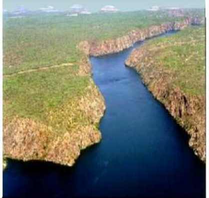
Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática



Rio São Francisco

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hipersuperfícies com Curvatura Media Constante e Hipersuperfícies com Curvatura Escalar Constante na Esfera

Isadora Maria de Jesus

Maceió
Agosto de 2009

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hipersuperfícies com Curvatura Escalar Constante na Esfera

Isadora Maria de Jesus

Maceió, Brasil
04 de agosto de 2009

ISADORA MARIA DE JESUS

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hipersuperfícies com Curvatura Escalar Constante na Esfera

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 04 de agosto de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pos-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva(Orientador)

Maceió
2009

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

J58h Jesus, Isadora Maria de.
Hipersuperfícies com curvatura média constante e hipersuperfícies com curvatura escalar constante na esfera / Isadora Maria de Jesus, 2009.
99 f.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 95-96.
Índice: f: 97-98.

1. Geometria diferencial. 2. Hipersuperfícies. 3. Curvatura média. 4. Curvatura escalar. 5. Laplaciano. 6. Li Haizhong, teorema de. 7. Alencar-do Carmo, teorema de. I. Título.

CDU: 514.764.27

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hipersuperfícies com Curvatura Escalar Constante na Esfera

Isadora Maria de Jesus

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 04 de agosto de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pos-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva(Orientador)

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Ao meu esposo Geraldo.

Agradecimento

Ao Professor Hilário Alencar por ter me orientado na graduação, como aluna de iniciação científica, e no mestrado; pela amizade, pela paciência, pelas conversas gratificantes que tivemos e, principalmente, por sua confiança e zelo.

Ao Professor Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante pela correção desta dissertação e pelas dicas de escrita.

Ao Professor Abdênago Alves de Barros pela correção desta dissertação, pela amizade e o apoio no período do Curso de Verão 2009 no Ceará.

Ao Gregório Manoel da Silva Neto pela amizade, pela correção dessa dissertação, pelas conversas sobre temas relevantes a essa dissertação e pelo incentivo.

À Viviane de Oliveira Santos pela amizade, pelo incentivo e pela correção desta dissertação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico(CNPq) pelo auxílio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos dois teoremas que caracterizam as hipersuperfícies na esfera unitária de dimensão $n+1$. O primeiro resultado, obtido por H. Alencar e M. do Carmo, classifica as hipersuperfícies com curvatura média constante na esfera. Este resultado foi publicado em abril de 1994 no Proceedings of The American Mathematical Society, volume 120, número 4 com o título *Hypersurfaces With Constant Mean Curvature*.

O segundo resultado provado nesta dissertação foi obtido por Li Haizhong no artigo *Hypersurfaces With Constant Scalar Curvature in Spaces Forms*, publicado em 1996 no Mathematische Annalen, volume 305. O Teorema de Li Haizhong caracteriza as hipersuperfícies com curvatura escalar constante na esfera. Demonstraremos o Teorema de Li Haizhong utilizando os resultados obtidos por H. Alencar e M. do Carmo.

Palavras-chave: Geometria diferencial; Curvatura média; Curvatura escalar; Hipersuperfície; Laplaciano; Alencar-do Carmo, teorema de; Li Haizhong, teorema de.

Abstract

In this work we prove two theorems that characterize the hypersurfaces in the unitary sphere of dimension n+1. The first result, obtained by H. Alencar and M. do Carmo, classifies hypersurfaces with constant mean curvature in the sphere. This result was published in April 1994 in Proceedings of The American Mathematical Society, volume 120, number 4 with the title *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature*. The second result was obtained by Li Haizhong in the article *Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in Space Forms*, published in 1996 in the journal Mathematisch Annalen, volume 305. The theorem of Li Haizhong characterizes hypersurfaces with constant scalar curvature in the sphere. We prove the theorem of Li Haizhong using the results obtained by H. Alencar and M. do Carmo.

Keywords: Differential geometry; Mean curvature; Scalar curvature; Hypersurfaces; Laplacian; Alencar and do Carmo's theorem; Li Haizhong's theorem.

Sumário

Introdução **7**

1 Preliminares **11**

1.1 Variedades Diferenciáveis 11
1.2 Campos Vetoriais e Métricas Riemannianas 17
1.3 Referencial Móvel 22
1.4 Conexão Afim e Conexão Riemanniana 27
1.5 Tensor numa Variedade Riemanniana 37
1.6 Curvaturas 40
1.7 Imersões Isométricas 54
1.8 Laplaciano de um Tensor Simétrico 66

2 Resultados Principais **72**

2.1 Hipersuperfícies com Curvatura Média
Constante na Esfera 72
2.2 Hipersuperfícies com Curvatura Escalar Constante na Esfera . 83

Referênciais Bibliográficas **95**

Introdução

Sejam M^n uma variedade orientada de dimensão n, $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em M e $\omega_1, \ldots, \omega_n$ seu correferencial dual associado. Denotaremos a segunda forma fundamental de M pelo tensor

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \left(\omega_i \otimes \omega_j \right), \text{ onde } h_{ij} = B(e_i, e_j) = \overline{\nabla}_{e_i} e_j - \nabla_{e_i} e_j.$$

Podemos escolher um referencial local $e_1, \ldots, e_n$ em uma vizinhança de p em M tal que

$$B = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\omega_i \otimes \omega_i \right).$$

Neste caso, o quadrado da norma da segunda forma fundamental e a curvatura média de M são, respectivamente,

$$|B|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2 \text{ e } H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii}.$$

A equação de Gauss afirma que

$$R_{ijij} = 1 + k_i k_j, \ i \neq j.$$

Em particular,

$$n(n-1)(R-1) = n^2 H^2 - |B|^2,$$

onde

$$R(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}$$

é a curvatura escalar de M.

O operador de Weingarten é o operador autoadjunto $A : T_pM \longrightarrow T_pM$ associado à segunda forma fundamental, isto é,

$$\langle A(x), y \rangle = B(x, y), \forall \ x, y \in T_pM.$$

Além disso,

$$|A|^2 = |B|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2,$$

pois $k_1, \ldots, k_n$ são os autovalores de A associados aos autovetores $e_1, \ldots, e_n$, respectivamente.

Quando f é mínima, isto é, $H \equiv 0$, o seguinte resultado é bastante conhecido:

Teorema 0.0.1. *Sejam M^n compacto, $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma hipersuperfície mínima e A o operador de Weingarten. Assuma que $|A|^2 \leq n$, para todo $p \in M$. Então*

- (i) *$|A|^2 \equiv 0$(e M é totalmente geodésica) ou $|A|^2 \equiv n$.*
- (ii) *$|A|^2 \equiv n$ se, e somente se, M^n é um toro de Clifford em S^{n+1}, i.e., M^n é o produto de esferas $S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, $n_1 + n_2 = n$, de raios apropriados.*

O item (i) do Teorema 0.0.1 deve-se a Simons, ver [13]. A caracterização em (ii) foi obtida independentemente por Chern, do Carmo e Kobayashi em [3] e por Lawson em [11]. O resultado em (ii) é local.

O H(r)-toro, para $0 < r < 1$, é a hipersuperfície em $S^{n+1}(1)$ obtida pela imersão produto $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$, definida por

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2).$$

As curvaturas principais do H(r)-toro são dadas, na mesma orientação, por

$$k_1 = \cdots = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad \text{e} \quad k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

ou o simétrico destes valores para a orientação oposta.

Seja M^n uma variedade riemanniana compacta e orientável e seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície com curvatura média constante H. Escolha uma orientação para M tal que $H \geq 0$. Consideremos

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(H^2 + 1)$$

e denote por B_H o quadrado da raiz positiva de P_H.

Nesta dissertação provaremos dois resultados que classificam as hipersuperfícies na esfera $S^{n+1}(1)$. O primeiro resultado generaliza o Teorema 0.0.1 para as hipersuperfícies com curvatura média constante na esfera e foi obtido em [1] por H. Alencar e M. do Carmo, a saber:

Teorema 0.0.2 (H. Alencar e M. do Carmo). *Sejam M^n uma variedade compacta de dimensão n, $f : M^n \to S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão com curvatura média constante H e $\phi : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ o tensor simétrico dado por*

$$\phi(x, y) = \langle Hx - A(x), y \rangle \, , \ \forall \ x, y \in T_pM.$$

Se $|\phi|^2 \leq B_H$, para todo $p \in M$, então

(i) $|\phi|^2 = 0$ *(e M é totalmente umbílica) ou $|\phi|^2 \equiv B_H$.*

(ii) $|\phi|^2 \equiv B_H$ *se, e somente se,*

- (a) $H = 0$ *e M^n é um toro de Clifford em $S^{n+1}(1)$;*
- (b) $H \neq 0,\ n \geq 3,$ *e M^n é um $H(r)$-toro com* $r^2 < \dfrac{n-1}{n}$;
- (c) $H \neq 0,\ n = 2,$ *e M^n é um $H(r)$-toro com* $r^2 \neq \dfrac{n-1}{n}$.

O segundo resultado, obtido por Li Haizhong em [10], caracteriza as hipersuperfícies com curvatura escalar constante na esfera. Mais precisamente,

Teorema 0.0.3 (Li Haizhong). *Seja M uma hipersuperfície compacta de dimensão n, $n \geq 3$, com curvatura escalar constante R em $S^{n+1}(1)$. Se $\overline{R} = R - 1 \geq 0$ e*

$$n\overline{R} \leq |B|^2 \leq \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n], \qquad (1)$$

então

$$|B|^2 \equiv n\overline{R} \qquad (2)$$

e M é totalmente umbílica ou

$$|B|^2 = \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n] \qquad (3)$$

e $M = S^1(\sqrt{1-r^2}) \times S^{n-1}(r)$, *onde* $r = \sqrt{\dfrac{n-2}{n(\overline{R}+1)}}$.

Esta dissertação está dividida em dois capítulos. No primeiro capítulo abordamos os conceitos e resultados necessários para a compreensão e demonstração dos resultados principais, calculamos as curvaturas principais do H(r)-toro e o Laplaciano do quadrado da norma de um tensor simétrico que satisfaz a equação de Codazzi.

Dividimos o segundo capítulo em duas seções. Na primeira seção provamos o Teorema 0.0.2 e na segunda demonstramos o Teorema 0.0.3 utilizando os resultados obtidos pelo Teorema 0.0.2.

Ressaltamos que em 1997, ver [9], Li Haizhong generalizou o Teorema 0.0.3 para hipersuperfícies compactas de dimensão n em uma forma espacial real $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Diferenciáveis

Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M munido de uma família de aplicações biunívocas $\mathtt{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:

(i) $\bigcup_\alpha \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) = M$;

(ii) Para todo par α, β, com $\mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathtt{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathtt{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathtt{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha$ e $\mathtt{x}_\alpha^{-1} \circ \mathtt{x}_\beta$ são diferenciáveis;

(iii) A família $\{(U_\alpha, \mathtt{x}_\alpha)\}$ é máxima relativa às condições (i) e (ii).

O par $(U_\alpha, \mathtt{x}_\alpha)$(ou a aplicação $\mathtt{x}_\alpha$), com $p \in \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)$, é chamado uma *parametrização* ou *sistema de coordenadas* de M em p; $\mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)$ é denominado *vizinhança coordenada* de p. Uma família $\{(U_\alpha, \mathtt{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (i) e (ii) é dita uma *estrutura diferenciável* em M. Indicaremos por M^n uma variedade diferenciável de dimensão n.

Observação 1.1.1. Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de maneira natural uma topologia ζ em M. Basta definir

$$\zeta = \{A \subset M; \mathtt{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)) \text{ é um aberto do } \mathbb{R}^n \text{ para todo } \alpha\}.$$

Neste caso,

(a) $\emptyset \in \zeta$. De fato, $\emptyset \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) = \emptyset$, logo

$$\mathtt{x}_\alpha^{-1}(\emptyset \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)) = \mathtt{x}_\alpha^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

é aberto do $\mathbb{R}^n$ para todo α;

(*b*) $M \in \zeta$, pois $M \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) = \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)$ implica que $\mathtt{x}_\alpha^{-1}(M \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$ é aberto do $\mathbb{R}^n$ para todo α;

(*c*) $\displaystyle\bigcup_{j\in\Lambda} A_j \in \zeta$, onde $A_j,\ j \in \Lambda$, é uma família de elementos de ζ. Como

$$\left(\bigcup_{j\in\Lambda} A_j\right) \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) = \bigcup_{j\in\Lambda} (A_j \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha))$$

é aberto do $\mathbb{R}^n$ para todo α, temos que $\displaystyle\bigcup_{j\in\Lambda} A_j \in \zeta$;

(*d*) $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{m} A_j \in \zeta$, onde $A_j,\ j \in \Lambda$, é uma família em ζ. Certamente, pois

$$\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_j\right) \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) = \bigcap_{j=1}^{m}(A_j \cap \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha))$$

é aberto do $\mathbb{R}^n$ para todo α.

Além disso, $\mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)$ está em ζ para todo α. Este fato é decorrente da condição (*ii*) da definição de variedade diferenciável; pela construção da topologia ζ, $\mathtt{x}_\alpha$ é contínua para todo α.

Diremos que M é compacto quando M é compacto em relação a topologia ζ e, similarmente, que M é convexo se for convexo em relação a topologia ζ.

Definição 1.1.1 (Aplicação diferenciável)**.** *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1^n \longrightarrow M_2^m$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\mathtt{y} : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ de M_1 em p tal que $\varphi(\mathtt{x}(U)) \subset \mathtt{y}(V)$ e a aplicação*

$$\mathtt{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

é diferenciável em $\mathtt{x}^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um aberto de M_1 se for diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Observação 1.1.2. A Definição1.1.1 independe de parametrização.
De fato, suponhamos que, para uma parametrização $\mathtt{y} : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ de M_2 em $\varphi(p)$, exista uma parametrização $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ de M_1 em p tal que $\varphi(\mathtt{x}(U)) \subset \mathtt{y}(V)$ e, além disso, a aplicação

$$\mathtt{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

seja diferenciável em $\mathtt{x}^{-1}(p)$. Consideremos uma parametrização $\mathtt{z} : \overline{V} \longrightarrow M_2$ em $\varphi(p)$, temos que $\mathtt{z}(\overline{V}) \cap \mathtt{y}(V) = W \neq \emptyset$ e $\mathtt{y}^{-1}(W)$ é aberto em $\mathbb{R}^m$. Visto que $\varphi(p) \in W$, obtemos que

$$\mathtt{x}^{-1}(p) \in U_1 := \left(\mathtt{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathtt{x}\right)^{-1}\left(\mathtt{y}^{-1}(W)\right) \subset U.$$

Como $\mathtt{x}|_{U_1}$ é parametrização de M_1 em p e $\left(\mathtt{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathtt{x}|_{U_1}\right)(U_1) = \mathtt{y}^{-1}(W)$, obtemos

$$\left(\varphi \circ \mathtt{x}|_{U_1}\right)(U_1) = W \subset \mathtt{z}(\overline{V}).$$

Além disso,

$$\mathtt{z}^{-1} \circ \varphi \circ \mathtt{x}|_{U_1} = \left(\mathtt{z}^{-1} \circ \mathtt{y}\right) \circ \left(\mathtt{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathtt{x}|_{U_1}\right) : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\mathtt{x}^{-1}(p)$.

