

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
CENTRO DE TECNOLOGIA – CTEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATERIAIS – PGMATERIAIS**

ROMILDO DOS SANTOS ESCARPINI FILHO

**HOMOGENEIZAÇÃO DE PROPRIEDADES TÉRMICAS E MECÂNICAS DE
MATERIAIS COMPÓSITOS CONSIDERANDO EFEITOS DE INTERFACES
IMPERFEITAS**

MACEIÓ

2015

ROMILDO DOS SANTOS ESCARPINI FILHO

**HOMOGENEIZAÇÃO DE PROPRIEDADES TÉRMICAS E MECÂNICAS DE
MATERIAIS COMPÓSITOS CONSIDERANDO EFEITOS DE INTERFACES
IMPERFEITAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação Materiais da
Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do
título de Doutor em Materiais

Área de concentração: Materiais

Orientador: Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques

Co-orientador: Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante

MACEIÓ

2015

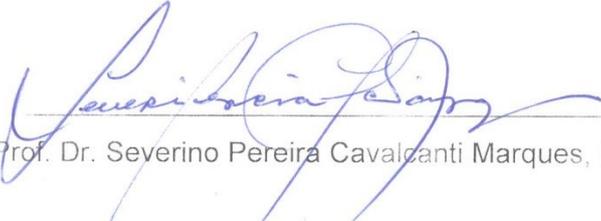
Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

E74h	<p>Escarpini Filho, Romildo dos Santos. Homogeneização de propriedades térmicas e mecânicas de materiais compósitos Considerando efeitos de interfaces imperfeitas / Romildo dos Santos Escarpini Filho. – Maceió, 2015. 000 f.: il.</p> <p>Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques. Coorientador: Márcio André Araújo Cavalcante. Tese (Doutorado em Materiais) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Materiais. Maceió, 2015.</p> <p>Bibliografia: f. 00-00. Apêndices: f. 00-00.</p> <p>1. Formulação paramétrica da Teoria dos volumes finitos. 2. Materiais heterogêneos. 3. Interface imperfeita. 5. Homogeneização. I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 620.168</p>
------	--

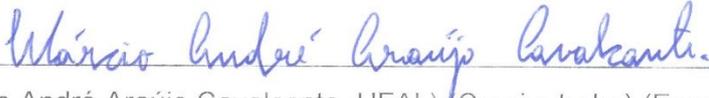
Romildo dos Santos Escarpini Filho

**HOMOGENEIZAÇÃO DE PROPRIEDADES TÉRMICAS E
MECÂNICAS DE MATERIAIS COMPÓSITOS CONSIDERANDO
EFEITOS DE INTERFACES IMPERFEITAS**

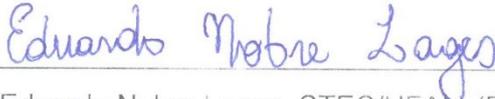
Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Materiais da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 23 de Março de 2015.


(Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques, PPGMateriais/UFAL) (Orientador)

BANCA EXAMINADORA


(Prof. Dr. Marcio André Araújo Cavalcante, UFAL) (Coorientador) (Examinador Interno)


(Prof. Dr. Antonio Osimar Sousa da Silva, PPGMateriais/UFAL) (Examinador Interno)


(Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages, CTEC/UFAL) (Examinador Externo)


(Prof. Dr. José Julio de Cerqueira Pituba, UFG) (Examinador Externo)


(Prof. Dr. Volnei Tita, USP) (Examinador Externo)



Este trabalho é dedicado àqueles que me motivaram e contribuíram para a conclusão do mesmo. Primeiramente a Deus, pois tudo que fazemos é para Ele, à minha mãe e ao meu pai, à minha esposa Cris, e aos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por ter me dado saúde e disposição, além de uma equipe de excelentes professores durante toda a minha vida acadêmica.

À minha família por ter me apoiado nos momentos difíceis, de descontração, de briga e de reconciliação, agradeço a todos.

À minha esposa, Maria Cristina, pelo incentivo, compreensão, amor e companheirismo em todos os momentos dessa caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Severino Marques (Severo), pelo constante incentivo, apoio e direcionamento para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Laboratório de Computação Científica e Visualização pela disponibilidade de suas instalações e infraestrutura.

Ao Prof. Dr. Eduardo Nobre, que me ajudou no entendimento e modelagem dos elementos de interface.

Aos amigos Alan Silva e Thomázio Bergson pela motivação e incentivo.

Aos amigos que conquistei em toda a minha jornada e aos membros do LCCV, que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho, em especial Clayton Tavares, Diogo Cintra, Ricardo Fernandes, Christiano Varady, Catarina Nogueira, Tiago Lobo, Michele Agra, Heleno Pontes e Alexandre Machado.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

RESUMO

No presente trabalho, a versão paramétrica da teoria dos volumes finitos (TVF) é expandida pela incorporação de processos de homogeneização de propriedades térmicas e mecânicas de compósitos periódicos elásticos e viscoelásticos, incluindo efeitos de interfase. O trabalho apresenta modelos para avaliação de condutividade térmica, coeficiente de dilatação térmica, tensores constitutivos elástico e viscoelástico efetivos, considerando o conceito de célula unitária, com condição de contorno periódica em estado plano de deformações generalizado. As interfaces existentes entre as inclusões e a matriz são consideradas finas e substituídas por interfaces imperfeitas equivalentes. Os materiais que constituem tais interfaces são admitidos com propriedades térmicas e mecânicas inferiores àquelas dos outros constituintes. Os modelos de homogeneização térmica e mecânica são formulados com base na tradicional estratégia de expansão dos campos de temperatura e deslocamentos, respectivamente, em parcelas macroscópica e flutuante. Os coeficientes de dilatação térmica efetivos são avaliados analiticamente em função das propriedades efetivas elásticas e dos coeficientes de dilatação térmica das fases constituintes. Os procedimentos de homogeneização viscoelástico tem como base o modelo de Maxwell generalizado e permitem a determinação dos tensores de relaxação efetivos, a partir dos quais são obtidos os tensores de fluência efetivos através do Princípio da Correspondência. O modelo viscoelástico utilizado é do tipo incremental e utiliza o conceito de variáveis internas. Por fim, os modelos são aplicados na solução de exemplos envolvendo diferentes tipos de materiais compósitos, os quais incluem investigação de efeitos de tamanho, fração volumétrica, geometria da célula unitária, influência das propriedades da interfase sobre as propriedades efetivas térmicas e mecânicas. Os resultados de tais exemplos são comparados com soluções analíticas e com o método dos elementos finitos, demonstrando desempenho dos modelos apresentados.

Palavras-Chave: Teoria dos volumes finitos. Materiais heterogêneos. Interface imperfeita. Homogeneização.

ABSTRACT

In the present work, the Parametric Finite-Volume Theory is expanded by using the inclusion of homogenization processes on mechanical and thermal properties of periodically elastic and viscoelastic composites, with interphase effects. This work introduces models for evaluation of thermal conductivity, coefficient of thermal expansion, elastic and viscoelastic constitutive tensors with unit cell concept applied and periodical boundary conditions in state of generalized plane strain. The current interphase model between inclusion and matrix are considered thin and replaced by equivalent imperfect interfaces. The materials of the interphase are admitted to have lower thermal and mechanical properties. The formulation of the thermal and mechanic homogenization models is based on the traditional strategy of temperature and displacement field expansion in macroscopic and fluctuating components. The effective coefficients of thermal expansion are analytically evaluated using the effective elastic properties and coefficient of thermal expansion of the constitutive phases. Procedures on viscoelastic homogenization are based on Generalized Maxwell model, which allows the assessment of the effective relaxation tensors, providing the effective creep tensors using the Correspondence Principle. The viscoelastic model applied is incremental in time and uses the internal variables formulation. The created models are applied on the solution of many case studies, involving different kinds of composite materials (including size-dependent effects), volume fraction, unit cell geometry and interphase properties influence on the behavior of effective mechanical and thermal properties. The results are compared to analytical and FEM solutions to calculate the method's efficiency.

Keywords: Finite-volume theory. Heterogeneous materials. Imperfect interfaces. Homogenization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Material compósito periódico e célula unitária de repetição (RUC).....	27
Figura 2 – Mapeamento do quadrado de referência para o subvolume quadrilateral da microestrutura real.	30
Figura 3 – (a) Interfase fibra/matriz e (b) equivalente interface imperfeita.	38
Figura 4 – Elemento de interface imperfeita.	39
Figura 5 – Compósito unidirecional de duas fases com distribuição das fibras em arranjos a) quadrado e b) hexagonal.	41
Figura 6 – Discretização da RUC.	41
Figura 7 – Condutividade térmica efetiva normalizada do compósito com distribuição quadrada de fibras.	42
Figura 8 – Condutividade térmica efetiva normalizada do compósito com distribuição hexagonal de fibras.	42
Figura 9 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função da fração volumétrica de fibras	43
Figura 10 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função da fração volumétrica de poro para o arranjo quadrado.	45
Figura 11 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função da fração volumétrica de poro para o arranjo hexagonal.	46
Figura 12 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função do raio de fibras.	48
Figura 13 – Condutividade térmica efetiva <i>versus</i> condutividade térmica da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 30% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita).	50
Figura 14 – Condutividade térmica efetiva <i>versus</i> condutividade térmica da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 50% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita).	52
Figura 15 – Condutividade térmica efetiva <i>versus</i> condutividade térmica da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 70% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita).	54
Figura 16 – Malhas para os compósitos laminados planos.	57

Figura 17 – Malhas para os compósitos laminados com ondulação de 5%.	58
Figura 18 – Malhas para os compósitos laminados com ondulação de 10%.	59
Figura 19 – Malhas para os compósitos laminados com ondulação de 15%.	60
Figura 20 – Condutividade efetiva para o modelo com lâminas planas.....	62
Figura 21 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 5%.	63
Figura 22 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 10%.	65
Figura 23 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 15%.	66
Figura 24 – (a) Interfase fibra/matriz e (b) equivalente interface imperfeita.	76
Figura 25 – Elemento de interface com seus graus de liberdade.....	78
Figura 26 – Decomposição dos deslocamentos no eixo normal e transversal.....	78
Figura 27 – Variação de deslocamento associada às direções (a) normal e (b) transversal à interface.	79
Figura 28 – Comparação entre resultados obtidos para homogeneização elástica com a TVF e o MEF para compósito com interfase.	88
Figura 29 – Arranjo rômbo e célula unitária considerada.	89
Figura 30 – Arranjo rômbo e célula unitária retangular.	89
Figura 31 – Malha de Volumes Finitos (920 subvolumes).	90
Figura 32 – Módulo de cisalhamento longitudinal efetivo normalizado.....	91
Figura 33 – Módulo volumétrico transversal efetivo normalizado.	91
Figura 34 – Módulo de elasticidade transversal efetivo em função do raio da inclusão. 93	
Figura 35 – Módulo de elasticidade transversal efetivo <i>versus</i> variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 30%.	94
Figura 36 – Módulo de elasticidade transversal efetivo <i>versus</i> variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 50%.	96
Figura 37 – Módulo de elasticidade transversal efetivo <i>versus</i> variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 70%.	98
Figura 38 – Módulo de elasticidade longitudinal efetivo <i>versus</i> variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas para laminado plano.....	102
Figura 39 – Módulo de elasticidade longitudinal efetivo <i>versus</i> variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas para compósito com 10% de ondulação.....	103
Figura 40 – CTE efetivo axial.	105
Figura 41 – CTE efetivo transversal.....	106

Figura 42 – Comparação dos resultados do CTE efetivo para o modelo de interface imperfeita e a solução analítica (Hashin, 1990).....	107
Figura 43 – Modelo de Maxwell generalizado (modelo Maxwell-Wiechert).....	108
Figura 44 – Discretização do domínio em subvolumes quadrilaterais.....	114
Figura 45 – Componentes do vetor tensão média nas faces do subvolume para $j + 1$.	121
Figura 46 – Esquema de obtenção da função de fluência efetiva.....	126
Figura 47 – Relaxação das tensões para problema de deslocamento prescrito uniaxial.	132
Figura 48 – Modelo de confinamento em container com a discretização utilizada.	133
Figura 49 – Comparação dos resultados para a tensão horizontal.....	134
Figura 50 – Relaxação do módulo de elasticidade transversal efetivo.....	135
Figura 51 – Comportamento dependente do tempo para modelo 3 fases.....	136
Figura 52 – Comportamento dependente do tempo para modelo com interface imperfeita.....	137
Figura 53 – Comparação entre as respostas obtidas para diferentes tempos.....	138
Figura 54 – Comparação entre as respostas numérica e analítica para os módulos de elasticidade transversais para o eixo axial.....	139
Figura 55 – Respostas para os laminados planos com 1 camada.	141
Figura 56 – Respostas para os laminados planos com 2 camadas.....	142
Figura 57 – Respostas para o laminado com ondulação de 10% e com 1 camada.....	143
Figura 58 – Respostas para o laminado com ondulação de 10% e com 2 camadas.	143
Figura 59 – Variação de C_{22}^*/C_{22m} em função de k para modelo com 1 camada e 10% de ondulação.....	145
Figura 60 – Variação de C_{22}^*/C_{22m} em função de k para modelo com 2 camadas e 10% de ondulação.....	145

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TVF	Versão Paramétrica da Teoria dos Volumes Finitos
FVT	<i>Finite-Volume Theory</i>
PPFVT/FVT	<i>Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory</i>
FVDAM	<i>Finite Volume Direct Averaging Method</i>
CTE	<i>Coefficients of Thermal Expansion</i>
RVE	<i>Representative Volume Element</i>
EVR	Elemento de Volume Representativo
RUC	<i>Representative Unit Cell</i>
CUR	Célula Unitária de Repetição
FEM	<i>Finite Element Method</i>
CCA	<i>Composite cylinder assemblage</i>
GSCS	<i>Generalized self-consistent scheme</i>
LC	<i>Low conductivity</i>
HC	<i>High conductivity</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

T^o	Temperatura macroscópica
G_i^o	Gradiente de temperatura
x_i	Coordenada global na direção i
$\langle \ \rangle$	Média volumétrica da componente
V	Volume do compósito
\mathbf{G}	Vetor gradiente de temperatura
n_i	i -ésima componente do vetor normal unitário à superfície S
\tilde{T}	Temperatura flutuante
\mathbf{y}	Coordenadas locais usadas na escala da CUR
Ω	Domínio da CUR
$\tilde{\mathbf{G}}$	Vetor gradiente de flutuação de temperatura
Γ	Superfície externa do domínio da CUR
$\eta - \xi$	Coordenadas paramétricas do subvolume quadrilateral
$y_2 - y_3$	Coordenadas dos eixos cartesianos do domínio real
N_i	Funções de formas para a parametrização do subvolume
q_i	Fluxo de calor na direção i
k_{ij}	Condutividades térmicas do material
\tilde{T}_{mn}	Coefficientes do polinômio que define o campo de temperatura
F_i	Faces do subvolume
$\bar{\mathbf{J}}$	Matriz Jacobiana do subvolume
$\bar{\mathbf{k}}$	Matriz de condutividade térmica do subvolume
$\langle q_i \rangle$	Fluxo de calor médio na direção i

\mathbf{q}^o	Vetor de fluxo de calor macroscópico
$\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle^{(p)}$	Vetor de fluxo de calor flutuante médio
$\mathbf{n}^{(p)}$	Vetor normal unitário apontando para fora da face p do subvolume
λ, ω	Parâmetros escalares em função das componentes da matriz Jacobiana média
$\mathbf{v}^{(i)}$	Vetor que depende das matrizes normal, de condutividade térmica e Jacobiana média
\mathbf{B}	Matriz com propriedades geométricas do subvolume
$\mathbf{a}^{(p)}$	Matriz que depende dos coeficientes do campo de temperatura
\mathbf{N}	Matriz composta pelos vetores normais $\mathbf{n}^{(p)}$
\mathbf{K}_L	Matriz de condutividade local do subvolume
\mathbf{K}_G	Matriz de condutividade térmica global
$\tilde{\mathbf{T}}_G$	Vetor com as temperaturas flutuantes médias desconhecidas das faces internas e do contorno
\mathbf{Q}_G^o	Vetor composto pelas resultantes do fluxos normais médios
\mathbf{Q}^*	Vetor fluxo de calor efetivo
\mathbf{K}^*	Matriz condutividade térmica efetiva
Ω_m, Ω_f	Domínio da matriz e da fibra, respectivamente
$\bar{v}_p^{(l)}$	Fração volumétrica do subvolume l constituído pelo material p
$\langle \mathbf{G}_p \rangle^{(l)}$	Gradiente médio de temperatura para o material p
$\mathbf{H}^{(l)}$	Matriz de concentração de gradiente de temperatura no subvolume
k_i	Condutividade térmica da interfase
S_i	Superfície média posicionada entre a fibra e a matriz
$T_+ - T_-$	São as temperaturas na interface S_i no lado da matriz e da fibra, respectivamente
h	Espessura da interfase

q_n	Fluxo de calor normal à interface
$u_i^{(k)}$	Campo de deslocamento global dentro do subvolume k para a direção i
$\bar{\epsilon}_{ij}$	Deformações macroscópicas
$\tilde{u}_i^{(k)}$	Os campos flutuantes de deslocamentos locais no interior do subvolume k para a direção i
$\tilde{U}_{i(mn)}^k$	Coefficientes desconhecidos na direção i para o subvolume k
$\sigma_{ij}^{(k)}$	Componente da tensão dentro do subvolume k
$\langle \gamma_{ij} \rangle$	Deformação angular para o plano $i-j$
$\bar{\gamma}_{ij}$	Deformação angular macroscópica para o plano $i-j$
F	Face em estudo
$t_i^{(k)}$	Tensão na direção i do subvolume k
$C_{ijkl}^{(k)}$	Componente da matriz constitutiva do subvolume k
$[\bar{\mathbf{A}}]$	Matriz formada pelas matrizes de normais às faces, jacobiana, constitutiva do subvolume
$[\mathbf{K}_L]$	Matriz de rigidez local
$[\mathbf{A}]^{(k)}$	Matriz de concentração de deformações de Hill
$[\mathbf{C}^*]$	Matriz constitutiva efetiva
μ_r, λ_r	Constantes de Lamé para o constituinte r de compósito
Θ	Ângulo formado entre a direção horizontal e a direção radial
$\Delta u_i'$	Descontinuidade de deslocamento para o eixo i do sistema de eixos cilíndricos
$[\mathbf{K}_e]$	Matriz de rigidez local do elemento de interface imperfeita
$[\mathbf{T}]$	Matriz de transformação de coordenadas
α_{ij}	Coefficientes de expansão/dilatação térmicas de cada constituinte

Γ_{ij}^*	Tensor efetivo térmico
ϕ	Temperatura uniforme
k_e	Módulo volumétrico transverso equivalente da fibra
a	Raio da fibra
α^*	Coefficiente de expansão térmica efetivo
S_{ij}	Componente da matriz de flexibilidade
S_{ij}^*	Componente da matriz de flexibilidade efetiva
T	Tempo
s	Variável de integração
$G(t - s)$	Função módulo de relaxação
E_∞, E_i	Constantes elásticas das molas do modelo de Maxwell generalizado
τ_i	Tempo de relaxação do elemento i
N	Número de elementos viscoelásticos em paralelo
$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t))$	Traço do estado de tensão
$\text{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t))$	Tensor desviador do estado de tensão
K_∞, K_i	Módulos de elasticidade volumétricos das molas do modelo de Maxwell generalizado
μ_∞, μ_i	Módulos de elasticidade transversal das molas do modelo de Maxwell generalizado
κ	Propriedade correspondente ao estado hidrostático (<i>bulk</i>)
μ	Propriedade correspondente ao estado desviador (<i>shear</i>)
q_i^k, \mathbf{q}_i^μ	Variáveis internas em estados hidrostático e desviador, respectivamente
Δt	Incremento de tempo
$\mathbf{H}(t)$	Tensor definidos com propriedades do passo anterior ao atual

\mathbf{C}_∞	Tensor constitutivo da mola ∞
$\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2$	Tensores de 4ª ordem
δ_{mn}	Delta de Kronecker
τ_{j+1}	Passo de tempo atual
$b_{vi,j+1}$	Forças volumétricas para a direção i
$\bar{G}(s)$	Função relaxação no domínio de Laplace
$\bar{J}(s)$	Função de fluência no domínio de Laplace
S	Parâmetro da transformada de Laplace
D_i	Rigidez na direção i
$[[u_i(0)]]$	Descontinuidade de deslocamento instantâneo
$[[u_i(t)]]$	Descontinuidade de deslocamento para o tempo t
$[K_1]^{n+1}, [K_2], [K_3], [K_4]$	Matrizes de rigidez para o problema viscoelástico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Aplicações	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Resumo das seções	25
2	CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA	26
2.1	Problema de homogeneização térmica	26
2.2	Parametrização de um subvolume da teoria dos volumes finitos	29
2.3	Matriz de condutividade térmica local para um subvolume	30
2.4	Construção da matriz de condutividade térmica global	34
2.5	Matriz de condutividade térmica homogeneizada	35
2.6	Elemento de interface imperfeita para condutividade térmica	37
2.7	Exemplos e Resultados	40
2.7.1	Compósito unidirecional de duas fases com distribuição quadrada e hexagonal de fibras	40
2.7.2	Condutividade efetiva para compósitos porosos	44
2.7.3	Interface Imperfeita Térmica	46
2.7.4	Dependência do tamanho da inclusão na condutividade efetiva com barreira interfacial térmica	47
2.7.5	Análise da aplicabilidade da hipótese de interface imperfeita com continuidade em fluxo de calor normal e descontinuidade na temperatura	48
2.7.6	Homogeneização Térmica de Compósito Laminado com Microestrutura Ondulada	56
3	PROPRIEDADES TERMOELÁSTICAS EFETIVAS	69
3.1	Formulação bidimensional da versão paramétrica da teoria dos volumes finitos	69
3.2	Obtenção das matrizes de rigidez local e global	73
3.3	Matriz de rigidez efetiva	74
3.4	Elemento de interface imperfeita elástica	75
3.5	Coefficientes de expansão térmica efetivos	81
3.6	Exemplos e Resultados	86
3.6.1	Estudo da Influência da Interface nas Propriedades Efetivas Elásticas de Compósitos reforçados por Fibras	87

3.6.2	Estudo das Propriedades Elásticas Efetivas Considerando a Presença de uma Interface Imperfeita entre a Fibra e a Matriz.....	88
3.6.3	Estudo do efeito de tamanho da inclusão no módulo de Young transversal efetivo considerando a presença da interface imperfeita.....	92
3.6.4	Influência da rigidez da interfase/interface imperfeita.....	93
3.6.5	Homogeneização Elástica de Compósito Laminado com Microestrutura Ondulada e Interface Imperfeita.....	100
3.6.6	Coefficiente de dilatação térmica efetivo (CTE efetivo).....	104
3.6.7	CTE's efetivos para compósito bifásico.....	104
3.6.8	CTE's efetivos para compósito com interface imperfeita.....	106
4	PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS EFETIVAS	108
4.1	Método das variáveis internas	108
4.2	Formulação paramétrica viscoelástica da teoria dos volumes finitos para estado plano de deformação generalizado	114
4.3	Tensores relaxação e fluência efetivos	122
4.4	Elemento de interface imperfeita para homogeneização viscoelástica	126
4.5	Exemplos e Resultados	131
4.5.1	Estudo do comportamento de materiais com constituintes viscoelásticos.....	131
4.5.2	Modelo uniaxial com 5 elementos do tipo Maxwell Generalizado.....	131
4.5.3	Comportamento de bloco viscoelástico confinado.....	133
4.5.4	Homogeneização de compósito reforçado por fibra elástica com matriz viscoelástica.....	135
4.5.5	Estudo da influência da interfase em compósitos com constituintes viscoelásticos.....	136
4.5.6	Homogeneização Viscoelástica – Exemplo Wükner.....	136
4.5.7	Homogeneização Viscoelástica – Exemplo Hashin.....	138
4.5.8	Homogeneização viscoelástica de compósito laminado com microestrutura ondulada e interface imperfeita.....	140
5	CONCLUSÕES	146
	REFERÊNCIAS	149
	APÊNDICES	162
	Apêndice A - Dedução do Estado de Tensão	163
	Apêndice B - Matriz Constitutiva Viscoelástica	165
	Apêndice C - Transformação de coordenadas em subvolume	166
	Apêndice D - Matrizes para a Formulação Viscoelástica da Versão Paramétrica da Teoria dos Volumes Finitos	169

1 INTRODUÇÃO

Com o crescente avanço tecnológico, pesquisadores e engenheiros, dos mais diversos setores industriais, têm buscado a concretização de grandes e ousados projetos de engenharia. Este fato vem proporcionando um desenvolvimento substancial na tecnologia de fabricação e projeto de novos materiais e nas investigações teóricas e experimentais de seus comportamentos. De forma geral, um compósito é considerado como qualquer material com microestrutura heterogênea que demonstra significantes proporções de propriedades das fases constituintes de forma que a melhor combinação seja realizada (CALLISTER, 2007). Nesta classe se enquadram, por exemplo, os compósitos reforçados por fibras e os materiais particulados, os quais são constituídos por uma matriz (cerâmica, metálica ou polimérica) envolvendo fibras ou inclusões que, em geral, servem de materiais de reforço ou de enrijecimento.

Os materiais compósitos possuem como principal característica as suas altas relações resistência/peso e rigidez/peso, o que justifica sua intensa aplicação nas indústrias automobilística, biológica, naval, aeroespacial e aeronáutica, de equipamentos esportivos, militar, da construção civil e *offshore*.

Em princípio, no material compósito, a matriz é responsável pela união das fibras que o compõem, atuando como meio através do qual as solicitações externas são transmitidas e distribuídas para as fibras, que absorve apenas uma parcela muito pequena da carga externa. Usualmente, as limitações do uso de materiais compósitos são definidas pelas propriedades da matriz. Por exemplo, a estabilidade higrotérmica e os valores máximos de temperatura e umidade do compósito são fortemente dependentes do desempenho da matriz. Adicionalmente, ambientes quimicamente agressivos ou com severas condições de temperatura podem provocar a degradação das propriedades da matriz antes da ocorrência de qualquer dano nas fibras. Enfim, o desempenho de um material compósito está intimamente relacionado com o comportamento de sua matriz.

Como já se conhece, compósitos com matriz polimérica apresentam um comportamento mecânico dependente do tempo, especialmente quando na presença de elevadas condições de temperatura e umidade (MARQUES; CREUS, 1994). Isto é, sob tais condições, estes compósitos podem apresentar importantes efeitos viscoelásticos, exibindo, portanto, os fenômenos de fluência e relaxação. Por se tratar de materiais com microestrutura heterogênea,

este comportamento dependente do tempo apresenta uma complexidade superior aos dos tradicionais materiais homogêneos viscoelásticos. Com base nestas considerações, uma modelagem mais realística do comportamento de materiais compósitos avançados exige a utilização de uma formulação que leve em conta aqueles efeitos de fluência e relaxação.

Métodos analíticos para determinação das propriedades homogeneizadas de materiais compósitos viscoelásticos vêm sendo propostos desde os trabalhos de Hashin (1965, 1970a, 1970b), que desenvolveu um princípio da correspondência no qual os módulos complexos efetivos de compósito viscoelástico anisótropo podem ser determinados com base nas expressões analíticas para a obtenção das propriedades efetivas de compósitos elásticos por meio da transformada de Laplace. Alguns trabalhos foram desenvolvidos com os equacionamentos no espaço de Laplace, utilizando os métodos da micromecânica como *Self-Consistent Scheme* (LAWS; MCLAUGHLIN, 1978; TURNER; TOMÉ, 1993; MAREUA et al., 2009; BERBENNI et al., 2004; SABAR et al., 2002; BEURTHEY; ZAOUI, 2000) e Mori-Tanaka (WANG; WENG, 1992; FRIEBEL et al., 2006; DUTRA et al., 2010; FISHER; BRINSON, 2001; BRINSON; LIN, 1998). Nesta linha, pode ser citado o trabalho de Hashin e Shtrikman (1962), que utilizou um princípio variacional para obtenção de valores limites de propriedades efetivas para compósitos viscoelásticos (DEBOTTON; TEVET-DEREE, 2004; GIBIANSKY et al., 1999). Chandra et al. (2002) apresentaram um estudo comparativo entre resultados para propriedades efetivas de compósitos viscoelásticos reforçados com fibras obtidos a partir da aplicação conjunta de modelos micromecânicos elásticos lineares e do princípio da correspondência, como também pelo método dos elementos finitos.

Na maioria dos casos, dependendo da complexidade da microestrutura, os módulos complexos do compósito não podem ser obtidos analiticamente no domínio do tempo, necessitando-se recorrer a métodos numéricos para obter a inversão da transformada de Laplace (WEEKS, 1966; HASSANZADEH; POOLADI-DARVISH, 2007; LÉVESQUE et al., 2007). Por outro lado, a precisão e o custo computacional desta inversão numérica devem ser levados em consideração. Outras metodologias para obtenção das propriedades efetivas de compósitos viscoelásticos vêm sendo empregadas, como a utilização do método das células generalizado para a solução das equações microscópicas parciais (MATZENMILLER; GERLACH, 2004).

Para a obtenção das propriedades efetivas de compósitos viscoelásticos, outras pesquisas empregam a termodinâmica (SCHAPERLY, 1967), a teoria funcional da viscoelasticidade (ROUGIER et al., 1993) e teorias constitutivas baseadas em variáveis de estado, que são formuladas diretamente no espaço do tempo (LAHELLEC; SUQUET, 2007). Lahellec e

Suquet (2007) introduziram um esquema em que as variáveis internas macroscópicas estão relacionadas com as deformações viscosas efetivas envolvidas. Este método baseia-se em um princípio variacional incremental e na abordagem variacional de Ponte-Castañeda (1992). Posteriormente, Ricaud e Masson (2009) propuseram uma abordagem diferente, tomando partido da expansão em série de Prony-Dirichlet na formulação das variáveis internas. Outra metodologia também pode ser empregada, que corresponde a um procedimento numérico em duas escalas (KURNATOWSKI; MATZENMILLER, 2008; FEYEL, 1999), onde cada ponto de integração da estrutura macroscópica é associado a um elemento de volume representativo (RVE – *Representative Volume Element*) e, a cada passo, as deformações macroscópicas em cada ponto de integração são tomadas como condições de contorno para o problema local. A solução numérica deste problema retorna as tensões efetivas. Esta metodologia demanda um alto custo computacional devido a solucionadores numéricos aninhados e armazenamento das variáveis internas, mesmo quando se utiliza computação paralela (FEYEL, 1999) ou redução do modelo (YVONNET; HE, 2007).

No trabalho de Tran et al. (2011) é apresentada uma metodologia para calcular as respostas efetivas dependentes do tempo de estruturas de materiais heterogêneos viscoelásticos lineares submetidas a carregamentos arbitrários. Nesta formulação as leis constitutivas dos materiais viscoelásticos tomam a forma de uma integral de convolução envolvendo um tensor efetivo de relaxação que, em geral, não pode ser determinado analiticamente, sendo a principal contribuição, dessa aproximação, a determinação numérica de todas as componentes do tensor efetivo de relaxação no domínio do tempo. Isto é realizado como segue:

- i. É escolhido um elemento de volume representativo (EVR) para a microestrutura do material heterogêneo com constituinte viscoelástico linear e submetido a apropriadas cargas de ensaio de relaxação;
- ii. O conjunto de respostas dependente do tempo do EVR é calculado usando alguns algoritmos eficientes (KALISKE; ROTHERT, 1997; SIMO; HUGHES, 1998; TAYLOR et al. 1970);
- iii. Os resultados numéricos obtidos nos diferentes passos de tempo e armazenados durante os passos anteriores são interpoladas com funções *splines* apropriadas;
- iv. Em seguida, a integral de convolução é calculada numericamente de modo a se obter a relação de tensão-deformação macroscópica para o cálculo de estruturas.

Nesses estudos, voltados para a obtenção de propriedades efetivas em materiais compósitos, tem-se considerado uma aderência perfeita entre a fibra e a matriz, onde é

assumida a continuidade de vetores de tensão e deslocamentos no problema elástico ou fluxo de calor normal e temperatura no caso térmico ao longo de todo o domínio do compósito. Entretanto, já se constatou que na interface entre esses materiais existe uma fina região de transição mais complexa, conhecida como interfase (BIGONI et al., 1998).

Em diversos trabalhos na literatura tem-se buscado alternativas para a modelagem desse material de transição, que pode ser encontrado nos diversos tipos de problemas e que pode causar enfraquecimento do material. No estudo desse material de transição vários trabalhos vêm sendo desenvolvidos, onde se busca compreender, tanto no campo experimental quanto no analítico, seu comportamento.

Grandes contribuições podem ser citadas no campo teórico, onde se chegou ao desenvolvimento da conhecida interface imperfeita (BENVENISTE; MILOH, 1986; ABOUDI, 1987; STEIF; HOYSAN, 1987; ACHENBACH; ZHU, 1989a,b e HASHIN, 1990). Esta interface imperfeita é uma elegante alternativa para a modelagem da fase de transição ou interfase que, em geral, é muito fina e com propriedades de difícil obtenção experimentalmente. A interfase é então extraída, os materiais da fibra e da matriz voltam a ocupar metade da espessura e, a depender das propriedades iniciais da interfase, é imposta uma descontinuidade em termos de deslocamento e/ou tensão, no caso mecânico, ou fluxo de calor normal ou temperatura, no caso térmico.

Segundo Adrianov et al. (2010), Phan Huy e Sanchez-Palencia (1974) desenvolveram rigorosamente as formulações para interfaces planares e Miloh e Benveniste (1999) para interfaces curvas em geral. Também de acordo com Adrianov et al. (2010), os primeiros trabalhos no campo térmico para interface com baixa condutividade (LC – *Low Conductivity*) térmica, foram de Sanchez-Palencia (1970), Benveniste e Miloh (1986), Benveniste (1987) e Hasselman e Johnson (1987). Pode-se citar trabalhos mais recentes sobre baixa condutividade térmica, como os de Torquato e Rintoul (1995), Lipton (1996), Lipton e Vernescu (1996a,b) e Cheng e Torquato (1997). As interfaces de alta condutividade (HC – *High Conductivity*) foram estudadas por Torquato e Rintoul (1995), Cheng e Torquato (1997b), Lipton (1997a, b, 1998) e Hashin (2001). Um exemplo físico importante da interface HC diz respeito ao efeito de difusão iônica em compósitos de concreto e de cimento (GARBOCZI; BENTZ 1992; SKALNY et al., 1994) *apud* Adrianov et al. (2010).

De forma similar, a interface imperfeita entre fibra e matriz também foi desenvolvida para problemas de elasticidade, onde para baixa resistência elástica é gerada uma descontinuidade em deslocamento proporcional as tensões em termos de parâmetros da interface flexível ou do tipo-mola. O estudo deste tipo de interface foi iniciado por Golan e

Reissner (1944) e Mal e Bose (1975) e, posteriormente, aplicado em vários trabalhos (BENVENISTE, 1985; ACHENBACH; ZHU, 1989, 1990; HASHIN, 1990, 1991a,b; KLARBING, 1991; KLARBRING; MOVCHAN, 1998; GEYMONAT et al., 1999; LENCI, 2000; LENCI; MENDITTO, 2000; ANDRIANOV et al., 2007, 2008).

Formulações variacionais para interface imperfeita foram dadas por Hashin (1990, 1991a, 2001, 2002) e Lipton e Vernescu (1995). Interfaces não lineares foram estudadas por Levy (1996, 2000) e Levy e Dong (1998).

As interfaces imperfeitas com propriedades elásticas altas, quando comparadas às dos outros constituintes do compósito, são conhecidas como interface imperfeita rígida e tem como principal aspecto o advento de uma descontinuidade em termos de tensão, preservando a continuidade em deslocamento ao longo da transição fibra–matriz (Rubin e Benveniste, 2004). Segundo Adrianov et al. (2010), este é, claramente, o tipo de interface mais complicado, onde existem alguns trabalhos desenvolvidos buscando-se compreender seu comportamento (BENVENISTE; MILOH, 2001; RUBIN; BENVENISTE, 2004; BENVENISTE, 2006; KATTIS; MAVROYANNIS, 2011 e CHEN; ANG, 2014).

A depender das propriedades da interface, vários tipos diferentes de condições de ligação podem surgir (CAILLERIE, 1978). No estudo da interfase, considerando que a mesma é fina, homogênea e isotrópica, a depender de sua rigidez em relação a da matriz e da fibra, existem 7 distintos regimes de condições de interface (BENVENISTE; MILOH, 2001). Essas condições de contato das interfaces podem ser classificadas como: (a) do tipo vácuo, (b) mola, (c) contato perfeito, (d) membrana, (e) membrana inextensível, (f) casca inextensível e (g) contato rígido. As duas primeiras condições são características de interfaces flexíveis, enquanto as quatro últimas são típicas de interfaces rígidas (BENVENISTE; MILOH, 2001).

1.1 Aplicações

A aplicação de materiais compósitos é uma realidade atual principalmente no segmento da indústria aeronáutica e aeroespacial. Ao longo do tempo, diversos projetos foram baseados considerando as propriedades desses materiais, dentre os quais, podem ser citados: F-111, Vought A-7, F-18 e F-22, no segmento militar; Lockheed L-1011, Rutan Voyager, Boeing 777, Airbus 380 e Boeing 787, no segmento civil (TITA, 2007). Nos helicópteros vários componentes também são feitos com materiais compósitos, tais como: pás da hélice principal, hélice traseira, árvore de transmissão, fuselagem, etc. (PEREIRA, 2003).

Os materiais compósitos também podem ser encontrados na indústria automobilística, que têm sua aplicação bem mais recente do que na indústria aeronáutica. Inicialmente, esses materiais eram aplicados somente em para-choques e teto dos automóveis, mas atualmente eles também são utilizados na fabricação de capôs, cárteres de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc. (PEREIRA, 2003). Uma atividade esportiva notória que emprega material compósito é a Fórmula 1, a qual pode ser considerada como um laboratório para as inovações tecnológicas. Em muitos casos, os materiais avançados empregados nos carros de Fórmula 1 serão utilizados futuramente nos carros de passeio. Também se pode encontrar tais materiais na área esportiva em barcos à vela, esquis, bicicletas, pranchas de surf, raquetes de tênis e tacos de golfe.

Na natureza, pode-se perceber que todos os materiais biológicos são compósitos, sem exceção. Exemplos encontrados de compósitos naturais incluem madeira, em que a matriz de lignina é reforçada com fibras celulósicas, e ossos, em que a matriz composta por minerais é reforçada com fibras colágenas (VENTURA, 2009). Outra área que tem se beneficiado da utilização dos compósitos é o setor de óleo e gás, com a construção de plataformas *offshore*, onde se necessita de peças leves, que sejam resistentes a altas pressões, a grandes variações de temperatura e a ambientes agressivos.

Além dos setores industriais mostrados anteriormente, os materiais compósitos também vêm sendo aplicados na área militar, na fabricação de coletes e capacetes, como também na construção civil, como nas lajes, pontes, tubos, painéis térmicos e como material de reforço estrutural. Nesse último, a aplicação dos materiais compósitos tem uma grande importância, uma vez que anualmente o volume de recursos efetivamente gastos ou que deveriam ser gastos com manutenção, reparo e reforço das estruturas de concreto atinge montantes da ordem de centenas de bilhões de dólares (BEBER, 1999).

Com isso, percebe-se a importância de se conhecer cada vez mais esses novos materiais através de ensaios mecânicos em laboratórios, da determinação de métodos construtivos e de fabricação mais adequados e de desenvolvimento de modelos numéricos precisos.

1.2 Objetivos

O objetivo global deste trabalho é a formulação de técnicas para a obtenção das propriedades efetivas termomecânicas de materiais compósitos elásticos e viscoelásticos lineares, dando continuidade às aplicações da versão paramétrica da Teoria dos Volumes Finitos (CAVALCANTE, 2006; CAVALCANTE et al., 2007a,b e GATTU et al., 2008), a

qual é uma formulação recente, em pleno desenvolvimento, que vem se mostrando bastante eficiente para solução de problemas com microestrutura heterogênea.

Como objetivos específicos do presente trabalho, podem ser citados os seguintes:

a) Desenvolvimento de uma formulação que se apresente como uma eficiente alternativa para obtenção de propriedades efetivas para problemas térmicos, elásticos e viscoelásticos, com a incorporação de interface imperfeita;

b) Desenvolvimento de um código computacional que permita a execução das análises baseadas na referida formulação;

c) Proporcionar um melhor entendimento do comportamento dos compósitos que apresentem interfaces imperfeitas e constituintes viscoelásticos lineares;

d) Fortalecer a linha de pesquisa voltada para o estudo de novos materiais do Programa de Pós-Graduação em Materiais da UFAL.

1.3 Resumo das seções

Na Seção 2 é apresentada a formulação para obtenção das condutividades térmicas efetivas de materiais compósitos periódicos, utilizando a versão paramétrica da teoria dos volumes finitos (TVF) e técnicas de homogeneização. A Seção 3 trata do desenvolvimento de uma formulação de homogeneização de propriedades elásticas, apresentada em Gattu et al. (2008), mas com a incorporação de interfaces imperfeitas. Os coeficientes de expansão térmica efetivos também são estudados na Seção 3. A Seção 4 descreve a formulação de homogeneização viscoelástica linear. Esta seção é iniciada com uma introdução ao modelo viscoelástico linear estudado (Tran et al., 2011), passando pelo desenvolvimento, também original, da formulação viscoelástica para a versão paramétrica da teoria dos volumes finitos, seguindo com a formulação para obtenção das propriedades homogêneas de materiais compósitos com constituintes viscoelásticos e com condições de contorno periódicas. Estas seções (2, 3 e 4) apresentam formulações que, baseadas em outros trabalhos, foram desenvolvidas para a TVF e os respectivos exemplos. É importante salientar que as formulações apresentadas neste trabalho, no que diz respeito ao desenvolvimento dos elementos de interface imperfeita térmica, elástica e viscoelástica, são originais para a teoria dos volumes finitos, assim como a formulação viscoelástica linear através do modelo de Maxwell generalizado.

As conclusões estão na Seção 5. Na Seção 6 encontram-se as referências e por fim a Seção 7, que apresenta os apêndices.

2 CONDUCTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA

Nesta seção é mostrada a formulação desenvolvida para obtenção das condutividades térmicas homogeneizadas de materiais compósitos com microestrutura periódica e dedução do elemento de interface imperfeita equivalente à fase de transição entre as inclusões e a matriz.

2.1 Problema de homogeneização térmica

Inicialmente, supõe-se um elemento de volume representativo (EVR) de um material compósito qualquer, com volume V e superfície de contorno S , sujeito a uma condição de contorno homogênea em temperatura dada por:

$$T^o(\mathbf{x}) = G_i^o x_i \quad \text{para } \mathbf{x} \in S \quad (2.1)$$

onde $G_i^o = \frac{\partial T^o}{\partial x_i}$ ($i = 1,2,3$) são constantes. A temperatura média e o vetor gradiente de temperatura médio tomados sobre o EVR são definidos, respectivamente, por

$$\langle T \rangle = \frac{1}{V} \int_V T(\mathbf{x}) dV \quad (2.2)$$

$$\langle \mathbf{G} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{G}(\mathbf{x}) dV \quad (2.3)$$

sendo $T(\mathbf{x})$ o campo de temperatura e $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ o vetor gradiente de temperatura correspondente, onde suas componentes são dadas por $G_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial T}{\partial x_i}$. Aplicando o Teorema da Divergência na Equação (2.3), a seguinte relação é obtida para as componentes do gradiente de temperatura

$$\langle G \rangle_i = \frac{1}{V} \int_S T^o(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS \quad (2.4)$$

com n_i denotando a i -ésima componente do vetor normal unitário à superfície S . A substituição da Equação (2.1) na Equação (2.4) leva a

$$\langle G \rangle_i = G_i^o \quad (2.5)$$

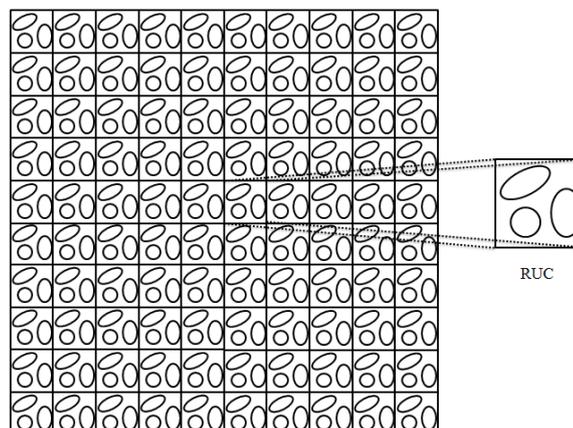
significa que as componentes do vetor gradiente de temperatura médio ao longo do domínio do EVR coincide com as correspondentes componentes do gradiente de temperatura na superfície de contorno do EVR, independentemente da microestrutura do material. A Equação (2.5) corresponde ao Teorema do Gradiente de Temperatura Médio.

Agora, considera-se que o material compósito tem uma microestrutura periódica, que pode ser gerada pela construção de blocos fundamentais chamados de célula unitária de repetição (*repeating unit cells* - RUC), como mostrado na Figura 1. No trabalho de Drago e Pindera (2007) é realizada uma discussão profunda sobre os conceitos de RVE e RUC no contexto da micromecânica de materiais compósitos. Considerando uma representação em duas escalas, o campo de temperatura de um RUC presente no domínio do material (Figura 1) pode ser expresso como

$$T(\mathbf{y}) = T^o(\mathbf{x}) + \tilde{T}(\mathbf{y}) \quad (2.6)$$

onde T^o e \tilde{T} representam as contribuições das temperaturas macroscópica e flutuante, respectivamente. Aqui, \mathbf{y} indica as coordenadas locais usadas na escala da RUC, enquanto que \mathbf{x} representa as coordenadas globais para a escala do EVR. Devido à periodicidade do material e às condições de contorno homogêneas impostas no elemento de volume representativo, a função de flutuação $\tilde{T}(\mathbf{y})$ é periódica em todo o domínio da célula unitária repetida.

Figura 1 – Material compósito periódico e célula unitária de repetição (RUC).



Usando (2.6) e considerando que \mathbf{G}^o é um vetor constante, a média volumétrica do gradiente de temperatura no volume Ω da RUC pode ser avaliada como

$$\langle \mathbf{G} \rangle^\Omega = \mathbf{G}^o + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{y}) d\Omega \quad (2.7)$$

onde as componentes do vetor gradiente de flutuação de temperatura $\tilde{\mathbf{G}}$ são $\tilde{G}_i = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i}$. Aplicando o teorema da divergência na integral da Equação (2.7), as componentes de $\langle \mathbf{G} \rangle^\Omega$ podem ser expressas da seguinte forma

$$\langle G \rangle_i^\Omega = G_i^o + \frac{1}{\Omega} \int_{\Gamma} \tilde{T}(\mathbf{y}) n_i d\Gamma \quad (2.8)$$

sendo n_i as componentes do versor normal que aponta para fora da superfície Γ da RUC. Como $\tilde{T}(\mathbf{y})$ é periódico na RUC, a integral em (2.8) deve ser nula. Assim,

$$\langle G \rangle_i^\Omega = G_i^o \quad (2.9)$$

isto é, a média volumétrica do gradiente de temperatura na RUC também é igual ao gradiente de temperatura de uma condição de contorno homogênea aplicada na superfície externa do EVR. Este é um importante resultado para a solução do problema de homogeneização deste trabalho.

Vale a pena notar que, mesmo a Equação (2.9) sendo válida, as atuais condições de contorno em temperatura na RUC são diferentes das correspondentes no EVR, o que pode ser justificado pelas flutuações periódicas $\tilde{T}(\mathbf{y})$ que aparecem na Equação (2.6). Entretanto, o problema de homogeneização pode ser resolvido considerando que a resposta do EVR inteiro, sob as condições de contorno homogênea em temperatura acima, é idêntica à resposta de uma célula unitária de repetição arbitrária sob condições de contorno apropriadas. Isto permite, em geral, que o problema de homogeneização tenha uma grande redução de tamanho e simplificação, uma vez que a análise envolvendo o EVR inteiro pode ser substituída por outra restrita apenas ao domínio de uma célula unitária de repetição. Essas condições de contorno periódicas são impostas considerando a mesma distribuição de flutuação de temperatura ao

longo dos pares de lados idênticos da célula unitária de repetição caracterizada pela periodicidade do material.

2.2 Parametrização de um subvolume da teoria dos volumes finitos

Nesta seção, a formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos (CAVALCANTE et al., 2007) é incorporada em um *framework* da teoria de homogeneização baseado em uma representação multiescala do campo de temperatura para avaliação da condutividade térmica efetiva em um compósito periódico reforçado por fibras unidirecionais.

Anteriormente, a teoria dos volumes finitos paramétrica foi incorporada no *framework* FVDAM e aplicada com sucesso em homogeneização de materiais periódicos com constituintes elásticos (GATTU et al., 2008) e elastoplásticos (KHATAM e PINDER, 2010; CAVALCANTE et al., 2011).

Na formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos, a microestrutura do material é discretizada em subvolumes quadrilaterais, em que a geometria e a localização são definidas pelas coordenadas de seus nós. A referida formulação é baseada em um mapeamento de um quadrado de referência em um sistema de coordenadas paramétricas $\eta - \xi$ para um subvolume quadrilateral no plano cartesiano $y_2 - y_3$ do domínio real de análise da microestrutura (CAVALCANTE, 2006; CAVALCANTE et al., 2007), como mostrado na Figura 2.

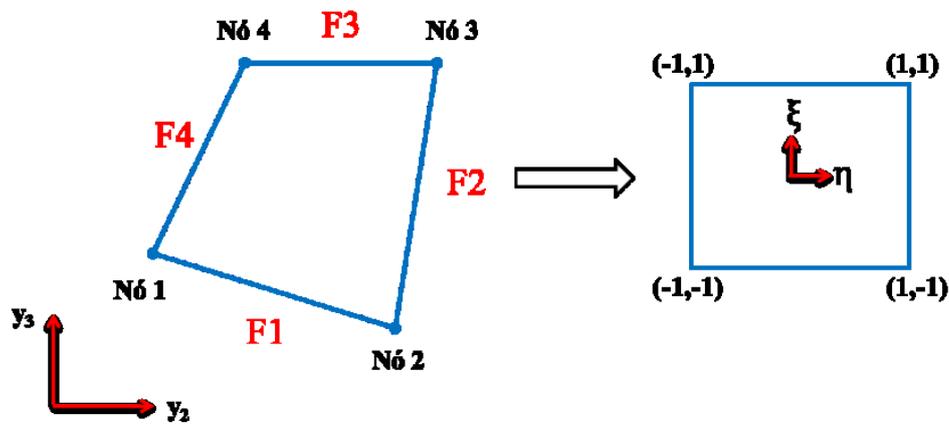
O mapeamento do ponto (η, ξ) no quadrado de referência para o ponto cartesiano (y_2, y_3) no subvolume quadrilateral da microestrutura discretizada é expresso na forma:

$$y_j(\eta, \xi) = N_1(\eta, \xi)y_{j,1} + N_2(\eta, \xi)y_{j,2} + N_3(\eta, \xi)y_{j,3} + N_4(\eta, \xi)y_{j,4} \quad (j=2,3) \quad (2.10)$$

onde $y_{j,m}$ indica a coordenada y_j do nó m do subvolume e

$$\begin{aligned} N_1(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \xi) & N_2(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \xi) \\ N_3(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi) & N_4(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \xi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Figura 2 – Mapeamento do quadrado de referência para o subvolum quadrilateral da microestrutura real.



Fonte: Autor, 2013.

2.3 Matriz de condutividade térmica local para um subvolum

Para um subvolum homogêneo da RUC discretizada, as componentes do fluxo de calor do subvolum são definidas pela lei de Fourier:

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial y_j} \quad (2.12)$$

sendo k_{ij} as condutividades térmicas do material. Considerando o campo de temperatura dado pela Equação (2.6), a equação acima se torna

$$q_i = -k_{ij} G_j^0 - k_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} \quad (2.13)$$

Para o caso de uma condutividade térmica estacionária sem fonte de calor e usando a Equação (2.13), a equação conservação de energia é dada por:

$$\frac{\partial q_i}{\partial y_i} = -k_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y_j^2} = 0 \quad (2.14)$$

Aqui, o campo de temperatura flutuante é assumido como independente de y_1 (i. e., $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_1} = 0$) e aproximado por uma expansão polinomial de segunda ordem de Legendre nas coordenadas paramétricas (η, ξ) (CAVALCANTE et al., 2007) na forma

$$\tilde{T}(\eta, \xi) = \tilde{T}_{00} + \eta\tilde{T}_{10} + \xi\tilde{T}_{01} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)\tilde{T}_{20} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)\tilde{T}_{02} \quad (2.15)$$

onde \tilde{T}_{mn} são os coeficientes desconhecidos. Para esta expansão de segunda ordem, os valores médios do campo de temperatura flutuante nas faces do subvolume (F_1, F_3) e (F_2, F_4) , mostradas na Figura 2, são definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T} \rangle^{(1,3)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{T}(\eta, \xi = \mp 1) d\eta = \tilde{T}_{00} \mp \tilde{T}_{01} + \tilde{T}_{02} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2,4)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{T}(\eta = \pm 1, \xi) d\eta = \tilde{T}_{00} \pm \tilde{T}_{10} + \tilde{T}_{20} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Usando uma definição similar para os gradientes médios nas faces dos subvolumes, as expressões a seguir são obtidas:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle^{(1,3)} &= \tilde{T}_{10} & \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle^{(1,3)} &= \tilde{T}_{01} \mp 3\tilde{T}_{02} \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle^{(2,4)} &= \tilde{T}_{10} \pm 3\tilde{T}_{20} & \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle^{(2,4)} &= \tilde{T}_{01} \end{aligned} \quad (2.17)$$

No contexto da versão paramétrica da teoria dos volumes finitos, a relação entre os gradientes médios na face p de um subvolume no sistema de referência com o sistema de coordenadas da microestrutura real é simplificado pelo uso da média volumétrica da Jacobiana $\bar{\mathbf{J}}$, como segue:

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_3} \right\rangle \end{bmatrix}^{(p)} = \langle \mathbf{J} \rangle \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right\rangle \end{bmatrix}^{(p)} \quad (2.18)$$

onde a definição de $\langle \mathbf{J} \rangle$ encontra-se no Apêndice C.

