Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Um estudo sobre a boa colocação local da equação não linear de Schrödinger cúbica unidimensional em espaços de Sobolev periódicos

Darliton Cezario Romão

Maceió, Brasil
Março de 2009

Darliton Cezario Romão

Um estudo sobre a boa colocação local da equação não linear de Schrödinger cúbica unidimensional em espaços de Sobolev periódicos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 25 de março de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Adán José Corcho

Maceió, Brasil
Março de 2009

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

R761u Romão, Darliton Cezario.
Um estudo sobre a boa colocação local da equação não linear de Schrödinger cúbica unidimensional em espaços de Sobolev periódicos / Darliton Cezario Romão, 2009.
89 f.

Orientador: Adán José Corcho.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 88-89.

1. Cauchy, problemas de. 2. Sobolev, Espaço de. 3. Schrödinger, Equação não linear de. 4. Boa colocação local. 5. Má colocação. I. Título.

CDU: 517.955

Um estudo sobre a boa colocação local da equação não linear de Schrödinger cúbica unidimensional em espaços de Sobolev periódicos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 25 de março de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adán José Corcho (Orientador)

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

Prof Dr. José Felipe Linares

Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa,
nunca tem medo e nunca se arrepende.
Leonardo da Vinci

Aos meus pais Manoel Romão Neto e Wilza Cezario Romão,
a minha irmã Darliane Cezario Romão
e a minha querida companheira Bianca Silva de Almeida.

Agradecimentos

Inicio meus agradecimentos a meu Pai Celeste, que me acompanha ao longo da vida e oportuniza tantas experiências maravilhosas e edificantes.

Agradeço ainda a meus familiares e amigos pela presença em minha vida e constante apoio. Vale a pena ressaltar minha gratidão aos colegas e amigos feitos ao longo de minha vida acadêmica, em especial durante o mestrado, com os quais compartilhei alegrias e frustrações. Aos colegas e amigos Everson, Arlyson, Priscila, Erikson, Fabio, Carlos Alberto, Leandro, Alex, Leonardo, Isnaldo, Pacato, Marcius, Daniel, meus sinceros agradecimentos.

Não posso esquecer, também, de mencionar e agradecer aos caros professores do IM da UFAL com os quais não só aprendi matemática, mas a postura mais coerente de um professor, conduzindo sua prática docente com moral e ética. Aos professores Krerley Oliveira, Ediel Guerra, Adán Corcho e Vinícius Mello, minha gratidão. Além disso, agradeço as secretárias e colaboradores do IM da UFAL, entre elas dona Maria, Marcia e Silvinha, com as quais vivi bons momentos de descontração.

Pela sugestão do tema e os meses dedicados a esse trabalho, agradeço ao meu orientador, professor Adán Corcho. Agradeço, ainda, aos demais membros da banca, professores Ediel Guerra e Felipe Linares, pela leitura de uma das versões preliminares e enumeras sugestões. Não posso esquecer também de, mais uma vez, agradecer ao Isnaldo pelas conversas matemáticas e sugestões sobre o trabalho.

Esse trabalho não seria possível se não fosse pelas sugestões de literatura dos professores Felipe Linares e Carlos Matheus, bem como pela ajuda na aquisição de um dos materiais pelo amigo Leonardo.

Graças aos citados acima e outros, dos quais espero o perdão pela minha péssima memória, concluo essa dissertação e mais essa etapa em minha vida. É também a eles que eu dedico esse trabalho.

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo detalhado do problema de Cauchy para a equação não-linear cúbica de Schrödinger, com dados iniciais em espaços de Sobolev no toro. Especificamente, provaremos que este modelo é localmente bem posto para dados em H^s_{per}, com $s \geq 0$. Em particular, para dados iniciais em L^2 o modelo é globalmente bem posto, devido à lei de conservação da equação neste espaço.

Além disso, provaremos que os resultados obtidos são os melhores possíveis, visto que exibiremos exemplos que mostram que o fluxo da equação não é localmente uniformemente contínuo para dados iniciais com regularidade menor que L^2.

Palavras-chave: Problema de Cauchy, Espaços de Sobolev periódicos, Equação não-linear de Schrödinger, Boa colocação local, Má colocação.

Abstract

In this work we study, in details, the Cauchy problem of the non-linear Schrödinger equation, with initial datas in periodic Sobolev spaces. Specifically, we prove that this problem is locally well posed for datas in H^s_{per}, with $s \geq 0$. Particularly, for initial datas in L^2 the problem is globally well posed, due to the conservation law of the equation in this space.

Moreover, we prove the this result is the best one, seeing we expose examples that show that the equation flow is not locally uniformly continuous for initial datas with regularity less than L^2.

Key words: Cauchy problem, periodic Sobolev spaces, non-linear Schrödinger equation, locally well-posed, ill-posed.

Sumário

Introdução

Neste trabalho realizamos um estudo sobre a boa colocação local da equação não-linear de Schrödinger cúbica unidimensional em espaços de Sobolev periódicos, isto é, a boa colocação do problema de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} iu_t + u_{xx} & = & |u|^2 u \\ u(x,0) & = & u_0(x) \in H^s_{per}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Este modelo é de grande interesse físico e aparece no contexto da mecância e optica não-linear, como pode-se ver nos trabalhos [5] e [11].

Vamos definir, precisamente, o que entendemos por boa colocação na seguinte

Definição 0.1. ***(Boa Colocação)*** *Dados X e Y espaços de Banach e $T_0 \in (0,\infty)$, dizemos que o problema de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u(t) & = & F(t, u(t)) \in X \\ u(0) & = & \phi \in Y, \end{array}\right. \tag{2}$$

*onde $F : [0,T_0] \times Y \longrightarrow X$ é uma função contínua, é **localmente bem-posto** se*

(a) *existe $T \in (0, T_0]$ e uma função $u \in C([0,T]; Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

onde as derivadas em 0 e T são calculadas à direita e à esquerda;

(b) *o problema (2) tem, no máximo, uma solução em* $C([0,T];Y)$*;*

(c) *a aplicação* $\phi \longmapsto u$ *é contínua. Mais precisamente, sejam* $\phi_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, *tal que* $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi_\infty$, *e sejam* $u_n \in C([0,T_n];Y)$ *as correspondentes soluções. Seja* $T \in (0, T_\infty)$*. Então as soluções* u_n *podem ser estendidas ao intervalo* $[0,T]$ *para todo* n *suficientemente grande e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

Se qualquer uma dessas condições não for satisfeita, o problema é dito ***mal-posto****.*

Objetivamos verificar que (1) é localmente bem posto para $s \geq 0$ e mal posto para $s < 0$. Para tanto, dividimos nossa dissertação em três capítulos. No primeiro listamos os principais resultados de análise funcional e medida que usaremos. Seguimos com um capítulo dedicado às definições e resultados de análise de Fourier na reta para os casos periódico e contínuo, bem como definimos os espaços de Sobolev periódico, H^s_{per}, e contínuo, H^s, com suas respectivas particularidades.

No capítulo 3 apresentaremos, na seção 3.1, um estudo para o caso homogêneo do problema (1), e seguimos, nas seções restantes, o estudo do problema (1) dividindo-o em três partes. Na primeira, estudamos a boa colocação local do problema (1) para $s > 1/2$. Como esse estudo é um pouco mais antigo que os apresentados nas seções posteriores, há uma literatura mais vasta abordando o assunto. Seguiremos, de perto, a obra de R. Iório e V. Iório [7].

Em seguida estudaremos a boa colocação local do problema (1) para $0 \leq s \leq 1/2$. A necessidade de dividir o estudo da boa colocação em $s > 1/2$ e $0 \leq s \leq 1/2$, parte do fato de H^s_{per} não ser uma álgebra de Banach para $s \leq 1/2$, logo os métodos aplicados no caso $s > 1/2$ já não são úteis.

Usaremos a moderna teoria de Bourgain [2] e [3] para concluir nosso estudo sobre a boa colocação, apoiandonos também nos trabalhos de Linares [9] e Terence [12].

Por fim, demonstraremos a má colocação para $s < 0$ apresentando um exemplo que contraria o item c) da definição de boa colocação local. Precisamente, mostraremos um exemplo onde o fluxo não é uniformemente contínuo. Aqui, seguiremos o trabalho de Burq, Gérard e Tzvetkov [4].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e resultados básicos de Análise Funcional, Teoria de Medida e outras teorias que serão necessários ao longo de todo texto.

1.1 Alguns resultados de análise funcional e medida

No que se segue, a não ser que afirmemos explicitamente o contrário, lidaremos com espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Dado $p \in [1, \infty)$, o espaço $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z})$ das sequências complexas $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tais que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^p < \infty$$

é um espaço vetorial, com a soma e a multiplicação por escalar definidos componente a componente

$$\begin{aligned} (\alpha_n) + (\beta_n) &= (\alpha_n + \beta_n) \\ \lambda(\alpha_n) &= (\lambda \alpha_n). \end{aligned}$$

O espaço ℓ^p munido da norma

$$\|\alpha\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^p\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

é completo. O espaço $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{Z})$ das sequências complexas limitadas é também um espaço de Banach, com a norma

$$\|\alpha\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| \tag{1.2}$$

Seja $C([a,b];\mathbb{R}) = C([a,b])$ o espaço das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$. Para cada $p \in [1,\infty)$, defina $\|\cdot\|_{L^p}$ em $C([a,b])$ por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{1.3}$$

Então, qualquer que seja $p \in [1,\infty)$, $(C([a,b]), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço vetorial que não é completo. Fixado $p \in [1,\infty)$, o completamento de tal espaço é denotado por $L^p[a,b]$, ou simplesmente por L^p caso não haja dúvidas quanto ao intervalo $[a,b]$. A norma $\|f\|_{L^p}$ é chamada a *norma* L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Os espaços ℓ^2 e $L^2[a,b] = L^2$ são espaços de Hilbert, com os produtos internos

$$(\alpha|\beta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n\overline{\beta_n} \quad \text{e} \quad (f|g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}dx,$$

onde $\alpha, \beta \in \ell^2$ e $f, g \in L^2$.

Os espaços ℓ^p, L^p e $C([a,b])$, para $p \in [1,\infty) - \{2\}$ e com as normas definidas nos exemplos acima, não são espaços de Hilbert.

O espaço $C([a,b])$ é um espaço de Banach em relação à norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{1.4}$$

Os resultados apresentados aqui valem para intervalos de qualquer tipo: abertos, abertos e fechados, limitados e ilimitados, bem como para funções complexas.

Denotamos por $C_{per}^k = C_{per}^k([-\pi,\pi])$, $k = 0,1,2,\ldots$, a coleção das funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ periódicas de período 2π e de classe C^k. No caso $k=0$ denotaremos C_{per}^0 simplesmente por C_{per}. É claro que, para $k=0,1,2,\ldots$, C_{per}^k é um espaço vetorial e, de fato, é um espaço de Banach em relação à norma

$$\|f\|_{C_{per}^k} = \sum_{j=0}^{k} \left\|f^{(j)}\right\|_\infty . \tag{1.5}$$

O espaço C_{per} pode ser identificado, de maneira natural, com

$$\{f \in C([-\pi,\pi]); f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Portanto, podemos definir a norma L^p, $1 \le p < \infty$, em C_{per} como em (1.3), com $a=-\pi$ e $b=\pi$. Note que C_{per}^k não é completo em relação à norma L^p, $1\le p<\infty$.

Na demonstração da boa colocação do problema de Cauchy (1) para $s > 1/2$, usaremos o fato dos espaços de Sobolev H_{per}^s formarem uma álgebra de Banach, quando $s > 1/2$. Assim, vale a pena apresentar alguns conceitos que apresentamos agora.

Uma álgebra de Banach é um espaço de Banach X, com um produto $(x,y)\in X\times X \mapsto xy \in X$ tal que, para todo $x,y,z\in X$ e para todo $r\in\mathbb{C}$,

(a) $(xy)z = x(yz)$,

(b) $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,

(c) $(x+y)z = xz+yz$ e $x(y+z) = xy+xz$,

(d) $\|xy\|_X \le \|x\|_X \|y\|_X$.

Seja X um espaço de Banach. Um **semigrupo a um-parâmetro fortemente contínuo** em X (ou, simplesmente, um C^0-semigrupo), é uma aplicação

$$S:[0,\infty)\to\mathcal{B}(X)$$

tal que

(a) $S(0) = I$ (a identidade em X),

(b) $S(t+s) = S(t)\,S(s)\,, \forall\, t, s \in [0, \infty)$,

(c) $\lim\limits_{s \to t} \|S(t)\,\phi - S(s)\,\phi\|_X = 0, \;\; \forall\, t \in [0, \infty)\,, \;\; \phi \in X$.

Se

$$\|S(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq 1, \;\; \forall\, t \in [0, \infty)\,, \tag{1.6}$$

dizemos que $S(t)$ é um **semigrupo de contração**.

Enunciaremos, aqui, alguns teoremas da teoria dos espaços de Banach que serão usados ao longo do texto.

Teorema 1.1. *Sejam V e W espaços vetoriais normados e seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes*

(a) T é contínua em V;

(b) T é contínua em $0 \in V$;

(c) $\exists\, c > 0$ tal que $\|Tv\|_W \leq c\, \|v\|_V\,, \;\; \forall\, v \in V$.

Demonstração. Ver teorema 2.7-9 em Kreyszig [8], página 97. O enunciado em [8] é equivalente. □

Sejam H_j, $j = 1, 2$, espaços de Hilbert. Um operador $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ é uma **isometria** se $\|Uh\|_{H_2} = \|h\|_{H_1}\,, \;\forall\, h \in H_1$, em particular U é injetiva. U é **unitário** se é uma isometria sobrejetiva em H_2.

Seja H um espaço de Hilbert. Um **grupo unitário a um parâmetro fortemente contínuo** em H é uma aplicação $t \in \mathbb{R} \longmapsto U(t) \in \mathcal{B}(H)$ tal que

(a) $U(t)$ é unitário $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

(b) $U(t+s) = U(t)\,U(s)\,, \;\; \forall\, t, s \in \mathbb{R}$,

(c) $\lim\limits_{s \to t} \|U(t)\,\phi - U(s)\,\phi\|_H = 0, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}, \; \phi \in H$.

Note que tomando $t = s = 0$ em (b) concluímos que $U(0) = I$. Daí segue-se que todo grupo unitário a um parâmetro fortemente contínuo é, em particular, um C^0-semigrupo.

Sejam $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\beta = (\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ duas sequências de números complexos. A **convolução** de α e β é a sequência $\alpha * \beta$ definida por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j}$$

sempre que o segundo membro dessa equação fizer sentido.

Proposição 1.1. (Teorema de Young) *Seja $\alpha \in \ell^1$ e $\beta \in \ell^2$. Então $\alpha * \beta \in \ell^2$ e*

$$\|\alpha * \beta\|_{\ell^2} \leq \|\alpha\|_{\ell^1} \|\beta\|_{\ell^2}.$$

Em particular, para todo $\alpha \in \ell^1$ fixo, a aplicação $\beta \longmapsto \alpha * \beta$ define um operador linear limitado de ℓ^2 nele mesmo.

Demonstração. Escrevendo $|\alpha_j| = |\alpha_j|^{1/2} |\alpha_j|^{1/2}$ e aplicando a desiguldade de Cauchy-Schwarz obtemos, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|(\alpha * \beta)_k| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j \beta_{k-j}| \\
&= \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|^{1/2} \left(|\alpha_j|^{1/2} |\beta_{k-j}|\right)\right] \\
&\leq \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|\right]^{1/2} \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| \, |\beta_{k-j}|^2\right]^{1/2} \\
&= \|\alpha\|_{\ell^1}^{1/2} \left[\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| \, |\beta_{k-j}|^2\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, somando sobre k e intercalando a ordem da soma, chegamos a

$$\begin{aligned}
\|\alpha * \beta\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|(\alpha*\beta)_k\right|^2 \\
&\le \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| \left|\beta_{k-j}\right|^2 \\
&= \|\alpha\|_{\ell^1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\beta_{k-j}\right|^2 \\
&= \|\alpha\|_{\ell^1} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|\right) \left[\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\beta_m|^2\right)^{1/2}\right]^2 \\
&= \|\alpha\|_{\ell^1}^2 \|\beta\|_{\ell^2}^2 .
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2. (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$*, onde* $p > 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então* $fg \in L^1$ *e* $\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$*.*

Demonstração. Observe que e^x é convexa, logo dados $a, b > 0$, temos

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \le \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{1.7}$$

Sejam $a(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p_x}}$, $b(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q_x}}$. Daí

$$\begin{aligned}
\int_X a(x)\, b(x)\, dx &= \int_X \tfrac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p_x}} \tfrac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q_x}} dx \\
&= \frac{1}{\|f\|_{L^p_x} \|g\|_{L^q_x}} \int_X |f(x)\, g(x)|\, dx
\end{aligned} \tag{1.8}$$

e, por (1.7)

$$\begin{aligned}
\int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p_x}} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q_x}} dx &\le \int_X \left[\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p_x}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q_x}^q}\right] dx \\
&\le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

A desigualdade segue de (1.8) e (1.9). □

Corolário 1.1. (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$*, onde* $p > 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$*. Então* $fg \in L^r$ *e* $\|fg\|_{L^r_x} \leq \|f\|_{L^p_x} \|g\|_{L^q_x}$*.*

Demonstração. Basta aplicar a desigualdade de Hölder com $p_1 = \frac{1}{p/r}$ e $q_1 = \frac{1}{q/r}$. □

Teorema 1.3. (Desigualdade de Minkowski) *Se* $f, g \in L^p$*,* $p \geq 1$*, então* $f + g \in L^p$ *e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração. Ver proposição 6.11 em Bartle [1], página 57. □

Teorema 1.4. (Desigualdade de Minkowski) *Se* f *é mensurável então*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| \, dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy.$$

Demonstração. A afirmação é clara se $p = \infty$. Se $p < \infty$ fazemos $F(x) = \int |f(x, y)| \, dy$ e, por dualidade, temos

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L^p_x} &= \sup_{\|g\|_{L^q_x} \leq 1} \int_X g(x) \left(\int_Y |f(x, y)| \, dy \right) dx \\
&= \sup_{\|g\|_{L^q_x} \leq 1} \int_Y \int_X |f(x, y)| \, g(x) \, dx dy \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^q} \leq 1} \int_Y \|g\|_{L^q_x} \|f(x, y)\|_{L^p_x} \, dy \\
&= \int_Y \|f(x, y)\|_{L^p_x} \, dy.
\end{aligned}$$

□

1.2 Outros resultados importantes

Teorema 1.5. (Desigualdade de Gronwall) *Sejam* $\alpha, \beta, \delta \in C([a, b]; \mathbb{R})$*,* *tais que* $\beta \geq 0$ *e*

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\,\delta(s)\,ds. \tag{1.10}$$

Então

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\,\alpha(s)\,e^{\int_s^x \beta(u)\,du} ds. \tag{1.11}$$

Em particular se $\alpha(x) = K$ *constante, temos*

$$\delta(x) \leq K e^{\int_{x_0}^{x} \beta(s)\,ds}. \tag{1.12}$$

Demonstração. Seja $w(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \beta(s)\,\delta(s)\,ds$. Então, $w^{'}(x) = \beta(x)\,\delta(x)$. E daí, usando (1.10),

$$w^{'}(x) \leq \beta(x)\,\alpha(x) + \beta(x)\,w(x)$$

que pode ser escrita como

$$\left[w(x)\,e^{-B(x)}\right]^{'} \leq \beta(x)\,\alpha(x)\,e^{-B(x)},$$

onde $B^{'}(x) = \beta(x)$. Daí se segue

$$w(x)\,e^{-B(x)} \leq \int_{x_0}^{x} \beta(s)\,\alpha(s)\,e^{-B(s)} ds,$$

e finalmente, por (1.10)

$$\delta(x) \leq \alpha(x) + e^{B(x)} \int_{x_0}^{x} \beta(s)\,\alpha(s)\,e^{-B(s)} ds,$$

o que implica (1.11). A verificação de (1.12) é imediata pois, valendo (1.11) e $\alpha(x) = K$, temos

$$\begin{aligned}
\delta(x) &\leq K + \int_{x_0}^{x} \beta(s) K e^{\displaystyle\int_s^x \beta(u)\, du} ds \\
&= K \left(1 - \int_{e^{\int_{x_0}^{x} \beta(u) du}}^{0} e^u du\right) \\
&= K \left(e^{\displaystyle\int_{x_0}^{x} \beta(u)\, du} \right).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.1. *Sejam $a, b \in [0, \infty)$ e $s \geq 0$. Então existem constantes positivas m_s e M_s, dependendo apenas de s, tais que*

$$m_s (a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s (a^s + b^s). \tag{1.13}$$

Demonstração. Se $a = 0$ não há o que provar. Assuma $a > 0$. Então (1.13) é equivalente a

$$m_s \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right] \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)^s \leq M_s \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right],$$

então é suficiente provar que existem m_s e M_s tal que

$$m_s (1 + r^s) \leq (1 + r)^s \leq M_s (1 + r^s), \quad \forall\, r \in [0, \infty).$$

Isso segue do fato da função

$$F(r) = \frac{(1 + r)^s}{1 + r^s}$$

ser limitada.