Portanto, para toda parametrização $\mathtt{y} : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ numa vizinhança de $\varphi(p)$ em M_2, existe uma parametrização $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ de M_1 em p tal que $\varphi(\mathtt{x}(U)) \subset \mathtt{y}(V)$ e a aplicação

$$\mathtt{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

seja diferenciável em $\mathtt{x}^{-1}(p)$. A aplicação (1.1) é dita expressão de φ nas parametrizações $\mathtt{x}$ e $\mathtt{y}$.

Definição 1.1.2 (Vetor tangente)**.** *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\xi, \xi) \longrightarrow M$ é dita uma* curva diferenciável *em M. Sejam $\alpha(0) = p \in M$ e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ em M. O* vetor tangente *à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Um vetor tangente *em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\xi, \xi) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p \in M$. O conjunto dos vetores tangentes a p será indicado por T_pM.*

Se escolhemos uma parametrização $\mathtt{x} : U \longrightarrow M^n$ em $p = \mathtt{x}(0)$, podemos exprimir a curva α e a função f nesta parametrização, repectivamente, por

$$\left(\mathtt{x}^{-1} \circ \alpha\right)(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad \text{e} \quad (f \circ \mathtt{x})(q) = f(q),\ q = (x_1, \ldots, x_n).$$

Logo

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), \ldots, x_n(t))\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right) f, \end{aligned}$$

onde $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ é o vetor tangente em p à "curva coordenada"

$$x_i \to \mathtt{x}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0).$$

Portanto,

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0. \tag{1.2}$$

Decorre de (1.2) que T_pM é um espaço vetorial de dimensão n, pois fixada uma parametrização $\mathtt{x}$ com $\mathtt{x}(0) = p$, T_pM é gerado pelos n vetores tangentes $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)_0$. O espaço T_pM é denominado *espaço tangente de M em p*.

Proposição 1.1.1. *Sejam M_1^n, M_2^m variedades diferenciáveis e $\varphi : M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\xi, \xi) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Tome $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Demonstração. Ver [6], pág. 9, Proposição 2.7. □

A aplicação linear $d\varphi_p$ é chamada *diferencial de φ* em p.

Definição 1.1.3 (Difeomorfismo)**.** *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável e bijetora $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um* difeomorfismo *se sua inversa $\varphi^{-1} : M_2 \longrightarrow M_1$ é diferenciável. Se existem vizinhanças U de p em M_1 e V de $\varphi(p)$ em M_2 tais que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo, dizemos que φ é um* difeomorfismo local em uma vizinhança de p.

Definição 1.1.4 (Imersão e mergulho)**.** *Sejam M_1^n, M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é uma* imersão *se $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ é injetiva para todo $p \in M_1$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M_1)$, onde $\varphi(M_1)$ tem a topologia induzida por M_2, diz-se que φ é um* mergulho. *Se $M_1 \subset M_2$ e a inclusão $i : M_1 \longrightarrow M_2$ é um mergulho, diz-se que M_1 é uma* subvariedade *de M_2.*

Se $\varphi : M_1^m \longrightarrow M_2^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão φ.

Proposição 1.1.2. *Seja $\varphi : M_1^m \to M_2^n$, $m \leq n$, uma imersão. Para cada $p \in M_1$ existe uma vizinhança $V \subset M_1$ em p tal que a restrição $\varphi\big|_V$ é um mergulho.*

Demonstração. Ver [6], pág. 14, Proposição 3.7. □

Sejam M^n uma variedade diferenciável e $TM = \{(p,v); p \in M, v \in T_pM\}$. Consideremos $\{(U_\alpha, \mathtt{x}_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável máxima de M. Indicaremos por $q_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ a base associada a $\mathtt{x}_\alpha$ no espaço tangente a $\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)$.
Defina $\mathtt{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$ por

$$\begin{aligned}
\mathtt{y}_\alpha(q_\alpha, u_1, \ldots, u_n) &= (\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)(u_1, \ldots, u_n)) \\
&= \left(\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha), \sum_{i=1}^n u_i d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)(e_j)\right) \\
&= \left(\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right), \ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo é demonstrar que $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \mathtt{y}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em TM. Geometricamente, significa que tomamos como coordenada de $(p,v) \in TM$ as coordenadas $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ de p relativas a $\mathtt{x}_\alpha$ juntamente com as coordenadas de v relativas a base de T_pM associada a $\mathtt{x}_\alpha$.
Afirmação: $\bigcup_\alpha \mathtt{y}_\alpha(U_\alpha) = TM$.
De fato, como $(p,v) \in TM$ temos que $p = \mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)$, $q_\alpha \in U_\alpha$ para algum α. Tendo em vista que $d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)(\mathbb{R}^n) = T_pM$, existe $v_\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)v_\alpha$. Logo

$$(q_\alpha, v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n \ \text{ e } \ \mathtt{y}_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = (\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)v_\alpha) = (p,v).$$

Resta mostrar a condição (ii) da definição de variedades diferenciáveis. Para isso, consideremos $\overline{W} = \mathtt{y}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathtt{y}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ e tomemos $(p,v) \in \overline{W}$. Neste caso,

$$(p,v) = (\mathtt{x}_\beta(q_\beta), d\mathtt{x}_\beta(q_\beta)v_\beta) = (\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)v_\alpha).$$

Assim $W = \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathtt{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, pois $p \in W$. Além disso, $\mathtt{x}_\alpha^{-1} \circ \mathtt{x}_\beta$ e $\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha$ são diferenciáveis nos abertos $\mathtt{x}_\beta^{-1}(W)$ e $\mathtt{x}_\alpha^{-1}(W)$, respectivamente.
Visto que $\mathtt{x}_\beta \circ (\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha) = \mathtt{x}_\alpha$, obtemos

$$\left(\mathtt{y}_\beta^{-1} \circ \mathtt{y}_\alpha\right)(q_\alpha, v_\alpha) = \mathtt{y}_\beta^{-1}(\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)v_\alpha).$$

Usando a regra da cadeia em $\mathtt{x}_\beta \circ (\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)$, obtemos

$$d\mathtt{x}_\beta(q_\beta)d(\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)(q_\alpha) = d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha).$$

Portanto,

$$\mathtt{y}_\beta\left(\left(\mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha\right)(q_\alpha), d(\mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha)(q_\alpha)v_\alpha\right) = (\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)v_\alpha)\,.$$

Isto implica que

$$\left(\mathtt{y}_\beta^{-1}\circ \mathtt{y}_\alpha\right)(q_\alpha, v_\alpha) = \left(\left(\mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha\right)(q_\alpha), d(\mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha)(q_\alpha)v_\alpha\right)\,.$$

A diferenciabilidade de $\mathtt{y}_\beta^{-1}\circ \mathtt{y}_\alpha$ decorre da diferenciabilidade das aplicações $\mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha$ e $d(\mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha)$. Consequentemente, $\mathtt{y}_\beta^{-1}(\overline{W})$ e $\mathtt{y}_\alpha^{-1}(\overline{W})$ são abertos de $\mathbb{R}^{2n}$. Concluímos que TM com a estrutura diferenciável $\{(U_\alpha\times\mathbb{R}^n, \mathtt{y}_\alpha)\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, denominada *fibrado tangente de* M.

Definição 1.1.5 (Variedade orientável)**.** *Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é* orientável *se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathtt{x}_\alpha)\}$ tal que*

(*i*) *Para todo α, β com $W = \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)\cap \mathtt{x}_\beta(U_\beta)\neq\emptyset$, a diferencial da mudança de coordenada $\mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha$ tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M é não-orientável. *Se M é orientável a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma* orientação *de M. Além disso, dizemos que duas estruturas diferenciáveis tem a mesma orientação quando a união delas ainda satisfaz (i).*

Se M é orientável e conexa, existem exatamente duas orientações distintas em M.

Proposição 1.1.3. *Seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ um difeomorfismo. A variedade diferenciável M_1 é orientável se, e somente se, a variedade diferenciável M_2 é orientável.*

Demonstração. Suponhamos que M_1 é orientável. Seja $\{(U_\alpha, \mathtt{x}_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável em M_1 satisfazendo o item (i) da Definição 1.1.5. Como φ é difeomorfismo, a aplicação $\mathtt{y}_\alpha = \varphi\circ \mathtt{x}_\alpha$ é uma parametrização de M_2 e, além disso, como $\bigcup_\alpha \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) = M_1$ temos que $\bigcup_\alpha \mathtt{y}_\alpha(U_\alpha) = M_2$. Logo, $\{(U_\alpha, \mathtt{y}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em M_2. Visto que $\mathtt{y}_\beta^{-1}\circ \mathtt{y}_\alpha = \mathtt{x}_\beta^{-1}\circ \mathtt{x}_\alpha$, o determinante da diferencial de $\mathtt{y}_\beta^{-1}\circ \mathtt{y}_\alpha$ é positivo. Portanto, $\{(U_\alpha, \mathtt{y}_\alpha)\}$ é uma orientação de M_2. Reciprocamente, se M_2 é orientável, então M_1 é orientável, pois φ^{-1} é um difeomorfismo. $\square$

A orientação $\{(U_\alpha, \mathtt{y}_\alpha)\}$ de M_2 é dita induzida de M_1. No caso em que M_1 e M_2 são conexas esta orientação pode coincidir ou não com a orientação inicial de M_2. No primeiro caso, diz-se que φ preserva a orientação e, no segundo caso, dizemos que φ reverte a orientação.

1.2 Campos Vetoriais e Métricas Riemannianas

Um campo de vetores X numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$.

Às vezes é conveniente pensar em campos de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{F}$, onde $\mathcal{D}(M)$ é o conjunto das funções diferenciáveis em M e $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções em M, definido por

$$(Xf)(p) = X(p) \cdot f,$$

onde $X(p) \cdot f := X(p)(f)$. Neste contexto, diremos que X é diferenciável se, e somente se, $Xf \in \mathcal{D}(M), \ \forall f \in \mathcal{D}(M)$.

A interpretação de X como operador em $\mathcal{D}(M)$ permite-nos considerar os iterados de X. Em geral, os iterados XY e YX de dois campos de vetores X e Y em M não são campos de vetores. Entretanto, o seguinte lema é válido.

Lema 1.2.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores numa variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z satisfazendo*

$$Zf = (XY - YX)f, \ \forall f \in \mathcal{D}(M).$$

Demonstração. Inicialmente, suporemos a existência deste campo de vetores e, com isso, demonstraremos a sua unicidade. Admitamos a existência de Z. Sejam $p \in M$ e $\mathbf{x} : U \longrightarrow M$ uma parametrização, então

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } Y(p) = \sum_{i=1}^{n} b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
(XY)(f)(p) &= X(p) \cdot (Y(p) \cdot f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j(p) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[a_i(p) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p) b_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)(p).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$(YX)(f) = \sum_{i,j=1}^{n} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}
Zf = (XY - YX)(f) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (1.3) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Mostrando a unicidade de Z. Defina Z_α por (1.3) em cada vizinhança coordenada $\mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável. Por unicidade, $Z_\alpha = Z_\beta$ em $\mathtt{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathtt{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, assim, para cada $p \in M$ podemos definir $Z(p) = Z_\alpha(p)$, onde $p \in \mathtt{x}_\alpha(U_\alpha)$. Provando a existência de Z. A diferenciabilidade é decorrente da definição. □

O campo de vetores $[X, Y] = XY - YX$ é denominado *colchete* de X e Y. Além disso, $[X, Y]$ satisfaz a seguinte proposição.

Proposição 1.2.1. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis de vetores em M, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\theta, \phi : M \longrightarrow M$ são funções diferenciáveis, então*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade);
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade);
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Identidade de Jacobi);
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração.

1. $[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X]$;
2. $[aX + bY, Z] = (aX + bY)Z - Z(aX + bY) = aXZ + bYZ - aZX - bZY = a[X, Z] + b[Y, Z]$;

3. Temos que

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z] &= [X,Y]Z - Z[X,Y] \\
&= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\
&= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX; \\
[[Y,Z],X] &= [Y,Z]X - X[Y,Z] \\
&= (YZ - ZY)X - X(YZ - ZY) \\
&= YZX - ZYX - XYZ + XZY; \\
[[Z,X],Y] &= [Z,X]Y - Y[Z,X] \\
&= (ZX - XZ)Y - Y(ZX - XZ) \\
&= ZXY - XZY - YZX + YXZ;
\end{aligned}$$

somando as três parcelas acima obtemos a identidade de Jacobi.

4. Considerando uma parametrização qualquer,

$$\begin{aligned}
(fX)(gY) &= \sum_{i=1}^{n} fa_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} gb_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} fa_i \left(\sum_{j=1}^{n} gb_j \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} b_j + g\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} fa_i gb_j \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} fa_i \frac{\partial g}{\partial x_i} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} fa_i g \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} fa_i gb_j \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} fa_i g \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(gY)(fX) &= \sum_{j=1}^{n} gb_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} fa_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} gb_j \left(\sum_{i=1}^{n} fa_i \frac{\partial^2}{\partial x_j x_i} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} a_i + f\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j,i} gb_j fa_i \frac{\partial^2}{\partial x_j x_i} + \sum_{j,i} gb_j \frac{\partial f}{\partial x_j} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,i} gb_j f \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j,i} gb_j fa_i \frac{\partial^2}{\partial x_j x_i} + g\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + \sum_{j,i} gb_j f \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
[fX, gY] &= (fX)(gY) - (gY)(fX) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} ga_i fb_j \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} ga_i f \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j,i} fb_j ga_i \frac{\partial^2}{\partial x_j x_i} \\
&\quad - f\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \sum_{j,i} fb_j g \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= gX(f)Y + gf\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - fY(g)X \\
&= fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.
\end{aligned}
$$

$\square$

Definição 1.2.1 (Métrica riemanniana)**.** *Uma* métrica riemanniana *ou* estrutura riemanniana *numa variedade diferenciável M^n é uma correspondên-*

cia que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno

$$\langle , \rangle_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

(i.e. uma forma bilinear simétrica e positiva definida) que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\mathtt{x} : U \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais de M em torno de p e $\mathtt{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathtt{x}(U)$, então

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

é uma função diferenciável em U para cada $i, j = 1, \dots, n$.

