiers-Villars, 1937.
25. BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. **Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps**. Oxford University, 2003.
26. BOLLEN, B.; INDER, B. Estimating daily volatility in financial markets utilizing intraday data. **Journal of Empirical Finance**, [S.l.]; v. 9, p. 551–562, 2002.
27. AIT-SAHALIA, Y.; MYKLAND, P. A.; ZHANG, L. **How often to sample a continuous-time process in the presence of market microstructure noise**. Princeton: University of Princeton, 2003. Working Paper.
28. BANDI, F. M.; RUSSEL, J. R. **Separating microstructure noise from volatility**. Chicago: University of Chicago, 2004.
29. NASCIMENTO, C. M. et al. Lévy sections vs. partial sums of heteroscedastic time series. **EuroPhysics Letters**, [S.l.]; v. 96, p. 68004 1-5, 2011.

30. PAGAN, A. R.; SCHWERT, G. W. Alternative Models for Conditional Stock Volatility. **Journal of Econometrics**, [S.l.]; v. 45, p. 267-290, 1990.
31. PARKINSON, M. The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. **Journal of Business**, Chicago; v. 53, p. 61-65, 1980.
32. BERA, A. K.; HIGGINS, M. L. ARCH models: properties, estimation and testing. **Journal of Economic Surveys**, [S.l.]; v. 7, n. 4, p. 305-365, 1993.
33. BOLLERSLEV, T.; CHOU, R. Y.; KRONER, K. P. ARCH modeling in finance: A Review of the theory and empirical evidence. **Journal of Econometrics**, [S.l.]; v. 52, p. 5-59, 1992.
34. BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; NELSON, D. B. ARCH models. In: ENGLE, R. F.; MCFADDEN, D. L. (Org).. **Handbook of Econometrics**. Amsterdã: North Holland, 1994. v. 4, p. 2959–3038.
35. DIEBOLD, F. X.; LOPEZ, J. A. Modelling volatility dynamics. In: HOOVER, K. (Org.). **Macroeconomics: Developments, Tensions and Prospects**. Davis: Springer Science, 1995. p. 427–472.
36. XEKALAKI, E.; DEGIANNAKIS, S. **ARCH models for financial applications**. Atenas: Wiley, 2010.
37. FRANCO, C.; ZAKOIAN, J.-M. **GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications**. Paris: Wiley, 2010.
38. BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, [S.l.]; v. 31, v. 307-328, 1986.
39. TAYLOR, S. J. **Modelling Financial Time Series**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1986.
40. MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Modeling of financial data: Comparison of truncated Lévy flight and the ARCH(1) and GARCH(1, 1) processes. **Physica A**, [S.l.]; v. 254, p. 77-84, 1998.
41. HANSEN, P. R.; LUNDE, A. A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1, 1)? **Journal of Applied Econometrics**, [S.l.]; v. 20, p. 873-889, 2005.
42. EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **Annals of Statistics**, [S.l.]; v. 7, p. 1-26, 1979.
43. EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. **An Introduction to the Bootstrap**. New York: Chapman & Hall, 1993.
44. MACKINNON, J. G. Bootstrap Methods in Econometrics. **Economic Record**, [S.l.]; v. 82, n. Suplemento s 1, p. S2-S18, 2006.

45. RUIZ, E.; PASCUAL, L. Bootstrapping financial time series. **Journal of Economic Surveys**, [S.l.]; v. 16, n. 3, v. 271-300, 2002.
46. PASCUAL, L.; ROMO, J.; RUIZ, E. Bootstrap prediction for returns and volatilities in GARCH models. **Computational Statistics & Data Analysis**, [S.l.]; v. 50, n. 9, p. 2293–2312, 2006.
47. DVORETZKY, A. Central Limit Theorems for Dependent Random Variables. In: Congrès intern. Math., 1970, [S.l.]. **Anais...** [S.l.]: 1970. p. 565-570.