Considerando as Equações (2.13) e (2.18), a relação entre o vetor de fluxos de calor médios e o vetor de gradiente de temperatura médio para a face p pode ser escrita na forma:

$$\langle \mathbf{q} \rangle^{(p)} = \begin{bmatrix} \langle q_2 \rangle \\ \langle q_3 \rangle \end{bmatrix}^{(p)} = \bar{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} G_2^o \\ G_3^o \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{k}} \langle \mathbf{J} \rangle \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \rangle \\ \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \rangle \end{bmatrix}^{(p)} \quad (2.19)$$

$$\text{com } \bar{\mathbf{k}} = - \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}.$$

Com base na Equação (2.19), o vetor de fluxo de calor total médio para a p -ésima face do subvolume pode ser expresso como $\langle \mathbf{q} \rangle^{(p)} = \mathbf{q}^o + \langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle^{(p)}$, onde \mathbf{q}^o é a parte macroscópica constante dependente dos valores conhecidos G_k^o ($k = 2,3$) e $\langle \tilde{\mathbf{q}} \rangle^{(p)}$ indica a contribuição desconhecida dos gradientes médios de temperatura flutuante na face.

A projeção do fluxo de calor médio na direção normal à face p do subvolume é dada por:

$$\langle q_n \rangle^{(p)} = \mathbf{n}^{(p)} \langle \mathbf{q} \rangle^{(p)} = \mathbf{n}^{(p)} \bar{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} G_2^o \\ G_3^o \end{bmatrix} + \mathbf{n}^{(p)} \bar{\mathbf{k}} \langle \mathbf{J} \rangle \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \rangle \\ \langle \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \rangle \end{bmatrix}^{(p)} \quad (2.20)$$

onde, $\mathbf{n}^{(p)} = [n_2 \quad n_3]^{(p)}$, com n_2 e n_3 indicando as componentes do vetor normal unitário apontando para fora da face p do subvolume.

Introduzindo a Equação (2.17) na (2.20) para cada face p , o vetor de fluxo de calor médio nas faces pode ser obtido na forma:

$$\begin{bmatrix} \langle q_n \rangle^{(1)} \\ \langle q_n \rangle^{(2)} \\ \langle q_n \rangle^{(3)} \\ \langle q_n \rangle^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{n}^{(3)} \\ \mathbf{n}^{(4)} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} G_2^o \\ G_3^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \\ \mathbf{v}^{(3)} \\ \mathbf{v}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_{10} \\ \tilde{T}_{01} \\ \tilde{T}_{20} \\ \tilde{T}_{02} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{v}^{(p)} = \mathbf{n}^{(p)} \bar{\mathbf{k}} \langle \mathbf{J} \rangle \mathbf{a}^{(p)}$ e

$$\mathbf{a}^{(1,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mp 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}^{(2,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

O próximo passo consiste na determinação da relação entre os coeficientes desconhecidos do campo de temperatura flutuante que aparecem na Equação (2.21) e as temperaturas flutuantes médias nas faces do subvolume. Para isso, as Equações (2.16) e (2.18) são utilizadas juntamente com a equação de balanço de fluxo, resultando no coeficiente de ordem zero \tilde{T}_{00} , o qual é obtido diretamente em função das temperaturas flutuantes médias nas faces como (CAVALCANTE et al., 2007):

$$\tilde{T}_{00} = \lambda(\langle \tilde{T} \rangle^{(2)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(4)}) + \omega(\langle \tilde{T} \rangle^{(1)} + \langle \tilde{T} \rangle^{(3)}) \quad (2.23)$$

onde, para o caso de um material isotrópico, $k_{22} = k_{33} = k$ e $k_{23} = 0$,

$$\lambda = \frac{\langle J \rangle_{11}^2 + \langle J \rangle_{21}^2}{2(\langle J \rangle_{11}^2 + \langle J \rangle_{12}^2 + \langle J \rangle_{21}^2 + \langle J \rangle_{22}^2)} \quad (2.24)$$

$$\omega = \frac{\langle J \rangle_{12}^2 + \langle J \rangle_{22}^2}{2(\langle J \rangle_{11}^2 + \langle J \rangle_{12}^2 + \langle J \rangle_{21}^2 + \langle J \rangle_{22}^2)}$$

Substituindo a Equação (2.23) dentro de (2.16), a relação entre os coeficientes do campo de temperatura flutuante e as temperaturas flutuantes médias nas faces é encontrada na forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{10} \\ \tilde{T}_{01} \\ \tilde{T}_{20} \\ \tilde{T}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -\omega & 1/2 - \lambda & -\omega & 1/2 - \lambda \\ -\omega & -\lambda & 1/2 - \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \tilde{T} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4)} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \langle \tilde{T} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4)} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Substituindo a Equação (2.25) em (2.21), o vetor normal de fluxo de calor médio nas faces do subvolume torna-se:

$$\begin{bmatrix} \langle q_n \rangle^{(1)} \\ \langle q_n \rangle^{(2)} \\ \langle q_n \rangle^{(3)} \\ \langle q_n \rangle^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(1)} \\ \mathbf{n}^{(2)} \\ \mathbf{n}^{(3)} \\ \mathbf{n}^{(4)} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} G_2^o \\ G_3^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \\ \mathbf{v}^{(3)} \\ \mathbf{v}^{(4)} \end{bmatrix} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \langle \tilde{T} \rangle^{(1)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(2)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(3)} \\ \langle \tilde{T} \rangle^{(4)} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

que pode ser escrito na forma compacta como:

$$\langle \mathbf{q}_n \rangle = \mathbf{N} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{G}^o + \mathbf{K}_L \langle \tilde{\mathbf{T}} \rangle \quad (2.27)$$

onde, $\mathbf{G}^o = \begin{bmatrix} G_2^o \\ G_3^o \end{bmatrix}$ e a matriz de condutividade térmica local do subvolume é

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{V} \mathbf{B} \quad (2.28)$$

com $\mathbf{V} = [\mathbf{v}^{(1)T} \quad \mathbf{v}^{(2)T} \quad \mathbf{v}^{(3)T} \quad \mathbf{v}^{(4)T}]^T$.

2.4 Construção da matriz de condutividade térmica global

Os fluxos de calor médios normais às faces de cada subvolume da célula unitária são relacionados com as temperaturas flutuantes médias nas faces através de uma matriz de condutividade térmica local, como mostrado na Equação (2.27). As matrizes de condutividade térmica locais são empregadas na montagem de um sistema de equações globais pela aplicação das condições de compatibilidade interfacial média de temperatura flutuante e fluxo de calor normal, seguido pelas condições de contorno determinadas. Esta abordagem é baseada em um sistema global de numeração das faces, em que cada face local interna tem um número de face global correspondente, comum aos subvolumes adjacentes, enquanto que as faces externas dos subvolumes ao longo dos contornos opostos da célula unitária são numeradas levando-se em consideração as condições de periodicidade. Estas faces externas, com distribuições de temperatura flutuantes semelhantes impostas pelas condições de periodicidade, recebem números comuns para as faces. O procedimento para montagem do sistema global é similar ao utilizado nos algoritmos de elementos finitos. Neste último, os graus de liberdade são associados aos nós dos elementos, enquanto que na presente formulação dos volumes finitos os graus de liberdade estão referidos às faces dos subvolumes.

Impondo as condições de compatibilidade em fluxos de calor normais médios e em temperaturas flutuantes médias ao longo das faces internas, bem como a aplicação das condições de contorno, o sistema de equações globais toma a seguinte forma:

$$\mathbf{K}_G \tilde{\mathbf{T}}_G = \mathbf{Q}_G^o \quad (2.29)$$

onde \mathbf{K}_G é a matriz de condutividade térmica global e \mathbf{Q}_G^o é um vetor composto pelas resultantes do fluxos normais médios macroscópicos nas interfaces dos subvolumes adjacentes e faces localizadas ao longo do contorno discretizado da célula unitária. O vetor $\tilde{\mathbf{T}}_G$ contém todas as temperaturas flutuantes médias desconhecidas das faces internas e do contorno. Como a matriz \mathbf{K}_G é singular, a solução da Equação (2.29) não é diretamente acessível. Este problema pode ser eliminado mediante a imposição de temperaturas flutuantes médias nulas nas faces externas dos subvolumes das arestas. As temperaturas flutuantes médias remanescentes são determinadas pela solução do sistema de equações reduzido.

2.5 Matriz de condutividade térmica homogeneizada

As leis de homogeneização de Fourier no plano para compósitos relacionam o fluxo de calor efetivo \mathbf{Q}^* com o gradiente de temperatura macroscópico como segue:

$$\mathbf{Q}^* = -\mathbf{K}^* \mathbf{G}^o \quad (2.30)$$

onde $\mathbf{Q}^* = [Q_2^* \quad Q_3^*]^T$ e \mathbf{K}^* é a condutividade térmica efetiva. O fluxo de calor efetivo é definido como a média no volume do campo de fluxo de calor no plano \mathbf{q} através da célula unitária de repetição:

$$\mathbf{Q}^* = \frac{1}{\Omega} \left[\int_{\Omega_m} \mathbf{q}(y_2, y_3) d\Omega_m + \int_{\Omega_f} \mathbf{q}(y_2, y_3) d\Omega_f \right] \quad (2.31)$$

onde Ω_m e Ω_f denota o domínio da matriz e da fibra, respectivamente.

Usando a lei de Fourier (Equação (2.12)) e assumindo que as fases são homogêneas e isotrópicas, a Equação (2.31) pode ser reescrita na forma:

$$\mathbf{Q}^* = \frac{1}{\Omega} \left[k_m \int_{\Omega_m} \mathbf{G}(y_2, y_3) d\Omega_m + k_f \int_{\Omega_f} \mathbf{G}(y_2, y_3) d\Omega_f \right] \quad (2.32)$$

sendo \mathbf{G} o vetor gradiente de temperatura local. Após a discretização da célula unitária a seguinte aproximação pode ser utilizada para avaliar o fluxo de calor efetivo:

$$\mathbf{Q}^* = - \sum_{l=1}^{N_m} k_m \bar{v}_m^{(l)} \langle \mathbf{G}_m \rangle^{(l)} - \sum_{r=1}^{N_f} k_f \bar{v}_f^{(r)} \langle \mathbf{G}_f \rangle^{(r)} \quad (2.33)$$

onde N_m e N_f indicam o número de subvolumes usado na discretização do domínio da matriz e da fibra. Os símbolos $\bar{v}_m^{(l)}$ e $\bar{v}_f^{(r)}$ são as frações volumétricas dos subvolumes de matriz e de fibra em toda a discretização da célula unitária, respectivamente. Na Equação (2.33), $\langle \mathbf{G}_m \rangle^{(l)}$ e $\langle \mathbf{G}_f \rangle^{(r)}$ são os gradientes médios de temperatura para os subvolumes contidos na matriz e na fibra, respectivamente.

Agora, introduzindo o conceito de matriz de concentração de gradiente de temperatura no subvolume, como:

$$\langle \mathbf{G}_m \rangle^{(l)} = \mathbf{H}_m^{(l)} \mathbf{G}^o \quad \langle \mathbf{G}_f \rangle^{(r)} = \mathbf{H}_f^{(r)} \mathbf{G}^o \quad (2.34)$$

Substituindo a Equação (2.33) na (2.30), a seguinte relação é encontrada para a condutividade térmica homogeneizada:

$$\mathbf{K}^* = \sum_{l=1}^{N_m} k_m \bar{v}_m^{(l)} \mathbf{H}_m^{(l)} + \sum_{r=1}^{N_f} k_f \bar{v}_f^{(r)} \mathbf{H}_f^{(r)} \quad (2.35)$$

As matrizes $\mathbf{H}^{(l)}$ que aparecem na Equação (2.34) podem ser obtidas rapidamente através da solução da Equação (2.29) para dois gradientes macroscópicos \mathbf{G}^o convenientemente selecionados, com valores unitários. Aplicando-se, por exemplo, $\mathbf{G}^o = [1 \ 0]^T$, pode-se encontrar as temperaturas médias flutuantes em todas as faces dos subvolumes da célula unitária e, por conseguinte, encontrar os gradientes médios de temperatura dentro de cada subvolume $\langle \mathbf{G} \rangle^{(l)}$. Dessa forma, é possível montar a primeira coluna das matrizes $\mathbf{H}^{(l)}$ através da Equação (2.34). O mesmo procedimento é aplicado para a

obtenção da segunda coluna, onde dessa vez o gradiente de temperatura macroscópico tem a seguinte forma $\mathbf{G}^o = [0 \quad 1]^T$.

2.6 Elemento de interface imperfeita para condutividade térmica

A Figura 3(a) mostra uma interfase fina, curvada arbitrariamente, de espessura constante h localizada entre a fibra e a matriz de um material compósito fina. As interfaces fibra/interfase e matriz/interfase são admitidas como perfeitas, ou seja, existe ao longo das mesmas continuidade perfeita de temperatura e fluxo de calor. Ao contrário, diz-se que uma interface é imperfeita quando a continuidade de temperatura ou de fluxo de calor não acontece. Conforme apresentado em Benveniste (2006) uma interfase fina pode ser substituída aproximadamente por uma interface equivalente, posicionada na superfície média S_i , considerando condições apropriadas de temperatura e fluxo de calor normal para o caso de análise térmica (Figura 3(b)). Para o caso de regime estacionário, a equivalência entre a interfase e a interface se verifica impondo-se ao longo da interface as seguintes discontinuidades de temperatura e de fluxo térmico normal, respectivamente:

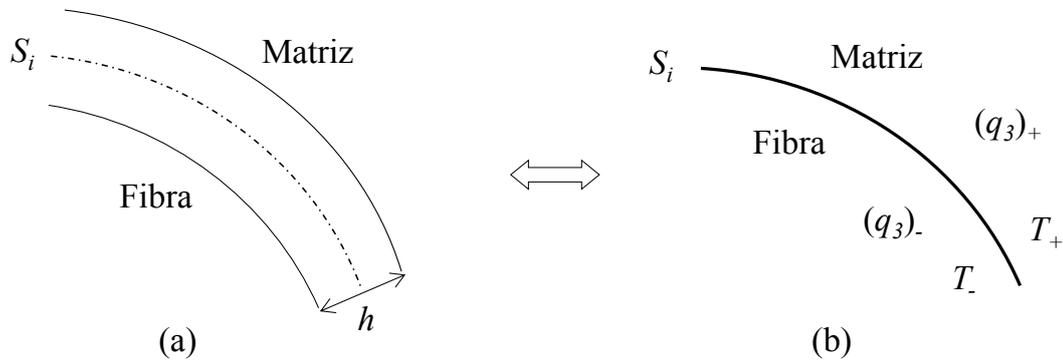
$$T_+ - T_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_i} \right) (q_3)_+ + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_f} - \frac{1}{k_i} \right) (q_3)_- \quad (2.36)$$

$$(q_3)_+ - (q_3)_- = \frac{h}{2} (k_i - k_m) \{ \Delta_S(T_+) \} + \frac{h}{2} (k_i - k_f) \{ \Delta_S(T_-) \} \quad (2.37)$$

onde as temperaturas T_+ e T_- e os fluxos térmicos normais $(q_3)_+$ e $(q_3)_-$ podem ser vistos na Figura 3(b). Os parâmetros k_m , k_f e k_i são, respectivamente, as condutividades térmicas da matriz, fibra e interfase e $\Delta_S(\quad)$ é o Laplaciano superficial calculado na superfície média S_i .

Usando uma expansão em série de Taylor, Hashin (2001) mostrou que a interfase fina com condutividade térmica muito menor que as das fases ($k_i \ll k_m, k_f$) pode produzir uma discontinuidade finita na temperatura na transição fibra-matriz, enquanto que uma discontinuidade finita no fluxo de calor normal pode ser produzida quando a condutividade térmica da interfase é muito maior que as das fases.

Figura 3 – (a) Interfase fibra/matriz e (b) equivalente interface imperfeita.



Fonte: Autor, 2013.

Baseado nesses resultados, o presente trabalho propõe que a interfase fina, de baixa condutividade, isotrópica e homogênea seja representada por uma interface imperfeita situada entre a fibra e a matriz, no qual a temperatura exibe uma descontinuidade ao longo da espessura da interface, enquanto o fluxo de calor normal apresenta continuidade, fazendo com que as Equações (2.36) e (2.37) tomem, respectivamente, as seguintes formas

$$T_+ - T_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i} \right) q_n \quad (2.38)$$

$$(q_3)_+ - (q_3)_- = 0 \quad (2.39)$$

Na Equação (2.38), q_n indica o fluxo de calor normal à interface, positivo no sentido da fibra para a matriz. A imposição da continuidade do fluxo de calor normal na interfase implica em restrições entre as condutividades térmicas da interfase, fibra e matriz, as quais são investigadas posteriormente neste trabalho.

Considerando a Equação (2.6) e levando em consideração que a descontinuidade de temperatura macroscópica $T_+^0 - T_-^0$ ao longo da interface é nula, a Equação (2.38) pode ser escrita como:

$$\tilde{T}_+ - \tilde{T}_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i} \right) q_n \quad (2.40)$$

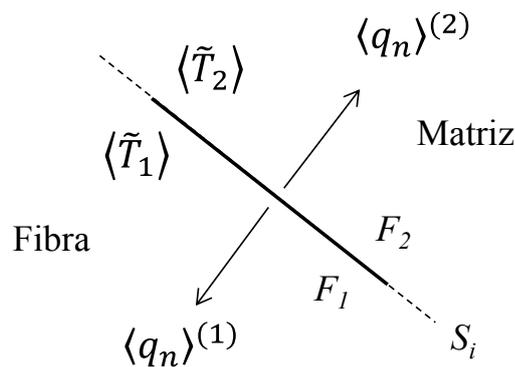
sendo \tilde{T}_+ e \tilde{T}_- as temperaturas flutuantes interfaciais do lado da matriz e da fibra, respectivamente.

Como a formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos emprega subvolumes quadrilaterais para discretizar a fibra e a matriz, as interfaces são discretizadas por segmentos de reta que é a face que separa a matriz da fibra, como mostrado na Figura 4. Usando a Equação (2.40), a descontinuidade de temperatura média ao longo do elemento de interface é dada por:

$$\langle \tilde{T}_2 \rangle - \langle \tilde{T}_1 \rangle = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i} \right) \langle q_n \rangle \quad (2.41)$$

onde $\langle \tilde{T}_1 \rangle$ e $\langle \tilde{T}_2 \rangle$ são as temperaturas flutuantes médias nas faces F_1 e F_2 do elemento, respectivamente, e $\langle q_n \rangle$ é o fluxo de calor médio através do elemento de interface. A Equação (2.41) é o modelo proposto neste trabalho para a modelagem da descontinuidade em temperatura ao longo da interface. Como o modelo apresentado foi obtido assumindo-se que ($k_i \ll k_m, k_f$) é necessário restringir os valores que k_i pode assumir e tal investigação é realizada na subsecção 2.7.5.

Figura 4 – Elemento de interface imperfeita.



Fonte: Autor, 2013.

Para o elemento de interface, a relação entre o fluxo de calor médio nas faces F_1 e F_2 é dada pela hipótese da continuidade, $\langle q_n \rangle^{(1)} = -\langle q_n \rangle^{(2)} = -\langle q_n \rangle$. Assim, através da Equação (2.41), a seguinte expressão é encontrada:

$$\langle q_n \rangle^{(1)} = -\langle q_n \rangle^{(2)} = c(\langle \tilde{T}_1 \rangle - \langle \tilde{T}_2 \rangle) \quad (2.42)$$

onde

$$c = \frac{2}{h} \frac{1}{\frac{1}{k_m} + \frac{1}{k_f} - \frac{2}{k_i}} \quad (2.43)$$

A Equação (2.42) pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \langle q_n \rangle^{(1)} \\ \langle q_n \rangle^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \tilde{T}_1 \rangle \\ \langle \tilde{T}_2 \rangle \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

Assim, a matriz de condutividade térmica local do elemento de interface é dada por

$$K_I = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.7 Exemplos e Resultados

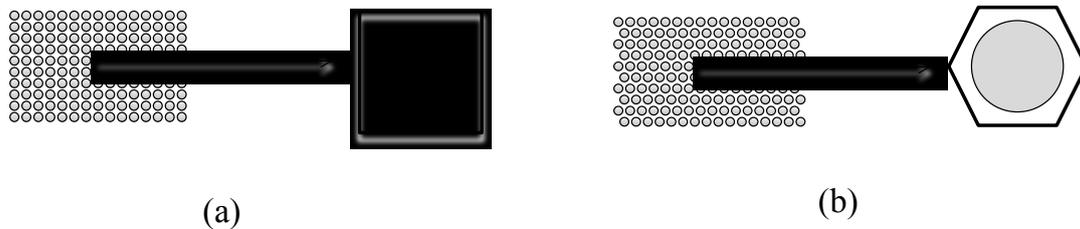
Neste tópico serão apresentados os resultados encontrados através das formulações de homogeneização de condutividades térmicas desenvolvidas para a versão Paramétrica da Teoria dos Volumes Finitos. Estes resultados foram comparados com resultados numéricos utilizando o método dos elementos finitos e, em alguns casos, comparados com resultados experimentais encontrados na literatura.

2.7.1 Compósito unidirecional de duas fases com distribuição quadrada e hexagonal de fibras

Este primeiro exemplo consiste de um compósito unidirecional de duas fases com distribuição das fibras em arranjos periódicos quadrado e hexagonal (Figura 5). Assume-se que a interface é perfeita entre a fibra e matriz. O objetivo deste exemplo é investigar o efeito da discretização da célula unitária na condutividade térmica efetiva, bem como, ilustrar os resultados obtidos pela presente formulação e compará-los com as soluções em elementos

finitos para um amplo intervalo de frações volumétricas das fibras e relações de condutividade térmica da fibra e da matriz.

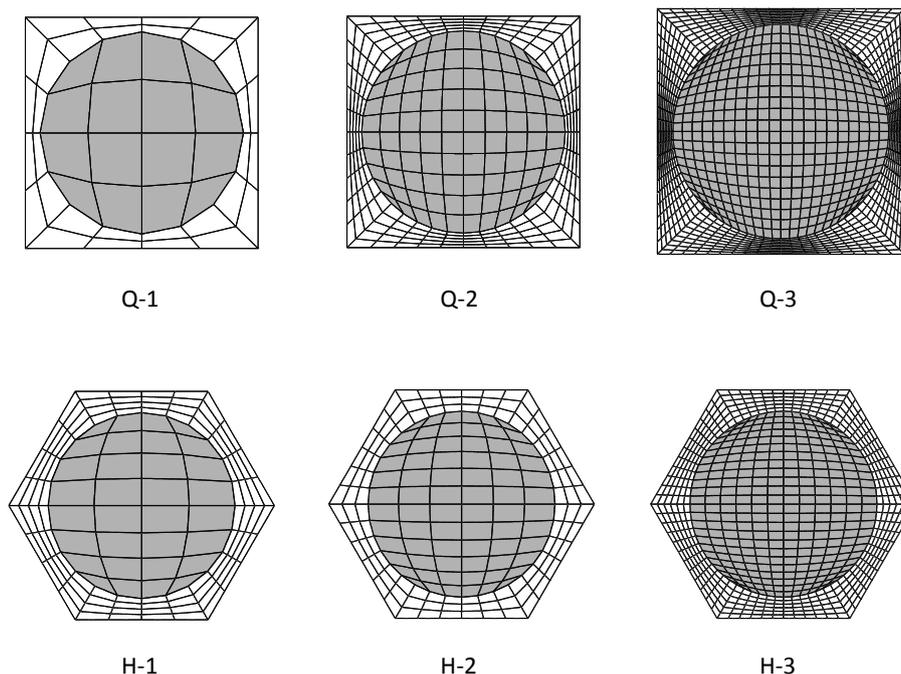
Figura 5 – Compósito unidirecional de duas fases com distribuição das fibras em arranjos a) quadrado e b) hexagonal.



Fonte: Autor, 2012.

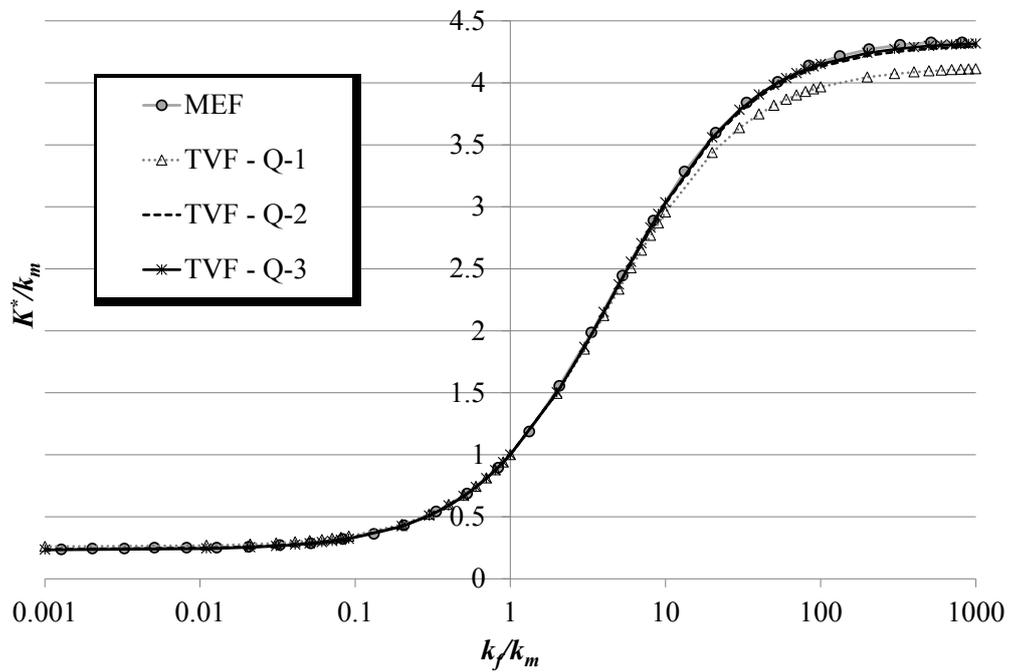
Para o estudo de convergência relacionado com a discretização da célula unitária, três diferentes malhas para cada arranjo de fibras foram utilizadas, como pode ser visto na Figura 6 para uma fração volumétrica de fibras de 60%. Os resultados obtidos para a condutividade transversal efetiva do compósito $K^* = K_{22}^* = K_{33}^*$, normalizada pela condutividade da matriz k_m , em função da relação de condutividades k_f/k_m foram comparados com aqueles apresentados por Sihm e Roy (2011) usando o método dos elementos finitos, podendo ser observados nas Figuras 7 e 8.

Figura 6 – Discretização da RUC.



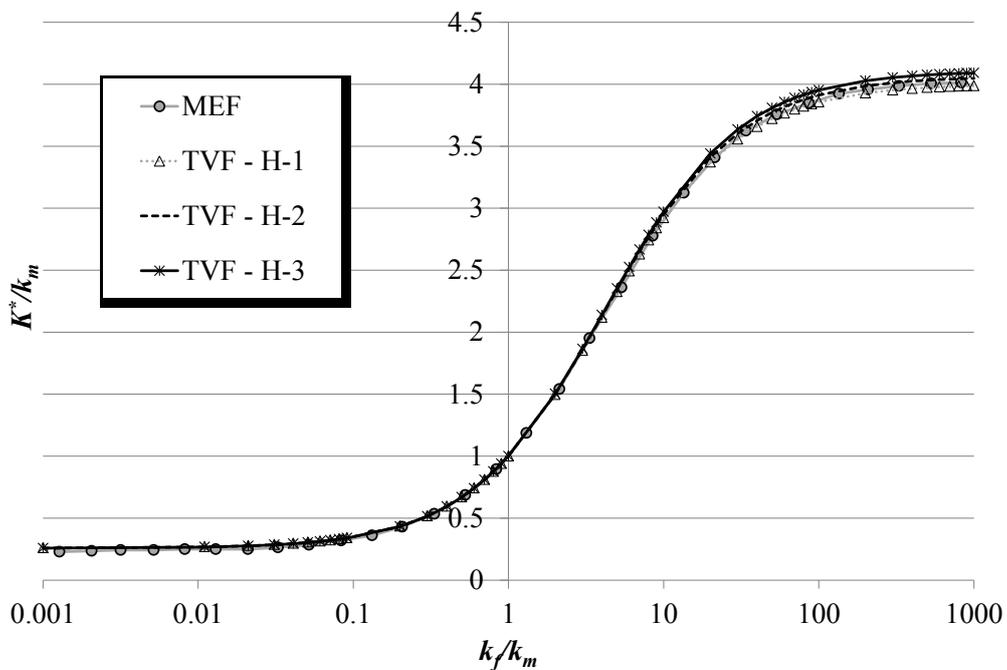
Fonte: Autor, 2012.

Figura 7 – Condutividade térmica efetiva normalizada do compósito com distribuição quadrada de fibras.



Fonte: Autor, 2012.

Figura 8 – Condutividade térmica efetiva normalizada do compósito com distribuição hexagonal de fibras.

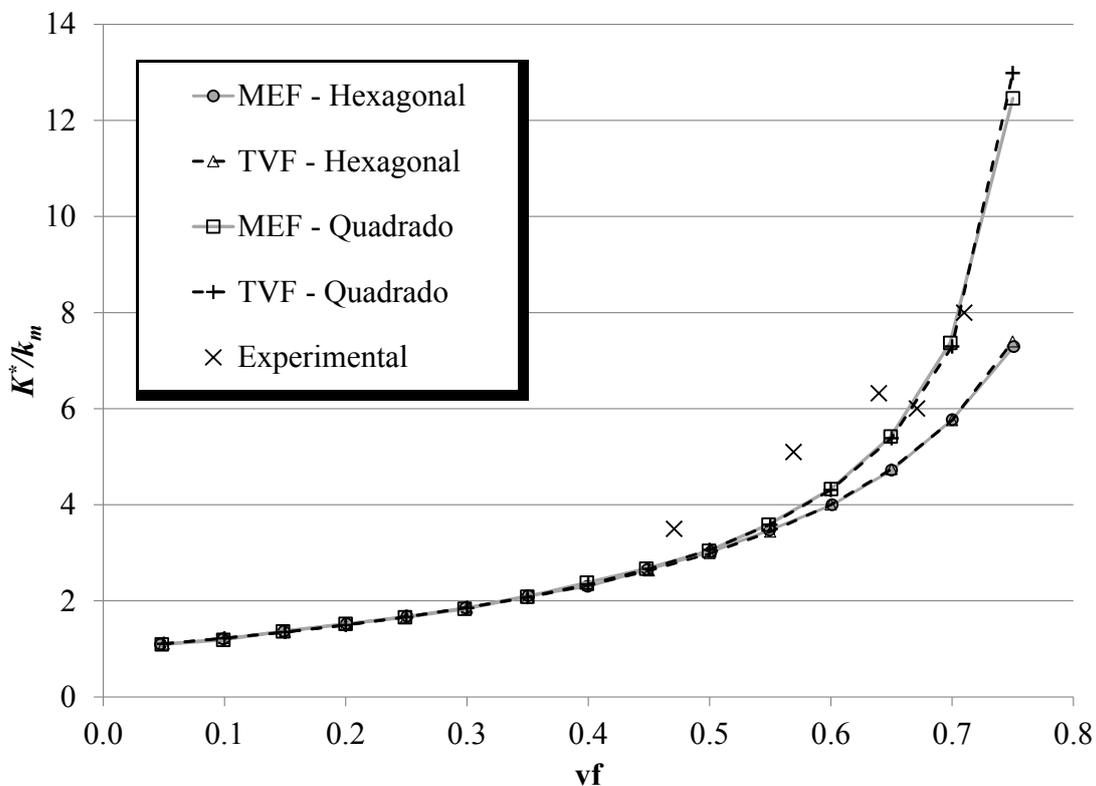


Fonte: Autor, 2012.

Percebe-se, pelos resultados, que as malhas menos refinadas (Q-1 e H-1) fornecem valores um pouco diferentes daqueles encontrados por Sihm e Roy (2011) apenas para valores de k_f/k_m acima de 10, e que para as malhas mais refinadas, os resultados apresentam ótima concordância com os obtidos pelo método dos elementos finitos.

A Figura 9 mostra o estudo da variação da condutividade térmica efetiva normalizada em função da variação da fração volumétrica de fibras v_f , considerando a relação entre as condutividades térmicas da fibra e da matriz como em Sihm e Roy (2011) $k_f/k_m = 666$.

Figura 9 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função da fração volumétrica de fibras



Fonte: Autor, 2012.

Percebe-se mais uma vez a grande concordância entre os resultados obtidos com a teoria dos volumes finitos (TVF) em relação ao método dos elementos finitos (SIHN; ROY (2011)) tanto para o arranjo quadrado quanto para o hexagonal. Além dos resultados numéricos, a Figura 9 também apresenta resultados experimentais obtidos por Thomburg e Pears (1965), os quais são mais bem representados pelo arranjo quadrado. Este aspecto tem relação direta com a microestrutura do material.

2.7.2 Condutividade efetiva para compósitos porosos

Em muitas aplicações, o emprego de materiais com baixa condutividade térmica é desejável. Uma estratégia para reduzir a condução térmica efetiva de um material consiste na criação de poros no seu interior. Por exemplo, no caso de blocos cerâmicos, isto pode ser conseguido através da introdução de inclusões de isopor, as quais são queimadas durante o processo de fabricação, resultando uma estrutura interna porosa no material que proporciona uma redução na condutividade térmica efetiva.

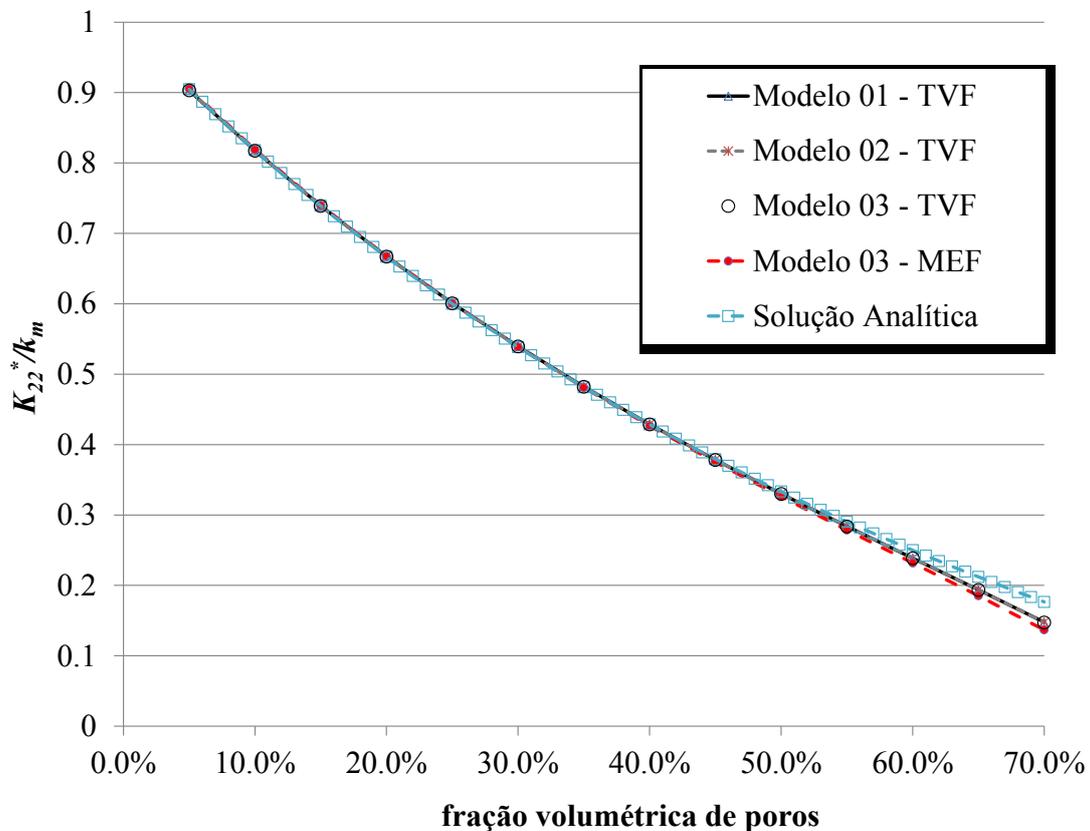
No exemplo a seguir, visa-se obter a curva de condutividade térmica efetiva de materiais porosos em função do aumento da fração volumétrica de poros.

Neste exemplo a matriz é isotrópica com a condutividade térmica do alumínio $k_m = 178 \text{ W/mK}$ e a inclusão tem condutividade aproximadamente nula ($k_f = 10^{-10} \text{ W/mK}$). Para efeito de estudo, foram considerados três modelos com a teoria dos volumes finitos, onde uma interface/interfase contornando o poro foi incluída.

- **Modelo 01:** Matriz e poro;
- **Modelo 02:** Matriz, interface e poro (2 fases com interface imperfeita) e;
- **Modelo 03:** Matriz, interfase e poro (3 fases).

Observa-se, através dos resultados (Figura 10), que a inserção da interfase praticamente não influencia na condutividade térmica efetiva do compósito, o que foi verificado para valores de condutividade iguais a $k_i = 1 \text{ W/mK}$, 10 W/mK e 50 W/mK .

Figura 10 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função da fração volumétrica de poro para o arranjo quadrado.

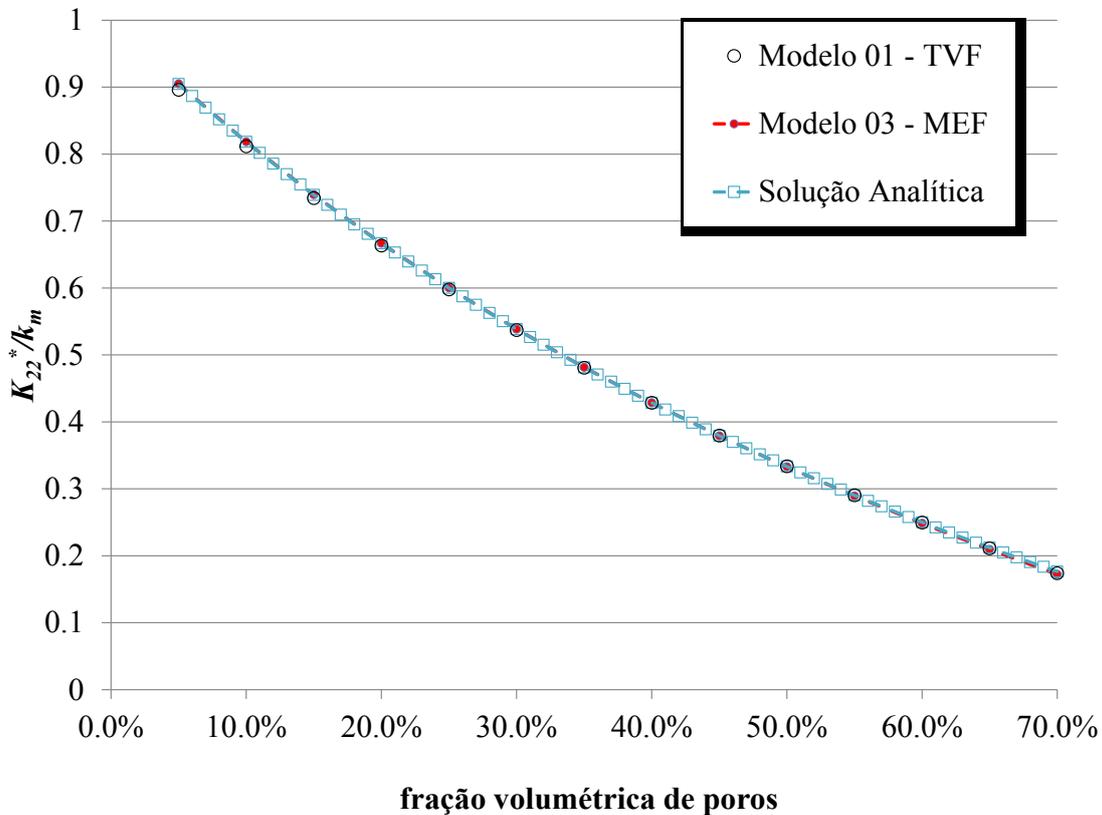


Fonte: Autor, 2013.

Os resultados obtidos pela TVF foram comparados com valores encontrados pelo método dos elementos finitos para três fases, através da ferramenta computacional Ansys[®], e com a solução analítica encontrada no trabalho de Hatta e Taya (1986), apresentando excelente aproximação. Vale salientar que a solução analítica tem como base o método da inclusão equivalente de Eshelby (1957; 1959) considerando-se múltiplas inclusões assim como o modelo de Mori-Tanaka (1973), sendo seu equivalente para problemas de condutividade térmica. Neste tópico, tal modelo será chamado apenas de Mori-Tanaka.

Visando verificar a influência da distribuição dos poros sobre a condutividade térmica efetiva do material, este exemplo também foi modelado para um arranjo hexagonal, cujos resultados estão apresentados na Figura 11.

Figura 11 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função da fração volumétrica de poro para o arranjo hexagonal.



Fonte: Autor, 2013.

Pelos resultados da Figura 11, percebe-se a grande correlação entre os resultados obtidos pela TVF, pelo método dos elementos finitos e pelo modelo micromecânico de Mori-Tanaka, o qual foi formulado para arranjos aleatórios de fibras. Vale acrescentar que a excelente concordância com os resultados do modelo de Mori-Tanaka, para todos os níveis de frações volumétricas, pode ser justificada pelo fato do arranjo hexagonal, quando comparado com o quadrado, proporcionar uma melhor aproximação de uma distribuição aleatória de inclusões. Vale ressaltar que, dependendo da distribuição da microestrutura real do material, o arranjo quadrado pode apresentar melhores resultados.

2.7.3 Interface Imperfeita Térmica

Neste exemplo é realizado um estudo dos efeitos da interface imperfeita na condutividade térmica efetiva do compósito.

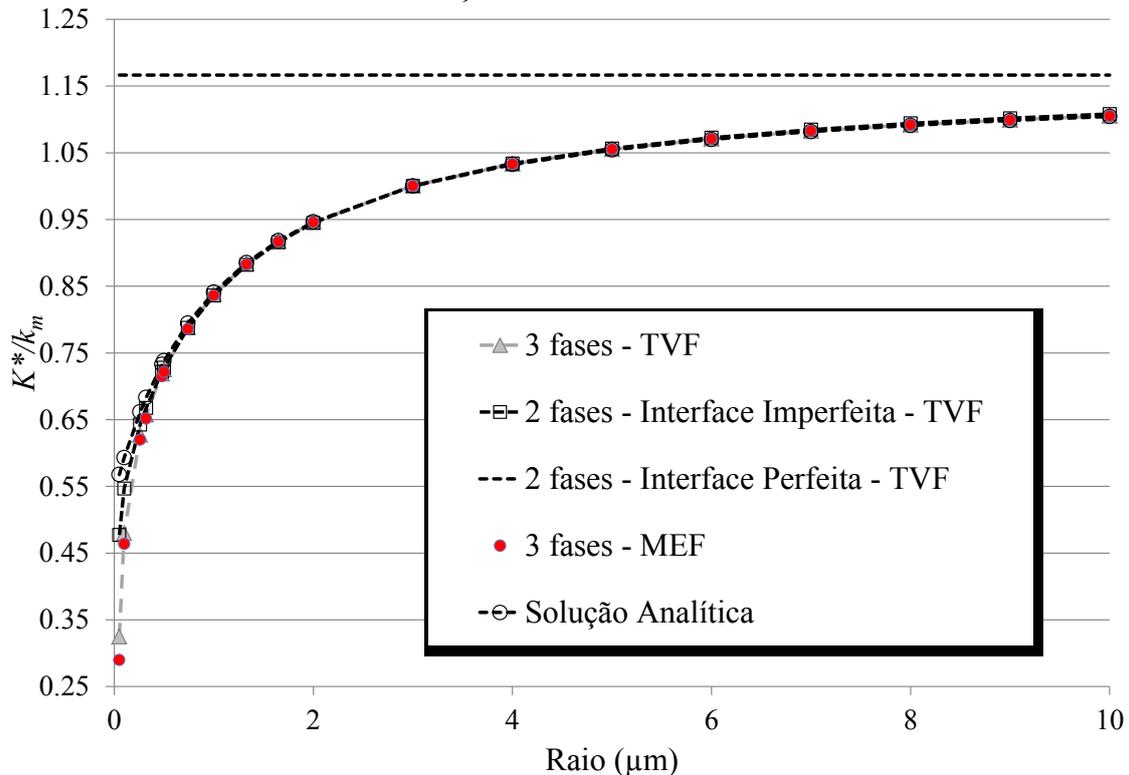
2.7.4 Dependência do tamanho da inclusão na condutividade efetiva com barreira interfacial térmica

O modelo proposto no presente exemplo é aplicado para investigar o efeito do tamanho da fibra na condutividade térmica efetiva para um compósito SiC/Al (Matriz Metálica de Alumínio e Fibra de Carboneto de Silício) com resistência térmica interfacial e distribuição quadrada periódica de fibras. As condutividades térmicas da matriz e das fibras são $k_m = 178 \text{ W/mK}$ e $k_f = 300 \text{ W/mK}$, respectivamente. A interfase tem espessura constante igual a $h = 20 \text{ nm}$ e condutividade térmica com base nas equações encontradas em Nan et al. (1997) como segue:

$$k_i = \frac{h}{a/k_m} \quad (2.46)$$

onde a é o raio da fibra que, de acordo com Nan et al. (1997), tem o valor $a = 1,22 \mu\text{m}$ para SiC/Al, resultando em $k_i = 2,918 \text{ W/mK}$. A fração volumétrica de fibras de 30% é considerada para o compósito. A Figura 12 mostra a variação da condutividade térmica efetiva normalizada em função da variação do raio ($0,05 \mu\text{m} \leq r \leq 10 \mu\text{m}$), considerando três condições: a) material com três fases (matriz, interfase e fibra) com interfaces perfeitas, b) material com duas fases (matriz e fibra) considerando a interface imperfeita e c) material com duas fases (matriz e fibra) com interface perfeita. Para verificar o modelo, os resultados numéricos são comparados com aqueles obtidos por uma formulação micromecânica analítica apresentada em Nan et al. (1997). A diferença entre os resultados para a célula unitária com duas fases sem interfase (linha tracejada horizontal) e as outras curvas na Figura 12 representa a influência da presença da interfase fina na condutividade térmica do material compósito, que decresce com o acréscimo do tamanho da fibra. Dessa forma, percebe-se, para fração volumétrica constante, que quanto menor o raio da fibra menor é a condutividade térmica efetiva, caracterizando o efeito Kapitza (KAPITZA, 1965).

Figura 12 – Variação da condutividade térmica efetiva normalizada do compósito em função do raio de fibras.



Fonte: Autor, 2013.

2.7.5 Análise da aplicabilidade da hipótese de interface imperfeita com continuidade em fluxo de calor normal e descontinuidade na temperatura

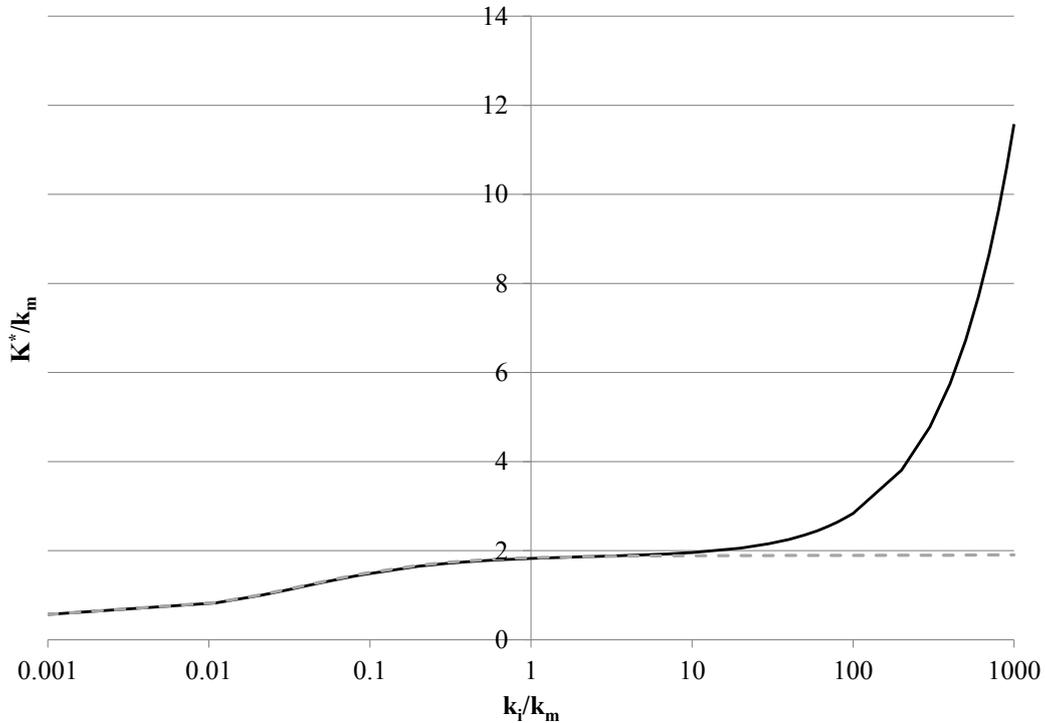
Como explicado anteriormente, a interface imperfeita com baixa condutividade térmica, aqui concebida, é caracterizada por uma descontinuidade no campo de temperatura entre a fibra e a matriz enquanto a continuidade de fluxo térmico normal é garantida. Neste contexto, visa-se neste exemplo investigar a faixa de condutividade térmica da interfase k_i para o qual a hipótese de continuidade de fluxo térmico normal e descontinuidade em temperatura pode ser empregada satisfatoriamente. Para isso, um compósito unidirecional com fibras circulares revestidas por uma interfase fina é considerado. As fibras têm raio $r = 1 \mu\text{m}$ e arranjo periódico quadrado. A condutividade térmica da matriz é $k_m = 1 \text{ W/mK}$. Duas situações são consideradas: a) A célula unitária é discretizada e analisada como sendo composta por três fases (matriz, interfase e fibra) com interfaces perfeitas e b) a célula unitária é discretizada e analisada como um material bifásico com interfaces imperfeitas. Nesta última situação, a interfase foi substituída por uma interface com fluxo de calor normal contínuo e campo de temperatura descontínuo. Para a primeira situação, as interfaces matriz-interfase e interfase-fibra são consideradas perfeitas, isto é, com a continuidade em ambos, fluxo térmico normal e temperatura. As Figuras 13, 14 e 15 mostram os resultados obtidos

para fração volumétrica de fibras de 30%, 50% e 70%, respectivamente, onde as linhas contínuas são os resultados com interfaces imperfeitas e as linhas tracejadas para interfaces perfeitas. Para cada fração volumétrica, quatro diferentes relações k_m/k_f (0,02, 1, 10 e 50) são consideradas. Na análise comparativa deste exemplo, as soluções obtidas para os casos de material com três fases com interface perfeita são tomadas como referência para avaliar os resultados obtidos com o uso das interfaces imperfeitas.

Para todos os casos analisados, é observado que a condutividade térmica da fase contínua matriz tem uma forte influência sobre a condutividade térmica efetiva. Isto ocorre porque para alcançar a fase descontínua, o calor deve ser transportado através da fase contínua. Os resultados mostram uma redução contínua da condutividade térmica efetiva com o decréscimo da condutividade térmica da interfase. Entretanto, quando $k_f > k_m$ os valores da condutividade térmica efetiva permanecem praticamente constantes, como mostrados nas Figuras 13 (a,b), 14 (a,b) e 15 (a,b) para os casos de materiais com três fases com interfaces perfeitas. Por outro lado, quando a matriz é mais condutora que a fibra ($k_m > k_f$), os resultados mostram que a condutividade térmica efetiva apresenta significativo aumento com o incremento da condutividade térmica da interfase no intervalo $k_i > k_m$. Neste último caso, observa-se também diferenças menores entre as curvas correspondentes aos pressupostos de material com três fases com interfaces perfeitas e de material com duas fases com interface imperfeita, no intervalo de $k_i > k_m$. Quando a fração volumétrica de fibras aumenta, o volume de interfase dentro da célula unitária é aumentado e, como consequência, a influência de k_i na condutividade térmica efetiva K^* é maior, o que é responsável pela maior inclinação da curva K^*/k_m para $k_i > k_m$ (Figs. 13 (c,d), 14 (c,d) e 15 (c,d)) .