Uma maneira equivalente de exprimir a diferenciabilidade de uma métrica riemanniana é dizer que para cada par de campos de vetores diferenciáveis X e Y numa vizinhança V de M, a função $\langle X, Y \rangle : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são ditas *expressões da métrica riemanniana* ou (os g_{ij} da métrica) *no sistema de coordenadas* $\mathtt{x} : U \longrightarrow M$. Uma variedade diferenciável munida de uma métrica riemanniana é uma *variedade riemanniana.*

Exemplo 1.2.1 (Variedade Produto)**.** Consideremos duas variedades diferenciáveis M e $\overline{M}$. Sejam $\{(U_\alpha, \mathtt{x}_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, \mathtt{y}_\beta)\}$ suas respectivas estruturas diferenciáveis. O produto cartesiano

$$M \times \overline{M} = \{(p, \overline{p})\ p \in M,\ \overline{p} \in \overline{M}\}$$

é uma variedade diferenciável, denominada variedade produto de M e $\overline{M}$. As aplicações

$$\mathtt{z}_{\alpha\beta}(p, \overline{p}) = (\mathtt{x}_\alpha(p), \mathtt{y}_\beta(\overline{p})), (p, \overline{p}) \in U_\alpha \times V_\beta$$

são parametrizações de $M \times \overline{M}$, isto é, $\{(U_\alpha \times V_\beta, \mathtt{z}_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times \overline{M}$. Em relação a esta estrutura diferenciável as projeções $\pi : M \times \overline{M} \longrightarrow M$ e $\overline{\pi} : M \times \overline{M} \longrightarrow \overline{M}$ são aplicações diferenciáveis. Além disso, se M e $\overline{M}$ possuem estruturas riemannianas $\langle\ ,\ \rangle_1$ e $\langle\ ,\ \rangle_2$, respectivamente, então podemos introduzir uma métrica riemanniana em $M \times \overline{M}$ por

$$\langle u, v \rangle_{(p,\overline{p})} = \left\langle d\pi_{(p,\overline{p})}(u), d\pi_{(p,\overline{p})}(v) \right\rangle_1 + \left\langle d\overline{\pi}_{(p,\overline{p})}(u), d\overline{\pi}_{(p,\overline{p})}(v) \right\rangle_2,$$

onde $(p, \overline{p}) \in M \times \overline{M}$ e $u, v \in T_{(p,\overline{p})}(M \times \overline{M})$. Portanto, a variedade produto é uma variedade riemanniana.

Definição 1.2.2 (Isometria)**.** *Sejam M e N variedades Riemmanianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é dito uma* isometria *se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para cada $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Definição 1.2.3 (Isometria local)**.** *Sejam M e N variedades Riemmanianas. Um aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ é dita uma* isometria local *em p se existe uma vizinhança U de p em M tal que $f : U \longrightarrow f(U)$ é um difeomorfismo e $\langle u, v \rangle_q = \langle df_q(u), df_q(v) \rangle_{f(q)}$, para todo $q \in U$ e $u, v \in T_qM$. Dizemos que a variedade riemanniana M é* localmente isométrica *à variedade riemanniana N se, para todo $p \in M$, existem uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \longrightarrow f(U)$.*

Exemplo 1.2.2 (Variedades imersas)**.** Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura riemanniana, f induz uma estrutura riemanniana em M por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \forall u, v \in T_pM \text{ e } \forall p \in M.$$

A injetividade de df_p garante a positividade de $\langle \ , \ \rangle_p$ para todo $p \in M$. A métrica de M é dita induzida por f. Dizemos que f é uma imersão isométrica.

Definição 1.2.4 (Curva Parametrizada)**.** *Uma aplicação diferenciável $c : I \longrightarrow M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ numa variedade diferenciável M chama-se uma* curva parametrizada.

Definição 1.2.5 (Campo vetorial ao longo de uma curva)**.** *Um* campo vetorial *V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é* diferenciável *se para toda função diferenciável f em M a função $t \longmapsto V(t)f$ é uma função diferenciável em I. O campo vetorial $dc\left(\dfrac{d}{dt}\right)$, indicado por $\dfrac{dc}{dt}$ é denominado* campo velocidade*(ou* campo tangente*) a c.*

1.3 Referencial Móvel

Nesta seção faremos uma breve revisão de formas, focalizando os assuntos que serão utilizados nesta dissertação. Para um estudo mais aprofundado de formas ver, por exemplo, [5] e para um estudo mais detalhado de referencial móvel ver, por exemplo, [7].

Dado um espaço vetorial V denotemos por $\Lambda^k(V)$ o conjunto das aplicações k-lineares alternadas $\omega : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $V \times \cdots \times V$ tem exatamente k fatores. Alternadas no sentido de

$$\omega(u_1, \ldots, u_k) = -\omega(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_k),\ j > i.$$

Definição 1.3.1 (Forma exterior)**.** *Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma* k-forma exterior ω em M *é uma escolha, para cada $p \in M$, de um $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)$.*

Dada uma k-forma exterior ω e uma parametrização $\mathtt{x}_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M$ em uma vizinhança de $p \in M$, dizemos que a k-forma exterior ω_α, em $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, dada por

$$\omega_\alpha(q)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(\mathtt{x}_\alpha(q))(d(\mathtt{x}_\alpha)_q(v_1), \ldots, d(\mathtt{x}_\alpha)_q(v_k)),\ v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$$

é a *representação* de ω na parametrização $\mathtt{x}_\alpha$.

Notação: $\omega_\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \omega(d(\mathtt{x}_\alpha)(v_1), \ldots, d(\mathtt{x}_\alpha)(v_k)),\ v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Observação 1.3.1. *Se mudarmos o sistema de coordenadas para $(\mathtt{x}_\beta, U_\beta)$, obtemos que*

$$(\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)^*\omega_\beta = \omega_\alpha,$$

onde

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k)),\ v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n,$$

para uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e uma k-forma ω em $\mathbb{R}^n$.

Com efeito, para $\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha) = \mathtt{x}_\beta(q_\beta)$,

$$
\begin{aligned}
&[(\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)^*\omega_\beta](q_\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \\
&\quad = \omega_\beta\left((\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)(q_\alpha)\right)\left(d(\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)_{q_\alpha}(v_1), \ldots, d(\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)_{q_\alpha}(v_k)\right) \\
&\quad = \omega_\beta(q_\beta)((d\mathtt{x}_\beta^{-1})_{\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)}(d\mathtt{x}_\alpha(v_1)), \ldots, (d\mathtt{x}_\beta^{-1})_{\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)}(d\mathtt{x}_\alpha(v_k))) \\
&\quad = \omega(\mathtt{x}_\beta(q_\beta))(d\mathtt{x}_\beta(d\mathtt{x}_\beta^{-1}(d\mathtt{x}_\alpha(v_1))), \ldots, d\mathtt{x}_\beta(d\mathtt{x}_\beta^{-1}(d\mathtt{x}_\alpha(v_k)))) \\
&\quad = \omega(\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha))(d\mathtt{x}_\alpha(v_1), \ldots, d\mathtt{x}_\alpha(v_k)) \\
&\quad = \omega_\alpha(q_\alpha)(v_1, \ldots, v_k),
\end{aligned}
$$

onde $d\mathtt{x}_\beta = (d\mathtt{x}_\beta)_{q_\beta},\ d\mathtt{x}_\alpha = (d\mathtt{x}_\alpha)_{q_\alpha}$ e $(d\mathtt{x}_\beta^{-1})_{\mathtt{x}_\alpha(q_\alpha)} = (d\mathtt{x}_\beta^{-1})_{\mathtt{x}_\beta(q_\beta)} = d\mathtt{x}_\beta^{-1}$.

Definição 1.3.2. *Uma* forma diferenciável de ordem k *(ou k-forma diferenciável) na variedade diferenciável* M^n *é uma k-forma exterior cuja representação em um sistema de coordenadas (logo em todos) é diferenciável.*

É interessante notar que todas as operações definidas para formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$, como diferencial e integral, podem ser extendidas as formas diferenciáveis em M^n através de sua representação local.

Dada uma forma diferenciável ω em uma variedade diferenciável M, $d\omega$ é a forma diferenciável em M cuja representação local é $d\omega_\alpha$. Obviamente, $d\omega$ está bem definido, pois

$$d\omega_\alpha = d(\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)^* \omega_\beta = (\mathtt{x}_\beta^{-1} \circ \mathtt{x}_\alpha)^* d\omega_\beta.$$

Seja ω uma 1-forma diferenciável numa variedade diferenciável M e, sejam X e Y campos vetoriais diferenciáveis em M. É possível mostrar que

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Mais geralmente, se $X_1, \ldots, X_{k+1}$ são campos vetorias diferenciáveis e ω é uma k-forma, então

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Definição 1.3.3. *O produto exterior de duas 1-formas lineares* ω_1 *e* ω_2 *em um espaço vetorial* V *é a forma bilinear alternada* $\omega_1 \wedge \omega_2$ *dada por*

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1), \;\; v_1, v_2 \in V.$$

Além disso, se $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *é uma base do espaço das formas lineares* V^**, então* $\omega_i \wedge \omega_j, \; i, j = 1, \ldots, n$*, formam uma base para o espaço vetorial* $\Lambda^2(V^*)$ *das formas bilineares alternadas de* $V \times V$*.*

Em geral, uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V é também denominado *referencial* em V.

Definição 1.3.4 (Referencial móvel)**.** *Sejam* $X_1, \ldots, X_n$ *campos vetoriais numa variedade diferenciável* M^n *tal que* $\{X_1(p), \ldots, X_n(p)\}$ *é uma base de* T_pM *para todo* $p \in M$*. A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} F: & M & \longrightarrow & TM \\ & p & \longmapsto & F(p) = (X_1(p), \ldots, X_n(p)) \end{array}$$

é um referencial móvel *para M. Em geral, diremos que $X_1, \ldots, X_n$ é um referencial movel para M. Um referencial móvel é dito* ortonormal *em uma variedade riemanniana M se $X_1(p), \ldots, X_n(p)$ são ortonormais em p, para todo $p \in M$.*

Consideremos um referencial móvel $X_1, \ldots, X_n$ numa variedade riemanniana M. Podemos definir as n 1-formas duais ω_i por $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker para $i, j = 1, \ldots, n$. Logo

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(X(p))X_i(p), \ \forall X(p) \in T_pM,$$

ou simplesmente, $dI = \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i$, onde dI indica a identidade do espaço tangente.

Lema 1.3.1 (Cartan)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_r : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, 1-formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam 1-formas lineares $\theta_1, \ldots, \theta_r$ de V em $\mathbb{R}$ linearmente independentes, satisfazendo:*

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j, \ a_{ij} = a_{ji}, \ i = 1, \ldots, r.$$

Demonstração. Completemos $\omega_1, \ldots, \omega_r$ em uma base $\omega_1, \ldots, \omega_n$ do espaço vetorial V^* de todas as 1-formas lineares definidos em V e denotemos

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j + \sum_{l=r+1}^{n} b_{il}\omega_l, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Como $\sum_{i=1}^{r} \theta_i \wedge \omega_i = 0$, temos que

$$0 = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}(\omega_j \wedge \omega_i) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=r+1}^{n} b_{il}(\omega_l \wedge \omega_i).$$

Visto que $\omega_i \wedge \omega_j = -\omega_j \wedge \omega_i, \ i < j$ são linearmente independentes,

$$b_{il} = 0 \text{ e } \ a_{ij} - a_{ji} = 0,$$

para quaisquer $i, j = 1, \ldots, r$ e $l = r+1, \ldots, n$. Portanto,

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j.$$

□

Proposição 1.3.1. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ um referencial móvel numa variedade M e ω_i, $i = 1, \ldots, n$ as n 1-formas duais associadas ao referencial móvel indicado. Então existem únicas 1-formas ω_{ij} tais que*

(i) $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$;

(ii) $d\omega_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_k$.

Demonstração. Suponhamos a existência das n^2 formas ω_{ij}, provaremos inicialmente sua unicidade. Como $\omega_i(p)$, $i = 1, \ldots, n$ formam uma base do espaço $(T_pM)^* = \Lambda^1(T_pM)$ das 1-formas em T_pM, para cada $p \in M$, existem únicos a_{ij}^k e b_{ij}^k satisfazendo

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \omega_k \quad \text{e} \quad d\omega_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^i(\omega_j \wedge \omega_k),$$

onde $b_{jk}^i = -b_{kj}^i$. Obtemos do item (i) que

$$a_{ij}^k = -a_{ji}^k$$

e o item (ii) implica

$$-d\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^i(\omega_j \wedge \omega_k) = \sum_{j=1}^{n}(\omega_j \wedge \omega_{ij}) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ij}^k(\omega_j \wedge \omega_k).$$

Daí,

$$a_{ij}^k - a_{ik}^j = -\frac{1}{2}b_{jk}^i + \frac{1}{2}b_{kj}^i = -b_{jk}^i.$$

Permutando i, j, k,

$$a_{ij}^k - a_{ik}^j = -b_{jk}^i,$$
$$a_{jk}^i - a_{ji}^k = -b_{ki}^j,$$
$$a_{ki}^j - a_{kj}^i = -b_{ij}^k.$$

Somando termo a termo as três igualdades acima, obtemos

$$(a_{ij}^k - a_{ik}^j) + (a_{jk}^i - a_{ji}^k) - (a_{ki}^j - a_{kj}^i) = -(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k),$$

isto é,

$$a_{ij}^k = -\frac{1}{2}(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k).$$

Visto que b_{ij}^k é único para todo $i, j, k = 1, \ldots, n$, garantimos a unicidade de ω_{ij}. Resta provar a existência de ω_{ij}. Para isso, tomemos $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \omega_k$, onde $a_{ij}^k = -\frac{1}{2}(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k)$. Como a_{ij}^k está bem definido, ω_{ij} está bem definido. Além disso,

$$a_{ij}^k = -\frac{1}{2}(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k) = \frac{1}{2}(b_{kj}^i + b_{ik}^j - b_{ji}^k) = \frac{1}{2}(b_{ik}^j + b_{kj}^i - b_{ji}^k) = -a_{ji}^k,$$

logo

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \omega_k = -\sum_{k=1}^{n} a_{ji}^k \omega_k = -\omega_{ji}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{n} \omega_k \wedge \omega_{ik} &= -\sum_{k,j=1}^{n} \omega_k \wedge (a_{ik}^j \omega_j) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{kj}^i (\omega_k \wedge \omega_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ji}^k (\omega_k \wedge \omega_j) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}^j (\omega_k \wedge \omega_j) \\
&= d\omega_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ij}^k (\omega_j \wedge \omega_k) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}^j (\omega_k \wedge \omega_j) = d\omega_i.
\end{aligned}$$

□

As formas ω_{ij} dadas pela Proposição 1.3.1 são ditas *formas de conexão* do referencial móvel $X_1, \ldots, X_n$ e o item (ii) é conhecido como a *primeira equação de estrutura* das 1-formas ω_i.

1.4 Conexão Afim e Conexão Riemanniana

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^∞ em M.