De fato, observe que para todo $r,\ s \geq 0$, tem-se

$$1 \leq (1 + r)^s \quad \text{e} \quad r^s \leq (1 + r)^s.$$

Logo,

$$1 + r^s \leq 2\left(1 + r\right)^s,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\left(1 + r\right)^s}{1 + r^s}.$$

Agora, para $r > 1$ tem-se

$$\left(1 + r\right)^s \leq \left(r + r\right)^s = \left(2r\right)^s.$$

Portanto

$$\left(1 + r\right)^s \leq 2^s \left(1 + r^s\right),$$

ou seja,

$$\frac{\left(1 + r\right)^s}{1 + r^s} \leq 2^s.$$

Observe que a função $r \longmapsto \dfrac{\left(1 + r\right)^s}{1 + r^s}$ é contínua em $[0, 1]$ e não se anula nesse intervalo. Logo, existe $C_1 = \displaystyle\min_{r \in [0,1]} \left\{ \frac{\left(1 + r\right)^s}{1 + r^s} \right\} > 0$. Tomando $C = \max\left\{2^s, C_1\right\}$, vemos que

$$\frac{\left(1 + r\right)^s}{1 + r^s} \leq C,$$

e isso conclui a prova. $\square$

Capítulo 2

Espaços Funcionais

Neste capítulo apresentaremos dois dos principais espaços necessários ao nosso estudo, quais sejam espaços de Sobolev periódico e na reta. Na primeira seção apresentamos os espaços de Sobolev periódicos e alguns resultados que usaremos no decorrer do texto. Concluímos o capítulo com uma seção dedicada aos espaços de Sobolev na reta, importante ao estudo dos espaços de Bourgain (apresentado no capítulo 3), e algumas de suas propriedades.

2.1 Espaços de Sobolev Periódicos

2.1.1 Série de Fourier

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função integrável. Seja L o comprimento do intervalo $[a,b]$. O k-ésimo **coeficiente de Fourier de** f é definido por

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\, e^{-2\pi ikx/L}dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

A série de Fourier de f é dada (formalmente) por

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi ikx/L}, \tag{2.2}$$

e denotaremos a n-ésima soma parcial por

$$S_n(f) = \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{2\pi ikx/L}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

A menos de menção contrária, usaremos $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

Sejam $f, g \in C_{per}$. A **convolução de** f **e** g, denotada por $f * g$, é definida por

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) g(y) \, dy. \tag{2.4}$$

Proposição 2.1. (Propriedades da convolução)
Sejam f, g, h funções integráveis. Então valem

(a) $f * g$ *é contínua, se* f *ou* g *for contínua*

(b) $f * g = g * f$

(c) $f * (g + h) = f * g + f * h$

(d) $f * (g * h) = (f * g) * h$

(e) $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k)$.

Demonstração. Deixaremos a prova como exercício para o leitor. □

Teorema 2.1. (Identidade de Parseval) *A série de Fourier restrita a $L^2([-\pi, \pi])$ é uma bijeção entre $L^2([-\pi, \pi])$ e $\ell^2(\mathbb{Z})$. Além disso, vale a identidade de Parseval,*

$$\left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \| f \|_{L^2}^2 \tag{2.5}$$

ou, equivalentemente,

$$\left(\widehat{f} | \widehat{g} \right)_{\ell^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} = \frac{1}{2\pi} (f | g)_{L^2}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Ver corolário 2.54 em R. Iório e V. Iório [7], página 109. □

2.1.2 Distribuições Periódicas

Seja $\mathcal{P} = C^{\infty}_{per}$ a coleção de todas as funções $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ que são C^{∞} e periódicas, com período 2π. O espaço vetorial $\mathcal{P}$ não é completo com relação às normas em C^{n}_{per} introduzidas no capítulo anterior. Podemos, todavia, definir uma distância natural em $\mathcal{P}$ dada por

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \frac{\left\| \phi^{(j)} - \psi^{(j)} \right\|_{\infty}}{1 + \left\| \phi^{(j)} - \psi^{(j)} \right\|_{\infty}}, \quad \phi, \psi \in \mathcal{P}. \tag{2.7}$$

Observação 2.1. *A distância d introduz uma métrica em $\mathcal{P}$. Além disso, $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \phi$ se e somente se $\left\| \phi_n^{(j)} - \phi^{(j)} \right\|_{\infty} \to 0$ quando $n \to \infty$, para todo $j = 0, 1, 2, \ldots$.*

Apresentaremos alguns resultados importantes à teoria apresentada aqui.

Teorema 2.2. *$(\mathcal{P}, d)$ é um espaço métrico completo. Além disso, se considerarmos $\{\phi_n\} \subset \mathcal{P}$ e $\phi \in \mathcal{P}$, então*

$$\phi_n \xrightarrow{d} \phi \Leftrightarrow \left\| \phi_n^{(j)} - \phi^{(j)} \right\|_{\infty} \to 0 \quad \text{para todo } j \geq 0.$$

Demonstração. Ver teorema 3.1 em R. Iório e V. Iório [7], página 133. □

Corolário 2.1. *Para todo $\phi \in \mathcal{P}$, $S_n(\phi)$ converge a ϕ em $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Ver corolário 3.2 em R. Iório e V. Iório [7], página 134. □

Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ o **espaço das sequências rapidamente decrescentes**, isto é, o conjunto de todas sequências complexas $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^j |\alpha_k| < \infty \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Observe que $\widetilde{d}$ definida por

$$\widetilde{d}(\alpha, \beta) = \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \frac{\|\alpha - \beta\|_{\infty, j}}{1 + \|\alpha - \beta\|_{\infty, j}}, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}),$$

com

$$\|\alpha\|_{\infty,j} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(|\alpha_k| \, |k|^j \right),$$

também define uma métrica em $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, com a qual, $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ é um espaço métrico completo.

Seja $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. A **transformada inversa de Fourier de** α é a função

$$\check{\alpha}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.3. *A transformada de Fourier* $\widehat{\ } : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ *é um isomorfismo e um homeomorfismo, isto é, é linear, bijetiva sobre* $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$*, e contínua com uma inversa contínua.*

Demonstração. Ver teorema 3.6 em R. Iório e V. Iório [7], página 135. $\square$

Um funcional linear em $\mathcal{P}$, $T : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$, é chamado uma **distribuição periódica** se existe uma sequência $(\psi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}$ tal que

$$T(\phi) = \langle T, \phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\, \phi(x)\, dx, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{P}$$

O conjunto de todas as distribuições periódicas será denotado por $\mathcal{P}'$.

Exemplo 2.1. *É facil ver que* $f \in C_{per}$ *define uma distribuição periódica* Ψ_f *pela fórmula*

$$\langle \Psi_f, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \phi(x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{P}.$$

Dizemos que a sequência $\{\Psi_j\} \subset \mathcal{P}'$ converge a Ψ em $\mathcal{P}'$ se

$$\langle \Psi_j, \phi \rangle \to \langle \Psi, \phi \rangle, \quad \text{quando } j \to \infty \;\; \forall\, \phi \in \mathcal{P}.$$

A operação de diferenciação nas distribuições é definida de tal maneira que elas sejam infinitamente diferenciáveis.

Seja $f \in \mathcal{P}'$. Sua **derivada distribucional** $f' \in \mathcal{P}'$ é definida pela relação

$$\left\langle f', \phi \right\rangle = -\left\langle f, \phi' \right\rangle, \quad \phi \in \mathcal{P}.$$

Em geral

$$\left\langle f^{(n)}, \phi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \phi^{(n)} \right\rangle.$$

2.1.3 Série de Fourier em $\mathcal{P}'$

A **Transformada de Fourier** de $f \in \mathcal{P}'$ é a função $\widehat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida pela fórmula

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \left\langle f, e^{-ikx} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A n-**ésima soma parcial** da série de Fourier associada a f é dada por

$$S_n(f)(x) = S_n(f, x) = \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}.$$

Teorema 2.4. *Seja $f \in \mathcal{P}'$. Então $S_n(f) \in \mathcal{P}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $S_n(f) \xrightarrow{\mathcal{P}'} f$.*

Demonstração. Ver teorema 3.166 em R. Iório e V. Iório [7], página 187. □

Corolário 2.2. *Seja $\phi \in \mathcal{P}$ e $f \in \mathcal{P}'$. Então,*

$$\langle f, \phi \rangle = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, \widehat{\phi}(-k).$$

Demonstração. Ver corolário 3.167 em R. Iório e V. Iório [7], página 188. □

Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ o **espaço das sequências lentamente crescentes**, isto é, o conjunto de todas sequências complexas $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, para qual existem $C > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\alpha_k| \leq C\, |k|^n, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^*.$$

Teorema 2.5. *Seja $\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Então existe uma única $f \in \mathcal{P}'$ tal que $\widehat{f} = \alpha$. Reciprocamente, se $f \in \mathcal{P}'$ então $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.*

Demonstração. Ver teorema 3.172 em R. Iório e V. Iório [7], página 191. □

2.1.4 Definição de espaços de Sobolev periódicos

Seja $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev periódico de ordem s é o conjunto

$$H^s_{per} = H^s_{per}\left([-\pi,\pi]\right) = \left\{ f \in \mathcal{P}' \; ; \; \|f\|_{H^s_{per}} \leq \infty \right\},$$

onde

$$\|f\|^2_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1+|k|^2\right)^s \left|\widehat{f}\,(k)\right|^2. \tag{2.8}$$

O espaço H^s_{per} é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno

$$(f|g)_{H^s_{per}} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1+|k|^2\right)^s \widehat{f}\,(k)\,\overline{\widehat{g}\,(k)}. \tag{2.9}$$

Começaremos nosso estudo sobre os espaços de Sobolev periódicos provando que eles formam uma sequência decrescente de espaços de Hilbert e caracterizar seus respectivos espaços duais.

Proposição 2.2. *Sejam $r, s \in \mathbb{R}$, $s \geq r$. Então $H^s_{per} \hookrightarrow H^r_{per}$, isto é, H^s_{per} é continuamente e densamente mergulhado em H^r_{per} e*

$$\|f\|_{H^r_{per}} \leq \|f\|_{H^s_{per}}, \quad \forall\, f \in H^s_{per}.$$

Em particular, se $s \geq 0$, $H^s_{per} \subset L^2\left([-\pi,\pi]\right)$. Mais ainda, $\left(H^s_{per}\right)'$, o dual topológico de H^s_{per}, é isometricamente isomorfo a H^{-s}_{per} para todo $s \in \mathbb{R}$. A dualidade é realizada pelo par

$$\langle f, g\rangle_s = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\,(k)\,\widehat{g}\,(k), \quad f \in H^s_{per},\ g \in H^{-s}_{per}.$$

Demonstração. Ver proposição 3.193 em R. Iório e V. Iório [7], página 201. □

Agora apresentaremos um resultado que significa o fato dos espaços de Sobolev proverem uma classificação dos elementos de $\mathcal{P}'$ em termos de sua suavidade.

Proposição 2.3. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então $f \in H^m_{per}$ se e somente se $\partial^j f = f^{(j)} \in L^2_{per}$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ onde as derivadas são tomadas nos sentido de $\mathcal{P}'$. Mais ainda, $\|f\|_{H^m_{per}}$ e*

$$\|f\|_{H^m_{per}} = \left[\sum_{j=0}^{m} \left\| \partial^j f \right\|^2_{L^2_{per}} \right]^{1/2} \tag{2.10}$$

são equivalentes, isto é, existem constantes positivas C_m e C'_m tais que

$$C_m \|f\|^2_{H^m_{per}} \leq \|f\|^2_{H^m_{per}} \leq C'_m \|f\|^2_{H^m_{per}}, \ \ \forall\, f \in H^m_{per}.$$

Demonstração. Ver proposição 3.194 em R. Iório e V. Iório [7], página 203. □

Teorema 2.6. (Lema de Sobolev) *Se $s > 1/2$, então $H^s_{per} \hookrightarrow C_{per}$ e*

$$\|f\|_\infty \leq \left\| \widehat{f} \right\|_{\ell^1} \leq C \|f\|_{H^s_{per}}, \ \ \forall\, f \in H^s_{per}. \tag{2.11}$$

Demonstração. Observe que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(k) \right| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\left(1 + |k|^2\right)^{s/2} \left| \widehat{f}(k) \right|}{\left(1 + |k|^2\right)^{s/2}}. \tag{2.12}$$

Como $s > 1/2$, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (2.12), temos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(k) \right| &\leq \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^s \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^{-s} \right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^{-s} \right]^{1/2} \|f\|_{H^s_{per}} < \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}\,(k)\right|\leq\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+|k|^{2}\right)^{-s}\right]^{1/2}\|f\|_{H^{s}_{per}}. \tag{2.13}$$

Logo $\left(\widehat{f}\,(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^{1}$, portanto

$$g\,(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\,(k)\,e^{ikx}$$

converge absolutamente e uniformemente em $[-\pi,\pi]$. Assim, $g\in C_{per}$. Afirmamos que f e g coincidem como distribuições. Caso contrário, pelo corolário 2.2 e a convergência uniforme das séries, teriamos

$$\begin{aligned}
\langle g,\phi\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} g\,(x)\,\phi\,(x)\,dx\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\,(k)\,e^{ikx}\right)\phi\,(x)\,dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\,(k)\int_{-\pi}^{\pi}\phi\,(x)\,e^{ikx}dx\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\,(k)\,\widehat{\phi}\,(-k)\\
&= \langle f,\phi\rangle \quad \forall\,\phi\in\mathcal{P},
\end{aligned}$$

donde $f=g$ no sentido de $\mathcal{P}'$. A desigualdade (2.11) segue de (2.13) pois

$$\begin{aligned}
|f\,(x)| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}\,(k)\right|\\
&\leq \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+|k|^{2}\right)^{-s}\right]^{1/2}\|f\|_{H^{s}_{per}} \quad \forall\,x\in[-\pi,\pi]\,.
\end{aligned}$$

A continuidade do mergulho é uma consequência imediata da inclusão $\mathcal{P}\subset H^{s}_{per}$. □

Sejam $f,\ g\in H^{s}_{per}$, $s>1/2$. Devido o lema de Sobolev, podemos definir o produto $fg \in C_{per} \subset \mathcal{P}'$ pela fórmula

$$\langle fg, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, \phi(x)\, dx, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{P}. \tag{2.14}$$

A importância deste produto é que, com ele, os espaços H^s_{per}, $s > 1/2$, tornam-se uma álgebra de Banach.

