UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANAYARA GOMES DOS SANTOS

O GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A APRENDIZAGEM DO ESBOÇO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUE DIFEREM DE OUTRAS POR UMA COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS OU HOMOTETIAS

Maceió, AL
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANAYARA GOMES DOS SANTOS

O GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A APRENDIZAGEM DO ESBOÇO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUE DIFEREM DE OUTRAS POR UMA COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS OU HOMOTETIAS

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.
Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

Maceió, AL
2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

S237g Santos, Anayara Gomes dos.
O geogebra como recurso didático para a aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de outras por uma composição de isometrias ou homotetias / Anayara Gomes dos Santos. – 2013.
106 f. : il.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 97-102.
Apêndices: f. 103-106.

1. Geogebra. 2. Gráficos de funções. 3. Isometrias. 4. Homotetias. 5. Matemática – Ensino. I. Título.

CDU: 517:371.693

ANAYARA GOMES DOS SANTOS

O GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A APRENDIZAGEM DO ESBOÇO DE GRÁFICO DE FUNÇÕES QUE DIFEREM DE OUTRAS POR UMA COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS E HOMOTETIAS

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 07 de novembro de 2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
(IM/UFAL)
Orientador e Presidente da banca

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
(IM/UFCG)

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros
(IM/UFAL)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha avó,

Gerovina Vieira da Silveira (In memoriam).

AGRADECIMENTOS

> E aprendi que se depende sempre, de tanta, muita, diferente gente. Toda pessoa sempre é marca das lições diárias de outras tantas pessoas. E é tão bonito quando a gente entende que a gente é tanta gente, onde quer que a gente vá. E é tão bonito quando a gente sente que nunca está sozinho por muito mais que pense estar. É tão bonito quando a gente pisa firme. Nessas linhas que estão nas palmas de nossas mãos. É tão bonito quando a gente vai à vida. Nos caminhos onde bate bem mais forte o coração. E aprendi.
>
> (Gonzaguinha)

Escrever uma dissertação de mestrado é uma experiência enriquecedora e de plena superação. Nos modificamos a cada tentativa de buscar respostas às nossas aflições de ‘pesquisador’. Para aqueles que compartilham conosco desse momento, parece uma tarefa interminável e enigmática que só se torna realizável graças a muitas pessoas que participam, direta ou indiretamente. E é a essas pessoas que gostaria de agradecer:

A *Deus* pela luz diária, pelo dom da vida, por nunca ter me abandonado diante dos obstáculos vivenciados, me dando sempre muita determinação para prosseguir na caminhada.

Aos meus pais Albino e Joselita pelo apoio desde o primeiro momento que decidi sair de casa em busca desse sonho: Pai e Mãe todas as lágrimas e preocupações tiveram um retorno positivo.

Aos meus irmãos Albfarley, Chasmiâna, Alex e Albino Júnior pelo incentivo, pelas viagens, pela boa vontade em mim “transportar” mesmo com o coração apertado e já cheio de saudades.

Aos meus cunhados Nilton e Adriana por não medirem esforços, deixando seus afazeres para me visitar.

Aos meus sobrinhos Maria Eduarda e Farlyanne pela pureza e inocência em entender que a “Titia Lala” tinha que está longe, pois estava buscando um sonho. A Farlyene e Luis Eduardo por já ter me conhecido morando longe “de casa”... por todas as ligações doces com demonstrações de carinho.

Ao Professor Hilário, pelo apoio, orientação, pela grande amizade, pela confiança depositada, por acreditar e contribuir no meu crescimento profissional e pessoal. Com certeza Professor, será um exemplo que sempre seguirei.

Ao meu orientador, professor Ediel Guerra, por toda a dedicação, preocupação e paciência dispensadas durante todo o período do mestrado e também pela partilha de seus conhecimentos, tão preciosos em todas as etapas de desenvolvimento dessa tarefa.

Aos Professores Amauri Barros, Daniel Cordeiro e Kleber Cavalcanti componentes da banca examinadora por suas valiosíssimas sugestões neste trabalho.

Ao meu namorado Thiago Resende por ter acalentando minhas angústias nessa etapa final.

Aos meus amigos Flávio Fabiano, Gregório Manoel, José Ivan Freitas e Vivia Dayana pela ajuda em momentos acadêmicos, pela amizade e companheirismo, pessoas muito especiais que tive a oportunidade de conhecê-las na UFAL.

Enfim, agradeço a todos aqueles que participaram da minha caminhada e contribuíram direta ou indiretamente com a minha conquista.

“Todo inventor, até mesmo um gênio, é sempre consequência de seu tempo e ambiente. Sua criatividade deriva das necessidades que foram antes criadas dele e baseia-se nas possibilidades que, uma vez mais, existem fora dele. É por isso que observamos uma continuidade rigorosa no desenvolvimento histórico da tecnologia e da ciência. Nenhuma invenção ou descoberta científica aparece antes de serem criadas as condições materiais e psicológicas necessárias para o seu surgimento. A criatividade é um processo historicamente contínuo em que cada forma seguinte é determinada pelas precedentes.”

(Vygotsky, 2001)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento, a aplicação e a análise de uma sequência didática destinada à promoção da aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de determinadas funções por isometrias e homotetias destinada a estudantes do segundo ano do Ensino Médio. Trabalha-se o comportamento dos gráficos das funções seno, potência e modular ao serem submetidos a translações (verticais e horizontais), reflexões no eixo das abscissas, homotetias (dilatações e contrações que deixam um ponto fixo) e composição dessas transformações. Os recursos didáticos para aprendizagem utilizados nessa proposta são o software de geometria dinâmica GeoGebra e o lápis e papel. Foram utilizados como referenciais teórico-metodológicos a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a Engenharia Didática de Artigue. A Engenharia Didática é uma metodologia que busca estudar os trabalhos desenvolvidos em sala de aula por meio de um processo de validação interno, isto é, confrontando aquilo que o aluno sabia antes de ter contato com o instrumento didático com aquilo que ele conseguiu compreender após a realização do trabalho. Esta pesquisa reforça, como resultado final, a hipótese de que, mesmo sem o domínio conceitual formal das isometrias e das homotetias, os estudantes podem revelar um ótimo desempenho no esboço de gráficos de funções que diferem de outras funções de gráficos previamente conhecidos pela composição de isometrias e homotetias quando é utilizado o GeoGebra como recurso didático auxiliar para a visualização dos efeitos nos registros geométricos das operações de tratamento correspondentes às isometrias e homotetias realizadas no âmbito dos registros algébricos.

Palavras-chave: GeoGebra. Gráficos de Funções. Representações Semióticas. Isometrias e homotetias. Engenharia Didática.

ABSTRACT

This work has as main goal the development, implementation and analysis of an instructional sequence designed to promote learning sketch graphs of functions that differ by isometries of certain functions and homotheties aimed at students of the second year of high school. Work is the behavior of the graphs of sine functions, and modular power when subjected to translations (vertical and horizontal), Reflections in the x-axis, homotheties (expansions and contractions that leave a fixed point) and composition of these transformations. Teaching resources for learning used in this proposal are the dynamic geometry software GeoGebra and pencil and paper. Were used as theoretical and methodological Theory of Didactic Situations of Guy Brousseau, Theory of Semiotics Representation Registers Raymond Duval and Engineering Curriculum Artigue. The Didactic Engineering is a methodology that seeks to study the work done in the classroom through a process of internal validation, that is, comparing what the student knew before having contact with the teaching tool with what he was able to understand after carrying out the work. This research reinforces the final result, the hypothesis that, even without the formal conceptual domain of isometries and homotheties, students can reveal a great performance in sketch graphs of functions that differ from other graphics functions previously known by the composition of isometries and homotheties when using GeoGebra as a teaching resource to assist the visualization of geometric effects in the records of processing operations corresponding to isometries and homotheties held under the algebraic records.

Keywords: GeoGebra. Graphs of Functions. Representations Semiotics. Isometries and homotheties. Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conceito de função é central na matemática. Esse conceito além de ser fundamental para a compreensão dos conteúdos matemáticos é um conceito estruturante e unificador para as diferentes áreas dessa ciência. Ele está presente também em um grande número de aplicações em diferentes áreas do conhecimento, tais como Física, Química, Biologia, Engenharia, Economia. Sua inclusão no currículo do ensino médio se encontra, portanto, firmemente respaldada.

Entretanto, em experiências vividas durante atuação como professora substituta na Universidade Federal de Alagoas (UFAL) pude perceber que a prática do ensino do cálculo tem revelado que um grande número de estudantes que ingressam nas universidades apresentam lacunas de conhecimento sobre esse conceito. Os alunos trazem consigo uma deficiência enorme no que diz respeito ao esboço de gráficos de funções reais.

As disciplinas Fundamentos de Matemática I e Fundamentos de Matemática II estão presentes na matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFAL justamente para reparar as lacunas existentes no Ensino Médio, já que a maioria desses alunos da forma que ingressam no curso não se encontram aptos a cursar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral sem encontrar muita "turbulência" no caminho no decorrer do semestre. Na prática docente temos constatado, nas correções de prova, que grande parte do mau desempenho desses estudantes no Cálculo Diferencial e Integral se deve à falta de uma compreensão adequada do conceito de função. Particularmente, a falta de habilidade no esboço e na interpretação dos gráficos das funções é um dos principais aspectos revelados por muitos estudantes que ingressam nas universidades.

Segundo Oliveira (2006),

> Os gráficos representam uma importância muito grande para o aprendizado da matemática, uma vez que eles são fotografias da compreensão e do entendimento da solução de um problema matemático e, na maioria das vezes, é uma solução geométrica que nos permite apresentar a solução do problema de forma analítica. É tão importante que é usado com frequência como recurso didático para o ensino da matemática, pela visão de conjunto e rapidez do problema. (p. 10).

Temos observado, também, em muitos livros-texto do Ensino Médio, tais como Ribeiro[1] e Diniz&Smole[2] que as abordagens do esboço de gráficos têm dado pouca ênfase ao emprego das isometrias e das semelhanças. Esse aspecto do conceito de função é largamente explorado e requerido no estudo do Cálculo Diferencial e na geometria analítica. Em alguns livros de Cálculo esses conteúdos são abordados em capítulos introdutórios, ver Stewart (2006).

Em vista disso, estabelecemos como objetivo principal deste trabalho desenvolver e testar uma sequência didática, com o apoio de um software de Geometria Dinâmica, para o ensino-aprendizagem do efeito das transformações geométricas do plano sobre gráficos de funções reais, voltada para estudantes do Ensino Médio.

A principal motivação desta pesquisa, como já mencionado anteriormente, emergiu da constatação empírica das dificuldades em esboçar gráficos de funções apresentada por muitos estudantes do Ensino Médio e de uma grande parte deles recém-chegados aos cursos de matemática, da física, da química e das engenharias apresentarem.

Diante disso, tomamos como questão norteadora inicial desta dissertação a seguinte: como elaborar uma sequência didática que favoreça a aprendizagem por parte de estudantes do ensino médio do esboço de gráficos de funções que difiram de outras por composição de isometrias e de homotetias?

Após as análises prévias dessa questão norteadora, chegamos à seguinte questão investigativa: **dada uma função que difere por isometrias e homotetias de uma outra cujo gráfico é previamente conhecido, até que ponto a visualização dos gráficos na tela do computador produzidos como efeitos de certos tratamentos efetuados na representação algébrica da função de gráfico conhecido pode favorecer a aprendizagem da execução, no ambiente papel e lápis, do esboço do gráfico da função dada?**

Os sujeitos desta pesquisa são os estudantes do 2º ano do Ensino Médio do Programa de Apoio a Escolas Públicas do Estado de Alagoas (PAESPE), programa desenvolvido pelo Centro de Tecnologia (CTEC) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) - que tem por

[1] RIBEIRO, Jackson. **Matemática**: ciência, linguagem e tecnologia, 1. Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010.
[2] Diniz &Smole, M. I. & K.S. Matemática Ensino Médio, 1. Saraiva.

finalidade principal oferecer uma preparação complementar a estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do Estado em todas as disciplinas avaliadas pelo ENEM.

No que diz respeito ao suporte teórico, optamos pela Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, pela Engenharia Didática de Michele Artigue e pela Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau como subsídios na construção do nosso produto educacional, a qual é uma sequência didática.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos.

O capítulo I traz à tona a base teórica do ponto de vista dos registros de representação semiótica, segundo Duval. Nele destacamos alguns aspectos básicos da aprendizagem em ambientes informatizados, explicamos a escolha do software e fazemos também uma abordagem de alguns aspectos conceituais acerca das transformações geométricas

O capítulo II trata do ensino de Funções no Brasil, com base em documentos oficiais (PCN e PNLD) e como esse conteúdo adentrou a matriz curricular das escolas brasileiras.

O capítulo III versa sobre os caminhos metodológicos seguidos nesta pesquisa, ou seja, apresento as fases e os princípios norteadores da elaboração e da aplicação da sequência didática.

O capítulo IV diz respeito à metodologia de pesquisa, aqui descrevemos os procedimentos específicos de coleta e análise de dados. Relatamos como ocorreu à experimentação e apresento os resultados.

No capítulo V, relatamos como ocorreu a experimentação, descrevendo como foram executadas as oficinas, uma a uma, e em seguida é feita uma análise dos dados recolhidos durante a experimentação. Para finalizar esse capítulo, confrontamos os dados obtidos no questionário aplicado antes das oficinas com o questionário aplicado após as oficinas, com o intuito de verificação de aprendizagem.

Por fim, seguem-se as considerações finais.

Acreditamos que essa proposta possa contribuir efetivamente para o aprimoramento tanto dos conhecimentos que os estudantes já possuem como para a construção de novos conceitos.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Visando à criação de uma sequência didática que propicie a aquisição de determinados saberes matemáticos convém, inicialmente, evidenciar alguns pressupostos que fundamentam nossas escolhas neste trabalho. Este capítulo é destinado à apresentação desses pressupostos.

Este capítulo está dividido em sete seções. Na seção 1.1, encontram-se alguns aspectos da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, destacando suas relações com o conceito de função. Na seção 1.2, apresento o conceito de visualização segundo autores que trabalham na área da Educação Matemática. Na seção 1.3, destaco a hipótese que norteará este trabalho. A seção 1.4 traz uma base conceitual acerca da aprendizagem em ambientes informatizados. Na seção 1.5, apresento as razões pelas quais escolhi o GeoGebra neste trabalho. A seção 1.6 contém uma revisão bibliográfica de trabalhos relacionados ao objetivo deste trabalho. E, por fim, na seção 1.7, apresento alguns aspectos conceituais das transformações geométricas (isometrias e homotetias) e das funções compostas.

1.1 As funções do ponto de vista representacional

Acerca do ensino da matemática de um modo geral, e sobre o ensino de funções de um modo particular, a teoria dos registros semióticos de Raymond Duval tem alcançado grande receptividade e destaque. Um *registro semiótico* é um modo típico de representar um objeto matemático, um problema ou uma técnica (Duval, 1999). Distinguem-se em sua teoria vários tipos de representações: as linguísticas ou vernáculas, as algébricas ou simbólicas, as gráficas, as tabulares.

Por exemplo, no caso das representações das funções quadráticas, as representações desse objeto matemático são: o desenho de uma parábola (representação geométrica), as palavras *função quadrática* (representação linguística ou vernácula), a fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ (representação simbólica ou algébrica), as tabelas com duas entradas, uma para o x e outra para o $f(x)$ (representação tabular).

Nessa teoria, as representações semióticas possuem dois aspectos: uma forma (uma representação) e o conteúdo (o representado). Desse modo, embora haja várias formas de representar um objeto matemático todas se referem a um mesmo conteúdo.

Decorre da teoria de Duval, que uma proposta que tenha como objetivo a promoção da aprendizagem de certos objetos matemáticos, como as funções, envolva a preparação de atividades nas quais estejam previstas pelo menos dois modos de representação semiótica, de modo que se permita o exercício da conversão de um tipo de representação em outra.

Esse autor tem, também, desenvolvido importantes ideias em torno das conexões entre as ideias de visualização e de representação. Em Duval (1999), destacam-se a representação e a visualização como centrais para a aprendizagem matemática. Em Duval (2000) ele apresenta essas suas ideias de um modo mais articulado e completo. Segundo esse autor, as representações podem ser classificadas, do ponto de vista cognitivo, em intencionais e em automáticas.

As representações *automáticas* se encontram associadas ao fenômeno da visão e se referem à passagem do objeto para a memória — ou seja, à disponibilidade interna de algo que já foi visto (isto é, imagens mentais) — ou à reprodução de configurações percebidas por imitação ou por simulação.

Já as representações *intencionais* se encontram ligadas à visualização e se caracterizam por denotar um objeto matemático como um registro discursivo (isto é, referentes à expressão e abrangendo a língua vernácula e a linguagem simbólica ou formal) ou como um registro não-discursivo (isto é, referente à visualização e abrangendo aspectos não icônicos — tais como gráficos, figuras e esquemas — e icônicos — tais como desenhos ilustrativos e esboços.

É necessário neste ponto esclarecer que Duval estabelece uma distinção entre visão e visualização. Para ele a *visão* de um objeto é a associação desse objeto a um repertório de imagens já guardadas na memória. Por exemplo, a visão de um sinal semafórico por um motorista em trânsito provoca nele reações intuitivas, tais como atenção, desaceleração, freada brusca, aumento de velocidade etc.

Já a *visualização* se refere à capacidade de enxergar além do que está estaticamente representado. Por exemplo, diante de um conjunto de setas (vetores) indicadoras de um campo vetorial representativo de um campo elétrico o físico entende o campo elétrico como a visualização das trajetórias indicada por essas setas, isto é, para a compreensão do campo elétrico é necessário que ele enxergue as trajetórias daquele campo a partir das setas estaticamente representadas. As setas neste caso funcionam como unidades representacionais.

Na perspectiva de Duval, faz parte da visualização a decisão acerca de questões tais como: quais conversões são necessárias fazer para converter um registro semiótico em um outro? Quais os tratamentos que precisamos realizar para resolvermos um problema? (No capítulo 3 deste trabalho, apresento mais detalhes acerca dos conceitos de conversão e de tratamento.)

Acredito que a promoção da aprendizagem matemática requer do professor criação de situações que estimulem tanto os sistemas de representação semióticas como a operação de visualização. Na próxima seção, destacaremos mais alguns estudos que têm sido empreendidos sobre o estudo da visualização.

1.2 Visualização no Ensino da Matemática

Segundo Presmeg (2006), os estudos sobre visualização começaram a ganhar corpo no âmbito da Educação Matemática no final da década de 70 e início dos anos 80. No início da década de 90 a visualização se estabeleceu como uma linha de pesquisa. Desde então, várias pesquisas têm, de um lado, enfatizado a importância da visualização e do raciocínio visual para o ensino-aprendizagem da matemática (Presmeg, 1986; Zimmerman E Cunnigham, 1991; Dreyfus, 1991; Arcavi, 1999) e, de outro, preconizado a ideia de que softwares matemáticos e tecnologias podem ter papel fundamental no desenvolvimento da visualização (Nemirowsky e Noble, 1997; Borba e Villareal, 2005).

Zimmerman e Cunnigham (1991) têm chamado a atenção para o fato de que os estudos acerca da visualização nos âmbitos da psicologia e da Educação Matemática têm apresentado objetivos distintos. Enquanto em psicologia os estudos tratam da capacidade de formação e de manipulação de imagens mentais, na Educação Matemática os interesses se voltam ao estudo da habilidade do estudante em lidar com os aspectos visuais para alcançar a compreensão da matemática. Na acepção desses dois autores, a visualização é o “processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxílio de tecnologias) usando essas imagens de forma eficaz para a descoberta e a compreensão da matemática (1991, p.3, tradução de Flores et al., 2012, p.34).

Cifuentes (2009) tem se posicionado a favor dessa concepção de visualização de Zimmerman e Cunnigham e tem ressaltado a importância desse processo na compreensão da matemática ao afirmar que "visualizar é ser capaz de formular imagens e está no início de todo processo de abstração". Já Duval (1999), como já temos frisado anteriormente, tem observado que a visualização é uma atividade cognitiva que transcende a mera percepção visual.

Em Flores et al (2012) encontra-se o estado da arte das pesquisas acerca da visualização no ensino da matemática no Brasil no período de 1998 a 2010. Num universo de cerca de 2000 trabalhos produzidos para o ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) nesse período, esses autores encontram 66 deles tratando da visualização na Educação Matemática. Num levantamento das definições do termo visualização utilizadas nesses 66 trabalhos, enunciados de forma explícita ou implícita, foram encontradas sete acepções:

a) Processo de construção e transformação de imagens visuais mentais, bem como de todo tipo de inscrições de natureza espacial (em 12 trabalhos).
b) Interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica. (a visualização como um processo útil para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática) (em 2 trabalhos).
c) Descoberta das relações abstratas pela atuação sobre possíveis representações complexas (em 3 trabalhos).
d) Processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxilio de tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática (em 9 trabalhos).
e) Um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizada para resolver problemas, ou provar propriedades (imagens mentais, representação externa, processos de visualização e habilidade de visualização) (em 3 trabalhos).

f) Uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica e o uso da visualização na matemática requer um treino específico, ou seja, visualização está ligada aos registros semióticos (em 16 trabalhos).
g) Uma forma de pensamento que tem como função contribuir na construção de significados e de sentidos, bem como servir de auxilio na compreensão da resolução de problemas (visualizar não é apenas ver o visível, mas tornar visível aquilo que se vê extraindo padrões das representações e construindo o objeto a partir da experiência visual) (em 21 trabalhos).

Baseando-se em Presmeg (2006), Flores et al. (2012) elencam sete tendências para a pesquisa sobre visualização em Educação Matemática nos próximos anos:

1. Estudo qualitativo identificando o pensamento visual de estudantes.
2. Desenvolvimento curricular e visualização
3. Influência da tecnologia no pensamento visual
4. Questões de gênero e uso de imagens na construção de conhecimentos.
5. Relutância dos estudantes em lidar com informações visuais.
6. Aspectos semióticos e representacionais na visualização matemática.
7. Teorização da visualização para a pesquisa.

1.3 Hipótese

Tendo em vista as considerações feitas nas duas seções anteriores, proponho a seguinte hipótese: uma proposta didática acerca dos efeitos das transformações geométricas sobre as funções que estimule a visualização e a transição entre registros de representações semióticas desses objetos matemáticos pode favorecer à aprendizagem dos estudantes sobre esse conteúdo.

Tendo como objetivo a criação de uma proposta didática que propicie a visualização de funções, a escolha de um ambiente informatizado aparece como uma opção adequada para essa finalidade.

1.4 Ambientes informatizados construtivistas

Inicio esta seção abordando alguns aspectos concernentes da matemática de um modo geral. Como ressaltam Gravina e Santarosa (1998), a aprendizagem da matemática numa perspectiva construtivista requer do sujeito ações caracterizadoras da produção do saber matemático: “experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar” (idem, p. 73).

Essas autoras distinguem duas etapas na construção do saber matemático nessa perspectiva: a primeira compreende a criação de conceitos e de descobertas de relações, as quais resultam de muita investigação e exploração de possibilidades. Numa segunda etapa, verifica-se a formalização e a organização dos resultados obtidos na primeira etapa. Ou seja, uma etapa de investigação e descobertas e outra de formalização e apresentação dos resultados obtidos. Em vista disso, essas autoras propõem que o processo de aprendizagem da matemática se assemelhe a esse mencionado processo de construção do saber matemático.