Definição 1.4.1 (Conexão afim)**.** *Uma* conexão afim ∇ *numa variedade diferenciável* M *é uma aplicação* $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$*, indicada por* $\nabla : (X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$*, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(*i*) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(*ii*) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(*iii*) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f) \cdot Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.4.1. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo da curva diferenciável* $c : I \longrightarrow M$ *um outro campo vetorial* $\dfrac{DV}{dt}$ *ao longo de* c*, denominado* derivada covariante de V ao longo de c*, que satisfaz*

(*a*) $\dfrac{D}{dt}(V + W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$;

(*b*) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$;

(*c*) *Se* V *é um campo vetorial induzido de* $Y \in \mathcal{X}(M)$*, isto é,* $V(t) = Y(c(t))$*, então* $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$,

onde V, W *são campos vetoriais ao longo de* c *e* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função diferenciável.*

Observação 1.4.1. O campo vetorial ao longo de c, $\dfrac{dc}{dt}$, é definido por

$$\frac{dc}{dt}(g) = \frac{d}{dt}(g \circ c), \forall g \in \mathcal{D}(M).$$

A definição $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$ faz sentido, pois $\nabla_X Y(p)$ só depende do valor de X em $X(p)$ e de Y ao longo de uma curva tangente a X em p. Verificaremos tal fato, consideremos um sistema de coordenadas $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ de M em torno de p. Escrevendo

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i \text{ e } Y = \sum_{i=1}^{n} y_i X_i,$$

onde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{i=1}^{n} x_i \nabla_{X_i} Y \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \nabla_{X_i} X_j + X_i(y_j) X_j \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,k=1}^{n} x_i X_i(y_k) X_k \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{k=1}^{n} X(y_k) X_k.
\end{aligned}$$

Substituindo

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$$

na última igualdade acima, podemos concluir que Γ_{ij}^k é uma função diferenciável em M para quaisquer $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Assim

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j \Gamma_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^{n} X(y_k) X_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k.$$

Isto mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende somente dos valores $x_i(p)$ e $y_j(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X em p.

Demonstração da Proposição 1.4.1. Mostraremos, inicialmente, a unicidade da correspondência que satisfaz (a), (b) e (c). Suponhamos a existência desta correspondência. Seja $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ um sistema de coordenadas de M com $c(I) \cap \mathtt{x}(U) \neq \emptyset$ e sejam $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = (\mathtt{x}^{-1} \circ c)(t)$, para cada $t \in I$ e $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Então $V = \sum_{j=1}^{n} v^j X_j$, onde $v^j(t) = v^j$ e $X_j = X_j(c(t))$. Usando (a) e (b) temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{D}{dt}(v^j X_j) = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{DX_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dv^j}{dt} X_j.$$

Aplicando o item (c) em X_j,

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \tag{1.4}$$

logo

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} v^j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{dv^j}{dt} X_j. \tag{1.5}$$

Se existe uma correspondência satisfazendo (a), (b) e (c), sua expressão em um sistema de coordenandas $\mathtt{x}$ com $\mathtt{x}(U) \cap c(I) \neq \emptyset$ é dado em (1.5) e, consequentemente, essa correspondência é única. No intuito de mostrar a existência, definimos em $\mathtt{x}(U)$, $\dfrac{DV}{dt}$, por (1.5). As definições concordam em $\mathtt{y}(W) \cap \mathtt{x}(U) \neq \emptyset$, pela unicidade de $\dfrac{DV}{dt}$ em $\mathtt{x}(U)$. Portanto, $\dfrac{DV}{dt}$ pode ser estendido a M. □

Definição 1.4.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é dito* paralelo *quando $\dfrac{DV}{dt} = 0$, para cada $t \in I$.*

Proposição 1.4.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Sejam $c : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em M e $V_0 \in T_{c(t_0)}M$, $t_0 \in I$. Então, existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c tal que $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ é denominado o* transporte paralelo *de V_0 ao longo de c.*

Demonstração. Admitamos que a proposição foi provada para o caso em que $c(I)$ está contido em uma vizinhança coordenada. Por compacidade, para todo $t_1 \in I$, $c([t_0, t_1]) \subset M$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças coordenadas; em cada uma delas existe um único campo de vetores V. Logo, as definições de V coincidem nas interseções não-vazias. Portanto, podemos definir V sobre $c([t_0, t_1])$. Devemos, portanto, provar o caso em que $c(I)$ está contido numa vizinhança coordenada $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$. Sejam $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (\mathtt{x}^{-1} \circ c)(t)$ e $V_0 = \sum_{j=1}^{n} v_0^j X_j$, onde $X_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$.
Se existe um campo vetorial V em $\mathtt{x}(U)$, paralelo ao longo de c, satisfazendo

a condição $V(t_0) = V_0$, então $V = \sum_{j=1}^{n} v^j X_j$ satisfaz

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{DV}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} v^j \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{dv^k}{dt} X_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right\} X_k.
\end{aligned}
$$

Isso acontece se, e somente se, $\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Portanto, obtemos um sistema linear de n equações diferenciais em $v^k(t)$ que possui uma única solução em I para a condição inicial $V(t_0) = V_0$. $\square$

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão ∇ é dita *compatível* com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle$ constante.

Proposição 1.4.3. *Seja M uma variedade riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo de uma curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$, tem-se*

$$
\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle. \tag{1.6}
$$

Demonstração. Obviamente, se (1.6) for verificado a conexão ∇ é compatível com a métrica. No intuito de mostrar a recíproca, escolhemos uma base ortonormal $\{P_1(t_0), \ldots, P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}M$, $t_0 \in I$. Utilizando a Proposição 1.4.2, estenda $P_i(t_0)$ paralelamente ao longo de c, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como ∇ é compatível com a métrica temos que $\{P_1(t), \ldots, P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}M$, $t \in I$. Além disso,

$$
V = \sum_{i=1}^{n} v^i P_i \quad \text{e} \quad W = \sum_{i=1}^{n} w^i P_i,
$$

onde v^i e w^i são funções reais diferenciáveis em I. Daí

$$
\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv^i}{dt} P_i \quad \text{e} \quad \frac{DW}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dw^i}{dt} P_i.
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \frac{dv^j}{dt} P_j, \sum_{i=1}^{n} w^i P_i \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_{j=1}^{n} v^j P_j, \sum_{i=1}^{n} \frac{dw^i}{dt} P_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(v^i w^i) \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle .
\end{aligned}$$

□

Corolário 1.4.1. *Uma conexão ∇ numa variedade riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle , \ \forall \ X, Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{1.7}$$

Demonstração. Suponha que a conexão é compatível com a métrica. Dado $p \in M$, seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$ e $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} = X(p)$. Então

$$\begin{aligned}
X(p) \langle Y, Z \rangle &= \left.\frac{d}{dt} \langle Y(c(t)), Z(c(t)) \rangle \right|_{t=t_0} = \left.\left\langle \frac{DV}{dt}, Z(c(t)) \right\rangle \right|_{t=t_0} \\
&\quad + \left.\left\langle Y(c(t)), \frac{DZ}{dt} \right\rangle \right|_{t=t_0} \\
&= \left.\left\langle \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y, Z(c(t)) \right\rangle \right|_{t=t_0} + \left.\left\langle Y(c(t)), \nabla_{\frac{dc}{dt}} Z \right\rangle \right|_{t=t_0} \\
&= \left\langle \nabla_{X(p)} Y, Z(p) \right\rangle + \left\langle Y(p), \nabla_{X(p)} Z \right\rangle .
\end{aligned}$$

Como p é arbitrário,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle .$$

Reciprocamente, se $c : I \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável e $V(t) = Y(c(t))$, $W(t) = Z(c(t))$ são campos vetoriais paralelos ao longo de c, então, tomando $X(c(t)) = \dfrac{dc}{dt}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle &= \frac{dc}{dt}\langle Y, Z\rangle = X(c(t))\langle Y, Z\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{X(c(t))}Y, Z(c(t))\right\rangle + \left\langle Y(c(t)), \nabla_{X(c(t))}Z(c(t))\right\rangle \\
&= \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, ∇ e $\langle , \rangle$ são compatíveis. □

Definição 1.4.3. *Uma conexão afim numa variedade diferenciável é dita* simétrica *quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{1.8}$$

Em um sistema de coordenadas $(U, \mathtt{x})$, a simetria de ∇ implica

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = X_i X_j - X_j X_i = 0.$$

Em outras palavras,

$$\sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X_k = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \ \forall i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Teorema 1.4.1 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M, simétrica e compatível com a métrica riemanniana.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente a existência de uma tal conexão ∇. Como tal conexão é compatível com a métrica, tem-se

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{1.9}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \tag{1.10}$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{1.11}$$

logo

$$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle = \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Z],Y\rangle + 2\langle \nabla_Y X, Z\rangle.$$

Daí

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle) \\ &-\frac{1}{2}(\langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Z],Y\rangle). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Se existir outra conexão $\overline{\nabla}$ satisfazendo as condições do teorema, então automaticamente $\overline{\nabla}$ satisfaz (1.12). Assim

$$\left\langle Z, \nabla_X Y - \overline{\nabla}_X Y \right\rangle = 0, \ \forall\ Z \in \mathcal{X}(M).$$

Consequentemente,

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y, \ \forall\ X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Em outras palavras, a conexão ∇ está univocamente determinada pela expressão (1.12). Mostraremos neste momento a existência de uma conexão afim simétrica e compatível com a métrica riemanniana. Para isso, defina $\nabla_Y X$ pela equação (1.12). Esta conexão é simétrica. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z\rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle) \\ &-\frac{1}{2}(\langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Z],Y\rangle), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}(Y\langle X,Z\rangle + X\langle Y,Z\rangle - Z\langle Y,X\rangle) \\ &-\frac{1}{2}(\langle [Y,X],Z\rangle + \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle). \end{aligned}$$

Logo

$$\langle Z, \nabla_Y X - \nabla_X Y\rangle = \langle Z, [X,Y]\rangle, \ \forall Z \in \mathcal{X}(M).$$

Portanto,

$$[X,Y] = \nabla_Y X - \nabla_X Y.$$

A conexão que definimos é compatível com a métrica riemanniana, pois para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle &= \frac{1}{2}(Y \langle X, Z \rangle + X \langle Y, Z \rangle - Z \langle Y, X \rangle) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\langle [Y, X], Z \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle) \\
&\quad + \frac{1}{2}(Z \langle X, Y \rangle + X \langle Z, Y \rangle - Y \langle Z, X \rangle) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\langle [Z, X], Y \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, Y], X \rangle) \\
&= X \langle Y, Z \rangle .
\end{aligned}$$

□

A conexão dada pelo Teorema de Levi-Civita é denominada *conexão de Levi-Civita* ou *conexão riemanniana.*

Com relação a um sistema de coordenadas $(U, \mathtt{x})$, as funções Γ_{ij}^k definidas em U por

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$$

são ditas *coeficientes de Christoffel* da conexão ∇. Aplicando (1.12) em X_i, X_j e X_k, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \right\rangle &= \frac{1}{2}(X_i \langle X_j, X_k \rangle + X_j \langle X_i, X_k \rangle - X_k \langle X_i, X_j \rangle) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\langle [X_i, X_j], X_k \rangle + \langle [X_j, X_k], X_i \rangle + \langle [X_i, X_k], X_j \rangle) \\
&= \frac{1}{2}(X_i g_{jk} + X_j g_{ik} - X_k g_{ij}).
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k, X_l \right\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k g_{lk} \\
&= \frac{1}{2}(X_i g_{jl} + X_j g_{il} - X_l g_{ij}).
\end{aligned}$$

Como (g_{lk}) admite uma inversa, temos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(X_i g_{jl} + X_j g_{il} - X_l g_{ij})g^{lk}. \tag{1.13}$$

A equação (1.13) é a expressão básica dos símbolos de Christoffel da conexão riemanniana em termos dos coeficientes g_{ij} da métrica riemanniana. Se $M = \mathbb{R}^n$ e $\Gamma_{ij}^k = 0$, então

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{dv^k}{dt}X_k = dV,$$

onde dV é a derivada usual em $\mathbb{R}^n$.

Do ponto de vista das formas diferenciais, dado um referencial móvel ortonormal $\{e_i\}$, as formas de conexão ω_{ij} dadas pela Proposição 1.3.1 satisfazem a seguinte relação

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j\rangle\,,$$

onde ∇ é a conexão riemanniana. Mostraremos que os ω_{ij} assim definidos satisfazem a primeira equação de estrutura e $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, sendo neste caso, ω_{ij} as formas de conexão do referencial ortonormal $e_1, \ldots, e_n$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
d\omega_i(e_j, e_k) &= e_k(\omega_i(e_j)) - e_j(\omega_i(e_k)) - w_i([e_j, e_k]) = -w_i([e_j, e_k]) \\
&= -\langle [e_j, e_k], e_i\rangle = \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i\rangle - \left\langle \nabla_{e_j} e_k, e_i\right\rangle \\
&= -\langle \nabla_{e_k} e_i, e_j\rangle + \left\langle \nabla_{e_j} e_i, e_k\right\rangle = \omega_{ik}(e_j) - \omega_{ij}(e_k) \\
&= \sum_{l=1}^{n}(\omega_l \wedge \omega_{il})(e_j, e_k),
\end{aligned}$$

para todo $j, k = 1, \ldots, n$. Logo

$$d\omega_i = \sum_{l=1}^{n}(\omega_l \wedge \omega_{il}).$$

Além disso, como a conexão riemanniana é compatível com a métrica riemanniana,

$$\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j\rangle = -\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i\rangle = -\omega_{ji}(e_k),\ \forall k = 1, \ldots, n.$$

Usando a linearidade da forma ω_{ij}, obtemos

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Definição 1.4.4. *Uma curva parametrizada* $\gamma : I \longrightarrow M$ *em uma variedade riemanniana* M *munida de uma conexão riemanniana* ∇ *é uma* geodésica *em* $t_0 \in I$ *se* $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)\Big|_{t_0} = 0$. *Se* γ *é geodésica em* t, *para todo* $t \in I$, *dizemos que* γ *é uma* geodésica. *Se* $[a,b] \subset I$ *e* $\gamma : I \longrightarrow M$ *é uma geodésica,* $\gamma|_{[a,b]}$ *é chamado de* segmento geodésico *ligando* $\gamma(a)$ *e* $\gamma(b)$, *ou simplesmente, geodésica ligando* $\gamma(a)$ *e* $\gamma(b)$.

1.5 Tensor numa Variedade Riemanniana

O conjunto $\mathcal{X}(M)$ é um módulo com relação ao anel dos escalares $\mathcal{D}(M)$, isto é, $\mathcal{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como escalares os elementos de $\mathcal{D}(M)$. Utilizando este fato, podemos definir tensores em $\mathcal{X}(M)$ como a seguir:

Definição 1.5.1 (Tensor). *Um* tensor T de ordem r *em uma variedade riemanniana* M *é uma aplicação multilinear*

$$T : \mathcal{X}(M) \times \ldots . \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M),$$

onde $\mathcal{X}(M)\times\ldots.\times\mathcal{X}(M)$ *tem* r *fatores. Isto é, dados quaisquer* $X, Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$, *tem-se*

$$\begin{aligned} T(Y_1, \ldots, fY_j + gX, Y_{j+1}, \ldots, Y_r) &= fT(Y_1, \ldots, Y_r) \\ &\quad + gT(Y_1, \ldots, Y_{j-1}, X, Y_{j+1}, \ldots, Y_r) \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, r$.