Teorema 2.7. *Se $s > 1/2$, H^s_{per} é uma álgebra de Banach. Em particular, existe uma constante $C_s \geq 0$, dependendo apenas de s tal que*

$$\|fg\|_{H^s_{per}} \leq C_s \|f\|_{H^s_{per}} \|g\|_{H^s_{per}}, \quad \forall\, f, g \in H^s_{per}. \tag{2.15}$$

Demonstração. A prova do Lema de Sobolev mostra que, para $s > 1/2$, a série de Fourier de uma função em H^s_{per} converge absolutamente e uniformemente em $[-\pi, \pi]$. Portanto, se $f,\ g \in H^s_{per}$ temos

$$\begin{aligned}
\widehat{fg}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(j)\, e^{ijx} \right) g(x)\, e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(j) \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, e^{-i(k-j)x} dx \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(j)\, \widehat{g}(k-j),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\widehat{fg}(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(j)\, \widehat{g}(k-j) \tag{2.16}$$

O lema 1.1 implica que

$$\begin{aligned}
\left(1 + |k|^2\right)^{s/2} &\leq K_s \left(1 + |k|^s\right) \\
&\leq K_s \left(1 + |k-j|^s + |j|^s\right) \quad \forall\, k, j \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

onde K_s é uma constante não-negativa. Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(j)\,\widehat{g}(k-j)\right|}{\left(1+|k|^2\right)^{-s/2}} &\leq K_s\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left[\left(1+|k-j|^s+|j|^s\right)\right]\widehat{f}(j)\,\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\leq K_s\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(j)\,\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\qquad +K_s\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(j)\right|\left|(k-j)^s\,\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\qquad +K_s\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|j^s\widehat{f}(j)\right|\left|\widehat{g}(k-j)\right|.
\end{aligned}$$

Como

$$\left(m^s\widehat{f}(m)\right)_{m\in\mathbb{Z}},\quad \left(m^s\widehat{g}(m)\right)_{m\in\mathbb{Z}}\in\ell^2$$

e

$$\left(\widehat{f}(m)\right)_{m\in\mathbb{Z}},\quad \left(\widehat{g}(m)\right)_{m\in\mathbb{Z}}\in\ell^1\cap\ell^2,$$

o Teorema de Young combinado com (2.16) mostra que

$$\left(\left(1+|k|^2\right)^{s/2}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(j)\,\widehat{g}(k-j)\right|\right)_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^2$$

e

$$\begin{aligned}
\|fg\|_s^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+|k|^2\right)^{s/2}\left|\widehat{fg}(k)\right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+|k|^2\right)^{s/2}\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(j)\,\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\leq K_s\left[\left\|\widehat{f}\right\|_{\ell^1}\|\widehat{g}\|_{\ell^2}+\|(\cdot)^s\,\widehat{g}(\cdot)\|_{\ell^1}\left\|\widehat{f}\right\|_{\ell^2}+\left\|(\cdot)^s\,\widehat{f}(\cdot)\right\|_{\ell^1}\|\widehat{g}\|_{\ell^2}\right] \\
&\leq C_s\,\|f\|_{H^s_{per}}\,\|g\|_{H^s_{per}}\,.
\end{aligned}$$

Isto termina a prova. $\square$

2.2 Espaços de Sobolev na Reta

2.2.1 A transformada de Fourier na reta

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função integrável (no sentido de Riemann) em $\mathbb{R}$ e

$$\|f\|_{L^1} < \infty,$$

diremos que f é **absolutamente integrável**. Se f é absolutamente integrável, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe a integral imprópria

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\, e^{-ix\xi} d\xi.$$

Definimos a **transformada de Fourier de** f como sendo a função $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int f(x)\, e^{-ix\xi} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.4. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integráveis. Então*

(a) $(f + \lambda g)^{\widehat{}}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \lambda \widehat{g}(\xi), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \xi \in \mathbb{R},$

(b) $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R},$

(c) *Se $y \in \mathbb{R}$ e $f_y(x) = f(x - y)$, $x \in \mathbb{R}$, então $\widehat{f_y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-i\xi y}$,*

(d) $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-1/2} \|f\|_{L^1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(e) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}\, \widehat{g}(\xi).$

Proposição 2.5. *Se f é absolutamente integrável, então $\widehat{f}$ é uniformemente contínua e limitada com $\left\|\widehat{f}\right\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-1/2} \|f\|_{L^1}$.*

Demonstração. Ver proposição 2.2 em R. Iório e V. Iório [6], página 190. □

Proposição 2.6. (Lema de Riemann-Lebesgue) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolutamente integrável e suponha que f é seccionalmente contínua em cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Então $\widehat{f}(\xi) \to 0$, quando $|\xi| \to \infty$.*

Demonstração. Ver proposição 2.3 em R. Iório e V. Iório [6], página 191. □

2.2.2 A transformada de Fourier no espaço de Schwarz

O **espaço de Schwarz**, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$$

e

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^{\alpha} f^{(\beta)}(x) \right| < \infty$$

para todo par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. Note que toda função em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é absolutamente integrável. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é um espaço métrico completo quando munido da distância

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}} 2^{-\alpha-\beta} \frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}.$$

Seja $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ a coleção das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^{∞} e suporte compacto. Temos que $C_0^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Finalmente, observe que, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $x^{\alpha} f^{(\beta)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e, além disso, $x^{\alpha} f^{(\beta)}(x)$ tende a zero quando $|x|$ tende a infinito, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Agora vamos iniciar o estudo do comportamento da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nosso primeiro resultado é

Teorema 2.8. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então $f^{(\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ e*

$$\left(f^{(\alpha)}\right)^{\wedge}(x) = (ix)^{\alpha} \widehat{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Ver teorema 3.1 em R. Iório e V. Iório [6], página 195. $\square$

O teorema acima diz que o operador $\dfrac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ agindo em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é transformado no operador de multiplicação por $(ix)^{\alpha}$. Podemos, portanto, transformar equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em equações algébricas, por isto é importante tentar identificar a imagem de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sob a transformada de Fourier e descobrir se podemos inverter. A resposta vem nos seguintes resultados

Teorema 2.9. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Ver teorema 3.2 em R. Iório e V. Iório [6], página 195. □

Teorema 2.10. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então vale a* **fórmula de inversão**

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver teorema 3.3 em R. Iório e V. Iório [6], página 196. □

Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ defina a **transformada inversa** pela fórmula

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int f(y)\, e^{ixy} dy.$$

O teorema acima mostra que

$$\widehat{f}\,\check{} = f = \check{f}\,\widehat{}$$

para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Em particular, $\widehat{} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é bijetiva.

Introduzindo o produto interno e a norma L^2 em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, temos o seguinte resultado

Corolário 2.3. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então valem a identidade de Parseval*

$$(f|g) = \left(\widehat{f}|\widehat{g}\right),$$

e a identidade de Plancherel

$$\|f\|_{L^2} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}.$$

Demonstração. Ver corolário 3.4 em R. Iório e V. Iório [6], página 198. □

2.2.3 Distribuições temperadas

Uma **distribuição temperada** é um funcional linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ com a propriedade que existe uma sequência $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n(x)\,\phi(x)\,dx$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. A coleção de todas as distribuições temperadas forma um espaço vetorial sobre os complexos e será denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Além disso adotaremos, no que segue, a notação

$$T(\phi) = \langle T, \phi\rangle\,, \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,,\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,.$$

Teorema 2.11. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua e limitada. Então f define um elemento $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ através da fórmula*

$$\langle T_f, \psi\rangle = \int f(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,.$$

Demonstração. Ver teorema 5.1 em R. Iório e V. Iório [6], página 205. □

Visto o teorema acima, é natural dizer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ provém de uma função contínua limitada se, e só se, existe uma tal função com a propriedade que $T = T_f$. Escreveremos simplesmente

$$\langle f, \psi\rangle = \langle T_f, \psi\rangle\,, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

se a distribuição em questão provém da função f.

Diremos que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ converge a $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e escrevemos $T_n \overset{\mathcal{S}'}{\to} T$ se, e só se,

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \psi\rangle = \langle T, \psi\rangle$$

para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, defina sua **derivada no sentido das distribuições**, ou

derivada distribucional, denotada por $f^{'}$, através da fórmula

$$\left\langle f^{'},\psi\right\rangle = (-1)\left\langle f,\psi^{'}\right\rangle, \quad \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

As derivadas de ordem mais alta podem ser definidas da mesma forma. Se f e suas derivadas até ordem α são contínuas e limitadas, integrando por partes α vezes, temos

$$\left\langle f^{(\alpha)},\psi\right\rangle = (-1)^{\alpha}\left\langle f,\psi^{(\alpha)}\right\rangle$$

para toda $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Observe que com a definição acima, todo elemento de $\mathcal{S}^{'}$ é infinitamente diferenciável.

Suponha que $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ define um elemento de $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ da maneira usual. Logo

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{f},\psi\right\rangle &= \int \widehat{f}(x)\,\psi(x)\,dx\\
&= \int\left((2\pi)^{-1/2}\int f(y)\,e^{-ixy}dy\right)\psi(x)\,dx\\
&= \int\left((2\pi)^{-1/2}\int \psi(x)\,e^{-iyx}dx\right)f(y)\,dy\\
&= \int \widehat{\psi}(y)\,f(y)\,dy\\
&= \left\langle f,\widehat{\psi}\right\rangle
\end{aligned}$$

para todo $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Assim, se $f\in\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ a **transformada de Fourier** de f é definido por

$$\left\langle \widehat{f},\psi\right\rangle = \left\langle f,\widehat{\psi}\right\rangle, \quad \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

De maneira análoga, a **transformada inversa** é dada pela fórmula,

$$\left\langle \check{f},\psi\right\rangle = \left\langle f,\check{\psi}\right\rangle, \quad \psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.12. *A aplicação* $\widehat{\ }:\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ *é bijetiva e valem as fórmulas*

$$\widehat{f}^{\,\check{}} = f = \check{f}^{\,\widehat{}}$$

para todo $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Mais ainda, a aplicação é contínua com inversa contínua, no sentido que se $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$ então $\left\{\widehat{f_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left\{\check{f_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendem a $\widehat{f}$ e $\check{f}$, respectivamente, no sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver teorema 5.3 em R. Iório e V. Iório [6], página 212. □

Uma função $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ é dita de **crescimento lento** se, e só se, para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ existem $C = C(\alpha) > 0$ e $k = k(\alpha) \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left|\psi^{(\alpha)}(x)\right| \leq C\left(1 + |x|^2\right)^k$$

para todo x suficientemente grande. Seja f uma função contínua e limitada. Então ψf define um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ pela fórmula

$$\begin{aligned} \langle \psi f, \phi \rangle &= \int \psi(x) f(x) \phi(x)\, dx \\ &= \langle f, \phi\psi \rangle \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Portanto, se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, é natural definir o **produto de f e ψ** por

$$\langle \psi f, \phi \rangle = \langle f, \psi\phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.13. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então,*

$$\left(f^{(\alpha)}\right)^\wedge = (ix)^\alpha \widehat{f},$$

$$\left(\widehat{f}\right)^{(\alpha)} = (-i)^\alpha \left(x^\alpha f\right)^\wedge$$

onde $x^\alpha \widehat{f}$ denota o produto da função $\psi(x) = x^\alpha$ com a distribuição temperada $\widehat{f}$ (respectivamente f).

Demonstração. Ver teorema 5.4 em R. Iório e V. Iório [6], página 213. □

2.2.4 Definição de espaço de Sobolev na reta

Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos **espaço de Sobolev na reta de ordem** s, denotado por $H^s(\mathbb{R})$, por

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \,;\, \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

com norma $\|\cdot\|_{H^s} = \|\cdot\|_{s,2}$ definida por

$$\|f\|_{H^s} = \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f} \right\|_{L^2_\xi}.$$

Da definição apresentada deduzimos as seguintes propriedades

Proposição 2.7. **(a)** *Se $0 \leq s < r$, então $H^r \subset H^s$.*

(b) *H^s é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno $(\,\cdot \mid \cdot\,)_{H^s} = (\,\cdot \mid \cdot\,)_s$ definida a seguir*

Se $f, g \in H^s(\mathbb{R})$, então $(f|g)_s = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right)^s f(\xi)\, \overline{g}(\xi)\, d\xi.$

(c) *Para todo $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Schwarz é denso em H^s, $\forall\, s \in \mathbb{R}^+$*

(d) *Se $s_1 \leq s \leq s_2$, com $s = \theta s_1 + (1-\theta) s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, então*

$$\|f\|_{s,2} \leq \|f\|_{s_1,2}^{\theta} \, \|f\|_{s_2,2}^{1-\theta}.$$

Demonstração. Ver proposição 3.6 em Linares e Ponce [10], página 48. □

Teorema 2.14. (Imersão de Sobolev) *Se $f > 1/2 + k$, então H^s é continuamente mergulhado em $C^k_\infty(\mathbb{R})$, o espaço das funções com k derivadas e que anula-se no infinito. Em outras palavras, se $f \in H^s$, $s > 1/2 + k$, então (depois de uma possível modificação de f em um conjunto de medida nula) $f \in C^k_\infty(\mathbb{R})$ e*

$$\|f\|_{C^k} \leq c_s \|f\|_{s,2}.$$

Demonstração. Ver teorema 3.11 em Linares e Ponce [10], página 50. □

Teorema 2.15. *Se $s \in (0, 1/2)$, então $H^s(\mathbb{R})$ é continuamente mergulhada em $L^p(\mathbb{R})$, com $p = 2/(1-2s)$, isto é, $s = 1/2 - 1/p$. Mais ainda, para $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s \in (0, 1/2)$,*

$$\|f\|_{L^p} \leq C_{n,s} \|D^s f\|_{L^2} \leq c \|f\|_{H^s},$$

onde

$$D^s f = \left[(i\tau)^s \widehat{f} \right]^{\vee}.$$

Demonstração. Ver teorema 3.13 em Linares e Ponce [10], página 51. □

Teorema 2.16. *Se $s > 1/2$, então H^s é uma álgebra com respeito ao produto de funções. Isto é, se $f, g \in H^s$, então $fg \in H^s$ com*

$$\|fg\|_{s,2} \leq c_s \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}.$$

Demonstração. Ver teorema 3.14 em Linares e Ponce [10], página 52. □

Teorema 2.17. (Regra de Leibniz) *Sejam $\alpha \in (0,1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$ com $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Sejam p, p_1, $p_2 \in (1, \infty)$ tais que*

$$1/p = 1/p_1 + 1/p_2.$$

Então

$$\|D^\alpha (fg) - f D^\alpha g - g D^\alpha f\|_{L^p} \leq c \|D^{\alpha_1} f\|_{L^{p_1}} \|D^{\alpha_2} g\|_{L^{p_2}}.$$

Demonstração. Ver lema 7.11 em Linares e Ponce [10], página 150. □

Finalizamos apresentando uma generalização da definição de espaço de Sobolev na reta. Precisamente,definimos espaço de Sobolev na reta de ordem s e peso p, denotado por $H^{s,p}(\mathbb{R})$, por

$$H^{s,p}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'; \left[\left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f} \right]^{\vee} \in L^p \right\}.$$

Capítulo 3

A Equação Não-Linear de Schrödinger em espaços de alta regularidade

3.1 As propriedades do problema homogêneo

Nesta seção mostraremos que o problema de Cauchy, também dito problema de valor inicial (PVI),

$$\begin{cases} u & \in & C\left([0,\infty)\,; H^s_{per}\right) \\ i\partial_t u + \partial_x^2 u & = & 0 \\ u\,(0) & = & \phi \in H^s_{per}, \end{cases} \tag{3.1}$$

é localmente bem-posto, para todo $s \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, provaremos que (3.1) tem uma única solução que depende continuamente dos dados iniciais. Nosso método é considerar a equação diferencial parcial (EDP) (3.1) como uma equação diferencial ordinária (EDO) em um espaço de Banach apropriado. Como veremos, pelo menos dois desses espaços são necessários, em geral: um onde as soluções vivem, e outro para acomodar suas derivadas temporais.

Nosso primeiro passo é esclarecer o significado da derivada temporal em

(3.1). Observemos que

$$\forall f \in H^s_{per} \Rightarrow -i\partial_x^2 f \in H^{s-2}_{per}.$$

Então, se $u \in H^s_{per}$ é uma solução de (3.1), devemos ter $\partial_t u \in H^{s-2}_{per}$. Portanto é natural requerer que a derivada temporal exista nesta topologia, isto é,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u\left(t+h\right)-u\left(t\right)}{h}-i\partial_x^2 u\left(t\right)\right\|_{H^{s-2}_{per}}=0. \tag{3.2}$$

Em $t=0$, a derivada é tomada à direita.

Teorema 3.1. (Unicidade) *O problema (3.1) tem, no máximo, uma solução.*

Demonstração. Suponha que não temos unicidade. Assim, sejam v_1 e v_2 duas soluções de (3.1). Então $w=v_1-v_2$ satisfaz o PVI

$$\left\{\begin{array}{rcl} iw_t+\partial_x^2 w & = & 0 \\ w\left(x,0\right) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Como $s-2<s$, temos que $H^s_{per}\hookrightarrow H^{s-2}_{per}$. Daí, $(w_t|w)_{H^{s-2}_{per}}$ e $(w|w_t)_{H^{s-2}_{per}}$ estão bem definidos (pois $\partial_x^2 w \in H^{s-2}_{per}$) e segue daí que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|w\left(t\right)\right\|^2_{H^{s-2}_{per}} &= \frac{d}{dt}\left(2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\left|\widehat{w}\left(k,t\right)\right|^2\right)\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\frac{d}{dt}\left(\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}w\left(x,t\right)e^{-ikx}dx\right|^2\right)\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\widehat{w}_t\left(k\right)\overline{\widehat{w}\left(k\right)}\\
&\quad +2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\widehat{w}\left(k\right)\overline{\widehat{w}_t\left(k\right)}\\
&= \left(w_t|w\right)_{H^{s-2}_{per}}+\left(w|w_t\right)_{H^{s-2}_{per}}\\
&= 2\mathrm{Re}\left(w_t|w\right)_{H^{s-2}_{per}}.
\end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}
\left(\partial_x^2 w|w\right)_{H_{per}^{s-2}} &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\widehat{\partial_x^2 w}\,(k,t)\,\overline{\widehat{w}\,(k,t)}\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}(ik)\,\widehat{\partial_x w}\,(k,t)\,\overline{\frac{1}{ik}\widehat{\partial_x w}\,(k,t)}\\
&= -2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\left|\widehat{\partial_x w}\,(k,t)\right|^2\\
&= -\left\|\partial_x w\right\|_{H_{per}^{s-2}}^2 \le 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\|w\,(t)\right\|_{H_{per}^{s-2}}^2 &= 2\mathrm{Re}\left(w_t|w\right)_{H_{per}^{s-2}}\\
&= 2\mathrm{Re}\left(i\partial_x^2 w|w\right)_{H_{per}^{s-2}}\\
&= 2\mathrm{Re}\left(-i\left\|\partial_x w\right\|_{H_{per}^{s-2}}^2\right)_{H_{per}^{s-2}} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\|w\,(t)\|$ é constante para todo $t \ge 0$. Da condição inicial, concluímos que $v_1 = v_2$. $\square$

Usando um método clássico no estudo de EDPs, a transformada de Fourier, podemos encontrar um candidato a solução do PVI (3.1). Agora, valendo-nos de tal método, apresentaremos o candidato à solução e logo depois verificaremos que, de fato, este é a solução.

Aplicando a transformada de Fourier no PVI (3.1), na variável espacial, obtemos a seguinte família de EDOs, em função da variável temporal.