No âmbito da didática da matemática, muitos estudos têm sido produzidos visando à promoção de modos alternativos de ensino que possibilitem uma aprendizagem numa perspectiva construtivista. Várias metodologias de ensino têm sido propostas: resolução de problemas, jogos didáticos, modelagem, materiais manipulativos, softwares educativos.

Como bem se sabe a utilização de um recurso didático inovador por si só não garante uma mudança significativa na aprendizagem. Para que uma mudança relevante aconteça no processo de ensino-aprendizagem é necessário que a utilização do recurso didático aconteça de modo que os sujeitos da aprendizagem assumam um lugar ativo nesse processo. E para isso é necessário que o professor projete as atividades a serem desenvolvidas: “São os desafios propostos pelo professor que vão orientar o trabalho, desafios estes que se tornam de genuíno interesse dos alunos, desde que não sejam eles privados de suas ações e explorações” (idem, p. 86).

Alguns ambientes informatizados permitem a execução de ações típicas relacionadas à produção do saber matemático, tais como a visualização, a experimentação, a conjectura e a indução. Os ambientes informatizados nos quais podem ser executadas essas ações são chamados *construtivistas*. Apoiando-se em Kaput (1992) e Mellar et al. (1994), Gravina e Santarosa destacam as características dos ambientes informatizados construtivistas:

a) dinamismo: oferecem a possibilidade de efetuar manipulações diretas sobre a representação de um objeto matemático de modo a evidenciar invariâncias ou relações entre seus elementos;

b) interatividade: oferecem a possibilidade de realizar concretizações e ações mentais do estudante, ou seja, não frusta o estudante em seus procedimentos exploratórios associados às suas ações mentais. Dito de outro modo, uma ação que o estudante planeja mentalmente dentro dos marcos permitidos pelo ambiente pode ser executada com os recursos oferecidos pelo ambiente;

c) recursos de modelagem e de simulação: oferecem a possibilidade de explicitar, manipular e compreender as relações que controlam um fenômeno por meio da resposta visual oferecida pela máquina. Conceitos avançados podem ser investigados por meio de experimentos simulados.

É de fundamental importância, para a compreensão do processo de ensino-aprendizagem em ambientes informatizados, a caracterização da natureza dos objetos produzidos na tela de um computador fornecida por Hebenstreint (1987, apud Gravina e Santarosa, p. 78): “O computador permite criar um novo tipo de objeto — os objetos ‘concretos-abstratos’. Concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais”.

Por exemplo, na tela de um computador uma função não é mais somente um objeto matemático abstrato (dado por uma definição formal) acompanhado eventualmente de uma representação estática (o desenho do seu gráfico), mas um objeto que pode ser manipulado e compreendido a partir de suas invariâncias ou do seu comportamento ao ser submetido a transformações.

Um outro ponto de especial relevância permitido pelos ambientes informatizados é a possibilidade da realização de uma grande variedade de experimentos em um curto espaço de tempo. Por exemplo, pode-se investigar rapidamente o efeito da variação do parâmetro a na função linear $f(x) = ax$ quando a varia desde valores negativos pequenos até valores positivos. O estudo dessa variação manualmente é bem mais demorado.

De que forma os ambientes informatizados construtivistas podem contribuir para a aprendizagem dos estudantes? Na perspectiva piagetiana (1967) as ações sobre os objetos concretos se generalizam em esquemas, enquanto ações sobre objetos abstratos se generalizam em conceitos e teoremas. De um modo análogo, os ambientes informatizados construtivistas, segundo Gravina e Santarosa (1998, p.77), ao permitirem a ação interativa do estudante com os objetos concreto-abstratos da tela do computador podem propiciar de modo privilegiado a construção de conceitos e de teoremas por parte dele.

1.5 A escolha do software

No tocante à preparação da sequência didática, tendo em vista o que foi visto na seção 1.4, utilizarei como recurso didático o GeoGebra. Nesta seção apresento algumas informações acerca desse software de geometria dinâmica. Pretendo com isso fornecer alguns subsídios visando ao esclarecimento de alguns detalhes operacionais e algumas escolhas posteriores. Esse recurso didático, como se sabe, situa-se no campo das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TICs).

Nos últimos anos, a utilização dos recursos tecnológicos no Ensino da Matemática tem se popularizado bastante nas instituições de ensino. Esse fato tem acontecido pela facilidade existente nesses softwares, por conseguirmos reproduzir na tela do computador as construções geométricas de forma dinâmica.

A característica principal desses ambientes informatizados é o fato de uma vez concluída uma construção no computador, fica possível alterá-la em geral, num simples arrastar de mouse e observar as alterações nos demais elementos.

> A maior parte dos ambientes de geometria dinâmica oferecem outros recursos, tais como calculadora com operações aritméticas elementares e ferramentas de geometria analítica. Dentre esses ambientes, o *Geogebra* tem a proposta de integrar ferramentas geométricas e algébricas (daí o nome software). Assim, é possível, em um mesmo ambiente, realizar construções dinâmicas em geometria sintética e traçar, em um sistema de eixos cartesianos, gráficos das principais funções reais elementares, estudadas no ensino médio. (GIRALDO, 2012, p. 3).

Esse software permite o estudo de variáveis vinculadas a números, vetores e ponto e permite achar derivadas e integrais de funções, no entanto o objetivo nosso é apenas para o estudo das funções sob o efeito das transformações no plano.

A palavra “tecnologia”[3] vem do grego "*tekhne*" que signfica "técnica, arte, ofício" juntamente com o sufixo "*logia"* que significa "estudo". Tecnologia é um produto da ciência e da engenharia que envolve um conjunto de instrumentos, métodos e técnicas que visam à resolução de problemas. É uma aplicação prática do conhecimento científico em diversas áreas de pesquisa.

Com a introdução do computador nas escolas e o número crescente de programas educativos e de softwares, como meio motivador da aprendizagem, parece que o uso dessas novas tecnologias em Educação Matemática vem dar à geometria euclidiana um sentido mais dinâmico na exploração desse universo e, em particular, no trabalho investigativo com as chamadas transformações geométricas.

A introdução de novas tecnologias nas escolas: computadores, televisores, pen-drive, acesso à internet, tem levantado diversas questões. Quando utilizado como recurso didático, o computador deixa de ser meramente uma máquina, e ganha um novo status: o de ferramenta de conhecimento: “Os programas de computadores para uso educacional possuem diversas capacidades e propriedades que devem ser reconhecidas e aproveitadas, tanto por professores como por alunos, para obterem resultados eficientes no processo de ensino e aprendizagem”. (Baldin, 2002. Apud Costa, 2005, p.7).

Um grande número de estudantes apresenta dificuldades ao manipular figuras geométricas, o que se deve em grande parte à má compreensão dos conceitos e das propriedades por trás do conteúdo abordado. Essa dificuldade está sendo amenizada, devido o surgimento de programas de geometria dinâmica[4], uma vez que esses programas podem ser comparados ou vistos como materiais concretos virtuais. Neles os estudantes poderão, por meio dos recursos de animação, construir, mover e observar, sem alterar as propriedades básicas das mesmas.

Como dito anteriormente, existem vários softwares no mercado, alguns com mais recursos do que outros, do ponto de vista das construções geométricas e propriedades.

---

[3] http://www.significados.com.br/tecnologia-2/ visitado em 20/08/2012.

[4] É um termo utilizado para nomear (indicar) um método dinâmico e interativo para o ensino e aprendizagem de geometria e suas propriedades usando ambientes computacionais destinados a esse fim. http://geometriadinamica.com.br/ visitado em 20/08/12.

Dentre os programas disponíveis no mercado, gratuitos ou não, mencionamos o Cabri-Géomètre (BAULAC, BELLEMAIN & LABORDE, 1990), The Geometer Sketchpad (JACKIW, 1992), The Geometric super Supposer (YERUSHALMI & SCHWARTZ, 1993), GEOLOG (HOLLAND, 1993), Euklid (MECHLING, 1994), Thales (KADUNZ & KAUTSCHISCH, 1994), o GeoGegra (MARKUS HOHENWARTER, 2001), o Wingeon (Richard Parris, 2005), o Geoplan (CALEB GATTEGNO) e o Tabulae (UFRJ).

O software GeoGebra será utilizado no estudo traçado de gráficos de funções que empregue isometrias e as semelhanças como conceitos. Essa escolha reside em suas características de ambiente informatizado construtivista, no sentido especificado na seção 1.3.

O uso deste programa permitirá uma abordagem diferenciada em relação ao papel e o lápis. A intenção ao se fazer uso deste software é facilitar para o professor de matemática seu trabalho cotidiano, sempre tendo cuidado para não distorcer conceitos e propriedades, por erros de interpretação da linguagem do programa. Vale ressaltar que o programa é uma das ferramentas de mediação, e que em determinados momentos pode não ser a mais apropriada (o software não prova apenas valida conceitos ou inspira conjecturas). Caberá ao professor estabelecer quando é mais vantajoso para o ensino dos conteúdos e qual a dinâmica mais adequada. Vale lembrar que a utilização de software na aprendizagem não vem para substituir livros “tradicionais”, vem sim pra ser adicionado aos livros didáticos.

Embora o GeoGebra proporcione condições que permitem ao estudante a construção de conhecimento, o software sozinho não pode ensinar coisa alguma, por mais que tenha manuais de como fazer construções. Para que haja aprendizagem com esse recurso é necessária a elaboração de situações didáticas, o que torna indispensável a presença do professor.

O GeoGebra é apenas um meio para que haja aprendizagem, e para que isso aconteça, é necessário que o aluno reflita durante a execução das atividades, isto é, que ele busque experimentar maneiras, percebendo as propriedades, conjecturando e justificando. Por isso que a papel do professor é de fundamental importância, pois ele será o mediador, e fará com que os estudantes criem novos mecanismos para fazer com que os mesmos reflitam e percebam o que de fato está por trás das construções que eles estão fazendo, além de auxilia-los nas justificativas das construções.

Diversos softwares estão sendo desenvolvidos objetivando a melhoria do ensino e a aprendizagem, particularmente, na área de Geometria. A partir deles os estudantes conseguem manipular figuras, auxiliando na formação de conjecturas, conclusões e justificativas, além do que, depois de um determinado tempo de uso, os alunos já conseguirão perceber e entender o que está por trás das construções, formalizando assim os conceitos.

Diante do sucesso de construções, ou até mesmo, na tentativa de realizar alguma representação relacionada ao conteúdo estudado, esse processo pode servir de estímulo para novas construções.

Outro aspecto importante a ser considerado no estudo das transformações é aquele ressaltado nos PCN:

> O estudo das transformações que envolvem a ampliação e redução de figuras é um bom ponto de apoio à construção do conceito de semelhança. Porém, esse conceito é geralmente abordado apenas para os triângulos, tendo como única referência a definição que é apresentada ao aluno já na introdução desse conteúdo: “dois triângulos são semelhantes quando e somente quando têm os três ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais”. Tal abordagem é limitada para uma compreensão mais ampla do conceito de semelhança. Isso pode ser favorecido se tal conceito for estudado em outras figuras, inclusive nas não-poligonais (BRASIL, 1998, p.124).

1.6 Revisão bibliográfica

É vasta a literatura produzida acerca da utilização de recursos computacionais, da visualização e das representações semióticas na educação matemática.

No que concerne à utilização de recursos computacionais, Thikhomirov (1981), autor da teoria da reorganização, defende que uma ferramenta computacional não é simplesmente acrescida a uma atividade humana, mas transforma-a. Desse modo, o computador como ferramenta de trabalho produz uma transformação da atividade humana, inaugurando novas formas de pensamento humano, de busca, de produção e de armazenamento de conhecimento: “Como resultado do uso do computador, a transformação da atividade humana ocorre e novas formas de atividade emergem” (idem, p. 271). Essa posição é compartilhada com Balacheff e Kaput (1996), os quais defendem que o uso do computador pode se tornar um grande aliado para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, viabilizando novos tipos de atividades e de novas formas de pensar e agir.

Essa posição é reforçada por Gravina e Santarosa (1998), ao defenderem que os ambientes computacionais construtivistas oferecem dinamismo às representações de modo a se refletir nos processos cognitivos dos estudantes. Esse dinamismo das representações é obtido pela possibilidade da realização de manipulações diretas sobre as representações na tela do computador. Carvalho e Giraldo (2003), por sua vez, têm alertado que novas tecnologias podem estimular o desenvolvimento de uma atitude investigativa em matemática, mas podem também gerar obstáculos epistemológicos ao entendimento de determinados conceitos.

Já no que se refere à visualização, Shama e Dreyfus (1994) e Presmeg (2006) têm reconhecido o papel dela na resolução de problemas. Mas outros estudiosos ressaltam que o processamento visual por si só não é suficiente para a compreensão matemática, constituindo-se apenas em complemento ao pensamento analítico (Tall, 1991; Goldenberg, 1996). Borba e Vilarreal (2005) têm ressaltado o papel da visualização nos processos de ensino-aprendizagem no contexto das ferramentas tecnológicas.

No que diz respeito ao ensino de matemática com auxílio de computadores, alguns estudos têm mostrado que o emprego de computadores pode aumentar a motivação e o grau de autoconfiança dos estudantes (Sivin-Kachala e Bialo, 2000). Acerca da importância do estudo das funções, Vinner (1992) tem observado que o cálculo é o ponto de partida da matemática superior enquanto as funções são um conceito-chave no cálculo.

Os softwares vêm alcançando importância crescente no ensino da matemática. No âmbito do cálculo essa importância pode ser constatada, por exemplo, em Ahmad Fauzi et al. (2012)[5] e no âmbito do ensino de funções em Zulnaidi e Zakaria (2012). Neste último trabalho, os autores mostram por meio de uma pesquisa quantitativa que a utilização do GeoGebra como ferramenta didática pode propiciar a aprendizagem das funções tanto em nível conceitual, quanto em nível procedimental (isto é, naquelas capacidades geralmente implícitas ou tácitas de uso adequado de um certo conhecimento).

---

[5] AHMAD, FAUZI et al. The use of computer in teaching and learning of mathematical calculus among diploma students: evaluation on the TEMACC package. Cited in Ahmand Fauzi Mohd Ayub and Ainda Suraya Md. Yunus. **Mathematics education and applications technology.** Putra University of Malaysia, 2012. P. 274 – 300.

Em se tratando das possibilidades geradas pelo emprego de computadores na criação e manipulações de representações semióticas, Borba (1999) afirma que as novas mídias permitem a deslocação da ênfase algébrica dada aos estudos de funções para uma melhor coordenação entre representações algébricas, gráficas e tabulares.

1.7 Transformações Geométricas: alguns aspectos conceituais.

Esta seção está reservada à apresentação dos conceitos matemáticos das isometrias, das homotetias e das funções compostas, os quais serão utilizados no restante do trabalho.

1.7.1 Isometrias[6]

Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre seus pontos. Ou seja, os comprimentos dos segmentos da figura transformada são iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido. Os ângulos também mantêm sua amplitude.

Definiremos, seguindo o Lima (1996), isometrias na reta, no plano e no espaço, respectivamente.

Sejam A e B dois conjuntos. Uma *função* $f: A \rightarrow B$ é uma regra que associa a cada elemento *x* de A um único elemento $f(x)$ de B.

Uma *isometria da reta r na reta s* é uma função $T: r \rightarrow s$ que preserva a distância entre pontos. Mais precisamente, se dois pontos quaisquer $X, Y \in r$ são transformados por T nos pontos $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ em s, então o comprimento do segmento de reta $\overline{X'Y'}$, que liga os pontos *X'* e *Y'*, é igual ao comprimento do segmento de reta $\overline{XY}$, que liga os pontos *X* e *Y*.

Uma *isometria entre os planos* π e π′ é uma função $T: \pi \rightarrow \pi'$ que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se

[6] Embora a Rotação seja uma isometria, não a definiremos neste trabalho por não ser objeto de nosso estudo.

$d(X', Y') = d(X, Y)$, isto é, a distância entre os pontos X e Y é igual a distância entre os pontos X' e Y'.

Seja E o espaço euclidiano tri-dimensional. Uma função $T: E \rightarrow E$ chama-se uma *isometria* quando preserva a distância entre pontos de E, isto é, quando $d\big(T(X), T(Y)\big) = d(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in E$.

Como transformação, qualquer isometria conserva:

- A colinearidade de pontos;
- A ordem dos pontos em uma reta;
- O paralelismo de retas;
- O perpendicularismo de retas, bem como todos os ângulos formados.

A demonstração dessas propriedades pode ser encontrada em Lima (1996).

a) Reflexão

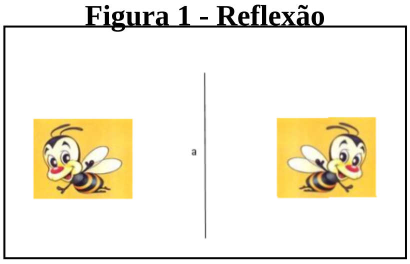
Uma das isometrias fundamentais do plano é a reflexão, já que ela é a responsável por todas as isometrias, ou seja, é possível obter qualquer isometria por composição de reflexões (Idem). Ela é também conhecida como simetria axial e pode ser definida do modo seguinte.

Seja l uma reta do plano. A *reflexão* R_l *de eixo* l é a transformação do plano no plano que:

- fixa cada ponto de l, isto é, $R_l(P) = P$ para todo o ponto P em l;
- transforma cada ponto Q que não pertence a l num ponto Q' tal que l é a mediatriz do segmento de reta que une Q a Q', ou seja, transforma Q num ponto Q' (distinto de Q) situado na reta perpendicular a l que passa por Q e que está a uma distância do ponto de intersecção das duas retas igual à distância a que Q está desse mesmo ponto.

A reta de reflexão comporta-se como um espelho de dupla face como pode ser visto na figura 1 seguinte.

Figura 1 - Reflexão



Fonte: Autora

A descrição e a demonstração das propriedades das reflexões de eixo l podem ser encontradas em Lima (1996).

Observação: Em termos de coordenadas cartesianas, a função $R_{y=0}: R^2 \rightarrow R^2$ dada por

$$R_{y=0}(x, y) = (x, -y)$$

é a reflexão do plano R^2 de eixo $y = 0$.

A função $R_{x=0}: R^2 \rightarrow R^2$ dada por

$$R_{x=0}(x, y) = (-x, y)$$

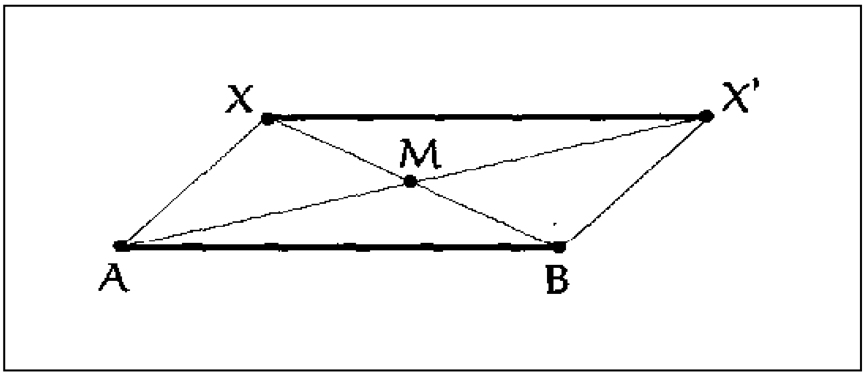
é a reflexão do plano R^2 de eixo $x = 0$.

b) Translação

No que diz respeito à translação na reta, temos a seguinte definição. Dados dois pontos distintos A, B sobre a reta r, a translação $T_{AB}: r \rightarrow r$ é a função que faz corresponder a cada ponto $X \in r$ o ponto $X' = T_{AB}(X)$ tal que $\overline{XX'} = \overline{AB}$ e, além disso, o sentido de percurso de X para X' é o mesmo de A para B. Em termos mais precisos, dizer que $d(X, X') = d(A, B)$ e que os sentidos de percurso $A \rightarrow B$ e $X \rightarrow X'$ coincidem equivale a afirmar que o ponto médio M do segmento AX' é também ponto médio do segmento BX.

Por outro lado, a translação no plano pode ser definida como a seguir. Sejam A, B pontos distintos do plano β. A *translação* $T_{AB}: \beta \rightarrow \beta$ é a função assim definida: dado $X \in \beta$, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados. Esta noção pode também pode ser vista na figura 2, abaixo:

Figura 2 - Translação na reta numérica



Fonte: Lima, 1996.

Esta definição de $T_{AB}(X)$ se aplica apenas quando A, B e X não são colineares. É importante observar que, na definição de T_{AB}, é essencial levar em conta à ordem em que são mencionados os pontos A e B. A translação T_{AB} é diferente de T_{BA}. Na realidade $T_{BA} = (T_{AB})^{-1}$.

É importante falar também que a translação T_{AB} não possui pontos fixos. Na realidade, para todo ponto $X \in \beta$, com $T(X) = X'$, tem-se $d(X, X') = d(A, B)$.

Exemplo: Seja a um número real. A função $T_a: R \to R$ dada por

$$T_a(x) = x + a$$

é a *translação na reta real R* pelo número a.

Exemplo: Seja $v = (a, b)$ um vetor de R^2. A função $T_v: R^2 \to R^2$ dada por

$$T_v(x, y) = (x + a, y + b)$$

é a *translação no plano* R^2 pelo vetor $v = (a, b)$.

1.7.2 Semelhanças e homotetias

O princípio que permeia todos os processos de redução ou de ampliação de figuras é o conceito de semelhança.

Segundo o minidicionário Aurélio, semelhança – Qualidade de semelhante. 2. Relação entre seres, coisas ou ideias que têm em si elementos conformes, além dos comuns a espécie; analogia.

Quando olhamos para uma fotografia de pessoas, conseguimos facilmente reconheceras fisionomias que estão ali, embora que as imagens sejam muito menores que as pessoas reais e estejam em pedaços de papeis. Da mesma forma acontece quando assistimos TV conseguimos reconhecer as características mesmo sendo em um objeto áudio-visual. Poderíamos até nos questionar como isso pode acontecer, reconhecermos objetos mesmo que seja visto com outro tamanho ou em outra posição? Geralmente isso se deve ao fato de que todos os detalhes do objeto original estão representados na imagem e as proporções entre o objeto real e a imagem são as mesmas entre quaisquer duas partes constituintes.

Definição: Dizemos que as figuras F e F' são *semelhantes* quando:

(1) Existe uma correspondência 1 a 1 entre os pontos de F e os pontos de F'.
(2) Existe um número $r > 0$, tal que, para todos os pares de pontos $X,Y \in F$ e seus respectivos pontos homólogos $X',Y' \in F'$, tem-se $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$ (veja a segunda observação seguinte para uma definição de pontos homólogos), onde $\overline{XY}$ denota o vetor que liga o ponto X ao ponto Y.

Observação: Utilizar-se-á a notação $F \sim F'$ quando essas duas figuras forem semelhantes.