Fixemos $p \in M$ e seja U uma vizinhança de p em M na qual é possível definir campos $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{X}(M)$ de modo que, em cada $q \in U$, $\{e_i(q)\}_{i=1}^n$ seja uma base de T_qM. Neste caso, o conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um *referencial móvel* em U.

Dados $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$, consideremos as suas restrições a U, representadas em relação ao referencial móvel escolhido, por

$$Y_k = \sum_{i_k=1}^{n} y_{i_k} e_{i_k},\ k = 1, \ldots, r.$$

Decorre da linearidade de T que

$$T(Y_1, \ldots, Y_r) = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} y_{i_1} \cdots y_{i_r} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}). \tag{1.14}$$

As funções $T_{i_1\ldots i_r} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$ em U são ditas as *componentes de* T no referencial $\{e_i\}$. Note em (1.14) que $T(Y_1, \ldots, Y_r)(p)$ depende somente dos valores $Y_1(p), \ldots, Y_r(p)$ e dos valores das componentes de T em p. Neste caso, dizemos que T é um objeto pontual, pois podemos visualizá-lo com o domínio em $T_pM \times \cdots \times T_pM$.

O tensor T é diferenciável em $p \in M$ se, escolhido um referencial móvel $\{e_i\}$, as componentes de T em relação a este referencial são diferenciáveis em p. O tensor T é diferenciável em M se é diferenciável em cada $p \in M$. No decorrer desta dissertação, diremos somente que T é um tensor, omitindo a palavra diferenciável.

Um tensor, similarmente a um campo de vetores, pode ser derivado. A definição seguinte introduz a noção de derivada de tensores.

Definição 1.5.2. *Seja T um tensor de ordem r. A* diferencial covariante *∇T de T é o tensor de ordem $r+1$ dado por*

$$\nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \ldots, Y_r) - \cdots - T(Y_1, \ldots, \nabla_Z Y_r) \tag{1.15}$$

para todo $Y_1, \ldots, Y_r, Z \in \mathcal{X}(M)$. Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$ a derivada covariante *$\nabla_Z T$ de T em relação a Z é o tensor de ordem r dado por*

$$\nabla_Z T(Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z).$$

Em relação a um referencial ortonormal $\{e_i\}$ as componentes $T_{i_1\cdots i_r j} = \nabla T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, e_j)$ de um tensor T satisfazem

$$\sum_{k=1}^{n} T_{i_1\cdots i_r k}\omega_k = dT_{i_1\cdots i_r} + \sum_{k=1}^{n} T_{k i_2\cdots i_r}\omega_{k i_1} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} T_{i_1\cdots i_{r-1} k}\omega_{k i_r}. \tag{1.16}$$

De fato, como $\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$, obtemos que

$$\begin{aligned} T_{i_1\ldots i_r j} &= \nabla T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, e_j) \\ &= e_j(T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})) - T(\nabla_{e_j} e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) - \cdots - T(e_{i_1}, \ldots, \nabla_{e_j} e_{i_r}) \\ &= dT_{i_1\ldots i_r}(e_j) - T\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_{i_1 k}(e_j) e_k, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}\right) - \ldots \\ &\quad - T\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{r-1}}, \sum_{k=1}^{n} \omega_{i_r k}(e_j) e_k\right). \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$\sum_{k=1}^{n} T_{i_1\ldots i_r k}\omega_k(e_j) = \left(dT_{i_1\ldots i_r} - \sum_{k=1}^{n} T_{k i_2\ldots i_r}\omega_{i_1 k} - \ldots. - \sum_{k=1}^{n} T_{i_1\ldots i_{r-1}k}\omega_{i_r k}\right)(e_j),$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} T_{i_1\ldots i_r k}\omega_k = dT_{i_1\ldots i_r} + \sum_{k=1}^{n} T_{k i_2\ldots i_r}\omega_{k i_1} + \ldots. + \sum_{k=1}^{n} T_{i_1\ldots i_{r-1}k}\omega_{k i_r}.$$

Como queríamos demonstrar.

Definição 1.5.3 (Gradiente de f)**.** *Sejam M uma variedade riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. O campo vetorial* $\operatorname{grad} f : M \longrightarrow TM$ *definido por*

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle = df_p(v), p \in M, v \in T_pM$$

é denominado gradiente *de f. Em outras palavras,* $\operatorname{grad} f$ *é o dual na métrica riemanniana da forma df.*

Definição 1.5.4 (Divergência e Laplaciano)**.** *Sejam M uma variedade riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$. A* divergência *de X é a função* $\operatorname{div} X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\operatorname{div} X(p) = \text{ traço da aplicação linear } (Y(p) \longrightarrow (\nabla_Y X)(p)).$$

O Laplaciano *de M é o operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ dado por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \ \forall f \in \mathcal{D}(M).$$

Considerando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ num aberto $U \subset M$, podemos escrever, em U, $df = \sum_{i=1}^{n} f_i w_i$, onde ω_i, $i = 1, \ldots, n$ são as n 1-formas duais associadas ao referencial $\{e_i\}$. A função f_i é dita a *derivada de f* na direção de e_i. Além disso, $f_i = df(e_i)$, isto é, $\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$. A *derivada covariante* de df é dada por

$$\nabla(df) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\omega_i \otimes \omega_j),$$

onde

$$(\omega_i \otimes \omega_j)(e_k, e_l) = \omega_i(e_k)\omega_j(e_l) \ \text{ e } \ \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j\omega_{ji}.$$

A forma bilinear $\nabla(df)$ é denominada *hessiana* de f na métrica de M. O traço desta forma bilinear, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ii} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

é, exatamente, o *Laplaciano de* f.

1.6 Curvaturas

Definição 1.6.1. *A curvatura R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde ∇ é uma conexão riemanniana de M.

Observação 1.6.1. Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, se indicarmos $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ e $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$, teremos

$$\nabla_X Z = \nabla_X \left(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (z_i \nabla_X e_i + X(z_i) e_i) = \sum_{i=1}^{n} X(z_i) e_i.$$

Logo, pelo mesmo processo, temos

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^{n} Y(X(z_i)) e_i$$

e

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \sum_{i=1}^{n} X(Y(z_i)) e_i.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z &= \sum_{i=1}^{n} Y(X(z_i)) e_i - \sum_{i=1}^{n} X(Y(z_i)) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} [Y(X(z_i)) - X(Y(z_i))] e_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} (XY - YX)(z_i) e_i = -\nabla_{[X,Y]} Z.
\end{aligned}$$

Portanto, $R(X,Y)Z = 0$. Podemos pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiano.

Em um sistema de coordenadas $(\mathtt{x}, U)$ em torno de $p \in M$,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k + \nabla_{[X_i,X_j]}X_k \\ &= \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k + \nabla_0 X_k \\ &= (\nabla_{X_j}\nabla_{X_i} - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j})X_k. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a curvatura mede a não comutatividade da derivada covariante.

Proposição 1.6.1. *A curvatura R de uma variedade riemanniana M goza das seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é, dados $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$,*

$$R(fX + gY, Z) = fR(X,Z) + gR(Y,Z),$$
$$R(X, fY + gZ) = fR(X,Y) + gR(X,Z);$$

(ii) *Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ o operador $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é, para quaisquer $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathcal{X}(M)$, tem-se*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z.$$

Demonstração. Dados $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}
R(fX+gY,Z)W &= \nabla_Z\nabla_{fX+gY}W - \nabla_{fX+gY}\nabla_Z W + \nabla_{[fX+gY,Z]}W \\
&= \nabla_Z(f\nabla_X W) + \nabla_Z(g\nabla_Y W) - f\nabla_X\nabla_Z W \\
&\quad -g\nabla_Y\nabla_Z W + \nabla_{f[X,Z]-Z(f)X+g[Y,Z]-Z(g)Y}W \\
&= f\nabla_Z\nabla_X W + Z(f)\nabla_X W + g\nabla_Z\nabla_Y W + Z(g)\nabla_Y W \\
&\quad -f\nabla_X\nabla_Z W - g\nabla_Y\nabla_Z W + f\nabla_{[X,Z]}W \\
&\quad -Z(f)\nabla_X W + g\nabla_{[Y,Z]}W - Z(g)\nabla_Y W \\
&= f(\nabla_Z\nabla_X W - \nabla_X\nabla_Z W + \nabla_{[X,Z]}W) \\
&\quad +g(\nabla_Z\nabla_X W - \nabla_X\nabla_Z W + \nabla_{[X,Z]}W) \\
&= fR(X,Z)W + gR(Y,Z)W,
\end{aligned}$$

logo

$$R(fX+gY,Z) = fR(X,Z) + gR(Y,Z).$$

Como

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= -(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[Y,X]}Z) = -R(Y,X)Z,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
R(X,fY+gZ)W &= -R(fY+gZ,X)W = -fR(Y,X)W - gR(Z,X)W \\
&= fR(X,Y)W + gR(X,Z)W.
\end{aligned}$$

Concluindo, com isso, a prova do item (i). Demostraremos agora o item (ii).

Suponhamos $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$, então

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(fZ+gW) &= \nabla_Y\nabla_X(fZ+gW) - \nabla_X\nabla_Y(fZ+gW) \\
&\quad +\nabla_{[X,Y]}(fZ+gW) \\
&= \nabla_Y(f\nabla_X Z + X(f)Z + g\nabla_X W + X(g)W) \\
&\quad -\nabla_X(f\nabla_Y Z + Y(f)Z + g\nabla_Y W + Y(g)W) \\
&\quad +f\nabla_{[X,Y]}Z + [X,Y](f)Z + g\nabla_{[X,Y]}W \\
&\quad +[X,Y](g)W \\
&= f\nabla_Y\nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z \\
&\quad +(YX)(f)Z + g\nabla_Y\nabla_X W + Y(g)\nabla_X W \\
&\quad +X(g)\nabla_Y W + (YX)(g)W - f\nabla_X\nabla_Y Z \\
&\quad -X(f)\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - (XY)(f)Z \\
&\quad -g\nabla_X\nabla_Y W - X(g)\nabla_Y W \\
&\quad -Y(g)\nabla_X W - (XY)(g)W + f\nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad +[X,Y](f)Z + g\nabla_{[X,Y]}W + [X,Y](g)W \\
&= f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_X\nabla_Y Z + (YX)(f)Z \\
&\quad -(XY)(f)Z + g\nabla_Y\nabla_X W - g\nabla_X\nabla_Y W \\
&\quad +(YX)(g)W - (XY)(g)W + f\nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad +[X,Y](f)Z + g\nabla_{[X,Y]}W + [X,Y](g)W \\
&= fR(X,Y)Z + gR(X,Y)W.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.6.2 (Primeira identidade de Bianchi).

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Demonstração. Temos que

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$R(Y,Z)X = \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X,$$

$$R(Z,X)Y = \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]} Y.$$

Somando as três igualdades acima, membro a membro, e observando que a conexão é simétrica, i.e. $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, obtemos

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X \\ &\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]} Y \\ &= -\nabla_Y [Z,X] - \nabla_X [Y,Z] - \nabla_{[Y,X]} Z \\ &\quad + \nabla_Z [Y,X] + \nabla_{[Y,Z]} X + \nabla_{[Z,X]} Y \\ &= [X,[Z,Y]] + [Z,[X,Y]] \\ &\quad + [Y,[Z,X]] = 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é proveniente da identidade de Jacobi. $\square$

Consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} R = (\ ,\ ,\ ,\ ) : & \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{D}(M) \\ & (X,Y,Z,W) & \longmapsto & \langle R(X,Y)Z, W \rangle . \end{array}$$

A aplicação R é um tensor de ordem 4 denominado *tensor curvatura* de M.

Proposição 1.6.3 (Propriedades). *Para quaisquer $X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$ são válidas as seguintes relações*

(*a*) $(X,Y,Z,W) + (Y,Z,X,W) + (Z,X,Y,W) = 0$;

(*b*) $(X,Y,Z,W) = -(Y,X,Z,W)$;

(*c*) $(X,Y,Z,W) = -(X,Y,W,Z)$;

(*d*) $(X,Y,Z,W) = (Z,W,X,Y)$.

Demonstração. Para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$, temos

(a)

$$(X,Y,Z,W) + (Y,Z,X,W) + (Z,X,Y,W) =$$

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle =$$

$$\langle R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y, W\rangle = \langle 0, W\rangle = 0;$$

(b)

$$\begin{aligned} (X,Y,Z,W) &= \langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle \\ &= -(Y,X,Z,W); \end{aligned}$$

(c) Como ∇ é uma conexão riemanniana, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W\rangle &= Y(\langle \nabla_X Z, W\rangle) - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle \\ &= Y(\langle \nabla_X Z, W\rangle) - X(\langle Z, \nabla_Y W\rangle) + \langle Z, \nabla_X \nabla_Y W\rangle ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W\rangle &= X(\langle \nabla_Y Z, W\rangle) - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle \\ &= X(\langle \nabla_Y Z, W\rangle) - Y(\langle Z, \nabla_X W\rangle) + \langle Z, \nabla_Y \nabla_X W\rangle ; \end{aligned}$$

$$\left\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\right\rangle = [X,Y](\langle Z, W\rangle) - \left\langle Z, \nabla_{[X,Y]} W\right\rangle .$$

Logo

$$\begin{aligned} (X,Y,Z,W) &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W\rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W\rangle + \left\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\right\rangle \\ &= Y(\langle \nabla_X Z, W\rangle) - X(\langle Z, \nabla_Y W\rangle) + \langle Z, \nabla_X \nabla_Y W\rangle \\ &\quad -X(\langle \nabla_Y Z, W\rangle) + Y(\langle Z, \nabla_X W\rangle) - \langle Z, \nabla_Y \nabla_X W\rangle \\ &\quad +[X,Y](\langle Z, W\rangle) - \left\langle Z, \nabla_{[X,Y]} W\right\rangle \\ &= Y(\langle \nabla_X Z, W\rangle + \langle Z, \nabla_X W\rangle) - X(\langle Z, \nabla_Y W\rangle \\ &\quad + \langle \nabla_Y Z, W\rangle) \\ &= YX(\langle Z, W\rangle) - XY(\langle Z, W\rangle) \\ &\quad -(X,Y,W,Z) + [X,Y](\langle Z, W\rangle) = -(X,Y,W,Z). \end{aligned}$$