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\widehat{v} & \in & C\left([0,\infty);\ell_s^2\left(\mathbb{Z}\right)\right)\\
i\widehat{v}_t\,(k,t) - k^2\widehat{v}\,(k,t) & = & 0\\
\widehat{v}\,(k,0) & = & \widehat{\phi}\,(k)\in H_{per}^s,
\end{array}\right. \tag{3.4}$$

onde ℓ_s^2 é a coleção das sequências complexas $\alpha = \left(\alpha_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, tal que

$$\sum_k \left(1+k^2\right)^s \left|\alpha_k\right|^2 < \infty.$$

As soluções de (3.4) são

$$\widehat{v}(k,t) = e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k), \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ t \in [0,\infty).$$

Assim, a transformada de Fourier da solução de (3.1) é

$$\left\{e^{-ik^2t}\widehat{\phi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

e o candidato natural a solução, pelo teorema 2.3, é

$$v(x,t) = \left[\left\{e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\right]^{\check{}}(x). \tag{3.5}$$

Teorema 3.2. *A aplicação* $S : \mathbb{R} \to \mathcal{B}\left(H^r_{per}\right)$ *tal que* $S(t) = e^{-it\partial_x^2}$ *é um grupo unitário a um-parâmetro fortemente contínuo. Em particular, a aplicação* $\phi \in H^r_{per} \to S(t)\phi \in H^r_{per}$ *é contínua no seguinte sentido. Para todo* $r \in \mathbb{R}$*, tem-se*

$$\|S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2\|_{H^r_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^r_{per}}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. É claro que $S(0) = I$.

$$\begin{aligned}
\|S(t)\phi\|_{H^r_{per}} &= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^r\left|(S(t)\phi)\,\hat{}\,(k)\right|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^r\left|e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^r\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 = \|\phi\|_{H^r_{per}},
\end{aligned}$$

para todo $\phi \in H^r_{per}$. Além disso, quaisquer que sejam $t, h \in \mathbb{R}$, escrevendo

$S\left(t+h\right)f$ em função de sua série de Fourier, temos

$$\begin{aligned} S\left(t+h\right)f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik^{2}(t+h)}\widehat{f}\left(k\right)e^{ikx} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik^{2}t}e^{-ik^{2}h}\widehat{f}\left(k\right)e^{ikx} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik^{2}t}\widehat{g}\left(k\right)e^{ikx} \\ &= S\left(t\right)g, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde g é tal que $\widehat{g}\left(k\right) = e^{-ik^{2}h}\widehat{f}\left(k\right)$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$. Observe que, escrevendo a série de Fourier de g é $S\left(h\right)f$, por definição

$$g\left(x\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik^{2}h}\widehat{f}\left(k\right)e^{ikx} = S\left(h\right)f\left(x\right).$$

Daí,

$$S\left(t+h\right)f = S\left(t\right)S\left(h\right)f.$$

Agora vamos tratar a continuidade. Seja $t \in \mathbb{R}$ fixo e $h \neq t$. Então

$$\begin{aligned} &\left\|S\left(t+h\right)\phi - S\left(t\right)\phi\right\|^{2}_{H^{r}_{per}} \\ &\quad = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^{2}\right)^{r}\left|S\widehat{\left(t+h\right)\phi}\left(k\right) - \widehat{S\left(t\right)\phi}\left(k\right)\right|^{2} \\ &\quad = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^{2}\right)^{r}\left|e^{-i(t+h)k^{2}}\widehat{\phi}\left(k\right) - e^{-itk^{2}}\widehat{\phi}\left(k\right)\right|^{2} \\ &\quad = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^{2}\right)^{r}\left|e^{-itk^{2}}\widehat{\phi}\left(k\right)\left(e^{-ihk^{2}}-1\right)\right|^{2} \\ &\quad = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^{2}\right)^{r}\left|\widehat{\phi}\left(k\right)\left(e^{-ihk^{2}}-1\right)\right|^{2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $\phi \in H^{r}_{per}$ e

$$\left(1+k^{2}\right)^{r}\left|\widehat{\phi}\left(k\right)\left(e^{-ihk^{2}}-1\right)\right|^{2} \leq 4\left(1+k^{2}\right)\left|\widehat{\phi}\left(k\right)\right|^{2}, \tag{3.8}$$

o teste-M de Weierstrass implica que a série em (3.7) converge absolutamente e uniformemente com respeito a h. Combinando esta observação com o fato que o primeiro membro de (3.8) tende a 0 quando $h \to 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$

fixo, concluímos que

$$\lim_{h\to 0}\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|_{H^r_{per}}^2 = 0. \tag{3.9}$$

$\square$

Em seguida vamos a diferenciabilidade.

Teorema 3.3. *Tem-se*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - i\partial_x^2 v(t)\right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0 \tag{3.10}$$

uniformemente com respeito a $t \geq 0$*, onde* v *é dado por (3.5).*

Demonstração. Seja $t \geq 0$ fixo. Então, por (3.5),

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - i\partial_x^2 v(t)\right\|_{H^{s-2}_{per}}^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\left|\frac{\widehat{v}(t+h)-\widehat{v}(t)}{h} - \widehat{i\partial_x^2 v}(t)\right|^2 \\
&= \sum_{k}\left(1+k^2\right)^{s-2}\left|\frac{e^{-ik^2(t+h)}\widehat{\phi} - e^{-ik^2t}\widehat{\phi}}{h} + ik^2e^{-ik^2t}\widehat{\phi}\right|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+k^2\right)^{s-2}\left|e^{-itk^2}\widehat{\phi}(k)\right|^2\left|\frac{e^{-ihk^2}-1}{h} + ik^2\right|^2,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $h > 0$. Como, por L'Hôpital, $\lim_{h\to 0}\left|\frac{e^{-ihk^2}-1}{h} + ik^2\right| = 0$, é suficiente provar que a série no segundo membro de (3.11) converge uniformemente com respeito a h. Aplicando o Teorema do Valor Médio obtemos

$$\left|\frac{e^{-ihk^2}-1}{h}\right| \leq \left|k^2\right|, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\left(1+k^2\right)^{s-2}\left|e^{-itk^2}\widehat{\phi}\left(k\right)\right|^2\left|\frac{e^{-ihk^2}-1}{h}+ik^2\right|^2\\
&\leq 4\left(1+k^2\right)^{s-2}\left|k^2\right|^2\left|\widehat{\phi}\left(k\right)\right|^2\\
&=4\left(1+k^2\right)\left(\frac{k^2}{1+k^2}\right)^2\left|\widehat{\phi}\left(k\right)\right|^2\\
&\leq 4\left(1+k^2\right)^{s}\left|\widehat{\phi}\left(k\right)\right|^2, \quad \forall\, h>0.
\end{aligned}$$

Uma aplicação do teste-M de Weierstrass conclui a prova da existência da derivada à direita. Um argumento similar, com $t>0$ fixo e $h\in(0,t/2)$, mostra que a derivada à esquerda também existe e é igual a $i\partial_x^2 v\left(t\right)$. Isto conclui a prova. □

Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3 implicam que (3.1) é bem-posto. Resumiremos isto no

Corolário 3.1. *O problema (3.1) é bem-posto. Sua única solução, que depende continuamente dos dados iniciais, é dada por (3.5).*

3.2 Problema não-homogêneo

Finalmente voltamos ao problema não-homogêneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & \in & C\left([0,T]\,;H^s_{per}\right)\\ iu_t+\partial_x^2 u & = & \left|u\right|^2 u\\ u\left(x,0\right) & = & \phi\left(x\right)\in H^s_{per}. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Como no caso homogêneo, vamos apresentar um candidato a solução do PVI (3.12). Para tal objetivo, usaremos o método de variação de parâmetros. Tomando a transformada de Fourier, com relação a variável espacial x, da equação diferencial parcial e a condição inicial, obtemos uma família de EDOs

$$\begin{cases} i\widehat{u}_t(k,t) - k^2\widehat{u}(k,t) &= \widehat{|u|^2 u}(k,t) \\ \widehat{u}(k,0) &= \widehat{\phi}(k). \end{cases} \tag{3.13}$$

Fixado $k \in \mathbb{Z}$ e multiplicando a EDO (3.13) pelo fator de integração e^{ik^2t}, temos

$$\frac{d}{dt}\left(i\widehat{u}(k,t)\, e^{ik^2t}\right) = \widehat{|u|^2 u}(k,t)\, e^{ik^2t}.$$

Integrando no intervalo $[0,t]$, usando a condição inicial e aplicando a transformada de Fourier inversa, obtemos

$$u(t) = S(t)\,\phi - i\int_0^t S(t-\tau)\,|u|^2\, u(\tau)\, d\tau. \tag{3.14}$$

Proposição 3.1. *Seja $u \in C\left([0,T]; H^s_{per}\right)$ uma solução de (3.12). Então, u satisfaz*

$$u(t) = S(t)\,\phi - i\int_0^t S(t-s)\,|u(s)|^2\, u(s)\, ds, \tag{3.15}$$

onde $S(t) = exp\left(-it\partial_x^2\right)$. Reciprocamente, se $u \in C\left([0,T]; H^s_{per}\right)$ é uma solução de (3.15), então $u \in C^1\left([0,T]; H^{s-2}_{per}\right)$ e satisfaz (3.12) com a derivada temporal calculada por

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - i\left(\partial_x^2 u(t) - |u(t)|^2\, u(t)\right)\right\|_{H^{s-2}_{per}} = 0. \tag{3.16}$$

Demonstração. Como

$$S(t)\,\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ixk} e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k),$$

temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)\,\phi(x) = i\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}\left(-k^2 e^{-ik^2t}\widehat{\phi}(k)\right).$$

De (3.5), temos

$$\frac{d}{dt}S(t)\phi(x) = i\partial_x^2 S(t)\phi(x). \tag{3.17}$$

Agora, pelo teorema do valor médio, tomando $w = |u|^2 u$, temos que

$$\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)\,w(\tau)\,d\tau \;=\; S(t+h-\gamma)\,w(\gamma)\,h, \tag{3.18}$$

onde $\gamma \in (t, t+h)$.

Dividindo ambos os membros de (3.18) por h e calculando o limite quando h tende a zero, temos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)\,w(\tau)\,d\tau \;=\; w(t). \tag{3.19}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^t \left[S(t+h-\tau) - S(t-\tau)\right] w(\tau)\,d\tau \\
&\quad = \int_0^t \frac{d}{dt}S(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau \\
&\quad = i\partial_x^2\int_0^t S(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

De (3.19) e (3.20) temos que

$$\frac{d}{dt}\int_0^t S(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau = w(t) + i\partial_x^2\int_0^t S(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau. \tag{3.21}$$

Derivando ambos os membros de (3.15) com relação a variável temporal, de (3.17) e (3.20), temos (3.12). □

3.2.1 Caso $s > 1/2$

Observação 3.1. *Observe que a aplicação g, dada por $g(u) = |u|^2 u$, satisfaz, para $s > 1/2$, as propriedades*

(a) *g leva H^s_{per} nele mesmo, e $g(0) = 0$;*

(b) *g satisfaz a condição local de Lipschitz*

$$\|g(v) - g(w)\|_{H^s_{per}} \leq L\left(\|v\|_{H^s_{per}}, \|w\|_{H^s_{per}}\right) \|v - w\|_{H^s_{per}}, \tag{3.22}$$

para todo $v, w \in H^s_{per}$, onde $L(\cdot\,,\cdot)$ é uma função contínua, não-decrescente com respeito a cada um dos argumentos.

Demonstração. É claro que $g(0) = 0$. Se $u \in H^s_{per}$, então

$$\|u\|_s^2 = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^s |\widehat{u}(k)|^2 < \infty. \tag{3.23}$$

Como u é contínua e periódica, sabemos que tem um máximo M. Assim, de (3.23), segue que

$$\begin{aligned} \left\||u|^2 u\right\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^s \left|\widehat{|u|^2 u}(k)\right|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^s \left|\widehat{M^2 u}(k)\right|^2 \\ &= M^2 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 + |k|^2\right)^s |\widehat{u}(k)|^2 \\ &= M^2 \|u\|_{H^s_{per}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo, $|u|^2 u \in H^s_{per}$, ou seja, $g\left(H^s_{per}\right) \subset H^s_{per}$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \|g(v) - g(w)\|_{H^s_{per}} &= \left\||v|^2 v - |w|^2 w\right\|_{H^s_{per}} \\ &= \left\||v|^2 v - |w|^2 v + |w|^2 v - |w|^2 w\right\|_{H^s_{per}} \\ &= \left\|\left(|v|^2 - |w|^2\right) v + |w|^2 (v - w)\right\|_{H^s_{per}} \\ &\leq \left\|\left(|v|^2 - |w|^2\right) v\right\|_{H^s_{per}} + \left\||w|^2 (v - w)\right\|_{H^s_{per}} \\ &= \left\||v|^2 - |w|^2\right\|_{H^s_{per}} \|v\|_{H^s_{per}} + \left\||w|^2\right\|_{H^s_{per}} \|v - w\|_{H^s_{per}} \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Pelo teorema 2.7 e o fato de $\|u\|_{H^s_{per}} = \|\overline{u}\|_{H^s_{per}}$, para todo $u \in H^s_{per}$.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left\| |v|^2 - |w|^2 \right\|_{H^s_{per}} \|v\|_{H^s_{per}} \\
&\leq \left(\|(v-w)\left(\overline{v+w}\right)\|_{H^s_{per}} + \|v\overline{w} - \overline{v}w\|_{H^s_{per}} \right) \|v\|_{H^s_{per}} \\
&\leq C_s \left(\|v-w\|_{H^s_{per}} \|v+w\|_{H^s_{per}} + \|\overline{v}\left(v-w\right) + v\left(\overline{v-w}\right)\|_{H^s_{per}} \right) \|v\|_{H^s_{per}} \\
&\leq C_s \left(\|v-w\|_{H^s_{per}} \|v+w\|_{H^s_{per}} + 2\|v\|_{H^s_{per}} \|v-w\|_{H^s_{per}} \right) \|v\|_{H^s_{per}} \\
&\leq C_s \left(\|w\|_{H^s_{per}} \|v\|_{H^s_{per}} + 3\|v\|^2_{H^s_{per}} \right) \|v-w\|_{H^s_{per}},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \left\| |w|^2 \right\|_{H^s_{per}} \|v-w\|_{H^s_{per}} \\
&= \|w\|^2_{H^s_{per}} \|v-w\|_{H^s_{per}},
\end{aligned}
$$

concluímos que

$$
\|g(v) - g(w)\|_{H^s_{per}} \leq L\left(\|v\|_{H^s_{per}}, \|w\|_{H^s_{per}} \right) \|v-w\|_{H^s_{per}},
$$

onde $L\left(\|v\|_{H^s_{per}}, \|w\|_{H^s_{per}} \right) = C_s \left(\|w\|^2_{H^s_{per}} + \|w\|_{H^s_{per}} \|v\|_{H^s_{per}} + 3\|v\|^2_{H^s_{per}} \right)$. □

Proposição 3.2. *Sejam $s > 1/2$ e $\phi, \psi \in H^s_{per}$ e $u, v \in C\left([0,T]; H^s_{per}\right)$ duas soluções do problema (3.12) satisfazendo $u(0) = \phi$ e $v(0) = \psi$. Então*

$$
\|u(t) - v(t)\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}} e^{L(M_s, M_s)t}, \quad \forall\, t \in [0,T],
$$

onde M_s é dado por

$$
M_s = M_s(u,v) = \max\left\{ \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{H^s_{per}}, \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_{H^s_{per}} \right\}.
$$

Em particular, (3.12) tem, no máximo, uma solução.

Demonstração. Equação (3.15) implica

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= S(t)(\phi - \psi) \\ &\quad -i\int_0^t S(t-\tau)\left(|u|^2 u(\tau) - |v|^2 v(\tau)\right) d\tau. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Como $S(t)$ é unitário em H^s_{per} segue que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{H^s_{per}} &\leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}} + \int_0^t \left\| |u|^2 u(\tau) - |v|^2 v(\tau) \right\|_{H^s_{per}} d\tau \\ &\leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}} \\ &\quad + \int_0^t L\left(\|v(t)\|_{H^s_{per}}, \|w(\tau)\|_{H^s_{per}}\right) \|u(\tau) - v(\tau)\|_{H^s_{per}} d\tau \\ &\leq \|\phi - \psi\|_{H^s_{per}} + L(M_s, M_s)\int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\|_{H^s_{per}} d\tau, \end{aligned}$$

por (3.22). A desigualdade de Gronwall implica o resultado. □

Teorema 3.4. *Seja $\phi \in H^s_{per}$. Então existe um $T > 0$ e um único $u \in C\left([0,T]; H^s_{per}\right)$ satisfazendo (3.12), com a derivada temporal calculada como em (3.16).*

Demonstração. Seja $\gamma > 0$ fixo. Observe que

$$\Lambda(T, \gamma, \phi) = \left\{ v \in C\left([0,T]; H^s_{per}\right) : \|v(t) - S(t)\phi\|_{H^s_{per}} \leq \gamma, \ \forall\, t \in [0,T] \right\}$$

com a distância

$$d(v, w) = \sup_{[0,T]} \|v(t) - w(t)\|_{H^s_{per}}$$

é um espaço métrico completo.

Considere a aplicação

$$(Av)(t) = S(t)\phi - i\int_0^t S(t-\tau)|v|^2 v(\tau)\, d\tau, \tag{3.25}$$

$v \in \Lambda(T, \gamma, \phi)$. É fácil verificar que $Av \in C\left([0,T]; H^s_{per}\right)$ para todo $v \in \Lambda(T, \gamma, \phi)$ e $T > 0$.

Mostraremos que existe um $T > 0$ tal que A é uma contração estrita em $\Lambda(T, \gamma, \phi)$. Combinando o fato que $S(t)$ é unitário em H^s_{per} e a desigualdade (3.22), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|(Av)(t) - S(t)\phi\right\|_{H^s_{per}} &= \left\| -i \int_0^t S(t-\tau)\, |v|^2 v(\tau)\, d\tau \right\|_{H^s_{per}} \\
&\leq \int_0^t \left\| S(t-\tau)\, |v|^2 v(\tau) \right\|_{H^s_{per}} d\tau \\
&= \int_0^t \left\| |v|^2 v(\tau) \right\|_{H^s_{per}} d\tau \\
&\leq \int_0^t L\left(\|v(\tau)\|_{H^s_{per}}, 0 \right) \|v(\tau)\|_{H^s_{per}}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Como $v \in \Lambda(T, \gamma, \phi)$, temos

$$\begin{aligned}
\|v(\tau)\|_{H^s_{per}} &\leq \|v(\tau) - S(\tau)\phi\|_{H^s_{per}} + \|S(\tau)\phi\|_{H^s_{per}} \\
&\leq \gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, \quad \forall\, \tau \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left\|(Av)(t) - S(t)\phi\right\|_{H^s_{per}} &\leq \int_0^t L\left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, 0 \right) \left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}} \right) d\tau \\
&\leq L\left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, 0 \right) \left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}} \right) T,
\end{aligned}$$

qualquer que seja $t \in [0, T]$.

Daí segue que $Av \in \Lambda(T, \gamma, \phi)$, $\forall\, v \in \Lambda(T, \gamma, \phi)$, sempre que

$$0 < T \leq \left[L\left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, 0 \right) \left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}} \right) \right]^{-1} = \alpha\left(\gamma, \|\phi\|_{H^s_{per}} \right). \tag{3.27}$$

A seguir, tome T satisfazendo (3.27) e sejam $v, w \in \Lambda(T, \gamma, \phi)$. Então

$$\begin{aligned}
\|(Av)(t) - (Aw)(t)\|_{H^s_{per}} &\leq \int_0^t \left\||v|^2 v(\tau) - |w|^2 w(\tau)\right\|_{H^s_{per}} d\tau \\
&\leq \int_0^t L\left(\|v(\tau)\|_{H^s_{per}}, \|w(\tau)\|_{H^s_{per}}\right) \|v(\tau) - w(\tau)\|_{H^s_{per}} d\tau \\
&\leq L\left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, \gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}\right) \int_0^t \|v(\tau) - w(\tau)\|_{H^s_{per}} d\tau \\
&\leq L\left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, \gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}\right) T d(v, w),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$. Portanto,

$$d(Av, Aw) \leq L\left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, \gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}\right) T d(v, w). \tag{3.28}$$

Observe que o coeficiente de $d(v, w)$ torna-se menor que 1 se tomarmos

$$0 < T < L\left(\gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}, \gamma + \|\phi\|_{H^s_{per}}\right)^{-1} = \beta\left(\gamma, \|\phi\|_{H^s_{per}}\right). \tag{3.29}$$

Combinando (3.27) e (3.28), concluímos que A é uma contração em $\Lambda(T, \gamma, \phi)$ sempre que

$$0 < T < \widetilde{T} = \widetilde{T}\left(\gamma, \|\phi\|_{H^s_{per}}\right) = \min\left\{\alpha\left(\gamma, \|\phi\|_{H^s_{per}}\right), \beta\left(\gamma, \|\phi\|_{H^s_{per}}\right)\right\} \tag{3.30}$$

e isto conclui a prova.