Observação: Na definição anterior, o item (1) garante que para todo ponto $X \in F$ existe um único ponto $X' \in F'$ que lhe é correspondente e, de igual modo, todo ponto de F' é correspondente a um único ponto de F. Neste caso, diz-se que X e X' são *pontos homólogos*. Já no item (2), se encontra definido um *fator de escala* ou *razão de semelhança*, que é um número $r > 0$ tal que, para quaisquer dois pontos $X,Y \in F$, cujos homólogos sejam, respectivamente, $X',Y' \in F'$, tenhamos

$$\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY} .$$

Note que se $r > 1$, temos uma *ampliação*, se $r < 1$, temos uma *redução* e se $r = 1$, temos uma congruência.

As transformações de semelhança têm as seguintes propriedades:

1. Preservam a relação "estar situado entre", o que permite concluir, de imediato, que preservam a colinearidade de pontos;
2. Preservam amplitudes de ângulos;
3. Transformam:
   3.1. Retas em retas, são por isso, colineações; semirretas em semirretas; segmentos de reta em segmentos de reta; triângulos em triângulos semelhantes;

   3.2. Retas paralelas em retas paralelas;

   3.3. Retas perpendiculares em retas perpendiculares;

Definição: Seja um ponto *O* numa reta (num plano Π ou no espaço *E*) e um número real positivo *r*. Definimos uma *homotetia* de centro *O* e razão *r* como uma aplicação σ: Π→Π (ou σ : *E* → *E* , para o caso espacial) que satisfaz às seguintes propriedades:

1. σ (*O*) = *O*
2. Para qualquer ponto $X \neq O$, sua imagem *X ′* = σ (*X*) é o ponto na semirreta $\overline{OX}$ tal que $OX' = r.OX$.

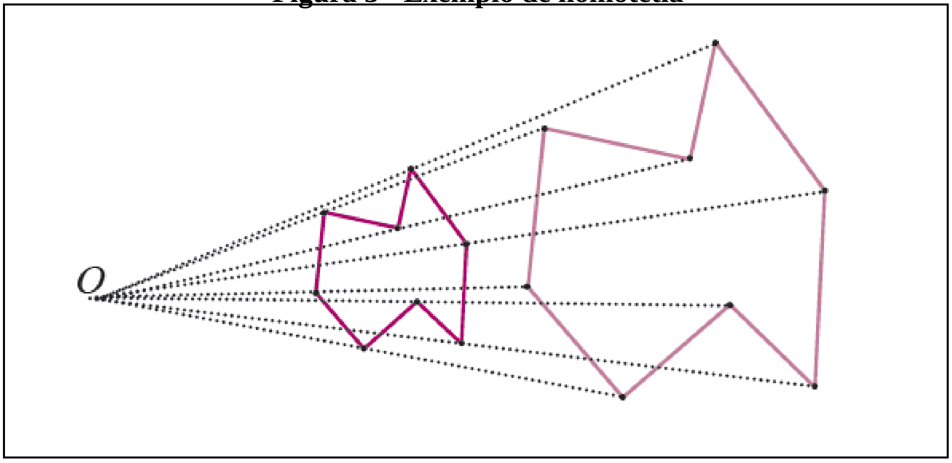
Quando σ é uma homotetia e F e F' são figuras tais que $F' = \sigma(F)$, então se diz que *F* e *F’* são *figuras homotéticas.*

Obervação: Em Lima (1996), as homotetias são definidas apenas num plano bidimensional e num espaço tridimensional. Neste trabalho estendi essa definição de modo a poder falar em funções reais de uma variável real como homotetias. Ou seja, para me referir à função $\sigma: R \to R$ dada por $\sigma(x) = cx$, na qual c é um número real positivo, como uma homotetia de centro na origem da reta e de razão c.

Da definição anterior, podemos destacar alguns resultados imediatos. O fato de que toda homotetia é, na verdade, uma correspondência 1 a 1 entre os pontos do plano ou do espaço; que uma homotetia de razão 1 é simplesmente a transformação identidade; que a inversa de uma homotetia de centro *X* e razão *r* é uma homotetia de centro *R* e razão $\frac{1}{r}$ e, finalmente, que uma homotetia de centro *O* transforma toda reta que passa por *O* em si mesma. Observe abaixo o exemplo de homotetia (Figura 3).

Observação: Toda homotetia é uma semelhança, mas nem toda semelhança é uma homotetia.

Figura 3 - Exemplo de homotetia



Fonte: Lima, 1996.

1.7.3 Funções compostas

Sejam A, B e C três conjuntos e $f: A \to B$ e $g: B \to C$ duas funções. A função $h: A \to C$ dada pela regra $h(x) = g(f(x))$ é chamada a *função composta* das funções *f* e *g*.

Exemplos:

1) Seja $h(x) = (x-3)^2$. Note que $h(x) = g(T_{-3}(x))$, onde $T_{-3}(x) = x - 3$ é a translação pelo número $a = -3$ e $g(x) = x^2$.

2)Seja $h(x) = x^2 + 5$. Note que $h(x) = T_5(f(x))$, onde $T_5(x) = x + 5$ é a translação pelo número $a = 5$ e $f(x) = x^2$.

2 O ENSINO DE FUNÇÕES NO BRASIL

Neste capítulo, o objetivo principal é destacar alguns pontos levantados na fase das análises prévias acerca do conceito de função, que julgo básicos para este trabalho. Na seção 2.1 trato de alguns aspectos históricos e epistemológicos das funções e na seção 2.2 destaco muito brevemente alguns aspectos históricos do caso especial de certas funções denominadas transformações geométricas. Na seção 2.3 trago à tona a abordagem desse tema segundo os PCN. Na seção 2.4 destaco esse conceito segundo o PNLD e na seção 2.3 mostro como se adentrou o conceito de função no currículo de Matemática no Brasil.

2.1 O conceito de Função: alguns aspectos históricos e epistemológicos

O conceito de função é central na Matemática contemporânea. Mas como esse conceito começou a emergir e finalmente ganhou contornos claramente definidos? O nosso objetivo nesta seção é construir uma resposta a essa pergunta, visando a compreender os aspectos históricos e epistemológicos envolvidos em sua formulação.

Vários foram os povos que trabalharam com funções de forma implícita. De fato, na operação de contagem, por exemplo, a cada elemento de um conjunto associa-se um número natural. Os babilônios, também, construíram tabelas em argila, e para cada valor na primeira coluna existia um número na segunda, que era o resultado da multiplicação do número da primeira por uma constante.

Embora essas operações de correspondência estejam de forma implícita presentes muito remotamente, alguns historiadores têm ressaltado que elas não trazem um componente essencial ao conceito contemporâneo de função: a ideia de variação. O cerne do conceito contemporâneo de função está na ideia da correspondência ou inter-relação entre grandezas que variam (ROQUE, 2012, p. 369-70).

Na Idade Média distingue-se o trabalho de Nicole Oresme, por volta de 1360, bispo de Lisieux, no qual se apresenta um diagrama ilustrativo da dependência de grandezas relativas ao movimento de um corpo. Mas ainda não se encontra em seus trabalhos o conceito de variável.

A representação gráfica aparece por volta de 1360, quando Nicole Oresme, bispo de Lisieux, apresenta a latitude das formas (de latitudinibus formarum). Essa representação, também desenvolvida no “Merton College” de Oxford, é retomada por Galileu e acaba se encaminhando para o formato gráfico consagrado por Fermat e Descartes. Já a representação algébrica de função é mais recente, sua história data dos últimos quatrocentos anos.

Na modernidade, inicia-se o delineamento desse conceito. Os primeiros passos na direção da introdução da noção de variável podem ser encontrados em Galileu, no âmbito da física matemática, em seus estudos de cinemática registrados no seu *Discursos e demonstrações matemáticas sobre duas novas ciências*, de 1638. Nessa obra aparecem relações entre razões de distâncias percorridas e razões dos quadrados dos tempos gastos nos percursos. Assim as distâncias aparecem como grandezas que variam com o decorrer do tempo (ROQUE, 2012, pp. 311-12).

Em Newton (1642 – 1727) não se encontra de modo explícito ainda o conceito de uma função. No trabalho desse matemático inglês as funções são utilizadas, mas não se encontra nenhuma definição explícita desses objetos matemáticos. Em seu cálculo diferencial e integral aparecem duas ideias fundamentais: a de fluente e a de fluxão. Os fluentes são grandezas e as fluxões são as velocidades de movimento dessas grandezas. Ou seja, os fluentes correspondem às integrais e as fluxões às derivadas. Portanto, em sua teoria, trabalha-se com as noções de grandezas variáveis e com as relações de dependência entre grandezas variáveis, mas as funções não aparecem como um conceito explícito.

O primeiro registro do uso do termo *função* se encontra em Leibniz (1646-1716), no seu manuscrito *Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus* (CAMPITELI E CAMPITELI, 2006, p.13). Nesse trabalho, o termo função é introduzido para a referência a certos elementos geométricos ou a certas quantidades geométricas de uma curva, definidas pontualmente e que variam de ponto a ponto sobre a curva considerada. Mais especificamente, Leibniz usou o termo apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência de quantidades geométricas referentes a uma curva, definidas pontualmente, tais como subtangentes e subnormais e que variam ao longo da curva. Introduziu igualmente a terminologia de “constante”, “variável” e “parâmetro”. Vale notar, contudo, que Leibniz usa o termo *função*, mas não o apresenta ainda como um conceito.

Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo que exprimisse a relação de dependência entre quantidades variáveis. Com esse propósito, a palavra “função” é mencionada em uma correspondência trocada, entre 1694 e 1698, por Leibniz e Johann Bernoulli (1667-1748). Bernoulli já empregava o termo função para designar uma quantidade formada a partir de uma quantidade indeterminada e de constantes (ROQUE, 2012, p.371).

Em 1718, Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função. Com suas palavras: “Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes” (Bernoulli, apud ROQUE, 2012, p.373).

Um retoque nesta definição viria a ser dado em 1748 por Leonhard Euler (1707-1783) – um antigo aluno de Bernoulli – substituindo termo “quantidade” por “expressão analítica” (ROQUE, 2012). Para Euler, uma função não necessitava unicamente de uma expressão analítica. Foi ele que também introduziu o símbolo $f(x)$ em 1734-35 (BOYER; MERZBACH, 2012, p.305). No segundo volume de *Introduction in Analysin Infinitorum*, Euler diferenciou as funções contínuas e descontínuas, levando em consideração a lei de formação de cada função. Aquelas que fossem definidas por apenas uma expressão analítica seria classificada como contínua e caso essa lei mudasse em qualquer intervalo do domínio automaticamente se classificaria como descontínua ou mista (ROQUE, 2012, p. 379).

Porém é importante ressaltar que a análise infinitesimal desenvolvida até então tinha como principal objetivo estudar as curvas geométricas. Newton e Leibniz não tratavam das funções como objetos matemáticos abstratos. As funções apareciam como ferramentas para a resolução de problemas geométricos e cinemáticos.

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações (de fato, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes). Esta noção, associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhe alteram profundamente a sua natureza e significado.

Como consequência da evolução do estudo das funções, surgem numerosas aplicações da Matemática e outras ciências. Pois, os cientistas partindo de observações procuravam uma fórmula (uma função) para explicar os sucessivos resultados obtidos. A função era então o modelo matemático que explicava a relação entre as variáveis.

O conceito sofreu uma grande evolução ao longo dos séculos, sendo que a introdução do método analítico (isto é, o uso de equações para representar e analisar as relações entre variáveis de um problema) na definição de função (séc. XVI, séc. XVII) veio revolucionar a Matemática.

Como já foi falado anteriormente neste trabalho, a história do termo função passou por grandes evoluções, desde o século XVII por Leibniz, passando por Bernoulli por volta de 1718 e alguns anos depois chegando a Euler, que por sua vez considerava função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes, que é a noção que a maioria dos estudantes dos cursos de matemática elementar tem.

Esse conceito de função se manteve inalterado, até que Joseph Fourier (1768-1830) fosse levado a considerá-lo em suas pesquisas acerca das séries trigonométricas, onde essas séries envolviam uma forma de relação mais geral entre as variáveis que já haviam sido estudadas anteriormente.

Segundo Eves (2004, p. 661) a fim de dar uma definição de função ampla, Dirichlet (1805-1859) chegou à seguinte formulação: uma *variável* é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x à qual se atribuem valores em um conjunto é chamada *variável independente* e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada de *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função. Esse conceito de função desde o século passado é aceito por todos.

A teoria dos conjuntos propiciou a ampliação do conceito de função de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos. Atualmente, a definição de função preferida nos textos de matemática, pela sugestão de dinamicidade que ela encerra, é aquela de uma regra que a cada elemento x de um conjunto X associa um único elemento y de um outro conjunto Y .

Um outro conceito de função, de caráter mais estático e menos comum, é aquele de um conjunto f qualquer de pares ordenados de elementos sujeitos à seguinte condição: se $(a_1, b_1) \in f$ e $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim podemos dizer que uma função é um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano AxB.

Assim o conceito de função que hoje nos parece simples é resultado de uma evolução histórica conduzindo sempre cada vez mais à abstração, e que só no século XIX teve o seu apogeu. Na atualidade as funções estudadas na Análise, e usadas nas aplicações, retêm no fundamental a ideia de dependência entre variáveis.

A noção de função é de importância central na concepção, na modelagem e no estudo de modelos dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial etc., qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser um conceito-chave na Matemática atual.

2.2 Transformações Geométricas: alguns aspectos históricos

Um tipo destacado de funções são as transformações geométricas. Apesar das transformações geométricas estarem presentes de forma implícita em desenhos decorativos ou ornamentais em culturas antigas na história da humanidade, a formalização desse conceito não se deu tão cedo. Isso só acontecerá depois do surgimento da teoria de grupos.

Lagrange foi o unificador do conceito de grupo, e passou boa parte do resto da sua vida desenvolvendo, aplicando e popularizando a noção. Klein numa célebre aula inaugural em 1872, quando se tornou professor em Erlangen, mostrou como esse conceito podia ser aplicado como um meio conveniente para caracterizar as várias geometrias que tinham aparecido durante o século XIX.

Esse programa de Klein, que veio se chamar *Erlangen Programm*, descrevia a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações. Portanto toda classificação de grupos de transformações torna-se uma codificação das geometrias. A geometria plana euclidiana, por exemplo, é o estudo das propriedades das figuras, inclusive área e comprimento, que ficam invariantes sob o grupo de transformações obtidas a partir de translações, reflexões e rotações no plano (Boyer,1996, p. 379).

Klein propõe um ensino de geometria em que deveria valorizar a intuição e a experimentação numa primeira abordagem e, só posteriormente, partir-se-ia para uma sistematização. Configura-se, assim, a necessidade da elaboração de uma geometria propedêutica que teria por objetivo estabelecer uma ponte entre a experiência comum do aluno sobre o espaço e a geometria demonstrativa.

Sobre isso, Klein recomenda:

> Em geometria, o ensino deve começar pelos sólidos simples, de que se farão derivar os conceitos fundamentais, as relações de posição de retas e planos e as principais figuras geométricas. As definições científicas devem ser evitadas. Por métodos empíricos (translação, rotação, dobramento e medida) obtêm-se as principais proposições relativas a relações angulares, áreas e circunferências. Haverá uma transição gradual da intuição para a demonstração. Desde o início, as figuras geométricas não devem ser consideradas rígidas. Recomenda-se um largo uso do movimento para o fim de ilustrar e sugerir relações geométricas importantes (apud BRAGA, 2006, p. 54).

Vale destacar e detalhar alguns conceitos relacionados às transformações geométricas. É disso que nos ocuparemos nos próximos parágrafos.

Simetria é um termo originário do grego que significa "justa proporção". A simetria é uma propriedade facilmente encontrada na Biologia, Arquitetura, Arte, Geometria e até na Poesia. Contudo, é cada vez maior o número de pessoas que entendem a simetria como resultado de movimento e, como movimento, pode ser vivida e percebida pelo sujeito como dinâmica, como regularidade. Como movimento, ela ainda pode ser percebida, compreendida e interpretada por meio dos elementos que a constituem de forma individual ou em conjunto, sendo eles reflexão, rotação e translação.

2.3 Documentos Oficiais

De acordo os PCN para o ensino fundamental, o estudo de transformações isométricas (para a definição, veja a seção 1.7), é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. Desse modo, as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas (BRASIL, 1998, p.124).

Os PCN ainda sugerem que as isometrias sejam ensinadas de maneira significativa, pois assim o estudante desenvolverá o pensamento geométrico e indentificará com mais facilidade os elementos que são variantes e invariantes: "As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para este estudo" (idem).

Já no ensino médio, quando se trabalha com as transformações geométricas, por exemplo, na comparação de gráficos de funções, não se tem tempo devido a condicionantes curriculares para a introdução das transformações geométricas como seria desejável. Isto é, não se dispõe de tempo para introduzir com detalhes esses conteúdos que nos ajudam a compreender melhor a matemática e suas aplicações. Dessa maneira, os estudantes ficam prejudicados em não adquirirem um conceito que muito contribuiria na percepção de importantes conexões entre temas matemáticos.

Portanto, necessita-se que se dê muito maior importância às transformações geométricas. Em primeiro lugar, pela relevância que elas têm na história da matemática recente — veja-se o Programa de Erlangen, de Félix Klein, que influenciou o desenvolvimento da matemática no século XX — mas também porque constituem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998):

> À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas

> desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis (BRASIL, 1998, p. 124)

As isometrias não são o único tipo de transformações geométricas interessantes, estas podem ser vistas como um subconjunto de um universo de transformações mais amplo, as semelhanças. Os PCN recomendam que o estudo de isometrias e homotetias seja introduzido ainda no ensino fundamental, como um recurso didático para a compreensão das congruências ou semelhanças: “Deve-se destacar [...] a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permitam o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes (idem, p. 51).

2.4 As funções no PNLD

O Guia de Livros Didáticos do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) analisa 16 obras do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental acerca de como está sendo a abordagem do conteúdo das transformações geométricas. Os analistas apontam que são pouco frequentes as atividades que contribui para que os estudantes orientem-se e reconheçam a posição dos objetos no espaço; e que na maioria das obras são exploradas atividades que fazem com que o aluno seja levado a obsevar os objetos geométricos no mundo físico com o intuito que eles compreendam as figuras geométricas, bem como propriedades e classificação.

De acordo com o PNLD, a maioria das obras possui em seus conteúdos o conceito de simetria, porém, apresentam muitas limitações (SILVA, 2009). Este conceito, por vezes, apresenta-se associado a aspectos estéticos, voltado para artes plásticas e arquitetura. Suas conexões a outros conceitos matemáticos ou a outras ciências não são exploradas.

Ainda falando em limitações, posso citar também um número grande de atividades em que se exploram a visualização e identificação de figuras simétricas de objetos tridimensionais. Nesse caso, é falado em “eixo de simetria”, mas não se fala que esse eixo pode existir numa representação plana de um objeto e que no espaço tridimensional pode existir um plano de simetria.

Parto agora para o estudo de Funções no emprego de isometrias no Ensino Médio[7].

Segundo o Guia do Livro Didático do PNLD 2012 do Ensino Médio (Matemática), foram aprovadas 7 (sete) coleções. Neste Guia são mencionadas características que se destacam, positivamente ou negativamente, nos livros.

Para a avaliação das obras, o PNLD 2012 dividiu os tópicos da Matemática em seis campos: números e operações; funções; equações algébricas; geometria analítica; geometria; estatística e probabilidades.

O tópico que nos interessa é o de funções, e nele foram consideradas: o conceito de função; sequências; funções afins e afins por partes; funções quadráticas; funções exponencial e logarítmica; funções trigonométricas; matemática financeira; e cálculo diferencial.

Os sumários das obras aprovadas revelam bastante uniformidade. De fato, com poucas exceções, todos apresentam os mesmos tópicos matemáticos dispostos em uma mesma sequência ao longo dos três volumes.

Das obras aprovadas, nota-se nos livros da 1ª série que há uma clara concentração no campo das funções em detrimento dos demais. Em valores aproximados, cinco das coleções dedicam perto de 70% a funções, e as outras duas, respectivamente 65% e 60%. Tal excesso decorre, entre outras razões, de um tratamento fragmentado e repetitivo, com estudo de muitos casos particulares.

Já nos livros da 2ª série observa-se o predomínio da geometria em cinco das coleções, chegando-se, em uma delas, ao porcentual elevado de, aproximadamente, 55% das páginas dedicadas a esse campo.

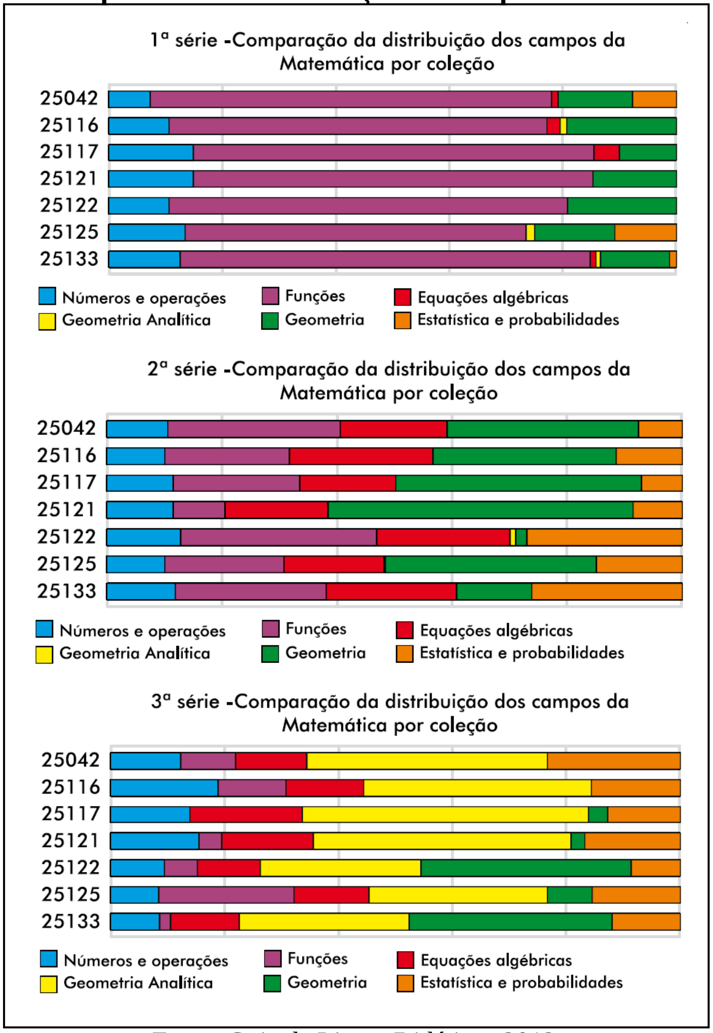
Nos livros da 3ª série é dada maior atenção à geometria analítica, em detrimento de outros campos. Além disso, excetuando-se duas, as obras omitem ou dedicam pouca atenção à geometria ou a funções.

---

[7] As informações a seguir foram retiradas do Guia de Livros Didáticos, PNLD 2012 (Matemática) sofrendo algumas alterações.

Segue na figura 4 abaixo um quadro comparativo do estudo de funções na 1ª, 2ª e 3ª série.

Figura 4 - Painel comparativo da distribuição do campo da Matemática por coleção.



Fonte: Guia de Livros Didáticos 2012.

Não menos relevantes são as conexões entre tópicos de um mesmo campo. Por exemplo, no das funções, estão presentes em todas as obras as ligações conceituais entre progressões aritméticas e funções afins e entre progressões geométricas e funções exponenciais. Contudo, em geral, notamos uma abordagem fragmentada, com divisão dos conteúdos em muitos casos particulares, tratados isoladamente. Isso é desaconselhável do ponto de vista didático e contribui para o excesso de páginas.