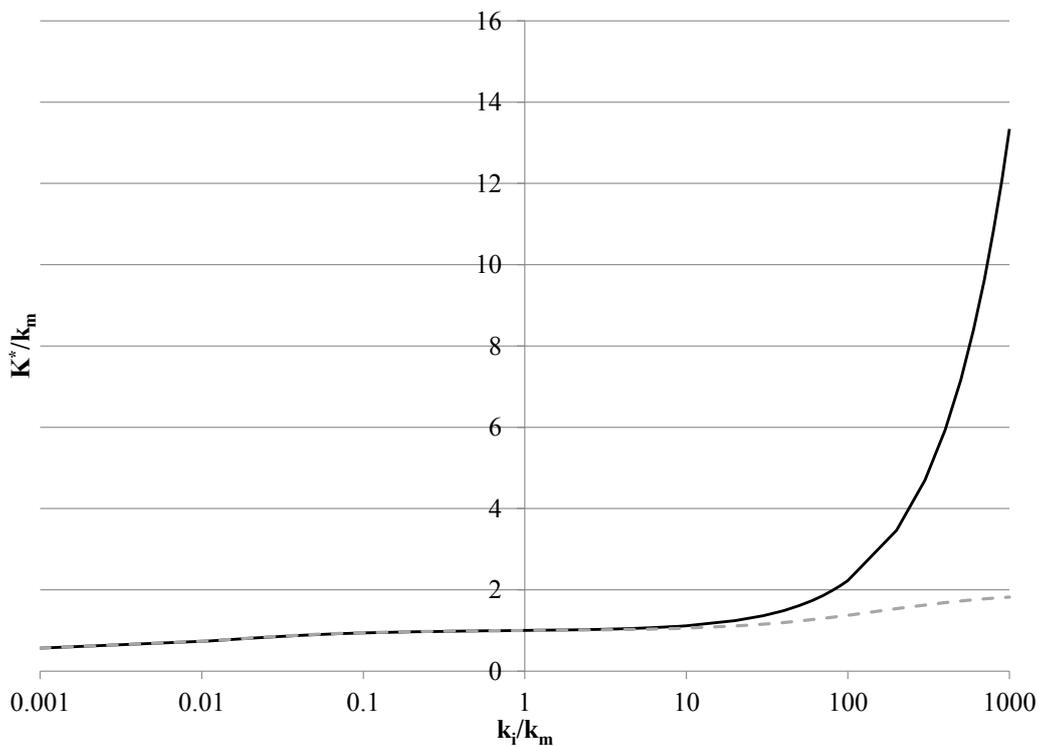
As Figuras 13, 14 e 15 mostram que as curvas obtidas com as duas considerações acima são praticamente coincidentes no intervalo $k_i < k_m$. Os resultados também permitem concluir que o modelo proposto de interface imperfeita pode proporcionar bons resultados para a razão k_i/k_m menor do que um limite $(k_i/k_m)_{lim}$. Como pode ser visto nas Figuras 13, 14 e 15, este limite é maior do que 10 para a maioria dos casos analisados.

Figura 13 – Condutividade térmica efetiva *versus* condutividade térmica da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 30% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita) (continua).



a) $k_m/k_f = 0,02$

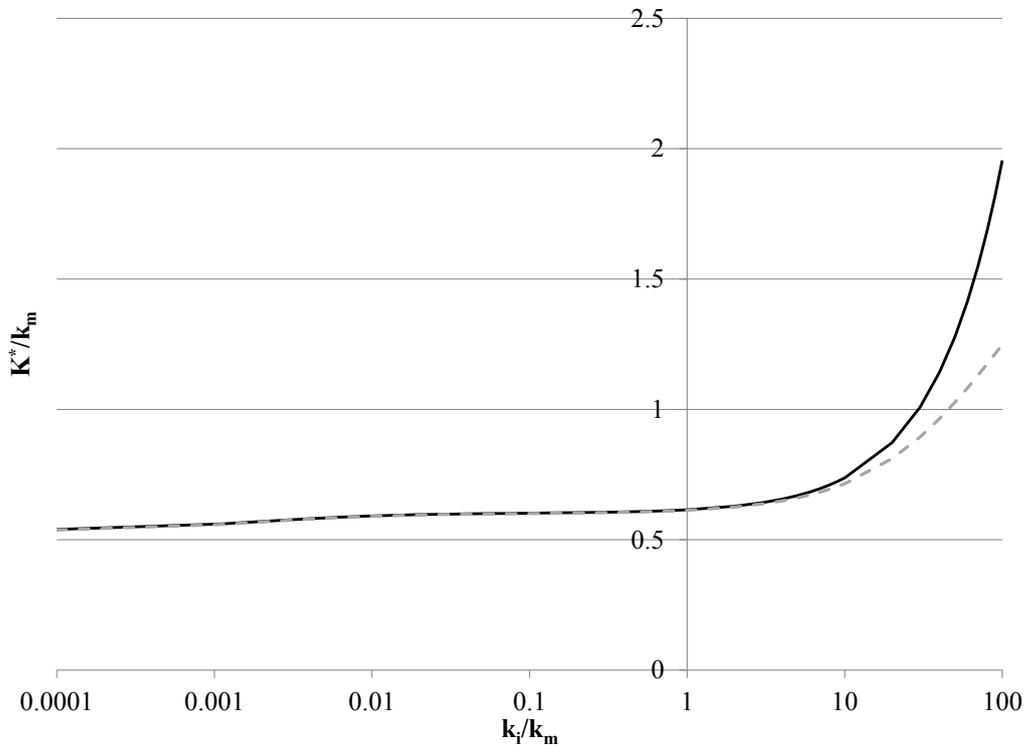
Fonte: Autor, 2013.



b) $k_m/k_f = 1$

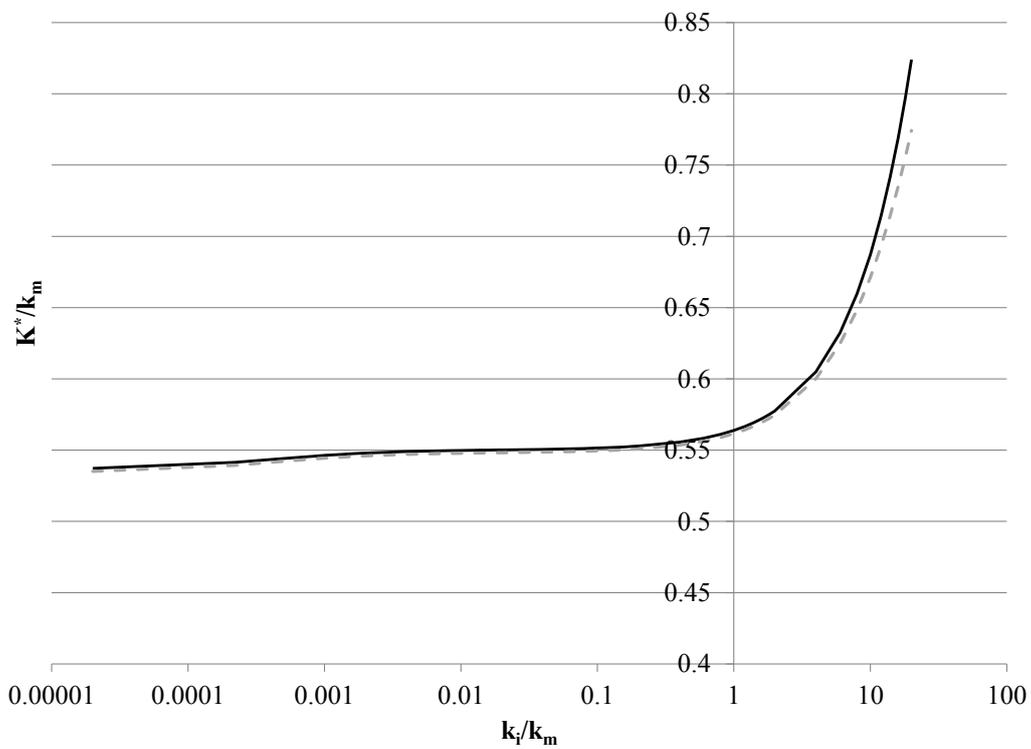
Fonte: Autor, 2013.

Figura 13 – Condutividade térmica efetiva versus condutividade térmica da interface para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 30% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita) (conclusão).



c) $k_m/k_f = 10$

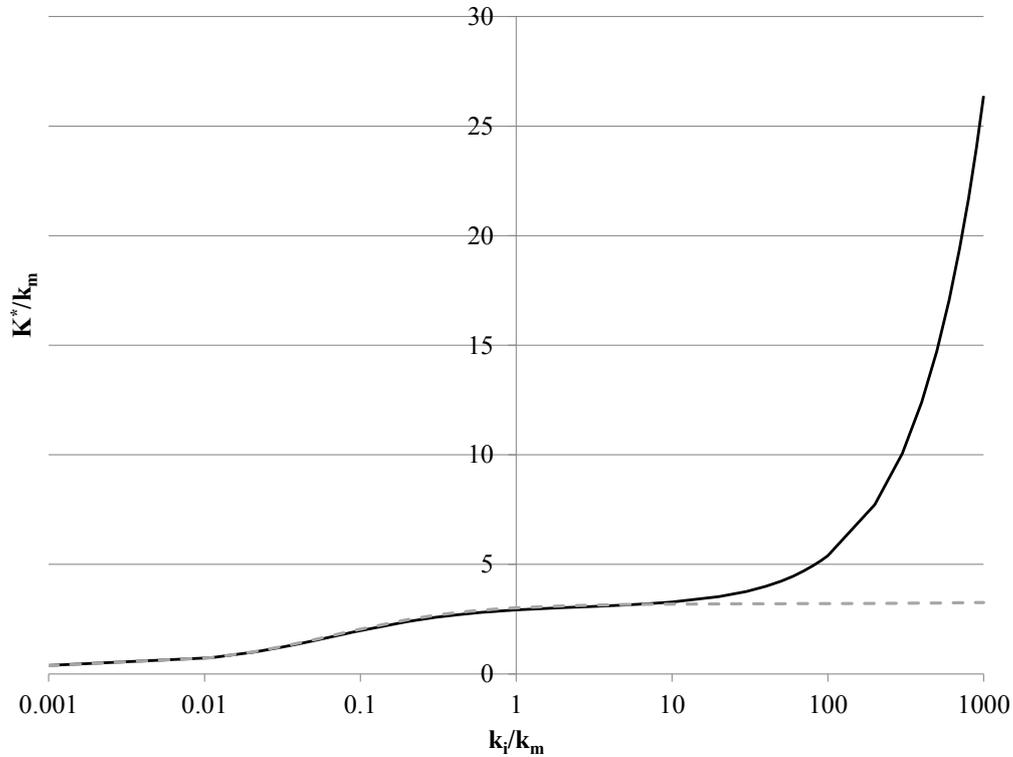
Fonte: Autor, 2013.



d) $k_m/k_f = 50$

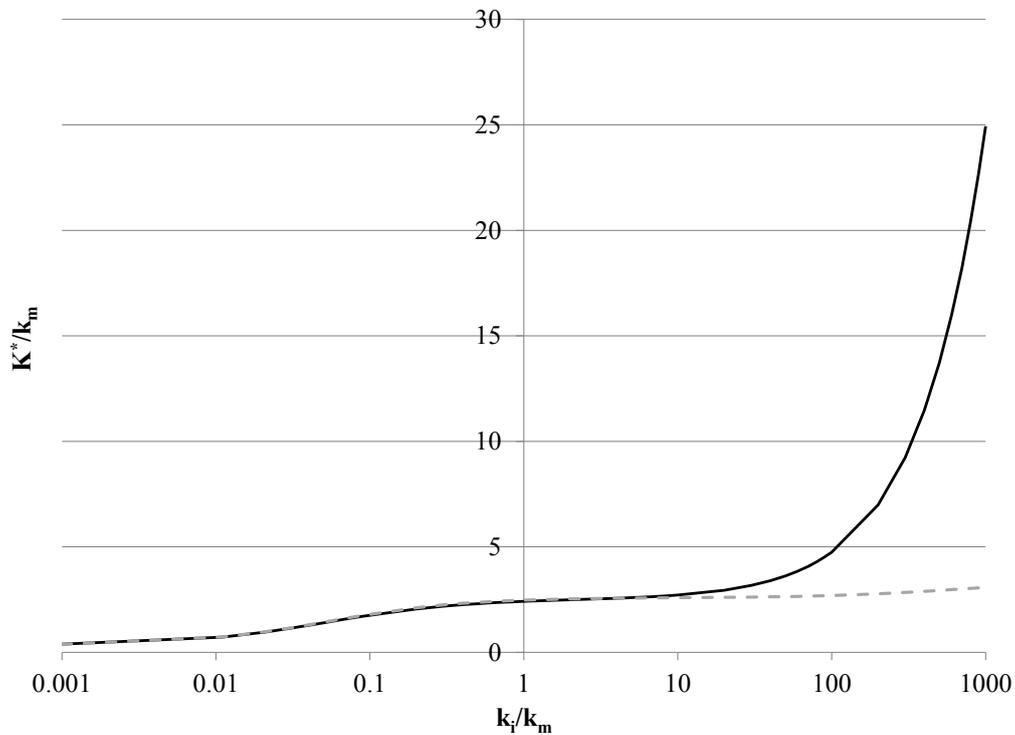
Fonte: Autor, 2013.

Figura 14 – Condutividade térmica efetiva *versus* condutividade térmica da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 50% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita) (continua).



a) $k_m/k_f = 0,02$

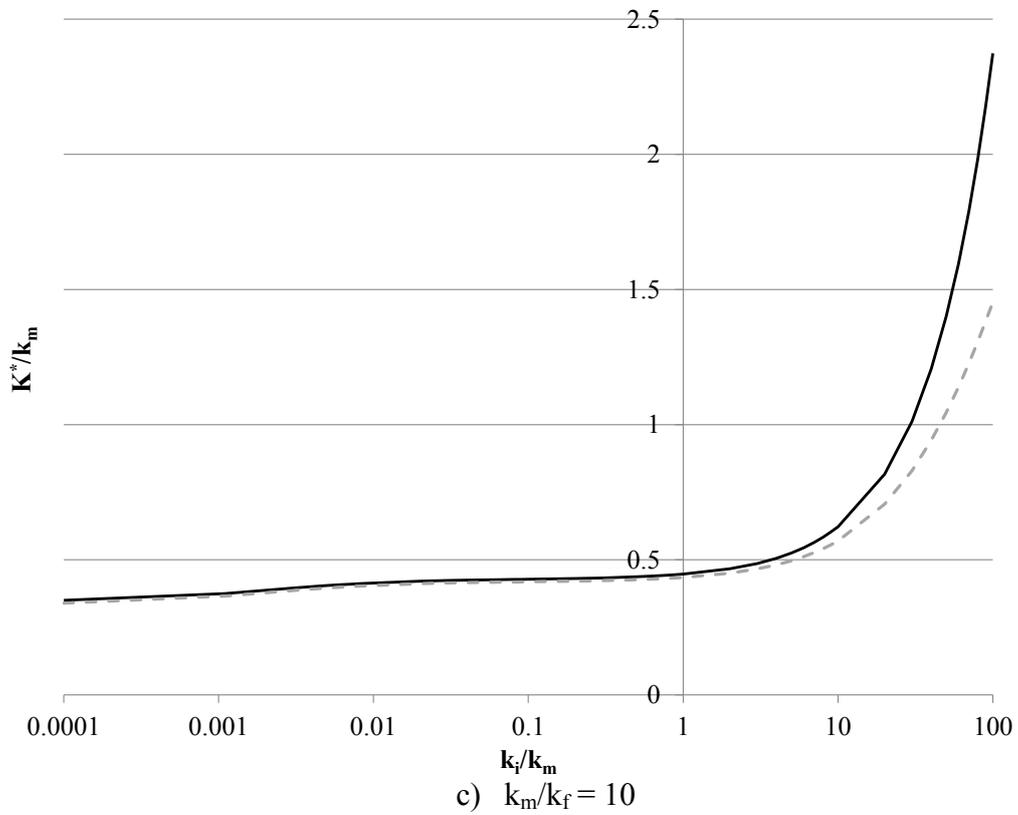
Fonte: Autor, 2013.



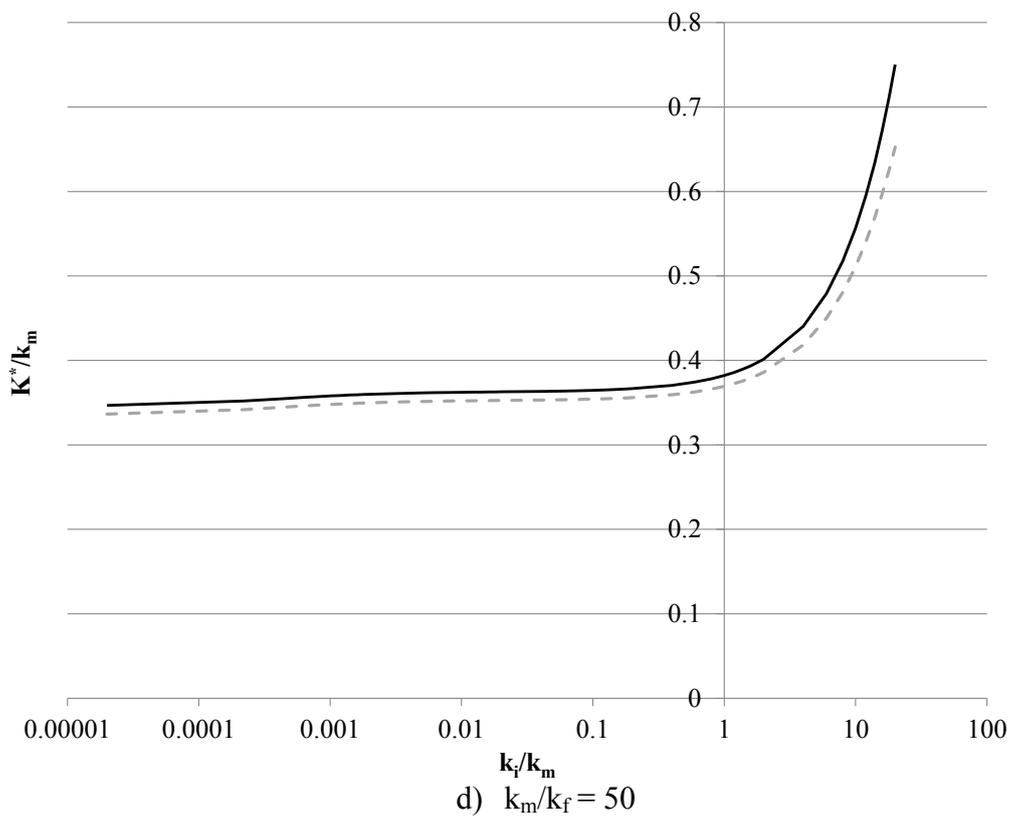
b) $k_m/k_f = 1$

Fonte: Autor, 2013.

Figura 14 – Condutividade térmica efetiva versus condutividade térmica da interface para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 50% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita) (conclusão).

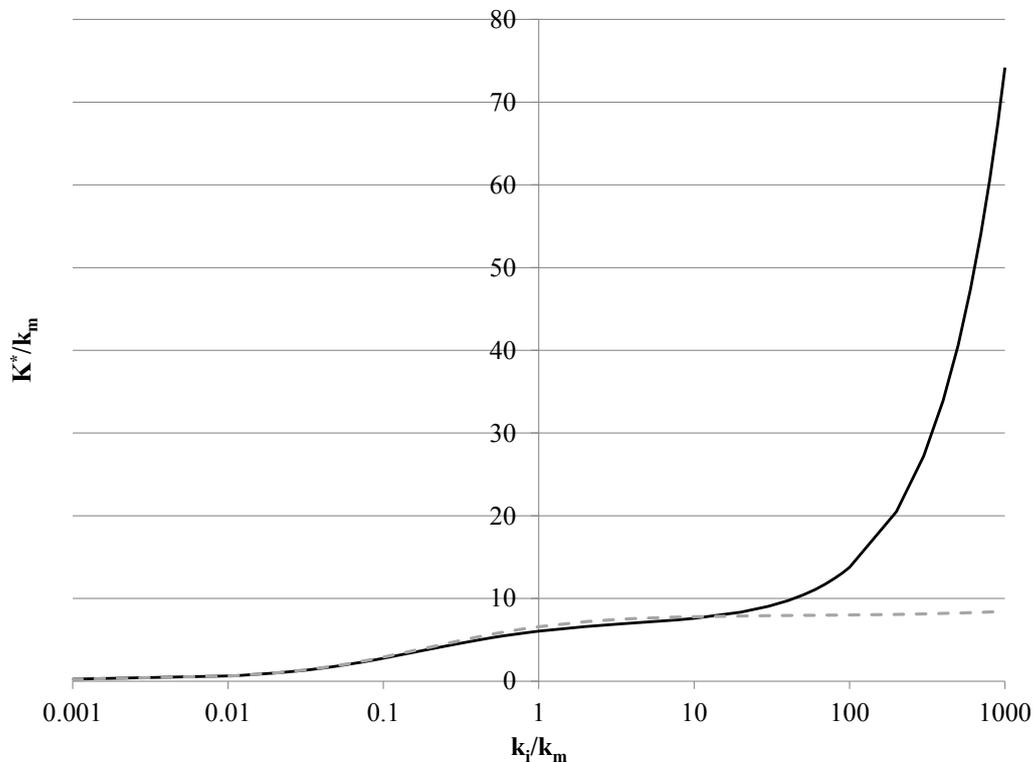


Fonte: Autor, 2013.



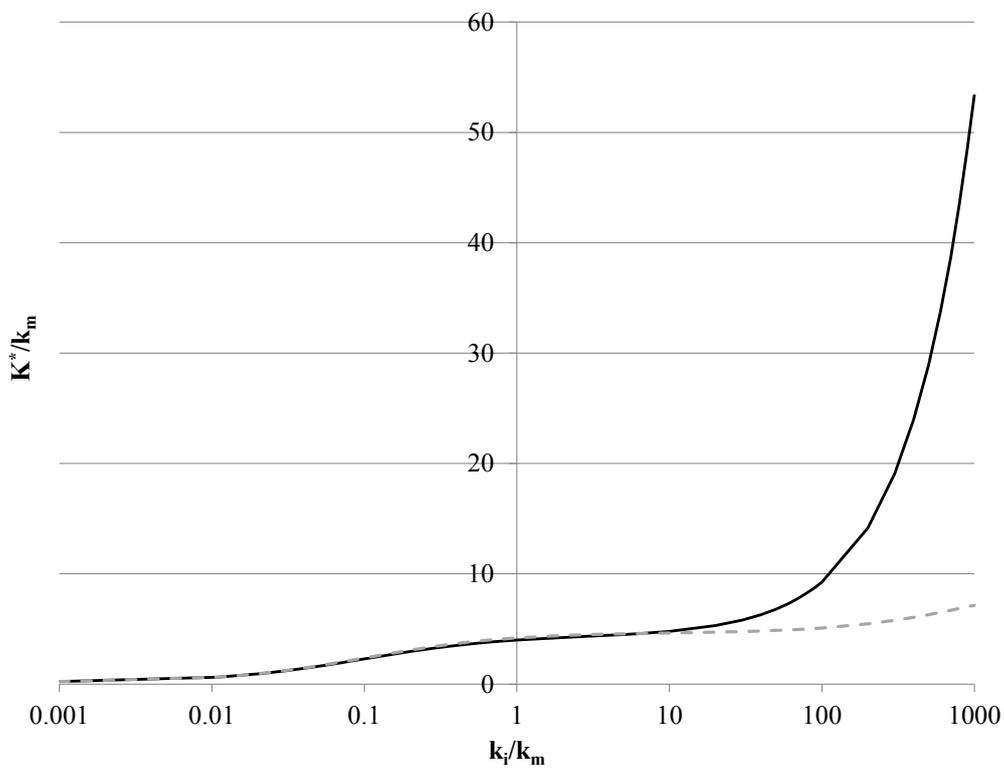
Fonte: Autor, 2013.

Figura 15 – Condutividade térmica efetiva *versus* condutividade térmica da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 70% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita) (continua).



a) $k_m/k_f = 0,02$

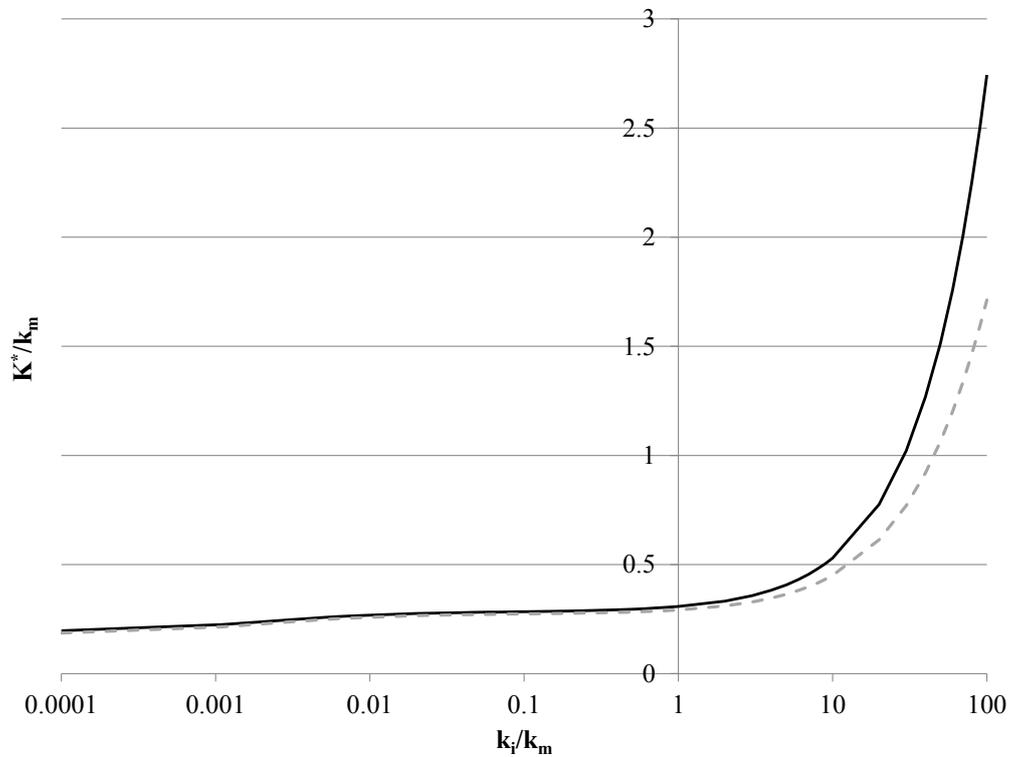
Fonte: Autor, 2013.



b) $k_m/k_f = 1$

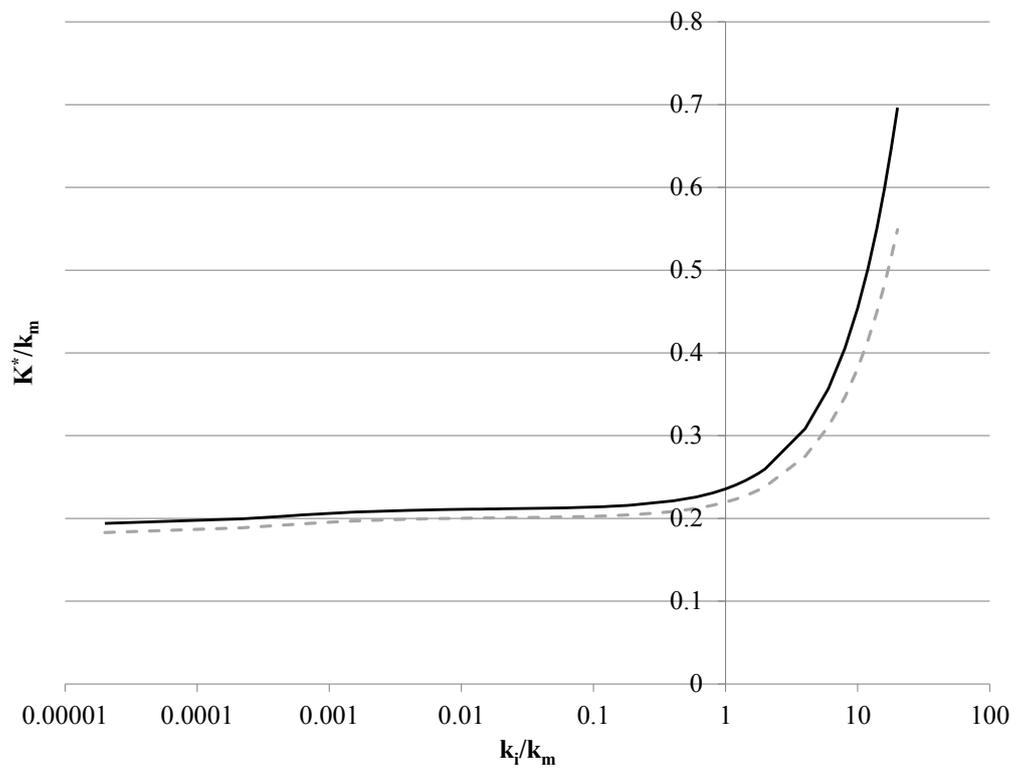
Fonte: Autor, 2013.

Figura 15 – Condutividade térmica efetiva versus condutividade térmica da interface para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 70% (linha sólida – interface imperfeita; linha tracejada – interface perfeita) (conclusão).



c) $k_m/k_f = 10$

Fonte: Autor, 2013.



d) $k_m/k_f = 50$

Fonte: Autor, 2013.

2.7.6 Homogeneização Térmica de Compósito Laminado com Microestrutura Ondulada

No presente exemplo, estuda-se um compósito multilaminado em estado plano de deformação com lâminas onduladas. Essas ondulações podem ser geradas por efeitos térmicos durante a fabricação ou, até mesmo, adicionadas intencionalmente para obter propriedades desejadas. A ondulação, aqui tratada, é definida como a razão entre a amplitude e o comprimento de onda. Assume-se constante a espessura de cada camada na direção vertical como nos trabalhos de Khatam e Pindera (2009; 2010; 2012) para homogeneização termoelástica, elasto-plástica e não linear elástica, respectivamente.

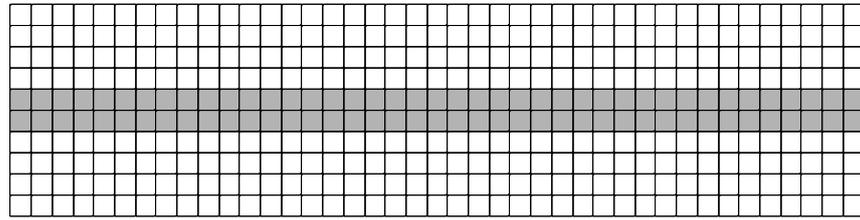
Assim como em Khatam e Pindera (2010), são considerados modelos com diferentes quantidades de camadas (*layers*), frações volumétricas e ondulações.

Em relação às camadas, são tratados compósitos com 1, 2 e 4 camadas, que tem ondulação variando entre 0, no caso de lâminas planas, e 15%, para frações volumétricas de inclusões de 20, 40 e 60%. É importante salientar que com o aumento do número de camadas ocorre a diminuição da espessura de cada camada.

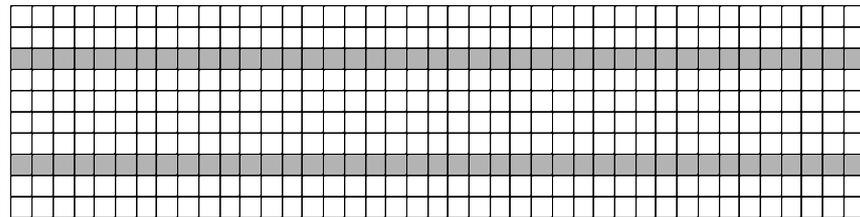
Os materiais considerados para o reforço é o carboneto de silício, com condutividade térmica $k_f = 120 \text{ W/mK}$, e para a outra fase é o alumínio, com condutividade térmica $k_m = 235 \text{ W/mK}$. Também é considerada a presença de uma interfase, para o modelo com 3 fases, e de uma interface imperfeita, para o modelo com 2 fases.

As malhas consideradas são apresentadas nas Figuras 16, 17, 18 e 19, para os casos de lâminas planas, ondulações senoidais com razões amplitude/comprimento de onda de 5%, 10% e 15%, respectivamente.

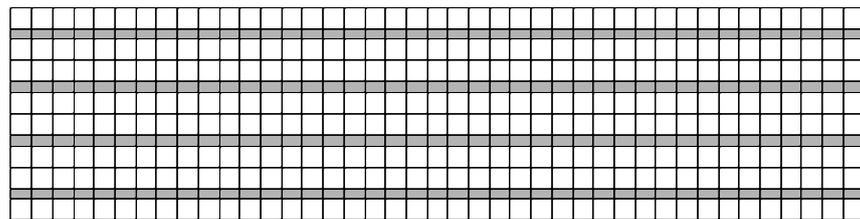
Figura 16 – Malhas para os compósitos laminados planos.



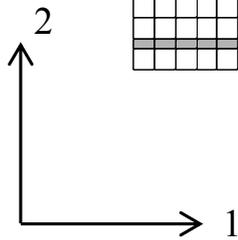
1 camada



2 camadas

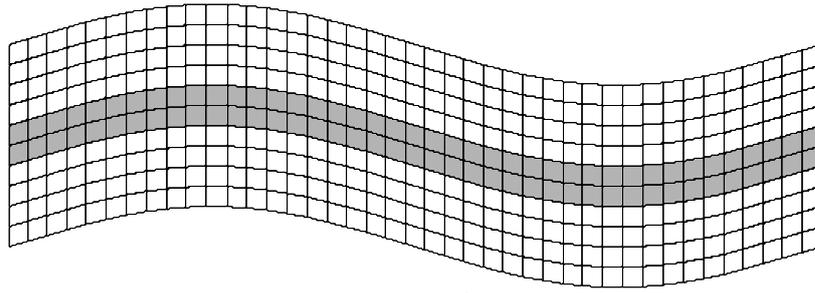


4 camadas

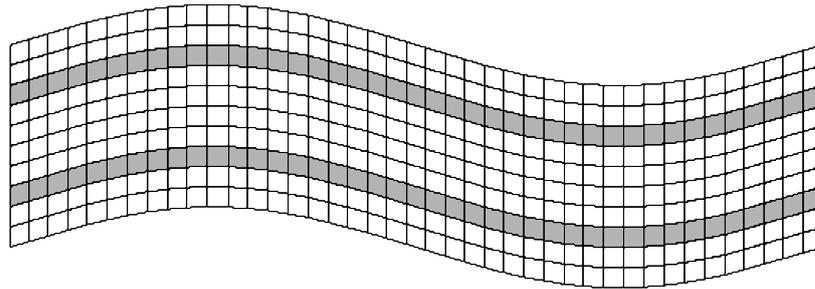


Fonte: Autor, 2013.

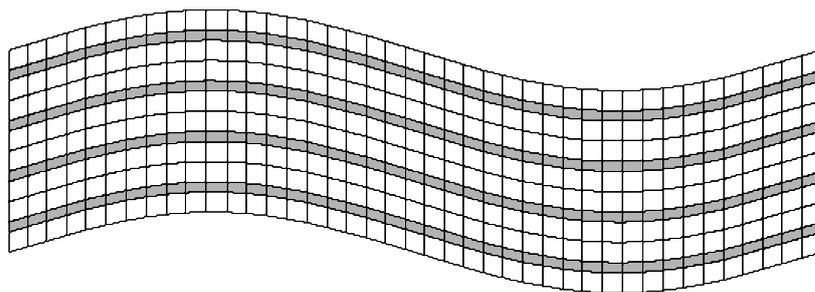
Figura 17 – Malhas para os compósitos laminados com ondulação de 5%.



1 camada



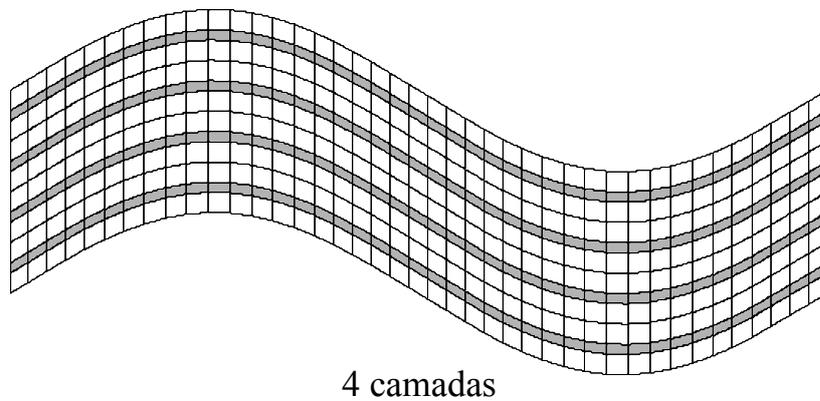
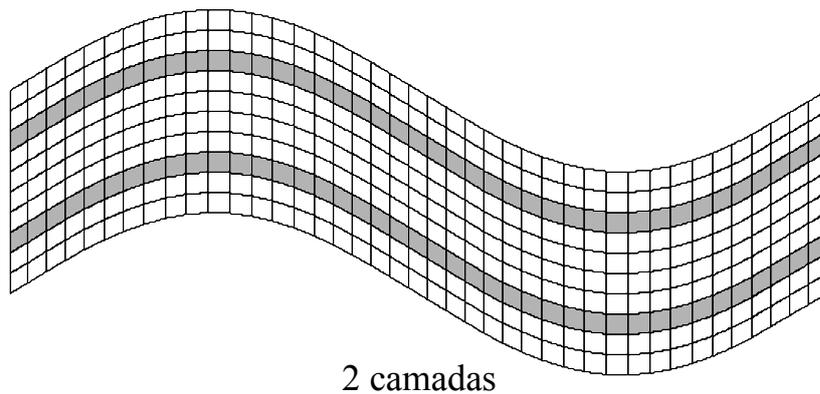
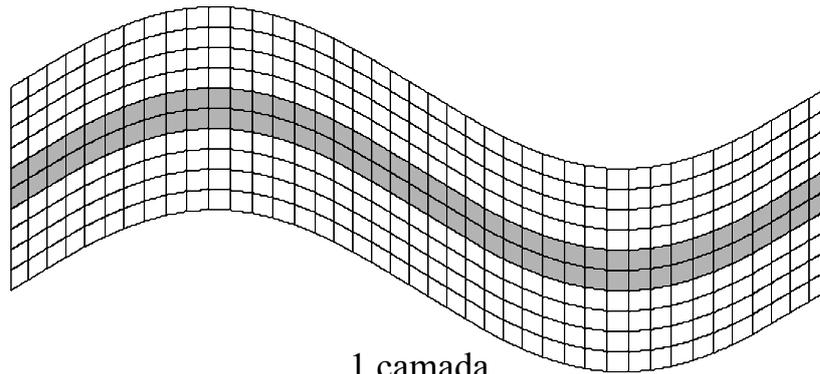
2 camadas



4 camadas

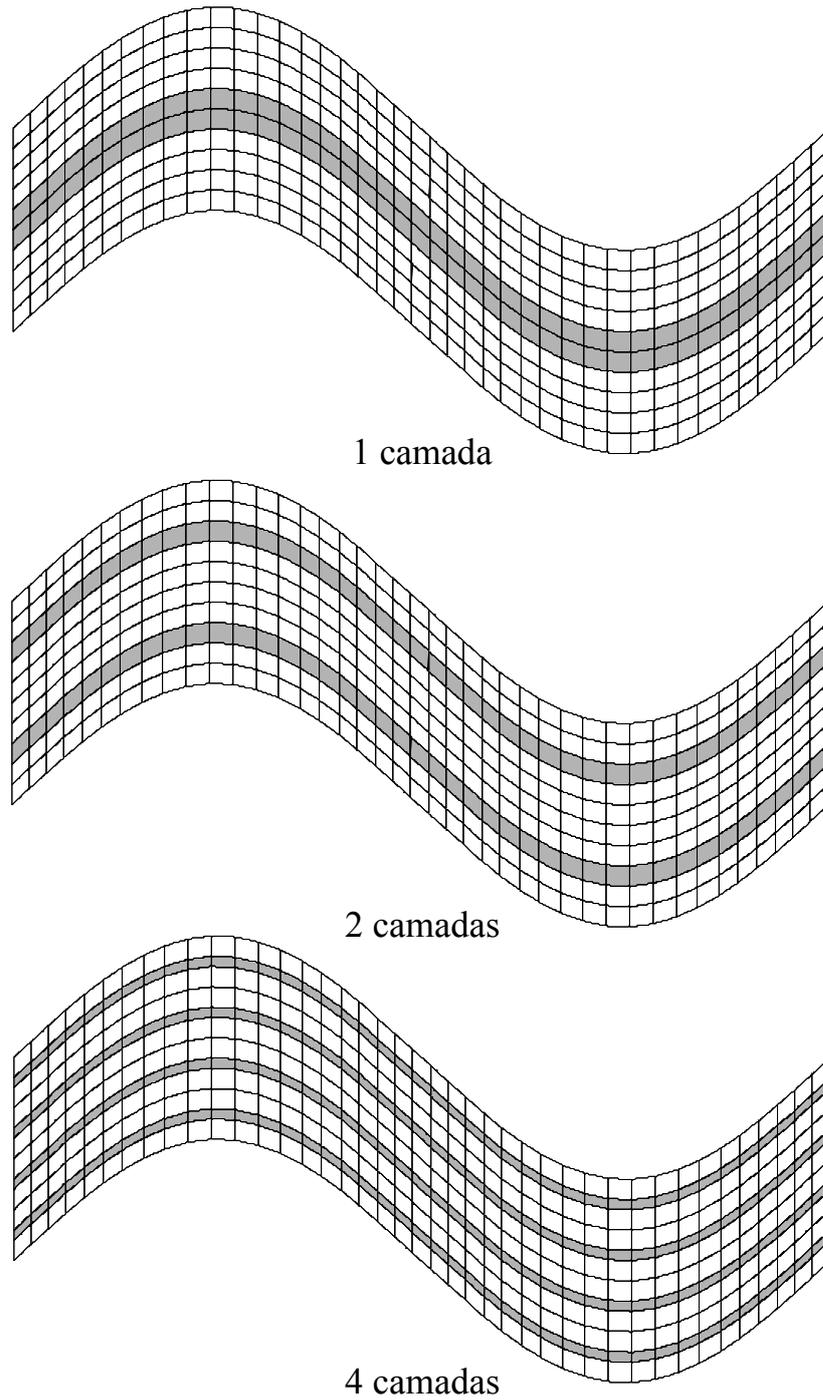
Fonte: Autor, 2013.

Figura 18 – Malhas para os compósitos laminados com ondulação de 10%.



Fonte: Autor, 2013.

Figura 19 – Malhas para os compósitos laminados com ondulação de 15%.



Fonte: Autor, 2013.

As figuras para as malhas com 40% e 60% de fração volumétrica de fibras foram omitidas.

Como primeira etapa, foi realizado o estudo de todos os modelos citados considerando-se interface perfeita entre a matriz e a fibra. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Comparação entre os resultados para o caso de 2 fases com interface perfeita.

V_f	Camadas	Laminado Plano		Senoidal 5%		Senoidal 10%		Senoidal 15%	
		K_{11}^*/k_m	K_{22}^*/k_m	K_{11}^*/k_m	K_{22}^*/k_m	K_{11}^*/k_m	K_{22}^*/k_m	K_{11}^*/k_m	K_{22}^*/k_m
20%	1	0,902	0,839	0,899	0,842	0,893	0,848	0,885	0,856
	2	0,902	0,839	0,899	0,842	0,893	0,848	0,885	0,856
	4	0,902	0,839	0,899	0,842	0,893	0,848	0,885	0,856
40%	1	0,804	0,723	0,801	0,726	0,792	0,734	0,782	0,744
	2	0,804	0,723	0,801	0,726	0,792	0,734	0,782	0,744
	4	0,804	0,723	0,801	0,726	0,792	0,734	0,782	0,744
60%	1	0,706	0,636	0,703	0,638	0,696	0,645	0,687	0,653
	2	0,706	0,636	0,703	0,638	0,696	0,645	0,687	0,653
	4	0,706	0,635	0,703	0,638	0,695	0,645	0,687	0,653

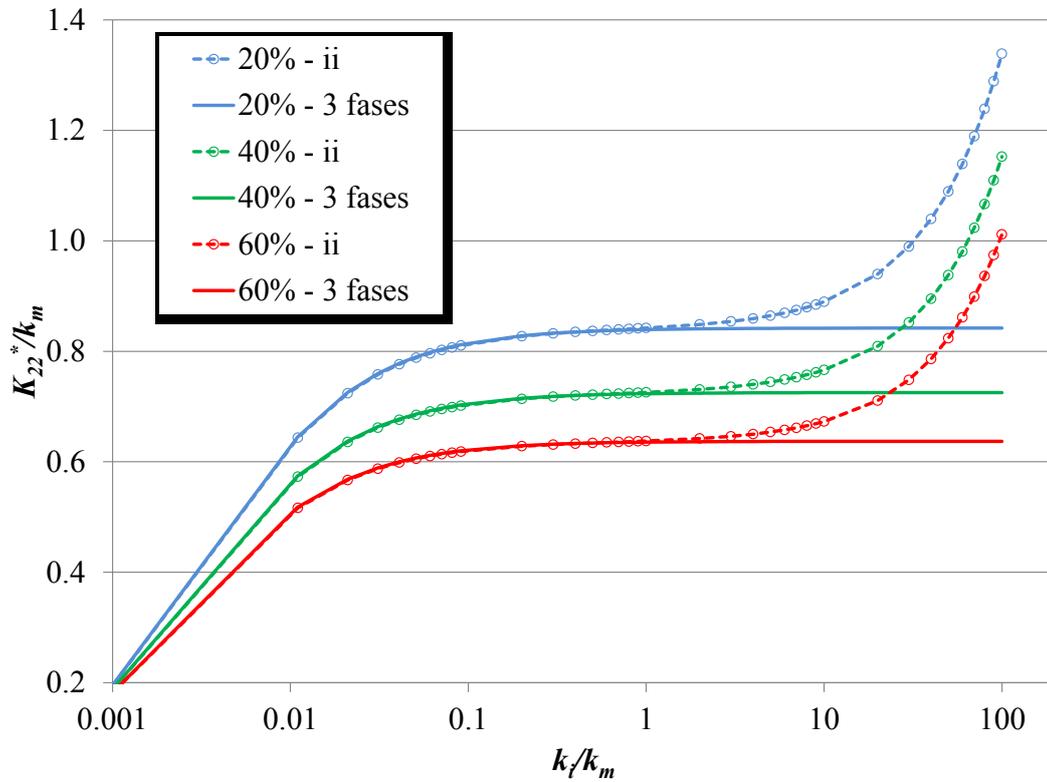
Fonte: Autor, 2013.

Para o caso plano, a variação da quantidade de lâminas não gera alteração nas propriedades efetivas K_{11}^*/k_m e K_{22}^*/k_m dentro da mesma fração volumétrica. Percebe-se também que à medida que se desloca para a direita e para baixo na propriedade efetiva 11 seu valor diminui, eixo horizontal, enquanto as propriedades 22, eixo vertical, aumentam para a direita e diminuem para baixo, podendo-se afirmar que o aumento de camadas reduz a condutividade efetiva do compósito laminado nas duas direções no plano, enquanto o aumento da ondulação para o mesmo número de camadas e mesma fração volumétrica resulta em aumento da condutividade térmica efetiva na direção perpendicular ao desenvolvimento da ondulação. Isso se deve ao fato de que nesta direção não existem caminhos contínuos de mesmo material, necessitando, assim, que o fluxo de calor atravesse várias vezes as camadas de maior condutividade.

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para os compósitos com a incorporação de uma terceira camada entre as camadas anteriormente citadas. Essa camada de espessura vertical constante $h = 20 \text{ nm}$ é conhecida como interfase. O estudo do compósito com interface imperfeita também é realizado, buscando-se comparar o comportamento das propriedades efetivas em função da variação da condutividade térmica da interfase/interface.

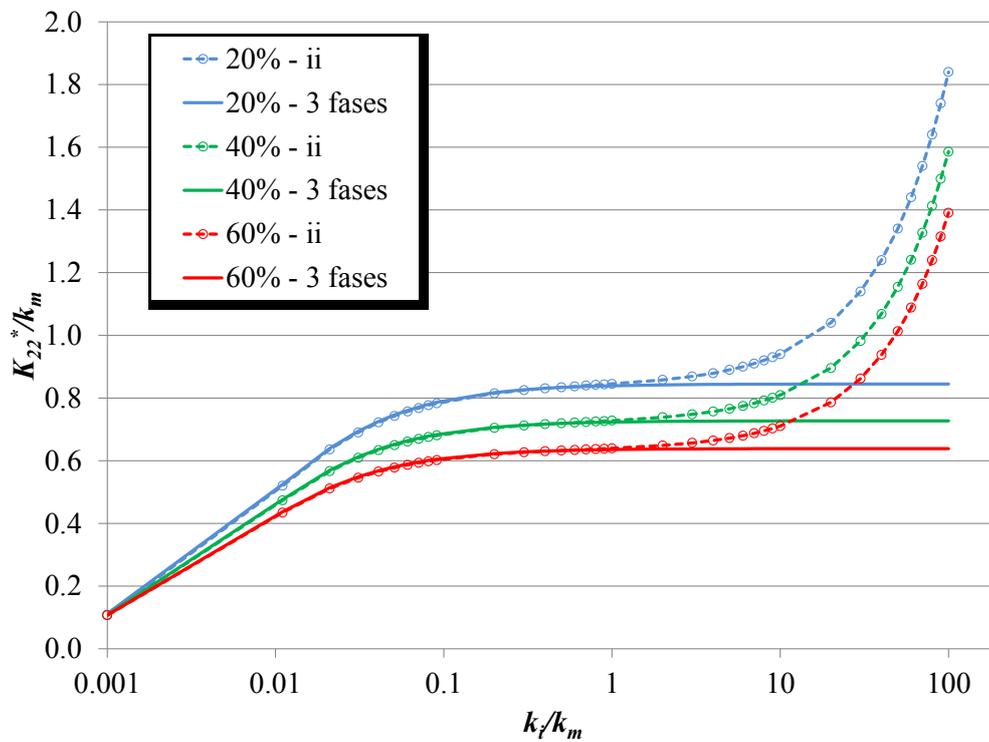
As Figuras 20, 21, 22 e 24 mostram os resultados de condutividade térmica efetiva transversal normalizada (K_{22}^*/k_m) para os modelos com interfase e interfaces imperfeitas (ii) para 1, 2 e 4 camadas, respectivamente.

Figura 20 – Condutividade efetiva para o modelo com lâminas planas. (continua)



a) Laminado plano com 1 camada.

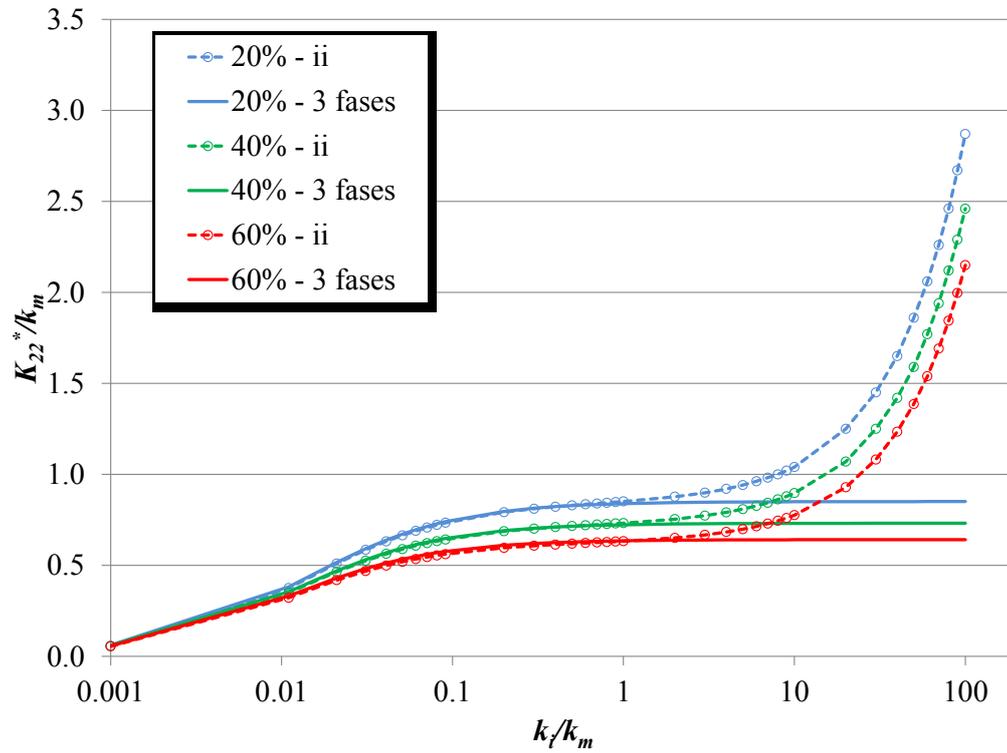
Fonte: Autor, 2013.



b) Laminado plano com 2 camadas.

Fonte: Autor, 2013.