$\square$

Teorema 3.5. *Sejam $\phi_n \in H^s_{per}$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, tal que $\phi_n \overset{H^s_{per}}{\to} \phi_\infty$. Sejam $u_n \in C\left(\left[0, \widetilde{T}_n\right]; H^s_{per}\right)$, onde $\widetilde{T}_n = \widetilde{T}\left(\gamma, \|\phi_n\|_{H^s_{per}}\right)$, as soluções construidas no teorema 3.4. Seja $T \in \left(0, \widetilde{T}_\infty\right)$. Então as soluções u_n são definidas em $[0, T]$ para todo n suficientemente grande e*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_{H^s_{per}} = 0.$$

Demonstração. Como $\widetilde{T}\left(\gamma, \|\phi\|_{H^s_{per}}\right)$ é uma função contínua de ϕ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{T}_n > T$, $\forall\, n \geq n_0$. Então u_n é definida em $[0, T]$ para todo n.

Daí, segue que, $u_n \in \Lambda(T, \gamma, \phi_n)$, $\forall\, n \geq n_0$, e satisfaz

$$\|u_n(t)\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_n\|_{H^s_{per}} + \gamma \leq K + \gamma \tag{3.31}$$

onde $K = \sup\limits_n \|\phi_n\|_{H^s_{per}}$. Combinando a proposião 3.2 com (3.31) obtemos

$$\|u_n(t) - u_\infty\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_{H^s_{per}} e^{K_{s,n}T}$$

onde

$$K_{s,n} = L\left(M_s(u_n, u_\infty), M_s(u_n, u_\infty)\right) \leq L(K+\gamma, K+\gamma) = K^* < \infty.$$

Portanto,

$$\|u_n(t) - u_\infty(t)\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_n - \phi_\infty\|_{H^s_{per}} e^{K^*T},$$

para todo $t \in [0, T]$. Isto concluí a prova.

□

3.2.2 Caso $0 \leq s \leq 1/2$

A dificuldade do método empregado no seção anterior para dados iniciais $\phi \in H^s_{per}$ com $s \leq 1/2$ é o fato de H^s_{per} não ser uma álgebra de Banach para tais valores de s. Nesta seção contornamos este problema trabalhando num subespaço de H^s_{per}, denotado por $X_{s,b}$ e conhecido na literatura como espaços de Bourgain.

Como na demonstração da boa colocação local usamos, fortemente, a desigualdade de Strichartz periódica, apresentada mais adiante, temos daí que $s \geq 0$.

Seja ψ uma função $C^\infty(\mathbb{R})$ com suporte supp $\psi \subset (-2, 2)$ tal que $\psi(t) = 1$, para $t \in [-1, 1]$. Seja $\psi_T(\,\cdot\,) = \psi(\,\cdot\,/T)$. Consideremos agora a equação integral associada ao problema (3.12), isto é

$$u(t) = \psi_T S(t) u_0 - i\psi_T \int_0^t S(t-\gamma)\, |u|^2\, u d\gamma \tag{3.32}$$

Seja $\mathcal{A}$ o espaço das funções f tais que

(i) $f : [0, L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

(ii) $f(x, \cdot) \in \mathcal{S}$, para cada $x \in [0, L]$

(iii) $f(\cdot\,, t) \in C^{\infty}([0, L])$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Para $s \in \mathbb{R}$ se define o espaço $X_{s,b}$ como sendo o completamento de $\mathcal{A}$ com relação à norma

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \left\| \langle n \rangle^{s} \left\langle \tau + n^{2} \right\rangle^{b} \widehat{f}(n, \tau) \right\|_{\ell_n^2 L_\tau^2}, \tag{3.33}$$

onde $\langle \cdot \rangle = 1 + |\cdot|$.

Proposição 3.3. *A definição dos espaços $X_{s,b}$ é tal que*

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \|S(-t) f\|_{H_t^b H_{per}^s} \tag{3.34}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\|S(-t) f\|_{H_t^b H_{per}^s}^2 &= \left\| \langle \tau \rangle^{b} \langle n \rangle^{s} \widehat{S(-t) f}(n, \tau) \right\|_{\ell_n^2 L_\tau^2} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} \langle n \rangle^{2s} \left| \widehat{S(-t) f}(n, \tau) \right|^2 d\tau \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} \langle n \rangle^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itn^2} \widehat{f}(n, \tau) e^{-it\tau} dt \right|^2 d\tau \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} \langle n \rangle^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-it\left(\tau - n^2\right)} \widehat{f}(n, \tau)\, dt \right|^2 d\tau \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2b} \langle n \rangle^{2s} \left| \widehat{f}\left(n, \tau - n^2\right) \right|^2 d\tau \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left\langle \tau + n^2 \right\rangle^{2b} \langle n \rangle^{2s} \left| \widehat{f}(n, \tau) \right|^2 d\tau \\
&= \left\| \langle n \rangle^{s} \langle \tau + n^2 \rangle^{b} \widehat{f}(n, \tau) \right\|_{\ell_n^2 L_\tau^2} \\
&= \|f\|_{X_{s,b}}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

□

Lema 3.1. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $b > 1/2$, então*

$$\|\psi_1 S(t) u_0\|_{X_{s,b}} \leq c \|u_0\|_{H^s_{per}}. \tag{3.36}$$

Demonstração. Das definições dos espaços $X_{s,b}$ e da função ψ_1, bem como do fato de S ser um grupo unitário que age só na variável espacial, ψ_1 estar em função do tempo e u_0 em função do espaço, podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \|\psi_1 S(t) u_0\|_{X_{s,b}} &= \|\psi_1 S(t) u_0\|_{H^b_t H^s_{per}} \\ &= \|S(t) \psi_1 u_0\|_{H^b_t H^s_{per}} \\ &= \|\psi_1 u_0\|_{H^b_t H^s_{per}} \\ &= \|\psi_1\|_{H^b_t} \|u_0\|_{H^s_{per}}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

obtendo-se (3.36). □

No que segue usaremos a seguinte notação

$$-iS *_R f := -i\psi_T \int_0^t S(t-\gamma) f(\gamma)\, d\gamma \tag{3.38}$$

e

$$(Lf)(t) := \psi_T \int_0^t f(\gamma)\, d\gamma. \tag{3.39}$$

Proposição 3.4. *As seguintes desigualdades são equivalentes*

(a)

$$\|-iS *_R f\|_{X_{s,b}} \leq c \|f\|_{X_{s,b'}} \tag{3.40}$$

(b)

$$\|(Lf)(t)\|_{H^b_t H^s_{per}} \leq c \|f\|_{H^{b'}_t H^s_{per}}. \tag{3.41}$$

Demonstração. Vamos provar, inicialmente, que se vale (3.41) então também vale (3.40).

Seja $f \in X_{s,b}$. Da definição, $S(-t) f \in H_t^b H_{per}^s$. Sendo assim

$$\|(Lg)\|_{H_t^b H_{per}^s} \leq c \|g\|_{H_t^{b'} H_{per}^s} = c \|f\|_{X_{s,b}},$$

onde $g = S(-t) f$.

Resta provar que $\|(Lg)(t)\|_{H_t^b H_{per}^s} = \|-iS *_R f\|_{X_{s,b}}$.

$$\begin{aligned}
\|(Lg)(t)\|_{H_t^b H_{per}^s} &= \left\| \psi_T \int_0^t g(\gamma)\, d\gamma \right\|_{H_t^b H_{per}^s} \\
&= \left\| \psi_T \int_0^t S(-\gamma) f(\gamma)\, d\gamma \right\|_{H_t^b H_{per}^s} \\
&= \left\| S(-t)\, \psi_T \int_0^t S(t-\gamma) f(\gamma)\, d\gamma \right\|_{H_t^b H_{per}^s} \\
&= \left\| \psi_T \int_0^t S(t-\gamma) f(\gamma)\, d\gamma \right\|_{X_{s,b}} \\
&= \|-iS *_R f\|_{X_{s,b}}.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $g \in H_t^b H_{per}^s$ então $S(-t)[S(t) g] \in H_t^b H_{per}^s$, e pela definição de $X_{s,b}$, temos que $S(t) g \in X_{s,b}$. Daí

$$\|-iS *_R f\|_{X_{s,b}} \leq c \|f\|_{X_{s,b'}} = c \|g\|_{H_t^{b'} H_{per}^s},$$

onde $f = S(t) g$.

Resta provar que $\|-iS*_R f\|_{X_{s,b}} = \|(Lg)(t)\|_{H_t^b H_{per}^s}$.

$$
\begin{aligned}
\|-iS*_R f\|_{X_{s,b}} &= \left\| -i\psi_T \int_0^t S(t-\gamma\ ) f(\gamma\ ) \, d\gamma \right\|_{X_{s,b}} \\
&= \left\| -i\psi_T \int_0^t S(t) \, g(\gamma) \, d\gamma \right\|_{X_{s,b}} \\
&= \left\| S(t) \left[-i\psi_T \int_0^t g(\gamma) \, d\gamma \ \right] \right\|_{X_{s,b}} \\
&= \left\| -i\psi_T \int_0^t g(\gamma\ ) \, d\gamma \right\|_{H_t^b H_{per}^s} \\
&= \left\| \psi_T \int_0^t g(\gamma) \, d\gamma \right\|_{H_t^b H_{per}^s} \\
&= \|(Lg)(t)\|_{H_t^b H_{per}^s} .
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.2. *Sejam* $\widetilde{b} \leq 0 \leq b \leq \widetilde{b} + 1$ *e* $T \leq 1$. *Então*

$$
\|Lf\|_{H_t^b} \leq c \left\{ T^{1-b+\widetilde{b}} \|f\|_{H_t^{\widetilde{b}}} + T^{1/2-b} \left\| \langle \tau \rangle^{-1} \mathcal{X}_{\{|\tau| T \geq 1\}} \widehat{f} \right\|_{L_\tau^1} \right\} \tag{3.42}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\psi_T (S *_R f)\|_{X_{s,b}} \leq \ & c\sqrt{2} \left\{ T^{1/2-b} \left\| \langle n \rangle^{2s} \langle \tau + n^2 + \theta \rangle^{-1} \widehat{f} \right\|_{\ell_n^2 L_\tau^1} \right\} \\
& + c\sqrt{2} \left\{ T^{1-b+\widetilde{b}} \|f\|_{X_{s,b}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

com c igual em (3.42) e (3.43).

Além disso, se $\widetilde{b} > -1/2$, *então*

$$
\|Lf\|_{H_t^b} \leq c T^{1-b+\widetilde{b}} \|f\|_{H_t^{\widetilde{b}}} \tag{3.44}
$$

$$
\|\psi_T (S *_R f)\|_{X_{s,b}} \leq c T^{1-b+\widetilde{b}} \|f\|_{X_{s,\widetilde{b}}} \tag{3.45}
$$

com a mesma constante c em (3.44) e (3.45).

Demonstração. Defina $J(t) = (Lf)(t)$. A transformada de Fourier de J em relação a t é dada por

$$\widehat{J}(\tau) = c\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\gamma)\,\frac{\psi_T(\tau-\gamma) - \psi_T(\tau)}{\gamma}d\gamma. \tag{3.46}$$

De fato, se $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\gamma)\,d\gamma$, das propriedades de transformada de Fourier e convolução, tem-se

$$\begin{aligned}
\widehat{J}(\tau) &= \widehat{\psi_T} * \left(\int_0^t f(\gamma)\,d\gamma\right)\widehat{}(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_t(\tau-\gamma)\,\frac{\widehat{f}(\gamma)}{i\gamma}d\gamma \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}_T(\tau-\gamma) - \psi_T(\tau)}{i\gamma}\widehat{f}(\gamma)\,d\gamma + \psi_T\int_{\mathbb{R}}\frac{\widehat{f}(\gamma)}{i\gamma}d\gamma \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\psi}_T(\tau-\gamma) - \psi_T(\tau)}{i\gamma}\widehat{f}(\gamma)\,d\gamma
\end{aligned}$$

pois, usando a fórmula de inversão temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\frac{\widehat{f}(\gamma)}{i\gamma}d\gamma &= \int_{\mathbb{R}}\widehat{g}(\gamma)\,d\gamma \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i0\gamma}\widehat{g}(\gamma)\,d\gamma = g(0) = 0.
\end{aligned}$$

Seja $A = \{\tau \in \mathbb{R}\ ;\ |\tau|\,T > 1\}$. Agora, escrevemos $f = f_+ + f_-$ com

$$\widehat{f_+}(\tau) = \widehat{f}(\tau)\,\mathcal{X}_A \quad \text{e} \quad \widehat{f_-}(\tau) = \widehat{f}(\tau)\,\mathcal{X}_{A^c}$$

e respectivamente $J = J_+ + J_-$.

Assim, a transformada de Fourier de J_- com relação a t é dada por

$$\widehat{J_-}(\tau) = c\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \widehat{f_-}(\gamma)\left(\widehat{\phi_T}\right)'(\tau-\lambda\gamma)\,d\lambda d\gamma. \tag{3.47}$$

De fato, observando-se que

$$\int_0^1 \left(\widehat{\psi_T}\right)' (\tau - \lambda\gamma\ )\, d\lambda = \frac{\widehat{\psi_T}\,(\tau-\gamma) - \psi_t\,(\tau)}{\gamma}\ ,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\widehat{J_-}\,(\tau) &= \widehat{J}\,(\tau)\, \mathcal{X}_{A^c} \\
&= 1/i \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\,(\gamma)\, \mathcal{X}_{A^c} \frac{\widehat{\psi_T}\,(\tau-\gamma) - \psi_T\,(\tau)}{\gamma} d\gamma \\
&= 1/i \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_-}\,(\gamma) \int_0^1 \left(\widehat{\psi_T}\right)' (\tau - \lambda\gamma\ )\, d\lambda d\gamma \\
&= 1/i \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \widehat{f_-}\,(\gamma) \left(\widehat{\psi_T}\right)' (\tau - \lambda\gamma\ )\, d\lambda d\gamma.
\end{aligned}$$

Agora, observe que, pelo lema 1.1, tem-se

$$\langle\tau\rangle^b \leq c\left(\langle\gamma\ \rangle^b + |\tau + \lambda\gamma\ |^b\right),$$

sempre que $|\lambda| \leq 1$, pois

$$\begin{aligned}
|\tau| &= |\tau - \lambda\gamma + \lambda\gamma| \\
&\leq |\tau - \lambda\gamma| + |\lambda\gamma| \\
&\leq |\tau - \lambda\gamma| + |\tau|\,,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
1 + |\tau| &\leq 1 + |\gamma| + |\tau - \lambda\gamma| \\
\langle\tau\rangle &\leq \langle\gamma\rangle + |\tau - \lambda\gamma|
\end{aligned}$$

e pelo lema 1.1

$$\begin{aligned}
\langle\tau\rangle^b &\leq (\langle\gamma\rangle + |\tau + \lambda\gamma|)^b \\
&\leq c\left(\langle\gamma\rangle^b + |\tau - \lambda\gamma|^b\right).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Multiplicando (3.47) por $\langle\tau\rangle^{b}$, tomando a norma L^2 e usando a desigualdade de Minkowski, vemos que

$$
\begin{aligned}
\|J_-\|_{H_t^b} &\leq c\left\|\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \langle\gamma\rangle^b\,\widehat{f}_-\left(\widehat{\psi}_T\right)'(\tau-\lambda\gamma)\,d\lambda d\gamma\right\|_{L_\tau^2} \\
&\quad +c\left\|\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 |\tau-\lambda\gamma|^b\,\widehat{f}_-\left(\widehat{\psi}_T\right)'(\tau-\lambda\gamma)\,d\lambda d\gamma\right\|_{L_\tau^2} \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \left|\langle\gamma\rangle^b\,\widehat{f}_-\right|\left\|\left(\widehat{\psi}_T\right)'(\tau-\lambda\gamma)\right\|_{L_\tau^2} d\lambda d\gamma \\
&\quad +c\int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \left|\widehat{f}_-\right|\left\||\tau-\lambda\gamma|^b\left(\widehat{\psi}_T\right)'(\tau-\lambda\gamma)\right\|_{L_\tau^2} d\lambda d\gamma \qquad (3.49)\\
&= c\left\|\left(\widehat{\psi}_T\right)'\right\|_{L_\tau^2}\int_{\mathbb{R}}\left|\langle\gamma\rangle^b\,\widehat{f}_-\right|d\gamma\int_0^1 d\lambda \\
&\quad +c\left\||\cdot|^b\left(\widehat{\psi}_T\right)'\right\|_{L_\tau^2}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}_-\right|d\gamma\int_0^1 d\lambda \\
&\leq c\left(\left\|\langle\cdot\rangle^b\,\widehat{f}_-\right\|_{L_\gamma^1}\left\|\left(\widehat{\psi}_T\right)'\right\|_{L_\tau^2}+\left\|\widehat{f}_-\right\|_{L_\gamma^1}\left\||\cdot|^b\left(\widehat{\psi}_T\right)'\right\|_{L_\tau^2}\right)
\end{aligned}
$$

Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
\widehat{\psi}_T(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\psi_T(t)\,e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\psi_1(t/T)\,e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}T\int_{\mathbb{R}}\psi_1(z)\,e^{-ikTz}dz \\
&= T\widehat{\psi_1}(kT),
\end{aligned} \qquad (3.50)
$$

e

$$
\left(\widehat{\psi}_T\right)'(k)=T^2\left(\widehat{\psi}_1\right)'(kT). \qquad (3.51)
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\widehat{\psi}_T\right)'\right\|_{L^2} &= \left\|T^2\left(\widehat{\psi}_1\right)'(\,\cdot\,T)\right\|_{L^2} \\
&= \left(\int T^4\left|\left(\widehat{\psi}_1\right)'(tT)\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= T^{3/2}\left(\int\left|\left(\widehat{\psi}_1\right)'(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= T^{3/2}\left\|\left(\widehat{\psi}_1\right)'\right\|_{L^2}
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left\||\cdot|^b\left(\widehat{\psi}_T\right)'\right\|_{L^2} &= \left\||\cdot|^b T^2\left(\widehat{\psi}_1\right)'(\,\cdot\,T)\right\|_{L^2} \\
&= \left(\int |tT|^{2b}T^{4-2b}\left|\left(\widehat{\psi}_1\right)'(tT)\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \left(T^{3-2b}\int |tT|^{2b}\left|\left(\widehat{\psi}_1\right)'(tT)\right|^2 Tdt\right)^{1/2} \\
&= T^{3/2-b}\left(\int |z|^{2b}\left|\left(\widehat{\psi}_1\right)'(z)\right|^2 dz\right)^{1/2} \\
&= T^{3/2-b}\left\||\cdot|^b\left(\psi_1\right)'\right\|_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Além disso, das propriedades do suporte de $\widehat{f}_-$, temos

$$
\langle t\rangle^b\left|\widehat{f}_-(t)\right| \leq \left\langle\frac{1}{T}\right\rangle^b\left|\widehat{f}_-(t)\right| = \frac{\langle T\rangle^b}{T^b}\left|\widehat{f}_-(t)\right| \leq \frac{\langle 2\rangle^b}{T^b}\left|\widehat{f}_-(t)\right|,
$$

portanto,

$$
\left\|\langle\,\cdot\,\rangle\widehat{f}_-\right\|_{L^1} \leq \frac{\langle 2\rangle^b}{|T|^b}\left\|\widehat{f}_-\right\|_{L^1}. \tag{3.54}
$$