Para especificar melhor o comentário acima, examinemos, no campo das funções, alguns exemplos de abordagem fragmentada, que é tradicionalmente adotada no ensino e nos livros didáticos.

Com poucas exceções, para cada classe de funções – afins, quadráticas, modulares, exponenciais e logarítmicas – dedicam-se itens separados (alguns extensos) para trabalhar os tópicos: crescimento/decrescimento; estudo do sinal; equações; e inequações. Desperdiça-se, dessa maneira, a oportunidade de enfeixar estes tópicos como subtópicos de conceitos unificadores.

Para tratar de outro tema unificador, consideremos uma função $f : R \rightarrow R$, que associa a um número real x o número real y, $y = f(x)$. Tomemos, então, um número real *k*, diferente de zero, e formemos as funções dadas por:

$$y = k + f(x) \qquad y = f(x + k) \qquad y = f(kx) \qquad y = kf(x).$$

As relações entre o gráfico da função f e os gráficos das funções que acabamos de indicar são uma rica fonte de conexões entre as representações analítica e gráfica das funções em jogo. Em particular, isso permite interpretar mudanças de variáveis como transformações geométricas no plano cartesiano. Esse tema é abordado em todas as obras aprovadas, mas, em geral, para poucas classes de funções. Um dos casos estudados é a composição das transformações citadas à função $y = cos(x)$, para obter a família de funções:

$$y = a + b.cos(wx + c)$$

em que a, b e c são números reais quaisquer e w é um número real positivo.

Observamos que, apenas variando os parâmetros w e b nessa família, é possível construir funções periódicas de qualquer período e de qualquer amplitude. Podemos, também, variar os outros dois parâmetros, a e c, e aumentar a classe de fenômenos periódicos.

Assim, é inegável que essa família de funções é importante do ponto de vista da modelagem matemática e, por isso, deveria ocupar lugar de maior destaque no ensino das funções trigonométricas e constituir-se em um coroamento deste ensino. Convém adicionar que, para construirmos todas as "peças" dessa família de funções, são necessárias poucas relações trigonométricas, o que poderia contribuir para evitar o excesso de conteúdos nos livros didáticos. As coleções dedicam em torno de 100 páginas ao estudo de trigonometria e de funções trigonométricas, de modo fragmentado e repetitivo.

Todas as obras aprovadas introduzem a noção de função de modo intuitivo, apoiando-a nas ideias de: relação ou associação entre grandezas variáveis; dependência entre grandezas; correspondência entre elementos de dois conjuntos; “regra” ou “lei de formação” envolvendo grandezas ou números, entre outras. Todas as obras sistematizam o conceito de função utilizando conjuntos, o que é apropriado. Por outro lado, em duas das obras adota-se a definição de função como um tipo especial de relação e esta como subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos.

No estudo de funções, é importante representá-las de diferentes modos – tabelas, gráficos, representações analíticas (algébricas) – estabelecendo relações entre eles. Frequentemente, um problema inicialmente formulado de maneira algébrica pode ser mais facilmente resolvido ou compreendido se o interpretarmos geometricamente, e vice-versa. Por exemplo, a simetria axial presente nas funções quadráticas é facilmente perceptível no gráfico e, no entanto, pode exigir esforço de cálculo quando se trabalha com sua representação algébrica. Convém mencionar que o uso de aplicativos computacionais permite visualizar o gráfico de funções e ajuda a perceber propriedades por meio de experimentos com maior riqueza de exemplos.

No estudo das funções, os seus gráficos no plano cartesiano desempenham um papel importante. Na avaliação das obras inscritas no PNLD 2012, observamos que não são tomados os devidos cuidados quando se constroem gráficos de funções. Por exemplo, com um número reduzido de valores da variável independente, induz-se o aluno a considerar que é possível construir o gráfico cartesiano de uma função. É comum encontrar nos livros didáticos, uma tabela com três ou quatro valores de *x*, associada ao desenho de uma parábola, sem explicações adicionais.

Outra falha é recorrer a gráficos estatísticos para construir funções reais de variável real. No caso das variáveis discretas, o gráfico estatístico pode ser constituído por pontos isolados no plano cartesiano ou por barras verticais. Isso não permite que, sem nenhum comentário explicativo, passemos para o gráfico de uma função com variável independente contínua. Na estatística, muitas vezes, utiliza-se o procedimento de ligar os pontos isolados de um gráfico discreto por uma curva contínua. No entanto, trata-se apenas de um procedimento para auxiliar a visualização do comportamento da variável estatística.

2.5 Inserção do tema *função* nos conteúdos matemáticos no Brasil[8]

O processo de inserção do tema *função* entre os conteúdos da nossa matemática do Secundário (nível de ensino correspondente ao que hoje designamos de Ensino Médio) está diretamente vinculado à criação, concretizada no ano letivo de 1929, de uma nova disciplina escolar do ensino brasileiro denominada Matemática, resultante da unificação de três outras, até então, independentes: a Aritmética, a Álgebra e a Geometria.

Essa fusão é feita a partir de uma referência internacional, centradas nas ideias do renomado Felix Klein, que propunha uma renovação nesse nível de ensino. Essa transformação estrutural da nossa matemática escolar é, em 1931, referendada por uma reforma educacional mais ampla, conhecida como Reforma Francisco Campos. Detalharemos como isso ocorreu a partir de agora.

O matemático prussiano-alemão Christian Felix Klein (1849-1925) — matemático que valorizava a intuição, muito respeitado pela sua produção matemática que inclui trabalhos que intentam estabelecer a fusão e a combinação de ramos aparentemente separados — foi destaque no movimento mundial de renovação do ensino da matemática na escola secundária na Alemanha, Inglaterra, França e nos Estados Unidos.

Nos anos de 1881 e 1882, Klein trocou correspondências com o matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) que também compartilhava ideias de que a intuição deveria ter um lugar de destaque no desenvolvimento matemático. Mas o francês fez com que Klein abdicasse de uma produção ainda mais proeminente em novos campos da pesquisa matemática, que por outro lado acabou empurrando-o para um destino indubitavelmente auspicioso junto às questões de ensino e formação de comunidades científicas.

No final do século XIX, Klein começou a se envolver com as questões do ensino da Matemática no curso secundário e, em decorrência, acabou participando de maneira decisiva

[8] Todas as informações presentes neste tópico foram retiradas, sofrendo algumas mudanças, do livro “Função: a alma do ensino da matemática”, de Ciro Braga (2006).

da criação de um organismo emblemático do movimento mundial de sua modernização: a Comissão Internacional de Ensino da Matemática (CIEM) em 1908.

Foram diversos os fatores que fizeram com que Klein liderasse uma reformulação do ensino da matemática do secundário na Alemanha. Um dos fatores desencadeante da necessidade de um movimento renovador residia na heterogeneidade desse ensino reinante nos seus diferentes tipos de escolas. Uma das origens dessa heterogeneidade estava no fato de a Alemanha ser constituída por muitos territórios individuais, acentuando tal diversidade, o seu sistema educacional comportava vários tipos de escolas.

Por ocasião do ingresso nas Escolas Técnicas Superiores, havia uma diversidade na formação matemática dos alunos do secundário. A discrepância existente no preparo matemático dos alunos dos diversos tipos de escolas acabava por não suprir as necessidades dos cursos de engenharia, que, para nivelarem o conhecimento matemático dos ingressantes, terminavam por dispor de um tempo precioso que poderia ser dedicado ao estudo de matérias mais técnicas.

Schubrig (BRAGA, 2006) observa que Klein, na segunda fase das suas atividades na década de 1890, levou adiante o seu ponto de vista de que fazer uma reforma na matemática universitária requeria levar em consideração um sistema mais extenso: o sistema escolar como alicerce básico da educação superior. Assim, começou a se interessar pelo aperfeiçoamento da formação dos professores do secundário.

Ciente de que a mudança estrutural pretendida deveria partir das bases, Klein lançou-se a participar de encontros, congressos, além de elaborar “aulas” dirigidas aos professores. Em 1904, organizou um primeiro curso em que analisava o papel dos diferentes tipos de escolas nos processos de ensino da matemática. As anotações decorrentes dessa explanação foram publicadas na coleção Matemática Elementar sob um ponto de vista superior, gestada em dois semestres também destinados aos professores do ensino secundário alemão.

Nesta obra, Klein expressa muitas de suas ideias que acabaram por converter em princípios do movimento de modernização do ensino da matemática secundária no início do século XX. O matemático alemão recomenda a introdução do Cálculo Infinitesimal entre os conteúdos do ensino secundário, em diversos momentos da referida obra, deixando claro a grande preocupação com o ensino superior.

O que Klein propôs, a partir de 1900, foi de fato introduzir os conteúdos do ensino preparatório de matemática das escolas técnicas superiores como assuntos novos e básicos para os três tipos de escolas secundárias: geometria analítica e os elementos de cálculo diferencial e integral. Diversos trechos da referida obra fornecem indícios de que a introdução do Cálculo no ensino secundário pode ter sido o objetivo primeiro que lançou Klein ao movimento modernizador.

Tentativas inábeis de se incluir esse tópico, e que resultaram em fracasso, originaram uma oposição muito forte contra a introdução do Cálculo Infinitesimal no ensino secundário, oposição que gerou uma proibição oficial do ensino de Cálculo nos últimos decênios do século XIX.

Essa proibição oficial, ao ver de Klein, deveria ser revertida. Assim, procurou elaborar uma ampla e convincente argumentação, desviando o foco das críticas que seriam feitas ao seu objetivo primordial: a introdução do Cálculo.

Na referida obra, Klein discorre diversas vezes sobre a necessidade de ter-se Cálculo entre os conteúdos escolares, chegando a afirmar que “o ensino da matemática deve ir ascendendo até chegar aos umbrais do Cálculo Infinitesimal, de modo que o naturalista e o técnico de seguros, tomando, por exemplo, obtenham da escola o instrumento matemático de que venham a necessitar em seus trabalhos.” (1927, p. VI, Apud. Braga 2006).

A sugestão de Klein para o ensino de Cálculo consistia em, após uma introdução intuitiva de limites, apresentar a noção de derivada como limite da razão incremental (Newton) para, em seguida, prosseguir o curso utilizando-se das notações e das técnicas operacionais de Leibniz.

Algumas tentativas de introduzir o Cálculo exclusivamente pelo método de Leibniz haviam fracassado devido à dificuldade de se assimilar que os infinitésimos podiam ser desprezados. A razão dessas discussões residia no fato de que nem o Cálculo de Leibniz, nem o de Newton estavam estruturados sobre bases precisas, o que deixava um flanco aberto para as severas críticas filosóficas.

Como pesquisador matemático, Klein propõe entrelaçar e coordenar os vários ramos da matemática escolar, enfatizando o conceito de função com suas diversas representações (tabular, algébrica e gráfica).

Cabe observar que o conceito de *função* revelava-se imprescindível para a abordagem por ele proposta para a disciplinarização do Cálculo. Dessa forma, o sucesso no ensino do Cálculo estaria intimamente ligado a um bom domínio do conceito de função por parte do aluno.

Segundo Braga (2006, p. 52), o assunto função deveria ser introduzido desde as séries iniciais com a atuação do aluno sobre a ideia de variação e dependência. Aos poucos, com o progressivo e constante trânsito pelas representações tabular, gráfica e analítica de função, o aluno caminharia em direção à sua formação funcional. Sendo trabalhado de forma gradativa, ao longo de todo curso secundário, conectando e intermediando, sempre que possível, os conceitos e os processos empregados na Aritmética, na Álgebra e na Geometria.

O objetivo de se inserir o Cálculo no ensino secundário alemão começou a se concretizar primeiramente nas *Realschulen* e em *Gysmnasien*, este último oferecia resistência cuja quebra passou a ser, de certa forma, uma obsessão para Klein.

No Brasil, a primeira tentativa de implantar o que estava sendo feito por Klein no movimento modernizador, aconteceu em 1929, no Colégio Pedro II no Rio de Janeiro. Nela foi implantada uma nova disciplina escolar, a matemática, resultante da unificação das disciplinas de aritmética, de álgebra e de geometria. Colégio este de referência para os demais estabelecimentos de ensino do país.

Para a recém-criada disciplina, a Congregação do Colégio Pedro II aprovou o programa do 1º ano seguido das instruções para a sua execução que reservavam para a noção de função um papel nunca antes assumido no ensino das matemáticas. Atendendo a essas instruções, em meados do 2º semestre de 1929, é publicado o volume I do Curso de Matemática Elementar de Euclides Roxo — autor do didático inovador, catedrático do Colégio Pedro II e diretor de seu externato — um livro didático considerado revolucionário para o padrão da época. Em 1930, é editado o Volume II deste curso, destinado aos alunos do segundo ano.

Acredita-se que, para ter o projeto de unificação curricular das matemáticas aprovado na Ata da Congregação do Colégio Pedro II de 1997, Roxo tenha desenvolvido uma árdua tarefa, também em bastidores, de convencimento de seus pares, em que tenha pesado, além de sua função de diretor da instituição, a canalização de um trabalho que vinha sendo realizado, de forma um pouco subliminar pelo professor Artur Thiré (1853-1924). Com a morte deste professor em 1924, Euclides Roxo acaba por assumir praticamente sozinho a tarefa de gestar o processo de renovação do ensino da matemática no âmbito do Colégio.

O caráter quase solitário dessa empreitada em direção a modernização se revelará de forma concreta quando do surgimento das primeiras críticas antagônicas às mudanças implantadas. Vê-se aí, no desenrolar das polemizações levantadas, que não havia grande envolvimento, nem real comprometimento dos professores que lhe eram próximos, pois foram poucos os que se lhe aliaram efetivamente em sua defesa.

Para o convencimento da maioria dos professores do Colégio Pedro II, Roxo além de inegáveis atributos intelectuais dispôs de um ideário consistente respaldado pelos mais renomados matemáticos internacionais.

O processo de implantação dos novos programas do Colégio Pedro II, que deveria ser realizado de maneira progressiva, acabou passando por turbulências devido à eclosão da Revolução Vargas que, em 1931, decretou uma reforma do sistema educacional brasileiro — a Reforma Francisco Campos. Com essa reforma, o ensino secundário passa a ter dois ciclos: um fundamental de cinco anos, e outro complementar, de dois anos, visando à preparação para o ensino superior.

Essa proposta, que pretendia colocar o ensino da matemática do curso secundário brasileiro ao lado daquele praticado nos países mais adiantados do mundo, deve ser creditada basicamente ao empenho determinado de Euclides Roxo, sem dúvida, o educador brasileiro mais inteirado das concepções modernizadoras internacionais (BRAGA, 2006, p. 73).

Quando Roxo implantou, em 1929, as reformas modernizadoras no Colégio Pedro II, imaginava concretizar as concepções do movimento internacional primeiramente no ambiente desse colégio, acompanhando de perto as eventuais e necessárias correções de rota impostas pela realidade da sala de aula.

A Reforma Francisco Campos, ao acampar essas concepções em âmbito nacional, obriga o ensino da matemática secundária de todo o Brasil a adaptar-se de maneira abrupta. Na Alemanha, ao contrário, o processo de modernização foi gradativo e a partir do convencimento do professorado.

Roxo em seu livro *A Matemática na Escola Secundária* publicado em 1937, expressa seu pensamento sobre o ideário renovador internacional. No caso particular da noção de função no secundário, Roxo revela que tanto ele com Breslich compartilhavam da concepção veiculada por Klein.

Breslich, alemão, educador que explorou ao máximo o potencial educativo do pensamento funcional, muitas de suas ideias a respeito do pensamento funcional estão expressas no artigo *Developing Functional Thinking in Secondary School Mathematics*, onde ressalta a importância da utilização de função como princípio unificador para a reorganização do ensino secundário nos Estados Unidos. Essa importância está diretamente relacionada ao caráter prioritário que assume o desenvolvimento do pensamento funcional na formação do aluno, no sentido de lhe dar uma visão e uma compreensão da matemática adequada ao mundo contemporâneo de então.

Por ocasião da década de emergência da nova disciplina matemática no Brasil em 1930, escolheram-se algumas coleções de caráter inovado, dos quais podemos destacar:

1) Curso de Matemática Elementar, 2 volumes (1º e 2º anos) – Euclides Roxo;
2) Matemática, 2 volumes (1º e 2º anos) – Cecil Thiré e J. C. de Mello e Souza (Malba Tahan);
3) Curso de Matemática, 3 volumes (3º, 4º e 5º anos) - Euclides Roxo, Cecil Thiré e J. C. Mello e Souza;
4) Elementos de Matemática, 5 volumes – Jacomo Stávale;
5) Lições de Matemática, 5 volumes – Algacyr Munhoz Maeder;
6) Curso de Matemática, 5 volumes – Agricola Bethlem.

Os manuais didáticos do período da Reforma Francisco Campos, ao que tudo indica, estão mais próximos do cotidiano dos professores e alunos do que em qualquer outro período anterior. No entanto, cabe ressalvar que os livros didáticos, mesmo ao lado dos planos curriculares e das instruções pedagógicas, espelham uma imagem apenas parcial do que ocorre com a disciplina. Apesar disso, não deixam de constituir um dos eixos da própria atividade escolar, em torno do qual gravitam concepções pedagógicas.

Pelo que foi exposto em um relatório do CIEM, relativo ao período de 1902 a 1914, esses doze anos foram insuficientes para a assimilação do princípio que colocava função e o pensamento funcional, como protagonistas da Matemática escolar. Assim, compreende-se que o insucesso da aplicação dessa concepção modernizadora nos dez anos de Reforma Francisco Campos, não é algo específico do nosso país.

3 REFERENCIAIS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

O objetivo desse capítulo é apresentar o referencial teórico utilizado nessa pesquisa. Na seção 3.1 apresentamos a metodologia de pesquisa adotada: Engenharia Didática. Na seção 3.2 apresentamos a teoria que subsidiou a elaboração da sequência didática e na seção 3.3 apresentamos a *conversão* e o *tratamento* de registros segundo a teoria de representação semiótica, por Duval.

3.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação, a experimentação e a análise de sequências de ensino.

A pesquisadora francesa Artigue (1989)[9] apresenta o trabalho da Engenharia Didática comparando-o com o trabalho do engenheiro. Ao realizar um projeto, apoiando-se sobre o conhecimento científico de seu domínio, o engenheiro, assim como o professor ou pesquisador da Engenharia Didática, aceita se submeter a um controle científico, e ao mesmo tempo encontra-se obrigado a trabalhar sobre objetos menos precisos que os científicos. O trabalho do professor, ao elaborar ou escolher uma sequência didática, deve levar em conta de forma integrada: o domínio do conhecimento, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e dos seus alunos. Para tanto, em cada sequência é necessária uma definição do significado da aprendizagem.

Artigue (1998, p. 285, *apud* MACHADO, IN: MACHADO 2010, p. 235), a Engenharia Didática é caracterizada "[...] como um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a validação e análise de sequências de ensino".

A criação de uma sequência didática dá-se num processo interativo no qual o objetivo é a elaboração de um grupo de decisões para que os processos tenham significados e as

[9] Disponível em: <http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie98/266M.html> Acesso em: 18 setembro 2012.

estratégias sejam mais efetivas. Levam-se em consideração as respostas dos alunos e as condições às quais estão submetidas. Dessa forma o processo envolve: uma análise da situação proposta, das condições da organização, da escolha de estratégias baseadas nas análises da instrução dada, da determinação de critérios de avaliação, da elaboração de questões que estejam de acordo com os critérios determinados e uma revisão de todo processo em função dessa avaliação.

Um dos clássicos trabalhos do professor tem sido o de escolher ou organizar sequências de atividades que explorem um domínio do conhecimento. Essas sequências de ensino aparecem, também, como um dos seus principais objetos da Engenharia Didática.

Em uma pesquisa cuja metodologia é fundamentada na Engenharia Didática podemos mencionar diferentes fases no seu desenvolvimento: análises prévias; construção e análise a priori; experimentação, análise a *posteriori* e validação.

A primeira fase é aquela na qual se realizam as análises preliminares, que pode comportar os seguintes aspectos:

- análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;

- exame do ensino usual e seus efeitos;

- levantamento das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;

- identificação das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;

- consideração dos objetivos específicos da pesquisa;

- estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

Já a análise a priori é o momento no qual se escolhe o modo como será feita a sequência didática. Compreende a definição das variáveis globais e locais com as quais se vai trabalhar, tendo em vista que a partir do momento que se tem essas variáveis definidas, segue-se o momento no qual são planejadas e elaboradas as situações didáticas ou estratégias de ensino por meio das quais se pretende abordar cada uma das variáveis locais. Aqui se estabelecem também quais são as expectativas de aprendizagem em cada situação didática proposta. Essa fase de planejamento das situações didáticas deve prever os momentos de validação e de institucionalização dos saberes abordados.

- as variáveis macrodidáticas ou globais são aquelas relativas à organização global da engenharia;
- as variáveis microdidáticas ou locais são aquelas relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.

O objetivo de uma análise a priori é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. Dessa forma, em uma análise a priori devemos:

- Descrever as escolhas das variáveis globais e locais e as características da situação adidática desenvolvida.
- Analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem;
- Prever comportamentos possíveis e tentar mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

E por fim experimentação analise a *posteriori* e validação. Na fase da experimentação são executadas, uma a uma, as situações didáticas planejadas na fase anterior, ou melhor, é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade, o que implica em um retorno à análise a priori, em um processo de complementação.

Ela é seguida de uma fase de análise a *posteriori* que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação: observações realizadas sobre as sessões de ensino e as produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são, às vezes, completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas em diversos momentos do ensino.

A análise a *posteriori* de uma sessão é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribuem para melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa, supondo que:

- a observação foi preparada por uma análise a priori conhecida do observador;
- os objetivos da observação foram delimitados por ferramentas apropriadas, e estruturados também pela análise a priori.

Assim, a análise a *posteriori* depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático...) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise a priori realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos a priori e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.

Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise a priori e análise a *posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer).

3.2 Situações Didáticas segundo Guy Brousseau

A teoria das situações didáticas de Guy Brousseau trata do processo de ensino-aprendizagem da matemática e oferece um modelo teórico de construção, análise e experimentação de situações didáticas em um contexto de ensino tripolar no qual interagem professor, estudante mediados pelo saber matemático.

Para esse estudioso francês, “uma concepção de ensino requer que o professor provoque uma adaptação em seus estudantes mediante a escolha racional de problemas que são colocados diante deles. Esses problemas são escolhidos de tal maneira que permitam ao aluno pensar e evoluir por seus próprios meios” (Brousseau, 1986, p.46).

Desse modo, uma concepção de ensino exige do professor um trabalho de identificação e proposta de problemas capazes de envolver o estudante em ações de compreensão e de resolução deles. Uma vez inserido em ações de resolução de um problema, o professor se retira de cena e espera que o estudante produza sua próprias resposta para o problema. Nesse processo de formulação de estratégias e tentativas, de erros e acertos o estudante vai fazendo suas novas aquisições de conhecimentos a partir do que já dispõe em sua estrutura cognitiva. A essa situação, Brousseau denomina *situação adidática.*

Freitas (1999, p.70) tem acentuado que “as situações adidáticas representam o momento mais precioso da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nas mesmas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar o conhecimento”.