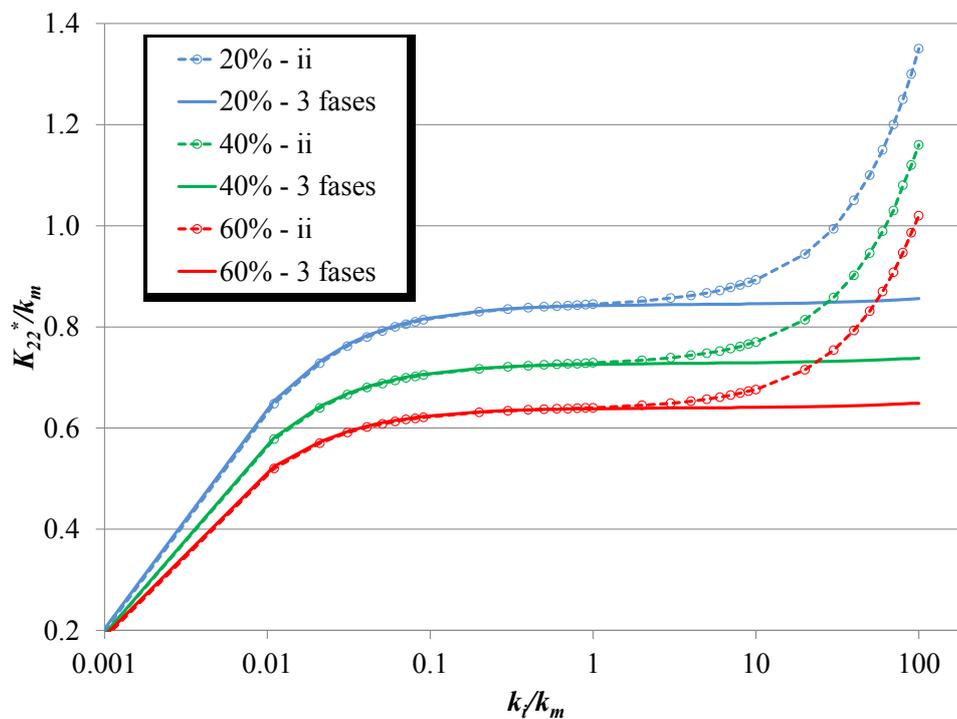
Figura 20 – Condutividade efetiva para o modelo com lâminas planas. (conclusão).



c) Laminado plano com 4 camadas.

Fonte: Autor, 2013.

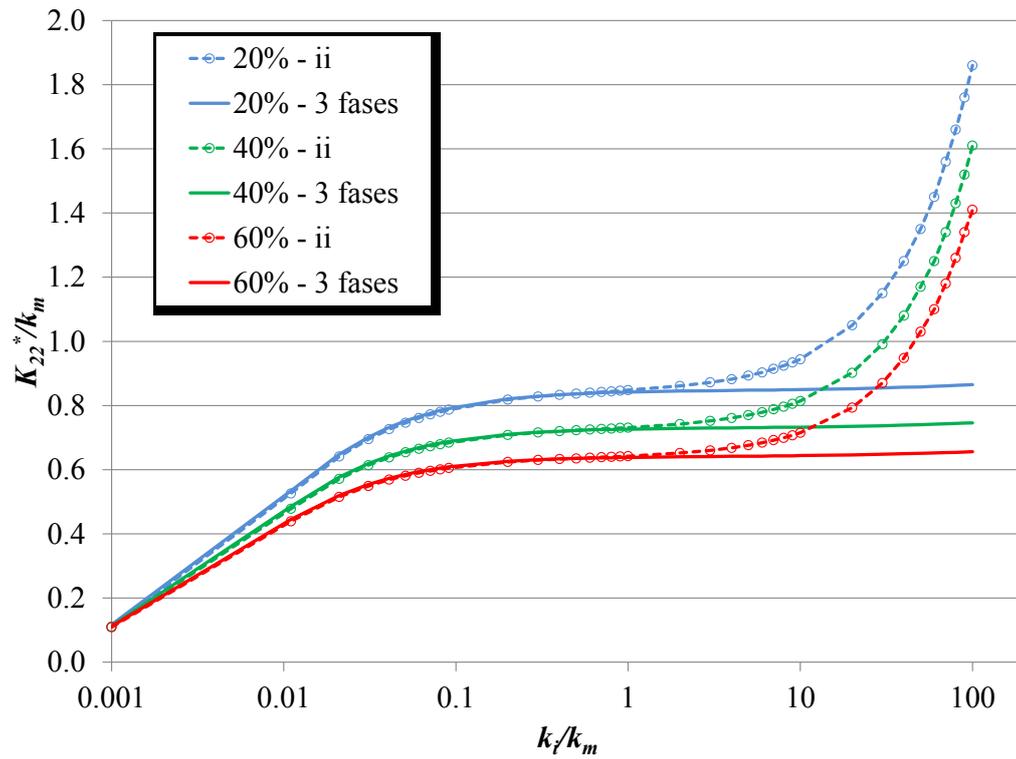
Figura 21 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 5%. (continua).



a) Laminado com 5% de ondulação com 1 camada.

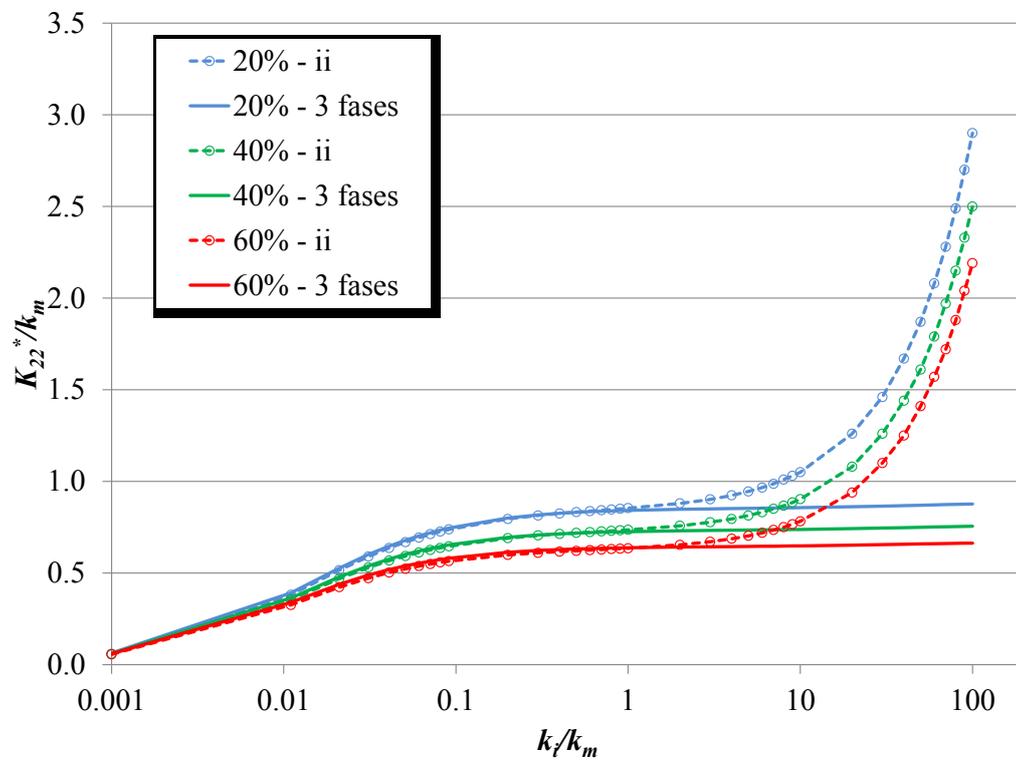
Fonte: Autor, 2013.

Figura 21 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 5%. (conclusão).



b) Laminado com 5% de ondulação com 2 camadas.

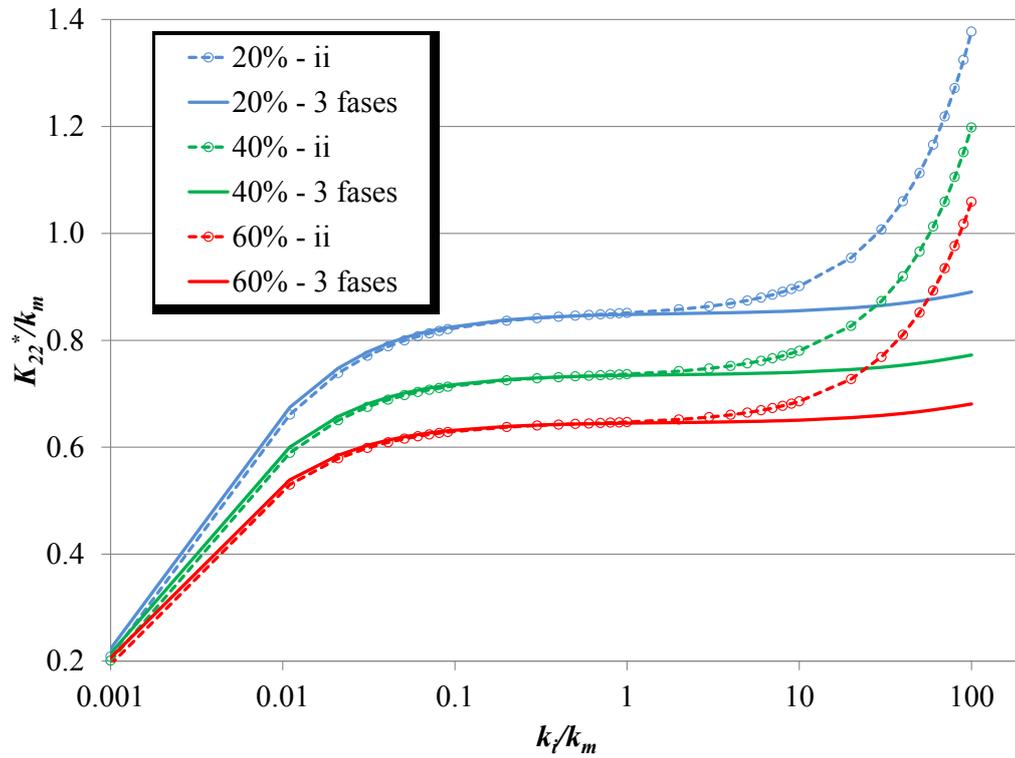
Fonte: Autor, 2013.



c) Laminado com 5% de ondulação com 4 camadas.

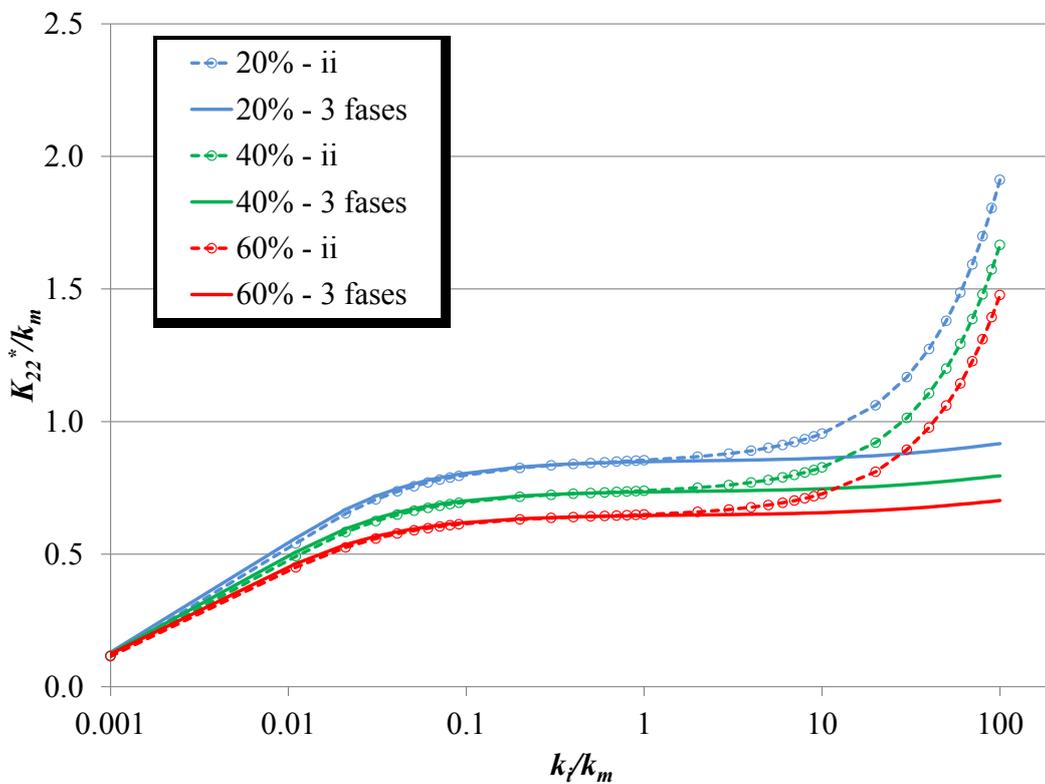
Fonte: Autor, 2013.

Figura 22 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 10%. (continua)



a) Laminado com 10% de ondulação com 1 camada.

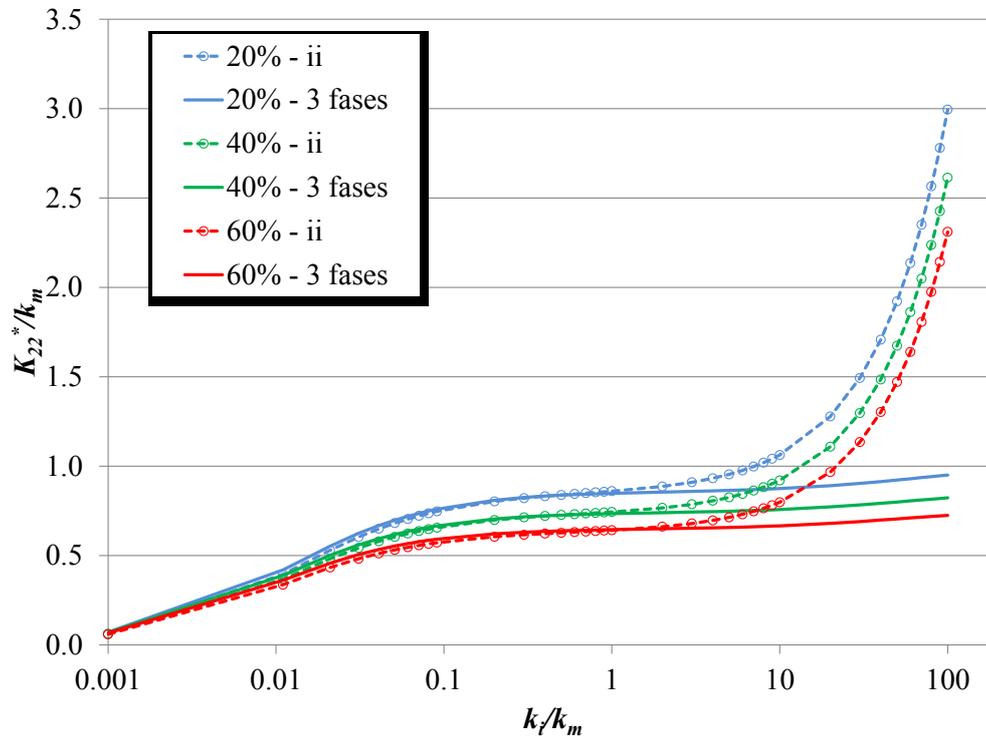
Fonte: Autor, 2013.



b) Laminado com 10% de ondulação com 2 camadas.

Fonte: Autor, 2013.

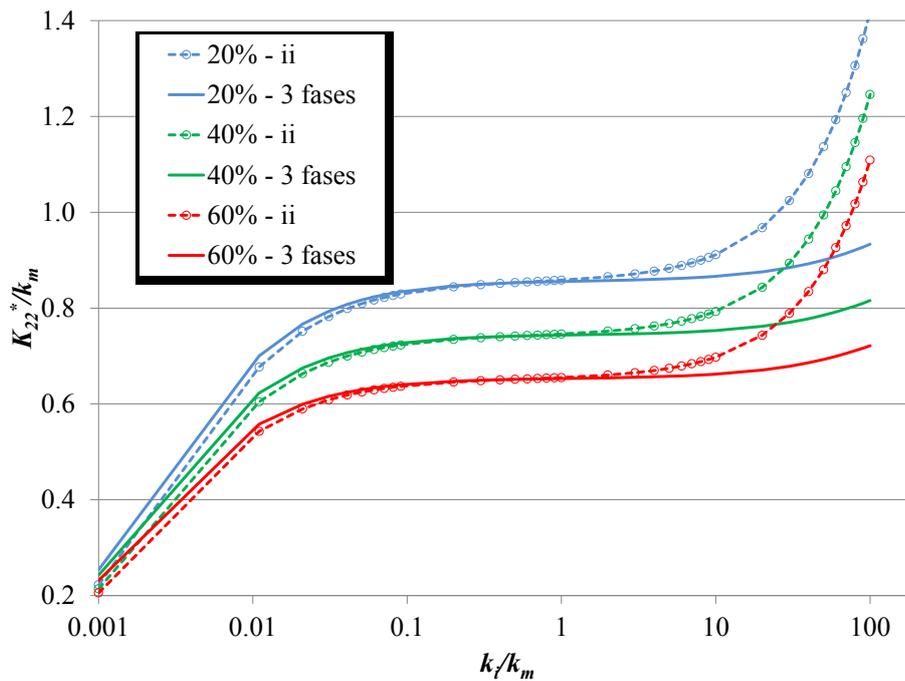
Figura 23 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 10%. (conclusão)



c) Laminado com 10% de ondulação com 4 camadas.

Fonte: Autor, 2013.

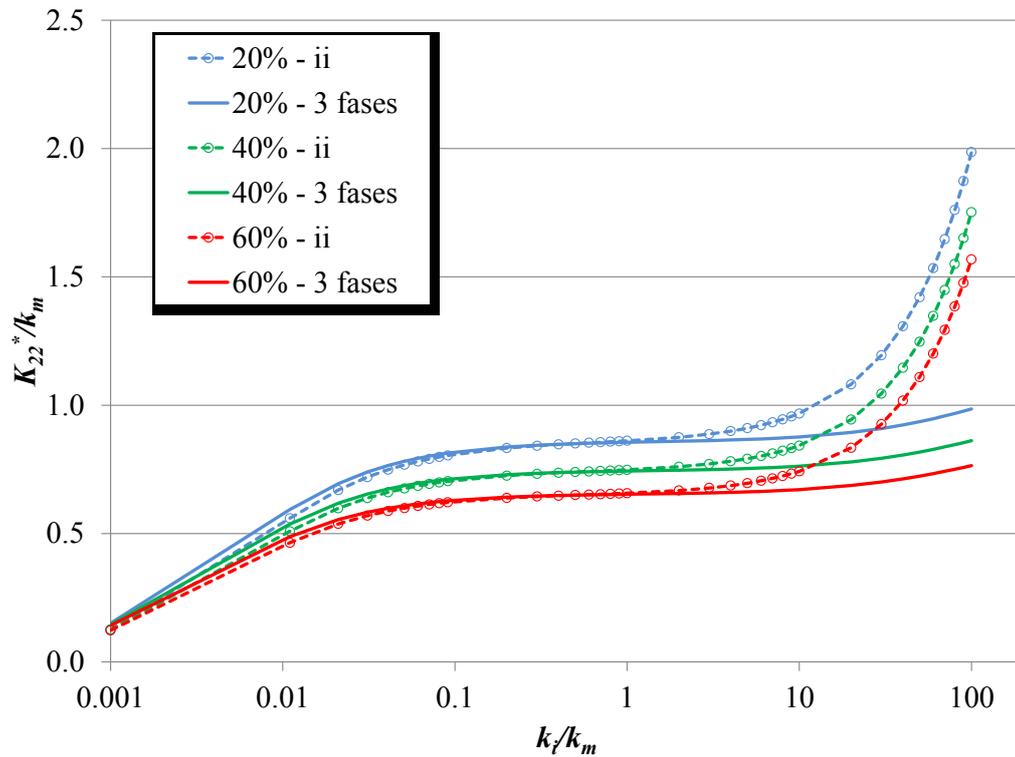
Figura 24 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 15%. (continua)



a) Laminado com 15% de ondulação com 1 camada.

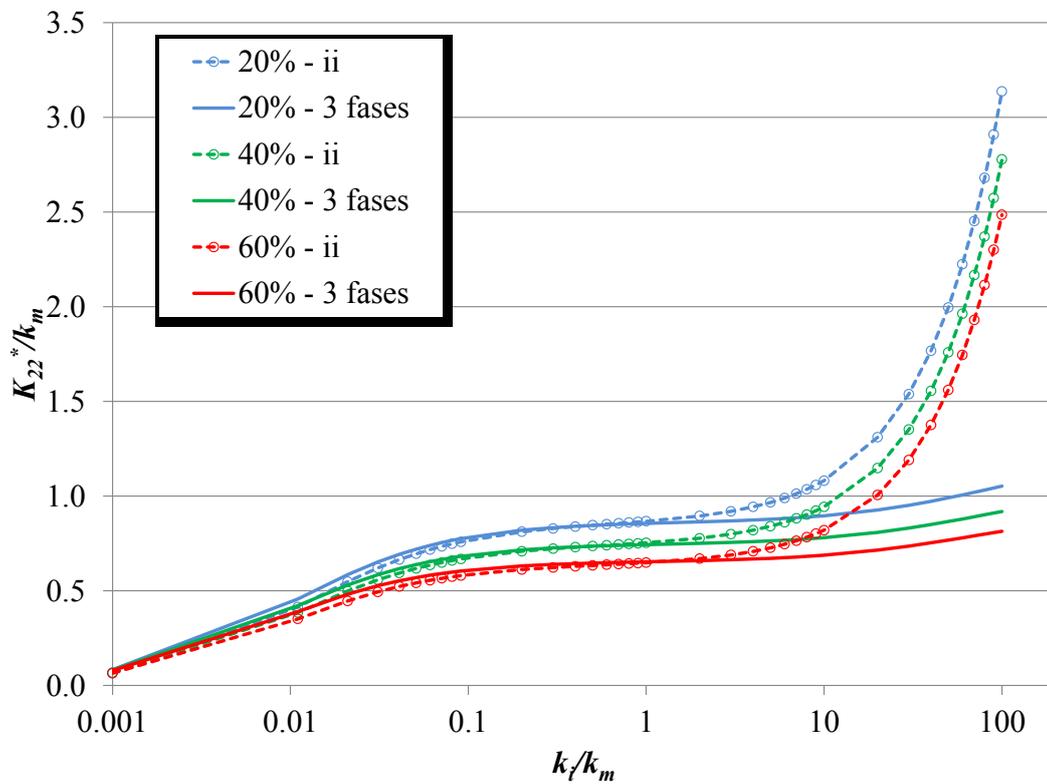
Fonte: Autor, 2013.

Figura 23 – Condutividade efetiva para o modelo com ondulação de 15%. (conclusão).



b) Laminado com 15% de ondulação com 2 camadas.

Fonte: Autor, 2013.



c) Laminado com 15% de ondulação com 4 camadas.

Fonte: Autor, 2013.

Assim como nos exemplos anteriores para compósitos com inclusões uniaxiais, o comparativo entre os modelos com 3 fases e interface imperfeita apresentam o mesmo comportamento, existindo um afastamento entre as curvas para $k_i/k_m > 1$.

Objetivando um melhor entendimento dos resultados anteriores, encontra-se a seguir a Tabela 2, que mostra as respostas para o caso de interface imperfeita para alguns valores de k_i/k_m .

Tabela 2 – Comparação entre os resultados para interface imperfeita.

k_i/k_m	Camadas/%	Laminado plano			Senoidal 5%			Senoidal 10%			Senoidal 15%		
		20	40	60	20	40	60	20	40	60	20	40	60
0,001	1	0,20	0,19	0,18	0,20	0,19	0,19	0,21	0,20	0,19	0,22	0,21	0,21
	2	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,11	0,13	0,13	0,12
	4	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,06
1	1	0,84	0,73	0,64	0,85	0,73	0,64	0,85	0,74	0,65	0,86	0,75	0,66
	2	0,85	0,73	0,64	0,85	0,73	0,64	0,85	0,74	0,65	0,86	0,75	0,66
	4	0,85	0,73	0,63	0,85	0,74	0,64	0,86	0,74	0,64	0,87	0,75	0,65
10	1	0,89	0,77	0,67	0,89	0,77	0,68	0,90	0,78	0,69	0,91	0,79	0,70
	2	0,94	0,81	0,71	0,94	0,81	0,72	0,96	0,83	0,73	0,97	0,84	0,74
	4	1,04	0,90	0,78	1,05	0,90	0,78	1,06	0,92	0,80	1,08	0,94	0,82
100	1	1,34	1,15	1,01	1,35	1,16	1,02	1,38	1,20	1,06	1,42	1,25	1,11
	2	1,84	1,59	1,39	1,86	1,61	1,41	1,91	1,67	1,48	1,99	1,75	1,57
	4	2,87	2,46	2,15	2,90	2,50	2,19	2,99	2,61	2,31	3,14	2,78	2,49

Fonte: Autor, 2013.

Como exposto anteriormente, a interface imperfeita utilizada neste trabalho apresenta restrições de uso para interfaces com condutividade térmica muito maior que as condutividades das outras fases do compósito. Dessa forma, no estudo da variação da condutividade térmica da interface é verificado um afastamento entre as curvas para os modelos com interface imperfeita e interface, no qual $k_i \gg k_f, k_m$. No presente exemplo, observou-se que para k_i/k_m aproximadamente igual a 3,0 a diferença percentual entre as curvas é maior ou igual a 1%.

3 PROPRIEDADES TERMOELÁSTICAS EFETIVAS

Nesta seção serão apresentadas as formulações para obtenção das propriedades termoelásticas efetivas de compósitos com a incorporação de interface imperfeita elástica, através da teoria dos volumes finitos.

3.1 Formulação bidimensional da versão paramétrica da teoria dos volumes finitos

A seguir serão apresentadas, de forma sucinta, as equações para obtenção das propriedades homogeneizadas através da versão paramétrica da teoria dos volumes finitos, uma vez que a mesma pode ser consultada em sua totalidade no trabalho de Gattu et al. (2008).

Na versão paramétrica da teoria dos volumes finitos, o campo de deslocamentos em cada subvolume de uma célula unitária periódica pode ser representado pelo uso de uma expansão em duas escalas envolvendo componentes macroscópicas e de flutuação, como segue

$$u_i^{(k)} = \bar{\varepsilon}_{ij} x_j + \tilde{u}_i^{(k)} \quad (3.1)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{ij}$ são as deformações macroscópicas, x_j são as coordenadas globais e $\tilde{u}_i^{(k)}$ são os campos flutuantes de deslocamentos locais no interior do subvolume k . As componentes de deslocamentos flutuantes, na TVF, são aproximadas por uma expansão polinomial de segunda ordem de Legendre em termos das coordenadas paramétricas, da seguinte forma

$$\tilde{u}_i^{(k)} = \tilde{U}_{i(00)}^k + \eta \tilde{U}_{i(10)}^k + \xi \tilde{U}_{i(01)}^k + \frac{1}{2} (3\eta^2 - 1) \tilde{U}_{i(20)}^k + \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1) \tilde{U}_{i(02)}^k \quad (3.2)$$

onde $\tilde{U}_{i(mn)}^k$ são os coeficientes desconhecidos na direção i para o subvolume k . Tais coeficientes são determinados satisfazendo-se a continuidade interfacial e as condições de periodicidade no interior e nas bordas do subvolume em termos médios juntamente com a aplicação das equações diferenciais de equilíbrio (3.3).

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial y_j} = 0 \quad (3.3)$$

Derivando-se os campos de deslocamentos dados pela Equação (3.2) em função das coordenadas paramétricas (η e ξ) e calculando os valores médios dessas derivadas nas faces do subvolumen, obtêm-se as derivadas médias dos deslocamentos, para a direção fora do plano de análise, de acordo com as seguintes relações (GATTU et al., 2008):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{1(10)} \\ \tilde{U}_{1(01)} \\ \tilde{U}_{1(20)} \\ \tilde{U}_{1(02)} \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{1(10)} \\ \tilde{U}_{1(01)} \\ \tilde{U}_{1(20)} \\ \tilde{U}_{1(02)} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

No plano, tem-se a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{2(10)} \\ \tilde{U}_{2(01)} \\ \tilde{U}_{2(20)} \\ \tilde{U}_{2(02)} \\ \tilde{U}_{3(10)} \\ \tilde{U}_{3(01)} \\ \tilde{U}_{3(20)} \\ \tilde{U}_{3(02)} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{2(10)} \\ \tilde{U}_{2(01)} \\ \tilde{U}_{2(20)} \\ \tilde{U}_{2(02)} \\ \tilde{U}_{3(10)} \\ \tilde{U}_{3(01)} \\ \tilde{U}_{3(20)} \\ \tilde{U}_{3(02)} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

A relação entre as derivadas dos deslocamentos nas faces dos subvolume para os sistemas de eixos cartesiano e paramétrico pode ser obtida utilizando-se a seguinte relação

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_3} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=1,2,3,4} = [\bar{\mathbf{J}}] \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=1,2,3,4} \quad (3.8)$$

onde $[\bar{\mathbf{J}}]$ é a inversa da matriz Jacobiana.

É possível relacionar as deformações médias nas faces com os gradientes médios do campo de deslocamentos para fora do plano de análise de acordo com a seguinte expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \gamma_{12} \rangle \\ \langle \gamma_{13} \rangle \end{array} \right\}_{f=1,2,3,4} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma}_{12} \\ \bar{\gamma}_{13} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y_3} \right\rangle \end{array} \right\}_{f=1,2,3,4} \quad (3.9)$$

Para o plano, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle \\ \langle \gamma_{23} \rangle \end{array} \right\}_{f=1,2,3,4} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ \bar{\gamma}_{23} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y_2} \rangle \\ \langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y_3} \rangle \\ \langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y_2} \rangle \\ \langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y_3} \rangle \end{array} \right\}_{f=1,2,3,4} \quad (3.10)$$

Utilizando-se a fórmula de Cauchy, a lei de Hooke (3.12) e as relações cinemáticas entre deslocamentos e deformações, dadas respectivamente por:

$$t_i^{(k)} = \sigma_{ji}^{(k)} n_j^{(k)} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijkl}^{(k)} \varepsilon_{kl}^{(k)} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{kl}^{(k)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^{(k)}}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^{(k)}}{\partial y_i} \right) \quad (3.13)$$

obtem-se a relação entre o vetor de tensão e as componentes do tensor de deformação macroscópica e os coeficientes do campo de deslocamentos do subvolume, como segue

$$\{\langle \mathbf{t} \rangle\} = [\mathbf{N}][\mathbf{C}]\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} + [\bar{\mathbf{A}}]\{\mathbf{U}\} \quad (3.14)$$

Nesta última expressão, $\{\langle \mathbf{t} \rangle\} = \{\langle \mathbf{t} \rangle_{f=1} \quad \langle \mathbf{t} \rangle_{f=2} \quad \langle \mathbf{t} \rangle_{f=3} \quad \langle \mathbf{t} \rangle_{f=4}\}^T$, $[\mathbf{N}] = \{\mathbf{n}_{f=1} \quad \mathbf{n}_{f=2} \quad \mathbf{n}_{f=3} \quad \mathbf{n}_{f=4}\}^T$, $[\mathbf{C}]$ é a matriz constitutiva do material e $[\bar{\mathbf{A}}]$ encontra-se no Apêndice D. Para o caso das componentes de tensões fora do plano

$$\langle \mathbf{t} \rangle_{f=i} = \{\langle t_1 \rangle_{f=i}\} \quad (3.15)$$

$$\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \{\bar{\gamma}_{12} \quad \bar{\gamma}_{13}\}^T \quad (3.16)$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{66} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\{\mathbf{U}\} = \{\tilde{U}_{1(10)} \quad \tilde{U}_{1(01)} \quad \tilde{U}_{1(20)} \quad \tilde{U}_{1(02)}\}^T \quad (3.18)$$

$$\mathbf{n}_{f=i} = \{n_2 \quad n_3\}_{f=i} \quad (3.19)$$

Em relação às componentes no plano, tem-se

$$\langle \mathbf{t} \rangle_{f=i} = \{\langle \mathbf{t}_2 \rangle \quad \langle \mathbf{t}_3 \rangle\}_{f=i} \quad (3.20)$$

$$\{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\} = \{\bar{\epsilon}_{11} \quad \bar{\epsilon}_{22} \quad \bar{\epsilon}_{33} \quad \bar{\gamma}_{23}\}^T \quad (3.21)$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\{\mathbf{U}\} = \{\tilde{U}_{2(10)} \quad \tilde{U}_{2(01)} \quad \tilde{U}_{2(20)} \quad \tilde{U}_{2(02)} \quad \tilde{U}_{3(10)} \quad \tilde{U}_{3(01)} \quad \tilde{U}_{3(20)} \quad \tilde{U}_{3(02)}\}^T \quad (3.23)$$

$$\mathbf{n}_{f=i} = \begin{Bmatrix} n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_3 & n_2 \end{Bmatrix}_{f=i} \quad (3.24)$$

Considerando-se que os coeficientes $\{\mathbf{U}\}$ ainda são desconhecidos, faz-se necessário o uso das equações de equilíbrio, que podem ser as equações diferenciais de equilíbrio ou, equivalentemente, as equações de equilíbrio de força nas faces do subvolume.

3.2 Obtenção das matrizes de rigidez local e global

Substituindo-se os coeficientes $[\mathbf{U}]$, que foram determinados através das equações diferenciais de equilíbrio (Equação (3.3)) na Equação (3.14), encontra-se na forma genérica a seguinte equação para carregamento no plano e fora do plano

$$\{\langle \mathbf{t} \rangle\} = [\mathbf{N}][\mathbf{C}]\{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}\} + [\mathbf{K}_L]\{\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle\} \quad (3.25)$$

onde $[\mathbf{K}_L]$ é a matriz de rigidez local.

Percebe-se que a matriz de rigidez local relaciona os vetores de tensão atuantes nas faces locais do k -ésimo subvolumen com as correspondentes componentes de deslocamentos médios. Cada uma dessas faces do subvolumen tem um identificador global, que é comum a dois subvolumenes adjacentes. Para a montagem da matriz de rigidez global aplicam-se condições de continuidade em tensões e deslocamentos médios nas faces de subvolumenes adjacentes, resultando em:

$$[\mathbf{K}_G]\{\{\tilde{\mathbf{u}}_G\}\} = [\Delta\mathbf{C}]\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} \quad (3.26)$$

onde $[\mathbf{K}_G]$ e $\{\{\tilde{\mathbf{u}}_G\}\}$ são, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de deslocamentos médios globais, $[\Delta\mathbf{C}]$ é a matriz composta pelas diferenças nas matrizes de rigidez locais de subvolumenes adjacentes e $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ é o vetor de deformações macroscópicas.

Este procedimento é similar ao utilizado no método dos elementos finitos, mas com a diferença de que os graus de liberdade estão associados às faces e não aos nós do subvolumen.

3.3 Matriz de rigidez efetiva

Para a obtenção das propriedades efetivas, necessitam-se encontrar as deformações médias nos subvolumenes, onde as mesmas são relacionadas com as deformações macroscópicas através do tensor de Hill $[\mathbf{A}]$, como segue:

$$\{\{\boldsymbol{\varepsilon}\}\}^{(k)} = [\mathbf{A}]^{(k)}\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} \quad (3.27)$$

onde cada coluna de $[\mathbf{A}]^{(k)}$ é obtida pela aplicação de uma componente não nula da deformação macroscópica $\bar{\varepsilon}_{ij}$ por vez e resolvendo o sistema de equações (3.26) para gerar a correspondente componente de deformação média no k -ésimo subvolumen através da Equação (3.13).

Tomando a média no volume do campo de tensão para a célula unitária de volume V , a tensão média pode ser expressa como uma média ponderada pelas frações volumétricas das tensões médias em todos os subvolumenes:

$$\{\bar{\sigma}\} = \frac{1}{V} \int_V \{\sigma(x)\} dV = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N_k} \int_{V^{(k)}} \{\{\sigma(x)\}\}^{(k)} dV^{(k)} = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} \{\{\sigma(x)\}\}^{(k)} \quad (3.28)$$

onde $v^{(k)} = \frac{V^{(k)}}{V}$ é a fração volumétrica do subvolume k . Utilizando a expressão das tensões médias no compósito e a relação tensão-deformação para cada subvolume (3.12), chega-se à relação constitutiva macroscópica para um compósito multifásico (GATTU et al., 2008):

$$\{\bar{\sigma}\} = [\mathbf{C}^*] \{\bar{\epsilon}\} \quad (3.29)$$

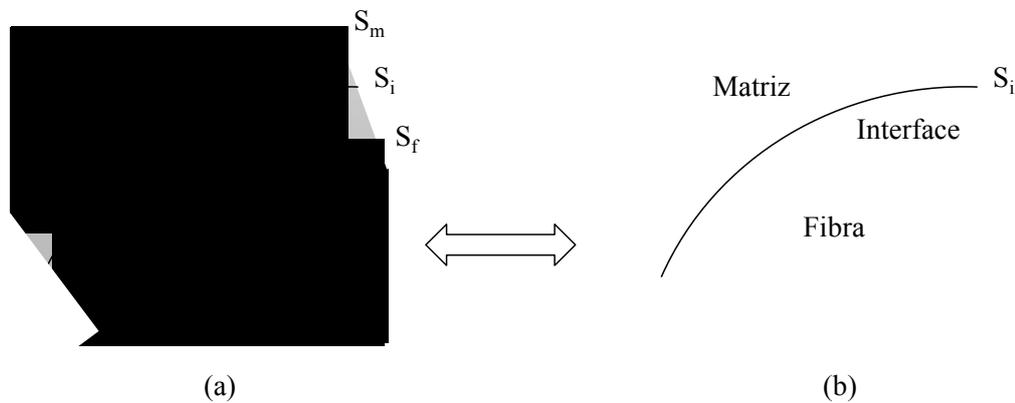
onde a matriz constitutiva efetiva $[\mathbf{C}^*]$ é dada em termos da geometria do subvolume, das propriedades do material e das matrizes de concentração de deformação de Hill

$$[\mathbf{C}^*] = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} [\mathbf{C}]^{(k)} [\mathbf{A}]^{(k)} \quad (3.30)$$

3.4 Elemento de interface imperfeita elástica

Esta interfase é convenientemente analisada usando um sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas, com um dos eixos paralelo à S_i , onde é possível mapear a interfase de espessura constante por superfícies paralelas, com S_i sendo sua superfície média (Figura 25(a)). Em Bövik (1994) e Benveniste (2006) é mostrado que a interfase fina mencionada pode ser substituída aproximadamente por uma interface equivalente, posicionada na superfície média S_i , com os materiais da fibra e da matriz sendo estendidos até a interface (Figura 25b).

Figura 25 – (a) Interfase fibra/matriz e (b) equivalente interface imperfeita.



Fonte: Benveniste, 2006.

Usando uma expansão de Taylor e considerando que a interfase é constituída por um material isótropo e homogêneo, Benveniste (2006) mostrou que para uma interfase fina as condições de descontinuidade nos campos de deslocamento na interface são:

$$(u_1)_+ - (u_1)_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_m} \right) (\sigma_{31})_+ + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_f} \right) (\sigma_{31})_- \quad (3.31)$$

$$(u_2)_+ - (u_2)_- = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_m} \right) (\sigma_{32})_+ + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_m} \right) (\sigma_{32})_- \quad (3.32)$$

$$(u_3)_+ - (u_3)_- = \frac{h}{2} (n_m - n_i) \{ (\epsilon_S)_{11} + (\epsilon_S)_{22} \}_+ + \frac{h}{2} (n_f - n_i) \{ (\epsilon_S)_{11} + (\epsilon_S)_{22} \}_- \\ + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\lambda_i + 2\mu_i} - \frac{1}{\lambda_m + 2\mu_m} \right) (\sigma_{33})_+ + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\lambda_i + 2\mu_i} - \frac{1}{\lambda_f + 2\mu_f} \right) (\sigma_{33})_- \quad (3.33)$$

onde $()_+$ e $()_-$ representam as variáveis na interface do lado da matriz e da fibra, respectivamente. Os índices i, m e f representam, nesta ordem, o material da interfase, da matriz e da fibra, λ e μ são as constantes de Lamé. As deformações superficiais são dadas por

$$\epsilon_S = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{grad}_S \mathbf{u}) + (\mathbf{grad}_S \mathbf{u})^T \} \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{grad}_S \mathbf{u}$ são os gradientes superficiais dos deslocamentos \mathbf{u} na interface e

$$n = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \quad (3.35)$$

Considerando agora que a interfase tem as componentes do tensor constitutivo elástico $(C_{ijkl})_i$ muito menor que as componentes do tensor constitutivo das fases $(C_{ijkl})_i \ll (C_{ijkl})_f, (C_{ijkl})_m$, sendo assim chamada de interfase flexível, as equações de descontinuidade em deslocamento tomam a seguinte forma (BENVENISTE, 2006)

$$(u_k)_+ - (u_k)_- = h(F_{kl})_i \sigma_{3l} \quad (3.36)$$

onde

$$(F_{kl})_i = \frac{1}{\mu_i} \delta_{kl} - \frac{\lambda_i + \mu_i}{\mu_i(\lambda_i + 2\mu_i)} \delta_{k3} \delta_{l3} \quad (3.37)$$

ou, em uma forma direta (BENVENISTE; MILOH, 2001),

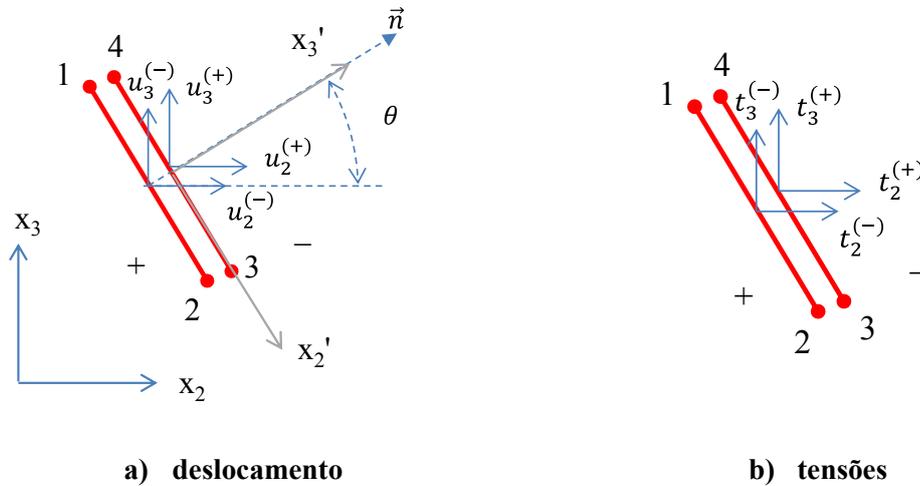
$$(u_1)_+ - (u_1)_- = \frac{h}{\mu_i} \sigma_{31} \quad (3.38)$$

$$(u_2)_+ - (u_2)_- = \frac{h}{\mu_i} \sigma_{32} \quad (3.39)$$

$$(u_3)_+ - (u_3)_- = \frac{h}{\lambda_i + 2\mu_i} \sigma_{33} \quad (3.40)$$

Como mostrado anteriormente, na formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos o domínio é discretizado em subvolumes quadrilaterais e, dessa forma, as interfaces são discretizadas em segmentos de reta que são as faces que separam a matriz da fibra, como mostrado na Figura 26, onde os nós 1 e 2 têm as mesmas coordenadas geométricas dos nós 3 e 4, respectivamente. Na Figura 26 pode-se ver os graus de liberdade em deslocamento (a) e tensões (b) associados às faces do elemento de interface.

Figura 26 – Elemento de interface com seus graus de liberdade.



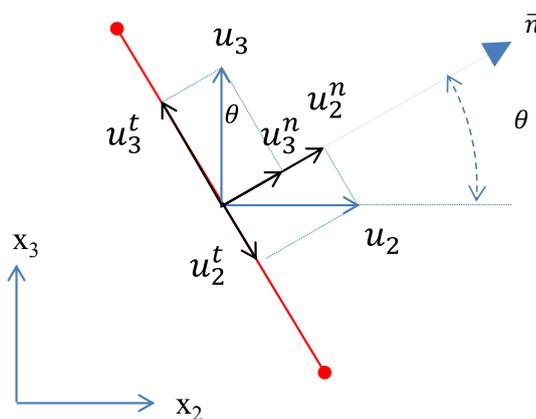
Fonte: Autor, 2013.

A partir da Figura 26a pode-se encontrar as descontinuidades no deslocamento nas direções normal \vec{n} (3') (Equação (3.41)) e tangencial \vec{t} (2') (Equação (3.42)) em função dos deslocamentos nas faces do elemento de interface, onde os vetores normal e tangencial são:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Figura 27 – Decomposição dos deslocamentos no eixo normal e transversal.



Fonte: Autor, 2013.

A Figura 26b mostra as componentes das tensões nas direções dos eixos cartesianos.

De acordo com a Figura 27, pode-se decompor os deslocamentos nas direções dos eixos cartesianos como segue:

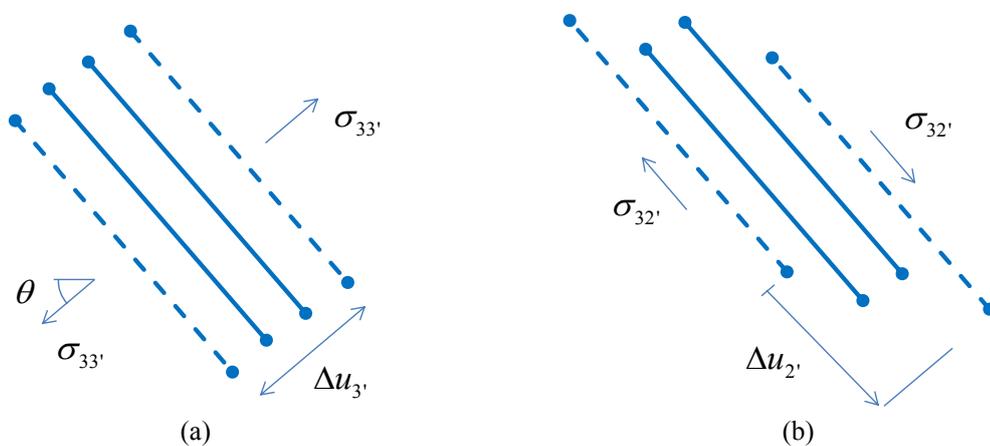
$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\theta) &= \frac{u_2^t}{u_2} \rightarrow u_2^t = u_2 \text{sen}(\theta) \\
 \text{cos}(\theta) &= \frac{u_2^n}{u_2} \rightarrow u_2^n = u_2 \text{cos}(\theta) \\
 \text{sen}(\theta) &= \frac{u_3^n}{u_3} \rightarrow u_3^n = u_3 \text{sen}(\theta) \\
 \text{cos}(\theta) &= -\frac{u_3^t}{u_3} \rightarrow u_3^t = -u_3 \text{cos}(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dessa forma, as relações entre as descontinuidades nos sistemas de coordenadas cilíndricas e cartesianas podem ser relacionadas como segue:

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1' \\ \Delta u_2' \\ \Delta u_3' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) & -\text{cos}(\theta) \\ 0 & -\text{cos}(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 & \text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

onde os deslocamentos $\Delta u_3'$ e $\Delta u_2'$ podem ser visualizados na Figura 28.

Figura 28 – Variação de deslocamento associada às direções (a) normal e (b) transversal à interface.



Em forma compacta, a expressão (3.44) pode ser escrita como

$$\{\Delta\} = [\mathbf{T}]^T \{\mathbf{u}\} \quad (3.45)$$

Isolando as tensões na Equação (3.36) e escrevendo-a na forma matricial, tem-se:

$$\{\mathbf{t}'\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{31}' \\ \sigma_{32}' \\ \sigma_{33}' \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\lambda + 2\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{1}' \\ \Delta u_{2}' \\ \Delta u_{3}' \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_L] \begin{Bmatrix} \Delta u_{1}' \\ \Delta u_{2}' \\ \Delta u_{3}' \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

Agora, com base na Figura 26b, pode-se encontrar a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_3^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & -\text{cos}(\theta) \\ 0 & \text{cos}(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) \\ 0 & -\text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{31}' \\ \sigma_{32}' \\ \sigma_{33}' \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} \sigma_{31}' \\ \sigma_{32}' \\ \sigma_{33}' \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

Substituindo as Equações (3.44) e (3.46) em (3.47), encontra-se a relação entre as tensões e os deslocamentos, em termos médios, nas direções dos eixos cartesianos (x_2, x_3) , como segue:

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_3^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_3^{(2)} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}][\mathbf{K}_L][\mathbf{T}]^T \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

ou, em uma forma compacta:

$$\{\mathbf{t}\} = [\mathbf{K}_e]\{\mathbf{u}\} \quad (3.49)$$

onde $[\mathbf{K}_e] = [\mathbf{T}][\mathbf{K}_L][\mathbf{T}]^T$ representa a matriz de rigidez do elemento de interface. Com isso, encontra-se o elemento de interface imperfeita para o problema elástico.

3.5 Coeficientes de expansão térmica efetivos

Partindo-se das propriedades mecânicas efetivas de um compósito e dos coeficientes de expansão/dilatação térmicas (α_{ij}) de cada constituinte, é possível encontrar os coeficientes de expansão térmica efetivos.

Segundo Hashin (1990), para definir as propriedades efetivas termoelásticas de um compósito com interface imperfeita, considera-se que uma condição de contorno homogênea em deslocamento seja aplicada nas bordas livres do compósito de domínio infinito

$$u_i(s) = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad (3.50)$$

e a uma mudança de temperatura uniforme ϕ , onde ε_{ij}^0 é um tensor constante. Decorre da linearidade das equações de elasticidade que o tensor de tensões médio deve ser uma função linear de ε_{ij}^0 . Assim,

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 + \Gamma_{ij}^* \phi \quad (3.51)$$

onde C_{ijkl}^* e Γ_{ij}^* são os tensores efetivos de rigidezes elástico e térmico, respectivamente.

No caso da condição de interface perfeita, ε_{ij}^0 são as deformações médias no compósito. De acordo com o trabalho de Hashin (1990), no caso de haver descontinuidades em deslocamento, pelo teorema da deformação média, tem-se:

$$\varepsilon_{ij}^0 = \bar{\varepsilon}_{ij} + \gamma_{ij} \quad (3.52)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{S_i} ([u_i]n_j + [u_j]n_i) dS \quad (3.53)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{ij}$ é a deformação média sob o volume das fases e a integral em (3.53) é realizada ao longo de toda a superfície S_i da interface. Se a deformação é decomposta em médias ponderadas das fases, as propriedades efetivas elásticas podem ser expressas em termos de deformações médias apenas de uma das fases (BENVENISTE, 1985).

Para escrever a inversa da Equação (3.51), assume-se o caso de uma condição de contorno homogênea em termos de tensões

$$T_i(s) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (3.54)$$

com mudança de temperatura uniforme ϕ , onde σ_{ij}^0 é um tensor constante com continuidade de tensões nas interfaces

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0 \quad (3.55)$$

Assim, o tensor de flexibilidade efetivo S_{ijkl}^* e os coeficientes de expansão térmica efetivos α_{ij}^* são definidos por

$$\varepsilon_{ij}^S = S_{ijkl}^* \sigma_{ij}^0 + \alpha_{ij}^* \phi \quad (3.56)$$

$$\varepsilon_{ij}^S = \frac{1}{2V} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (3.57)$$

$$\Gamma_{ij}^* = -C_{ijkl}^* \alpha_{ij}^* \quad (3.58)$$

Em Hashin (1990), o compósito com fibras unidirecionais é considerado transversalmente isotrópico, na escala macroscópica, com fibras e matriz transversalmente isotrópicos. Todos os eixos de isotropia transversal sendo paralelos e na direção da fibra x_1 , enquanto x_2 e x_3 são os eixos cartesianos transversais. De acordo com as Equações (3.51) a (3.58) as relações termoelásticas efetivas de tensão-deformação são

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11} &= n^* \varepsilon_{11}^0 + l^* \varepsilon_{22}^0 + l^* \varepsilon_{33}^0 + \Gamma_A^* \phi \\
\bar{\sigma}_{22} &= l^* \varepsilon_{11}^0 + (k^* + G_T^*) \varepsilon_{22}^0 + (k^* - G_T^*) \varepsilon_{33}^0 + \Gamma_T^* \phi \\
\bar{\sigma}_{33} &= l^* \varepsilon_{11}^0 + (k^* - G_T^*) \varepsilon_{22}^0 + (k^* + G_T^*) \varepsilon_{33}^0 + \Gamma_T^* \phi
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_A^* &= -(n^* \alpha_A^* + 2l^* \alpha_T^*) \\
\Gamma_T^* &= -(l^* \alpha_A^* + 2k^* \alpha_T^*)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{12} &= 2G_A^* \varepsilon_{12}^0 \\
\bar{\sigma}_{23} &= 2G_T^* \varepsilon_{23}^0 \\
\bar{\sigma}_{31} &= 2G_A^* \varepsilon_{31}^0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11}^S &= \frac{\sigma_{11}^0}{E_A^*} - \frac{\nu_A^*}{E_A^*} \sigma_{22}^0 - \frac{\nu_A^*}{E_A^*} \sigma_{33}^0 + \alpha_A^* \phi \\
\bar{\varepsilon}_{22}^S &= -\frac{\nu_A^*}{E_A^*} \sigma_{11}^0 + \frac{\sigma_{22}^0}{E_T^*} - \frac{\nu_T^*}{E_T^*} \sigma_{33}^0 + \alpha_T^* \phi \\
\bar{\varepsilon}_{33}^S &= -\frac{\nu_A^*}{E_A^*} \sigma_{11}^0 - \frac{\nu_T^*}{E_T^*} \sigma_{22}^0 + \frac{\sigma_{33}^0}{E_T^*} + \alpha_T^* \phi
\end{aligned} \tag{3.62}$$

onde A e T indicam as direções axial e transversal da fibra, respectivamente, $*$ indica propriedades efetivas, k é o módulo volumétrico transverso, G é o módulo de cisalhamento transverso, E é o módulo de elasticidade longitudinal, ν é coeficiente de Poisson e α é o coeficiente de expansão térmico. Os módulos efetivos n^* e l^* são calculados pelo uso das relações de isotropia transversal, como segue:

$$\begin{aligned}
n^* &= E_A^* + 4k^* \nu_A^{*2} \\
l^* &= 2k^* \nu_A^*
\end{aligned} \tag{3.63}$$

As relações termoelásticas tensão-deformação locais nas fases têm as mesmas formas que as relações (3.59) a (3.62) mostradas anteriormente, sendo atribuídos os índices f, m ou i às propriedades.