(d) Permutando X, Y, Z, W no item (a),

$$(X,Y,Z,W) + (Y,Z,X,W) + (Z,X,Y,W) = 0;$$

$$(Z,W,X,Y) + (W,X,Z,Y) + (X,Z,W,Y) = 0;$$

$$(Y,Z,W,X) + (Z,W,Y,X) + (W,Y,Z,X) = 0;$$

$$(W,X,Y,Z) + (X,Y,W,Z) + (Y,W,X,Z) = 0.$$

Somando as quatro igualdades acima, membro a membro, e somando os opostos no lado esquerdo das igualdades, dados pelos itens (b) e (c), obtemos a expressão

$$2(X,Z,W,Y) + 2(Y,W,X,Z) = 0.$$

Portanto,

$$(X,Z,W,Y) = -(Y,W,X,Z). \tag{1.17}$$

Aplicando (1.17) no segundo termo da segunda igualdade abaixo, temos

$$\begin{aligned}(X,Y,Z,W) &= -(Y,Z,X,W) - (Z,X,Y,W)\\ &= +(Y,Z,W,X) + (Y,W,X,Z)\\ &= -(Z,W,Y,X) = (Z,W,X,Y).\end{aligned}$$

□

Em um sistema de coordenadas $(U, \mathtt{x})$ em torno de um ponto $p \in M$, obtemos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^{l} X_l,$$

donde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e R_{ijk}^{l} é a componente da curvatura em $(U, \mathtt{x})$. Assim, dados $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j$ e $Z = \sum_{k=1}^{n} z_k X_k$ obtemos da linearidade de $R(X,Y)$ que

$$R(X,Y)Z = \sum_{k=1}^{n} z_k R(X,Y)X_k.$$

Como R bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$,

$$R(X,Y)X_k = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j R(X_i, X_j)X_k.$$

Daí

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j z_k R(X_i, X_j) X_k = \sum_{i,j,k,l} x_i y_j z_k R_{ijk}^l X_l.$$

Agora, expressaremos os componentes da curvatura em termos dos símbolos de Christoffel.

$$\begin{aligned}
R\left(X_i, X_j\right) X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\
&= \sum_{s=1}^{n} \Gamma_{ik}^s \nabla_{X_j} X_s + \sum_{s=1}^{n} X_j\left(\Gamma_{ik}^s\right) X_s - \sum_{s=1}^{n} \Gamma_{jk}^s \nabla_{X_i} X_s \\
&\quad - \sum_{s=1}^{n} X_i\left(\Gamma_{jk}^s\right) X_s \\
&= \sum_{s,l=1}^{n} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l X_l - \sum_{s,l=1}^{n} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l X_l + \sum_{s=1}^{n} \left(X_j\left(\Gamma_{ik}^s\right) - X_i\left(\Gamma_{jk}^s\right)\right) X_s \\
&= \sum_{s,l=1}^{n} \left(\Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l\right) X_l + \sum_{s=1}^{n} \left(X_j\left(\Gamma_{ik}^s\right) - X_i\left(\Gamma_{jk}^s\right)\right) X_s \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} \left(\Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l\right) + X_j\left(\Gamma_{ik}^l\right) - X_i\left(\Gamma_{jk}^l\right) \right) X_l.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^l X_l &= R\left(X_i, X_j\right) X_k \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{n} \left(\Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l\right) + X_j\left(\Gamma_{ik}^l\right) - X_i\left(\Gamma_{jk}^l\right) \right) X_l,
\end{aligned}$$

isto é,

$$R_{ijk}^l = \sum_{s=1}^{n} \left(\Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l\right) + X_j\left(\Gamma_{ik}^l\right) - X_i\left(\Gamma_{jk}^l\right).$$

Consequentemente, a curvatura depende apenas dos valores de X, Y, Z em p e dos valores das funções Γ_{ij}^k em p, permitindo-nos considerar $R(x,y)z$, para x, y, z em T_pM. Além disso, todas as relações encontradas para X, Y, Z em $\mathcal{X}(M)$ continuam sendo válidas.

Seja V um espaço vetorial. A expressão

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

representa a área do paralelogramo bidimensional determinado por $x, y \in V$.

Proposição 1.6.4. *Seja σ um subespaço bidimensional de T_pM e sejam x, y vetores linearmente independentes em σ, então*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende dos valores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $ax + by$ e $cx + dy$ são linearmente independentes, temos

$$K(ax + by, cx + dy) = \frac{(ax + by, cx + dy, ax + by, cx + dy)}{|(ax + by) \wedge (cx + dy)|^2} = K(x, y),$$

pois

$$|(ax + by) \wedge (cx + dy)|^2 = (ad - bc)^2.$$

Usando a linearidade e as propriedades de (, , ,), lembrando que

$$(x, x, y, z) = 0$$

para quaisquer $x, y, z \in T_pM$, obtemos

$$\begin{aligned}
&(ax + by, cx + dy, ax + by, cx + dy) = \\
&= a(x, cx + dy, ax + by, cx + dy) + b(y, cx + dy, ax + by, cx + dy) \\
&= ad(x, y, ax + by, cx + dy) + bc(y, x, ax + by, cx + dy) \\
&= a^2d(x, y, x, cx + dy) + adb(x, y, y, cx + dy) \\
&\quad + bca(y, x, x, cx + dy) + b^2c(y, x, y, cx + dy) \\
&= a^2d^2(x, y, x, y) + adbc(x, y, y, x) + bcad(y, x, x, y) + b^2c^2(y, x, y, x) \\
&= (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)(x, y, x, y) = (ad - bc)^2(x, y, x, y).
\end{aligned}$$

□

A proposição anterior mostra que K independe da base de σ escolhida. Logo, podemos definir para um subespaço bidimensional σ de T_pM a *curvatura seccional de σ em p* pelo número real

$$K(\sigma) = K(x, y),$$

onde $\{x, y\}$ é uma base de σ.

Proposição 1.6.5. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n, $n \geq 2$, munido de um produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Sejam $R, R' : V \times V \times V \longrightarrow V$ aplicações trilineares que satisfazem as condições da Proposição1.6.3 para*

$$(x, y, z, w) = \langle R(x, y, z), w\rangle \ e \ (x, y, z, w)' = \langle R'(x, y, z), w\rangle \, .$$

Se x, y são dois vetores linearmente independentes, escrevemos

$$K(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \quad e \quad K'(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)'}{|x \wedge y|^2},$$

onde σ é o subespaço bidimensional gerado por x, y. Se para todo $\sigma \subset V$ tivermos $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.

Demonstração. Suponhamos que $K(\sigma) = K'(\sigma)$ para todo σ, então

$$(x, y, x, y) = (x, y, x, y)'$$

para quaisquer $x, y \in V$ linearmente independentes. Mostraremos que

$$(x, y, z, w) = (x, y, z, w)'.$$

Como

$$(x + z, y, x + z, y) = (x, y, x, y) + (x, y, z, y) + (z, y, x, y) + (z, y, z, y),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
(x, y, z, y) &= \frac{1}{2}\left((x + z, y, x + z, y) - (x, y, x, y) - (z, y, z, y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x + z, y, x + z, y)' - (x, y, x, y)' - (z, y, z, y)'\right) \\
&= (x, y, z, y)'.
\end{aligned}$$

Assim, $(x, y + w, z, y + w) = (x, y + w, z, y + w)'$ implica

$$(x, y, z, w) - (x, y, z, w)' = (y, z, x, w) - (y, z, x, w)'$$

Logo, a expressão $(x, y, z, w) - (x, y, z, w)'$ é invariante pela permutação dos três primeiros elementos e, consequentemente,

$$\begin{aligned} 0 &= (x, y, z, w) + (y, z, x, w) + (z, x, y, w) \\ &\quad -[(x, y, z, w)' + (y, z, x, w)' + (y, z, x, w)'] \\ &= [(x, y, z, w) - (x, y, z, w)'] + [(y, z, x, w) - (y, z, x, w)'] \\ &\quad +[(z, x, y, w) - (y, z, x, w)'] \\ &= 3[(x, y, z, w) - (x, y, z, w)'], \end{aligned}$$

ou seja,

$$(x, y, z, w) = (x, y, z, w)'.$$

Portanto, $R = R'$. □

Corolário 1.6.1. *Sejam M uma variedade riemanniana e $p \in M$. Defina $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ por*

$$\langle R'(x, y, z), w\rangle = \langle x, z\rangle \langle y, w\rangle - \langle y, z\rangle \langle x, w\rangle\,,\ \forall x, y, z, w \in T_pM.$$

Então M tem curvatura seccional constante K_0 em p se, e somente se, $R = K_0R'$, onde R é a curvatura de M.

Demonstração. Admitindo que $K(p, \sigma) = K_0$ para todo subespaço bidimensional $\sigma \in T_pM$ e

$$(x, y, z, w)' = \langle R'(x, y, z), w\rangle\,,$$

vemos que $(x, y, z, w)'$ satisfaz as propriedades expostas na Proposição1.6.3. Além disso,

$$(x, y, x, y)' = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - \langle y, x\rangle \langle x, y\rangle = |x \wedge y|^2.$$

Daí, $K' = 1$ e, consequentemente,

$$K(p, \sigma) = K_0 = K_0K'(p, \sigma),\ \forall\ \sigma \subset T_pM.$$

Obtemos da Proposição 1.6.5 que

$$R = K_0R'.$$

□

Corolário 1.6.2. *Sejam M^n uma variedade riemanniana, $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Então, M tem curvatura seccional constante K_0 em p se, e somente se,*

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

onde

$$R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle \;\; e \;\; \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j, \end{cases}$$

para todo $i, j, k, l = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Se M tem curvatura seccional constante em p, pelo Corolário 1.6.1, $R = K_0R'$, logo

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= K_0 \langle R'(e_i, e_j, e_k), e_l\rangle = K_0(\langle e_i, e_k\rangle \langle e_j, e_l\rangle - \langle e_j, e_k\rangle \langle e_i, e_l\rangle) \\ &= K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$ temos que

$$K(e_i, e_j) = R_{ijij} = K_0.$$

Como K não depende dos vetores linearmente independentes escolhidos,

$$K(\sigma) = K_0, \forall\, \sigma \subset T_pM.$$

□

Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal na variedade riemanniana M e $\omega_i, i = 1, \ldots, n$ suas $1-$formas duais associadas. Defina as 2-formas Ω_{ij} por

$$\Omega_{ij}(X, Y) = \langle R(X, Y)e_j, e_i\rangle\,, \;\forall\; X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{1.18}$$

As formas Ω_{ij} são chamadas as *formas de curvatura* de M. Provaremos que as Ω_{ij} definidas por (1.18) satisfazem a *segunda equação de estrutura*, isto é,

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n} w_{ik} \wedge \omega_{kj}. \tag{1.19}$$

Como Ω_{ij} é bilinear, só precisamos mostrar que

$$\Omega_{ij}(e_k, e_l) = R_{klji} = -\sum_{r=1}^{n}(\omega_{ir} \wedge \omega_{rj})(e_k, e_l) + d\omega_{ij}(e_k, e_l), \;\forall\; k, l = 1, \ldots, n.$$

Observemos que $w_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$. Daí

$$\langle \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle = \sum_{r=1}^{n} \omega_{ir}(e_k) \langle \nabla_{e_l} e_r, e_j \rangle = \sum_{r=1}^{n} \omega_{ir}(e_k) \omega_{rj}(e_l).$$

Assim

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij}(e_k, e_l) &= R_{klji} = \langle R(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle \\
&= \langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_l} e_j, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle + \left\langle \nabla_{[e_k, e_l]} e_j, e_i \right\rangle \\
&= \sum_{r=1}^{n} \omega_{jr}(e_l) \omega_{ri}(e_k) - \sum_{r=1}^{n} \omega_{jr}(e_k) \omega_{ri}(e_l) + \omega_{ji}([e_k, e_l]) \\
&= \sum_{r=1}^{n} \omega_{ir}(e_l) \omega_{rj}(e_k) - \sum_{r=1}^{n} \omega_{ir}(e_k) \omega_{rj}(e_l) + \omega_{ji}([e_k, e_l]) \\
&= -\sum_{r=1}^{n} (\omega_{ir} \wedge \omega_{rj})(e_k, e_l) + d\omega_{ij}(e_k, e_l),
\end{aligned}$$

pois $d\omega_{ij}(e_k, e_l) = \omega_{ji}([e_k, e_l])$. Provando a afirmação.

A primeira equação de Bianchi, em termos de formas, é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \Omega_{ij} = 0.$$

Visto que Ω_{ij} é uma forma de grau 2, ela pode ser representada por

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} R_{ijkl} \left(\omega_k \wedge \omega_l \right).$$

Além disso, se σ é o subespaço gerado por $\{e_i, e_j\}$, temos que

$$K_p(\sigma) = (\Omega_{ij})_p(e_i, e_j).$$

Sejam $x = e_n$ um vetor unitário de T_pM e $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$\mathrm{Ric}\,_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, e_i)x, e_i \rangle,$$

$$R(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}_{\,p}(e_i) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle \,.$$

As médias acima são denominadas, respectivamente, *curvatura de Ricci* na direção de x e *curvatura escalar*(ou *média*) em p.

Provaremos que essas médias não dependem da base de T_pM escolhida. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcll} Q: & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & Q(x,y) = tr(z \longmapsto R(x,z)y). \end{array}$$

Observação 1.6.2. Q é uma aplicação bilinear simétrica.

Com efeito, considerando, para facilitar os cálculos, a base ortonormal de T_pM escolhida acima, temos que

$$Q(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x, e_i, y, e_i) = \sum_{i=1}^{n}(y, e_i, x, e_i) = Q(y,x), \ \forall x, y \in T_pM.$$

Logo, Q é simétrica. Além disso,

$$\begin{aligned} Q(x+\alpha y, z) &= \sum_{i=1}^{n}(x+\alpha y, e_i, z, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x, e_i, z, e_i) + \sum_{i=1}^{n}\alpha(y, e_i, z, e_i) \\ &= Q(x,z) + \alpha Q(y,z), \ \forall x, y, z \in T_pM, \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Usando a simétria de Q e sua linearidade em relação ao primeiro argumento, obtemos sua bilinearidade.

Note que

$$\frac{1}{n-1}Q(x,x) = \mathrm{Ric}_{\,p}(x),$$

logo a curvatura de Ricci na direção de x está definida de tal modo que não depende da base de T_pM escolhida. Por outro lado, existe uma aplicação autoadjunta $A : T_pM \longrightarrow T_pM$ associada a forma bilinear Q, isto é,

$$\langle Ax, y\rangle = Q(x,y), \ \forall x, y \in T_pM.$$

Portanto,

$$\mathrm{Ric}_{\,p}(x) = \frac{1}{n-1}\,\langle Ax, x\rangle.$$

Neste caso,

$$trA = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, e_i \rangle = (n-1) \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ric}_p(e_i) = (n-1)nR(p),$$

ou seja,

$$R(p) = \frac{1}{n(n-1)} trA.$$

Consequentemente, $R(p)$ também não depende da forma bilinear escolhida.

A forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ é denominada *tensor de Ricci.*

1.7 Imersões Isométricas

Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Pela Proposição 1.1.2, para quaisquer $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f|_U$ é um mergulho, isto é, $f(U)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Em outras palavras, existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ num aberto de $\mathbb{R}^k$ tal que φ aplica $f(U) \cap \overline{U}$ num aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

No intuito de simplificar a notação, identificaremos U e $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$ com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Dado $p \in M$, o produto interno em $T_{f(p)}\overline{M}$ decompõe $T_{f(p)}\overline{M}$ na soma direta

$$T_{f(p)}\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

onde $T_pM = df_p(T_pM)$ e $T_pM^{\perp} = (df_p(T_pM))^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_{f(p)}\overline{M}$. Denominamos *espaço normal da imersão* f *em* p ao conjunto $T_pM^{\perp}$ e, por vezes, denotamos $T_pM^{\perp}$ por $N_p(M)$. Assim, cada $v \in T_{f(p)}\overline{M}$ pode ser escrito por

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM \quad \text{e} \quad v^N \in T_pM^{\perp}.$$

Diz-se que o vetor v^T é a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é diferenciável, no sentido de as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \longrightarrow (p, v^T) \;\; \text{e} \;\; (p, v) \longrightarrow (p, v^N)$$

serem diferenciáveis.

A partir da decomposição acima, obtemos o *fibrado normal* em M

$$TM^{\perp} = \bigcup_{p \in M} T_pM^{\perp}.$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} T\overline{M}|_{f(M)} &= \{X \in T\overline{M}; \pi(X) \in f(M), \pi : T\overline{M} \longrightarrow \overline{M} \text{ é a projeção}\} \\ &= TM \oplus TM^{\perp}. \end{aligned}$$

As projeções

$$(\ )^T : T\overline{M}|_{f(M)} \longrightarrow TM$$

e

$$(\ )^N : T\overline{M}|_{f(M)} \longrightarrow TM^{\perp}$$

são ditas *tangencial* e *normal*, respectivamente. A conexão riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e suas respectivas extensões locais a $\overline{M}$ são $\overline{X}$ e $\overline{Y}$, definimos a conexão em M por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Seja $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ o conjunto dos campos de vetores em U normais a $f(U) \approx U$. A aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é denominada *segunda forma fundamental* de f e independe das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. De fato, se $\overline{X}_1$ e $\overline{Y}_1$ são extensões de X e Y, respectivamente, então

$$\nabla_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y - (\nabla_{\overline{X}_1} \overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \nabla_{\overline{X} - \overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_{\overline{X}_1} (\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0 + 0 = 0,$$

pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ e $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ em U. Logo, em U, temos

$$\nabla_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y = \nabla_{\overline{X}_1} \overline{Y}_1 - \nabla_X Y = B(X,Y).$$

Proposição 1.7.1. *A aplicação B é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Dados $g \in \mathcal{D}(U)$ e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(U)$, sejam $\overline{g}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ suas respectivas extensões locais a $\overline{M}$, então

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X} - \nabla_X Y - (-\nabla_X Y + \nabla_Y X) \\ &= [\overline{X}, \overline{Y}] - [X,Y] + B(Y,X) = B(Y,X), \end{aligned}$$

porque, em M, $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X,Y]$. Provando, com isso, a simetria de B. Visto que

$$\begin{aligned} B(gX,Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{g}\ \overline{X}} \overline{Y} - \nabla_{gX} Y = \overline{g} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - g \nabla_X Y \\ &= gB(X,Y) \text{ em } \ M \end{aligned}$$

e usando a simetria de B,

$$B(X, gY) = B(gY, X) = gB(Y, X) = gB(X, Y).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} B(X+Y, Z) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}+\overline{Y}}\overline{Z} - \nabla_{X+Y} Z \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} - \nabla_X Z + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z} - \nabla_Y Z \\ &= B(X, Z) + B(Y, Z). \end{aligned}$$

Usando a simétria de B, obtemos

$$B(X, Y + Z) = B(X, Y) + B(X, Z).$$

Portanto, B é bilinear. $\square$

Observemos que $B(X, Y)(p)$ depende apenas dos valores $X(p)$ e $Y(p)$, assim, podemos considerar $B(x, y) = B(X, Y)(p)$, onde $x = X(p) \in T_pM$ e $y = Y(p) \in T_pM$. Como consequência da Proposição 1.7.1, dados $p \in M$ e $\eta \in T_pM^\perp$, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} H_\eta : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle \end{array}$$

é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.7.1. *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é denominada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

A aplicação H_η é bilinear simétrica no espaço vetorial T_pM. Portanto, existe uma única aplicação autoadjunta $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ associada a H_η satisfazendo

$$\langle S_\eta x, y \rangle = H_\eta(x, y), \ \forall \ x, y \in T_pM.$$

Proposição 1.7.2 (Fórmula de Weingarten)**.** *Sejam $p \in M, x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Dados $x, y \in T_pM$, denotemos por X e Y as extensões locais, respectivamente, de x e y tangentes a M e por $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ as extensões locais de X e Y, respectivamente, tangentes a $\overline{M}$, então

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta(x), y\rangle &= H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, N\right\rangle(p) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N\right\rangle(p) - \langle \nabla_X Y, N\rangle(p) = \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N\right\rangle(p) \\
&= -\left\langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}} N\right\rangle(p) = -\left\langle \overline{Y}, (\overline{\nabla}_{\overline{X}} N)^T\right\rangle(p) = -\left\langle y, (\overline{\nabla}_x N)^T\right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $S_\eta = -(\overline{\nabla}_x N)^T$. $\square$

Definição 1.7.2 (Imersão totalmente geodésica). *Uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$* é geodésica *em p se, para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$, a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão f é* totalmente geodésica *se for geodésica em todo ponto de M.*

Definição 1.7.3 (Imersão mínima). *Uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ é* mínima *se, para todo $p \in M$ e todo $\eta \in T_pM^\perp$, tem-se $trS_\eta = 0$.*

Escolhendo um referencial ortonormal $E_1, \ldots, E_m$ de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é um mergulho e tomando $H_i = H_{E_i}$, podemos escrever

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{m} H_i(x,y)E_i(p), \forall\, x, y \in T_pM.$$

O vetor normal

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(trS_i)E_i,$$

onde $S_i = S_{E_i}$, é denominado o *vetor curvatura média* de f e não depende do referencial E_i escolhido. Além disso, f é mínima se, e somente se, $H \equiv 0$.

Definição 1.7.4 (Imersão umbílica). *Uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ é dita* umbílica *em $p \in M$ quando $S_\eta = \rho(\eta)I$, para todo $\eta \in T_pM$, onde $\rho(\eta) \in \mathbb{R}$ e I é a identidade em T_pM. Uma imersão é* umbílica *quando é umbílica em todo ponto de M.*

Proposição 1.7.3. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) *f é umbílica em $p \in M$;*

(*ii*) *$S_\eta = \langle H(p), \eta\rangle I$, para todo $\eta \in T_pM^\perp$;*

(iii) $B(x, y) = \langle x, y \rangle H(p)$, *para quaisquer* $x, y \in T_pM$.

Demonstração. Consideremos um referencial ortonormal $E_1, \ldots, E_m$ em $\mathcal{X}(U)^\perp$ e seja $e_1, \ldots, e_n$ a base de T_pM formada por autovetores de S_η, como anteriormente.

$(i) \Longrightarrow (ii)$ De fato, dado $\eta \in (T_pM)^\perp$, temos que $\eta = \sum_{i=1}^{m} a_i E_i(p)$, onde

$$a_i = \langle \eta, E_i(p) \rangle \quad \text{e} \quad S_\eta = \rho(\eta) I.$$

Então

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{m} H_i(x, y) E_i(p).$$

Em outras palavras,

$$H_i(x, y) = \langle B(x, y), E_i(p) \rangle = \langle S_i(x), y \rangle, \ S_i = S_{E_i(p)}.$$

Daí

$$trS_i = \sum_{k=1}^{m} \langle S_i(e_k), e_k \rangle = n\rho_i, \ \rho_i = \rho(E_i(p)).$$

Logo

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} (trS_i) E_i(p) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} n\rho_i E_i(p) = \sum_{k=1}^{m} \rho_i E_i(p).$$

Concluímos que

$$\langle H(p), E_i \rangle = \rho_i.$$

Como

$$\langle \eta, H(p) \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \rho_i$$

e

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = \langle B(x, y), \eta \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle B(x, y), E_i(p) \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle S_i(x), y \rangle,$$

obtemos $S_\eta(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i S_i(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \rho_i x$ e, portanto,

$$\rho(\eta) = \sum_{i=1}^{m} a_i \rho_i = \langle \eta, H(p) \rangle.$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Visto que $S_\eta = \langle H(p), \eta \rangle I$, para todo η em $T_pM^\perp$, temos que

$$\begin{aligned} \langle B(x,y), \eta \rangle &= \langle S_\eta(x), y \rangle = \langle \langle H(p), \eta \rangle x, y \rangle \\ &= \langle H(p), \eta \rangle \langle x, y \rangle = \langle H(p) \langle x, y \rangle , \eta \rangle , \ \forall \ \eta \in T_pM^\perp. \end{aligned}$$

Logo

$$B(x,y) = \langle x, y \rangle H(p), \forall \ x, y \in T_pM.$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Suponhamos que $B(x,y) = \langle x, y \rangle H(p)$, para todo $x, y \in T_pM$. Daí obtemos

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(x,y), \eta \rangle = \langle \langle x, y \rangle H(p), \eta \rangle \\ &= \langle H(p), \eta \rangle \langle x, y \rangle = \langle \langle H(p), \eta \rangle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_\eta = \langle H(p), \eta \rangle I, \forall \ \eta \in N_p(M).$$

□

Se $X \in TM$ e $\eta \in TM^\perp$, vimos na Proposição 1.7.2, que

$$(\overline{\nabla}_X \eta)^T = -S_\eta(X).$$

Estudaremos a componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$, que denominamos a *conexão normal* $\nabla^\perp$ da imersão f, isto é,

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \ \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U)^\perp &\longrightarrow \mathcal{X}(U)^\perp \\ (X, \eta) &\longmapsto \nabla^\perp_X \eta = \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^T = \overline{\nabla}_X \eta + S_\eta(X). \end{aligned}$$

Observação 1.7.1. $\nabla^\perp$ é linear em X, aditiva em η e

$$\nabla^\perp_X (g\eta) = g \nabla^\perp_X \eta + X(g)\eta, \ \forall \ g \in \mathcal{D}(U).$$

Similarmente ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir de $\nabla^\perp$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é dita *curvatura normal* $R^\perp$ da imersão f por

$$R^\perp(X,Y)\eta = \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \eta - \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \eta + \nabla^\perp_{[X,Y]} \eta.$$

O resultado a seguir pode ser encontrado em [6], pág. 149, Proposição 3.1.

Proposição 1.7.4. *São verificadas as seguintes equações:*

(a) Equação de Gauss

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\right\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle .$$

(b) Equação de Ricci

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle - \left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle = \langle [S_\eta,S_\xi]X,Y\rangle ,$$

onde $[S_\eta,S_\xi]=S_\eta\circ S_\xi - S_\xi\circ S_\eta$.

O seguinte resultado é consequência direta da Proposição 1.7.4 item (a).

Teorema 1.7.1 (Gauss)**.** *Sejam x,y vetores ortonormais em $T_pM\subset T_{f(p)}\overline{M}$ e $p\in M$. As curvaturas seccionais $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$, respectivamente, de M e $\overline{M}$ no plano gerado por x e y satisfazem*

$$K(x,y)-\overline{K}(x,y)=\langle B(x,x),B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2. \tag{1.20}$$

Definição 1.7.5. *Dizemos que um fibrado normal de uma imersão é* plano *se $R^{\perp}\equiv 0$.*

Suponhamos $\overline{K}$ constante em $\overline{M}$, então pelo Corolário 1.6.1, obtemos

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle = K_0(\langle X,\eta\rangle\langle Y,\xi\rangle - \langle Y,\eta\rangle\langle X,\xi\rangle)=0,$$

para quaisquer $X,Y\in\mathcal{X}(U)$ e todo $\eta,\xi\in\mathcal{X}(U)^{\perp}$. Assim, a equação de Ricci é equivalente a

$$\left\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\xi\right\rangle = -\langle [S_\eta,S_\xi]X,Y\rangle .$$

Portanto, $R^{\perp}=0$ se, e somente se, $[S_\eta,S_\xi]=0$ para todo η,ξ e todo $p\in M$. Em outro termos, existe uma base de T_pM, para qualquer $p\in M$, que diagonaliza simultaneamente todos os S_η.

Seja $\mathcal{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental pode ser considerada como o tensor $B:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)^{\perp}\longrightarrow\mathcal{D}(M)$, definido por

$$B(X,Y,\eta)=\langle B(X,Y),\eta\rangle .$$

A noção de derivada covariante deste tensor se estende de maneira natural:

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_Z B)(X,Y,\eta) &= Z(B(X,Y,\eta)) - B(\nabla_Z X,Y,\eta) - B(X,\nabla_Z Y,\eta)\\ &\quad -B(X,Y,\nabla^{\perp}_Z\eta).\end{aligned}$$

A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrado em [6], pág. 151, Proposição 3.4.

Proposição 1.7.5 (Equação de Codazzi). *Com a notação acima, temos*

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta \right\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) + (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

Observação 1.7.2. Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta).$$

Além disso, se a codimensão da imersão é 1 tem-se $\nabla_X^{\perp}\eta = 0$. Daí

$$B(Y,Z,\nabla_X^{\perp}\eta) = 0.$$

A conexão $\overline{\nabla}$ é compatível com a métrica em $\overline{M}$, logo

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) &= X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) \\
&= X(\langle B(Y,Z),\eta\rangle) - \langle B(\nabla_X Y, Z),\eta\rangle - \langle B(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle \\
&= X(\langle S_\eta(Y), Z\rangle) - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle - \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X(S_\eta(Y)), Z\rangle + \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&\quad - \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z\rangle \\
&= \langle \nabla_X(S_\eta(Y)), Z\rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z\rangle .
\end{aligned}$$

Neste caso, a equação de Codazzi é dada por

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X,Y]).$$

Como uma aplicação dos resultados desta seção e de uso fundamental em nosso trabalho, adaptaremos os resultados às hipersuperfícies.

Suponhamos que a codimensão da imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ seja igual a 1, isto é, $m = 1$. O conjunto $f(M) \subset \overline{M}$ é denominado *hipersuperfície*. Sejam $p \in M$, $\eta \in T_pM^{\perp}$, $|\eta| = 1$. Vimos que $T_{f(p)}\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$, logo, η fica univocamente determinado se exigirmos que a base $\{e_1,\ldots,e_n,\eta\}$ de $T_{f(p)}\overline{M}$ tenha a mesma orientação de $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Seja $\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ o correferencial dual associado ao referencial $e_1,\ldots,e_2$ de $\mathcal{X}(M)$. A segunda forma fundamental pode ser considerada como o tensor bilinear dado por

$$B(X,Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta \right\rangle,\ \forall X,Y \in \mathcal{X}(M).$$

Em outras palavras,

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(\omega_i \otimes \omega_j), \; h_{ij} = h_{ji} = B(e_i, e_j). \tag{1.21}$$

Visto que S_η é simétrica, existe uma base ortonormal de T_pM formada por autovetores próprios $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de S_η com autovalores $k_1, \ldots, k_n$, i.e., $S_\eta(e_i) = k_i e_i$ onde $i = 1, \ldots, n$.