Vale registrar que essa teoria encontra-se fundamentada na teoria da aprendizagem de Piaget, na qual a aprendizagem ocorre por um processo de assimilação e de acomodação através do qual estão envolvidos momentos de desequilibração e de reequilibração da estrutura cognitiva do estudante em novos patamares.

De um modo sintético, a teoria das situações didáticas propõe a promoção do ensino-aprendizagem em quatro fases: de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. A *fase de ação* se caracteriza pela proposta de uma situação na qual o estudante se envolva e desenvolva ações de experimentação, tentativas, conjecturas, erros acertos visando à resolução de uma questão ou de um problema proposto.

Já a *fase de formulação* é marcada pela elaboração e comunicação de estratégias utilizadas em sua própria linguagem, mas sem ainda a intenção de justificação da validade das respostas ou dessas estratégias.

A *fase de validação* é o momento da socialização das respostas e das estratégias. Espera-se aqui que já sejam elaboradas críticas, reflexões e justificativas acerca das estratégias utilizadas. O professor nesse momento assume o lugar de coordenador ou mediador.

Por fim, a *fase de institucionalização* é o momento no qual o professor assume o lugar de protagonização e contribui efetivamente na formalização dos conhecimentos e das estratégias mobilizadas nas fases anteriores.

3.3 Os tratamentos e as Conversões segundo Raymond Duval

Em seus estudos acerca da aprendizagem da matemática, Duval propõe que uma das principais dificuldades apresentadas pelos estudantes nessa disciplina é compreenderem que um mesmo objeto matemático admite diferentes modos de representação e, além disso, aprenderem a estabelecer a correspondência entre os diversos modos de representação desse mesmo objeto.

Duval, por sua vez, propôs em seu trabalho que "a originalidade da atividade Matemática está na mobilização de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação" (DUVAL, 2010, p. 14).

Duval (2009, p. 15) denominou por "*semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica" e *noésis* "a apreensão conceitual de um objeto". Conforme Duval (2010), as representações semióticas (*semiósis*) não desempenham a função de comunicar as representações mentais (*noésis*), mas são fundamentais para as atividades cognitivas. Para o autor, é a partir da *semiósis* que se desenvolve a *noésis*, ou seja, é por meio da capacidade de representação dos objetos matemáticos e da realização de conversões entre os distintos modos de representação de um mesmo objeto que os conceitos matemáticos são atingidos.

Segundo Duval (2009), são três as atividades cognitivas de representação referentes à semiósis: a formação, o tratamento e a conversão.

A *formação* refere-se à formação de registros de representação "seja para 'exprimir' uma representação mental, seja para 'evocar' um objeto real" (DUVAL, 2009, p. 53). Ao realizar este procedimento de formação, o sujeito seleciona as características do objeto matemático que ele quer representar, criando assim uma representação conforme a sua visão do objeto e das características relevantes para o determinado momento. Ou seja, a formação de uma representação é dada a partir de um ou mais signos que tenham relação com o objeto matemático a ser representado. Esses signos são cultural e historicamente desenvolvidos e utilizados por outros sujeitos, como, por exemplo, a linguagem natural, os símbolos matemáticos, os gráficos, os sólidos geométricos, etc. Duval (2009, p. 55) afirma que "uma representação semiótica não deve sair do domínio definido pelas regras que constituem um sistema semiótico", isto é, o representante precisa atender às características inerentes ao objeto matemático representado.

As outras duas atividades referem-se às transformações. O *tratamento* é a transformação dentro (interna) de um mesmo registro de representação semiótico. Na maioria dos casos, o tratamento é diretamente relacionado a um determinado sistema de representação. Quando nos referimos a funções, por exemplo, os tratamentos inerentes a forma de representação geométrica são diferentes dos tratamentos inerentes à forma de representação algébrica.

> "Os *tratamentos* são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar cálculos ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação de números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. As *conversões* são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica" (Duval, 2003, p. 16).

A *conversão* seria a transformação de um registro de representação semiótico em outro, ou seja, uma transformação externa ao registro de representação de partida. Por realizar esta passagem de um registro de representação semiótica a outro, para que a conversão seja realizada se faz necessário que o sujeito tenha consciência do que é o objeto representado e do que foi utilizado para se fazer esta representação. Quando não se tem essa percepção entre representante e representado bem definida, a conversão fracassa e a aprendizagem fica comprometida.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A organização do trabalho de elaboração do produto educacional seguiu o método da Engenharia Didática. Conforme as indicações propostas nesse método, subdividimos nosso trabalho em quatro fases, como a seguir:

Fase 1: Análises prévias.

Essa fase compreende três momentos:

a) análise histórica e epistemológica do tema (investigação do desenvolvimento histórico do tema. No caso considerado aqui, é o estudo do desenvolvimento histórico do conceito de função e das transformações, chamando a atenção para as modificações registradas ao longo do tempo);
b) análise didática do tema (análise de como o ensino das funções e transformações tem sido abordado na literatura especializada e nos textos didáticos do ensino médio);
c) análise cognitiva (levantamento, por meio de questionários, entrevistas ou de exames escritos, das habilidades matemáticas dos sujeitos da pesquisa).

Fase 2: Análise a priori.

É o momento no qual se escolhe o modo como será feita a sequência didática. Compreende a definição das variáveis globais e locais com as quais se vai trabalhar. No que se segue, especificamos as variáveis escolhidas nesta engenharia didática:

i) Variáveis globais: GeoGebra, isometrias e homotetias, funções;
ii) Variáveis locais: translações horizontais e verticais, reflexões no eixo dos x, homotetias, função seno, funções quadráticas, funções modulares, funções potência.

Tendo definido as variáveis globais, segue-se o momento no qual são planejadas e elaboradas as situações didáticas ou estratégias de ensino por meio das quais se pretende abordar cada uma das variáveis locais.

Aqui se estabelecem também quais são as expectativas de aprendizagem em cada situação didática proposta. Essa fase de planejamento das situações didáticas deve prever os momentos de validação e de institucionalização dos saberes abordados.

Fase 3: Implementação da experimentação.

Nesta fase são executadas, uma a uma, as situações didáticas planejadas na fase anterior.

Fase 4: Análise a posteriori. Na medida em que se vai executando as situações didáticas, vai-se também analisando os resultados obtidos na experimentação e confrontando-os com as expectativas estabelecidas na análise a priori.

4.1 Questões investigativas

Investigar até que ponto a visualização dos efeitos de certos tratamentos efetuados na representação algébrica de uma função (os quais correspondem a deformações — dilatações ou compressões — ou translações do gráfico dessa função) favorecem à aprendizagem da execução no ambiente papel e lápis do esboço de gráficos.

Mais especificamente, investigar:

a) Até que ponto a visualização do efeito das adições ou das subtrações de uma constante à variável independente de uma função se reflete na compreensão de que isso corresponde a translações horizontais do gráfico dessa função, sem deformação do gráfico.

b) Até que ponto a visualização do efeito das multiplicações na variável independente de uma função se reflete na compreensão de que isso corresponde a compressões ou dilatações horizontais de gráficos.

c) Até que ponto a visualização do efeito das adições ou subtrações de uma constante a uma função corresponde a translações verticais do gráfico dessa função.

d) Até que ponto a visualização do efeito da multiplicação de uma função por uma constante corresponde a deformações verticais do gráfico dessa função.

e) Quais as dificuldades apresentadas pelos estudantes na execução das atividades das oficinas.

4.2 Contexto e Participantes

Para verificar se o roteiro de atividades desenvolvido é uma ferramenta eficaz, no tocante aos objetivos almejados, contamos com a participação de uma turma composta por 27 alunos do Programa de Apoio a Escolas Públicas do Estado (PAESPE), programa desenvolvido pelo Centro de Tecnologias (CTEC) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) que tem por finalidades principais, preparar estudantes do ensino médio de escolas públicas do Estado em todas as disciplinas avaliadas pelo ENEM.

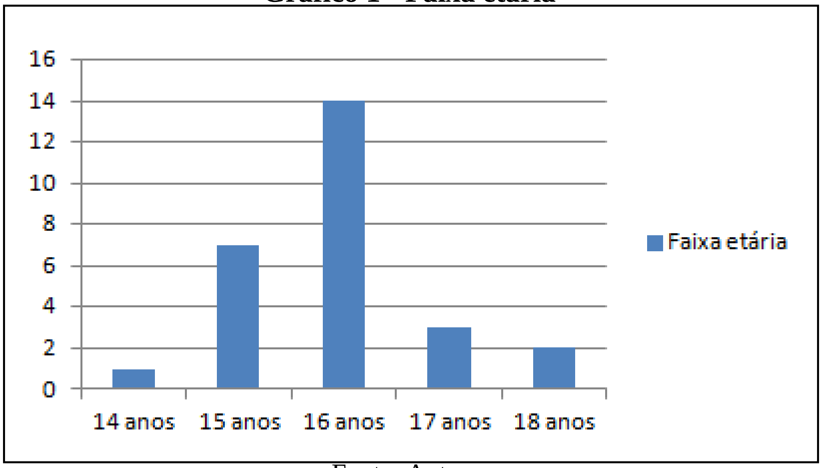
4.3 Análise Cognitiva

Antes mesmo do início da realização das oficinas de aprendizagem, propomos a aplicação de dois questionários. O questionário I, a que chamamos de questionário socioeconômico, visa conhecer a trajetória escolar dos estudantes e conhecer alguns aspectos a que consideramos importantes para a sua participação. Por outro lado, o questionário II tem por objetivo verificar o nível de aprendizagem dos estudantes quanto ao estudo de Funções, desde a parte conceitual até o esboço de gráfico de algumas delas.

No Questionário II, buscamos trazer problemas do dia-a-dia, pedir o esboço de gráfico de funções simples, como a função afim e quadrática.

Contamos com a participação de 27 estudantes do PAESPE e todos eles encontram-se cursando a 2ª serie do Ensino Médio. Nos gráficos abaixo seguem informações desses estudantes, recolhidos por meio do questionário I.

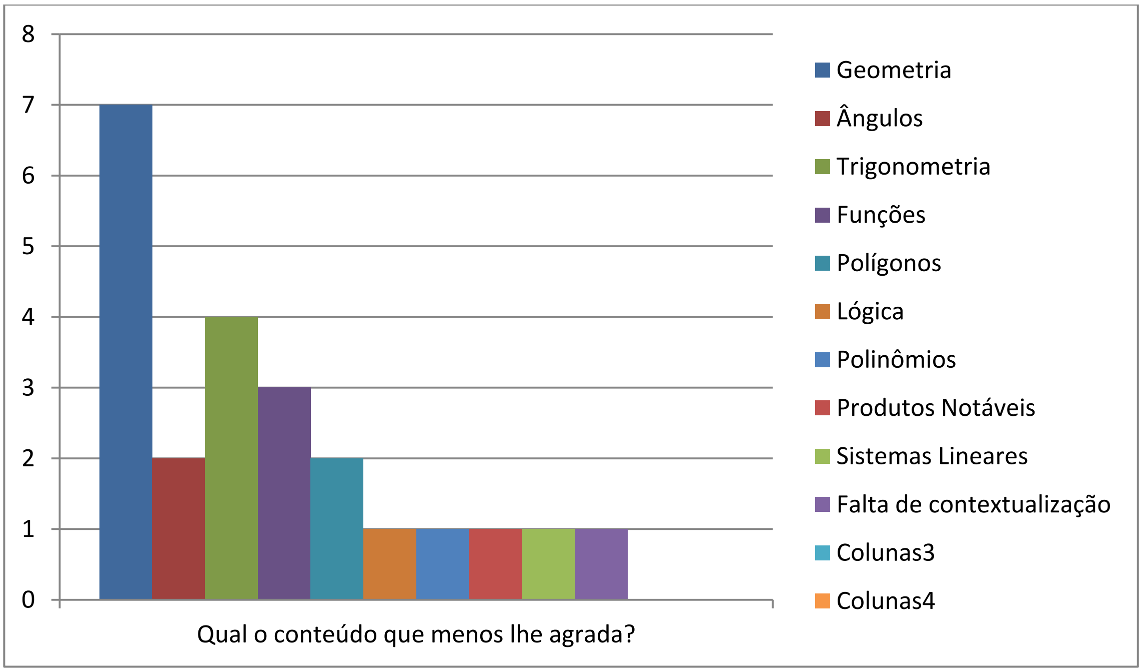
Gráfico 1 - Faixa etária



Fonte: Autora.

Uma questão que compunha esse questionário foi a seguinte: Gosta de Matemática? Dos 27 alunos 22 responderam que sim e 5 responderam que não e destacaram como segue no gráfico 2 o conteúdo que menos agradava na área.

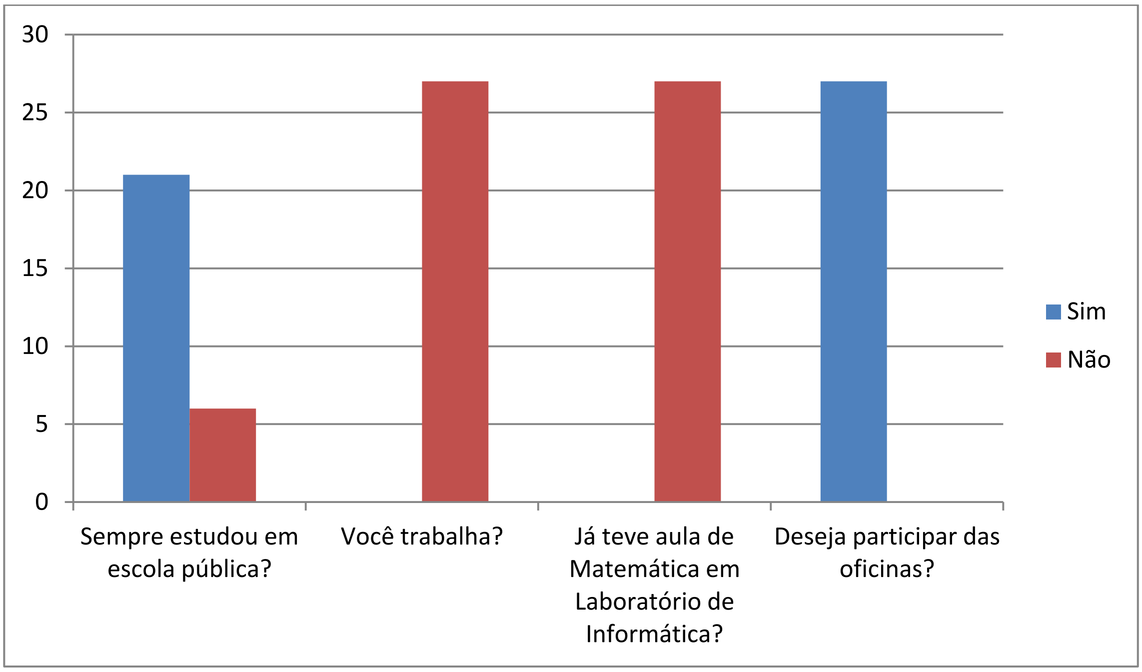
Gráfico 2 - Conhecendo a trajetória escolar I



Fonte: Autora.

Os gráficos 3 e 4, descrevem as respostas dadas acerca das questões no que diz respeito a questões pessoais e reflexo da sua trajetória escolar.

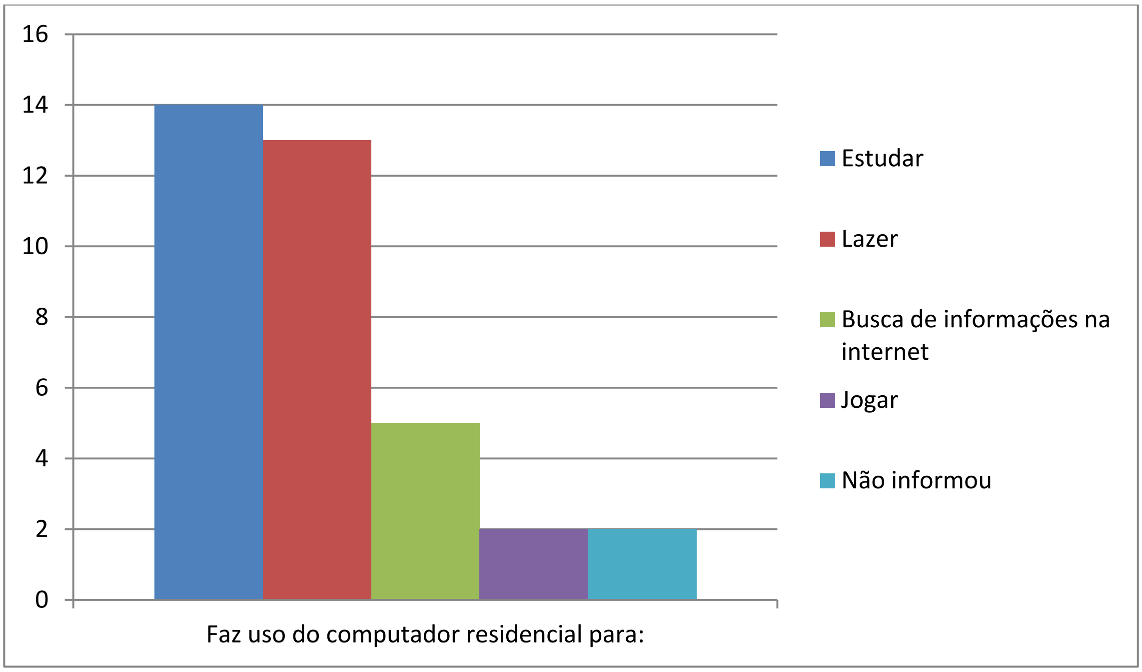
Gráfico 3 - Conhecendo a trajetória escolar II



Fonte: Autora.

Foi feita a seguinte pergunta: A sua casa dispõe de computador? Dos 27 alunos, 21 responderam que sim e 6 responderam que não.

Gráfico 4 - Conhecendo a trajetória escolar III



Fonte: Autora.

No Questionário I, todos se mostraram interessados em participar das Oficinas. verbalmente, eles justificaram que seriam interessantes essas aulas, pois a proposta de se trabalhar esse tema com o computador ia trazer atratividade ao conteúdo, têm consciência de ser importante, mas algo proporciona o entrave no entendimento. As respostas do Questionário II seguem-se abaixo.

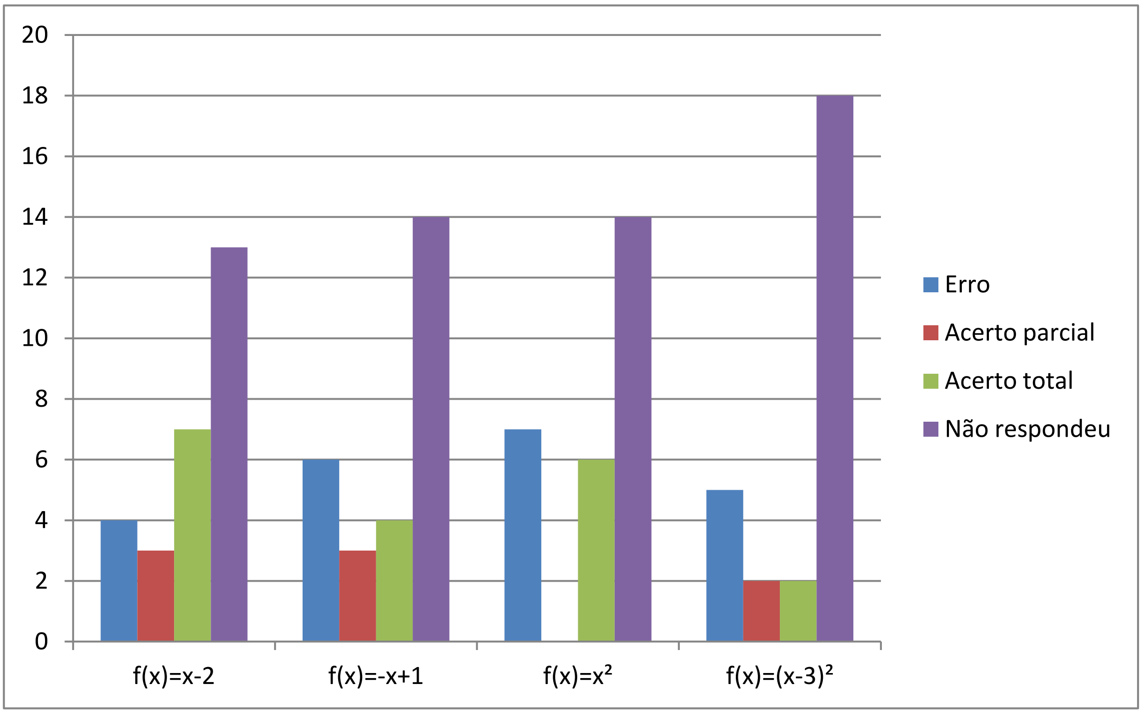
Quadro 1 - Questionário Diagnóstico (conhecimentos prévios).

<table>
<tr><th>Perguntas do Questionário II</th><th colspan="4">Respostas dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>O que é uma Função?</td><td colspan="2">Não sei responder
23</td><td colspan="2">Justificou
4</td><td>Justificativa dada:
-“Modo de expressar alguma coisa em função de x”;
-“Relação de duas incógnitas, onde se dermos o valor de uma das incógnitas acharemos o valor da outra (pois estamos numa sequência)”;
-“É um cálculo muito usado nas engenharias entre outras utilidades”
-“É uma forma de juntar cada valor (número) dado a um único da função $f(x)$”;</td></tr>
<tr><td>Você acha que o estudo das funções é importante? (Por quê?)</td><td>Sim
16</td><td>Não
1</td><td colspan="2">Não respondeu
10</td><td>Os “porquês” do estudo de funções serem importante foram da seguinte maneira (alunos):
- “Uso no dia-a-dia” (5 alunos);
-“Aprender cálculos e informática” (1 aluno);
-“Por ser aplicado em várias áreas, engenharia e indústria” (1 aluno);
-“Na teoria é importante mas na prática não há importância” (1 aluno);
-“Ajuda a compreender um gráfico” (1 aluno);
- “Descreve as relações em gráficos” (1 aluno);
-‘Não sei mas gostaria de saber” (1 aluno);
- Sem justificativa (5 alunos).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Em um determinado restaurante um garçom recebe um salário mensal fixo de 678,00 reais e uma remuneração adicional de 10% do valor das contas das mesas que ele atende:</td><td>Erro
8</td><td>Acerto Parcial
4</td><td>Acerto Total
3</td><td>Não respondeu
12</td><td>a) Escreva uma função que expresse o ganho mensal do garçom em função do valor total das contas da mesa que ele atende.</td></tr>
<tr><td>Erro
4</td><td>Acerto Parcial
4</td><td>Acerto Total
8</td><td>Acerto Total
11</td><td>b) Se ao final de um mês o valor total das contas das mesas atendidas por um garçom foi de 5.000,00 reais, quanto ele deve receber?</td></tr>
<tr><td>Determine dois números cuja soma é 180 e cujo produto é máximo.</td><td colspan="4">Não respondeu
27</td><td>Dos 27 alunos, nenhum respondeu esta questão.</td></tr>
</table>

Fonte: Autora.