No trabalho de Hashin (1990) as análises são realizadas utilizando-se os métodos CCA (*Composite cylinder assemblage*) e Esquema Auto-Consistente Generalizado (GSCS – *Generalized self-consistent scheme*). Segundo Hashin (1990), o CCA foi introduzido por Hashin e Rosen (1964) onde o compósito era analisado através de métodos variacionais. A

análise foi simplificada por meio do método da substituição (Hashin, 1972) e foi generalizado para fibras e matrizes transversalmente isotrópicas em Hashin (1979). A base do método consiste em um compósito cilíndrico, com fibra no núcleo e uma casca concêntrica de matriz, submetida a uma condição de contorno homogênea superficial em deslocamento (Equação (3.50)), resultando em tensões superficiais também homogêneas como na Equação (3.54).

Assim, o compósito cilíndrico é exatamente equivalente a um cilindro homogêneo transversalmente isotrópico. Dessa forma, o método da substituição resulta em formas fechadas para as propriedades axissimétricas n^* , l^* , k^* , E_A^* , ν_A^* , α_A^* , α_T^* e G_A^* , mas não para as propriedades E_T^* , G_T^* e ν_T^* . No entanto, essas últimas podem ser limitadas por métodos variacionais.

O GSCS é uma aproximação pelo qual o estado médio de tensão e de deformação de qualquer fibra é estimado pela incorporação de um cilindro de material composto, como o empregado no modelo CCA, em um material homogêneo transversalmente isotrópico infinito que tem as propriedades efetivas do compósito a serem determinadas. É importante ressaltar que em todos os casos onde o modelo CCA permite resultados por equações fechadas, o modelo GSCS retorna precisamente aos mesmos resultados do modelo CCA (Hashin, 1990).

No trabalho de Hashin (1990), a interface foi introduzida na fibra, onde as seguintes considerações foram feitas

$$\nu_i = \frac{2h}{a} \ll 1 \quad (3.64)$$

$$k_i, G_{Ti}, E_{Ai} \ll k_f, G_{Tf}, E_{Af}$$

onde a é o raio da fibra e h é a espessura da interfase. Dessa forma, Hashin (1990) encontrou a seguinte equação

$$k_e = \frac{k_f}{1 + \frac{2k_f}{\eta a}} \quad (3.65)$$

$$\eta = \frac{k_i + G_i}{h}$$

Sendo k_e o módulo volumétrico transversal equivalente da fibra. Percebe-se que se $h = 0$, $k_e = k_f$, retornando assim para a propriedade da fibra.

Através de algumas manipulações matemáticas e utilizando GSCS e considerando que todas as fibras têm o mesmo diâmetro e os mesmos parâmetros da interface, Hashin (1990) encontrou as seguintes propriedades efetivas para o compósito:

$$k^* = k_m + \frac{v_f}{\frac{1}{k_e - k_m} + \frac{v_m}{k_m + G_m}} \quad (3.66)$$

$$E_A^* \cong E_m v_m + E_{Af} v_f \quad (3.67)$$

$$v_A^* = v_m v_m + v_{Af} v_f + \frac{(v_{Af} - v_m) \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_e} \right) v_m v_f}{\frac{v_m}{k_e} + \frac{v_f}{k_m} + \frac{1}{G_m}} \quad (3.68)$$

$$\alpha_A^* = \alpha_m + (\alpha_{Af} - \alpha_m) [P_{11}(S_{11}^* - S_{11}^m) + 2P_{12}(S_{12}^* - S_{12}^m)] \\ + 2(\alpha_{Tf} - \alpha_m) [P_{12}(S_{11}^* - S_{11}^m) + (P_{22} + P_{23})(S_{12}^* - S_{12}^m)] \quad (3.69)$$

$$\alpha_T^* = \alpha_m + (\alpha_{Af} - \alpha_m) \{P_{11}(S_{12}^* - S_{12}^m) + P_{12}[S_{22}^* + S_{23}^* - (S_{22}^m + S_{23}^m)]\} \\ + 2(\alpha_{Tf} - \alpha_m) \{P_{12}(S_{12}^* - S_{12}^m) \\ + \frac{1}{2}(P_{22} + P_{23})[S_{22}^* + S_{23}^* - (S_{22}^m + S_{23}^m)]\} \quad (3.70)$$

onde:

$$P_{11} = \frac{\Delta S_{22} + \Delta S_{23}}{D} \\ P_{12} = -\frac{\Delta S_{12}}{D} \quad (3.71)$$

$$P_{22} + P_{23} = \frac{\Delta S_{11}}{D}$$

$$D = \Delta S_{11}(\Delta S_{22} + \Delta S_{23}) - 2\Delta S_{12}^2 \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
\Delta S_{11} &= \frac{1}{E_{Af}} - S_{12}^m \\
\Delta S_{12} &= -\frac{\nu_{Af}}{E_{Af}} - S_{12}^m \\
\Delta S_{22} + \Delta S_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_e} + \frac{4\nu_{Af}^2}{E_{Af}} \right) - (S_{22}^m + S_{23}^m)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^m &= \frac{1}{E_m} \\
S_{12}^m &= -\frac{\nu_m}{E_m} \\
S_{22}^m + S_{23}^m &= \frac{1 - \nu_m}{E_m}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^* &= \frac{1}{E_A^*} \\
S_{12}^* &= -\frac{\nu_A^*}{E_A^*} \\
S_{22}^* + S_{23}^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^*} + \frac{4\nu_A^{*2}}{E_A^*} \right)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Com isso, a partir das propriedades elásticas efetivas do compósito reforçado por fibras, pode-se obter os coeficientes de expansão térmica efetivos α_A^* e α_T^* .

3.6 Exemplos e Resultados

Neste tópico resultados para homogeneização de propriedades elásticas e coeficientes de dilatação térmica serão apresentados. Tais resultados foram comparados com resultados numéricos utilizando o método dos elementos finitos e, em alguns casos, comparados com resultados experimentais encontrados na literatura.

3.6.1 Estudo da Influência da Interfase nas Propriedades Efetivas Elásticas de Compósitos reforçados por Fibras

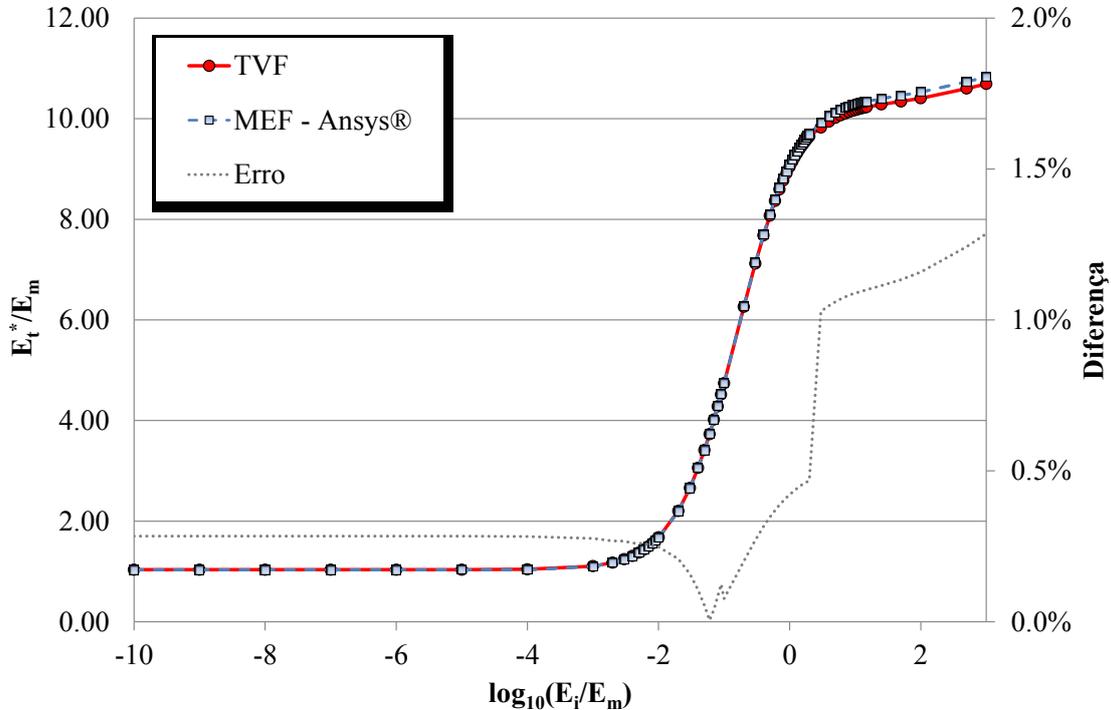
Neste exemplo, estuda-se o comportamento do módulo de elasticidade longitudinal de um compósito reforçado por fibras com inclusão de uma fase de transição entre a matriz e a fibra, conhecida como interfase.

Os exemplos tratados nesta seção, em comparação com trabalhos anteriores de obtenção de propriedades efetivas utilizando a Teoria dos Volumes Finitos, têm como diferencial a presença de interfase, uma vez que a homogeneização de compósitos com duas fases já foi bem estudada e detalhada em outras referências, como Cavalcante et al. (2006a,b), Gattu et al. (2008) e Cavalcante e Pindera (2013a,b).

O modelo aqui estudado trata-se de um compósito periódico com fases isotrópicas, com arranjo quadrado e em estado plano de deformações generalizado. As propriedades mecânicas, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, são as mesmas encontradas em Matzenmiller e Gerlach (2005), onde a matriz é uma resina epóxi com módulo de elasticidade $E_m = 3,11$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,34$, as inclusões são fibras de vidro com $E_f = 77$ GPa e $\nu_f = 0,2$ e as propriedades da interfase são funções das propriedades da matriz através de um escalar k , como pode ser observado nas equações 18 e 19 de Matzenmiller e Gerlach (2005), transcritas na sequência como: $K_i = kK_m$ e $G_i = kG_m$, onde K e G são os módulos de elasticidade volumétrico e transversal, respectivamente. Pode-se verificar que essas equações resultam em $E_i = kE_m$ e $\nu_i = \nu_m$. A inclusão utilizada tem raio $r_f = 6$ μm com fração volumétrica $c_f = 46,2\%$ e a interfase tem espessura constante $h = 0,3$ μm .

A seguir são mostrados os resultados encontrados para o módulo de elasticidade longitudinal na direção 2 perpendicular ao eixo longitudinal da fibra (Figura 29).

Figura 29 – Comparação entre resultados obtidos para homogeneização elástica com a TVF e o MEF para compósito com interfase.



Fonte: Autor, 2014.

Percebe-se, claramente, a excelente concordância entre os resultados obtidos com a TVF e o MEF em função da variação do módulo de elasticidade da interfase. Também pode ser visto a curva de diferença normalizada percentual onde em boa parte do gráfico a diferença se mantém abaixo de 0,5%, tendo seu valor máximo igual a 1,3% para $\log_{10}\left(\frac{E_i}{E_m}\right) = 3$.

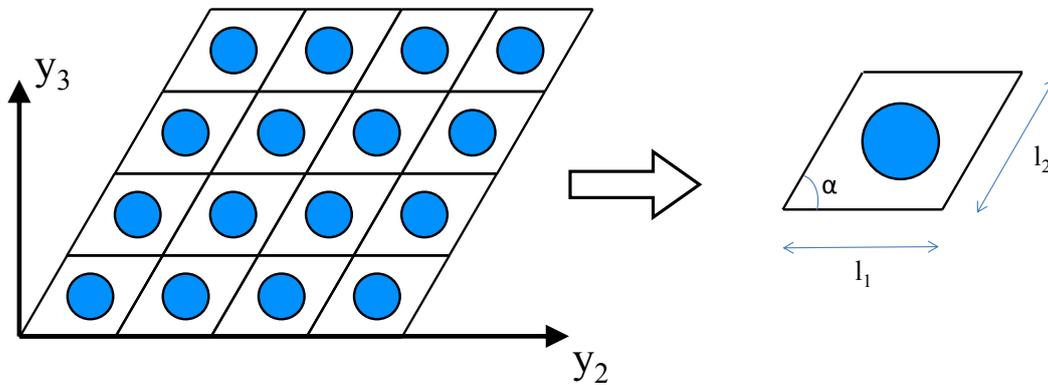
3.6.2 Estudo das Propriedades Elásticas Efetivas Considerando a Presença de uma Interface Imperfeita entre a Fibra e a Matriz

No presente exemplo são apresentados os primeiros resultados para o modelo de interface imperfeita desenvolvido neste trabalho para a versão paramétrica da teoria dos volumes finitos.

No trabalho de Hashin (2002) é apresentado um problema de um compósito reforçado por fibras com distribuição hexagonal. Esse mesmo problema, posteriormente, também foi estudado por Wükner et al. (2013) e Wükner et al. (2014). No primeiro trabalho de Wükner et

al. (2013), a célula unitária é modelada com seção transversal rômbrica com ângulo $\alpha = 60^\circ$ e $l_1 = l_2$ (Figura 30).

Figura 30 – Arranjo rômbrico e célula unitária considerada.

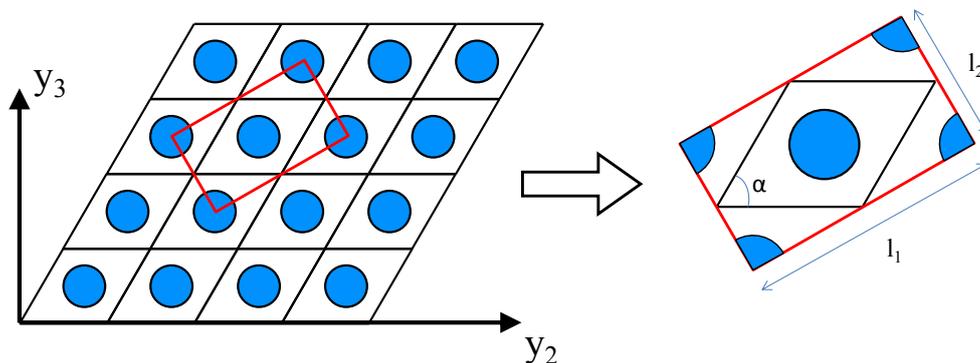


Fonte: Wükner et al., 2013.

No caso do segundo trabalho, o arranjo da célula unitária também é rômbrico, mas com forma retangular (Figura 31), onde

$$\begin{aligned} l_1 &= 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ l_2 &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \tag{3.76}$$

Figura 31 – Arranjo rômbrico e célula unitária retangular.



Fonte: Wükner et al., 2014.

Em todos os três trabalhos, o modelo tem condição de contorno periódica nas duas direções e as respostas são praticamente as mesmas, pois representam o mesmo problema, onde a fração volumétrica e a distribuição de fibras são mantidas constantes.

A fração volumétrica de fibras é de 40% e a relação entre os módulos de elasticidade transversal da fibra e da matriz é dada por $\frac{G_f}{G_m} = 10$. Os coeficientes de Poisson da fibra e da matriz são, respectivamente, $\nu_f = 0,2$ e $\nu_m = 0,35$. As propriedades da interface imperfeita são obtidas a partir das Equações 18 e 19 do trabalho de Matzenmiller e Gerlach (2005) em termos de G_i e ν_i . Neste exemplo, o coeficiente de Poisson da interfase é fixado em $\nu_i = 0,3$ enquanto que o módulo de elasticidade transversal varia em função do G_m .

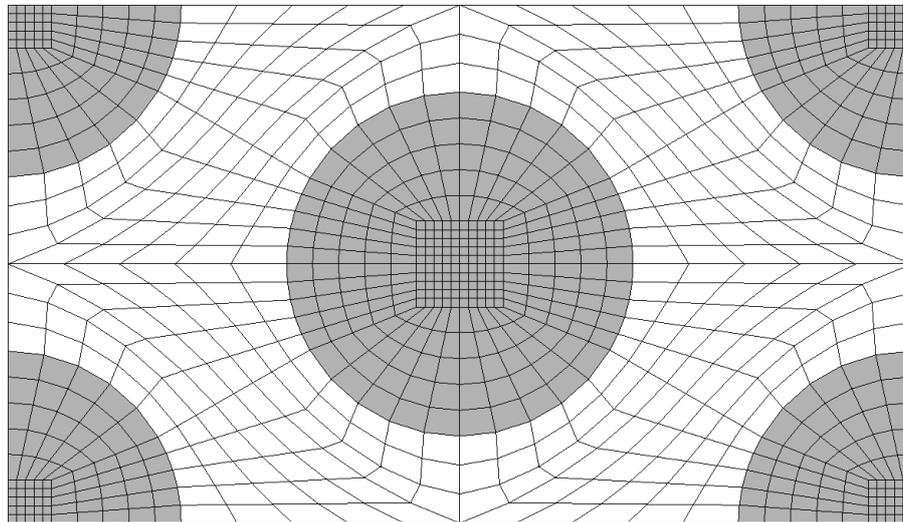
A espessura da interfase h é dada em função do parâmetro adimensional η e do raio da fibra unidirecional, como segue:

$$\eta = \frac{h}{r_f} \quad (3.77)$$

Neste exemplo, assim como nas referências citadas (Hashin, 2002; Wükner et al., 2013 e 2014), foi adotado $\eta = 0,001$.

A malha utilizada é mostrada na Figura 32.

Figura 32 – Malha de Volumes Finitos (920 subvolumes).

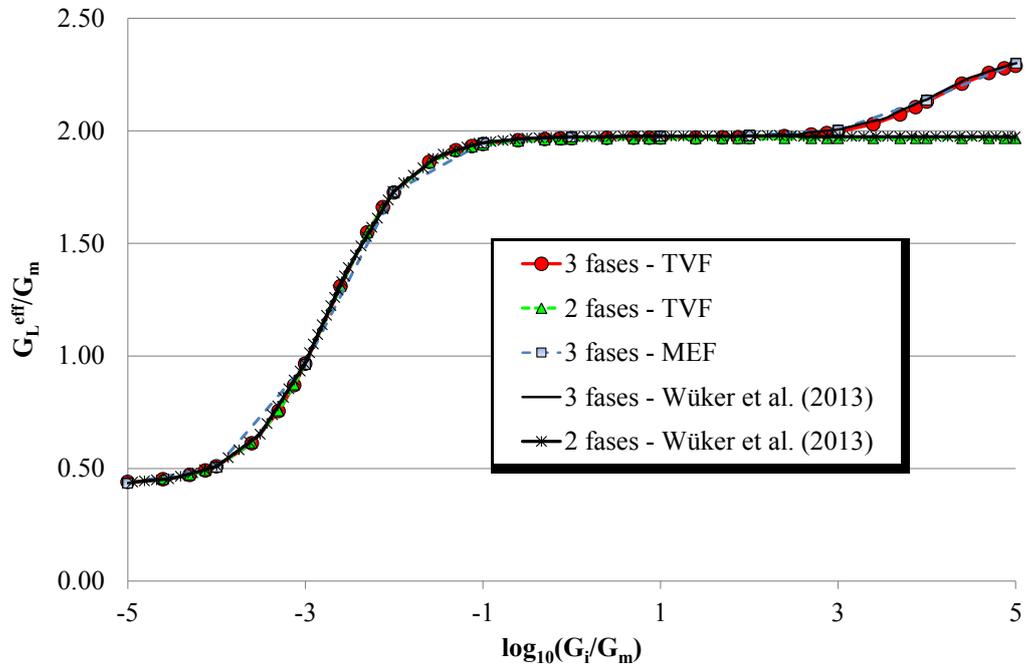


Fonte: Autor, 2014.

Os resultados obtidos através da TVF foram comparados com os trabalhos citados e com o *software* comercial Ansys[®], mostrando-se ser uma boa alternativa para obtenção das propriedades homogeneizadas de compósitos com interface imperfeita.

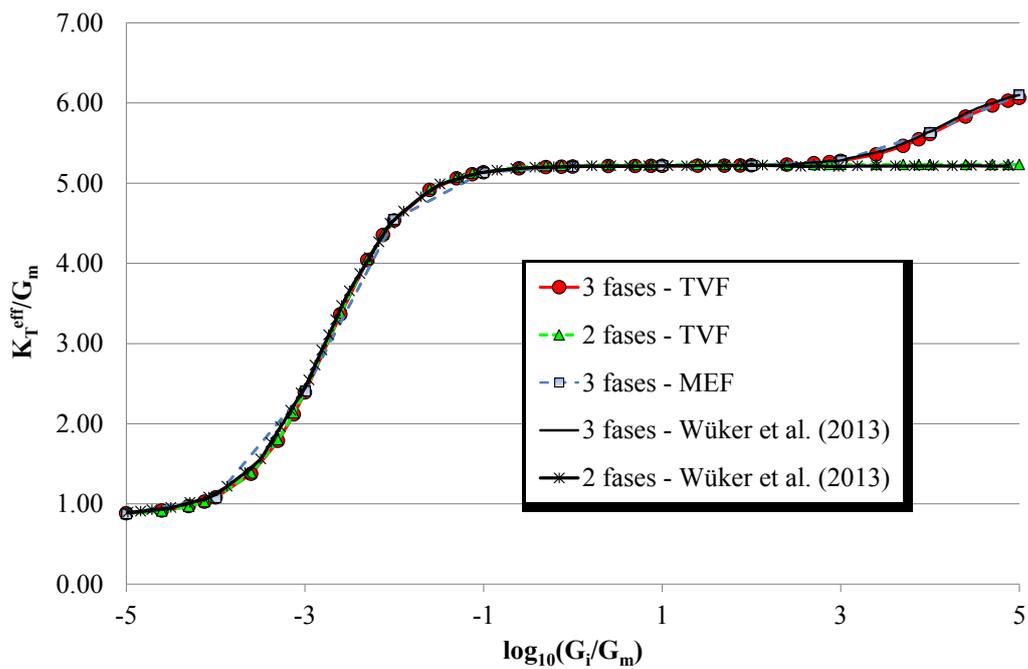
Os gráficos das Figuras 33 e 34 mostram os resultados para os módulos efetivos de cisalhamento longitudinal e volumétrico transversal normalizados, respectivamente.

Figura 33 – Módulo de cisalhamento longitudinal efetivo normalizado.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 34 – Módulo volumétrico transversal efetivo normalizado.



Fonte: Autor, 2014.

Pode-se perceber a boa concordância entre os resultados, tanto para os modelos com as três fases distintas (matriz, interfase e fibra), quanto para os modelos com a consideração da interface imperfeita. Para o método dos elementos finitos, os resultados apenas para o modelo com as três fases foram obtidos.

Uma característica importante verificada através deste exemplo é que, a partir de determinado valor de G_i , as curvas para os modelos com interface imperfeita tendem a uma assíntota horizontal enquanto para os modelos com 3 fases as propriedades efetivas continuam a crescer. Neste exemplo, esse afastamento entre as curvas ocorreu para de $\log_{10} \left(\frac{G_i}{G_m} \right) \geq 3$.

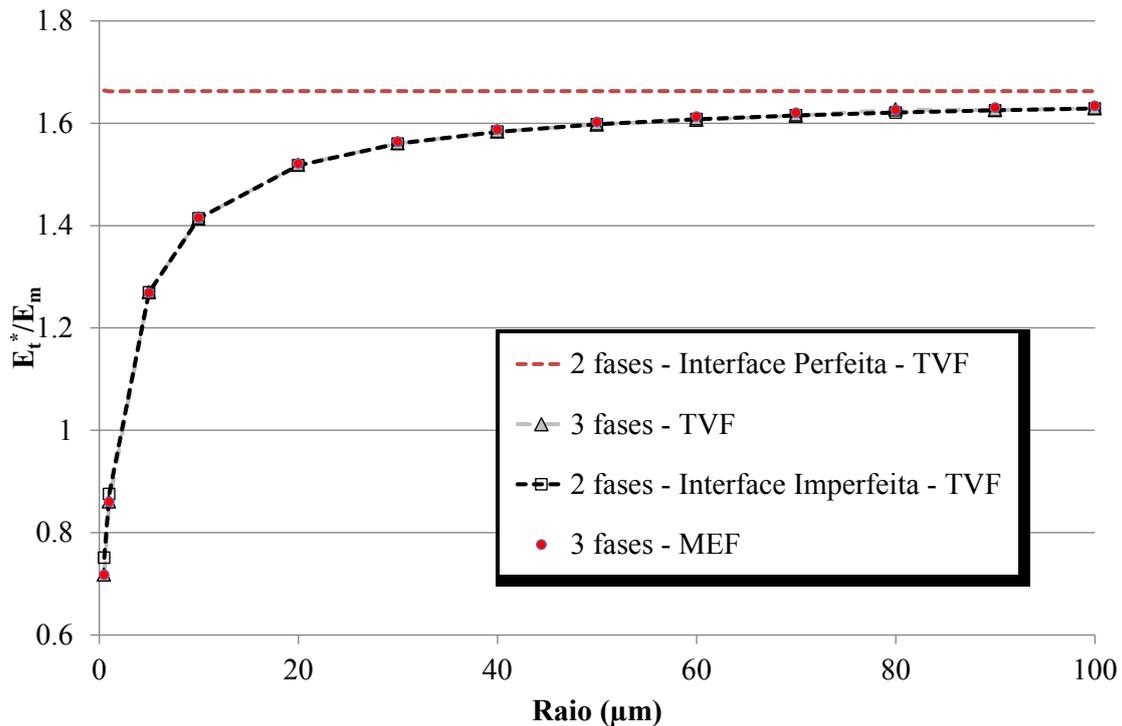
3.6.3 Estudo do efeito de tamanho da inclusão no módulo de Young transversal efetivo considerando a presença da interface imperfeita

Este exemplo apresenta o comportamento do módulo de Young transversal efetivo E_{22}^* com a variação do raio da inclusão. São considerados dois modelos para o estudo do comportamento do compósito. O primeiro com a inserção de uma interfase, de espessura constante, entre a fibra e a matriz, e o segundo, onde a interfase é substituída por uma interface imperfeita do tipo mola. Uma premissa geralmente adotada na teoria do comportamento mecânico de materiais compósitos é a exigência de continuidade de tensões e deslocamentos nas interfaces dos constituintes. Neste segundo modelo, a continuidade em deslocamentos sofre uma modificação e relaxamento, buscando considerar defeitos internos e imperfeições que possam existir no compósito, resultando assim em uma descontinuidade em deslocamentos nas interfaces dos constituintes.

No compósito a fibra é isótropa de carboneto de silício, com módulo de elasticidade longitudinal $E_f = 450 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu_f = 0,15$. A fração volumétrica de inclusões é de 30%, com raio variando de $0,5 \mu\text{m}$ a $100 \mu\text{m}$.

A matriz é o alumínio com módulo de elasticidade $E_m = 69 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,34$. A interfase tem módulo de elasticidade $E_i = E_m/100$ e coeficiente de Poisson $\nu_i = 0,34$, com espessura constante de 20 nm .

Figura 35 – Módulo de elasticidade transversal efetivo em função do raio da inclusão.



Fonte: Autor, 2014.

Através da Figura 35, observa-se a grande influência do raio da fibra na propriedade efetiva do compósito. Também se pode ver que à medida que a dimensão da fibra é aumentada, a influência da interfase/interface diminui, tendendo para a resposta de um compósito bifásico sem a presença de interface imperfeita.

A resposta também se mostra muito boa em comparação com a solução obtida pelo método dos elementos finitos, através da ferramenta computacional Ansys[®], para um compósito com 3 fases.

3.6.4 Influência da rigidez da interfase/interface imperfeita

Neste exemplo, busca-se estudar o comportamento do módulo de elasticidade efetivo transversal do compósito reforçado por fibras unidirecionais para variações da rigidez da interfase e da interface imperfeita. Como visto anteriormente, para o problema de condutividade térmica, espera-se encontrar um comportamento similar aos dos gráficos das Figuras 13, 14 e 15. O modelo é definido através de um arranjo quadrado, com fibras de raio $r = 100 \mu\text{m}$, para três frações volumétricas de fibras, que são 30%, 50% e 70%.

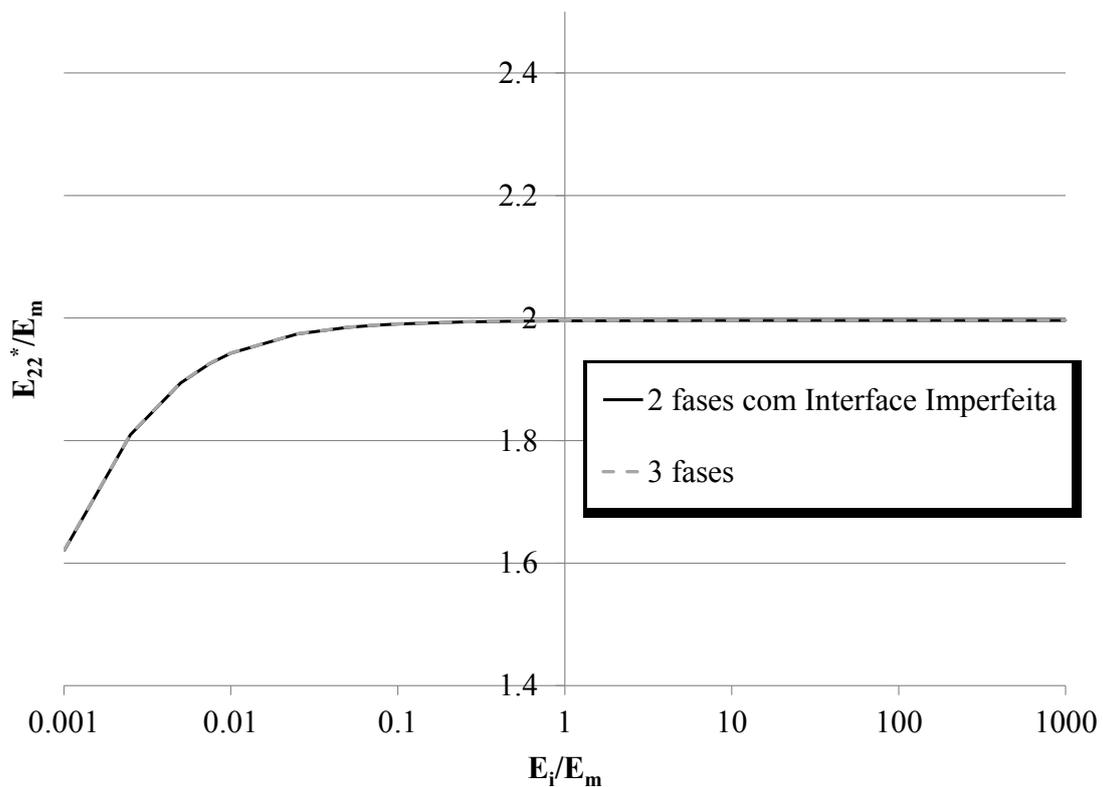
O material da fibra foi escolhido como sendo o carboneto de silício, com propriedades mostradas no exemplo anterior. O módulo de elasticidade da matriz segue a equação abaixo

$$E_m(k) = kE_f \quad (3.78)$$

onde, neste exemplo, k tem os seguintes valores $k = [0,02; 1; 10; 50]$, com coeficiente de Poisson constante de $\nu_m = 0,34$.

A interfase considerada tem espessura constante $h = 20 \text{ nm}$, com coeficiente de Poisson igual ao da matriz e seu módulo de elasticidade também segue uma lei similar a Equação (3.78) em função do E_m . Nesse caso, o fator escalar varia de 10^{-3} , para considerar uma interfase muito flexível, a 10^3 , para o caso de uma interfase muito rígida.

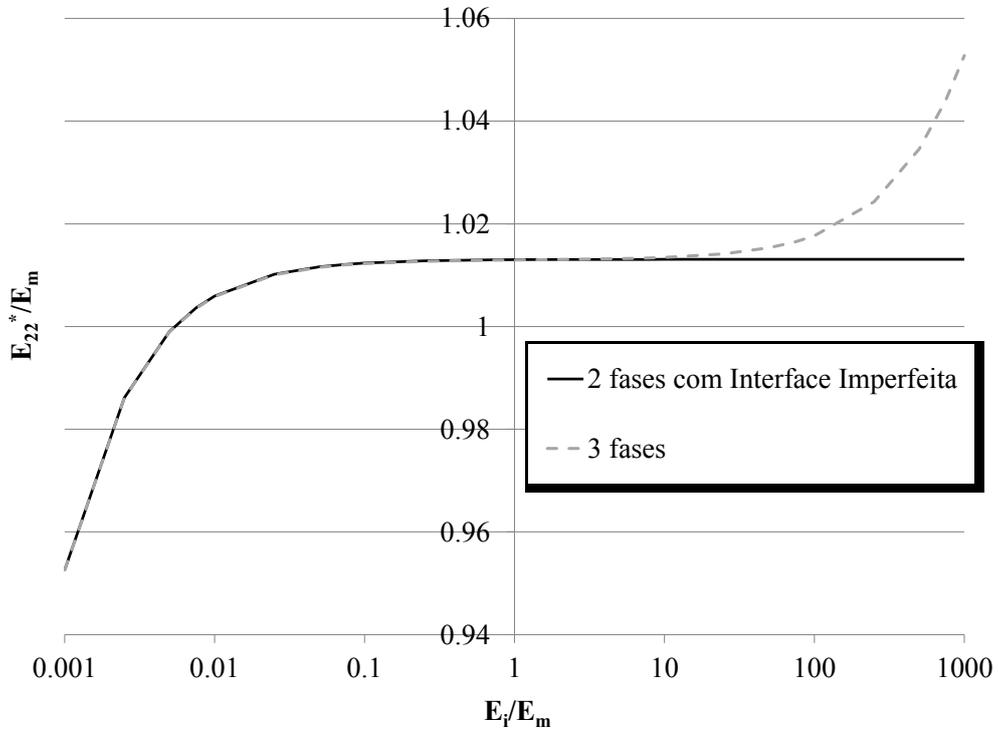
Figura 36 – Módulo de elasticidade transverso efetivo *versus* variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 30%. (continua).



a) $E_m/E_f = 0,02$

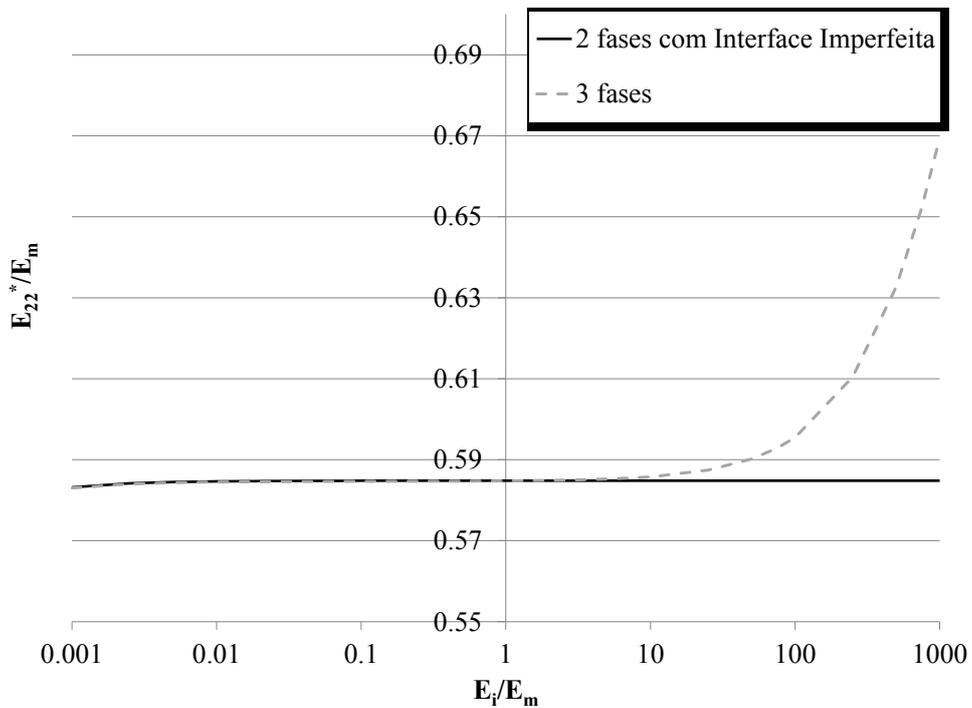
Fonte: Autor, 2014.

Figura 35 – Módulo de elasticidade transverso efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 30%. (continua).



b) $E_m/E_f = 1$

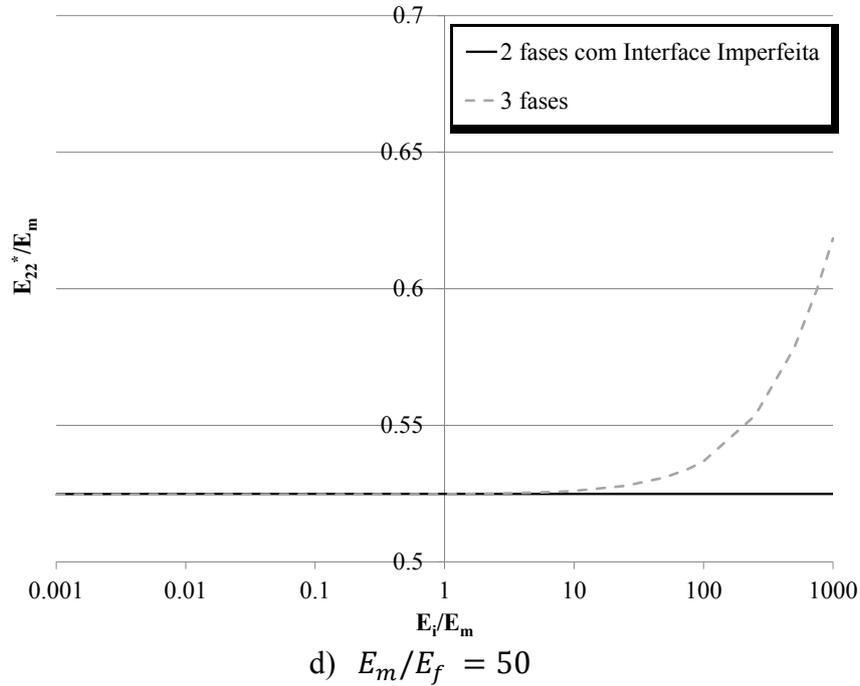
Fonte: Autor, 2014.



c) $E_m/E_f = 10$

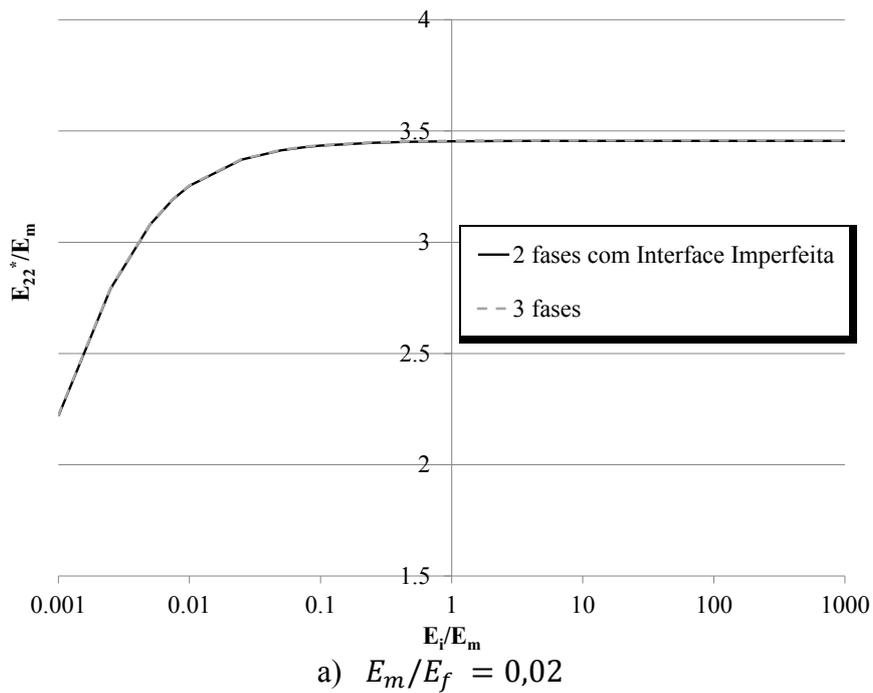
Fonte: Autor, 2014.

Figura 35 – Módulo de elasticidade transverso efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 30%. (conclusão).



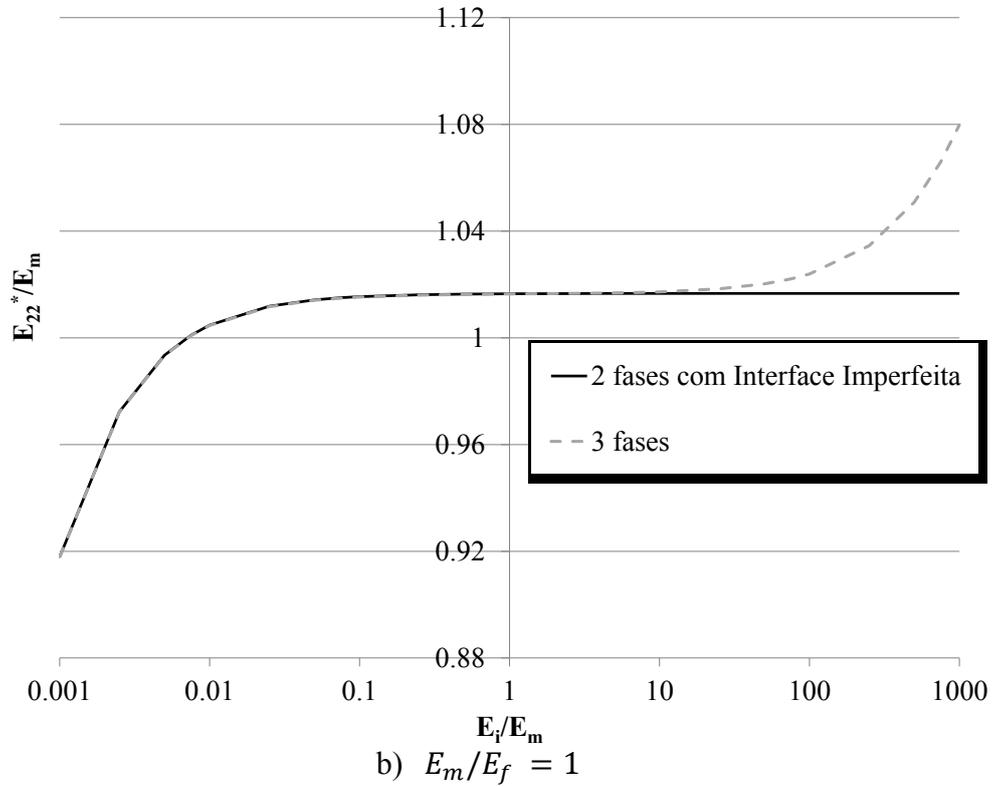
Fonte: Autor, 2014.

Figura 37 – Módulo de elasticidade transverso efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 50%. (continua)

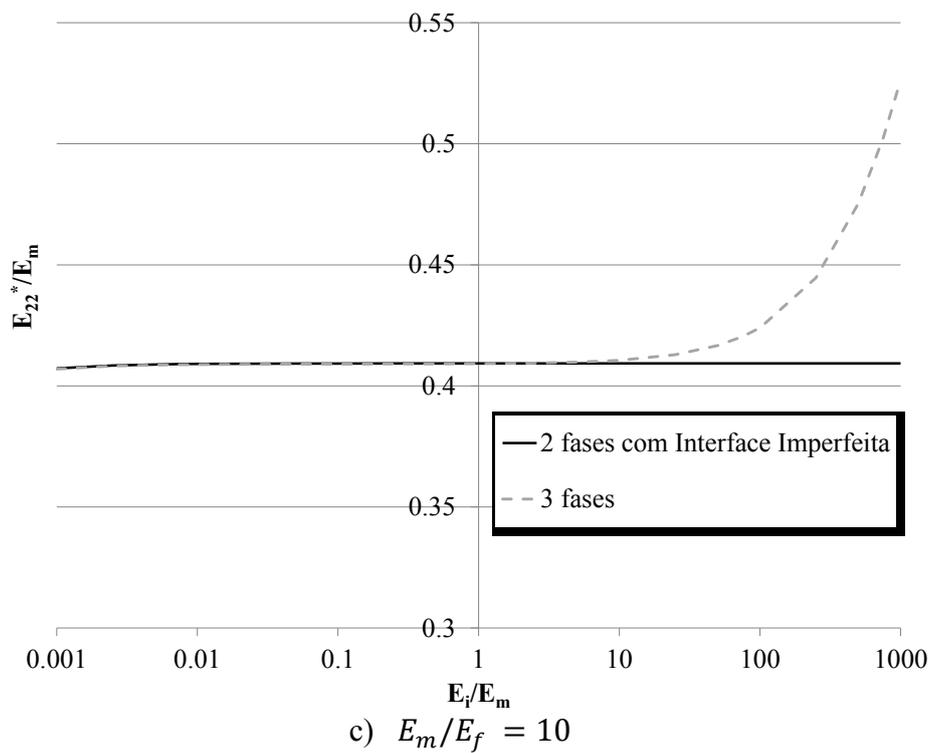


Fonte: Autor, 2014.

**Figura 36 – Módulo de elasticidade transverso efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 50%.
(continua).**

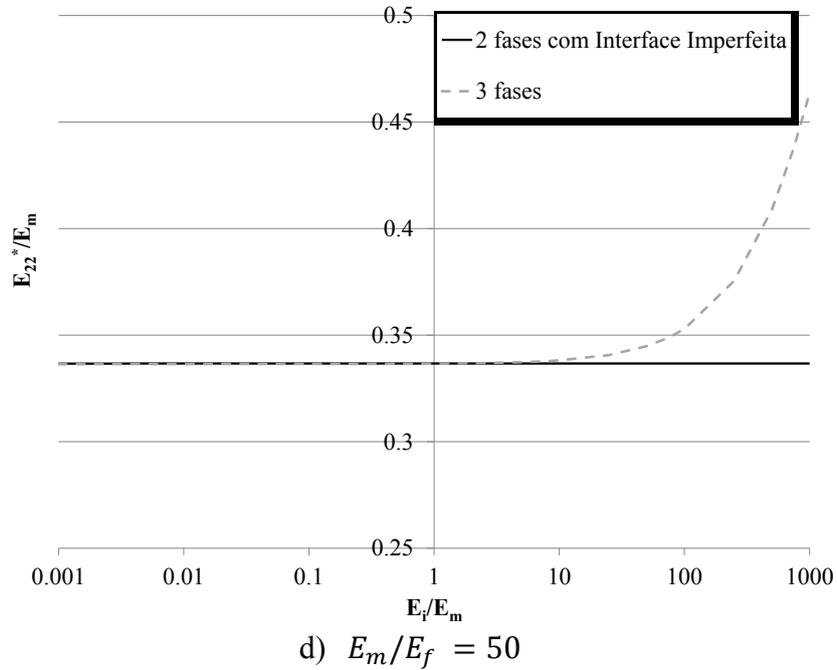


Fonte: Autor, 2014.



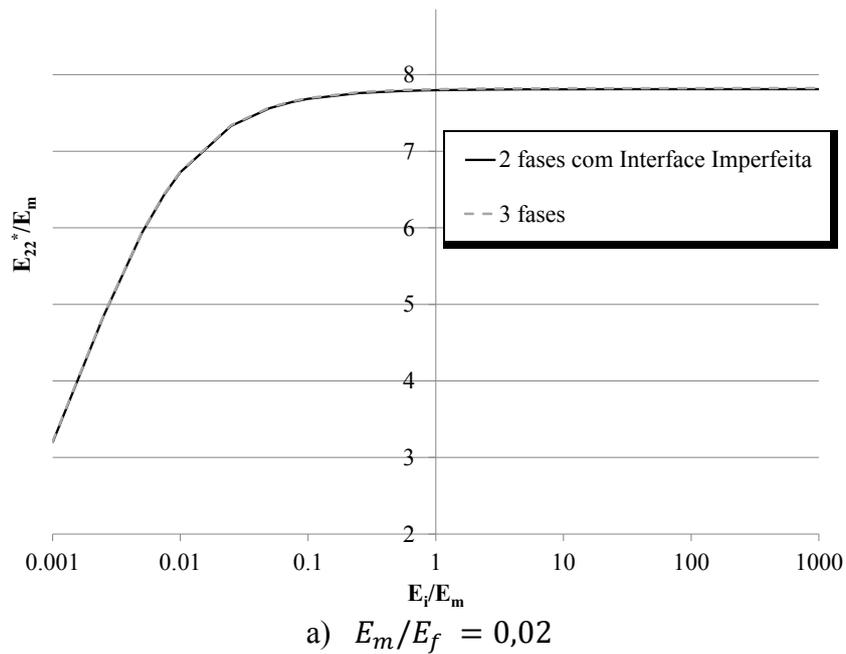
Fonte: Autor, 2014.

Figura 36 – Módulo de elasticidade transversal efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 50%. (conclusão).



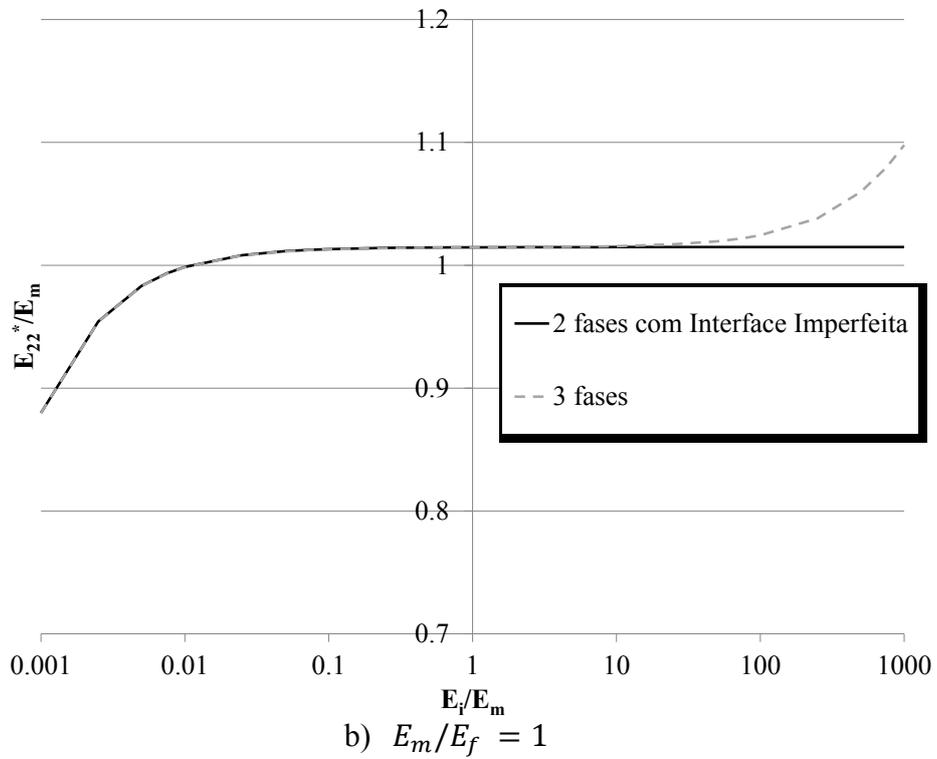
Fonte: Autor, 2014.

Figura 38 – Módulo de elasticidade transversal efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 70%. (continua)

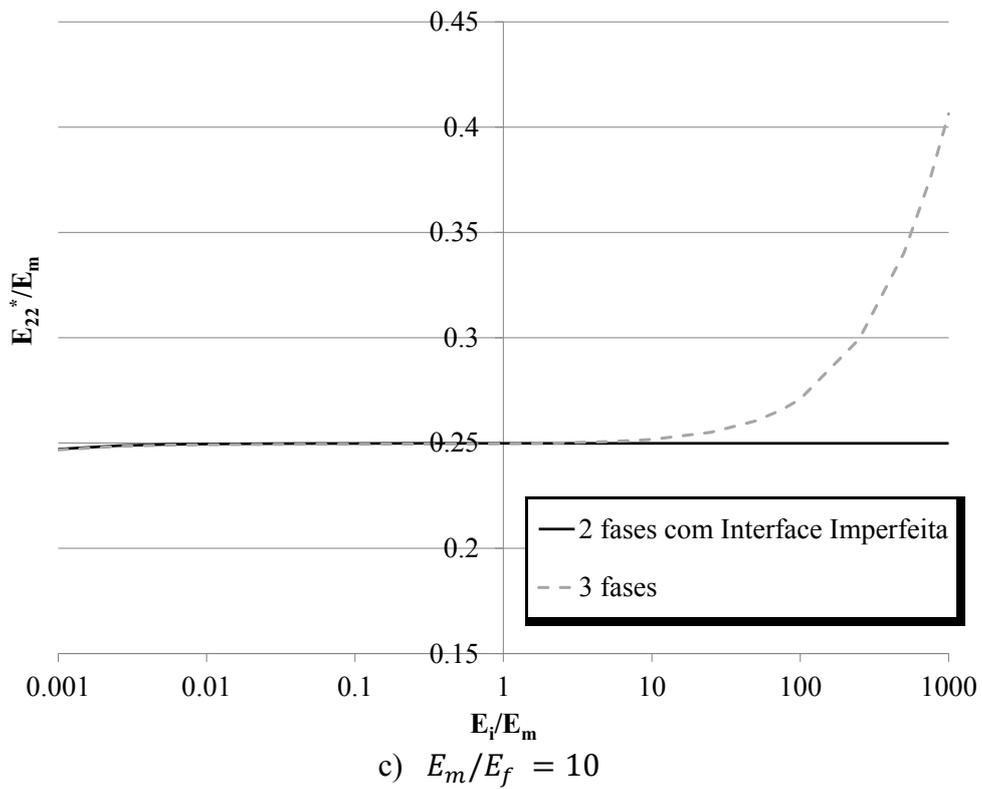


Fonte: Autor, 2014.