De (3.49), (3.52), (3.53) e (3.54), temos

$$\begin{aligned}\|J_-\|_{H_t^b} &\leq cT^{3/2-b}\left(\langle 2\rangle^b\left\|\left(\widehat{\phi}\right)_1'\right\|_{L_\tau^2}+\left\||\tau|^b\left(\widehat{\phi}\right)_1'\right\|_{L_\tau^2}\right)\left\|\widehat{f}_-\right\|_{L_\tau^1} \\ &\leq cT^{3/2-b}\left(\left\|\left(\widehat{\phi}\right)_1'\right\|_{L_\tau^2}+\left\||\tau|^b\left(\widehat{\phi}\right)_1'\right\|_{L_\tau^2}\right)\left\|\widehat{f}_-\right\|_{L_\tau^1}.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Provaremos, ainda, que

$$\left\|\widehat{f}_-\right\|_{L_\tau^1}\leq cT^{\widetilde{b}-1/2}\|f_-\|_{H_t^{\widetilde{b}}}. \tag{3.56}$$

De fato, por Hölder, as propriedades do suporte de f_- e pelos dados na hipótese, temos

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{f}_-\right\|_{L^1} &= \left\|\frac{1}{\langle\gamma\rangle^{\widetilde{b}/2}}\langle\gamma\rangle^{\widetilde{b}/2}\widehat{f}_-\right\|_{L_\gamma^1} \\ &\leq \left\|\langle\gamma\rangle^{-\widetilde{b}/2}\right\|_{L_\gamma^2}\left\|\langle\gamma\rangle^{\widetilde{b}/2}\widehat{f}_-\right\|_{L_\gamma^2} \\ &\leq \left(1+T^{-2}\right)^{-\widetilde{b}/2}\left\|\widehat{f}_-\right\|_{H^{\widetilde{b}}} \\ &= \left(1+T^2\right)^{-\widetilde{b}/2}T^{\widetilde{b}}\left\|\widehat{f}_-\right\|_{H^{\widetilde{b}}} \\ &\leq \left(1+T^2\right)^{1/2}T^{\widetilde{b}}\left\|\widehat{f}_-\right\|_{H^{\widetilde{b}}} \\ &\leq \left(2T^{-1}\right)^{1/2}T^{\widetilde{b}}\left\|\widehat{f}_-\right\|_{H^{\widetilde{b}}} \\ &= cT^{\widetilde{b}-1/2}\left\|\widehat{f}_-\right\|_{H^{\widetilde{b}}}\end{aligned} \tag{3.57}$$

Combinando (3.55) e (3.56), teremos

$$\|J_-\|_{H_t^b}\leq cT^{1-b+\widetilde{b}}\|f_-\|_{H_t^{\widetilde{b}}} \tag{3.58}$$

para qualquer $\widetilde{b}<1/2$ e, em particular, para qualquer $\widetilde{b}\leq 0$.

Agora estimaremos J_+. É fácil ver que

$$\widehat{J}_+(\tau)=c\left((\,\cdot\,)^{-1}\widehat{f}_+\right)*\widehat{\psi}_T(\tau)+c\widehat{\psi}_T(\tau)\int_{\mathbb{R}}\gamma^{-1}\widehat{f}_+(\gamma)\,d\gamma. \tag{3.59}$$

Assim, escreva $J_+ = J_1 + J_2$ tais que

$$\widehat{J_1}(\tau) = c\left((\,\cdot\,)^{-1}\widehat{f_+}\right) * \widehat{\psi}_T(\tau) \quad \text{e} \quad \widehat{J_2}(\tau) = c\widehat{\psi}_T(\tau)\int_{\mathbb{R}} \gamma^{-1}\widehat{f_+}(\gamma)\,d\gamma.$$

Começamos a estimar $\widehat{J_1}$. Pela desigualdade de Minkowski e por (3.48) com $\lambda = 1$, vemos que

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{H^b} &= \left\|\langle\tau\rangle^b\widehat{J_1}(\tau)\right\|_{L^2_\tau} \\
&= c\left\|\langle\tau\rangle^b\left((\,\cdot\,)^{-1}\widehat{f_+}\right) * \widehat{\phi}_T(\tau)\right\|_{L^2_\tau} \\
&= c\left\|\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^b(\tau-\gamma)^{-1}\widehat{f_+}(\tau-\gamma)\widehat{\psi}_T(\gamma)\,d\gamma\right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq c\left\|\int_{\mathbb{R}}\left(\langle\tau-\gamma\rangle^b + |\gamma|^b\right)(\tau-\gamma)^{-1}\widehat{f_+}(\tau-\gamma)\widehat{\psi}_T(\gamma)\,d\gamma\right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq c\left\|\int_{\mathbb{R}}\langle\tau-\gamma\rangle^b(\tau-\gamma)^{-1}\widehat{f_+}(\tau-\gamma)\widehat{\psi}_T(\gamma)\,d\gamma\right\|_{L^2_\tau} \\
&\qquad +c\left\|\int_{\mathbb{R}}|\gamma|^b(\tau-\gamma)^{-1}\widehat{f_+}(\tau-\gamma)\widehat{\psi}_T(\gamma)\,d\gamma\right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}}\left\|\langle\tau-\gamma\rangle^b(\tau-\gamma)^{-1}\widehat{f_+}(\tau-\gamma)\right\|_{L^2_\tau}\left|\widehat{\psi}_T(\gamma)\right|d\gamma \\
&\qquad +c\int_{\mathbb{R}}\left\|(\tau-\gamma)^{-1}\widehat{f_+}(\tau-\gamma)\right\|_{L^2_\tau}\left||\gamma|^b\widehat{\psi}_T(\gamma)\right|d\gamma \\
&= c\left\|\langle\,\cdot\,\rangle^b(\,\cdot\,)^{-1}\widehat{f_+}\right\|_{L^2}\left\|\widehat{\psi}_T\right\|_{L^1} + \left\|(\,\cdot\,)^{-1}\widehat{f_+}\right\|_{L^2}\left\||\,\cdot\,|^b\widehat{\psi}_T\right\|_{L^1}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{\psi}_T(\tau)\right\|_{L^2_\tau} &= \left\|T\widehat{\psi}_1(\tau T)\right\|_{L^1_\tau} \\
&= \int T\left|\widehat{\psi}_1(\tau T)\right|d\tau \\
&= \int\left|\widehat{\psi}_1(z)\right|dz \\
&= \left\|\widehat{\psi}_1\right\|_{L^1},
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}\left\| |\tau|^{b}\, \widehat{\psi}_{T}(\tau) \right\|_{L^{1}_{\tau}} &= \left\| |\tau|^{b}\, T \widehat{\psi}_{1}(\tau T) \right\|_{L^{1}_{\tau}} \\ &= \int T\, |\tau|^{b} \left| \widehat{\psi}_{1}(\tau T) \right| d\tau \\ &= \int T^{-b}\, |z|^{b} \left| \widehat{\psi}_{1}(z) \right| dz \\ &= T^{-b} \left\| |\cdot|^{b}\, \psi_{1} \right\|_{L^{1}}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

com argumentos semelhantes aos usados em (3.57), temos

$$\begin{aligned}\left\| (\,\cdot\,)^{-1}\, \widehat{f}_{+} \right\|_{L^{2}} &= \left\| \tau^{-1} \langle\tau\rangle^{-\widetilde{b}} \langle\tau\rangle^{\widetilde{b}}\, \widehat{f}_{+} \right\|_{L^{2}_{\tau}} \\ &\leq \left\| \tau^{-1} \langle\tau\rangle^{-\widetilde{b}} \right\|_{L^{2}_{\tau}} \left\| \langle\tau\rangle^{\widetilde{b}}\, \widehat{f}_{+}(\tau) \right\|_{L^{2}_{\tau}} \\ &\leq \left\| \tau^{-1} \langle\tau\rangle^{-\widetilde{b}} \right\|_{L^{2}_{\tau}} \left\| f_{+} \right\|_{H^{\widetilde{b}}} \\ &\leq 2^{-\widetilde{b}+b} T^{-\left(1+\widetilde{b}\right)} \left\| f_{+} \right\|_{H^{\widetilde{b}}}, \end{aligned} \tag{3.63}$$

e, com o mesmo argumento usado em (3.63), segue que

$$\begin{aligned}\left\| \tau^{-1} \langle\tau\rangle^{\widetilde{b}}\, \widehat{f}_{+}(\tau) \right\|_{L^{2}_{\tau}} &\leq \left\| \tau^{-1} \langle\tau\rangle^{-\widetilde{b}+b} \right\|_{L^{2}_{\tau}} \left\| f_{+} \right\|_{H^{\widetilde{b}}} \\ &\leq 2^{-\widetilde{b}+b} T^{-\left(1-b+\widetilde{b}\right)} \left\| f_{+} \right\|_{H^{\widetilde{b}}}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

De (3.60), (3.61), (3.62), (3.63) e (3.64), vemos

$$\left\| J_{1} \right\|_{H^{b}} \leq c T^{1-b+\widetilde{b}} \left\| f \right\|_{H^{\widetilde{b}}}, \tag{3.65}$$

para todo $\widetilde{b} \geq b-1$.

Finalmente teremos que

$$
\begin{aligned}
\|J_2\|_{H^b} &= \left\| \langle \,\cdot\, \rangle \widehat{J_2} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \langle \tau \rangle^b c \widehat{\psi}_T(\tau) \int \gamma^{-1} \widehat{f}_+(\gamma)\, d\gamma \right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq c \left| \int \gamma^{-1} \widehat{f}_+(\gamma)\, d\gamma \right| \left\| \langle \tau \rangle^b \widehat{\psi}_T(\tau) \right\|_{L^2_\tau} \\
&\leq c \left\| (\,\cdot\,)^{-1} \widehat{f}_+ \right\|_{L^1} \left\| \langle \tau \rangle^b T \widehat{\psi}_1(\tau T) \right\|_{L^2_\tau} \\
&= c \left\| (\,\cdot\,)^{-1} \widehat{f}_+ \right\|_{L^1} \left(\int \left| \langle \tau \rangle^b T \widehat{\psi}_1(\tau T) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq c \left\| (\,\cdot\,)^{-1} \widehat{f}_+ \right\|_{L^1} \left(\int \left| \langle \tau T \rangle^b T^{1-b} \widehat{\psi}_1(\tau T) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&= c T^{1/2-b} \left\| (\,\cdot\,)^{-1} \widehat{f}_+ \right\|_{L^1} \left\| \widehat{\psi}_1 \right\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.66}
$$

Para provar (3.44) observamos que para $\widetilde{b} > -1/2$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e propriedades do suporte de $\widehat{f}_+$ implicam que

$$
\left\| \tau^{-1} \widehat{f}_+ \right\|_{L^1_\tau} \leq c T^{1/2+\widetilde{b}} \|f\|_{H_t^{\widetilde{b}}}. \tag{3.67}
$$

Esta última desigualdade junto com (3.58), (3.66) e (3.66) produzem a desigualdade (3.44).

As desigualdades (3.43) e (3.45) são obtidas aplicando (3.42), (3.44) e a proposição 3.4 para n fixo, multiplicando $\langle n \rangle^{2s}$ e tomando a norma ℓ_n^2.

□

Como discutido anteriormente, quando $b > 1/2$ é claro que

$$
X_{s,b} \hookrightarrow C(\mathbb{R}; H^s)
$$

(pela identidade (3.34) e o lema de Sobolev). Se $b \leq 1/2$ isto não é certo e teremos que encontrar um substituto para este resultado. Aqui aparece o espaço X_s definido por via

$$
\|f\|_{X_s} = \left\| \langle n \rangle^s \left\langle \tau + n^2 \right\rangle^{-1} \widehat{f}(\tau) \right\|_{\ell_n^2 L_\tau^1}. \tag{3.68}
$$

Lema 3.3. *Seja $f \in X_s$. Então $S *_R f \in C(\mathbb{R}; H^s)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor $s = 0$. Como $S(\,\cdot\,)$ é um grupo unitário fortemente contínuo em ℓ^2, é suficiente provar a continuidade em ℓ^2 de $S^{-1}S *_R f$ para $f \in X_0$, que é equivalente a continuidade em L_t^2 de $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$ para $\langle \tau \rangle \widehat{f}(n,\tau) \in \ell_n^2 L_\tau^1$.

Usando a transformada de Fourier podemos escrever

$$F(x,t) = \int \left(e^{it\tau} - 1\right) \tau^{-1} \widehat{f}(x,\tau)\,d\tau. \tag{3.69}$$

Observe que, pelo Teorema do Valor Médio, considerando a função $t \mapsto e^{it\tau}$, temos

$$\left|\left(e^{it\tau} - e^{ir\tau}\right)\tau^{-1}\right| \leq C_1 \left|it\tau - ir\tau\right| \tau^{-1} = C_1 \left|t - r\right| \tag{3.70}$$

e,

$$\left|\left(e^{it\tau} - e^{ir\tau}\right)\tau^{-1}\right| \leq 2\tau^{-1}. \tag{3.71}$$

Como queremos demonstrar a continuidade de (3.69) em L_t^2, suporemos $|t - r| \leq 1$ em (3.70).

Note que, para $|\tau| \geq 1$ segue que

$$|\tau|^{-1} \leq 2 \langle \tau \rangle^{-1},$$

donde, de (3.71), vemos

$$\left|\left(e^{it\tau} - e^{ir\tau}\right)\tau^{-1}\right| \leq 2 \langle \tau \rangle^{-1} \tag{3.72}$$

e para $|\tau| < 1$, temos que

$$1 \leq 2 \langle \tau \rangle^{-1},$$

donde, de (3.70), vemos

$$\left|\left(e^{it\tau} - e^{ir\tau}\right)\tau^{-1}\right| \leq C_1 \left|t - r\right| \leq C_2 \langle \tau \rangle^{-1}. \tag{3.73}$$

Portanto, de (3.70), (3.72) e (3.73), segue que

$$
\begin{aligned}
&\|F(n,t)-F(n,r)\|_{\ell_n^2}^2 \\
&\quad = c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\left(e^{it\tau}-e^{ir\tau}\right)\tau^{-1}\widehat{f}(\tau)\,d\tau\overline{\int\left(e^{it\widetilde{\tau}}-e^{ir\widetilde{\tau}}\right)\widetilde{\tau}^{-1}\widehat{f}(\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}} \\
&\quad = c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\left(e^{it\tau}-e^{ir\tau}\right)\tau^{-1}\widehat{f}(\tau)\left(e^{-it\widetilde{\tau}}-e^{-ir\widetilde{\tau}}\right)\widetilde{\tau}^{-1}\overline{\widehat{f}(\widetilde{\tau})}d\tau d\widetilde{\tau} \\
&\quad \leq c\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int\min\left\{|t-r|,\langle\tau\rangle^{-1}\right\}\min\left\{|t-r|,\langle\widetilde{\tau}\rangle^{-1}\right\}\widehat{f}(\tau)\,\overline{\widehat{f}(\widetilde{\tau})}d\tau d\widetilde{\tau} \\
&\quad \leq c\left\|\langle\tau\rangle^{-1}\widehat{f}(\tau)\right\|_{\ell_n^2L_\tau^1}^2.
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

O integrando na penúltima desigualdade em (3.74) tende a zero pontualmente em n, τ, $\widetilde{\tau}$ quando $|t-r|\to 0$ e é limitado uniformemente em $|t-r|$ pela expressão obtida depois de retirar $|t-r|$ nos mínimos, a qual é integrável como mostra a última desigualdade em (3.74). Portanto, pelo teorema da convergência dominada segue-se que $\|F(n,t)-F(n,r)\|_{\ell_n^2}$ tende a zero quando $|t-r|\to 0$. $\square$

O seguinte resultado nos permite extrair regularidade adicional.

Lema 3.4. *Sejam ψ, $\psi_T\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, para $0<T\leq 1$, como em (3.32). Então, se $1/2>b>\widetilde{b}\geq 0$ ou $0\geq b>\widetilde{b}>-1/2$, a seguinte desigualdade é satisfeita*

$$
\|\psi_T f\|_{X_{s,\widetilde{b}}}\leq cT^{b-\widetilde{b}}\|f\|_{X_{s,b}}. \tag{3.75}
$$

Demonstração. Primeiro suporemos $1/2>b>\widetilde{b}\geq 0$.