Abaixo, nos gráficos 5 e 6, segue as respostas dos estudantes no que diz respeito ao conhecimento do esboço do gráfico das funções, cujo objetivo era verificar se eles sabiam identificar a representação geométrica a partir da representação algébrica.

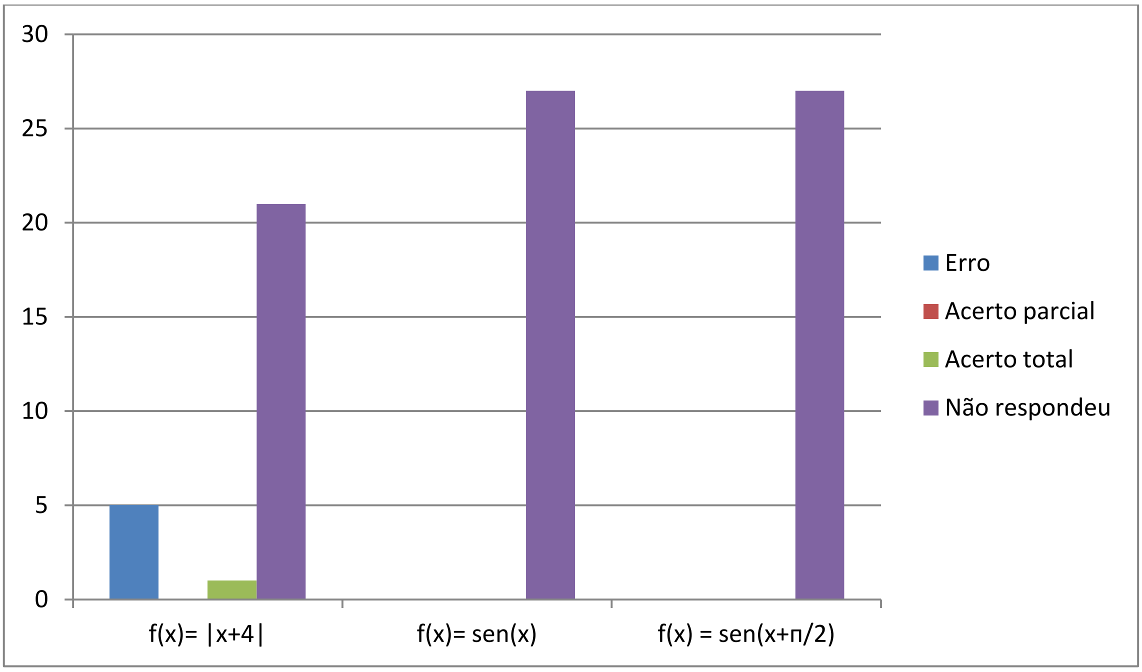
Gráfico 5 - Conhecimento prévios I



Fonte: Autora.

Consideramos erro, aqueles que encontravam corretamente os pontos $P(x, y)$ a ser marcado no plano cartesiano mas não conseguiam ligá-los corretamente. Consideramos acerto parcial aquele que, ao marcar os pontos da função afim no plano cartesiano e em seguida ligar corretamente, obtinha com resultado algo parecido com a reta, mas não a mesma. Fato que ficava evidente o não entendimento de representação geométrica de uma função. Também consideramos acerto parcial aquele que obtinha a reta num determinado intervalo, ou seja, a representação encontrada por ele no plano cartesiano era um segmento de reta.

Gráfico 6 - Conhecimento prévios II



Fonte: Autora

Note que o esboço do gráfico das duas últimas funções que envolvem a função seno e por sua vez ninguém respondeu.

4.4 Oficinas

Essa sequência didática, proposta de produto educacional, consiste de dez oficinas de aprendizagem.

Em todas as sessões, tivemos como objetivo principal, criar condições para que os estudantes percebam a relação entre o gráfico de uma função e o gráfico de uma outra que difere dela por uma composição de isometrias e de homotetias. O tempo estimado para realização de cada atividade varia entre 0h50 a 01h40, cada. O público alvo são alunos do Programa de Apoio as Escolas Públicas do Estado (PAESPE) e o recurso utilizado é o software de geometria dinâmica GeoGebra. Este por sua vez será trabalhado em um laboratório de informática localizado no Centro de Tecnologias (CTEC) na Universidade Federal de Alagoas (UFAL).

Os citados alunos do PAESPE são atualmente alunos da educação básica do estado de Alagoas, e participam desse programa cujo objetivo é prepará-los nas disciplinas que são avaliadas pelo ENEM. Encontram-se na faixa etária entre 14 e 18 anos de idade.

Em decorrência da análise cognitiva dos sujeitos da pesquisa, resolvi aplicar uma primeira oficina (de reconhecimento) onde é explicada a utilidade das ferramentas presentes no GeoGebra, focando nas que utilizaremos nas demais oficinas. Optamos em abordar os gráficos das funções afins nessa oficina de reconhecimento ao examinar os dados da análise cognitiva dos estudantes e perceber que eles apresentavam dificuldades no esboço do gráfico desse tipo de função.

As atividades que compõem as oficinas encontram-se divididas em etapas. Estas são propostas de tal modo que forneçam situações de aprendizagem como se propõe na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau. A situação de *ação* é aquela na qual o estudante encontra-se empenhado na busca de solução de um problema. De *formulação,* o aluno já faz algumas afirmações relativas ao problema, mas sem intenção de julgamento sobre validade embora contenha implicitamente intenções de validação. De *validação,* aqui se elabora um tipo de “prova” (explicação) do que se afirmou em meio a uma linguagem oral ou escrita em um momento de socialização de respostas e estratégias. E por fim, *institucionalização,* esta fase visa a estabelecer o caráter de objetividade e de universalidade do conhecimento. Está presente nas atividades como a nossa última etapa de cada oficina.

A oficina I foi reservada a propiciar o reconhecimento dos recursos interativos do GeoGebra, buscando principalmente familiarizar os participantes da oficina com os aspectos básicos desse software.

Na oficina II, os conceitos trabalhados são de translações verticais de funções. Propomos nesta oficina quatro atividades.

O objetivo aqui é observar até que ponto a visualização dos movimentos produzidos nos registros geométricos pelas operações de tratamento $g(x) = f(x) + a$ realizadas no âmbito dos registros algébricos favorece a compreensão dessa conversão no ambiente papel e lápis.

Na primeira atividade, tomamos a função seno pra começar os trabalhos, por presumir que seu gráfico tem um aspecto que propiciaria a visualização do efeito das translações verticais. Nas atividades 2 e 3 dessa mesma oficina, as funções trabalhadas foram função potência e função modular, respectivamente.

Para finalizar a oficina II, propomos uma atividade em que os sujeitos da pesquisa não deveriam usar o software para desenvolvê-la, ou seja, uma atividade destinada ao uso de papel e lápis apenas. O objetivo aqui é observar até que ponto o estudante é capaz de efetuar a conversão, sem auxílio dos computadores, das operações de tratamento do tipo $g(x) = f(x) + a$ realizadas no âmbito dos registros algébricos, sem o conhecimento da expressão algébrica explícita da função f mas conhecendo a representação de $f(x)$ no âmbito dos registros geométricos.

Na oficina III, os conceitos trabalhados são de translações horizontais de funções. O objetivo aqui é observar até que ponto a visualização dos movimentos produzidos nos registros geométricos pelas operações de tratamento $g(x) = f(x + a)$ realizadas no âmbito dos registros algébricos favorece a compreensão dessa conversão no ambiente papel e lápis.

As funções tomadas nas quatro atividades são função seno, função potência, função modular, respectivamente. Os objetivos são análogos àqueles mencionados nas oficinas anteriores. A última e quarta atividade desta sessão consiste na apresentação uma função abstrata (isto é, da qual se conhece o gráfico de f mas não se conhece explicitamente a sua expressão algébrica) e na solicitação que os estudantes determinem o gráfico de os estudantes deverão realizá-la fazendo uso apenas do lápis e papel.

A oficina IV está voltada para conclusão desejada por nós professores com relação aos conteúdos trabalhados até aqui, é uma espécie de resumo das sessões I e II. Nela, começamos a atividade 1 a perguntar qual a diferença entre a translação vertical e a translação horizontal. Sugerimos que se necessário usassem tabelas para mostrar os pontos dos gráficos.

O estudo das oficinas V e VI foram destinadas às dilatações vertical e horizontal do gráfico de uma função. Na oficina V, sobre homotetias verticais de gráficos, o objetivo é observar até que ponto a visualização dos movimentos produzidos nos registros geométricos pelas operações de tratamento $g(x) = af(x)$ realizadas no âmbito dos registros algébricos favorece a compreensão dessa conversão no ambiente papel e lápis.

Na oficina VI, sobre as homotetias horizontais de funções, o objetivo é observar até que ponto a visualização dos movimentos produzidos nos registros geométricos pelas operações de tratamento $g(x) = f(ax)$ realizadas no âmbito dos registros algébricos favorece a compreensão dessa conversão no ambiente papel e lápis.

Na oficina VII, composta por uma atividade apenas, visa fazer com que os trios de estudantes analisem o que foi visto nas oficinas V e VI. Começamos esta sessão a perguntar a diferença entre a dilatação vertical e a dilatação horizontal. A socialização dos resultados é um dos pontos mais importante dessa sessão, pois é nela que cada trio irá compartilhar o que concluíram.

A oficina VIII se destina à reflexão de gráficos de funções com relação ao eixo dos x. O objetivo aqui é observar até que ponto a visualização dos movimentos produzidos nos registros geométricos pelas operações de tratamento $g(x) = -f(x)$ realizadas no âmbito dos registros algébricos favorece a compreensão dessa conversão no ambiente papel e lápis.

Nessa, as funções estudadas são função potência, função modular, e apresentação de um gráfico abstrato de uma função escolhida pelo professor.

Para finalizar, as oficinas IX e X são destinadas ao estudo das composições de funções com isometrias ou homotetias. As funções trabalhadas nas sessões acima envolvem as funções seno, potência e modular, respectivamente. O objetivo aqui é observar até que ponto a visualização dos movimentos produzidos nos registros geométricos pelas operações de tratamento $g(x) = bf(x + a) + k$ realizadas no âmbito dos registros algébricos favorece a compreensão dessa conversão no ambiente papel e lápis.

A expectativa inicial é que na concretização das atividades o tempo estimado para realização delas diminua de atividade para atividade, pois elas encontram-se com certo grau de semelhança.

4.5 Coleta de Dados

A coleta de dados foi procedida por observação, questionários, protocolos dos registros escritos dos estudantes produzidos pelos estudantes durante as aplicações das oficinas e pelo registro num diário de campo das falas dos estudantes produzidas por eles nas oficinas, nas etapas de socialização e de institucionalização dos conhecimentos.

CAPÍTULO 5: EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI

Este capítulo encontra-se subdividido em duas seções. Na seção 5.1, encontram-se a descrição da realização e a análise das oficinas planejadas na fase de análise a priori. Na seção 5.2, apresento os resultados obtidos na análise a *posteriori*.

5.1 Experimentação e Análise a *Posteriori*

Esta seção está reservada para o relato da experimentação e a análise a *posteriori*, ou seja, aqui descrevo como foram executadas as oficinas, uma a uma, em momentos nos quais executei o planejamento da análise a priori, e faço a análise dos dados recolhidos durante a experimentação.

Oficina I: Reconhecimento

Nesta oficina, tive como objetivo apresentar aos estudantes o software GeoGebra mostrando suas ferramentas e finalidades de uso. Recorri à função afim $f(x) = ax + b$ como conteúdo para se traçar gráficos, utilizar controles deslizantes e fazer a verificação de seu comportamento no plano cartesiano.

Essa apresentação foi realizada cuidadosamente, já que esse software era desconhecido para a turma inteira. Contamos com a presença de dez estudantes. Notou-se com aquela atividade, ainda precocemente, como um software munido das características de dinamismo e interatividade conseguia prender a atenção deles.

Nesta apresentação já começaram as primeiras construções, as primeiras identificações de relações entre gráficos, ainda que de forma tímida.

A turma foi dividida em duplas. Foram reservados 10 minutos para que as duplas pudessem discutir o funcionamento do GeoGebra. Como já esperado, eles começaram a lançar na caixa de entrada funções para ver seus gráficos e o comportamento deles uma vez variando seus coeficientes.

Após a socialização de ideias, solicitamos que cada dupla investigasse o gráfico da função $f(x) = ax$ nas seguintes situações:

i) Quando o parâmetro a varia em uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é, num intervalo do tipo $(0,3)$, por exemplo;
ii) Quando o parâmetro a varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo (-3,0), por exemplo;

No momento da socialização das respostas com os demais colegas de sala, houve vários manifestos de respostas, apenas uma dupla declarou que o gráfico passava pela origem, outras duplas responderam: "uma é o contrário da outra, pois quando parti do 0 ao 3 ela tá crescendo, e quando parti do -3 ao 0 ela tá decrescendo"; a dupla 3 declarou: "são opostas, quando "toca" entre o (0,3) o gráfico pertence ao 1º e 3º quadrante e quando "toca" entre (-3,0) pertence ao 2º e 4º quadrante". Por outro lado, a dupla 4 afirmou que: "Elas são inversas".

Ainda que com um vocabulário matemático vago ou impreciso para aquele conteúdo, todas as expectativas foram atendidas.

Oficina II: Translações Verticais de Funções.

Nesta oficina, traçamos como objetivo principal, que os estudantes percebessem a relação entre gráfico de funções que diferissem por uma translação vertical. Ou seja, o objetivo era criar condições para que os estudantes visualizassem com auxílio do GeoGebra que os tratamentos do tipo $g(x) = f(x) + a$ realizados nos registros de representação algébrica correspondiam a translações verticais.

A maioria dos estudantes já haviam visto noções de trigonometria na escola, mas de maneira aligeirada, segundo eles, e pouco se lembravam das noções vistas. Mas, mesmo assim, foi solicitado na atividade 1 que fosse esboçado o gráfico de duas funções que diferiam da função seno $f(x) = sen\, x$ por translações verticais.

Na problematização dessa atividade, foram atendidas todas as expectativas antes mesmo que fosse gerada uma discussão entre os trios. Eles logo perceberam que os gráficos diferiam por movimentos verticais.

Na atividade 2 e 3, eles logo concluíram que o que valia pra atividade 1 também valia para as atividades 2 e 3.

As dificuldades encontradas foram no momento em que foi definido um intervalo de variação para as funções na ferramenta “controle deslizante”, pois os estudantes confundiam a alteração no intervalo da variação do parâmetro a com a alteração no intervalo da variável x da função.

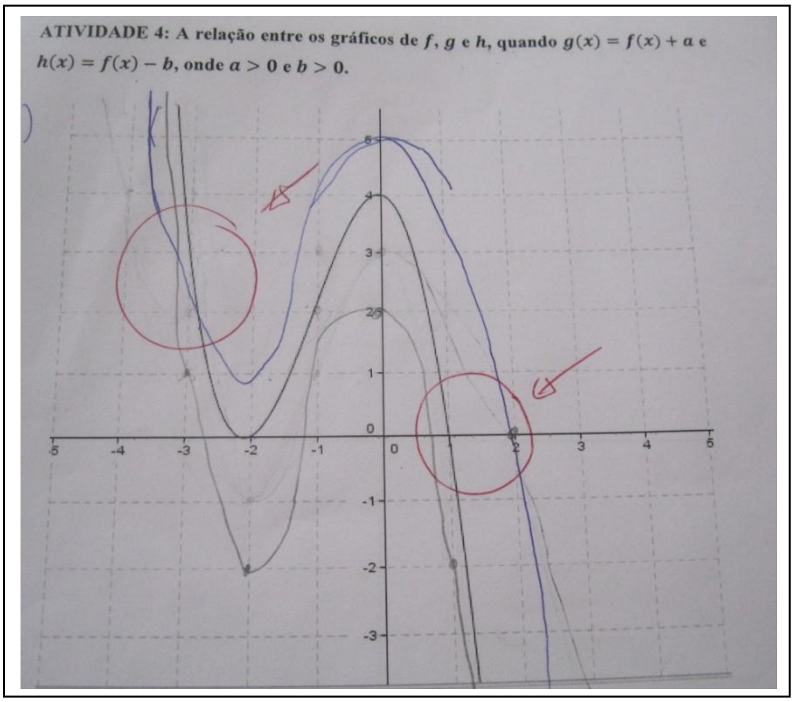
Por exemplo, no caso da função $g(x) = f(x) + a$, a variação no controle deslizante $a\epsilon(z_1, z_2)$ era confundida com a variação de $x \in (z_1, z_2)$.

Por fim, a atividade 4 deveria ser realizada sem o uso do GeoGebra. Para isso foi entregue aos estudantes, numa folha, o gráfico de uma função abstrata (isto é, sem a explicitação de sua regra de formação) e em seguida solicitado que a partir dela eles realizassem, sem o auxílio do GeoGebra, uma translação vertical de tantas unidades quanto fosse solicitado pelo professor.

Um dos trios solicitou a representação algébrica (como já esperado) daquela função para que pudesse fazer a translação vertical daquele gráfico. Isso aconteceu, tendo em vista que até então, eles acreditavam que a representação algébrica da função era necessária para que a introduzissem no campo algébrico do GeoGebra e obtivessem o gráfico da função.

Das nove soluções entregues, cinco delas estavam corretas e 4 apresentavam o mesmo tipo de erro: a solução estava parcialmente correta por conseguirem transladar corretamente, mas o gráfico apresentava também uma dilatação. Observe na figura 5, a seguir, a resposta de um dos trios com acerto parcial:

Figura 5 - Resposta de um trio de estudantes da atividade que envolve translação vertical de funções.



Fonte: Autora

Depois dessa atividade passamos para a oficina seguinte.

Oficina III: Translações horizontais de Funções.

Nesta atividade, dedicamos nossa atenção às translações horizontais de funções, cujo objetivo era que os estudantes percebessem a relação entre três gráficos, onde dois deles eram translações horizontais do primeiro. Ou seja, o objetivo era criar condições para que os estudantes visualizassem por meio do GeoGebra os tratamentos do tipo $g(x) = f(x + a)$ realizados nos registros de representação algébrica.

Nas três primeiras atividades, todas as expectativas esboçadas na análise a priori aconteceram conforme o esperado. As dificuldades ocorreram no momento em que alguns estudantes quiseram tomar um parâmetro conveniente para estudar os três gráficos na mesma tela (uso do controle deslizante). Ou seja, dada a função $g(x) = f(x + a)$ com $a \epsilon Z$, caso $a \epsilon Z^+$ o resultado era uma translação para a esquerda e se $a \epsilon Z^-$ o resultado era uma translação para a direita. O desentendimento aconteceu quando os estudantes tomavam valores de variação para o x da função confundindo com a variação da constante no controle deslizante, isto é, $a\epsilon(-4,2)$ com o $x\epsilon(-3,3)$. Olhar para o enunciado e perceber que o parâmetro de variação era o a (no controle deslizante) só veio acontecer depois da mediação do coordenador da oficina, ao explicar o papel de cada parâmetro naquela atividade.

Ainda na atividade 1, depois da socialização das respostas, foi mostrada uma tabela para que os estudantes entendessem os efeitos, já que o esboço dessas atividades era no GeoGebra. Essa tabela tinha por objetivo esclarecer os “porquês” de o gráfico passar por cada ponto.

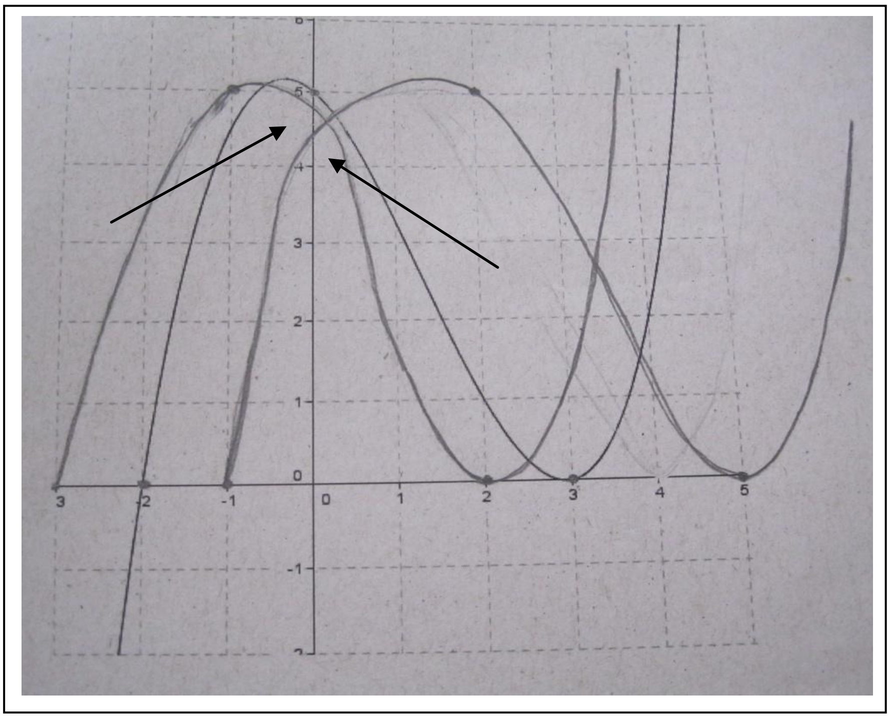
Tanto na atividade 2 (Função potência) quanto na atividade 3 (Função modular), as respostas dadas pelos estudantes estavam corretas. As dificuldades, ou erros, no que diz respeito à observação no Geogebra quase não aconteciam. Era mais comum as dúvidas nas questões cuja solução devia ser encontrada sem esse recurso.

Para finalizar esta oficina, realizamos a atividade 4, cuja solução deveria ser encontrada sem o recurso do software. Foi entregue a cada trio um gráfico de uma função abstrata $f(x)$ e foi solicitado que eles esboçassem o gráfico de $g(x)$ e $h(x)$ onde o gráfico delas era translações horizontais do gráfico de $f(x)$. Ou seja, o objetivo era que os estudantes, sem o auxílio do GeoGebra, realizassem no registro de representação geométrico os tratamentos do tipo $g(x) = f(x + a)$ e $h(x) = f(x - a)$, realizados nos registros de representação algébrica.

Nesta atividade, o tempo gasto pelos estudantes pra se achar uma solução foi maior, estava explicitamente visível a discussão entre os trios à procura da solução, pois perceber o que acontecia no GeoGebra estava claro, mas no momento de colocar no papel, as dificuldades eram maiores.

Das dez soluções entregues, nove delas estavam corretas e apenas uma encontrava-se parcialmente correta. O acerto parcial aconteceu no esboço das funções $g(x)$ e $h(x)$ que além de transladar horizontalmente houve também uma dilatação, tendo em vista que até aqui eles não haviam visto a oficina voltada pra dilatação de funções. Observe na figura 6 a seguir a resposta com acerto parcial.

Figura 6 - Resposta com acerto parcial da atividade 4 (translações horizontais de funções).



Fonte: Autora

Oficina IV: Síntese do Esboço de Gráficos com o auxílio das Translações de Funções.