**Figura 37 – Módulo de elasticidade transverso efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 70%.
(continua)**

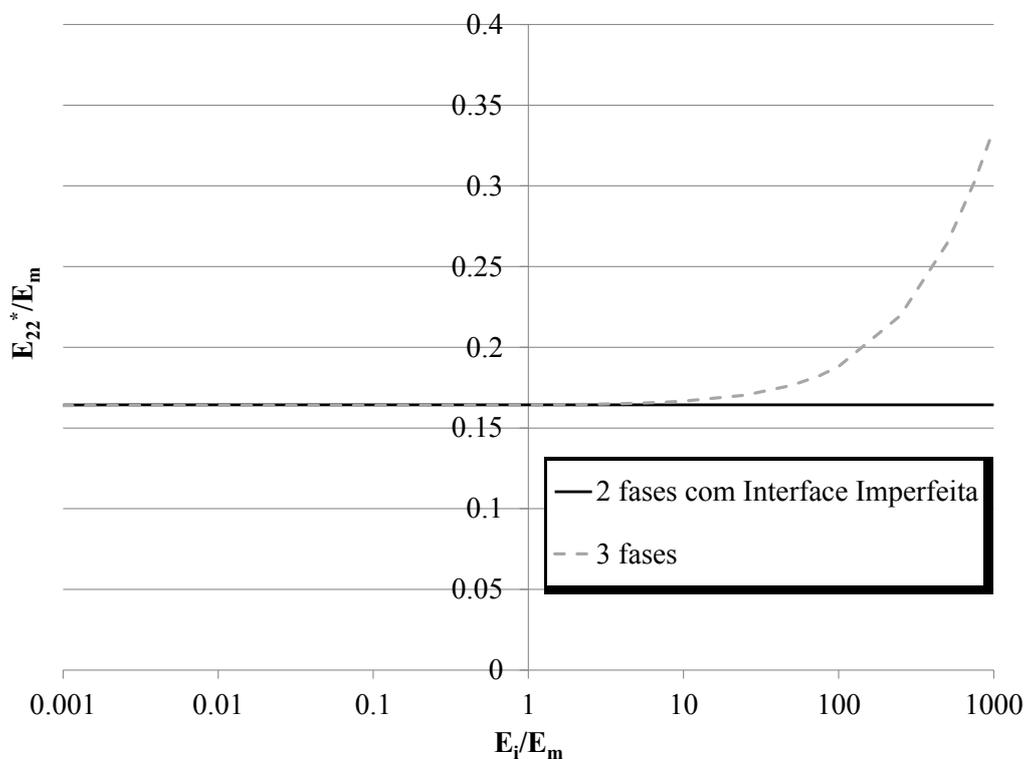


Fonte: Autor, 2014.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 37 – Módulo de elasticidade transverso efetivo versus variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas e para fração volumétrica de 70%. (conclusão)



d) $E_m/E_f = 50$

Fonte: Autor, 2014.

De posse dos resultados, percebe-se que, para baixa rigidez da matriz (Figuras 36a, 37a e 38a), a variação da rigidez da interfase/interface imperfeita não gera afastamento entre as curvas, mostrando a grande influência das propriedades da matriz. Nas outras comparações, pode ser observado o afastamento entre os resultados para o módulo de elasticidade transverso efetivo para valores de E_m/E_f próximos a 10. Esse resultado permite confirmar a aplicabilidade do elemento de interface imperfeita para baixa rigidez da interfase, quando comparada às da fibra e da matriz.

3.6.5 Homogeneização Elástica de Compósito Laminado com Microestrutura Ondulada e Interface Imperfeita

Como foi mostrado anteriormente, para problema de condutividade térmica efetiva, as ondulações das lâminas têm significativa influência nas propriedades homogeneizadas de compósitos laminados. Sabendo disto, neste tópico busca-se obter similar efeito na obtenção

de propriedades elásticas efetivas, considerando também a influência de interfases e interfaces imperfeitas.

Neste exemplo, os modelos têm a mesma discretização apresentada no estudo da condutividade térmica efetiva de compósitos laminados. Os materiais do reforço e da matriz são, respectivamente, o carboneto de silício, com $E = 420 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,25$, e o Alumínio, com $E = 72,4 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,33$.

A Tabela 3 mostra os resultados das propriedades efetivas para os modelos com duas fases, ou seja, sem interfases.

Tabela 3 – Módulos elásticos homogeneizados para compósitos laminados.

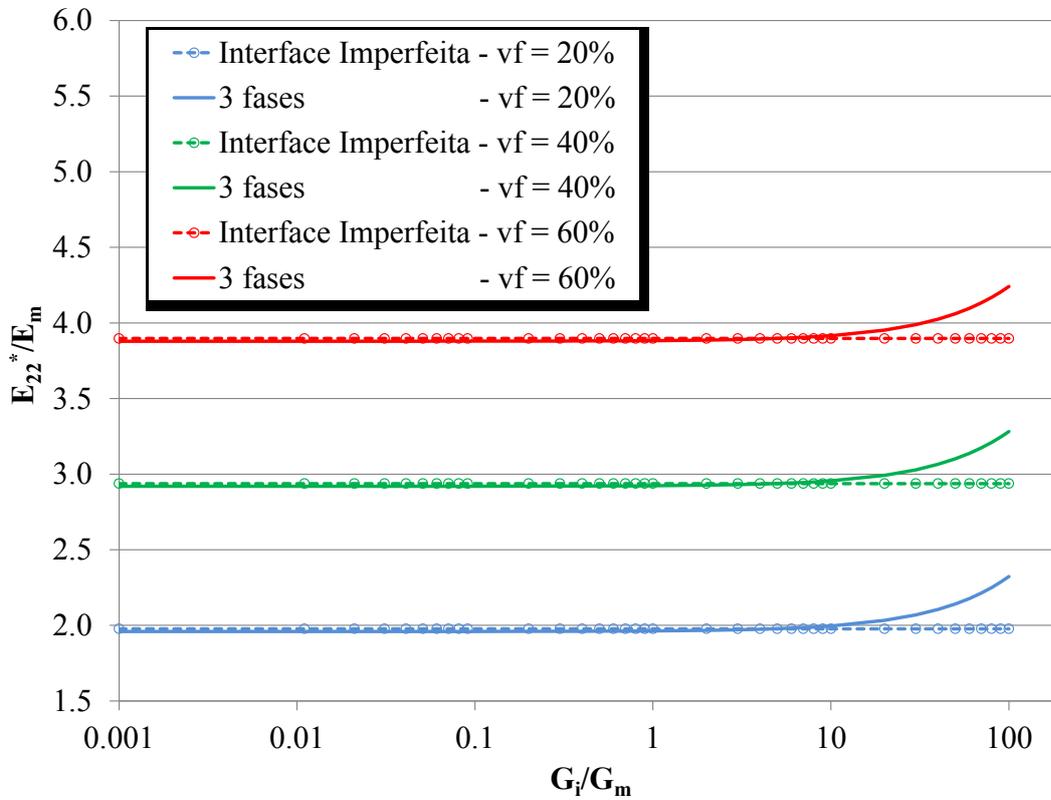
Fração Volumétrica	$E_{22}^* \text{ (GPa)}$				$G_{23}^* \text{ (GPa)}$				$G_{13}^* \text{ (GPa)}$			
	Plano	5%	10%	15%	Plano	5%	10%	15%	Plano	5%	10%	15%
20%												
1 camada	142,2	132,4	116,4	105,8	32,7	34,2	37,4	40,0	32,7	33,3	34,8	36,8
2 camadas	142,2	132,5	117,0	106,8	32,7	34,4	37,9	40,6	32,7	33,3	34,9	36,9
4 camadas	142,2	132,6	117,3	107,2	32,7	34,5	38,1	40,9	32,7	33,3	34,9	37,0
40%												
1 camada	211,7	192,6	162,1	142,9	40,9	43,6	49,5	54,7	40,9	41,9	44,4	47,7
2 camadas	211,7	191,2	161,1	142,6	40,9	43,9	49,9	54,9	40,9	41,9	44,5	47,9
4 camadas	211,7	191,1	161,1	142,8	40,9	43,9	50,1	55,1	40,9	41,9	44,5	48,0
60%												
1 camada	281,1	258,4	220,2	194,9	54,7	58,6	67,3	75,1	54,7	56,0	59,4	64,0
2 camadas	281,1	254,9	215,7	191,4	54,7	58,8	67,3	74,4	54,7	56,0	59,5	64,1
4 camadas	281,1	254,0	214,4	190,3	54,7	58,8	67,2	74,3	54,7	56,1	59,5	64,1

Fonte: Autor, 2014.

Observam-se pequenas variações entre as propriedades para os casos de aumento de camadas, mantendo-se a fração volumétrica constante, mas, quando se aumenta a curvatura da célula unitária, percebe-se uma diminuição do módulo de elasticidade longitudinal E_{22}^* , pois na direção 2 existe maior contribuição do material mais flexível, que tem fração volumétrica considerável, e um aumento dos módulos de elasticidade transversais G_{23}^* e G_{13}^* , devido ao aumento da superfície de contato entre os materiais.

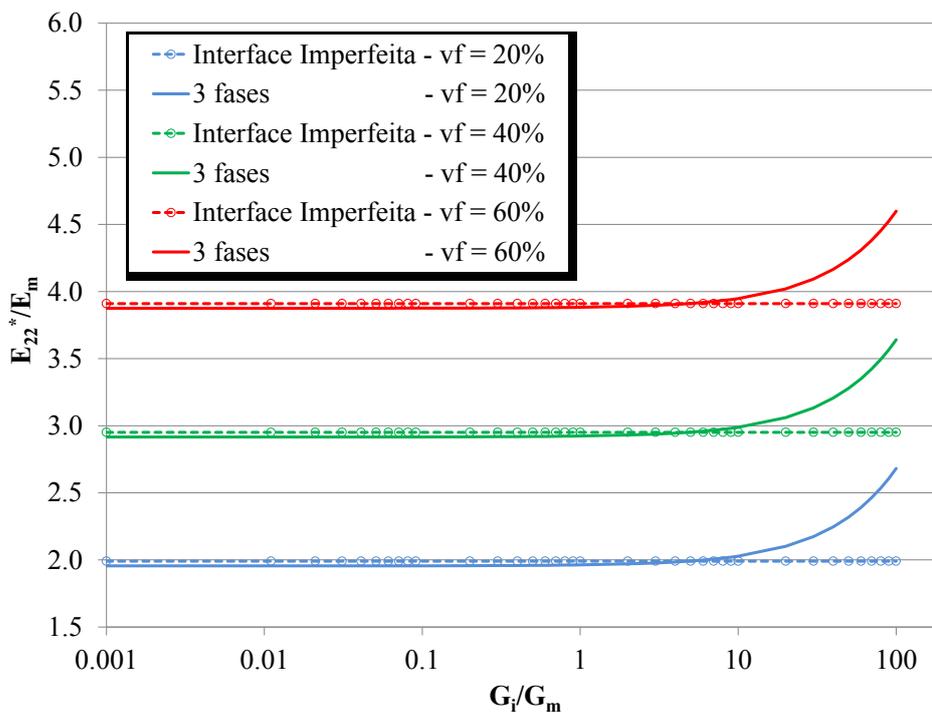
As Figuras 39 e 40 mostram comparações de resultados entre os módulos de elasticidades longitudinais efetivos na direção 2 normalizados para o compósito com interface imperfeita e interfase. Devido à proximidade e semelhança dos resultados e gráficos, alguns são omitidos, sendo apresentados aqueles para os modelos plano e com ondulação de 10% para 1 e 2 camadas.

Figura 39 – Módulo de elasticidade longitudinal efetivo *versus* variação da rigidez da interfase para interfaces imperfeitas/perfeitas para laminado plano.



a) Laminado plano com 1 camada.

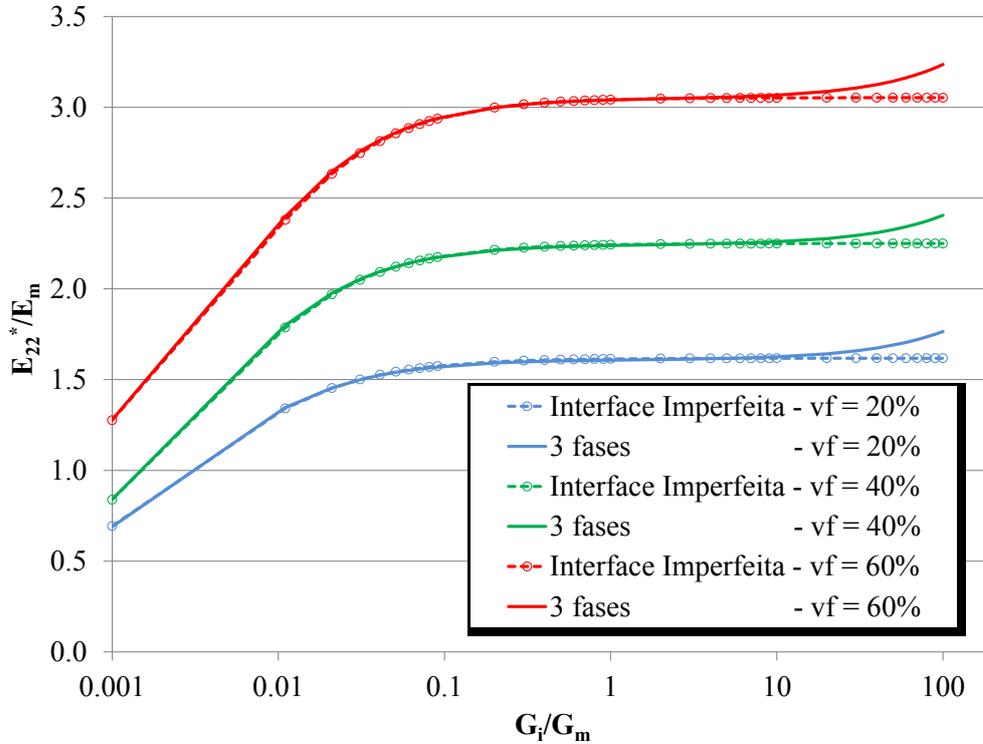
Fonte: Autor, 2014.



b) Laminado plano com 2 camadas.

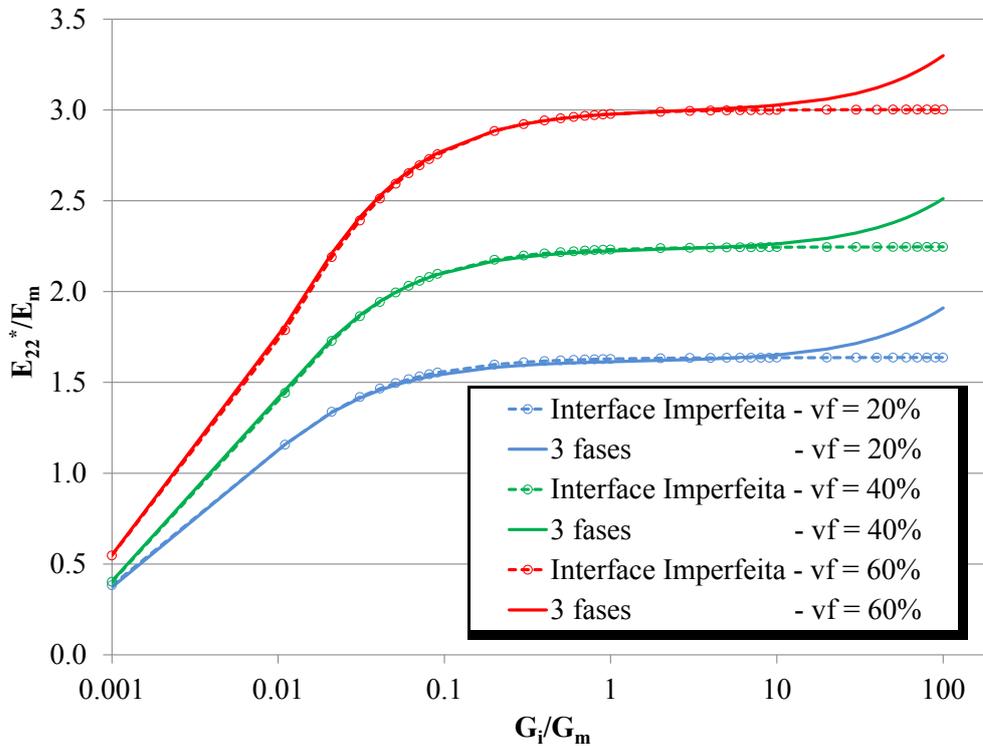
Fonte: Autor, 2014.

Figura 40 – Módulo de elasticidade longitudinal efetivo versus variação da rigidez da interface para interfaces imperfeitas/perfeitas para compósito com 10% de ondulação.



a) Laminado com 10% de ondulação com 1 camada.

Fonte: Autor, 2014.



b) Laminado com 10% de ondulação com 2 camadas.

Fonte: Autor, 2014.

Através dos resultados obtidos, percebe-se que para valores de G_i/G_m menores que 10 a diferença entre as curvas para os modelos com 3 fases e com interface imperfeita é praticamente inexistente. No entanto, para $G_i/G_m > 10$ inicia-se o afastamento entre as respostas para a mesma fração e número de camadas. Este efeito foi obtido em exemplos anteriores e vem mais uma vez confirmar que a formulação desenvolvida tem restrições para interfases muito rígidas.

É importante ressaltar que nos exemplos elásticos, as respostas dos modelos com 3 fases se distanciam daquelas do modelo com interface imperfeita, que tendem à horizontal. No caso dos problemas térmicos, esta característica ocorre de forma contrária. Esse efeito está relacionado à relação constitutiva do modelo de interface imperfeita, ou seja, se a propriedade do modelo é direta ou indiretamente proporcional à descontinuidade gerada.

3.6.6 Coeficiente de dilatação térmica efetivo (CTE efetivo)

Aqui, serão apresentados dois exemplos para comprovar a aplicabilidade da Teoria dos Volumes Finitos frente à obtenção dos coeficientes de expansão térmica efetivos, sendo comparado com o Método dos Elementos Finitos e com a solução analítica. O primeiro exemplo foi retirado da tese de doutorado de Tang (2008), que desenvolveu uma ferramenta chamada *Variational Asymptotic Method for Unit Cell Homogenization* (VAMUCH). Tal ferramenta pode ser incluída em *softwares* comerciais de análise com o método dos elementos finitos como Ansys® e Abaqus®. O segundo exemplo encontra-se em Hashin (1990). A seguir, os exemplos são descritos.

3.6.7 CTE's efetivos para compósito bifásico

Neste primeiro exemplo, um compósito boro/alumínio é estudado. Os dois constituintes são isotrópicos com módulo de Elasticidade $E = 379,3 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,1$ e coeficiente de expansão térmica $\alpha = 8,1 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ para as fibras de boro, e $E = 68,3 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e $\alpha = 23,0 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ para a matriz de alumínio. As fibras apresentam arranjo quadrado e seção transversal circular.

A obtenção de α_A^* e α_T^* foi realizada utilizando-se as Equações (3.69) e (3.70), tanto para a TVF quanto para o MEF, enquanto que a solução analítica pode ser encontrada no trabalho de Rosen e Hashin (1970), tendo a seguinte forma para fases transversalmente isotrópicas:

$$a_{ij}^* = \bar{\alpha} \delta_{ij} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)} \left(3S_{kkij}^* - \left(\frac{\bar{1}}{k}\right) \delta_{ij} \right) \quad (3.79)$$

onde

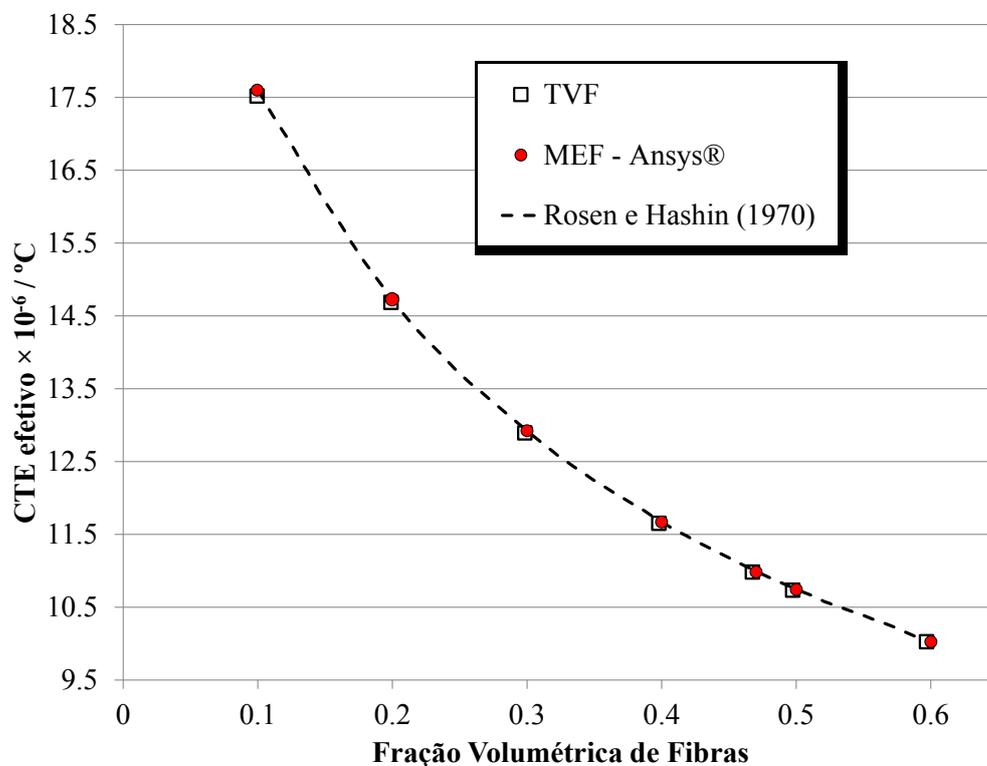
$$\left(\frac{\bar{1}}{k}\right) = \frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2} \quad (3.80)$$

$$S_{ijkl}^* = \sum_m v_m S_{ijrs}^{(m)} B_{rskl}^m$$

B_{rskl} é o componente do tensor concentração de tensão, v_i e k_i são, respectivamente, a fração volumétrica e o módulo volumétrico da fase i .

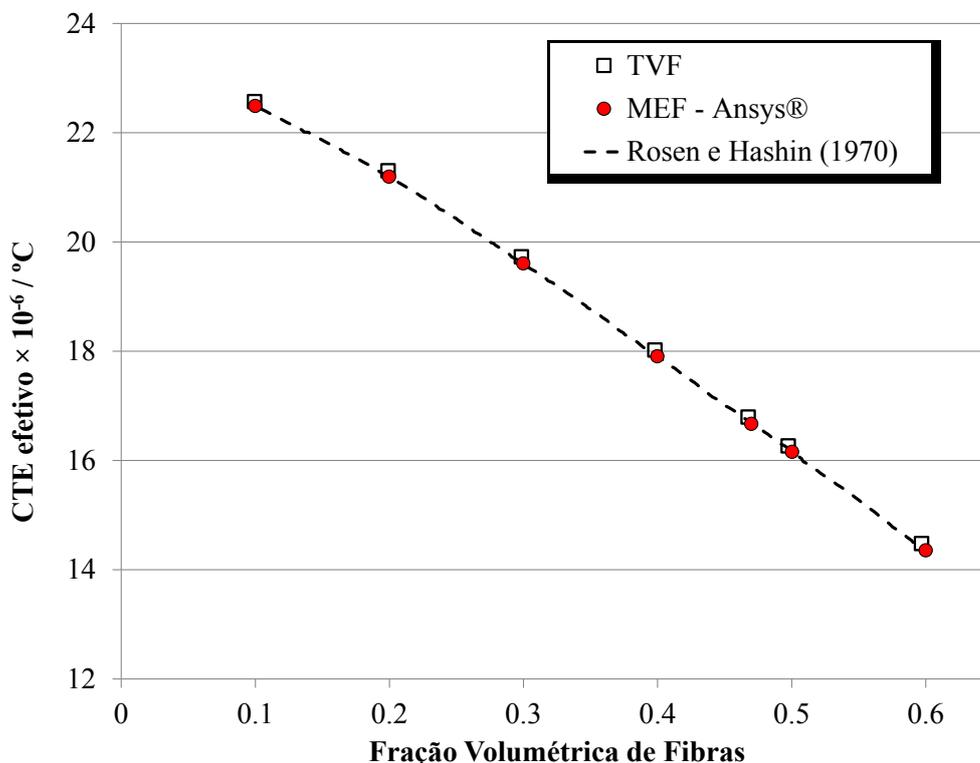
Nas Figuras 41 e 42 são apresentados os resultados para os coeficientes efetivos de expansão térmica axial e transversal, respectivamente.

Figura 41 – CTE efetivo axial.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 42 – CTE efetivo transversal.



Fonte: Autor, 2014.

Observa-se uma boa aproximação entre os resultados obtidos pela teoria dos volumes finitos, pelo método dos elementos finitos e pela formulação analítica.

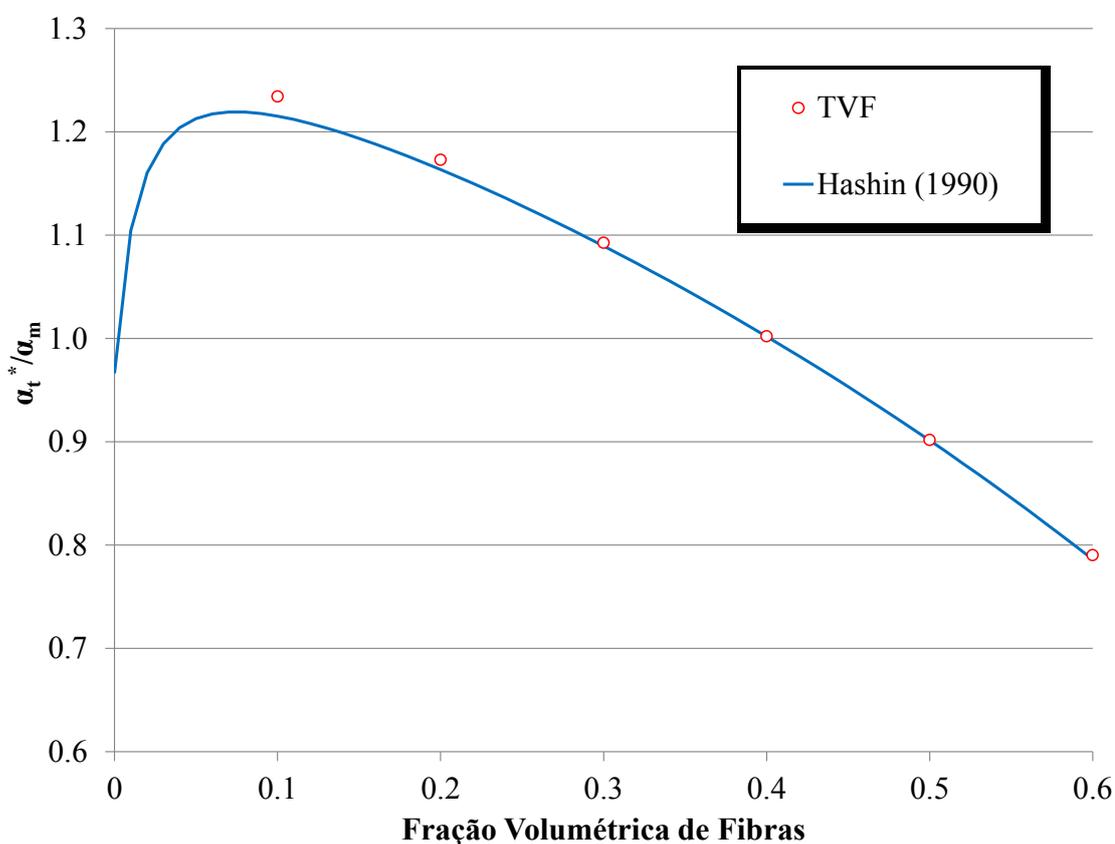
3.6.8 CTE's efetivos para compósito com interface imperfeita

Aqui são apresentados os resultados obtidos para um compósito com a inserção de interfaces imperfeitas através da consideração encontrada em Hashin (1990), onde o módulo volumétrico da inclusão (k_f) é substituído por um módulo equivalente (k_e , ver Eq. 3.65) que leva em consideração as propriedades mecânicas (k_i e G_i) da interfase além de sua espessura e do raio da fibra. As propriedades dos constituintes podem ser encontradas em Hashin (1990). A matriz é isotrópica com as propriedades da resina epóxi, com módulo de elasticidade $E_m = 3,45 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,35$ e coeficiente de expansão térmica $\alpha_m = 35 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{F}$. A fibra é de carbono, considerada transversalmente isotrópica, onde, na direção axial, $E_A = 231 \text{ GPa}$, $\nu_A = 0,30$, $G_A = 22,0 \text{ GPa}$ e $\alpha_A = -7,40 \cdot 10^{-7} / ^\circ\text{F}$ e, na direção transversal $E_T = 22,4 \text{ GPa}$, $\nu_T = 0,35$, $k_T = 17,5 \text{ GPa}$, $G_T = 8,3 \text{ GPa}$ e $\alpha_T = 3,91 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{F}$.

No trabalho de Hashin (1990), fez-se o estudo do comportamento do coeficiente de expansão térmica transversal com a variação da fração volumétrica de fibras para diferentes valores do fator $k_f/\eta a$. Tal fator está associado diretamente à influência da interface, onde para $k_f/\eta a = 0$ tem-se interface perfeita, ou seja, a ligação entre a matriz e a fibra é perfeita.

Adotando-se $k_f/\eta a = 10$ para interface imperfeita, obtêm-se os resultados da Figura 43, que mostra a variação do coeficiente de expansão térmico transversal efetivo normalizado em função da fração volumétrica. Esses resultados são comparados com os obtidos analiticamente no trabalho de Hashin (1990).

Figura 43 – Comparação dos resultados do CTE efetivo para o modelo de interface imperfeita e a solução analítica (Hashin, 1990).



Fonte: Autor, 2014.

Para frações volumétricas superiores a 10%, percebe-se que existe uma ótima correspondência entre os resultados numéricos e a solução analítica.

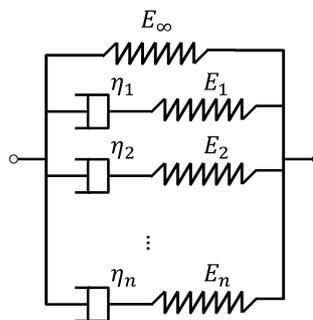
4 PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS EFETIVAS

Como forma de simplificar e representar o comportamento viscoelástico dos materiais, alguns modelos foram desenvolvidos utilizando-se elementos unidimensionais, os quais são representados por combinações de molas (modelos Hookeanos) e amortecedores (modelos Newtonianos). É apresentado a seguir o modelo da viscoelasticidade linear conhecido como Maxwell generalizado que, neste trabalho, foi utilizado para obtenção dos módulos complexos do material.

4.1 Método das variáveis internas

O modelo de Maxwell generalizado é um modelo viscoelástico complexo, que proporciona uma boa representação do comportamento dependente do tempo dos materiais sólidos. Esse modelo consiste na ligação em paralelo de uma mola com um ou mais modelos de Maxwell.

Figura 44 – Modelo de Maxwell generalizado (modelo Maxwell-Wiechert).



Fonte: Autor, 2013.

Para materiais viscoelásticos lineares, a relação uniaxial entre a tensão e a deformação é expressa por:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \quad (4.1)$$

onde t é o tempo, s é a variável de integração, σ é a tensão, ε é a deformação e G é a função módulo de relaxação. Decompondo o intervalo de tempo, tem-se

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{0^-} G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds + \int_{0^-}^{0^+} G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds + \int_{0^+}^t G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \quad (4.2)$$

onde o primeiro termo após a igualdade é nulo, uma vez que para $t < 0$ não existe aplicação de carga ou deformação, e em $t = 0$ existe uma descontinuidade. Dessa forma, a Equação (4.2) pode ser reescrita como:

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon(0) + \int_{0^+}^t G(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \quad (4.3)$$

A função módulo de relaxação $G(t)$ para o modelo de Maxwell generalizado é dada por:

$$G(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (4.4)$$

onde N é o número de elementos viscoelásticos em paralelo. E_∞ e E_i são constantes elásticas das molas mostradas na Figura 44.

Para o caso de materiais isotrópicos, pode-se escrever o tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma}(t)$ como a composição de um estado hidrostático com um estado desviador de tensões, como segue:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = G_k(t)\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(0)) + \int_0^t G_k(t-s)\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s))ds \quad (4.5)$$

$$\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = G_\mu(t)\mathbf{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}(0)) + \int_0^t G_\mu(t-s)\mathbf{dev}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(s))ds \quad (4.6)$$

onde tr e \mathbf{dev} representam o traço e o tensor desviador do estado de tensão definido por $\boldsymbol{\sigma}(t)$, respectivamente. Os índices k e μ indicam propriedades correspondentes aos estados hidrostático (*bulk*) e desviador (*shear*), respectivamente. As funções relaxação $G_k(t)$ e $G_\mu(t)$ do modelo podem ser expressas como

$$G_k(t) = 3K_\infty + \sum_{i=1}^N 3K_i^e e^{\left(-\frac{t}{\tau_i^k}\right)} \quad (4.7)$$

$$G_\mu(t) = 2\mu_\infty + \sum_{i=1}^N 2\mu_i^e e^{\left(-\frac{t}{\tau_i^\mu}\right)} \quad (4.8)$$

Após algumas manipulações algébricas (TRAN et al., 2011) e substituindo as Equações (4.7) e (4.8) nas Equações das tensões ((4.5) e (4.6)), chega-se às seguintes expressões para o tempo $t + \Delta t$:

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) = \sum_{i=1}^N q_i^k(t + \Delta t) + \sum_{i=1}^N \gamma_i^k e^{-\frac{t+\Delta t}{\tau_i^k}} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0)) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i^\mu(t + \Delta t) + \sum_{i=1}^N \gamma_i^\mu e^{-\frac{t+\Delta t}{\tau_i^\mu}} \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0)) + \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) \quad (4.10)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t) = \mathbf{C}_\infty : \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)$ e as grandezas $q_i^k(t + \Delta t)$ e $q_i^\mu(t + \Delta t)$ são conhecidas como variáveis internas e dadas, respectivamente, por:

$$q_i^k(t + \Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i^k}} q_i^k(t) + \gamma_i^k \tau_i^k \left(\frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i^k}}}{\Delta t} \right) (\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t))) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{q}_i^\mu(t + \Delta t) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i^\mu}} \mathbf{q}_i^\mu(t) + \gamma_i^\mu \tau_i^\mu \left(\frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i^\mu}}}{\Delta t} \right) (\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) - \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t))) \quad (4.12)$$

Substituindo as expressões (4.11) e (4.12) nas equações (4.9) e (4.10), tem-se

$$\begin{aligned} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) &= \sum_{i=1}^N A_i^k q_i^k(t) + \sum_{i=1}^N (1 + B_i^k) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) - \sum_{i=1}^N B_i^k \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^N C_i^k \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) &= \sum_{i=1}^N A_i^\mu \mathbf{q}_i^\mu(t) + \sum_{i=1}^N (1 + B_i^\mu) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) \\ &- \sum_{i=1}^N B_i^\mu \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t)) + \sum_{i=1}^N C_i^\mu \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde

$$A_i^a = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i^a}} \quad (4.15)$$

$$B_i^a = \gamma_i^a \tau_i^a \left(\frac{1 - A_i^a}{\Delta t} \right) \quad (4.16)$$

$$C_i^a = \gamma_i^a e^{-\frac{t+\Delta t}{\tau_i^a}} \quad (4.17)$$

com $a = k$ ou μ , para estado hidrostático ou desviador, respectivamente.

Usando-se a estratégia de decomposição do estado de tensão em estados hidrostático e desviador, pode-se escrever

$$\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) \cdot \mathbf{1} + \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor unitário de segunda ordem.

Substituindo as Equações (4.13) e (4.14) em (4.18), pode-se chegar a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = & \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^N A_i^k \mathbf{q}_i^k(t) + \sum_{i=1}^N (1 + B_i^k) \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) - \sum_{i=1}^N B_i^k \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t)) \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^N C_i^k \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0)) \right) \cdot \mathbf{1} + \sum_{i=1}^N A_i^\mu \mathbf{q}_i^\mu(t) \\
& + \sum_{i=1}^N (1 + B_i^\mu) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) - \sum_{i=1}^N B_i^\mu \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t)) \\
& + \sum_{i=1}^N C_i^\mu \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0))
\end{aligned} \tag{4.19}$$

que, por simplificação, pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = & \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \mathbf{1} A_i^k \mathbf{q}_i^k(t) + A_i^\mu \mathbf{q}_i^\mu(t) \right) + \bar{B}_a^k \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) \cdot \mathbf{1} \\
& + \bar{B}_a^\mu \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t)) - \left(\bar{B}_b^k \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t)) \cdot \mathbf{1} + \bar{B}_b^\mu \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(t)) \right) \\
& + \bar{C}^k \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0)) \cdot \mathbf{1} + \bar{C}^\mu \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}_\infty(0))
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde

$$\bar{B}_a^k = \sum_{i=1}^N (1 + B_i^k) \qquad \bar{B}_a^\mu = \sum_{i=1}^N (1 + B_i^\mu) \tag{4.21}$$

$$\bar{B}_b^k = \sum_{i=1}^N B_i^k \qquad \bar{B}_b^\mu = \sum_{i=1}^N B_i^\mu \tag{4.22}$$

$$\bar{C}^k = \sum_{i=1}^N C_i^k \qquad \bar{C}^\mu = \sum_{i=1}^N C_i^\mu \tag{4.23}$$

Usando as propriedades do tensor de tensões (Apêndice A), chega-se a

$$\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \mathbf{1} A_i^k q_i^k(t) + A_i^\mu \mathbf{q}_i^\mu(t) \right) + \boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t) : \mathbb{I}_a - \boldsymbol{\sigma}_\infty(t) : \mathbb{I}_b + \boldsymbol{\sigma}_\infty(0) : \mathbb{I}_c \quad (4.24)$$

onde aparecem tensores de 4ª ordem dados por:

$$\mathbb{I}_a = \bar{B}_a^k \mathbb{J}_1 + \bar{B}_a^\mu \mathbb{J}_2 \quad (4.25)$$

$$\mathbb{I}_b = \bar{B}_b^k \mathbb{J}_1 + \bar{B}_b^\mu \mathbb{J}_2 \quad (4.26)$$

$$\mathbb{I}_c = \bar{C}^k \mathbb{J}_1 + \bar{C}^\mu \mathbb{J}_2 \quad (4.27)$$

$$\mathbb{J}_1 = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.28)$$

$$\mathbb{J}_2 = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.29)$$

sendo δ_{mn} o delta de Kronecker.

Buscando-se escrever a Equação (4.24) de forma simplificada e mais parecida com a lei de Hooke, pode-se chegar a seguinte formatação:

$$\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \mathbf{H}(t) + \boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t) : \mathbb{I}_a \quad (4.30)$$

onde,

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{3} \mathbf{1} A_i^k q_i^k(t) + A_i^\mu \mathbf{q}_i^\mu(t) \right) - \boldsymbol{\sigma}_\infty(t) : \mathbb{I}_b + \boldsymbol{\sigma}_\infty(0) : \mathbb{I}_c \quad (4.31)$$

Considerando-se que $\boldsymbol{\sigma}_\infty(t + \Delta t) = \mathbf{C}_\infty : \boldsymbol{\varepsilon}(t + \Delta t)$, as componentes do tensor tensão dado pela Equação (4.30) podem ser expressas na forma

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = H_{ij}(t) + C_{ijkl}^\infty \varepsilon_{kl}(t + \Delta t) \quad (4.32)$$

onde

$$C_{ijkl}^{\infty} = 3K_{\infty} \bar{B}_a^k \mathbb{J}_{1ijkl} + 2G_{\infty} \bar{B}_a^{\mu} \mathbb{J}_{2ijkl} \quad (4.33)$$

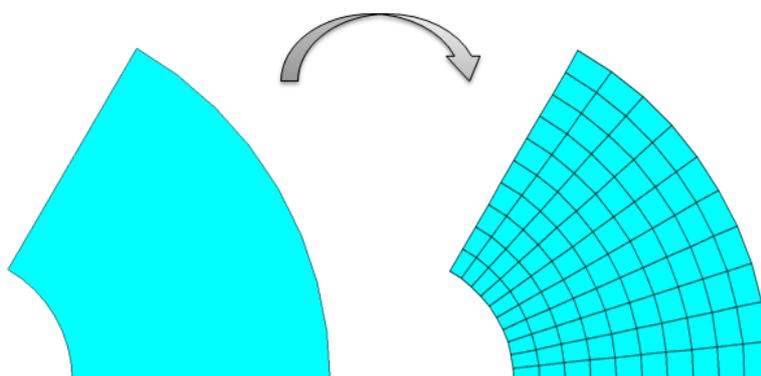
No Apêndice B encontra-se a dedução da Equação (4.33). No tópico seguinte será apresentada a formulação da teoria dos volumes finitos com a incorporação do modelo viscoelástico apresentado aqui.

4.2 Formulação paramétrica viscoelástica da teoria dos volumes finitos para estado plano de deformação generalizado

Aqui, apresenta-se um modelo numérico para a análise bidimensional de estruturas de materiais heterogêneos com constituintes viscoelásticos lineares. Tal modelo tem como base a formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos (TVF) proposta em Cavalcante (2006) e emprega as formulações de variáveis internas e de homogeneização apresentadas, respectivamente, por Tran et al. (2011) e Gattu et al. (2008).

A formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos é uma técnica numérica de solução de problemas de engenharia, assim como o método dos elementos finitos. Para tal, o domínio do problema deve ser discretizado em subvolumes (Figura 45) de geometria quadrilateral.

Figura 45 – Discretização do domínio em subvolumes quadrilaterais.



Fonte: Autor, 2010.

Cada subvolume tem geometria e localização definidas pelos quatro vértices e quatro faces como mostrado na Figura 2, onde também se apresenta o esquema de mapeamento expresso por uma correspondência entre coordenadas (y_2, y_3) cartesianas e (η, ξ) paramétricas.

No problema de estado plano de deformações generalizado, a direção perpendicular ao plano não é discretizada, mas as equações para esta direção existem e são aplicadas em conjunto com as do plano. Neste problema, pode-se tirar partido do desacoplamento entre as equações no plano (*in-plane*) e fora do plano (*out-of-plane*) como visto em Gattu et al. (2008), onde foi utilizada a versão paramétrica da teoria dos volumes finitos para homogeneização de propriedades elásticas.

Os deslocamentos flutuantes dentro de um subdomínio e relativos a um tempo t são aproximados por polinômios do segundo grau conforme mostrado abaixo (Escarpini Filho, 2010):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(t) = & \tilde{U}_{i(00)}(t) + \eta \tilde{U}_{i(10)}(t) + \xi \tilde{U}_{i(01)}(t) + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)\tilde{U}_{i(20)}(t) \\ & + \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)\tilde{U}_{i(02)}(t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde os valores $\tilde{U}_{i(mn)}^t$ representam coeficientes dos campos polinomiais de deslocamento flutuante $\tilde{u}_i(t)$, com $i = 1,2,3$.

Para um passo de tempo $j + 1$, os deslocamentos flutuantes podem ser expressos na forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j+1} = & \tilde{U}_{i(00),j+1} + \eta \tilde{U}_{i(10),j+1} + \xi \tilde{U}_{i(01),j+1} + \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1)\tilde{U}_{i(20),j+1} + \frac{1}{2}(3\xi^2 \\ & - 1)\tilde{U}_{i(02),j+1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Derivando-se os campos de deslocamentos flutuantes dados pela Equação (4.35) em função das coordenadas paramétricas (η e ξ), obtem-se:

$$\frac{\partial \tilde{u}_{i,j+1}}{\partial \eta} = \tilde{U}_{i(10),j+1} + 3\eta \tilde{U}_{i(20),j+1} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{i,j+1}}{\partial \xi} = \tilde{U}_{i(01),j+1} + 3\xi \tilde{U}_{i(02),j+1} \quad (4.37)$$

Os valores médios das derivadas que figuram nas Equações (4.36) e (4.37) nas faces do subvolume são definidos a seguir:

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right\rangle_{j+1, f=2,4} = \tilde{U}_{i(10),j+1} \pm 3\tilde{U}_{i(20),j+1} \quad (4.38)$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \right\rangle_{j+1, f=2,4} = \tilde{U}_{i(01),j+1} \quad (4.39)$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right\rangle_{j+1, f=1,3} = \tilde{U}_{i(10),j+1} \quad (4.40)$$

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \right\rangle_{j+1, f=1,3} = \tilde{U}_{i(01),j+1} \pm 3\tilde{U}_{i(02),j+1} \quad (4.41)$$

onde f representa a face na qual se está aplicando ou calculando a quantidade considerada. Com isso, para f variando de 1 a 4, tem-se a seguinte seqüência de faces $\xi = -1$, $\eta = 1$, $\xi = 1$ e $\eta = -1$. Os termos $\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right\rangle_{j+1, f=1,3}$ representam a média da derivada do campo de deslocamentos flutuante $\tilde{u}_{i,j+1}$ nas faces para $f = 1$ e 3. Assim como em Escarpini Filho (2010), as Equações (4.38)-(4.41) podem ser organizadas na forma de matrizes, para o passo de tempo $j + 1$, para as derivadas fora do plano (*out-of-plane*), como seguem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{j+1, f=2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{1(10)} \\ \tilde{U}_{1(01)} \\ \tilde{U}_{1(20)} \\ \tilde{U}_{1(02)} \end{array} \right\}_{j+1} \quad (4.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{j+1, f=1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{1(10)} \\ \tilde{U}_{1(01)} \\ \tilde{U}_{1(20)} \\ \tilde{U}_{1(02)} \end{array} \right\}_{j+1} \quad (4.43)$$

No plano (*in-plane*), as equações acima tomam a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{j+1, f=2,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{2(10)} \\ \tilde{U}_{2(01)} \\ \tilde{U}_{2(20)} \\ \tilde{U}_{2(02)} \\ \tilde{U}_{3(10)} \\ \tilde{U}_{3(01)} \\ \tilde{U}_{3(20)} \\ \tilde{U}_{3(02)} \end{array} \right\}_{j+1} \quad (4.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{j+1, f=1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pm 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pm 3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_{2(10)} \\ \tilde{U}_{2(01)} \\ \tilde{U}_{2(20)} \\ \tilde{U}_{2(02)} \\ \tilde{U}_{3(10)} \\ \tilde{U}_{3(01)} \\ \tilde{U}_{3(20)} \\ \tilde{U}_{3(02)} \end{array} \right\}_{j+1} \quad (4.45)$$

Pode-se encontrar as derivadas dos campos de deslocamentos flutuantes médios nas faces do subvolume em relação às coordenadas cartesianas com aquelas relativas às coordenadas paramétricas através da matriz inversa da Jacobiana, conforme indicado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y_3} \right\rangle \end{array} \right\}_{j+1, f=1,2,3,4} = [\bar{\mathbf{J}}] \left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \xi} \right\rangle \end{array} \right\}_{j+1, f=1,2,3,4} \quad (4.46)$$

onde $[\bar{\mathbf{J}}]$ é a inversa da matriz Jacobiana e encontra-se no Apêndice C.

A relação entre as deformações médias nas faces e os gradientes médios do campo de deslocamentos flutuantes para fora do plano é expressa como:

$$\begin{Bmatrix} \langle \gamma_{12} \rangle \\ \langle \gamma_{13} \rangle \end{Bmatrix}_{j+1, f=1,2,3,4} = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{12} \\ \bar{\gamma}_{13} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y_3} \right\rangle \end{Bmatrix}_{j+1, f=1,2,3,4} \quad (4.47)$$

Para o plano, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle \\ \langle \gamma_{23} \rangle \end{Bmatrix}_{j+1, f=1,2,3,4} = \begin{Bmatrix} \langle \bar{\varepsilon}_{22} \rangle \\ \langle \bar{\varepsilon}_{33} \rangle \\ \langle \bar{\gamma}_{23} \rangle \end{Bmatrix} + [\mathbf{E}] \begin{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y_3} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y_3} \right\rangle \end{Bmatrix}_{j+1, f=1,2,3,4} \quad (4.48)$$

onde $[\mathbf{E}]$ tem a seguinte forma:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Para o caso de estado plano de deformações generalizado e utilizando a formulação viscoelástica apresentada, pode-se escrever a relação constitutiva como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}_{j+1} = \begin{Bmatrix} H_{12} \\ H_{13} \end{Bmatrix}_j + [\bar{\mathbf{C}}]_{\text{out}} \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}_{j+1} \quad (4.50)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{j+1} = \begin{Bmatrix} H_{22} \\ H_{33} \\ H_{23} \end{Bmatrix}_j + [\bar{\mathbf{C}}]_{\text{in}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}_{j+1} \quad (4.51)$$

Aplicando-se a fórmula de Cauchy, obtém-se a relação entre o vetor e o tensor de tensão na forma

$$\{\mathbf{t}\}_{j+1} = [\boldsymbol{\sigma}]_{j+1} \{\mathbf{n}\} \quad (4.52)$$

ou

$$\{\mathbf{t}_1\}_{j+1} = [\sigma_{12} \quad \sigma_{13}]_{j+1} \begin{Bmatrix} n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{Bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_{j+1} \begin{Bmatrix} n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

onde t_i e n_i representam as componentes de tensão e do vetor unitário normal externo na face em questão e na direção i , respectivamente. Assim, para cada face, tem-se:

$$\{\mathbf{t}\}_{\text{out},j+1,f=1,2,3,4} = ([n_2 \quad n_3] \{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{out},j+1})_{f=1,2,3,4} \quad (4.55)$$

$$\{\mathbf{t}\}_{\text{in},j+1,f=1,2,3,4} = \left(\begin{bmatrix} n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_3 & n_2 \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{in},j+1} \right)_{f=1,2,3,4} \quad (4.56)$$

onde $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{out},j+1}^T = [\sigma_{12} \quad \sigma_{13}]_{j+1}$ e $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{\text{in},j+1}^T = [\sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23}]_{j+1}$.

Reescrevendo-se na forma matricial, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=1} \\ \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=2} \\ \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=3} \\ \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=4} \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\sigma}\}_{j+1,f=1} \\ \{\boldsymbol{\sigma}\}_{j+1,f=2} \\ \{\boldsymbol{\sigma}\}_{j+1,f=3} \\ \{\boldsymbol{\sigma}\}_{j+1,f=4} \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

onde $[\mathbf{N}]$ é uma matriz composta pelas componentes dos vetores normais às faces do subvolume (Apêndice D).

Substituindo-se as Equações (4.50) e (4.51) na (4.57), resulta:

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=1} \\ \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=2} \\ \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=3} \\ \{\mathbf{t}\}_{j+1,f=4} \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{H}\}_j + [\mathbf{N}][\bar{\mathbf{C}}] \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{j+1,f=1} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{j+1,f=2} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{j+1,f=3} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{j+1,f=4} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

onde $[\bar{\mathbf{C}}]$ e $\{\mathbf{H}\}$ encontram-se, respectivamente, nos Apêndices B e D.

Em termos médios, tem-se

$$\langle \{\mathbf{t}\} \rangle_{j+1} = [\mathbf{N}]\langle \{\mathbf{H}\} \rangle_j + [\mathbf{N}][\bar{\mathbf{C}}]\langle \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \rangle_{j+1} \quad (4.59)$$

Substituindo-se as deformações médias na equação acima, chega-se a:

$$\langle \{\mathbf{t}\} \rangle_{j+1} = [\mathbf{N}]\langle \{\mathbf{H}\} \rangle_j + [\bar{\mathbf{A}}]\langle \{\tilde{\mathbf{U}} \} \rangle_{j+1} + [\mathbf{N}][\bar{\mathbf{C}}]\langle \{\boldsymbol{\varepsilon} \} \rangle \quad (4.60)$$

onde $\langle \{\tilde{\mathbf{U}} \} \rangle_{\text{out},j+1}^T = \{ \tilde{\mathbf{U}}_{1(10)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{1(01)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{1(20)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{1(02)} \}_{j+1}$ e

$\langle \{\tilde{\mathbf{U}} \} \rangle_{\text{in},j+1}^T = \{ \tilde{\mathbf{U}}_{2(10)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{2(01)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{2(20)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{2(02)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{3(10)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{3(01)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{3(10)} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{3(10)} \}_{j+1}$ são os vetores com os coeficientes dos campos de deslocamento flutuante e $[\bar{\mathbf{A}}]$ é composta por outras matrizes que são encontradas no Apêndice D.