Sejam p, $\widetilde{p}$, q, $\widetilde{q}>0$ tais que

(a) $b=1/2-1/\widetilde{q}$

(b) $b-\widetilde{b}=1/2-1/\widetilde{p}$

(c) $1/p+1/\widetilde{p}=1/q+1/\widetilde{q}=1/2$

Então para $g \in H_t^b$, pelo teorema de Plancherel, Hölder generalizado e propriedades da transformada de Fourier, temos

$$\begin{aligned}
\|\psi_T g\|_{H_t^{\tilde{b}}} &= \left\| \langle t \rangle^{\tilde{b}/2} \widehat{\psi_T g} \right\|_{L_t^2} \\
&\leq \left\| \widehat{\psi_T g} \right\|_{L^2} + \left\| |t|^{\tilde{b}} \widehat{\psi_T g} \right\|_{L_t^2} \\
&= \|\psi_T g\|_{L^2} + \left\| (it)^{\tilde{b}} \widehat{\psi_T g} \right\|_{L_t^2} \\
&\leq \|\psi_T\|_{L^p} \|g\|_{L^{\tilde{p}}} + \left\| \widehat{D^{\tilde{b}} (\psi_T g)} \right\|_{L^2} \\
&= \|\psi_T\|_{L^p} \|g\|_{L^{\tilde{p}}} + \left\| D^{\tilde{b}} (\psi_T g) \right\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Sejam $I_1 = \|\psi_T\|_{L^p} \|g\|_{L^{\tilde{p}}}$ e $I_2 = \left\| D^{\tilde{b}} (\psi_T g) \right\|_{L^2}$. Pela regra de Leibniz e por $b \geq \widetilde{b}$, temos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \|\psi_T\|_{L^p} \|g\|_{L^{\tilde{p}}} \\
&\leq c \|\psi_T\|_{L^p} \|g\|_{H^{b-\tilde{b}}} \\
&\leq c \|\psi_T\|_{L^p} \|g\|_{H^b}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Pelas desigualdades de Minkowski, de Hölder generalizada, regra de Leibniz, para $f = \psi_T$, $\alpha = \alpha_2 = \widetilde{b}$ e $\alpha_1 = 0$, e pelo teorema 2.15, temos que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left\| D^{\tilde{b}} (\psi_T g) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| D^{\tilde{b}} (\psi_T g) - g D^{\tilde{b}} f - f D^{\tilde{b}} g \right\|_{L^2} + \left\| g D^{\tilde{b}} f + f D^{\tilde{b}} g \right\|_{L^2} \\
&\leq C \|\psi_T\|_{L^p} \left\| D^{\tilde{b}} g \right\|_{L^{\tilde{p}}} + \|g\|_{L^{\tilde{q}}} \left\| D^{\tilde{b}} \psi_T \right\|_{L^q} + \|\psi_T\|_{L^p} \left\| D^{\tilde{b}} g \right\|_{L^{\tilde{p}}} \\
&\leq C \left(\|\psi_T\|_{L^p} \left\| \left[\left(|\tau|^2 \right)^{\tilde{b}/2} \widehat{g} \right]^{\vee} \right\|_{L_t^{\tilde{p}}} + \|g\|_{H^b} \left\| \left[\left(|\tau|^2 \right)^{\tilde{b}/2} \widehat{\psi_T} \right]^{\vee} \right\|_{L_t^q} \right) \\
&\leq C \left(\|\psi_T\|_{L^p} \left\| \left[\left(|\tau|^2 \right)^{\tilde{b}/2} \widehat{g} \right]^{\vee} \right\|_{H_t^{b-\tilde{b}}} + \|\psi_T\|_{H^{\tilde{b},q}} \|g\|_{H^b} \right) \\
&\leq C \left(\|\psi_T\|_{L^p} \left\| \langle t \rangle^{(b-\tilde{b})/2} \left(|t|^2 \right)^{\tilde{b}/2} \widehat{g} \right\|_{L_t^2} + \|\psi_T\|_{H^{\tilde{b},q}} \|g\|_{H^b} \right) \\
&\leq C \left(\|\psi_T\|_{L^p} + \|\psi_T\|_{H^{\tilde{b},q}} \right) \|g\|_{H^b}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

De (3.76), (3.77), (3.78) e das propriedades do suporte de ψ_T, temos

$$\begin{aligned} \|\psi_T g\|_{H^{\tilde{b}}} &\leq C\left(\|\psi_T\|_{L^p} + \|\psi_T\|_{H^{\tilde{b},q}}\right)\|g\|_{H^b} \\ &\leq C\left(\|\psi_1(t/T)\|_{L^p_t} + \left\|\langle t\rangle^{\tilde{b}/2}\widehat{\psi_1}(t/T)\right\|_{L^q_t}\right)\|g\|_{H^b} \\ &\leq C\left(T^{1/p}\|\psi_1\|_{L^p} + T^{\tilde{b}+1/q}\|\psi_1\|_{H^{\tilde{b},q}}\right)\|g\|_{H^b} \\ &\leq CT^{b-\tilde{b}}\|g\|_{H^b}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Para $f \in X_{s,b}$ segue-se, de (3.79), que

$$\begin{aligned} \|\psi_T f\|_{X_{s,\tilde{b}}} &= \|S(\,\cdot\,)\psi_T f\|_{H^{\tilde{b}}H^s_{per}} \\ &= \|\psi_T S(\,\cdot\,) f\|_{H^{\tilde{b}}H^s_{per}} \\ &\leq cT^{b-\tilde{b}}\|S(\,\cdot\,)f\|_{H^b H^s_{per}} \\ &= cT^{b-\tilde{b}}\|f\|_{X_{s,b}}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Intercambiando b e $\widetilde{b}$ o caso $0 \geq b > \widetilde{b} > -1/2$, usando dualidade, desigualdade de Cauchy-Schwarz e (3.79) segue-se que

$$\begin{aligned} \|\psi_T g\|_{H^{\tilde{b}}} &= \sup_{\|h\|_{H^{-\tilde{b}}}=1} \langle \psi_T g, h\rangle \\ &\leq \sup_{\|h\|_{H^{-\tilde{b}}}=1} \langle g, \psi_T h\rangle \\ &\leq \sup_{\|h\|_{H^{-\tilde{b}}}=1} \|g\|_{H^{\tilde{b}}}\|\psi_T h\|_{H^{-\tilde{b}}} \\ &\leq T^{b-\tilde{b}}\|g\|_{H^b}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

De (3.79), (3.80) e (3.81) concluímos o resultado. □

Proposição 3.5. (Desigualdade de Strichartz periódica)
Temos

$$\|u\|_{L^4_t L^4_x} \leq C\|u\|_{X_{0,3/8}} \tag{3.82}$$

para qualquer $u \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Escrevemos $u = \sum_M u_M$, onde $M \in \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$, e $u_M =$

$[\widehat{u}\mathcal{X}_{A_M}]\,\check{}$, onde

$$A_M = \left\{(k,\tau) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}; M < \left\langle \tau - k^2 \right\rangle \le 2M\right\}$$

.

Observe que, pelo Teorema de Plancherel, a dualidade e o suporte de $\widehat{u_M}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_M M^{3/4}\left\|u_M\right\|^2_{L^2_t L^2_x} &= \sum_M \left\|M^{3/8}\widehat{u_M}\right\|^2_{L^2_\tau \ell^2_k} \\
&\le \sum_M \left\|\left\langle \tau - k^2\right\rangle^{3/8}\widehat{u_M}\right\|^2_{L^2_\tau \ell^2_k} \\
&= \sum_M \left\|u_M\right\|^2_{X_{0,3/8}} \\
&= \left\|u\right\|^2_{X_{0,3/8}}.
\end{aligned}$$

Além disso, obeserve que

$$\begin{aligned}
\left\|u\right\|^2_{L^4_t L^4_x} &= \left[\int \left(|u|^2\right)^2 dxdt\right]^{1/2} \\
&= \left\|u\overline{u}\right\|_{L^2_x L^2_t} \\
&= \left\|\sum_M u_M \sum_N \overline{u}_N\right\|_{L^2_t L^2_x} \\
&= \left\|\sum_N \sum_{M\le N} u_M\overline{u}_N\right\|_{L^2_t L^2_x} \\
&\le \sum_N \sum_{M\le N} \left\|u_M\overline{u}_N\right\|_{L^2_t L^2_x}.
\end{aligned}$$

Assim, se provarmos que

$$\sum_N \sum_{M\le N} \left\|u_M\overline{u}_N\right\|_{L^2_t L^2_x} \le C\sum_M M^{3/4}\left\|u_M\right\|_{L^2_t L^2_x}, \tag{3.83}$$

concluímos que vale (3.82).

Como

$$\sum_N \sum_M \|u_M u_N\|_{L_t^2 L_x^2} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_M \|u_M u_{2^m M}\|_{L_t^2 L_x^2}, \tag{3.84}$$

se provarmos que existe $\varepsilon > 0$ tal que dado $m \geq 0$ tem-se

$$\sum_M \|u_M u_{2^m M}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C 2^{-\varepsilon m} \sum_M M^{3/4} \|u_M\|^2_{L_t^2 L_x^2}, \tag{3.85}$$

de (3.84) e (3.85), segue-se que

$$\begin{aligned} \sum_N \sum_{M \leq N} \|u_M \overline{u}_N\|_{L_t^2 L_x^2} &= \sum_m \sum_M \|u_M \overline{u}_{2^m M}\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &\leq \sum_m c 2^{-\varepsilon m} \sum_M M^{3/4} \|u_M\|^2_{L_t^2 L_2^2} \\ &\leq c \sum_M M^{3/4} \|u_M\|^2_{L_t^2 L_x^2}, \end{aligned}$$

pois $\sum_m c2^{-\varepsilon m}$ também converge. Assim, basta provarmos (3.85) para concluirmos (3.83).

Por Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned} &\sum_M 2^{-\varepsilon m} M^{3/8} \|u_M\|_{L_t^2 L_x^2} (2^m M)^{3/8} \|u_{2^m M}\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &\quad \leq 2^{-\varepsilon m} \left(\textstyle\sum_M M^{3/4} \|u_M\|^2_{L_t^2 L_x^2} \right)^{1/2} \left(\textstyle\sum_M (2^m M)^{3/4} \|u_{2^m M}\|^2_{L_t^2 L_x^2} \right)^{1/2} \\ &\quad \leq 2^{-\varepsilon m} \sum_M M^{3/4} \|u_M\|^2_{L_t^2 L_x^2}. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Assim, se provarmos que

$$\|u_M u_{2^m M}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C 2^{-\varepsilon m} M^{3/8} \|u_M\|_{L_t^2 L_x^2} (2^m M)^{3/8} \|u_{2^m M}\|_{L_t^2 L_x^2}, \tag{3.87}$$

de (3.86) e (3.87), concluímos (3.83).

Supondo que u_M e $u_{2^m M}$ são unitários em $L_t^2 L_x^2$, por Plancherel e Parseval, temos que

$$
\begin{aligned}
\|u_M u_{2^m M}\|_{L^2_t L^2_x} &= \|(u_M u_{2^m M})\widehat{\ }\|_{L^2_\tau \ell^2_k} \\
&= \left\|\widehat{u_M} * \widehat{u_{2^m M}}\right\|_{L^2_\tau \ell^2_k} \\
&= \left\|\sum_j \int \widehat{u_M}\left(\tau - t, k - j\right) \widehat{u_{2^m M}}\left(t, j\right) dt\right\|_{L^2_\tau \ell^2_k},
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

donde provar (3.87) reduz-se a provar que

$$
\left\|\sum_j \int \widehat{u_M}\left(k - j, \tau - t\right) \widehat{u_{2^m M}}\left(j, t\right) dt\right\|_{L^2_\tau \ell^2_k} \leq C 2^{(3/8-\varepsilon)m} M^{3/4}. \tag{3.89}
$$

Agora observe que, por Fubini e pela normalização de u_M e $u_{2^m M}$, vem

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_j \int \left|\widehat{u_M}\left(k - j, \tau - t\right)\right|^2 \left|\widehat{u_{2^m M}}\left(j, t\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}\right\|^2_{L^2_\tau \ell^2_k} \\
&= \sum_k \int \sum_j \int \left|\widehat{u_M}\left(k - j, \tau - t\right)\right|^2 \left|\widehat{u_{2^m M}}\left(j, t\right)\right|^2 dt d\tau \\
&= \sum_j \int \left(\sum_k \int \left|\widehat{u_M}\left(k - j, \tau - t\right)\right|^2 d\tau\right) \left|\widehat{u_{2^m M}}\left(j, t\right)\right|^2 dt \\
&= \sum_j \int \|\widehat{u_M}\|^2_{L^2_\tau \ell^2_k} \left|\widehat{u_{2^m M}}\left(j, t\right)\right|^2 dt \\
&= \sum_j \int \left|\widehat{u}_{2^m M}\left(j, t\right)\right| dt \\
&= \left\|\widehat{u_{2^m M}}\right\|_{L^2_t \ell^2_j} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

Aplicando Cauchy-Schwarz em $\sum_j \int \widehat{u_M}\left(\tau - t, k - j\right) \widehat{u_{2^m M}}\left(t, j\right) dt$, com respeito as funções $\mathcal{X}_E(j,t)$ e $\widehat{u_M}(\tau-t,k-j)\,\widehat{u_{2^mM}}(t,j)$, temos

$$\sum_j \int \widehat{u_M}(\tau-t,k-j)\,\widehat{u_{2^mM}}(t,j)\,dt \\ \leq \left(\sum_j \int \mathcal{X}_E(j,t)\,dt\right)^{1/2} \left(\sum_j \int \left|\widehat{u_M}(\tau-t,k-j)\,\widehat{u_{2^mM}}(t,j)\right|^2 dt\right)^{1/2}, \tag{3.91}$$

onde $E \subseteq \operatorname{supp} \widehat{u_M} \cap \operatorname{supp} \widehat{u_{2^mM}}$.

Provar (3.89), por (3.90) e (3.91), reduz-se a provar que

$$\sum_j \int dt \leq C2^{(3/4-2\varepsilon)m} M^{3/2}, \tag{3.92}$$

para todo k, τ.

É fácil ver que

$$\operatorname{supp} \widehat{u_M} = (B_{k,j,-M} \cup B_{k,j,M}) \cap \left(\bigcup_j C_j\right),$$

onde

$$B_{k,\tau,-M} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \tau-(k-x)^2-2M+1 \leq t < \tau-(k-x)^2-M+1\right\},$$

$$B_{k,\tau,M} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; \tau-(k-x)^2+M-1 < t \leq \tau-(k-x)^2+2M-1\right\},$$

$$C_j = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; x = j\right\},$$

e que

$$\operatorname{supp} \widehat{u_{2^mM}} = (D_{-2^mM} \cup D_{2^mM}) \cap \left(\bigcup_j C_j\right),$$

onde

$$D_{-2^mM} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; x^2-2^{m+1}M+1 \leq t < x^2-2^mM+1\right\},$$

$$D_{2^mM} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; x^2+2^mM-1 < t \leq x^2+2^{m+1}M-1\right\}.$$

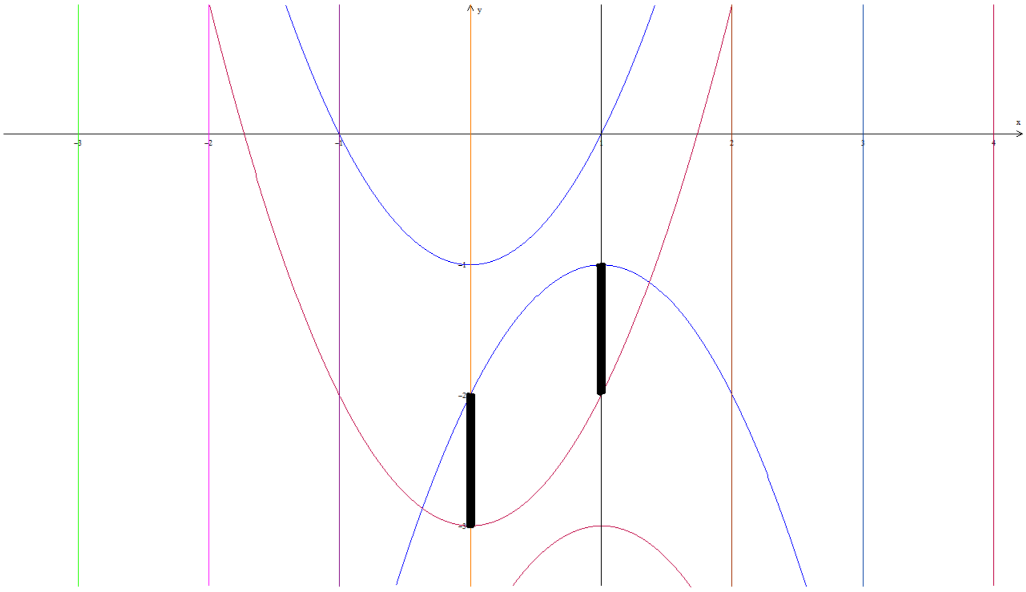

Figura 3.1: $B_{1,0,-2} \cap D_{-2} \cap \left(\bigcup_j C_j \right)$

Como para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular para $x \in \mathbb{Z}$, temos

$$\int_{B_{k,\tau,-M}} 1 dt = \int_{B_{k,\tau,M}} 1 dt = M,$$

e

$$\int_{D_{-2^m M}} 1 dt = \int_{D_{2^m M}} 1 dt = 2^m M,$$

donde,

$$\int \mathcal{X}_E (j,t)\, dt \leq M,$$

para todo $E \subseteq$ supp $\widehat{u_M}$ $\cap$ supp $\widehat{u_{2^m M}}$.

Assim, vemos que provar (3.89), por (3.92), reduz-se a provar que

$$\sum_j \mathcal{X}_E (j) \leq C 2^{(3/4 - 2\varepsilon)m} M^{1/2}, \tag{3.93}$$

onde $E \subseteq$ supp $\widehat{u_M}$ $\cap$ supp $\widehat{u_{2^m M}}$.

Observe que

$$\begin{aligned}\left\langle \tau - j^2 - (k-j)^2 \right\rangle &\leq \left\langle \tau - t - (k-j)^2 \right\rangle + \left\langle t - j^2 \right\rangle \\ &= \mathcal{O}\left(2^m M\right) + \mathcal{O}\left(M\right) \\ &= \mathcal{O}\left(2^m M\right),\end{aligned} \tag{3.94}$$

donde

$$\tau = j^2 + (k-j)^2 + \mathcal{O}\left(2^m M\right).$$

Além disso

$$\begin{aligned}(k-2j)^2 = ((k-j)-j)^2 &= j^2 + (k-j)^2 - 2j\,(k-j) \\ &= 2\left(j^2 + (k-j)^2\right) - (j + (k-j))^2 \\ &= 2\tau - k^2 + \mathcal{O}\left(2^m M\right).\end{aligned} \tag{3.95}$$

Portanto, como $(k-2j)^2$ está contido num intervalo de comprimento $\mathcal{O}\left(2^m M\right)$, então $2j-k$ está contido num intervalo I de comprimento $\mathcal{O}\left(2^{m/2} M^{1/2}\right)$. Assim

$$j \in \frac{1}{2}\left(k + I\right) = J$$

e como comprimento de J é majorado por $\mathcal{O}\left(2^{m/2} M^{1/2}\right)$, concluímos que o resultado segue tomando $\varepsilon = 1/8$ em (3.93).

□

Teorema 3.6. *O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} &= |u|^2 u \\ u\,(x,0) &= u_0\,(x) \ \in \ H^s_{per}. \end{cases} \tag{3.96}$$

é localmente bem posto para $s \in [0, 1/2]$.

Demonstração. Seja $w = |u|^2 u$.

Vamos estimar

$$(Au)\,(t) = \psi_1\,(t)\, S\,(t)\,\phi - i\psi_1\,(t) \int_0^t S\,(t-\tau)\, w\,(\tau)\, d\tau. \tag{3.97}$$

Mostraremos que (3.96) satisfaz o princípio de contração nos espaços

$X_{s,b}\left([0,\delta]\right)$, para $b \in (1/2, 5/8)$ e $\delta > 0$ pequeno suficiente.

Pelos lemas 3.1 e 3.2, temos

$$\begin{aligned}\left\|\left(Au\right)(t)\right\|_{X_{s,b}} &\leq \left\|\psi_1(t)\, S(t)\,\phi\right\|_{X_{s,b}} + \left\|\psi_1(t)\int_0^t S(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau\right\|_{X_{s,b}} \\ &\leq c\left(\|\phi\|_{H^s_{per}} + \|w\|_{X_{s,b-1}}\right),\end{aligned}$$

onde tomamos $\widetilde{b} = b - 1$.

Agora, vamos trabalhar com $\|w\|_{X_{s,b-1}}$.

Por dualidade, temos que

$$\begin{aligned}\|w\|_{X_{s,b-1}} &= \left\|\langle n\rangle^s \left\langle\lambda - n^2\right\rangle^{b-1}\widehat{w}\right\|_{\ell^2_n L^2_\lambda} \\ &= \sup_{\|c_{n,\lambda}\|_{\ell^2_n L^2_\lambda}\leq 1}\left(\langle n\rangle^s\left\langle\lambda - n^2\right\rangle^{b-1}\widehat{w}, c_{n,\lambda}\right)_{\ell^2_n L^2_\lambda} \\ &= \sup_{\|c_{n,\lambda}\|_{\ell^2_n L^2_\lambda}\leq 1}\sum_n\int c_{n,\lambda}\langle n\rangle^s\left\langle\lambda - n^2\right\rangle^{b-1}\widehat{w}d\lambda.\end{aligned}$$

Mostraremos que a fórmula integral

$$u(t) = S(t)\,\phi - i\int_0^t S(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau, \tag{3.98}$$

equivalente ao PVI (3.96), satisfaz o princípio de contração nos espaços $X_{s,b}\left([0,\delta]\right)$, para $b \in (1/2, 5/8)$ e $\delta > 0$ pequeno suficiente.