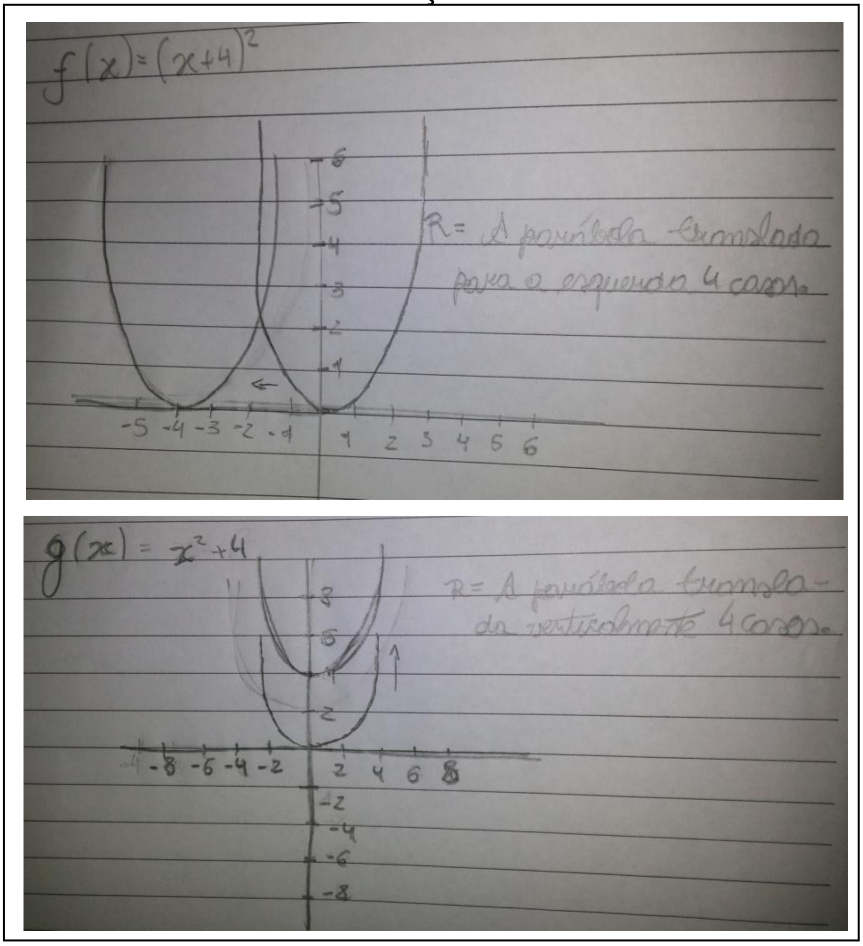
Nesta oficina, tivemos por objetivo que os estudantes comparassem em um mesmo momento as translações verticais e as translações horizontais. Assim como na realização das oficinas, geralmente as aulas de matemática não acontecem em dias consecutivos, pensando nisso usamos de duas aulas para que os estudantes procurassem meios ou formas de destacar e diferenciar os efeitos ocorridos em cada transformação aqui estudada.

Na atividade 1, já foi lançada uma pergunta em que eles deveriam apontar as diferenças entre a translação vertical e a translação horizontal. Diante de tal questionamento, propomos duas funções em que eles deveriam esboçar o gráfico sem o uso do GeoGebra, onde cada uma delas era uma translação vertical da função potência e a outra era a translação horizontal também da função potência.

Das sete soluções entregues, todas apresentavam acerto total.

As justificativas, de modo geral, eram como as que se pode ver na figura 7 a seguir.

Figura 7 - Solução dada por estudantes nas atividades de translações horizontais de funções.



Fonte: Autora

A segunda atividade para esta oficina envolvia translações do gráfico da função seno. Na institucionalização foi mostrada uma tabela cujo objetivo era entender melhor os efeitos dos gráficos. A dificuldade, ainda que aparentemente, aparecia no esboço do gráfico da função seno ao sofrer uma translação horizontal, haja vista os estudantes não atentassem para o fato de que o π era um número real. Para contornar essa situação foi sugerido que olhassem o valor de π como sendo 3,14.

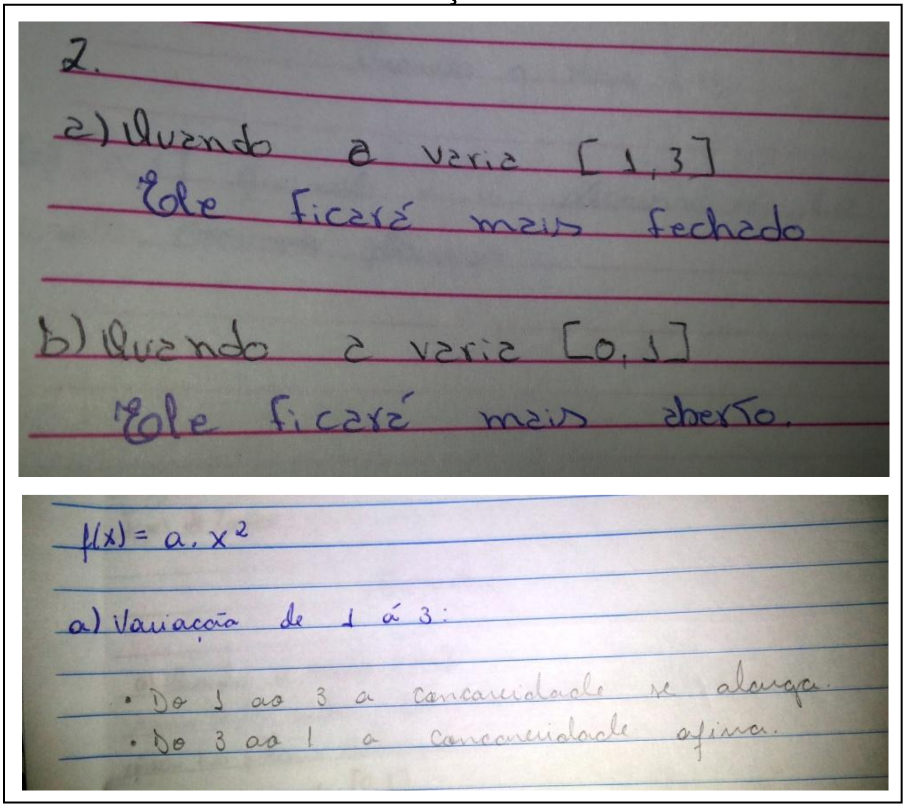
Oficina V: Dilatação Vertical de Funções

Nesta oficina, traçamos como objetivo principal a promoção do conceito de dilatação vertical de gráfico de funções. Ou seja, o objetivo era criar condições para que os estudantes visualizassem, com o auxílio do GeoGebra, que os tratamentos do tipo $g(x) = f(x) + a$ realizados nos registros de representação algébrica correspondiam a certos tipos de deformações do gráfico de $f(x)$ no campo dos registros de representação geométrica.

Na atividade 1, embora as expectativas fossem atendidas ao final do seu tempo, notou-se um choque quanto ao comportamento do gráfico pois até então eles estavam com a noção de que transladar um gráfico, este ou "subia" ou "descia" permanecendo com sua forma invariante. Depois de um diálogo com suas respectivas duplas chegaram à conclusão desejada.

Por outro lado na atividade 2, foi preferível pelos estudantes usar apenas o controle deslizante para fazer a verificação da problematização. Nesta atividade, no momento da socialização das respostas notava-se que os estudantes entendia o que acontecia geometricamente, mas não conseguia expressar claramente (com termos técnicos) o comportamento. Observe a figura 8 a seguir.

Figura 8 - Solução dada por estudantes nas atividades de dilatações verticais de funções

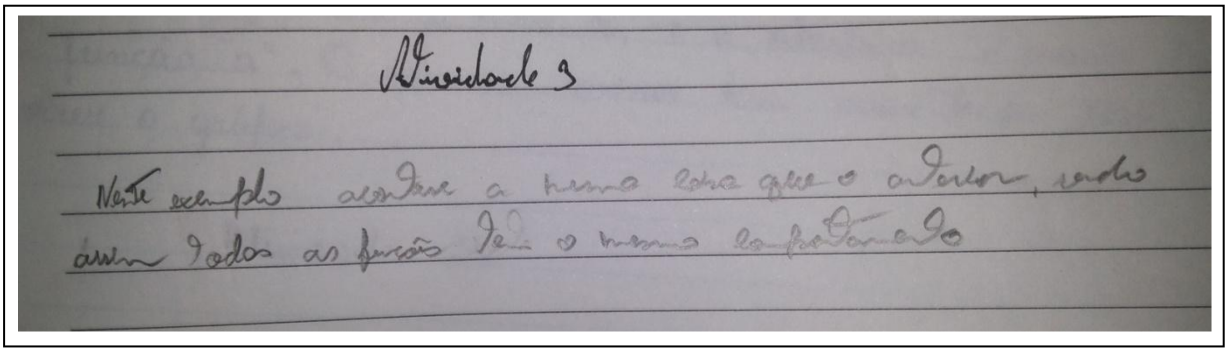


Fonte: Autora

As onze soluções entregues apresentavam uma linguagem parecida e todas estavam corretas.

Na atividade 3, os estudantes chegaram à solução muito mais rapidamente devida à semelhança dessa atividade com a anterior, fato que levava-os a concluir que o que acontecia pra atividade 2 vinha a se repetir na atividade 3. Observe na figura 9.

Figura 9 - Solução dada por estudantes na atividade 3 de dilatações verticais de funções

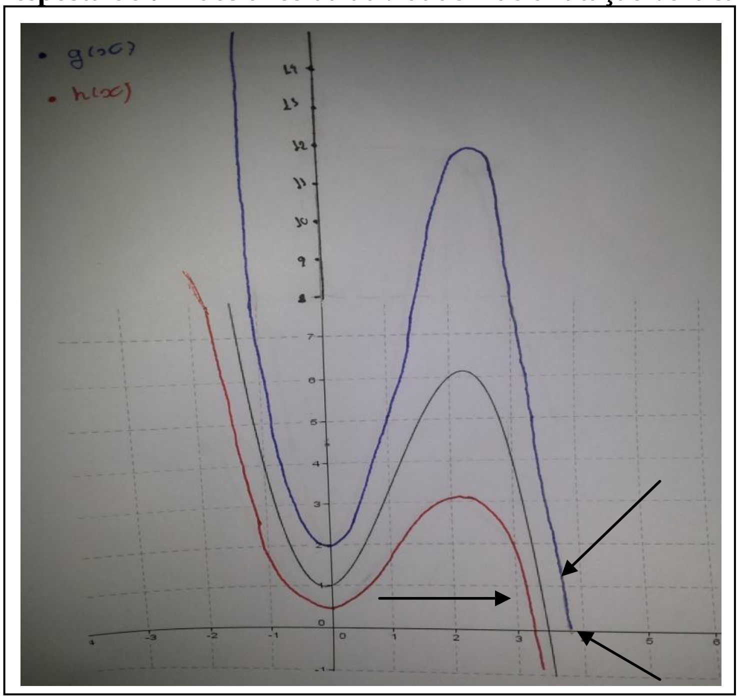


Fonte: Autora

Para finalizar esta oficina, propomos a atividade 4, cuja solução deveria ser encontrada o uso do GeoGebra como recurso. Foi entregue a cada trio o gráfico de uma função abstrata $f(x)$ (isto é, dada sem a explicitação de sua expressão algébrica) e foi solicitado que eles esboçassem os gráficos de $g(x) = 2f(x)$ e $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$. A minha expectativa é que eles conseguissem determinar as dilatações verticais do gráfico de $f(x)$.

Todos os trios apresentaram a mesma dificuldade. Embora percebessem que os gráficos sofrem uma deformação vertical, eles não conseguiram perceber que eles se intersectam no mesmo ponto no eixo dos x, como pode ser visto na figura 10 a seguir.

Figura 10 - Resposta de um dos trios da atividade 4 de dilatação vertical de funções.



Fonte: Autora

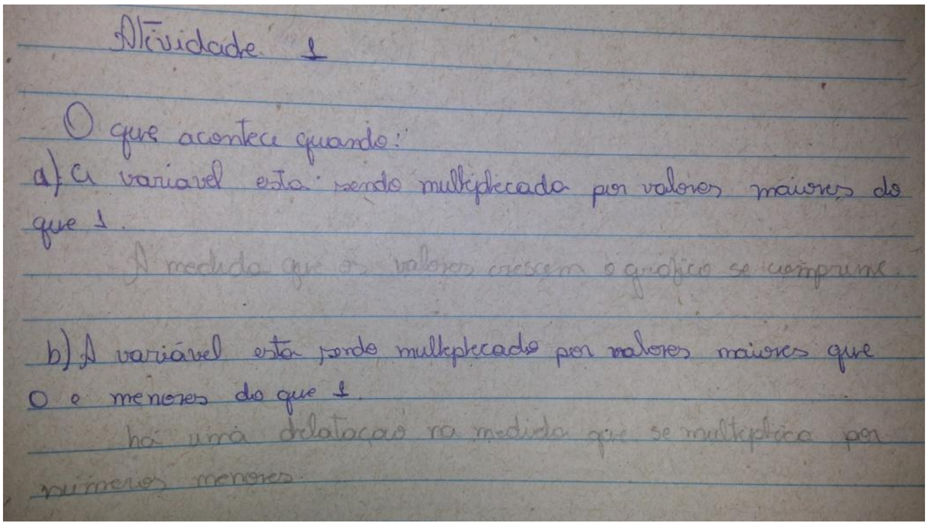
De modo geral, as expectativas foram correspondidas muito embora que as dúvidas em “onde passa essa parte do gráfico exatamente?” insistisse em ser falado.

Oficina VI: Dilatação Horizontal de Funções.

Nesta oficina, traçamos como objetivo principal a promoção do conceito de dilatação vertical de gráfico de funções.

Na atividade 1, observando as construções todos conseguiram chegar a solução desejada. Observe a resposta abaixo de um dos trios.

Figura 11 - Solução dada por estudantes em uma das atividades de dilatações horizontais de funções.



Fonte: Autora

Nesta oficina os estudantes optaram por não usar a ferramenta “controle deslizante” para ver o comportamento dos gráficos.

Na atividade 2, os trios pareciam confiantes nas respostas, usaram de pouco tempo pra chegar a solução. Por outro lado a atividade 3 que envolvia o estudo da dilatação horizontal da função modular, optei por não realizá-la já que as expectativas até então acerca do comportamento dos gráficos ao sofrer essa isometria já tinha sido realizada. Numa tentativa de não ficar uma atividade cansativa.

A atividade 4, foi entregue aos trios de estudantes o gráfico de uma função abstrata $f(x)$ feito manualmente e foi solicitado que eles esboçassem o gráfico de $g(x) = f(2x)$ e $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Assim que foi dado o problema alguns alunos se manifestaram dizendo que o gráfico que toca o eixo y no ponto $(0,4)$ passaria a tocar no $(0,2)$ quando se procurava o $g(x) = f(2x)$. Notou-se claramente uma confusão com o conteúdo da oficina anterior (dilatação vertical).

Dos quatro trios apenas um percebeu que quando se multiplicava por 2 a variável dependente o resultado era uma compressão assim como se multiplicássemos por ½ o resultado era uma dilatação. Confusos ainda com essa oficina, achavam que multiplicar por 2 se dilatava, pois estava multiplicando cada ponto do gráfico pelo dobro. Diante dessa dificuldade dos estudantes, investi mais um tempo na discussão dessas propriedades.

Oficina VII: Síntese do esboço de gráficos que diferem por homotetias.

Na síntese foi conseguido estabelecer com facilidade a diferença entre as dilatações.

Oficina VIII: Reflexões Verticais de Funções.

Nesta oficina, tivemos como objetivo mostrar os efeitos sobre um gráfico de uma reflexão em relação ao eixo x.

A primeira atividade envolvia o estudo da função potência ao ser refletida em torno do eixo x e mais uma vez a expectativas da análise à priori aconteceram. Na socialização das respostas tivemos como solução do trio 3 que “refletiu ponto a ponto na construção a partir do controle deslizante”.

A atividade 2 estava destinada à função modular que por sua vez também tivemos as soluções desejadas.

A terceira e última atividade, foi entregue a cada trio o gráfico de uma função f(x) e foi solicitado que eles refletissem o gráfico em relação ao eixo x. Dos quatro trios participantes da oficina, dois se manifestaram com a resposta correta assim que foi entregue a questão. Os outros dois trios estavam confusos no momento em que discutiam com suas respectivas duplas, levando-me à mediação da discussão. Por fim, conseguiram chegar à resposta correta.

Oficina IX: Composição de Translações Verticais e Dilatações e Oficina X: Composição de Translações Horizontais e Dilatações.

Nestas oficinas, traçamos como objetivo principal a apropriação do conhecimento do traçado de gráficos ao compor translações e dilatações.

Em ambas as oficinas, trabalhamos com a composição de translação vertical e homotetia ($g(x) = cf(x) + a$ e $h(x) = cf(x) + b$) e composição de translação horizontal e homotetia ($g(x) = cf(x + a)$ e $h(x) = cf(x + b)$.)

Nessas duas oficinas estão previstas três atividades envolvendo, respectivamente, as funções seno, potência e modular.

Antes de começar a atividade, perguntei aos estudantes o que estava por trás da representação geométrica dessas funções abaixo:

$$f(x) = sen(x)$$

$$g(x) = a\ sen(x)$$

$$h(x) = sen(ax)$$

$$k(x) = \ a\ sen(x) + b$$

$$m(x) = \ a\ sen(x) - c$$

Ainda que tenha sido breve o diálogo sobre o gráfico das funções acima, as atividades foram realizadas e discutidas num tempo menor do que as demais oficinas. Aqui dedicamos duas aulas para desenvolvê-las. Os estudantes identificaram olhando as representações algébricas os tipos de transformações geométricas implícitas nelas e já utilizavam os termos transladar em vez de "subir ou descer/ caminhar para direita ou esquerda" dilatar ou comprimir em vez de "abrir ou fechar", etc. Para alguns dos estudantes, os termos não eram lembrados em alguns momentos, mas quando alguém num trio não usava o termo adequado pelo menos um dos outros dois que compunham o trio lembrava para que pudessem responder.

5.2 Resultados

Nesta seção confronto os resultados obtidos na análise dos dados fornecidos pela aplicação do primeiro questionário, antes da realização das oficinas, com a análise dos dados fornecidos pela aplicação de um segundo questionário, aplicado após a realização das oficinas.

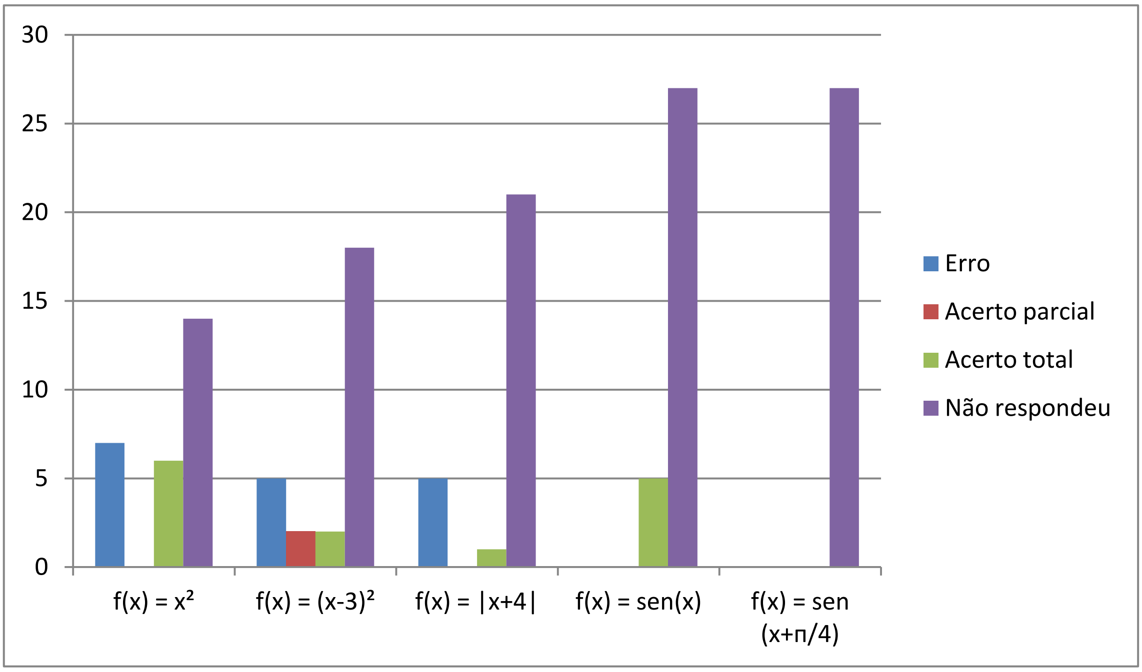
Questionário Final

O questionário final foi aplicado no final da última oficina. Nosso planejamento previa uma oficina por encontro, mas as duas últimas oficinas aconteceram no mesmo dia, devido ao bom desempenho dos estudantes na apropriação dos conteúdos previstos. Reservamos os últimos 15 minutos do último encontro para a aplicação do questionário final.

Na aplicação do questionário inicial para a análise cognitiva, contamos com 27 alunos. Na aplicação do questionário final, contamos com a participação de 11 alunos e nele inserimos questões para as quais os estudantes não conseguiram, no primeiro questionário, chegar a uma solução correta. Alguns fatos contribuíram para esse decréscimo no número de estudantes: (1) Alguns desses estudantes perderam a bolsa do PAESPE, apenas 18 estudantes permaneceram na turma frequentando com mais assiduidade; (2) Desses 18 estudantes, 11 deles mostraram maior interesse e compareceram a todas as oficinas, os demais compareceram esporadicamente às oficinas.

Observe a seguir, a síntese dos resultados obtidos na análise dos dados fornecidos pela aplicação do primeiro questionário diagnóstico:

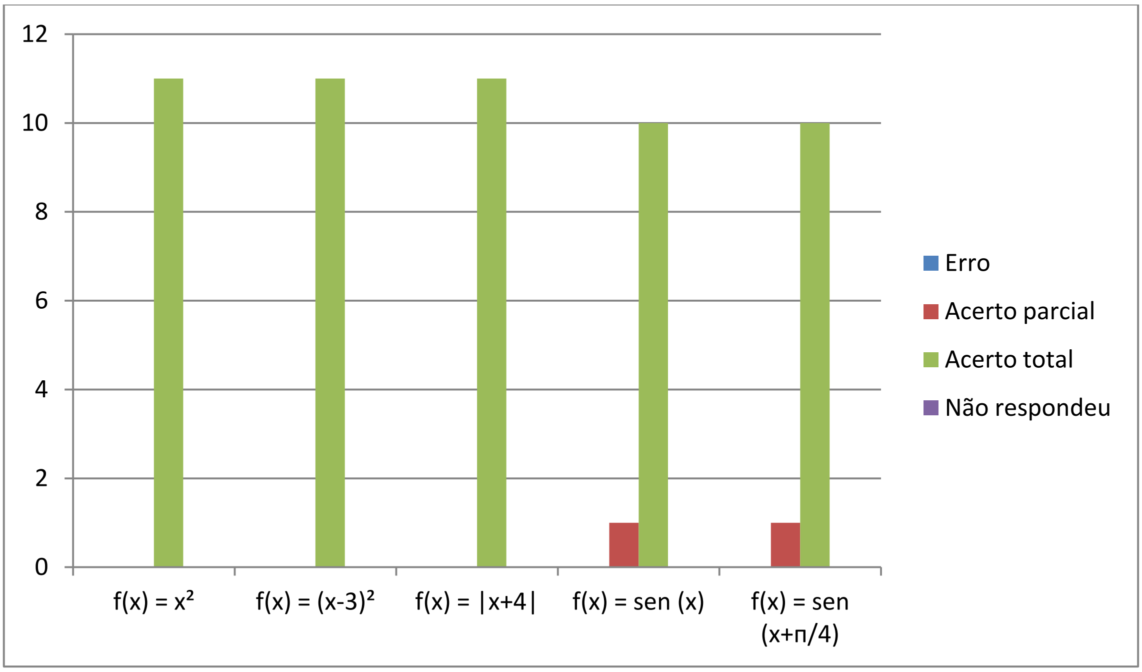
Gráfico 7 - Uma parte do Questionário Diagnóstico aplicado antes da realização das oficinas.