Isolando-se tais coeficientes das Equações (4.38)-(4.41), pode-se encontrar suas relações com os deslocamentos flutuantes médios nas faces:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i(10),j+1} = \frac{1}{2} (\langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=2} - \langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=4}) \quad (4.61)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i(01),j+1} = \frac{1}{2} (\langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=3} - \langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=1}) \quad (4.62)$$

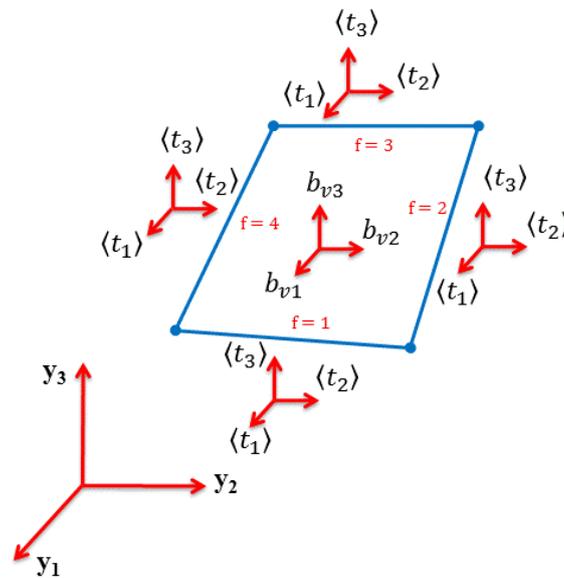
$$\tilde{\mathbf{U}}_{i(20),j+1} = \frac{1}{2} (\langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=2} + \langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=4}) - \tilde{\mathbf{U}}_{i(00),j+1} \quad (4.63)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i(02),j+1} = \frac{1}{2} (\langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=1} + \langle \tilde{\mathbf{u}}_i \rangle_{j+1,f=3}) - \tilde{\mathbf{U}}_{i(00),j+1} \quad (4.64)$$

Considerando-se que os coeficientes $\tilde{\mathbf{U}}_{i(00),j+1}$ ainda são desconhecidos, faz-se necessário o uso das equações de equilíbrio, que podem ser as equações diferenciais de

equilíbrio ou, equivalentemente, as equações de equilíbrio de força nas faces do subvolume. Diferentemente de Escarpini Filho (2010) e Cavalcante (2006), neste estudo, assim como em Aquino (2010), utiliza-se o equilíbrio do subvolume em função dos vetores tensão médios nas faces do mesmo. A Figura 46 mostra um subvolume submetido às tensões médias $\{\langle t \rangle\}$ em suas faces e suas forças volumétricas $\{b_v\}$. As tensões atuam na face f com área $A^{(f)}$.

Figura 46 – Componentes do vetor tensão média nas faces do subvolume para $j + 1$.



Fonte: Autor, 2014.

Aplicando-se as equações de equilíbrio de forças médias em cada direção, encontra-se:

$$\sum_{f=1}^4 \langle t_i \rangle_{j+1}^{(f)} A^{(f)} + b_{v_i, j+1} = 0 \quad (4.65)$$

Substituindo na Equação (4.65) as Equações (4.60)-(4.64) e agrupando os coeficientes $U_{1(00), j+1}$, $U_{2(00), j+1}$ e $U_{3(00), j+1}$ na forma de um vetor, obtém-se:

$$\{\tilde{U}_{00}\}_{j+1} = [\boldsymbol{\phi}]^{-1}[\boldsymbol{\omega}]\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} + [\boldsymbol{\phi}]^{-1}[\boldsymbol{\theta}]\{\tilde{\boldsymbol{u}}\}_{j+1} + [\boldsymbol{\phi}]^{-1}[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{Z}\}_j \quad (4.66)$$

As matrizes $[\boldsymbol{\phi}]$, $[\boldsymbol{\omega}]$, $[\boldsymbol{\theta}]$, $[\boldsymbol{L}]$, $[\boldsymbol{D}]$ e o vetor $\{\boldsymbol{Z}\}$ são apresentados no Apêndice D.

Substituindo-se as Equações (4.61)-(4.64) e (4.66) em (4.60), chegando-se ao seguinte sistema de equações:

$$\{\mathbf{t}\}_{j+1} = [\mathbf{S}]\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} + [\mathbf{K}]\{\tilde{\mathbf{u}}\}_{j+1} + [\mathbf{F}]\{\mathbf{Z}\}_j \quad (4.67)$$

onde

$$[\mathbf{K}] = ([\mathbf{D}][\mathbb{M}_2][\bar{\mathbf{C}}][\mathbf{E}][\mathbf{B}][\mathbf{A}][\mathbf{P}] - [\mathbf{D}][\mathbb{M}_2][\bar{\mathbf{C}}][\mathbf{E}][\mathbf{B}][\mathbf{A}][\mathbf{N}][\boldsymbol{\phi}]^{-1}[\boldsymbol{\theta}]) \quad (4.68)$$

$$[\mathbf{S}] = ([\mathbf{D}][\mathbb{M}_2][\bar{\mathbf{C}}] - [\mathbf{D}][\mathbb{M}_2][\bar{\mathbf{C}}][\mathbf{E}][\mathbf{B}][\mathbf{A}][\mathbf{N}][\boldsymbol{\phi}]^{-1}[\boldsymbol{\omega}]) \quad (4.69)$$

$$[\mathbf{F}] = ([\mathbf{D}] - [\mathbf{D}][\mathbb{M}_2][\bar{\mathbf{C}}][\mathbf{E}][\mathbf{B}][\mathbf{A}][\mathbf{N}][\boldsymbol{\phi}]^{-1}[\mathbf{L}][\mathbf{D}]) \quad (4.70)$$

sendo $[\mathbf{K}]$ a matriz de rigidez local. As Equações (4.67)-(4.70) servem para os problemas fora do plano e no plano, com as devidas matrizes e vetores, que podem ser encontradas no Apêndice D.

4.3 Tensores relaxação e fluência efetivos

As fases viscoelásticas dos compósitos estudados são assumidas serem viscoelásticas lineares e com geometria arbitrária. Com isso, pode-se demonstrar que o comportamento efetivo ou macroscópico do compósito permanece viscoelástico linear (HASHIN, 1965 e 1970a) e geralmente caracterizado por:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_{ij}(t) \rangle = \int_0^t \mathbf{C}^*(t - \tau) \left(\frac{d\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\tau) \rangle}{d\tau} \right) d\tau + \mathbf{C}^*(t) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(0) \rangle \quad (4.71)$$

onde $\langle \boldsymbol{\sigma}_{ij}(t) \rangle = \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} \rangle_V$ e $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\tau) \rangle = \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} \rangle_V$, onde $\langle \cdot \rangle_V$ é a média no volume da célula unitária.

De acordo com Tran et al. (2011), a relação entre as deformações médias e as deformações macroscópicas pode ser escolhida na forma

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(t) \rangle = H(t) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.72)$$

onde $H(t)$ é a função degrau e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é um estado de deformação elementar. Introduzindo (4.72) em (4.71), obtém-se:

$$\langle \sigma_{ij}(t) \rangle = \int_{-\infty}^t \mathbf{C}^*(t - \tau) \bar{\epsilon}_{kl} \delta(\tau) d\tau \quad (4.73)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac. Com ajuda da propriedade

$$\int_{-\infty}^t f(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = f(t) \quad (4.74)$$

chega-se à seguinte expressão:

$$\langle \sigma_{ij}(t) \rangle = \mathbf{C}^*(t) \bar{\epsilon}_{kl} \quad (4.75)$$

onde $\langle \sigma(t) \rangle$ é a tensão média na célula unitária e $\bar{\epsilon}$ a deformação macroscópica aplicada na condição de contorno homogênea. A deformação macroscópica será utilizada para encontrar as matrizes de concentração de deformações de Hill através da seguinte expressão:

$$\langle \epsilon \rangle^{(k)}(t + \Delta t) = \mathbb{A}^{(k)}(t + \Delta t) \bar{\epsilon} \quad (4.76)$$

onde $\langle \epsilon \rangle^{(k)}(t + \Delta t)$ e $\mathbb{A}^{(k)}(t + \Delta t)$ são a deformação média e a matriz de concentração de deformação no subvolume k para um tempo $(t + \Delta t)$, respectivamente. A matriz de concentração de deformação é obtida pela aplicação das deformações macroscópicas no tempo, resolvendo-se a Equação (4.67).

Substituindo a relação constitutiva dada pela Equação (4.32) na Equação (3.28), tem-se, na forma indicial, a seguinte relação:

$$\bar{\sigma}_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} \langle H_{ij}(t) \rangle^{(k)} + \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} C_{ijkl}^{\infty (k)} \langle \epsilon_{kl}(t + \Delta t) \rangle^{(k)} \quad (4.77)$$

Substituindo a Equação (4.77) na Equação (4.76) discretizada no tempo, pode-se encontrar a relação constitutiva utilizando a matriz de concentração de deformação, como segue:

$$\bar{\sigma}_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} \langle H_{ij}(t) \rangle^{(k)} + \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} C_{ijkl}^{\infty (k)} A_{klmn}^{(k)}(t + \Delta t) \bar{\epsilon}_{mn} \quad (4.78)$$

Vale ressaltar que a deformação macroscópica independe do tempo, uma vez que a mesma é aplicada como condição de contorno para um ensaio de relaxação. Para o tempo $t = 0$, as variáveis internas $q_i^k(0)$ e $\mathbf{q}_i^{\mu}(0)$ são nulas, assim, o tensor $\mathbf{H}(t)$, o qual está definido na Equação (4.31), toma a seguinte forma:

$$\mathbf{H}(0) = -\boldsymbol{\sigma}_{\infty}(0) : \mathbb{I}_{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\sigma}_{\infty}(0) : \mathbb{I}_{\mathbf{c}} \quad (4.79)$$

Para $t < 0$, tem-se $\mathbf{H}(t) = 0$, podendo-se reescrever a Equação (4.78) como segue:

$$\bar{\sigma}_{ij}(0) = C_{ijmn}^* \bar{\epsilon}_{mn} = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} C_{ijkl}^{\infty (k)} A_{klmn}^{(k)}(0) \bar{\epsilon}_{mn} \quad (4.80)$$

onde o tensor relaxação efetiva pode ser expresso como

$$C_{ijkl}^* = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} C_{ijkl}^{\infty (k)} A_{klmn}^{(k)}(0) \quad (4.81)$$

que corresponde ao tensor constitutivo efetivo elástico. Dessa forma, em um tempo $t + \Delta t$ qualquer, pode-se chegar à seguinte relação:

$$C_{ijkl}^*(t + \Delta t) \bar{\epsilon}_{kl} = \sum_{k=1}^{N_k} v^{(k)} \left[\langle H_{ij}(t) \rangle^{(k)} + C_{ijkl}^{\infty (k)} A_{klmn}^{(k)}(t + \Delta t) \bar{\epsilon}_{mn} \right] \quad (4.82)$$

onde as componentes do tensor relaxação efetivo viscoelástico $C_{ijkl}^*(t + \Delta t)$ podem ser obtidas a medida que a deformação macroscópica é aplicada ao problema. Nesta etapa já se tem conhecida a matriz $A_{klmn}^{(k)}(t + \Delta t)$. Por exemplo, aplicando-se $\bar{\epsilon} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, pode-se encontrar a primeira coluna do tensor C^* .

As componentes do tensor relaxação efetivo $C_{ijkl}^*(t)$ serão calculadas numericamente para tempos discretos t_p , os quais podem ser interpolados para se obter uma função de relaxação no tempo. No presente trabalho, a função de interpolação escolhida tem a mesma forma que a função de relaxação para o modelo viscoelástico linear de Maxwell generalizado, que é a série de Prony dada pela Equação (4.4).

A função interpoladora pode ser ajustada para a quantidade de parâmetros/elementos de Maxwell que for desejado, buscando-se a melhor correlação com os dados efetivos e o custo computacional.

De posse da função de relaxação efetiva, pode-se facilmente usar a transformada de Laplace para obtê-la no domínio de Laplace, na seguinte forma:

$$\bar{G}(s) = \frac{E_\infty}{s} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{E_i}{s + \frac{1}{\tau_i}} \right) \quad (4.83)$$

Retornando para a relação entre o histórico de tensão e o de deformação Equação (4.84), que pode ser escrita utilizando-se a integral de convolução de Duhamel, tem-se

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau + G(t) \varepsilon(0) \quad (4.84)$$

onde $G(t)$ é a função de relaxação. Através do uso da função de fluência $J(t)$, pode-se expressar, alternativamente, a relação entre tensão e deformação como:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \sigma(\tau) d\tau + J(t) \sigma(0) \quad (4.85)$$

Usando transformada de Laplace, resultam das Equações (4.84) e (4.85) as seguintes expressões:

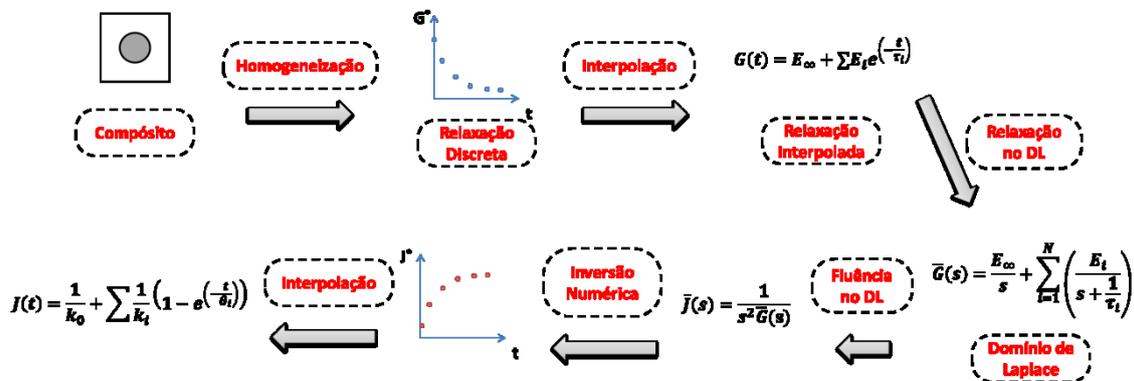
$$\bar{\sigma}(s) = s\bar{G}(s)\bar{\varepsilon}(s), \quad \bar{\varepsilon}(s) = s\bar{J}(s)\bar{\sigma}(s) \quad (4.86)$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace. Pelas Equações (4.86), a relação entre as transformadas de Laplace da função de fluência, $\bar{J}(s)$, e da função relaxação, $\bar{G}(s)$, pode ser obtida como segue:

$$\bar{J}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{G}(s)} \quad (4.87)$$

Dessa forma, obtida a função relaxação efetiva $G(t)$ através do processo de interpolação acima referido, pode-se obter a correspondente função de fluência utilizando-se a Equação (4.87). É importante salientar que nem sempre a inversão do domínio de Laplace para o domínio do tempo pode ser realizada analiticamente, necessitando muitas vezes a realização de uma inversão numérica. Nestes casos, uma nova interpolação pode ser feita para se obter uma série de Prony para a função de fluência efetiva. Os procedimentos envolvidos nesta operação estão apresentados sequencialmente no esquema da Figura 47.

Figura 47 – Esquema de obtenção da função de fluência efetiva.



Fonte: Autor, 2014.

4.4 Elemento de interface imperfeita para homogeneização viscoelástica

Na literatura existem alguns modelos de interface imperfeita com interface viscoelástica. Dentre esses encontram-se Li e Weng (1996), que estudaram os efeitos da interface viscoelástica no comportamento na fluência, na tensão e na deformação de compósitos; Gosz et al. (1991), que estudaram o comportamento transversal de compósitos com microestrutura periódica hexagonal e com interface viscoelástica utilizando o método dos elementos finitos; Hashin (1991a), que determinou através do princípio da correspondência os módulos efetivos de relaxação e fluência para compósitos com reforço unidirecional e

particulado; Fisher e Brinson (2001), que utilizaram modelos teóricos da micromecânica para prever as propriedades efetivas e compararam com análises em elementos finitos; Friebel et al. (2006), que encontraram as propriedades efetivas utilizando homogeneização de campos médios; Monchiet e Bonnet (2010), que desenvolveram modelos interfaciais para interfase viscoplástica e; Pan et al. (2013), que estudaram os efeitos do deslizamento interfacial dependente do tempo na fluência, na relaxação da tensão, na sensibilidade da taxa de deformação e nos módulos de armazenamento e perda de compósitos de nanotubos de carbono com matriz polimérica.

Esta seção tem por objetivo mostrar o desenvolvimento do elemento de interface do tipo mola com constituinte viscoelástico, tendo como base os trabalhos de Benveniste (1985, 2006), Benveniste e Miloh (2001) e Rubin e Benveniste (2004), nos quais a interfase é elástica, fina, curvada arbitrariamente, de espessura constante h e localizada entre a fibra e a matriz de um material compósito.

Dessa forma, pretende-se modelar um elemento de interface imperfeita viscoelástica tomando como base o elemento de interface imperfeita elástica (Equação (3.49)), utilizando, para isso, o princípio da correspondência como em Hashin (1991b).

Como nos modelos desenvolvidos para os problemas térmico e elástico, aqui o objetivo é substituir a interfase por uma interface que leva em consideração a continuidade em tensão e descontinuidade em deslocamento, gerando, assim, uma interface imperfeita. Esse tipo de interface é conhecido como interface do tipo mola, pois sua rigidez relativa é muito menor em comparação com as dos outros constituintes.

Para o modelo descrito, considerando $\frac{h}{a} \ll 1$, sendo a o raio da fibra e $E_i \ll E_f$, tem-se

$$t_i^f = t_i^m = D_i((u_i)_+ - (u_i)_-) \quad (4.88)$$

onde t_i^j é a tensão na direção i (s – eixo saindo do plano, t – tangente à interface, n – normal à interface apontando para matriz) e no material j (f – fibra ou m – matriz). D_i e u_i são a rigidez e o deslocamento na direção i , respectivamente.

Hashin (1990) mostrou que para a interface do tipo mola as equações constitutivas elásticas e viscoelásticas apresentam formas equivalentes pelo princípio da correspondência. Também mostrou que as equações de descontinuidade em deslocamento podem ser escritas na forma de integrais de convolução, como segue:

$$t_i = D_i(t) \llbracket u_i(0) \rrbracket + \int_0^t D_i(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \llbracket u_i(t') \rrbracket dt' \quad (4.89)$$

onde t_i , D_i e u_i representam, respectivamente, a tensão, a função módulo de relaxação e o deslocamento na direção i . $\llbracket u \rrbracket$ representa a descontinuidade em deslocamento, t é o tempo e t' é a variável de integração.

As funções de relaxação para o modelo viscoelástico linear de Maxwell generalizado tem a seguinte forma:

$$D_i = D_{i\infty} + \sum_{j=1}^N D_{ij} e^{-t/\tau_{ij}} \quad (4.90)$$

sendo N o número de elementos do tipo Maxwell.

Substituindo (4.90) em (4.89), tem-se:

$$\begin{aligned} t_i(t) = & \left(D_{i\infty} + \sum_{j=1}^N D_{ij} e^{-t/\tau_{ij}} \right) \llbracket u_i(0) \rrbracket + \int_0^t D_{i\infty} \llbracket \dot{u}(t') \rrbracket dt' \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^t D_{ij} e^{-\frac{t-t'}{\tau_{ij}}} \llbracket \dot{u}(t') \rrbracket dt' \end{aligned} \quad (4.91)$$

onde $(\dot{})$ representa derivada em relação ao tempo. Adotando $\gamma_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_{i\infty}}$ e introduzindo

$$q_{ij}(t) = \int_0^t D_{ij} e^{-\frac{t-t'}{\tau_{ij}}} \llbracket \dot{u}(t') \rrbracket dt' \quad (4.92)$$

como variável interna, pode-se chegar a:

$$t_i(t) = \sum_{j=1}^N q_{ij}(t) + D_{i\infty} \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} e^{-t/\tau_{ij}} \llbracket u_i(0) \rrbracket + D_{i\infty} \llbracket u_i(t) \rrbracket \quad (4.93)$$

que apresenta forma similar à Equação 6 de Tran et al. (2011), mostrada a seguir

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^N q_i(t) + \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \sigma_{\infty}(0) + \sigma_{\infty}(t) \quad (4.94)$$

Aplicando o mesmo procedimento incremental no tempo encontrado em Tran et al. (2011), as variáveis internas podem ser reescritas da seguinte forma

$$q_{ij}^{n+1} = e^{-\Delta t/\tau_{ij}} q_{ij}^n + D_{i\infty} \gamma_{ij} \tau_{ij} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}}}{\Delta t} \right) (\llbracket u_i^{n+1} \rrbracket - \llbracket u_i^n \rrbracket) \quad (4.95)$$

ou simplificando

$$q_{ij}^{n+1} = e^{-\Delta t/\tau_{ij}} q_{ij}^n + \frac{\eta_{ij}}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}} \right) (\llbracket u_i^{n+1} \rrbracket - \llbracket u_i^n \rrbracket) \quad (4.96)$$

Dessa maneira, a forma incremental da Equação (4.93) se torna:

$$t_i^{n+1} = \sum_{j=1}^N q_{ij}^{n+1} + D_{i\infty} \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} e^{-t^{n+1}/\tau_{ij}} \llbracket u_i^0 \rrbracket + D_{i\infty} \llbracket u_i^{n+1} \rrbracket \quad (4.97)$$

A Equação (4.97) encontra-se definida no sistema de eixos curvilíneo de acordo com a Figura 25. Para incorporar tal equação, que representa a relação constitutiva viscoelástica da interface imperfeita, na versão paramétrica da teoria dos volumes finitos necessita-se transformá-la para o sistema de eixos cartesianos. Este procedimento é realizado através da aplicação de uma matriz de transformação, $[T]$, definida com os cossenos diretores entre os eixos do sistema de coordenadas curvilíneo e cartesiano. Assim, o sistema de equações para o sistema de eixos cartesianos é dado pela expressão:

$$[t]^{n+1} = [K_1]^{n+1} [u]^0 + [K_2] [u]^{n+1} - [K_3] [u]^n + [K_4] [q]^n \quad (4.98)$$

onde

$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}]^{nT} &= [u_1^f \quad u_2^f \quad u_3^f \quad u_1^m \quad u_2^m \quad u_3^m]^n \\
[\mathbf{K}_1]^{n+1} &= [\mathbf{T}]^T [\mathbf{F}] [\mathbf{G}]^{n+1} [\mathbf{T}] \\
[\mathbf{K}_2] &= [\mathbf{T}]^T [\mathbf{F}] [\mathbf{T}] + [\mathbf{T}]^T [\mathbf{H}] [\mathbf{T}] \\
[\mathbf{K}_3] &= [\mathbf{T}]^T [\mathbf{F}] [\mathbf{H}] [\mathbf{T}] \\
[\mathbf{K}_4] &= [\mathbf{T}]^T [\mathbf{M}]
\end{aligned} \tag{4.99}$$

com

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) & -\text{cos}(\theta) \\ 0 & -\text{cos}(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 & \text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

$$[\mathbf{F}] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} G_\infty^i & 0 & 0 \\ 0 & G_\infty^i & 0 \\ 0 & 0 & K_\infty^i + \frac{4}{3} G_\infty^i \end{bmatrix} \tag{4.101}$$

onde i representa o material da interfase

$$[\mathbf{G}]^{n+1} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \gamma_{1j} e^{-\frac{t^{n+1}}{\tau_{1j}}} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^N \gamma_{2j} e^{-\frac{t^{n+1}}{\tau_{2j}}} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^N \gamma_{3j} e^{-\frac{t^{n+1}}{\tau_{3j}}} \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \rightarrow a_i = \sum_{j=1}^N \frac{\eta_{ij}}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{ij}}} \right) \tag{4.103}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{1j}}} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^N e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{2j}}} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=1}^N e^{-\frac{\Delta t}{\tau_{3j}}} \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Considerando que o material da interfase seja isotrópico, viscoelástico em cisalhamento (*shear*) e elástico em estado volumétrico (*bulk*), tem-se

$$D_t(t) = D_s(t) = \frac{G^i(t)}{h} \quad (4.105)$$

$$D_n(t) = \frac{K^i}{h} + \frac{4}{3} \frac{G^i(t)}{h} \quad (4.106)$$

4.5 Exemplos e Resultados

4.5.1 Estudo do comportamento de materiais com constituintes viscoelásticos

Buscando verificar o desempenho da formulação desenvolvida para homogeneização de compósitos viscoelásticos, tomando como base o trabalho de Tran et al. (2011), inicialmente foram estudados problemas de relaxação para modelos simples, como expostos a seguir. Na sequência, a técnica de homogeneização viscoelástica foi utilizada, considerando-se a interfase.

4.5.2 Modelo uniaxial com 5 elementos do tipo Maxwell Generalizado

Este exemplo refere-se ao estudo da relaxação de tensões em uma chapa homogênea quadrada de 20x20 cm, submetida a um deslocamento prescrito $\delta = 0,1$ cm em sua extremidade direita e restrições de translações na extremidade esquerda, para uma malha com 16 subvolumes. O material considerado para a chapa tem comportamento viscoelástico em estado desviador e volumétrico de tensões, e apresenta as propriedades encontradas na Tabela 4.

Tabela 4 – Propriedades elásticas e viscosas do material (TRAN et al., 2011).

Elemento					
∞	1	2	3	4	5
Molas					
Módulo de Elasticidade Volumétrico (K em MPa)					
9500,68	96,25	178,89	354,17	262,50	384,67
Módulo de Elasticidade Transversal (G em MPa)					
5537,02	105,00	134,17	163,462	286,36	230,80
Amortecedores					
Tempo de Relaxação Volumétrico (η em MPa·dias)					
-	83833,33	141944,40	290750,00	209583,30	438466,67
Tempo de Relaxação Transversal (η em MPa·dias)					
-	92454,55	106458,30	134192,30	228636,40	263080,00

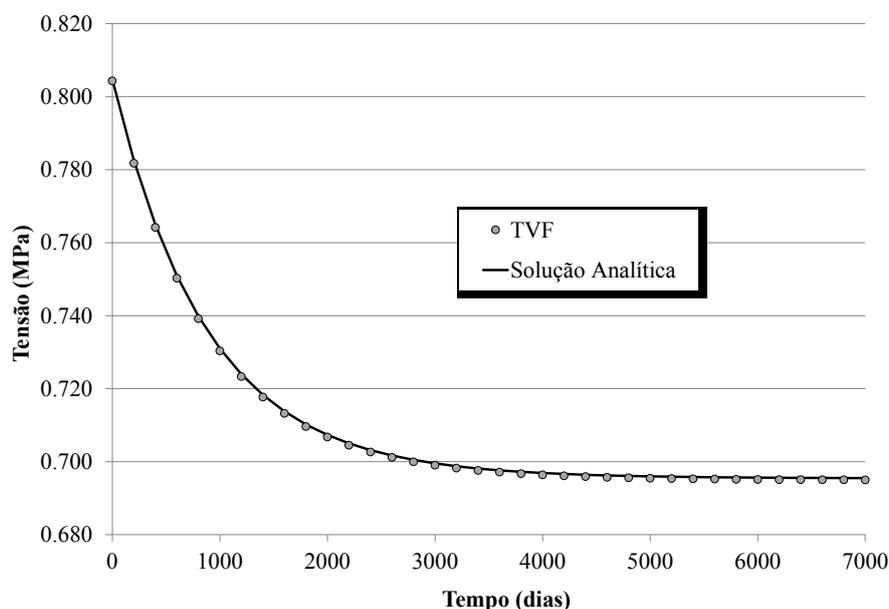
Fonte: Autor, 2014.

Os resultados obtidos pela TVF foram comparados com a resposta analítica para o modelo de Maxwell Generalizado, expressa como:

$$\sigma(t) = \left(E_{\infty} + \sum_{i=1}^5 E_i e^{\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)} \right) \varepsilon \quad (4.107)$$

onde a deformação é dada por

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (4.108)$$

Figura 48 – Relaxação das tensões para problema de deslocamento prescrito uniaxial.

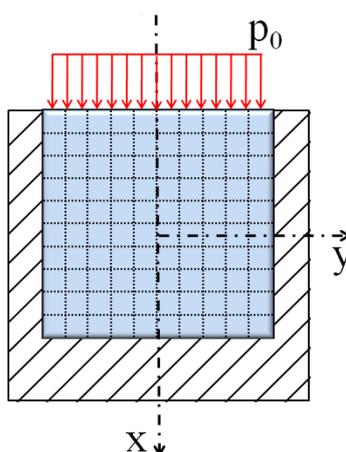
Fonte: Autor, 2014.

A partir da Figura 48, percebe-se claramente a excelente concordância entre as respostas encontradas com aquelas obtidas analiticamente.

4.5.3 Comportamento de bloco viscoelástico confinado

Como se pôde observar no exemplo anterior, a formulação desenvolvida mostrou-se uma ótima ferramenta para estudar/modelar problemas viscoelásticos uniaxiais. No atual exemplo, estuda-se a relaxação de tensões no domínio bidimensional em estado plano de deformações, onde um bloco viscoelástico é confinado em um container rígido e pressionado em sua única superfície livre por uma pressão $p_0 = 10$ MPa, de acordo com a Figura 49.

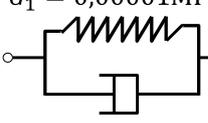
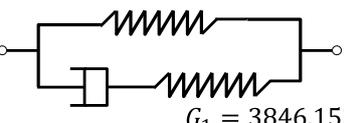
Figura 49 – Modelo de confinamento em container com a discretização utilizada.



Fonte: Escarpini Filho, 2010.

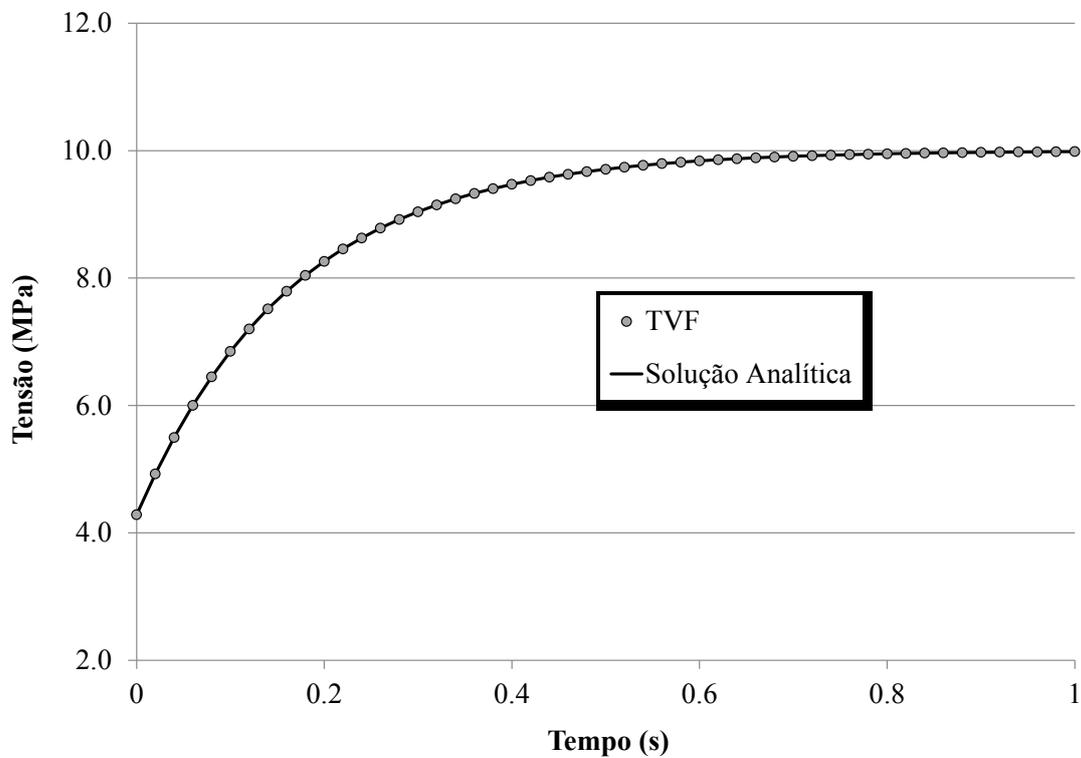
Respostas para esse exemplo podem ser encontradas no trabalho de Escarpini Filho (2010), onde também foi utilizada a TVF, porém para o modelo viscoelástico de Kelvin Generalizado. No exemplo atual, o estudo é realizado com o modelo de Maxwell Generalizado, onde as propriedades para ambos os modelos viscoelásticos encontram-se na Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades elásticas e viscosas do bloco confinado

	Estado Volumétrico	Estado Desviador
Kelvin	$K = 8333,333\text{MPa}$ 	$G_1 = 0,00001\text{MPa}$  $\eta = 400\text{MPa}\cdot\text{s}$ $G_2 = 3846,15400\text{MPa}$ 
Maxwell	$K = 8333,333\text{MPa}$ 	$G_\infty = 0,00001\text{MPa}$  $\eta_1 = 400\text{MPa}\cdot\text{s}$ $G_1 = 3846,15399\text{MPa}$

Fonte: Escarpini Filho et al., 2010.

No gráfico de comparação dos resultados (Figura 50), percebe-se a boa concordância encontrada.

Figura 50 – Comparação dos resultados para a tensão horizontal.

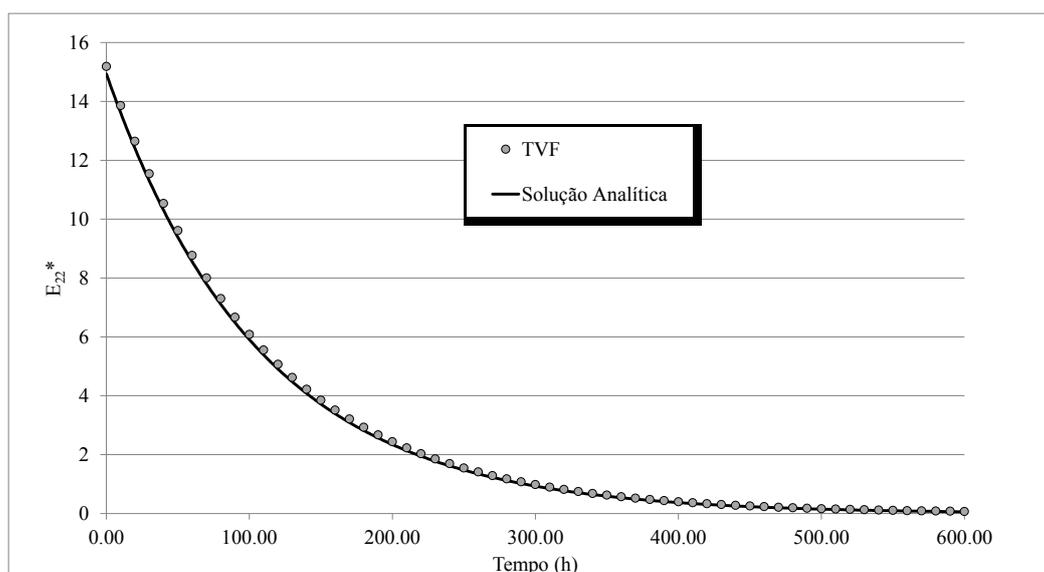
Fonte: Autor, 2014.

4.5.4 Homogeneização de compósito reforçado por fibra elástica com matriz viscoelástica

Neste tópico, um problema de homogeneização de compósito viscoelástico com fibras longas é modelado e comparado com a solução analítica apresentada em Luciano e Barbero (1995). Neste exemplo, o modelo de Maxwell generalizado é simplificado para possibilitar a modelagem de um modelo de Maxwell simples, considerando-se a mola em paralelo tendo rigidez aproximadamente nula.

A matriz é considerada viscoelástica linear através do modelo de Maxwell, com coeficiente de Poisson constante $\nu_m = 0,38$, módulo de elasticidade $E = 3,27\text{GPa}$ e viscosidade $\eta = 300\text{ GPa} \cdot \text{h}$. A fibra é elástica com $E = 68,67\text{ GPa}$ e $\nu_f = 0,21$. O compósito apresenta 54% de fração volumétrica de fibras.

Figura 51 – Relaxação do módulo de elasticidade transverso efetivo.



Fonte: Autor, 2014.

A partir do problema de homogeneização, pode-se encontrar as funções de relaxação efetiva do compósito. Na Figura 51 apresenta-se a redução sofrida pelo módulo de elasticidade transverso efetivo do compósito ao longo do tempo. Percebe-se a boa concordância entre os resultados obtidos através da teoria dos volumes finitos e aqueles encontrados pela solução analítica, onde foi utilizado o PMM (*Periodic Microstructure Method*) para problemas viscoelásticos inicialmente apresentado em Luciano e Barbero (1995).

4.5.5 Estudo da influência da interfase em compósitos com constituintes viscoelásticos

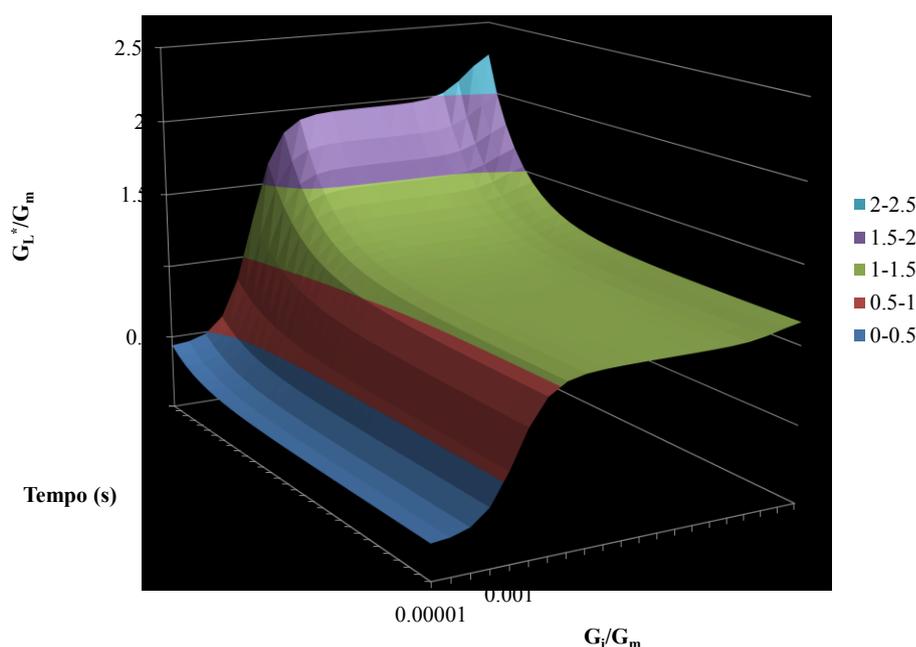
Aqui, serão apresentados dois exemplos. O primeiro trata-se do exemplo encontrado em Wükner et al. (2013), onde aqui é refeito considerando-se que tanto a matriz quanto a interfase/interface imperfeita são viscoelásticas. O segundo exemplo foi retirado do trabalho de Hashin (1991c), que apresenta solução analítica para obtenção das propriedades efetivas considerando a presença da interface.

4.5.6 Homogeneização Viscoelástica – Exemplo Wükner

Os parâmetros viscoelásticos foram considerados de forma que para o tempo inicial ($t = 0s$) as respostas se igualem às da Figura 33. Assim, tem-se para a matriz $G_\infty = 0,5 \text{ GPa}$, $\nu = 0,35$, $G_1 = 1,35 \text{ GPa}$ e $\eta = 50 \text{ GPa} \cdot s$. As propriedades da fibra são $G = 10 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,2$. Como no exemplo puramente elástico, as propriedades da interfase/interface imperfeita variam em função das propriedades da matriz, considerando-se o tempo de relaxação constante e de valor igual ao da matriz ($\eta = 50 \text{ GPa} \cdot s$).

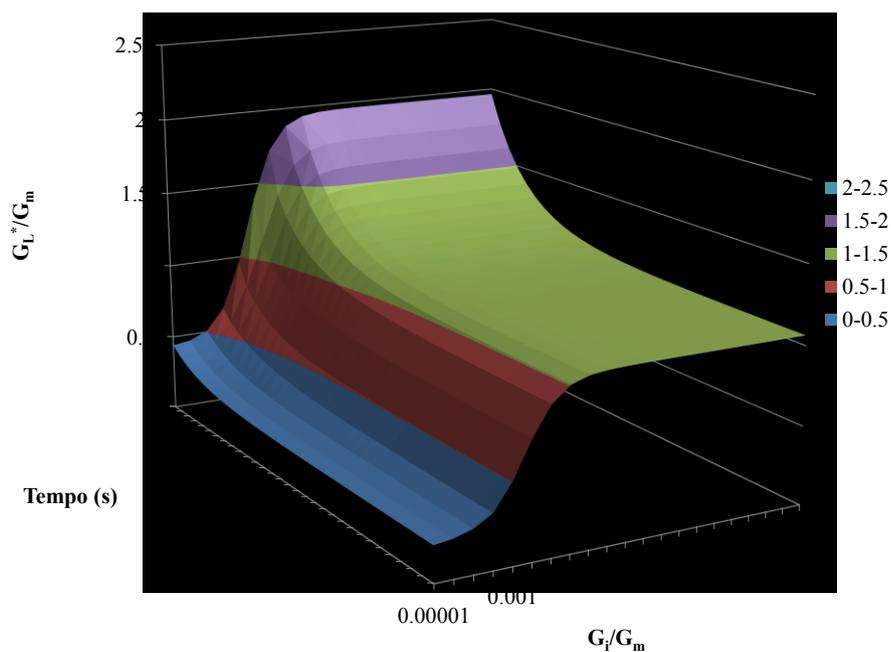
Para o caso do modelo com três fases, a resposta dependente do tempo segue na Figura 52, onde para o tempo $t = 0$ tem-se exatamente a resposta encontrada na Figura 33.

Figura 52 – Comportamento dependente do tempo para modelo 3 fases.



De forma similar, encontra-se a resposta para o modelo com interface imperfeita (Figura 53), que, no tempo zero coincide com o resultado encontrado na Figura 34.

Figura 53 – Comportamento dependente do tempo para modelo com interface imperfeita.

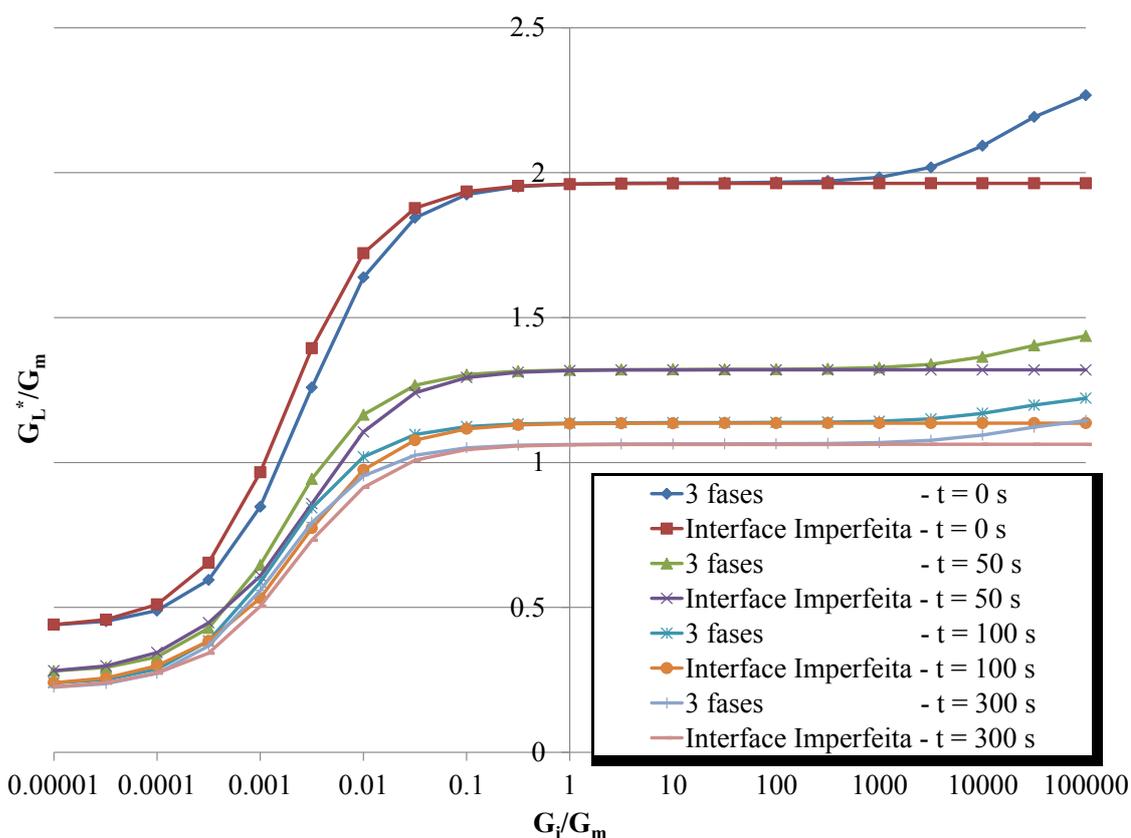


Fonte: Autor, 2014.

Nos gráficos apresentados, a legenda lateral representa a faixa de variação das propriedades efetivas, sendo seu uso apenas para facilitar a visualização.

Percebe-se que, ao longo do tempo, as propriedades, independente da razão G_i/G_m , diminuem, mostrando a existência de uma redução. Para uma melhor visualização dos resultados, na Figura 54 são apresentados os resultados para alguns tempos de simulação.

Figura 54 – Comparação entre as respostas obtidas para diferentes tempos.



Fonte: Autor, 2014.

Como pode ser observado, as respostas para os dois modelos em todos os tempos analisados foram boas, apresentando pequenas diferenças no intervalo $0,0001 < G_i/G_m < 0,01$. Essa variação entre as respostas ocorreu devido a pouca discretização no eixo horizontal.

4.5.7 Homogeneização Viscoelástica – Exemplo Hashin

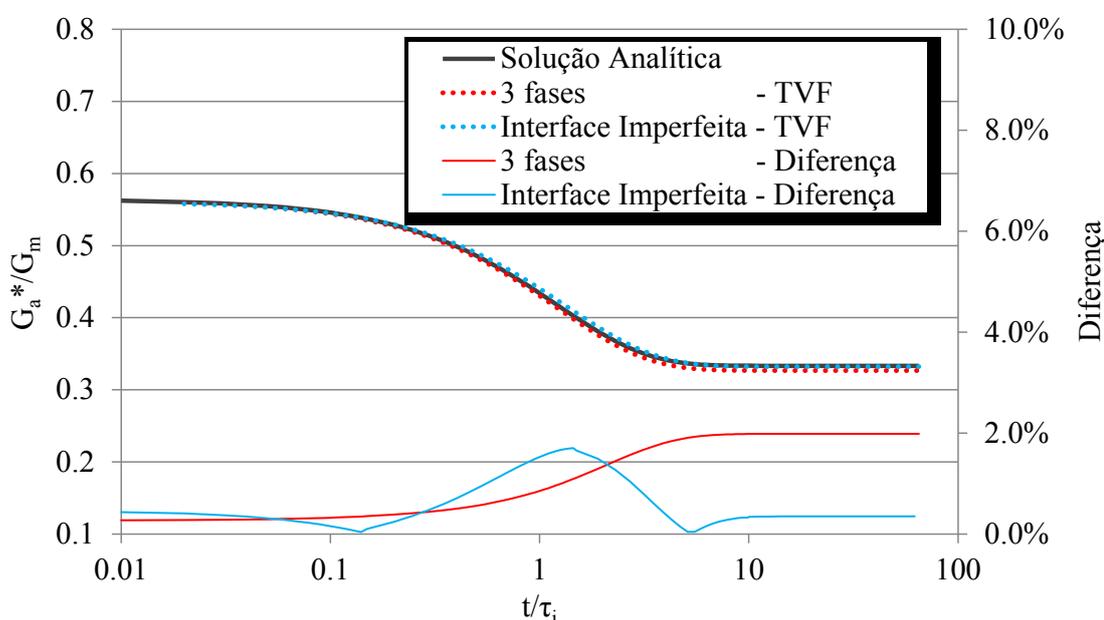
Para uma melhor comparação dos resultados obtidos até o presente momento, buscou-se comparar a versão paramétrica da teoria dos volumes finitos com exemplos que apresentassem soluções experimentais e/ou numéricas e/ou analíticas. Dessa forma, neste exemplo a TVF é comparada com a solução analítica apresentada por Hashin (1991c), que obtém as propriedades efetivas de um compósito com fibras longas, considerando a presença de interfase viscoelástica entre a fibra e a matriz, que são consideradas elásticas.

Esse estudo é realizado com um compósito cerâmico, consistindo de 50% de fibras de SiC e 50% de matriz de BSi. As propriedades mecânicas têm os seguintes valores: $E_f =$

193 GPa, $v_f = 0,2$ para a fibra e $E_m = 62,7$ GPa e $v_m = 0,22$ para a matriz. De acordo com Hashin (1991c), o coeficiente de Poisson inicial da interfase é $\nu_i(0) = 0,375$ e será adotado o tempo de relaxação $\tau_i = \frac{\eta_i}{G_i} = 1$.

Hashin (1991c) define um parâmetro adimensional $q = \frac{h G_f}{r G_i}$, cujos valores adotados são os seguintes: $q = 10$, $h = 20$ nm (espessura da interfase), $r = 100\mu m$ (raio da fibra) e $G_i = 1,608 \cdot 10^{-5}$ GPa.

Figura 55 – Comparação entre as respostas numérica e analítica para os módulos de elasticidade transversais para o eixo axial.



Fonte: Autor, 2014.

De acordo com o gráfico da Figura 55, pode-se observar a grande concordância entre os resultados numéricos para os modelos com 3 fases e com 2 fases e interface imperfeita em relação ao resultado analítico encontrado por Hashin (1991c), obtendo-se uma diferença máximo de aproximadamente 2%. Esse valor ocorre devido a dois fatores: 1) a consideração da terceira fase (interfase), que faz com que a fração volumétrica de fibras e de matriz não seja exatamente 50%, e o segundo consiste na geometria da célula unitária, a qual, no modelo de Hashin, conhecido como *composite cylinder assemblage* (CCA), é admitida como circular, diferente da forma quadrada adotada no presente trabalho. Ressalta-se que Hashin utiliza um artifício para incluir a interfase, que consiste na substituição das propriedades da fibra por propriedades equivalentes, as quais consideram a influência da interfase e mantém as frações volumétricas iguais a 50%.

4.5.8 Homogeneização viscoelástica de compósito laminado com microestrutura ondulada e interface imperfeita

Este último exemplo trata de um compósito laminado com ondulação e com constituinte viscoelástico. Neste compósito são estudados os efeitos nas propriedades efetivas com a consideração de interfase e interface imperfeita.

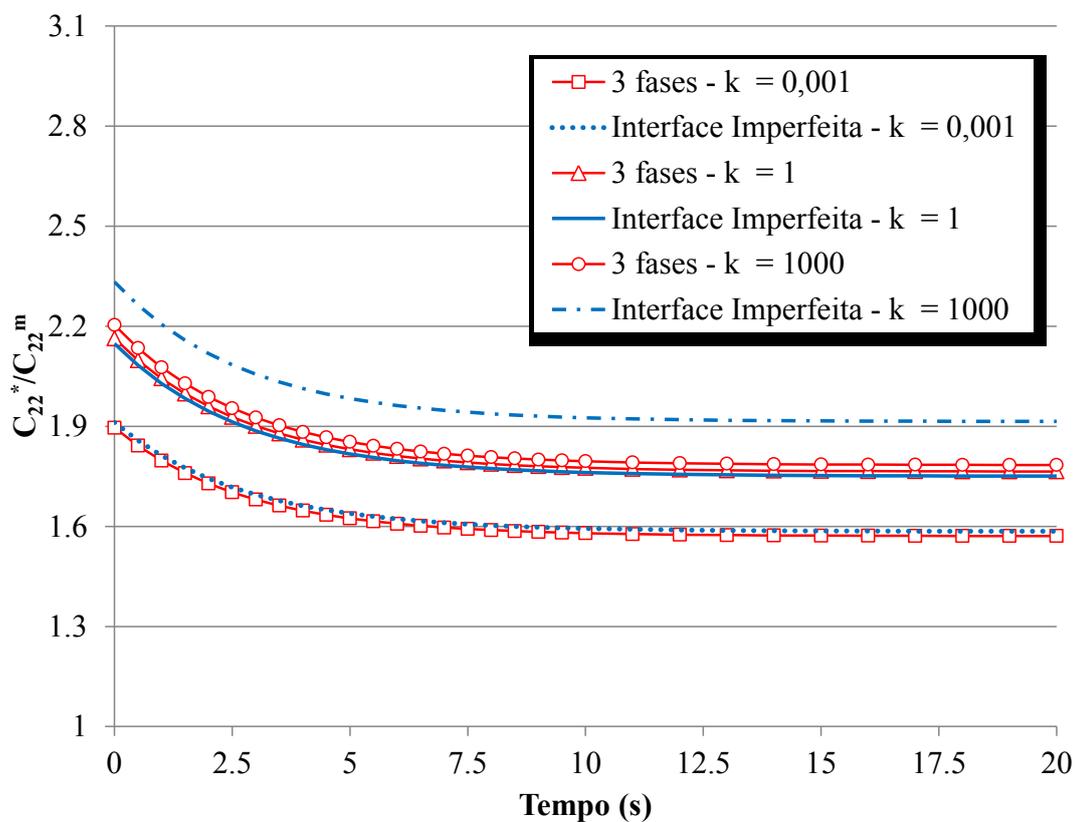
Os modelos aqui estudados são compostos de laminados planos e ondulados (10% de ondulação), com uma e duas camadas, com 20% de fração volumétrica de inclusões/reforço. As interfases, quando consideradas, têm espessura $h = 20 \text{ nm}$.

A matriz é considerada viscoelástica através do modelo de Maxwell generalizado, com propriedades $E_\infty = 72,4 \text{ GPa}$ e $\nu_m = 0,3$, $E_a = 36,2 \text{ GPa}$ e $\eta = 100 \text{ GPa} \cdot \text{s}$. O material de reforço empregado é o carboneto de silício com módulo de elasticidade $E = 420 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. A interfase, por sua vez, é considerada elástica com $E = 3,2 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$.

A seguir, são mostrados os resultados para a componente 22 do tensor relaxação efetivo para cada um dos compósitos laminados descritos, onde o comportamento dependente do tempo é estudado para diferentes relações $k = G_i/G_m$.

De acordo com a Figura 56, percebe-se uma excelente concordância entre os resultados para os modelos de 3 fases e interface imperfeita, tanto para $k = 0,001$ quanto para $k = 1$. No caso de $k = 1000$, a resposta para o modelo 3 fases se afasta da resposta para o modelo de interface imperfeita, que está de acordo com o modelo matemático empregado para simular a interfase.