Observe que

$$\begin{aligned}(fg)\widehat{\ } &= \left(\widehat{f}\,\check{}\,\widehat{g}\,\check{}\right)\widehat{\ } \\ &= \left[\left(\widehat{f} * \widehat{g}\right)\check{}\,\right]\widehat{\ } \\ &= \widehat{f} * \widehat{g},\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
f * \widehat{\overline{g}}(x) &= \int f(x-y)\,\widehat{\overline{g}}(y)\,dy \\
&= \int f(x-y)\,\overline{\widehat{g}(-y)}dy \\
&= -\int f(x+y)\,\overline{\widehat{g}(y)}dy,
\end{aligned}
$$

em particular

$$
\begin{aligned}
\widehat{|u|^2}(n,\lambda) &= \widehat{u\overline{u}}(n,\lambda) \\
&= \widehat{u} * \widehat{\overline{u}}(n,\lambda) \\
&= \sum_{n_1} \int \widehat{u}(n-n_1,\lambda-\lambda_1)\,\widehat{\overline{u}}(n_1,\lambda_1)\,d\lambda_1 \\
&= \sum_{n_1} \int \widehat{u}(n-n_1,\lambda-\lambda_1)\,\overline{\widehat{u}(-n_1,-\lambda_1)}d\lambda_1 \\
&= -\sum_{n_1} \int \widehat{u}(n+n_1,\lambda+\lambda_1)\,\overline{\widehat{u}(n_1,\lambda_1)}d\lambda_1,
\end{aligned}
$$

portanto, temos

$$
\widehat{w}(n,\lambda) = -\sum_{n_1,n_2} \int \widehat{u}(n-n_1+n_2,\lambda-\lambda_1+\lambda_2)\,\overline{\widehat{u}(n_2,\lambda_2)}\widehat{u}(n_1,\lambda_1)\,d\lambda_1 d\lambda_2.
$$

Vamos estimar

$$
\sum_{n} \int \frac{(1+|n|)^s}{(1+|\lambda-n^2|)^{1-\widetilde{b}}}\; c_{n,\lambda}\widehat{w}(n,\lambda)\,d\lambda \tag{3.99}
$$

que é menor que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n_1,n_2,n_3} \int \frac{(1+|n|)^s}{(1+|\lambda-n^2|)^{1-\widetilde{b}}}\; &|c_{n,\lambda}|\,|\widehat{u}(n_3,\lambda_3)| \\
&\times \left|\overline{\widehat{u}(n_2,\lambda_2)}\right| |\widehat{u}(n_1,\lambda_1)|\,d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3
\end{aligned} \tag{3.100}
$$

onde $n_3 = n - n_1 + n_2$ e $\lambda_3 = \lambda - \lambda_1 + \lambda_2$.

Observe que

$$|n| \leq c \max\{|n_1|, |n_2|, |n_3|\}.$$

Assumindo $|n| \leq c|n_1|$, temos que (3.100) é limitada por

$$\sum_{n_1,n_2,n_3} \int \frac{|c_{n,\lambda}|}{(1+|\lambda-n^2|)^{1-\tilde{b}}} (1+|n_1|)^s |\widehat{u}(n_1,\lambda_1)| \times |\widehat{u}(n_2,\lambda_2)| |\widehat{u}(n_3,\lambda_3)| \, d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3. \tag{3.101}$$

Tomando uma função de corte ψ_δ, $0 \leq \psi_\delta \leq 1$, $\widehat{\psi_\delta} \geq 0$, $\psi_\delta = 1$ em $[-\delta, \delta]$, supp $\psi_\delta \subset [-2\delta, 2\delta]$ e substituindo u por $u\psi_\delta$, vemos que

$$|\widehat{u}| \leq |\widehat{u}| * \widehat{\psi_\delta} = (|\widehat{u}|\check{\ } \psi_\delta)\widehat{\ }.$$

Escrevendo f e v tais que

$$\widehat{f}(n,\lambda) = \frac{c_{n,\lambda}}{(1+|\lambda-n^2|)^{1-\tilde{b}}},$$

$$\widehat{v}(n,\lambda) = (1+|n|)^s \widehat{u}(n,\lambda),$$

definimos

$$F(x,t) = \left|\widehat{f}\right|\check{\ }(x,t), \tag{3.102}$$

$$G(x,t) = |\widehat{u}|\check{\ }(x,t), \tag{3.103}$$

$$H(x,t) = |\widehat{v}|\check{\ }(x,t). \tag{3.104}$$

Assim, temos que (3.101) é menor que

$$\sigma = \sum_{n_1,n_2,n_3} \int \widehat{F}(n,\lambda) (H\psi_\delta)\widehat{\ }(n_1,\lambda_1) (G\psi_\delta)\widehat{\ }(n_2,\lambda_2) (G\psi_\delta)\widehat{\ }(n_3,\lambda_3) \, d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3,$$

que é igual a

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{n,n_2} \int \widehat{F}(n,\lambda)\,(G\psi_\delta)\widehat{\ }(n_2,\lambda_2)\,d\lambda d\lambda_2 \\
&\qquad \times \sum_{n_1} \int (H\psi_\delta)\widehat{\ }(n_1,\lambda_1)\,(G\psi_\delta)\widehat{\ }(n+n_2-n_1,\lambda+\lambda_2-\lambda_1) \\
&= \sum_{n,n_2} \int \widehat{F}(n,\lambda)\,(G\psi_\delta)\widehat{\ }(n_2,\lambda_2)\left[HG\psi_\delta^2\right]\widehat{\ }(n+n_2,\lambda+\lambda_2)\,d\lambda d\lambda_2 \\
&= \sum_{n} \int \widehat{F}(n,\lambda) \sum_{n_2} \int (G\psi_\delta)\widehat{\ }(n_2,\lambda_2)\left[HG\psi_\delta^2\right]\widehat{\ }(n+n_2,\lambda+\lambda_2)\,d\lambda_2 d\lambda \\
&= \sum_{n} \int \widehat{F}(n,\lambda) \sum_{n_2} \int \overline{\overline{(G\psi_\delta)\widehat{\ }(n_2,\lambda_2)}}\left[HG\psi_\delta^2\right]\widehat{\ }(n+n_2,\lambda+\lambda_2)\,d\lambda_2 d\lambda \\
&= \sum_{n} \int \widehat{F}(n,\lambda) \sum_{n_2} \int \overline{(\overline{G\psi_\delta})\widehat{\ }(-n_2,-\lambda_2)}\left[HG\psi_\delta^2\right]\widehat{\ }(n-(-n_2),\lambda-(-\lambda_2))\,d\lambda_2 d\lambda \\
&= \sum_{n} \int \widehat{F}(n,\lambda)\left[-\sum_{n_2} \int \overline{(\overline{G\psi_\delta})\widehat{\ }(n_2,\lambda_2)}\left[HG\psi_\delta^2\right]\widehat{\ }(n-n_2,\lambda-\lambda_2)\,d\lambda_2\right] d\lambda \\
&= \sum_{n} \int \widehat{F}(n,\lambda)\left[HG^2\psi_\delta^3\right]\widehat{\ }(n,\lambda)\,d\lambda \\
&= \sum_{n} \int \overline{\widehat{F}(n,\lambda)}\left[HG^2\psi_\delta^3\right](n,\lambda)\,d\lambda \\
&= \sum_{n} \int \widehat{\overline{F}}(-n,-\lambda)\left[HG^2\psi_\delta^3\right](n,\lambda)\,d\lambda \\
&= \left[\overline{F}HG^2\psi_\delta^3\right]\widehat{\ }(0,0),
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de $\widehat{F}(n,\lambda) = \overline{\widehat{F}(n,\lambda)}$, por $\widehat{F}(n,\lambda)$ ser um número real.

Como

$$\left[\overline{F}HG^2\psi_\delta^3\right]\widehat{\ }(0,0) \leq \left\|FHG^2\psi_\delta^3\right\|_{L_x^1 L_t^1}$$

que, pela desigualdade de Hölder, é menor que

$$\|G\|_{L_x^4 L_t^4}^2 \|H\|_{L_x^4 L_t^4} \|F\psi_\delta\|_{L_x^4 L_t^4}, \tag{3.105}$$

concluímos que (3.101) é menor que (3.105).

Pela desigualdade periódica de Strichartz, temos que

$$\|G\|_{L_x^4 L_t^4} \leq c \|G\|_{X_{0,3/8}} = c \|u\|_{X_{0,3/8}}, \tag{3.106}$$

e

$$\|H\|_{L_x^4 L_t^4} \leq c \|H\|_{X_{0,3/8}} = c \|u\|_{X_{s,3/8}}, \tag{3.107}$$

que decorrem imediatamente da definição de G e H.

Como $\widetilde{b} \in (1/2, 5/8)$ temos que $1 - \widetilde{b} \in (3/8, 1/2)$, e pela desigualdade de Strichartz periódica e o lema 3.4, temos que

$$\begin{aligned}
\|F\psi_\delta\|_{L_x^4 L_t^4} &\leq c \|F\psi_\delta\|_{X_{0,3/8}} \\
&\leq c\delta^{5/8-\widetilde{b}} \|F\|_{X_{0,1-\widetilde{b}}} \\
&\leq c\delta^{5/8-\widetilde{b}},
\end{aligned} \tag{3.108}$$

pois

$$\begin{aligned}
\|F\|_{X_{0,1-\widetilde{b}}} &\leq \left\| \left\langle \tau - n^2 \right\rangle^{1-\widetilde{b}} \widehat{F} \right\|_{L_\tau^2 \ell_n^2} \\
&= \left\| \left\langle \tau - n^2 \right\rangle^{1-\widetilde{b}} \widehat{f} \right\|_{L_\tau^2 \ell_n^2} \\
&= \|c_{n,\tau}\|_{L_\tau^2 \ell_n^2} \leq 1.
\end{aligned}$$

Por (3.106), (3.107) e (3.108) temos que (3.101) é menor que

$$\|w\|_{X_{s,b}} \leq c\delta^{5/8-\widetilde{b}} \|u\|_{X_{0,3/8}}^2 \|u\|_{X_{s,3/8}} \leq c\delta^{5/8-\widetilde{b}} \|u\|_{X_{s,3/8}}^3. \tag{3.109}$$

Assim, temos

$$\|(Au)(t)\|_{X_{s,b}} \leq c \left(\|\phi\|_{H_{per}^s} + \delta^{5/8-b} \|u\|_{X_{s,b}}^3 \right),$$

e para δ suficientemente pequeno, dependendo de $\|\phi\|_{H_{per}^s}$, T mapeará uma bola no espaço $X_{s,b}$ nele mesmo.

De fato, dada uma bola $B_\alpha = \left\{ u \in X_{s,b}; \|u\|_{X_{s,b}} \leq \alpha \right\}$, com $\alpha = 2c \|\phi\|_{H_{per}^s}$, é fácil ver que $Au \in B_\alpha$ se $\delta \leq \left(\frac{1}{8c^2 \|\phi\|^2_{H^s_{per}}} \right)^{\frac{1}{5/8-b}}$. $\square$

Observação 3.2. *Note que este método serve não só para $0 \leq s \leq 1/2$, mas para todo $s \geq 0$.*

3.2.3 Caso $s < 0$

Teorema 3.7. *Seja $s < 0$. Então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} &= |u|^2 u \\ u(x,0) &= u_0(x) \in H^s_{per}. \end{cases} \tag{3.110}$$

não é localmente bem posto para dados em H^s_{per}.

Demonstração. Vamos provar por redução ao absurdo.

Dado $n \in \mathbb{N}$, observe que

$$u_n(x,t) = Ce^{-it\left(n^2+C^2\right)} e^{inx},$$

onde $C \in \mathbb{R}$ será determinado mais adiante, é solução do PVI

$$\begin{cases} iu_t + \partial_x^2 u &= |u|^2 u \\ u(x,0) &= Ce^{inx}. \end{cases} \tag{3.111}$$

Fixe $k \in (0,1)$ e para cada $n \in \mathbb{Z}$, tome $C = kn^{-s}$. Seja k_n uma sequência, que especificaremos depois, que converge para k. Definamos

$$u_{k,n} := kn^{-s} e^{-it\left(n^2+k^2n^{-2s}\right)} e^{inx},$$

e

$$r_n(x,t) := u_{k,n}(x,t) - u_{k_n,n}(x,t).$$

Note que

$$\begin{aligned} r_n(x,t) &= kn^{-s}e^{inx} - k_n n^{-s} e^{inx} \\ &= (k - k_n)\, n^{-s} e^{inx}, \end{aligned} \tag{3.112}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\|r_n(\,\cdot\,,0)\|_{H^s_{per}} &= \left\|(k-k_n)\, n^{-s} e^{inx}\right\|_{H^s_{per}} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(1+|m|^2\right)^s \left|(k-k_n)\, n^{-s}\widehat{e^{in}}\,(m)\right|^2 \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(1+|m|^2\right)^s \left|(k-k_n)\, n^{-s}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx\right|^2 \\
&= \left(1+|n|^2\right)^s \left|(k-k_n)\, n^{-s}\right|^2 \\
&= \left(\frac{1+|n|^2}{|n|^2}\right)^s (k-k_n)^2 \\
&\leq (k-k_n)^2\,.
\end{aligned}$$

Assim, quando $n\to\infty$, temos que $\|r_n(\,\cdot\,,0)\|_{H^s_{per}}\to 0$.

Agora, dado $t>0$ temos

$$\begin{aligned}
r_n(x,t) &= kn^{-s}e^{-it\left(n^2+k^2n^{-2s}\right)}e^{inx} \\
&\quad - k_n n^{-s}e^{-it\left(n^2+k_n^2n^{-2s}\right)}e^{inx} \\
&= \left(ke^{-itk^2n^{-2s}} - k_n e^{-itk_n^2n^{-2s}}\right) n^{-s}e^{-itn^2}e^{inx}.
\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\|r_n(\,\cdot\,,t)\|_{H^s_{per}} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(1+|m|^2\right)^s \left|\left(ke^{-itk^2n^{-2s}} - k_n e^{-itk_n^2n^{-2s}}\right) n^{-s}e^{-itn^2}\widehat{e^{in}}\,(m)\right| \\
&= \left(1+|n|^2\right)^s |n|^{-2s}\left|ke^{-itk^2n^{-2s}} - k_n e^{-itk_n^2n^{-2s}}\right|^2 \\
&= \left(\tfrac{1+\left|n^2\right|}{|n|^2}\right)^s \Big(\left(k\cos\left(-tk^2n^{-2s}\right) - k_n\cos\left(-tk^2n^{-2s}\right)\right)^2 \\
&\qquad + \left(k\mathrm{sen}\left(-tk^2n^{-2s}\right) - k_n\mathrm{sen}\left(-tk^2n^{-2s}\right)\right)^2\Big) \\
&= \left(\tfrac{1+\left|n^2\right|}{|n|^2}\right)^s \left(k^2+k_n^2-2kk_n cos\left(-tn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)\right)\right) \\
&\geq 2^s\left(2kk_n - 2kk_n cos\left(-tn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

pois

$$a^2+b^2\geq 2ab,\ \ \forall\ a,\ b\in\mathbb{R},$$

$$2\,|n|^2 \geq 1 + |n|^2\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|r_n\,(\,\cdot\,,t)\|_{H^s_{per}} &\geq 2^s \left(2kk_n - 2kk_n \cos\left(-tn^{-2s}\left(k^2 - k_n^2\right)\right)\right) \\
&= 2^s 2kk_n \left(1 - \cos\left(-tn^{-2s}\left(k^2 - k_n^2\right)\right)\right) \\
&= 2^{s+1} kk_n \left|1 - \cos\left(-tn^{-2s}\left(k^2 - k_n^2\right)\right)\right| \\
&= 2^{s+1} kk_n \left|1 - e^{-itn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)} + i\mathrm{sen}\left(-tn^{-2s}\left(k^2 - k_n^2\right)\right)\right| \\
&\geq 2^{s+1} kk_n \left(\left|1 - e^{-itn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)}\right| - \left|i\mathrm{sen}\left(-tn^{-2s}\left(k^2 - k_n^2\right)\right)\right|\right) \\
&\geq 2^{s+1} kk_n \left(\left|1 - e^{-itn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)}\right| - n^{-\delta}\right),
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para algum $\delta > 0$ real tal que

$$n^{-\theta} \geq \mathrm{sen}\left(-tn^{-2s}\left(k^2 - k_n^2\right)\right),$$

para todo $\theta \leq \delta$. Supondo que a sequência (k_n) é decrescente, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|u_{k,n}\,(t,\cdot) - u_{k_n,n}\,(t,\cdot)\|_{H^s_{per}} &\geq 2^{s+1} kk_n \left(\left|1 - e^{-itn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)}\right| - n^{-\delta}\right) \\
&\geq C\left(\left|1 - e^{-itn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)}\right| - n^{-\delta}\right),
\end{aligned} \tag{3.113}$$

donde temos que tal constande C independe de n e δ, pois $C = 2^{s+1}k^2$.

Como supomos que (3.110) é localmente bem-posto em H^s_{per}, $s < 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \left|e^{-itn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)} - 1\right| = 0. \tag{3.114}$$

Observe que, se tomarmos a sequência (k_n), tal que $k_n^2 = k^2 + \alpha n^{2s+\beta}$, onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e β satisfaz a desigualdade $2s + \beta < 0$, temos que

$$\begin{aligned}
e^{-itn^{-2s}\left(k^2-k_n^2\right)} &= e^{-itn^{-2s}\left(-\alpha n^{2s+\beta}\right)} \\
&= e^{i\alpha n^{\beta} t}.
\end{aligned}$$

Para tal sequência, (3.114) falha.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, R.G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley Classics Library Edition Published, John Wiley & Sons, 1995.

[2] BOURGAIN, J., *Fourier Transform Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations.* Geometric and Functional Analysis. Vol. 3, Nº2, 107-156, 1993.

[3] BOURGAIN, J., *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations.* American Mathematical Society colloquium publications, Vol. 46, 1999.

[4] BURQ, N., GÉRARD, P., TZVETKOV, N., *An Instability Property of the Nonlinear Schrödinger Equation on S^d.* Mathematical Research Letters 9, 323-335, 2002.

[5] CAZENAVE, T., *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*, third edition. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.

[6] IÓRIO, R., IÓRIO, V., *Equações diferenciais parciais: uma introdução*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

[7] IÓRIO, R., IÓRIO, V., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2001.

[8] KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley Classics Library Edition Published, John Wiley & Sons, 1989.

[9] LINARES, F., *Ecuaciones Dispersivas No Lineales. Caso Periódico.* XX Escuela Venezolana de Matemáticas, 2007.

[10] Linares, F., Ponce, G., *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, 2ª ed. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[11] Sulem, C., Sulem P., *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*. Springer-Verlag New Yourk, Inc. 1999.

[12] Terence, T., *Nonlinear dispersive equations: Local and global analysis*. Regional conference series in mathematics, nº 106. American Mathematical Society, 2006.