Fonte: Autora

Observe o gráfico 8 abaixo construído com os dados recolhidos do questionário final:

Gráfico 8 - Questionário Final

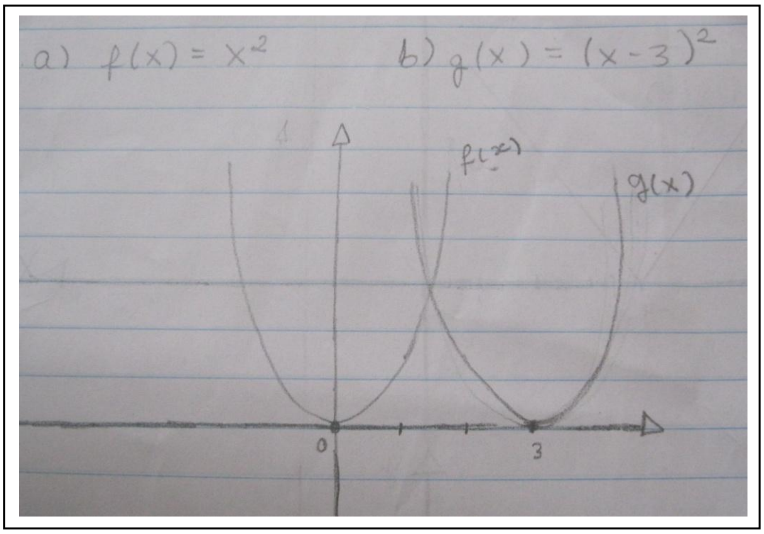


Fonte: Autora

O que se nota do esboço dos dois últimos gráficos, é que os estudantes não responderam no questionário diagnóstico e quando comparado ao questionário final todos conseguem acerto total apenas um obtém o acerto parcial. O erro cometido se refere à não percepção dos pontos nos quais o gráfico da função $f(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$ deveria intersectar o eixo dos x.

Observe a solução de um trio do esboço dos dois primeiros gráficos:

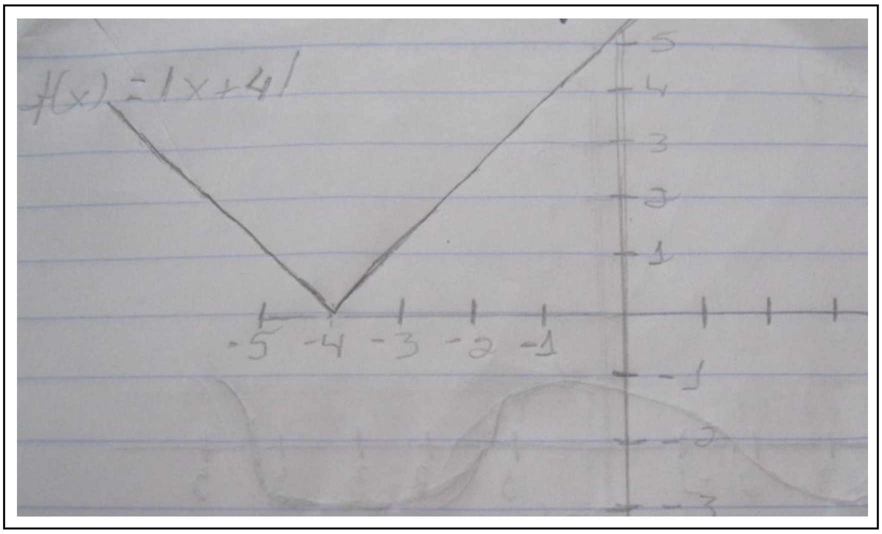
Figura 12 - Esboço do gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = (x - 3)^2$ no questionário final dado por estudantes.



Fonte: Autora

Por outro lado na figura abaixo temos o gráfico da função modular, resposta de um trio de estudantes:

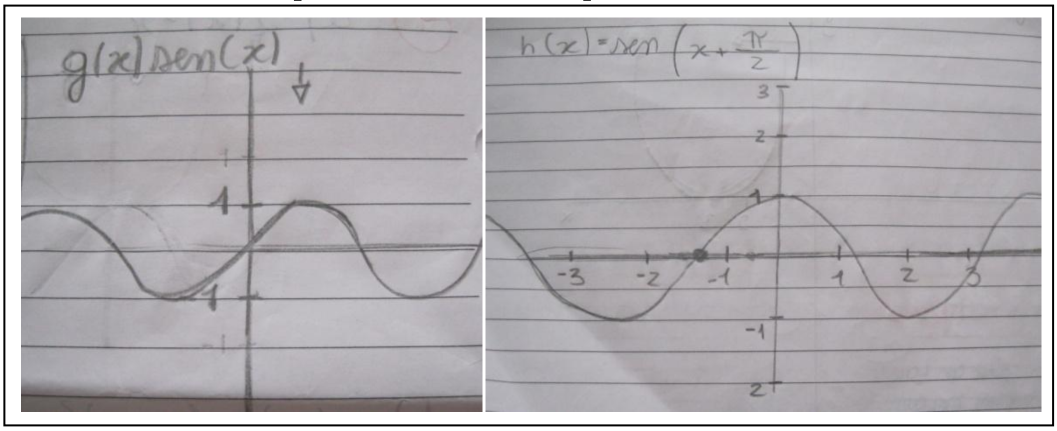
Figura 13 - Esboço do gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = |x+4|}$ no questionário final dado por estudantes.



Fonte: Autora

Para finalizar, o gráfico da função seno, que no questionário diagnóstico não houve solução correta. Observe a resposta de um dos trios:

Figura 14 - Esboço do gráfico das funções $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$ e $\boldsymbol{f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ do questionário final dado por estudantes.



Fonte: Autora

A experimentação, a análise a posteriori e os dados do questionário final aplicado reforçam as seguintes hipóteses:

a) O GeoGebra é software dinâmico privilegiado para a promoção da visualização de objetos matemáticos e para a percepção dos estudantes relativas às possibilidades de conversões entre os registros semióticos algébricos e geométricos de um mesmo objeto matemático.
b) A visualização estimulada pelo GeoGebra favorece à compreensão das relações entre as operações de tratamento realizadas no âmbito dos registros semióticos algébricos e as modificações produzidas no âmbito dos registros geométricos.
c) Mesmo sem o domínio conceitual formal das isometrias e das homotetias os estudantes podem revelar um bom desempenho no esboço de gráficos de funções que diferem de outras mais simples por composições de isometrias e homotetias quando utilizam o GeoGebra como recurso didático auxiliar para a visualização dos efeitos das operações de tratamento, correspondentes às isometrias e homotetias, entre os registros algébricos e geométricos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conceitos de função e de transformação geométrica emergiram como duas categorias da matemática na segunda metade do século XX. A emergência do conceito de função se deu no campo da Análise Matemática, a qual trata de questões concernentes aos processos infinitos, enquanto a emergência do conceito de transformação geométrica se deu no âmbito da geometria no Programa Erlangen de Felix Klein. Do ponto de vista de Klein, estudar uma geometria é estudar as propriedades que se mantêm invariantes pela ação de um grupo de transformações isométricas.

Atualmente, as funções ocupam um lugar de destaque nos currículos dos ensinos médio e superior. Como bem observa Vinner (1992), o cálculo está na base da compreensão da matemática superior e as funções são um conceito-chave do cálculo. Esses dois aspectos ressaltados por esse autor respaldam a inclusão desse tópico nos currículos da educação básica e superior.

No século XX os estudos acerca do processo de ensino-aprendizagem da matemática se estabeleceram como um campo de pesquisas. Na última década do século XX, a teoria dos registros semióticos de Raymond Duval tem angariado uma grande aceitação na abordagem dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da matemática.

Segundo essa teoria, o traço característico do saber matemático é o fato da utilização de vários tipos de registros semióticos para a representação de um mesmo objeto matemático. Além disso, ressalta que grande parte das dificuldades da aprendizagem da matemática reside na dificuldade da aquisição da competência de transitar entre os registros semióticos de um mesmo objeto matemático.

Duval, também, destaca a necessidade de uma melhor compreensão das relações entre visualização e representação. Na década de 90 do século XX, os estudos acerca da visualização ganharam corpo e atualmente constituem uma área de pesquisa em Educação Matemática. As pesquisas acerca da visualização têm revelado uma grande potencialidade dos softwares dinâmicos como recursos didáticos para a visualização.

No âmbito dos softwares dinâmicos, o GeoGebra tem se destacado como uma ferramenta relevante no ensino da matemática, haja vista a sua gratuidade de acesso e, principalmente, pelo seu caráter dinâmico e interativo aliado à possibilidade de propiciar o trânsito entre três tipos de registros semióticos: o algébrico, o numérico e o geométrico.

O objetivo geral posto no início deste trabalho foi criar uma proposta didática que favoreça a aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de outras por meio da composição de certas isometrias e homotetias.

Após as etapas das análises prévias da Engenharia Didática, o objetivo foi reformulado nos seguintes termos: identificar até que ponto uma proposta didática baseada na utilização do GeoGebra que favoreça a visualização e as conversões entre os registros semióticos algébrico e geométrico de funções que diferem de outras por composição de isometrias e homotetias pode contribuir para a aprendizagem do esboço de gráficos dos gráficos desses tipos de funções no ambiente papel e lápis.

Foi então proposta como questão investigativa básica a seguinte: investigar até que ponto a visualização com o auxílio do GeoGebra dos efeitos geométricos de certos tratamentos efetuados no âmbito dos registros semióticos algébricos de uma função (os quais correspondem a deformações — dilatações ou compressões — ou translações horizontais e verticais do gráfico dessa função) favorece a aprendizagem do esboço de gráficos no ambiente papel e lápis.

A criação da sequência didática teve como referência a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau e a teoria dos registros semióticos de Duval.

A experimentação e a análise a posteriori dos dados reforçaram as seguintes hipóteses:

a) O GeoGebra é um software dinâmico privilegiado para a promoção da visualização de objetos matemáticos e para o estímulo da percepção do estudante das possibilidades de conversões entre os registros semióticos algébricos e geométricos de um mesmo objeto matemático.

b) A visualização estimulada pelo GeoGebra favorece a compreensão das relações entre as operações de tratamento realizadas no âmbito dos registros semióticos algébricos e as modificações produzidas no âmbito dos registros geométricos.
c) Mesmo sem o domínio conceitual formal das isometrias e das homotetias os estudantes podem revelar um bom desempenho no esboço de gráficos de funções que diferem de outras por composições de isometrias e homotetias quando o GeoGebra é utilizado como recurso didático auxiliar para a visualização dos efeitos das operações de tratamento correspondentes às isometrias e homotetias entre os registros algébricos e geométricos.

Embora, tenha incluído no questionário final funções com poucas composições de isometrias e homotetias, presumo que os dados coletados revelam que os estudantes apresentaram, após a aplicação da sequência didática proposta, um grau de conhecimento da dinâmica dos movimentos causados nos gráficos de funções por essas transformações geométricas que já permite o desvencilhamento dos computadores e um trabalho complementar do professor de criação de condições para a identificação de composição presentes em funções mais complexas, isto é, que envolvam mais composições. Após a aplicação das oficinas, obteve-se um contexto extremamente favorável para o exercício da composição de funções e para a formalização dos conceitos de isometrias e homotetias.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.n.6, p.62-77, 2008.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. In: CONFERENCE ON THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21.,1999. North American Mexico. **Anais**…México, 1999. p. 26-41. Disponível em: < http://www.clab.edc.uoc.gr/aerstit/4th/pdf/26.pdf >Acesso em 14 set. 2013.

BERNOULLI, Johann. **Remarques Sur ce qu'on a Donné Jusqu'ici de Solutions des Problèmes sur les Isoperimètres**. Opera omnia, v. 8, p. 18. 1718.

BALACHEFF, Nicolas.; KAPUT, James. Computer – based environments in mathematics. In: BISHOP, A. et al (eds.) **International Handbook of Mathematical Education**. U.S.A.: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 469-501.

BOYER. Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blücher. 2ª Ed. 1996.

BOYER, Carl; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 2012.

BORBA, Marcelo C. e VILLAREAL, Mônica E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. U.S.A.: Springer, 2005. p.78-100.

BRAGA, C. **Função:** A alma do Ensino da Matemática. – São Paulo: Ed. Annablume; Fapesp, 1ª Ed. 2006.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1998. Disponível em < http://portal.mec.org.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf > Acesso em 04 mar. 2013.

CAMPITELI, Heliana Cioccia.; CAMPITELI, Vicente Coney. **Funções**. 1.ed. Ponta Grossa: Ed. UEPG, 2006.

CARVALHO, Luiz Mariano.; GIRALDO, V. Raiz cognitiva: novos obstáculos e novos atos. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau-SC, **Anais...** Blumenau-SC, 2003.1 Cd-Rom.

CHIZZOTTI, Antônio. **Pesquisas em ciências humanas e sociais**. 3ª ed. São Paulo: Cortez Editora, 1991.

CIFUENTES, José Carlos. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro n.46, p. 55–72, jan./jun., 2005.

CIFUENTES, José Carlos. Do conhecimento científico à educação científica: uma "odisséia espiritual". In: COLÓQUIO INTERNACIONAL DE PSICOLOGIA DO CONHECIMENTO, 2009. Brasília. **Anais...** Brasília-DF. 2009.

COSTA, David Antônio. "**O estudo dos Frisos no ambiente informatizado Cabri-Géomètre**". 2005, 235f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica - PUC, São Paulo, 2005.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education. In: PROCEEDINGS FIFTEEN PME CONFERENCE. 1991, **Proceedings…** Plenary address to PME XV, v.1, p. 33-48, 1991.

Dubinsky, E.; Harel, G.. The Nature of the Process Conception of Function. In: Harel, G & Dubinisky, E., **The Concept of Function:** Aspects of Epistemology and Pedagogy. Washington , D.C.: Mathematical Association of America. 1992. p. 195-214.

DUVAL, Raymond. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: F. Hitt y M. Santos (Eds.) **Proceedings...** Noth American PME Conference, v.1, p. 3-26. 1999. Disponível em <http//files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf> Acesso em 02 jun. 2013.

DUVAL, Raymond. **Basic Issues for Research in Mathematics Education**. In: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICAL EDUCATION – PME. v.1, Hiroshima: University of Hiroshima. 2000, p. 452-478. Disponível em <http//files.eric.ed.gov//fulltext/ED466737.pdf> Acesso em 02 jun. 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Traduzido Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. 1. Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______________. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. 7ª edição. São Paulo: Papirus, 2010. p. 11-34.

EVES, Howard**. Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio século XXI escolar**: O minidicionário da língua portuguesa. 4ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FLORES, Claudia. Regina. et al. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, v.14, n.1, 2012. p.31-45.

FREITAS, José Luiz Magalhães. **Teoria das Situações Didáticas.** In: Machado, Silva Dias Alcântara. (Org). **Educação Matemática** – Uma (nova) Introdução. 3.ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010. p. 77-111.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências:** Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo das ciências. 5ª Ed. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GEOGEBRA. Disponível em <http://www.geogebra.org/cms/en/>. Acesso em: 08 ago. 2012.

GIRALDO, Victor. Integrando Geometria e Funções: Gráficos Dinâmicos. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro, n.79, 2012, p. 2-10.

GIRALDO, Victor. **Funções Reais e Gráficos**. Textos da Disciplina Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: PROFMAT/SBM. 2012.

GOLDENBERG, E.P. Habits and mind as an organizer for the curriculum. **Journal of Education**, n.178, v.1, 1996. p.13-34.

GRAVINA, Maria A.; SANTAROSA, Lucila M.C. **A aprendizagem matemática em ambientes informatizados**. Revista Informática na Educação: Teoria & Prática, v.1, n.2, 1998.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: **PNLD 2012**: Matemática / Brasília, 2011. Disponível em <http//www.fnde.gov.br/programas/livro-didático/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-m%C3%A9dio> Acesso em: 06 mar. 2013.

HEBENSTREINT, J. **Smulation e pédagogie, une recontre du troisiéme type**. Gif. Sur Yvette: École Superieure d'Eletricité, 1987.

HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra-Informações.** Tradução: Hermínio B. Neto, Luciana de Lima, Alana Paula A. Freitas, Alana S. de Oliveira. 2007. Disponível em < http://www.nre.seed.pr.gov.br/cascavel/arquivos/File/CRTE/geogebra/apostila_curso.pdf> Acesso em 02 julho de 2013.

KAPUT, Jim. Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), **Research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: Macmillan Publishing, 1992. p. 515-556.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias.** Rio de Janeiro: SBM, 1996. Coleção do Professor de Matemática.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2010. p. 233-248.

MELLAR, Harvey. et al (eds.) **Learning with artificial worlds-computer based modeling in the curriculum**. New York, NY: Ed. Routledge Falmer, 1994.

NEMIROVSKY, Ricardo; NOBLE, Tertius. On mathematical visualization and the place where we live. **Educational Studies in Mathematics.** v.33. 1997. p.99-131.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa.; ARAÚJO, Luis Cláudio Lopes. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Ed. Exato, 2010.

OLIVEIRA, Francisco Canindé. **Dificuldades na Construção de Gráficos de Funções**. 2006. 117f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, UFRGN, Natal, 2006.

PIAGET, Jean. **Biologie e connaissance**. Paris: Gallimard, 1967.

PINHO, José Luiz Rosas.; BATISTA, Eliezer.; CARVALHO, Neri Terezinha Both.; **Geometria I.** 2.ed. – Florianópolis : EAD/UFSC/CED/CFM, 2010. Disponível em < http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf> Acesso em 02 ago. 2013.

PRESMEG, Norma. Visualization in high school mathematics. **Journal.** Canadá: FLM Publishing Association. v.6, n.3. 1986. p 42-46.

PRESMEG, Norma. Research on Visualization in Learning an Teaching Mathematics. In Gutierrez, A & Boero, P (eds). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**: Past, Present and Future. The Netherlands, Sense Publishers, 2006. P.205-235.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1.ed. Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 2012.

SÁ. Pedro Franco; SOUZA. Glageane da Silva; SILVA. Isaac Dayan Bastos. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. **Traços**. Belém, v. 6, n. 11, ago. 2003. p. 81-94. Disponível em < http//www.nead.unama.br/bibliotecavirtual/revista/tracos/pdf/rtracos611a10.pdf> Acesso em 12 dez. 2012.

SANTOS, Vívia Dayana Gomes. **Esboços de Gráficos nos Ambientes “Papel e Lápis” e “GeoGebra”:** funções afins e funções quadráticas. 2012. 124f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação Ensino de Ciências e Matemática, PPGECIM, Maceió, 2012.

SHAMA, G.; DREYFUS, T. **Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems**. Educational Studies in Mathematics, v.26, n.1. 1994. p. 45-70.

SIVIN-KACHALA, Jay.; BIALO, Ellen R. **Research report on the effectiveness of technology in schools**. 7.ed. Washington: Software Information Industry Association, 2000.

STEWART, James. **Cálculo**, 5.ed. v.1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TALL, D. (Ed.) **Advanced Mathematical thinking**. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1991.

TALL, David O.. Intuition and Rigour: The role of visualization in the calculus. In W. Zimmermann and S. Cunningham (eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991. p. 105-119.

TIKHOMIROV, Oleg Konstantinovich. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J.V. (Ed) **The concept of activity in sovietic psychology**. New York: Sharpe, 1981. p. 256-278.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. **Introdução as Funções Reais. Projeto Novas Tecnologias no Ensino**. Disponível em <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/conteudop.htm> Acesso em 23 nov. 2012.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. **Cálculo Infinitesimal:** O que é isso? Disponível em:<http://euler.mat.ufrgs.br/~portosil/oque.html> Acesso em 06 ago. 2012.

UNIVERSIDADE DE LISBOA. Departamento de Educação. **Funções**: Um pouco de História. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm28/hist.htm> Acesso em: 10 jul. 2012.

VINNER, Shlomo. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In Harel, Guershon & Dubinsky, Ed (eds). **The concept of Function:** aspects of epistemology and pegadogy. Washington: Mathematical Association of America, 1992. P. 195-213.

ZIMMERMAN, Robert W.; CUNNINGHAM, Sean Sexton. (Eds.) Introduction: what is mathematical visualization¿ In: ZIMMERMAN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching and learning mathematics.** Washington: Mathematical Association of America, 1991. p. 1-7.

ZULNAIDI, Hutkemri; ZAKARIA, Effandi. The effect of using GeoGebra on conceptual and procedural knowledge of high students mathematical students. **Asian Social Science**. v.8, n.11, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário socioeconômico

Dados Pessoais

1. Nome:____
2. Idade:_________________

Questionário I:

1. Cursa que série/ano:____

2. Sempre estudou em escola pública?

Sim( ) Não( ) Qual____

3. Gosta de Matemática?

Sim( ) Qual o conteúdo da mesma que mais lhe atrai___________________________

Não( )

Com base no que você estudou até agora, o que menos lhe agrada nesta disciplina?____

4. Você trabalha?

Sim( ) Em que?____ Não( )

5.Reserva quanto tempo pra estudar fora do seu ambiente escolar?____

7. A sua casa dispõe de computador?

Sim( ) Você usa para ____

Não( )

8. Já teve aula de Matemática em laboratório de informática?

Sim( ) Não( )

9.Deseja participar das oficinas sobre funções no laboratório de informática?

Sim( )

Por quê?____

Não( )

Por quê?____

APÊNDICE B – Questionário Diagnóstico - Verificação dos conhecimentos prévios

Questionário II:

1. O que é uma Função?

____ ( ) Não sei responder.

2. Você acha que o estudo das funções é importante? Por quê?

3. Esboce os gráficos das funções seguintes:

a) $f(x) = x - 2$

b) $f(x) = -x + 1$

4. Esboce os gráficos das funções seguintes:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = (x - 3)^2$

5. Esboce os gráficos das funções seguintes:

a) $f(x) = |x + 4|$

b) $f(x) = sen\ x$

c) $f(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$

6. Em um determinado restaurante um garçom recebe um salário mensal fixo de 678,00 reais e uma remuneração adicional de 10% do valor das contas das mesas que ele atende:

a) escreva uma função que expresse o ganho mensal do garçom em função do valor total das contas da mesa que ele atende.
b) Se ao final de um mês o valor total das contas das mesas atendidas por um garçom foi de 5.000,00 reais, quanto ele deve receber?

7. Determine dois números cuja soma é 180 e cujo produto é máximo.

APÊNDICE C - **Questionário Final - Instrumento de Verificação de Aprendizagem**

QUESTIONÁRIO III:

1) Esboce os gráficos das funções seguintes:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = (x - 3)^2$

c) $f(x) = sen\ x$

d) $f(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$