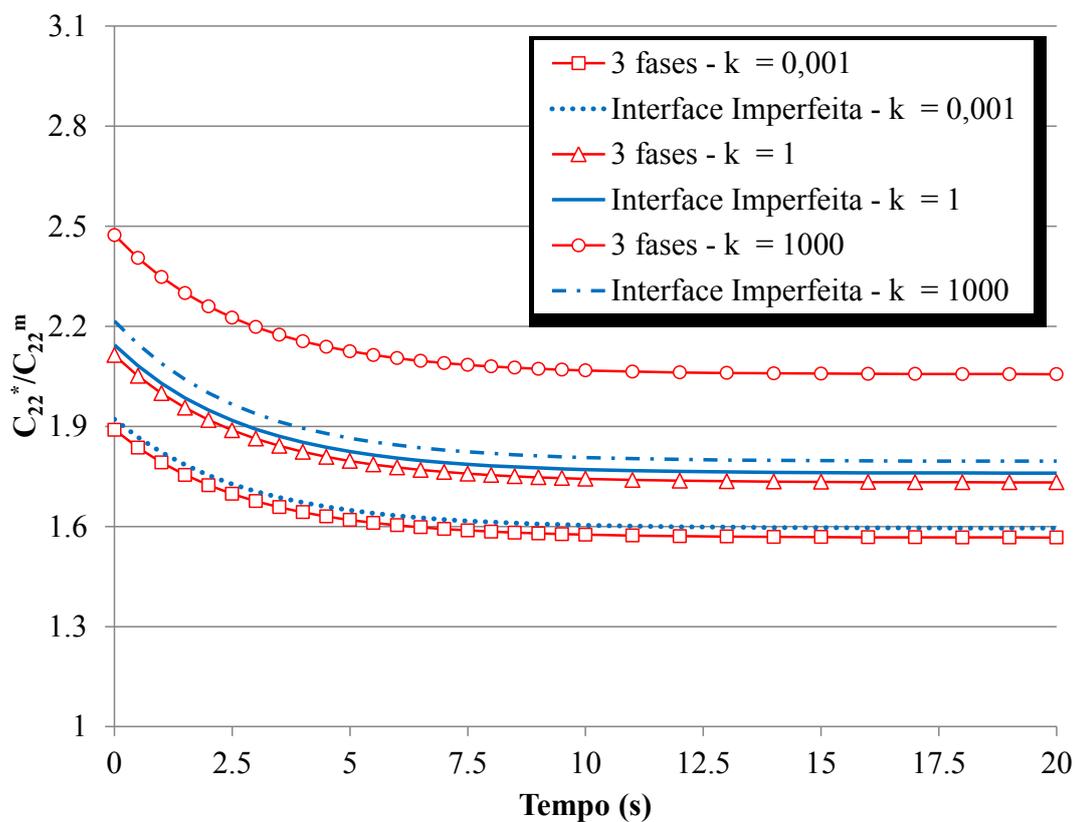
Figura 56 – Respostas para os laminados planos com 1 camada.



Fonte: Autor, 2014.

Na Figura 57 a componente de tensor relaxação efetiva C_{22}^* para as lâminas com 3 fases e com interface imperfeita são comparadas, apresentando comportamentos similares aos encontrados na Figura 56. Percebe-se que o aumento da quantidade de lâminas, para $k = 0,001$ e $k = 1$, resultou em pouca variação entre as respostas comparadas. No entanto, para $k = 1000$, a diferença entre as respostas para os laminados com 3 fases e com interface imperfeita ficou bastante evidente. Essa diferença também pode ser visualizada nos exemplos elásticos.

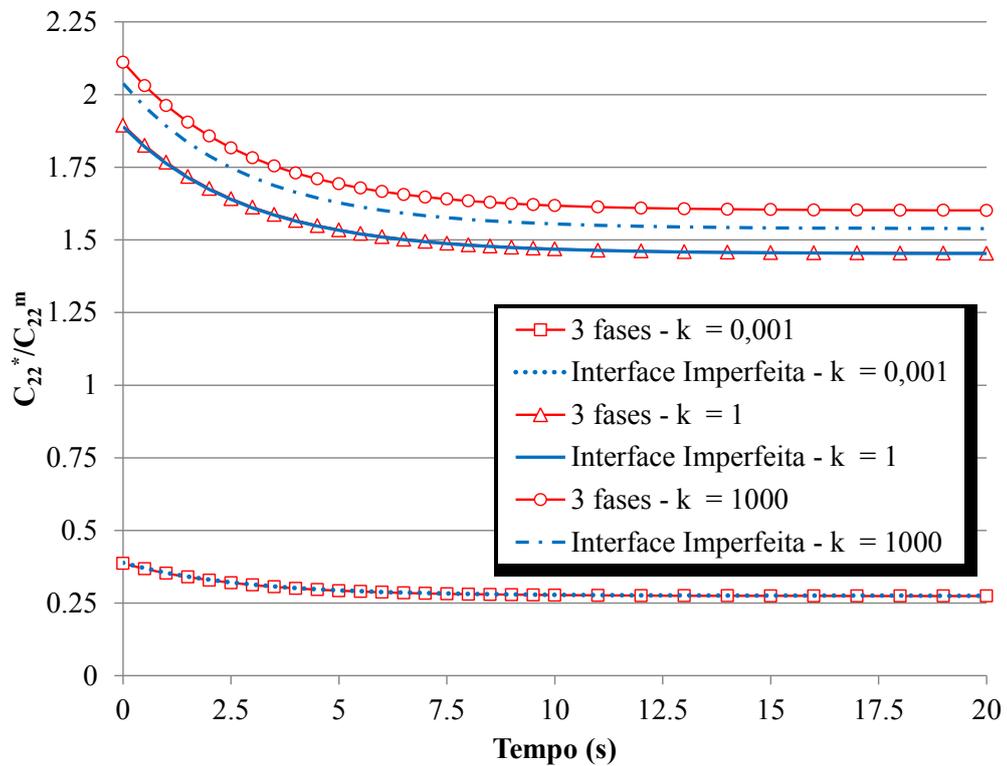
Figura 57 – Respostas para os laminados planos com 2 camadas.



Fonte: Autor, 2014.

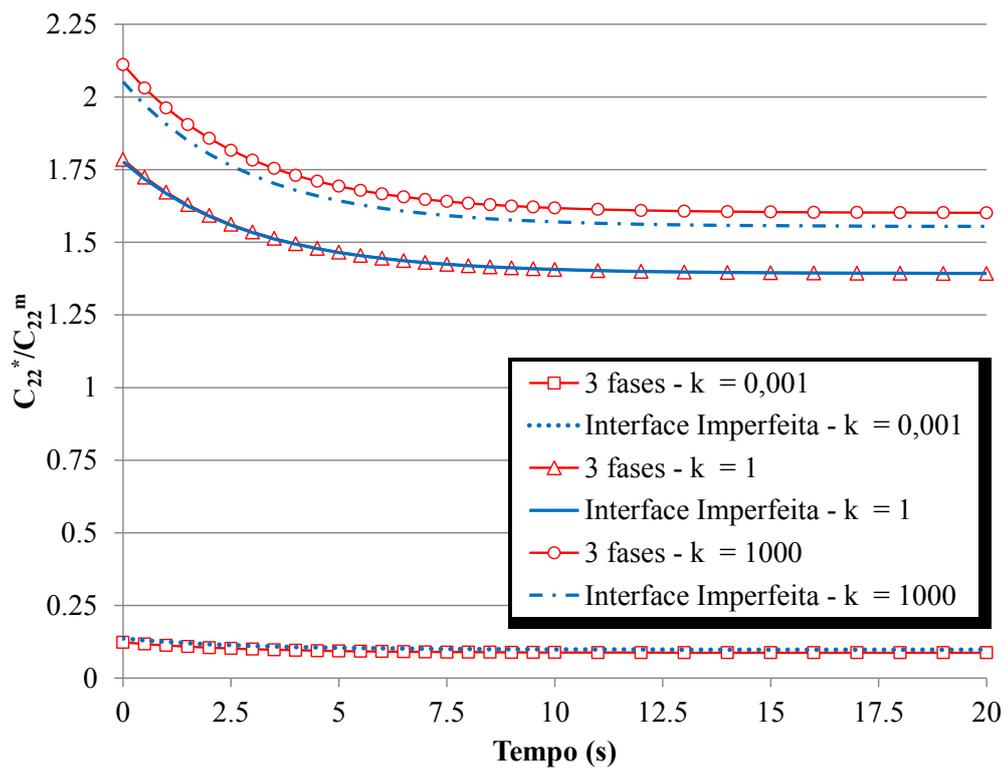
As Figuras 58 e 59 exibem com clareza a boa correlação entre o modelo de interface imperfeita desenvolvido para TVF com o modelo de 3 fases. Percebe-se também que para $k = 0,001$ as propriedades C_{22}^*/C_{22}^m , para o laminado ondulado com 2 camadas, são muito baixas em relação às outras respostas, tanto para o modelo com 3 fases quanto para o modelo de interface imperfeita.

Figura 58 – Respostas para o laminado com ondulação de 10% e com 1 camada.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 59 – Respostas para o laminado com ondulação de 10% e com 2 camadas.



Fonte: Autor, 2014.

Esse efeito está relacionado à ondulação nas camadas e a baixa relação G_i/G_m . Para o tempo inicial ($t = 0$ s) e o tempo final ($t = 20$ s), pode-se observar a variação nas propriedades C_{22}^*/C_{22}^m em função de k nas Tabelas 6 e 7 para 1 e 2 camadas, respectivamente.

Tabela 6 – Variação das propriedades efetivas em função de k para os modelos com ondulação de 10% com 1 camada.

k	C_{22}^*/C_{22}^m			
	para t = 0s		para t = 20 s	
	3 fases	Interface Imperfeita	3 fases	Interface Imperfeita
0,001	0,387	0,389	0,275	0,275
0,01	0,566	0,552	0,449	0,435
0,1	1,280	1,240	1,047	1,018
1	1,895	1,889	1,455	1,454
10	2,015	2,022	1,525	1,530
100	2,036	2,036	1,539	1,539
1000	2,112	2,038	1,602	1,540

Fonte: Autor, 2014.

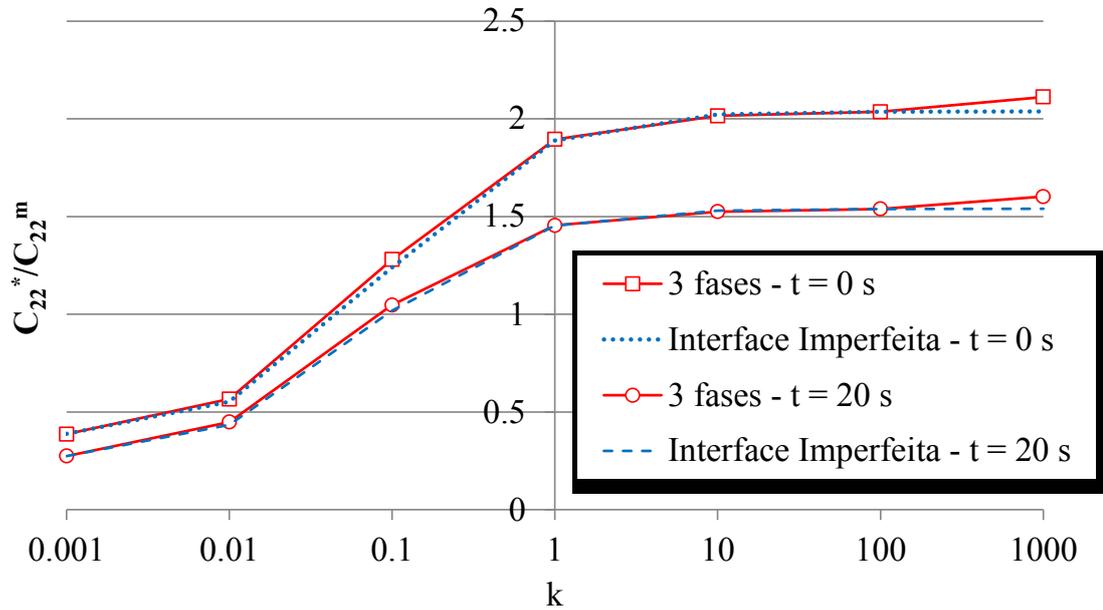
Tabela 7 – Variação das propriedades efetivas em função de k para os modelos com ondulação de 10% com 2 camadas.

k	C_{22}^*/C_{22}^m			
	para t = 0s		para t = 20 s	
	3 fases	Interface Imperfeita	3 fases	Interface Imperfeita
0,001	0,123	0,137	0,087	0,098
0,01	0,245	0,245	0,207	0,205
0,1	0,913	0,874	0,786	0,757
1	1,785	1,777	1,393	1,393
10	2,007	2,020	1,524	1,537
100	2,048	2,049	1,552	1,553
1000	2,196	2,052	1,675	1,555

Fonte: Autor, 2014.

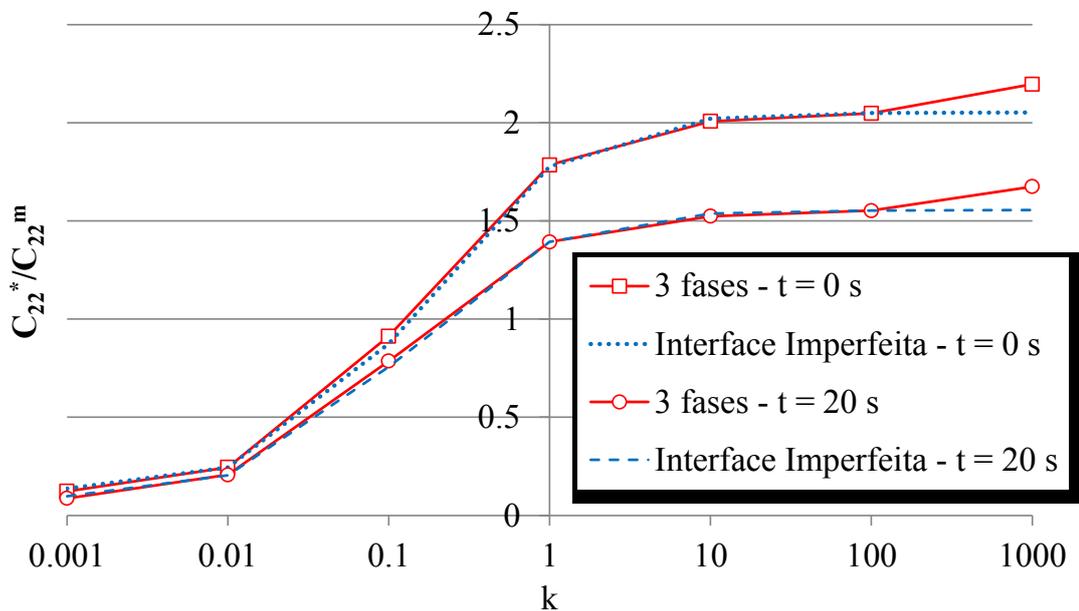
Visualizando esses resultados em forma de gráfico, têm-se as Figuras 60 e 61. Nelas pode-se observar a variação das propriedades efetivas em função de k para o tempo inicial e para o tempo final de análise, onde com o aumento do tempo as propriedades decrescem e com o aumento de k as propriedades aumentam, chegando a abertura entre as curvas dos modelos de interface imperfeita e 3 fases.

Figura 60 – Variação de C_{22}^*/C_{22}^m em função de k para modelo com 1 camada e 10% de ondulação.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 61 – Variação de C_{22}^*/C_{22}^m em função de k para modelo com 2 camada e 10% de ondulação.



Fonte: Autor, 2014.

5 CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho foi realizada uma revisão bibliográfica cronológica sobre o tema materiais compósitos, suas propriedades, obtenção das propriedades efetivas e aplicações em problemas térmicos, mecânicos e de natureza reológica. Também foi abordada a técnica numérica conhecida como formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos, que foi utilizada neste trabalho para a análise de materiais com constituição periódica, podendo ser aplicada para problemas térmicos, mecânicos e viscoelásticos, onde esta última foi desenvolvida pelo autor em dissertação de mestrado para problemas de análise estrutural (ESCARPINI FILHO, 2010). Para cada uma dessas formulações, foi desenvolvido neste trabalho um elemento de interface imperfeita, que se trata de um artifício matemático utilizado em formulações de materiais compósitos para incluir uma terceira fase, de transição, entre a matriz e as inclusões, sem a necessidade de modelar esta terceira fase numericamente por meio de um refinamento considerável da malha.

Como pôde ser observado ao longo do texto, a interface imperfeita pode ser dividida em vários tipos, dentre os quais, encontra-se a interface do tipo mola ou *soft*, que relaciona de forma direta fluxo ou tensão com as descontinuidades em temperatura ou deslocamento para os problemas térmico e mecânico, respectivamente. Nesse tipo de interface as propriedades apresentam valores menores que as dos demais constituintes do compósito, garantindo assim continuidade de fluxo ou tensão na transição inclusão – matriz (BENVENISTE, 1987).

No presente trabalho, a escolha do modelo de interface imperfeita se deu por conta do grau de derivação necessária para se chegar ao sistema de equações lineares para a montagem da matriz de rigidez/condutividade térmica do elemento, pois existe uma restrição quanto às equações que definem os campos de deslocamento e temperatura para a formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos. No caso da interface imperfeita do tipo rígida, há a necessidade de derivações nos campos locais, o que levam a valores constantes ou nulos, uma vez que tais campos são polinômios de segunda ordem (polinômios de Legendre de 2ª ordem), já para o caso de interface do tipo mola a relação entre tensão/fluxo de calor e respectivas descontinuidade não necessita de derivada.

Continuando no texto, foram apresentados os exemplos, divididos em exemplos térmicos com e sem interfase e interface imperfeita. Nesses exemplos, pôde-se observar a grande concordância dos resultados obtidos pela teoria dos volumes finitos quando

comparados com respostas analíticas da micromecânica, numéricas com elementos finitos e experimentais. Dentro dos exemplos térmicos, pôde-se estudar a influência na condutividade térmica da variação da fração volumétrica dos constituintes, tanto para arranjos quadrados, quanto para hexagonais. Também foi possível observar a resposta para vários níveis de discretização empregando-se a formulação paramétrica da teoria dos volumes finitos, comparando-se os resultados com aqueles obtidos pelo método dos elementos finitos, variando-se as propriedades da fibra.

O exemplo seguinte tratou do efeito de tamanho, onde se variou o raio da fibra para uma mesma fração volumétrica. Neste exemplo, utilizou-se o *software* comercial Ansys® para comparação, onde os resultados mostraram uma ótima correlação. Na sequência, estudou-se a condutividade térmica efetiva em materiais com aumento de poro e o afastamento entre as respostas para o modelo com 3 fases e o modelo de interface imperfeita. Por fim, foi estudado o efeito da interface imperfeita térmica em compósitos laminados com diferentes níveis de ondulação.

Após os exemplos térmicos, iniciaram-se os exemplos mecânicos com a homogeneização de compósitos com interfase elástica, que apresentou erro máximo da ordem de 1,3% na avaliação do módulo de elasticidade longitudinal transversal efetivo quando comparado com o método dos elementos finitos, para $E_i = 1000E_m$. O uso da interface imperfeita elástica foi realizado no exemplo seguinte, onde um modelo encontrado nos trabalhos de Hashin (2002), Wükner et al. (2013) e Wükner et al. (2014) foi simulado através da teoria dos volumes finitos. Neste exemplo, estudou-se a variação dos módulos de elasticidade transversal axial e volumétrico transversal efetivos em função da rigidez da interfase. Como pôde ser observado, os resultados foram precisos comparados com aqueles obtidos por Wükner et al. (2013) e através do Ansys®.

Assim como nos exemplos térmicos, também foram estudados o comportamento das propriedades efetivas do compósito em função da variação do raio da fibra, o afastamento das curvas para os modelos de 3 fases e interface imperfeita e o efeito da ondulação sobre as propriedades efetivas de compósitos laminados.

Seguindo no trabalho, estudaram-se as propriedades termomecânicas de compósitos, onde foram obtidos os coeficientes efetivos de expansão térmica axial e transversal para compósitos bifásicos sem interface imperfeita e, posteriormente, para compósitos com a presença da interface imperfeita elástica. Em ambos os exemplos os resultados encontrados apresentaram excelente concordância com as respostas analíticas.

Por fim, foram apresentados os resultados para a formulação viscoelástica da teoria dos volumes finitos, onde se iniciou com problemas de cunho estrutural, mostrando a confiabilidade da formulação desenvolvida e implementada. Na sequência, um problema de homogeneização estudado anteriormente foi refeito assumindo-se comportamento viscoelástico para os constituintes interfase e matriz.

No exemplo seguinte, o elemento de interface imperfeita viscoelástica e o modelo de 3 fases, com interfase viscoelástica, foram comparados com a solução analítica encontrada em Hashin (1991c), apresentando uma boa concordância. Continuando, o modelo laminado com dois tipos de camadas foi estudado, uma mais rígida e outra mais flexível viscoelástica. Entre essas camadas foi adicionada uma camada de transição elástica (interfase). Os resultados encontrados nesse último exemplo foram discutidos e exibidos em gráficos e em tabela, apresentando boa correlação entre o modelo desenvolvido (elemento interface imperfeita) e o modelo de 3 fases.

Assim, ao final deste trabalho, conclui-se que as formulações desenvolvidas demonstraram eficiência, mostrando-se relativamente simples no desenvolvimento e implementação computacional e apresentando ótimos resultados quando comparados com modelo de 3 fases, elementos finitos, resultados analíticos e experimentais.

Como sugestões para trabalhos futuros, sugere-se as seguintes atividades:

- Encontrar os tensores de concentração de deformações de Hill com formulação de Levin para 3 fases, para a obtenção dos coeficientes de expansão térmica efetivo;
- Utilizar a formulação generalizada da TVF para modelar interfaces com descontinuidades nos dois campos, fluxo de calor e temperatura e tensão e deslocamento;
- Realizar análises relacionadas ao tempo computacional gasto pelas duas formas de análise mostradas no texto: modelo com 3 fases e com interface imperfeita;
- Realizar análises, com a TVF, considerando o acoplamento termomecânico.

REFERÊNCIAS

- AQUINO, C. T. **Uma formulação geometricamente não linear da teoria paramétrica de volumes finitos**. 2010. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2010.
- ACHENBACH, J. D.; ZHU, H. Effect of interfacial zone on mechanical behaviour and failure of fibre-reinforced composites. **J. Mech. Phys. Solids**, v. 37, p. 381–393, 1989.
- ACHENBACH, J. D.; ZHU, H. Effect of interphases on micro and macromechanical behaviour of hexagonal-array fibre composites. **J. Appl. Mech.** v. 57, p. 956–963, 1990.
- ANDRIANOV, I. V. et al. Asymptotic simulation of imperfect bonding in periodic fiber-reinforced composite materials under axial shear. **Int. J. Mech. Sci.** v. 49, p. 1344–1354, 2007.
- ANDRIANOV, I. V.; DANISHEVS'KYY, V. V.; KALAMKAROV, A. L. Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings. **Comp. B. Eng.** v. 39, p. 874–881, 2008.
- ANDRIANOV, I. V. et al. Asymptotic study of imperfect interfaces in conduction through a granular composite material. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. v. 466, p. 2707–2725, 2010
- BANSAL, Y.; PINDER, M.-J. Efficient Reformulation of the Thermoelastic Higher-Order Theory for FGMs. **J. Thermal Stresses**, v. 26, n. 11-12, p. 1055-1092, 2003.
- BEBER, A. J. Reforço de estruturas de concreto com compósitos de fibra de carbono. Porto Alegre: PPGE/UFGRS, 37 p. **Caderno Técnico**, 1999.
- BENVENISTE, Y. The Effective Mechanical Behaviour of Composite Materials with Imperfect Contact Between the Constituents. **Mechanics of Materials**. v.4, p. 197–208, 1985.

BENVENISTE, Y. Effective thermal conductivity of composites with a thermal contact resistance between the constituents: non-dilute case. **J. Appl. Phys.** v. 61, p. 2840–2844, 1987.

BENVENISTE, Y.; MILOH, T. The effective conductivity of composites with imperfect contact at constituent interfaces. **Int. J. Eng. Sci.** v. 24, p. 1537–1552, 1986.

BENVENISTE, Y.; MILOH, T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. **Mechanics of Materials**, v. 33, p. 309–323, 2001.

BENVENISTE, Y. A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**. v. 54, p. 708–734, 2006.

BERBENNI, S. et al. Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels having different microstructures. **Materials Science and Engineering: A**. v. 372, n. 1 - 2, p. 128-136, 2004.

BEURTHEY, S.; ZAOUI, A. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 19, n. 1, p. 1-16, 2000.

BIGONI, D. et al. Asymptotic Models of Dilute Composites with Imperfectly Bonded Inclusions. **International Journal Solids Structures**, v. 35, p. 3239–3258, 1998.

BRINSON, L. C.; LIN, W. S. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. **Composite Structures**, v. 41, n. 3 - 4, p. 353-367, 1998.

BRINSON, L. C. Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites: theoretical models and finite-element analysis. **Composites Science and Technology**, v. 61, n. 5, p. 731-748, 2001.

CAILLERIE, D. Sur le comportement limite d'une inclusion mince de grande rigidité. **Comp. Rend. Acad. Sci. Paris Ser.** v. 287, p. 675-678, 1978.

CASTAÑEDA, P. P. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 40, n. 8, p. 1757-1788, 1992.

CAVALCANTE, M. A. A. **Modelagem do comportamento termo-mecânico transiente de estruturas de materiais compósitos pela teoria de volumes finitos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2006.

CAVALCANTE, M. A. A.; MARQUES, S. P. C.; PINDER, M.-J. Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials. **Part I: Analysis. ASME J. Appl. Mech.**, v. 74, p. 935–945, 2007.

CAVALCANTE, M. A. A.; MARQUES, S. P. C.; PINDER, M.-J. Parametric Formulation of the Finite-Volume Theory for Functionally Graded Materials. **Part II: Numerical Results. ASME J. Appl. Mech.**, v. 74, p. 946-957, 2007.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDER, M.-J. Generalized FVDAM Theory for Periodic Materials Undergoing Finite Deformations—Part I: Framework. **Journal of Applied Mechanics**, v. 81, p. 021005, 2013a.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDER, M.-J. Generalized FVDAM Theory for Periodic Materials Undergoing Finite Deformations—Part II: Results. **Journal of Applied Mechanics**, v. 81, p. 021006, 2013b.

CHANDRA, R.; SINGH, S. P.; GUPTA, K. Micromechanical damping models for fiber-reinforced composites: a comparative study. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 33, n. 6, p. 787-796, 2002.

CHEN, E.L.; ANG, W.T. Green's functions and boundary element analysis for bimetals with soft and stiff planar interfaces under plane elastostatic deformations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 40, p. 50–61, 2014.

CHENG, H.; TORQUATO, S. Effective conductivity of periodic arrays of spheres with interfacial resistance. **Proc. R. Soc. Lond.** v. 453, p. 145–161, 1997a.

CHENG, H.; TORQUATO, S. Effective conductivity of dispersion of spheres with a superconducting interface. **Proc. R. Soc. Lond.** v. 453, p. 1331–1344, 1997b.

DEBOTTON, G.; TEVET-DEREE, L. The Response of a Fiber-Reinforced Composite with a Viscoelastic Matrix Phase. **Journal of Composite Materials**, v. 38, n. 14, p. 1255-1277, 2004.

DRAGO A.; PINDERA, M-J. Micro-Macromechanical Analysis of Heterogeneous Materials: Macroscopically Homogeneous vs. Periodic Microstructures. **Composites Science and Technology**, v. 67, p. 1243-1263, 2007.

DUTRA, V. F. P. et al. A micromechanical approach to elastic and viscoelastic properties of fiber reinforced concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 40, n. 3, p. 460-472, 2010.

ESCARPINI FILHO, R. S. **Análise de estruturas de materiais compósitos viscoelásticos lineares através da teoria de volumes finitos**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Maceió, 2010.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. **Proc. Roy. Soc. London**, v. 241, p. 376-396, 1957.

ESHELBY, J. D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. **Proc. Roy. Soc. London**, v. 252, p. 561-569, 1959.

FEYEL, F. Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. **Computational Materials Science**, v. 16, n. 1-4, p. 344-354, 1999.

FRIEBEL, C.; DOGHRI, I.; LEGAT, V. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 9, p. 2513-2541, 2006.

GARBOCZI, E. J.; BENTZ, D. P. Computer simulation of the diffusivity of cement-based materials. **J. Mater. Sci.** v. 27, p. 2083–2092, 1992.

GATTU, M. et al. Parametric Finite-Volume Micromechanics of Uniaxial Continuously-Reinforced Periodic Materials with Elastic Phases. **J. Engineering Materials and Technology**, v. 130, n. 3, p. 31015-15, 2008.

GEYMONAT, G.; KRASUCKI, F.; LENCI, S. Mathematical analysis of a bonded joint with soft thin adhesive. **Math. Mech. Sol.** v.4, p. 201–225, 1999.

GIBIANSKY, L. V.; MILTON, G. W.; BERRYMAN, J. G. On the effective viscoelastic moduli of two-phase media. III. Rigorous bounds on the complex shear modulus in two dimensions. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 455, n. 1986, p. 2117-2149, 1999.

GOLAND, M.; REISSNER, E. The stresses in cemented joints. **J. Appl. Mech.** v. 11, p. A17–A27, 1944.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. **Journal of Applied Physics**. v. 33, p. 3125-3131, 1962.

HASHIN, Z.; ROSEN, B.W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. **Journal of Applied Mechanics**. v. 31, p. 223-232, 1964.

HASHIN, Z. Viscoelastic Behavior of Heterogeneous Media. **Journal of Applied Mechanics**, v. 32, n. 3, p. 630-636, 1965.

HASHIN, Z. Complex moduli of viscoelastic composites—I. General theory and application to particulate composites. **International Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 5, p. 539-552, 1970.

HASHIN, Z. Complex moduli of viscoelastic composites—II. Fiber reinforced materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 6, p. 797-807, 1970.

HASHIN, Z. Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. **Journal Applied Mechanics**, v. 46, n. 3, p. 543-550, 1979.

HASHIN, Z. Thermoelastic Properties of Fiber Composites with Imperfect Interface. **Mechanics of Materials**, v. 8, p. 333-348, 1990.

HASHIN, Z. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. **J. Mech. Phys. Solids**. v. 39, p. 745-762, 1991a.

HASHIN, Z. The spherical inclusion with imperfect interface. **J. Appl. Mech.** v. 58, p. 444-449, 1991b.

HASHIN, Z. Composite materials with viscoelastic interphase: creep and relaxation. **J. Mechanics of Materials**. v. 11, p. 135-148, 1991c.

HASHIN, Z. Extremum principles for elastic heterogeneous media with imperfect interface and their application to bounding of effective elastic moduli. **J. Mech. Phys. Solids**. v. 40, p. 767-781, 1992.

HASHIN, Z. Thin interphase/imperfect interface in conduction. **J. Appl. Phys.** v. 89, p. 2261-2267, 2001.

HASHIN, Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fibre composites. **J. Mech. Phys. Solids**. v. 50, p. 2509-2537, 2002.

HASSANZADEH, H.; POOLADI-DARVISH, M. Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications. **Applied Mathematics and Computation**, v. 189, n. 2, p. 1966-1981, 2007.

HASSELMAN, D. P. H.; JOHNSON, L. F. Effective thermal conductivity of composites with interfacial barrier resistance. **J. Comp. Mater.** v. 21, p. 508–515, 1987.

HATTA, H.; TAYA, M. Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. **Int. J. Engng. Sci.** v. 24, n. 7, pp. 1159-1172.

KAKU, K.; ARAI, M.; FUKUOKA, T.; MATSUDA, T. Evaluation of thermo-viscoelastic property of CFRP laminate based on a homogenization theory. **Acta Mechanica**, v. 214, p. 111–121, 2010.

KALISKE, M.; ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. **Computational Mechanics**, v. 19, p. 228-239, 1997.

KAPITZA, P. L. **Collected papers** of P. L. Kapitza 2 ed ter Haar D. New York, NY Pergamon, 1965.

KATTIS, M.A; MAVROYANNIS, G.D. A unified two-phase potential method for elastic bi-materials: planar interfaces. **Journal of Elasticity**, v.103, p.73–94, 2011.

KHATAM, H.; PINDER, M.-J.. Thermo-elastic moduli of periodic multilayers with wavy architectures. **Composites Part B: Engineering**, v. 40, p. 50–64, 2009.

KHATAM, H; PINDER, M.-J. Plasticity-triggered architectural effects in periodic multilayers with wavy microstructures. **International Journal of Plasticity**, v. 26, p. 273–287, 2010.

KHATAM, H.; PINDER, M.-J. Microstructural scale effects in the nonlinear elastic response of bio-inspired wavy multilayers undergoing finite deformation. **Composites Part B: Engineering**, v. 43, p. 869–884, 2012

KLARBING, A. Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method. **Int. J. Eng. Sci.** v. 29, p. 493–512, 1991.

KLARBRING, A.; MOVCHAN, A. B. Asymptotic modelling of adhesive joints. **Mechanics of Materials**. v. 28, p. 137-145, 1998.

KURNATOWSKI, B.; MATZENMILLER, A. Finite element analysis of viscoelastic composite structures based on a micromechanical material model. **Computational Materials Science**, v. 43, n. 4, p. 957-973, 2008.

LAHELLEC, N.; SUQUET, P. Effective behavior of linear viscoelastic composites: A time-integration approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 2, p. 507-529, 2007.

LAWS, N.; MCLAUGHLIN, R. Self-Consistent Estimates for the Viscoelastic Creep Compliances of Composite Materials. Proceedings of the Royal Society of London. **A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 359, n. 1697, p. 251-273, 1978.

LENCI, S. Melan's problems with weak interface. **J. Appl. Mech.** v. 67, p. 22–28, 2000.

LENCI, S.; MENDITTO, G. Weak interface in long fibre composites. **Int. J. Solids Struct.** v. 37, p. 4239–4260, 2000.

LÉVESQUE, M. et al. Numerical inversion of the Laplace–Carson transform applied to homogenization of randomly reinforced linear viscoelastic media. **Computational Mechanics**, v. 40, p. 771-789, 2007.

LEVY, A. J. The effective dilatational response of fiber reinforced composites with nonlinear interface. **J. Appl. Mech.** v. 63, p. 357–364, 1996.

LEVY, A. J.; DONG, Z. Effective transverse response of fiber composites with nonlinear interface. **J. Mech. Phys. Solids**. v. 46, p. 1279–1300, 1998.

LEVY, A. J. The fiber composite with nonlinear interface. Part I: axial tension. **J. Appl. Mech.** v. 67, p. 727–732, 2000.

LIPTON, R.; VERNESCU, B. Variational methods, size effects and extremal microgeometries for elastic composites with imperfect interface. **Math. Models Meth. Appl. Sci.** v. 5, p. 1139–1173, 1995.

LIPTON, R. The second Stekloff eigenvalue of an inclusion and new size effects for composites with interface thermal barriers. **J. Appl. Phys.** v. 80, p. 5583–5586, 1996.

LIPTON, R., Vernescu B. Composites with imperfect interface. **Proc. R. Soc. Lond.** v. 452, p. 329–358, 1996a.

LIPTON, R., Vernescu B. Critical radius, size effects and inverse problems for composites with imperfect interface. **J. Appl. Phys.** v. 79, p. 8964–8966, 1996b.

LIPTON, R. Reciprocal relations, bounds, and size effects for composites with highly conducting interface. **J. Appl. Math.** v. 57, p. 347–363, 1997a.

LIPTON, R. Variational methods, bounds, and size effects for composites with highly conducting interface. **J. Mech. Phys. Solids.** v. 45, p. 361–384, 1997b.

LIPTON, R. Influence of interfacial surface conduction on the DC electrical conductivity of particle reinforced composites **Proc. R. Soc. Lond.** v. 454, p. 1371–1382, 1998.

LUCIANO, R.; BARBERO, E. J. Analytical Expressions for the Relaxation Moduli of Linear Viscoelastic Composites With Periodic Microstructure. **ASME J. Applied Mechanics**, v. 62, p. 786-793, 1995.

MAL, A. K.; BOSE, S. K. Dynamic elastic moduli of a suspension of imperfectly bonded spheres **Proc. Camb. Phil. Soc.** v.76, p. 587–600, 1975.

MAREAU, C.; FAVIER, V.; BERVEILLER, M. Micromechanical modeling coupling time-independent and time-dependent behaviors for heterogeneous materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 2, p. 223-237, 2009.

MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. Geometrically Nonlinear Finite Elements Analysis of Viscoelastic Composite Materials under Mechanical and Hygrothermal Loads. **Computers and Structures**, v. 53, n. 2, p. 449-456, 1994.

MATZENMILLER, A.; GERLACH, S. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber - matrix bonding. **Computational Materials Science**, v. 29, n. 3, p. 283-300, 2004.

MATZENMILLER, A.; GERLACH, S. Parameter identification of elastic interphase properties in fiber composites. **Composites Part B: Engineering**, v. 37, p. 117–126, 2005.

MILOH, T.; BENVENISTE, Y. On the effective conductivity of composites with ellipsoidal inhomogeneities and highly conducting interface **Proc. R. Soc. Lond.** v. 455, p. 2687–2706, 1999.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. **Acta Metal.** v. 21, p. 571-574, 1973.

PEREIRA, J. C. Curso de projeto estrutural com materiais compostos. Florianópolis, 2003.

PHAM HUY, H., SANCHEZ-PALENCIA, E. Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. v. 47, p. 284–309, 1974.

RICAUD, J.-M.; MASSON, R. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media: Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 7 - 8, p. 1599-1606, 2009.

ROSEN, B. W.; HASHIN, Z. Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials. **International Journal of Engineering Science.** v. 8, p. 157 – 173, 1970.

ROUGIER, Y.; STOLZ, C.; ZAOUI, A. Représentation spectrale en viscoélasticité linéaire des matériaux hétérogènes. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie II**, v. 316, p. 1517-1522, 1993.

RUBIN, M. B.; BENVENISTE, Y. A Cosserat shell model for interphases in elastic media. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 52, p. 1023–1052, 2004.

SABAR, H. et al. A new class of micro-macro models for elastic-viscoplastic heterogeneous materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 12, p. 3257-3276, 2002.

SANCHEZ-PALENCIA, E. Comportement limite d'un problème de transmission à travers une plaque faiblement conductrice. **C. R. Acad. Sci. Paris**. v. 270, p. 1026–1028, 1970.

SCHAPERLY, R. A. Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials. **Journal of Composite Materials**, v. 1, n. 3, p. 228-267, 1967.

SIHN, S.; ROY, A. K. Micromechanical analysis for transverse thermal conductivity of composites. **Journal of Composite Materials**, v. 45, p. 1245 -1255, 2011.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. Computational Inelasticity. **New-York: Springer-Verlag**, 1998.

SKALNY, J. P. et al. Microstructure of Concrete. **J. Materials science of concrete**. v. 1, p. 127-161, 1994.

STEIF, P. S.; HOYSAN, S. F. An energy method for calculation the stiffness of aligned short-fiber composites. **Mech. Mater.** v. 6, p. 197-210, 1987.

TANG, TIAN. Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials. **All Graduate Theses and Dissertations, Utah State University**. Paper 72, 2008.

TAYLOR, R. L.; PISTER, K. S.; GOUDREAU, G. L. Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 2, n. 1, p. 45-59, 1970.

THORNBURG, J. D.; PEARS, C. D. Prediction of the thermal conductivity of filled and reinforced plastics. ASME Paper 65-WA/HT-4, **American Society of Mechanical Engineers**. v. 1, p. 166-173, 1965.

TITA, V. **Projeto e fabricação de estruturas em material compósito polimérico**. Ed. EESC/SMM, 2007.

TORQUATO, S.; RINTOUL, M. D. Effect of the interface on the properties of composite media. **Phys. Rev. Lett.** v. 75, p. 4067–4070, 1995.

TRAN, A. B.; YVONNET, J.; He, Q.-C.; TOULEMONDE, C.; SANAHUJA, J. A simple computational homogenization method for structures made of linear heterogeneous viscoelastic materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 200, p. 2956–2970, 2011.

TURNER, P. A.; TOMÉ, C. N. Self-consistent modeling of visco-elastic polycrystals: Application to irradiation creep and growth. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 41, n. 7, p. 1191-1211, 1993.

VENTURA A. M. F. M. **Os Compósitos e a sua aplicação na Reabilitação de Estruturas metálicas**. Lisboa, Portugal, 2009.

WANG, Y. M.; WENG, G. J. The Influence of Inclusion Shape on the Overall Viscoelastic Behavior of Composites. **Journal of Applied Mechanics**, v. 59, n. 3, p. 510-518, 1992.

WEEKS, W. T. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Laguerre Functions. **J. ACM**, New York, NY, USA, v. 13, n. 3, p. 419-429, 1966.

WÜRKNER, M.; BERGER, H.; GABBERT, U. Numerical study of effective elastic properties of fiber reinforced composites with rhombic cell arrangements and imperfect interface. **International Journal of Engineering Science**, v. 63, p. 1–9, 2013.

WÜRKNER, M.; BERGER, H.; GABBERT, U. Numerical investigations of effective properties of fiber reinforced composites with parallelogram arrangements and imperfect interface. **Composite Structures**, v. 116, p. 388–394, 2014.

YVONNET, J.; HE, Q.-C. The reduced model multiscale method (R3M) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. **Journal of Computational Physics**, v. 223, n. 1, p. 341-368, 2007.

ZHONG, Y.; BANSAL, Y.; PINDER, J.-M. Efficient reformulation of the thermal higher-order theory for fgms with variable thermal conductivity. **Int. J. Comput. Eng. Sci.** v. 5, p. 795-831, 2004.

APÊNDICES

Apêndice A - Dedução do Estado de Tensão

Partindo-se da Equação (4.20) e comparando-a com a Equação (4.18), percebe-se que existem constantes diferentes aplicadas aos termos hidrostáticos e aos termos desviadores. Nestas condições, busca-se neste apêndice mostrar a transformação realizada na passagem da Equação (4.20) para a (4.24).

Sabe-se que $\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t)) \cdot \mathbf{1} + \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t + \Delta t))$ ou na forma indicial $\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$ que é a decomposição do estado total de tensão, em um estado hidrostático ou volumétrico com um estado desviador. Estudando o segundo membro da equação, e aplicando-se constantes diferentes em cada um dos termos, busca-se encontrar o que acontece com o estado total de tensões. Dessa forma, aplicando-se constantes A e B, tem-se:

$$A \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + B \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = \sigma_{km} : \mathbb{I} \quad (\text{A.1})$$

Expandindo os índices:

$$A \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + B \left(\frac{1}{2} \sigma_{km} \delta_{ik} \delta_{jm} + \frac{1}{2} \sigma_{km} \delta_{im} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) = \sigma_{km} : \mathbb{I} \quad (\text{A.2})$$

$$A \frac{1}{3} \sigma_{km} \delta_{km} \delta_{ij} + B \left(\frac{1}{2} \sigma_{km} \delta_{ik} \delta_{jm} + \frac{1}{2} \sigma_{km} \delta_{im} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \sigma_{km} \delta_{km} \delta_{ij} \right) = \sigma_{km} : \mathbb{I} \quad (\text{A.3})$$

$$A \frac{1}{3} \sigma_{km} \delta_{km} \delta_{ij} + B \sigma_{km} \left(\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{km} \delta_{ij} \right) = \sigma_{km} : \mathbb{I} \quad (\text{A.4})$$

Com isso, deduz-se a expressão:

$$\sigma_{km} \left(A \frac{1}{3} \delta_{km} \delta_{ij} + B \left(\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{km} \delta_{ij} \right) \right) = \sigma_{km} : \mathbb{I} \quad (\text{A.5})$$

a qual pode ser reescrita com a ajuda dos tensores que aparecem nas Equações (4.28) e (4.29), resultando:

$$\sigma_{km} : (A\mathbb{J}_1 + B\mathbb{J}_2) = \sigma_{km} : \mathbb{I} \quad (\text{A.6})$$

Dessa forma, chega-se à Equação (4.24).

Apêndice B - Matriz Constitutiva Viscoelástica

Partindo-se da Equação (4.32), pode-se chegar as seguintes equações matriciais para *in-plane* e *out-of-plane*, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}_{j+1} = \begin{Bmatrix} H_{22} \\ H_{33} \\ H_{23} \end{Bmatrix}_j + \begin{bmatrix} C_{2222}^\infty & C_{2233}^\infty & C_{2223}^\infty \\ C_{3322}^\infty & C_{3333}^\infty & C_{3323}^\infty \\ C_{2322}^\infty & C_{2333}^\infty & C_{2323}^\infty \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}_{j+1} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}_{j+1} = \begin{Bmatrix} H_{12} \\ H_{13} \end{Bmatrix}_j + \begin{bmatrix} C_{1212}^\infty & C_{1213}^\infty \\ C_{1312}^\infty & C_{1313}^\infty \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}_{j+1} \quad (\text{B.2})$$

ou ainda

$$\{\sigma\}_{j+1} = \{H\}_j + [C^\infty] \{\varepsilon\}_{j+1} \quad (\text{B.3})$$

Substituindo a Equação (4.33) em (4.32), tem-se:

$$[C^\infty]_{\text{in}} = \begin{bmatrix} K_\infty \bar{B}_a^k + \frac{4}{3} G_\infty \bar{B}_a^\mu & K_\infty \bar{B}_a^k - \frac{2}{3} G_\infty \bar{B}_a^\mu & 0 \\ K_\infty \bar{B}_a^k - \frac{2}{3} G_\infty \bar{B}_a^\mu & K_\infty \bar{B}_a^k + \frac{4}{3} G_\infty \bar{B}_a^\mu & 0 \\ 0 & 0 & G_\infty \bar{B}_a^\mu \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$[C^\infty]_{\text{out}} = \begin{bmatrix} G_\infty \bar{B}_a^\mu & 0 \\ 0 & G_\infty \bar{B}_a^\mu \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Apêndice C - Transformação de coordenadas em subvolume

De acordo com a Figura 2, a parametrização da geometria do subvolume é feita utilizando-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} x_1(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)x_1^{(1)} + N_2(\eta, \xi)x_1^{(2)} + N_3(\eta, \xi)x_1^{(3)} + N_4(\eta, \xi)x_1^{(4)} \\ x_2(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)x_2^{(1)} + N_2(\eta, \xi)x_2^{(2)} + N_3(\eta, \xi)x_2^{(3)} + N_4(\eta, \xi)x_2^{(4)} \end{aligned} \quad (C.1)$$

onde os N_i são as funções de forma, dadas por:

$$\begin{aligned} N_1(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \xi) \\ N_2(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \xi) \\ N_3(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi) \\ N_4(\eta, \xi) &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \xi) \end{aligned} \quad (C.2)$$

Aplicando-se a regra da cadeia, podem-se obter as derivadas de um campo qualquer F em relação às coordenadas paramétricas, como seguem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} &= \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Representando-se as equações acima na forma matricial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3} \end{Bmatrix} \quad (C.4)$$

onde $[J]$ é a matriz Jacobiana, dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial \eta} & \frac{\partial y_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi} & \frac{\partial y_3}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 \xi & A_4 + A_5 \xi \\ A_3 + A_2 \eta & A_6 + A_5 \eta \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

com

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4} \left(-y_2^{(1)} + y_2^{(2)} + y_2^{(3)} - y_2^{(4)} \right) \\ A_2 &= \frac{1}{4} \left(y_2^{(1)} - y_2^{(2)} + y_2^{(3)} - y_2^{(4)} \right) \\ A_3 &= \frac{1}{4} \left(-y_2^{(1)} - y_2^{(2)} + y_2^{(3)} + y_2^{(4)} \right) \\ A_4 &= \frac{1}{4} \left(-y_3^{(1)} + y_3^{(2)} + y_3^{(3)} - y_3^{(4)} \right) \\ A_5 &= \frac{1}{4} \left(y_3^{(1)} - y_3^{(2)} + y_3^{(3)} - y_3^{(4)} \right) \\ A_6 &= \frac{1}{4} \left(-y_3^{(1)} - y_3^{(2)} + y_3^{(3)} + y_3^{(4)} \right) \end{aligned} \quad (C.6)$$

onde os $y_2^{(i)}$ e $y_3^{(i)}$ da Equação (III.6) representam as coordenadas dos nós i do subvolum.

De acordo com Cavalcante (2006), admite-se um valor constante para a matriz Jacobiana, que pode ser avaliada de forma aproximada para qualquer ponto dentro do subvolum como segue:

$$[J] \approx [\langle J \rangle] = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [J] d\eta d\xi = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 \\ A_3 & A_6 \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

Assim, a matriz inversa da Jacobiana pode ser estimada por:

$$[J]^{-1} \approx [\bar{J}] = [\langle J \rangle]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_6}{A_7} & -\frac{A_4}{A_7} \\ -\frac{A_3}{A_7} & \frac{A_1}{A_7} \end{bmatrix} \quad (C.8)$$

onde

$$A_7 = A_1A_6 - A_3A_4 \quad (\text{C.9})$$

Dessa forma, pode-se encontrar a seguinte relação a partir da Equação (C.4).

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

onde cada $[\bar{J}]$ é a matriz inversa da matriz Jacobiana.

$$[A]_{\text{out}} = \begin{bmatrix} [A_{f=1}] \\ [A_{f=2}] \\ [A_{f=3}] \\ [A_{f=4}] \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$[A]_{\text{in}} = \begin{bmatrix} [A_{f=1}] \\ [A_{f=2}] \\ [A_{f=3}] \\ [A_{f=4}] \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

onde as matrizes $[A_{f=i}]_{\text{out}}$ encontram-se nas Equações (4.42) e (4.43) e as $[A_{f=i}]_{\text{in}}$ nas Equações (4.44) e (4.45).

$$[\bar{A}]_{\text{out}} = [N]_{\text{out}}[\bar{C}][B]_{\text{out}}[A]_{\text{out}} \quad (\text{D.10})$$

$$[\bar{A}]_{\text{in}} = [N]_{\text{in}}[\bar{C}][F][B]_{\text{in}}[A]_{\text{in}} \quad (\text{D.11})$$

onde $[\bar{C}]$, nas equações acima tem as seguintes formas

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} [\bar{C}]_i & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{C}]_i & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\bar{C}]_i & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\bar{C}]_i \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

que é função do estado do problema, se no plano ou fora do plano, onde $i = \text{in}$ ou out .

$$\{H\}_i = \begin{cases} H_{f=1} \\ H_{f=2} \\ H_{f=3} \\ H_{f=4} \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

para $i = \text{in}$ ou out , sendo:

$$\{H\}_{\text{out},f} = \begin{cases} H_{12} \\ H_{13} \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

$$\{H\}_{\text{in},f} = \begin{cases} H_{22} \\ H_{33} \\ H_{23} \end{cases}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

$$[\phi] = [L][D][\mathbb{M}_2][\bar{C}][E][B][A][N] \quad (\text{D.16})$$

$$[\omega] = [L][D][\mathbb{M}_2][\bar{C}] \quad (\text{D.17})$$

$$[\theta] = [L][D][\mathbb{M}_2][\bar{C}][E][B][A][P] \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbb{M}_1 = \left(\sum_{r=1}^N \gamma_r^k e^{-\frac{t^{n+1}}{\tau_r^k}} \mathbb{J}_1 + \sum_{r=1}^N \gamma_r^\mu e^{-\frac{t^{n+1}}{\tau_r^\mu}} \mathbb{J}_2 \right) \quad (\text{D.19})$$

$$\mathbb{M}_2 = \left(\left(1 + \sum_{r=1}^N (\gamma_r^k A_r^k) \right) \mathbb{J}_1 + \left(1 + \sum_{r=1}^N (\gamma_r^\mu A_r^\mu) \right) \mathbb{J}_2 \right) \quad (\text{D.20})$$

$$\mathbb{M}_3 = \left(\left(\sum_{r=1}^N (\gamma_r^k A_r^k) \right) \mathbb{J}_1 + \left(\sum_{r=1}^N (\gamma_r^\mu A_r^\mu) \right) \mathbb{J}_2 \right) \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{Z}\}_j = [\mathbb{M}_1]\{\boldsymbol{\sigma}_\infty\}_0 - [\mathbb{M}_3]\{\boldsymbol{\sigma}_\infty\}_j + \frac{1}{3} \sum_{r=1}^N \left(e^{\left(-\frac{\Delta t}{\tau_r^k}\right)} (h_r^k)_j \right) \{\mathbf{1}\} \\ + \sum_{r=1}^N \left(e^{\left(-\frac{\Delta t}{\tau_r^\mu}\right)} \{\mathbf{h}_r^\mu\}_j \right) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$(h_r^k)_j = e^{\left(-\frac{\Delta t}{\tau_r^k}\right)} (h_r^k)_{j-1} + \gamma_r^k A_r^k \left(\text{tr}([\boldsymbol{\sigma}_\infty]_j) - \text{tr}([\boldsymbol{\sigma}_\infty]_{j-1}) \right) \quad (\text{D.23})$$

$$\{\mathbf{h}_r^\mu\}_j = e^{\left(-\frac{\Delta t}{\tau_r^\mu}\right)} \{\mathbf{h}_r^\mu\}_{j-1} + \gamma_r^\mu A_r^\mu \left(\text{dev}([\boldsymbol{\sigma}_\infty]_j) - \text{dev}([\boldsymbol{\sigma}_\infty]_{j-1}) \right) \quad (\text{D.24})$$

onde, L_i representa o comprimento da face i do subvolume, $n_i^{(f)}$ é a componente do vetor normal na direção i da face f e \mathbb{J}_1 e \mathbb{J}_2 encontram-se no Apêndice A.

$$[\mathbf{P}]_{\text{out}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.25})$$

$$[\mathbf{P}]_{\text{in}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.26})$$