Neste caso, denominamos os e_i's as *direções principais* de f e os k_i's as *curvaturas principais* de f.

O determinante $\det(S_\eta) = k_1 \cdots k_n$ é denominado *curvatura de Gauss-Kronecker* de f e $H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ é denominado *curvatura média* de f.

Exemplo 1.7.1 (Aplicação Normal de Gauss)**.** Sejam $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e N uma extensão local de η, unitária e normal a M. Seja $S^n(1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de raio 1 e defina a *aplicação normal de Gauss* $g : M^n \longrightarrow S^n(1)$ por

$$g(p) = \text{ ponto final do transladado de } N(p) \text{ à origem do } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Como T_pM e $T_{g(p)}S^n(1)$ são paralelos, podemos identificá-los. Assim

$$dg_p : T_pM \longrightarrow T_pM = T_{g(p)}S^n(1)$$

é dada por

$$dg_p(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))|_{t=0} = \overline{\nabla}_{\frac{dc}{dt}} N(c(t))|_{t=0} = \overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T = -S_\eta(x),$$

onde $c : (-\xi, \xi) \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável com $c(0) = p$ e $c'(0) = x$. O fato $\overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T$ provém de $\|N\|^2 = 1$, pois

$$0 = \frac{d}{dt}\langle N(c(t)), N(c(t))\rangle|_{t=0} = 2\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{dc}{dt}} N(c(t)), N(c(t))\right\rangle|_{t=0} = \left\langle \overline{\nabla}_x N, N \right\rangle.$$

Portanto, $dg_p = -S_\eta$.

O estudo da aplicação normal de Gauss tem profundas implicações topológicas. Por exemplo, se para uma variedade riemanniana M^n, $n \geq 2$, conexa, compacta e orientável existe uma imersão $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura de Gauss-Kronecker não-nula em todo ponto de M, então M é difeomorfa a $S^n(1)$. De fato, $\det dg_p \neq 0$ implica que $g : M \longrightarrow S^n(1)$ é difeomorfismo local. Sendo M compacta, g é uma aplicação de recobrimento e, como $S^n(1)$ é simplesmente conexa, g é um difeomorfismo.

A fórmula (1.20) admite a seguinte expressão

$$K(e_i, e_j) = k_i k_j.$$

Com efeito, como $\langle B(e_i, e_j), \eta\rangle = \langle S_\eta(e_i), e_j\rangle = k_i \cdot \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, temos que

$$B(e_i, e_j) = H(e_i, e_j)\eta = k_i \cdot \delta_{ij} \cdot \eta \quad \text{e} \quad |B(e_i, e_j)| = k_i \cdot \delta_{ij}.$$

Além disso, $\overline{K}(e_i, e_j) = 0$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, logo

$$K(e_i, e_j) = K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \langle B(e_i, e_i), B(e_i, e_i)\rangle - |B(e_i, e_j)|^2 = k_i k_j.$$

No caso em que $n = 2$ o produto $k_1 \cdot k_2$ é conhecido como *curvatura Gaussiana* da superfície M em p.

O lema a seguir foi tirado dos manuscritos de H. Alencar e M. do Carmo.

Lema 1.7.1 (H. Alencar e M. do Carmo)**.** *Seja*

$$f : S^m(r_1) \times S^n(r_2) \longrightarrow S^{m+n+1} \subset \mathbb{R}^{m+n+2}, \; r_1^2 + r_2^2 = 1,$$

a imersão produto, então as curvaturas principais de f, consideradas na mesma orientação, são dadas por

$$k_1 = \cdots = k_m = \frac{r_2}{r_1} \quad e \quad k_{m+1} = \cdots = k_{m+n} = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Demonstração. Consideremos π_1 e π_2 as projeções de $\mathbb{R}^{m+n+2}$ em $\mathbb{R}^{m+1}$ e $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente, e um referencial ortonormal $e_1, \ldots, e_{m+n}, \eta_1, \eta_2$ em $\mathbb{R}^{m+n+2}$, para o qual

(1) $e_1, \ldots, e_m$ é um referencial em $S^m(r_1)$, isto é, $e_i = (d\pi_1(e_i), 0)$, para todo $i = 1, \ldots, m$;

(2) $e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}$ é um referencial em $S^n(r_2)$, isto é, $e_i = (0, d\pi_2(e_i))$, para qualquer $i = m+1, \ldots, m+n$;

(3) $\eta_1 = (\eta_1, 0) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ e $\eta_2 = (0, \eta_2) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\eta_1(p) = -\dfrac{1}{r_1}p$, para todo $p \in S^m(r_1)$ e $\eta_2(q) = -\dfrac{1}{r_2}q$, para quaisquer $q \in S^n(r_2)$.

Observemos que η_1 e η_2 são as aplicações normais de Gauss de $S^m(r_1)$ e $S^n(r_2)$, respectivamente. Tomemos $\eta = r_2\eta_1 - r_1\eta_2$. Então, η é a aplicação normal de Gauss de $S^m(r_1) \times S^n(r_2)$. Vimos no Exemplo 1.7.1 que

$$d\eta_{(p,q)} = -S_{\eta(p,q)}.$$

Além disso,

$$II_\eta(X) = \langle S_\eta(X), X\rangle,$$

donde

$$S_\eta(X) = -r_2 d\eta_1(X) + r_1 d\eta_2(X).$$

Sejam $\omega_i,\ i = 1, \ldots, m+n$ as n 1-formas duais associadas a $e_i,\ i = 1, \ldots, m+n$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta(X), Y\rangle &= -r_2 \langle d\eta_1(d\pi_1(X)), d\pi_1(Y)\rangle + r_1 \langle d\eta_2(d\pi_2(X)), d\pi_2(Y)\rangle \\
&= \frac{r_2}{r_1}\sum_{i=1}^{m} \omega_i(X)\omega_i(Y) - \frac{r_1}{r_2}\sum_{i=m+1}^{m+n} \omega_i(X)\omega_i(Y).
\end{aligned}$$

Assim, a segunda forma fundamental de f na direção de η é dada por

$$II = \frac{r_2}{r_1}\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2 - \frac{r_1}{r_2}\sum_{i=m+1}^{m+n} \omega_i^2.$$

As curvaturas principais de f são

$$k_1 = \cdots = k_m = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{e} \quad k_{m+1} = \cdots = k_{m+n} = -\frac{r_1}{r_2},$$

onde as direções principais são, respectivamente, $e_1, \ldots, e_{m+n}$. □

Exemplo 1.7.2 (H(r)-toro)**.** O H(r)-toro, para $0 < r < 1$, é a hipersuperfície em $S^{n+1}(1)$ obtida pela imersão produto $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$, dada por

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2).$$

Como um caso particular do Lema 1.7.1, as curvaturas principais do H(r)-toro são dadas por

$$k_1 = \cdots = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad \text{e} \quad k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Seja $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade riemanniana de dimensão $n+1$ com curvatura seccional constante c. Dizemos que $\overline{M}^{n+1}(c)$ é um *forma espacial*. Por exemplo, $\overline{M}^{n+1}(1) = S^{n+1}(1)$ e $\overline{M}^{n+1}(0) = \mathbb{R}^{n+1}$ são formas espaciais.

Quando $f : M \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ é uma hipersuperfície, visto que $\overline{M}^{n+1}(c)$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi satisfeita pela segunda forma fundamental (1.21) pode ser entendida, com relação os componentes da derivada covariante de B, por

$$h_{ijk} = h_{ikj}, \forall i, j, k = 1, \ldots, n,$$

onde

$$\nabla B = \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}(\omega_i \otimes \omega_j \otimes \omega_k).$$

De fato, como

$$h_{ijk} = \overline{\nabla}_{e_k} B(e_i, e_j) = \overline{\nabla}_{e_i} B(e_k, e_j) = h_{kji} \text{ e } h_{ij} = h_{ji},$$

temos que $h_{ijk} = h_{jik} = h_{kij} = h_{ikj}$ para todo $i, j, k = 1, \ldots, n$. Provando o afirmado.

Seja P^k um subespaço k-dimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$. Consideremos $O(P^2)$ o conjunto de todas as transformações ortogonais de $\mathbb{R}^{n+2}$ que deixam P^2 fixo. Escolha $P^3 \supset P^2$ tal que $P^3 \cap \overline{M}^{n+1}(c) \neq \emptyset$. Seja C uma curva regular em $P^3 \bigcap \overline{M}^{n+1}(c) = M^2(c)$. A órbita de C sobre a ação de $O(P^2)$ é chamada *hipersuperfície de rotação* $M^n \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ gerada por C em torno de P^2. Se $o \in O(P^2)$, a curva $o(C)$ é um *meridiano* de M^n e a órbita de um ponto de C sobre $O(P^2)$ é dita um *paralelo* de M^n.

No caso em que $c > 0$,

$$f(t_1, \ldots, t_{n-1}, s) = (x_1(s)\varphi_1, \ldots, x_1(s)\varphi_n, x_{n+1}, x_{n+2}),$$

onde $\varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal de uma esfera unitária no subespaço gerado por $e_1, \ldots, e_n$ e P^2 é o subespaço bidimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$ gerado por e_{n+1} e e_{n+2} e s é o comprimento de arco com relação ao meridiano $x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)$.

O seguinte resultado foi obtido por M. do Carmo e M. Djaczer em [8], pág. 701.

Teorema 1.7.2. *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c), n \geq 3$, uma hipersuperfície. Assuma que as curvaturas principais de f satisfazem*

$$k_1 = \cdots = k_{n-1} = -\lambda \neq 0, \;\; k_n = -\mu = -\mu(\lambda) \;\; e \;\; \lambda \neq \mu.$$

Então $f(M)$ está contido numa hipersuperfície de rotação.

1.8 Laplaciano de um Tensor Simétrico

O resultado desta seção pode ser encontrado em [4]. Este resultado é fundamental na demonstração do Teorema 0.0.2 de H. Alencar e M. do Carmo. As definições de gradiente, divergente e Laplaciano de um função $f \in \mathcal{D}(M)$ em uma variedade riemanniana M estão definidas na seção 1.6.

Sejam M^n uma variedade riemanniana e $e_1, \ldots, e_n$ um referencial móvel ortonormal em M. Consideremos $\omega_1, \ldots, \omega_n$ as n $1-$formas duais com relação a este referencial. Seja $\phi = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}(\omega_i \otimes \omega_j)$ um tensor simétrico definido em M, isto é, para cada $p \in M$, tem-se que $\phi(p) : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ é um tensor simétrico(i.e. $\phi_{ij} = \phi_{ji}$), onde $(\omega_i \otimes \omega_j)(X, Y) = \omega_i(X)\omega_j(Y)$ e suponhamos que ϕ satisfaça a equação de Codazzi, isto é,

$$\phi_{ijk} = \phi_{ikj}, \ \forall \ i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Nosso objetivo, nesta seção, é determinar o Laplaciano de $|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}^2$. Precisamos calcular, inicialmente, o Laplaciano de $\phi_{ij} : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

A derivada covariante (definida na página 38) de ϕ é dada por

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_{ijk}\omega_k = d\phi_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj}\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}\omega_{kj} \tag{1.22}$$

e a segunda derivada covariante de ϕ por

$$\sum_{l=1}^{n} \phi_{ijkl}\omega_l = d\phi_{ijk} + \sum_{l=1}^{n} \phi_{ljk}\omega_{li} + \sum_{l=1}^{n} \phi_{ilk}\omega_{lj} + \sum_{l=1}^{n} \phi_{ijl}\omega_{lk}. \tag{1.23}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ijkl}(\omega_l \wedge \omega_k) &= \sum_{k=1}^{n} (d\phi_{ijk} \wedge \omega_k) + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ljk}(\omega_{li} \wedge \omega_k) \\ &+ \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ilk}(\omega_{lj} \wedge \omega_k) + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ijl}(\omega_{lk} \wedge \omega_k). \end{aligned} \tag{1.24}$$

A partir da diferencial exterior de (1.22), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} d(\phi_{ijk}\omega_k) &= \sum_{k=1}^{n} d\phi_{kj}\wedge\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n}\phi_{kj}d\omega_{ki} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} d\phi_{ik}\wedge\omega_{kj} + \sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}d\omega_{kj},\end{aligned} \tag{1.25}$$

pois $d(d\phi_{ij}) = 0$. Visto que

$$\sum_{k=1}^{n} d(\phi_{ijk}\omega_k) = \sum_{k=1}^{n} d\phi_{ijk}\wedge\omega_k + \sum_{k=1}^{n}\phi_{ijk}d\omega_k, \tag{1.26}$$

igualando (1.25) e (1.26), temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(d\phi_{ijk}\wedge\omega_k) &= -\sum_{k=1}^{n}\phi_{ijk}d\omega_k + \sum_{k=1}^{n} d\phi_{kj}\wedge\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n}\phi_{kj}d\omega_{ki} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} d\phi_{ik}\wedge\omega_{kj} + \sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}d\omega_{kj}.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Nas mesmas condições, aplicando em (1.24) o resultado encontrado em (1.27),

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ijkl}(\omega_l\wedge\omega_k) &= \sum_{k=1}^{n} d\phi_{ijk}\wedge\omega_k + \sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ljk}\omega_{li}\wedge\omega_k \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ilk}\omega_{lj}\wedge\omega_k + \sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ijl}\omega_{lk}\wedge\omega_k \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\phi_{ijk}d\omega_k + \sum_{k=1}^{n} d\phi_{kj}\wedge\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n}\phi_{kj}d\omega_{ki} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} d\phi_{ik}\wedge\omega_{kj} + \sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}d\omega_{kj} + \sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ljk}\omega_{li}\wedge\omega_k \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ikl}\omega_{lj}\wedge\omega_k + \sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ijl}\omega_{lk}\wedge\omega_k.\end{aligned}$$

Agora, usando (1.22),

$$d\phi_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \phi_{kjl}\omega_l - \sum_{l=1}^{n} \phi_{lj}\omega_{lk} - \sum_{l=1}^{n} \phi_{kl}\omega_{lj}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} d\phi_{kj} \wedge \omega_{ki} = \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kjl}\omega_l \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kl}\omega_{lj} \wedge \omega_{ki},$$

$$\sum_{k=1}^{n} d\phi_{ik} \wedge \omega_{kj} = \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ikl}\omega_l \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ijkl}(\omega_l \wedge \omega_k) &= \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kjl}\omega_l \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kl}\omega_{lj} \wedge \omega_{ki} \\
&\quad + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kj}\omega_{kl} \wedge \omega_{li} + \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj}\Omega_{ki} + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ikl}\omega_l \wedge \omega_{kj} \\
&\quad - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj} + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ik}\omega_{kl} \wedge \omega_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}\Omega_{kj} + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ljk}\omega_{li} \wedge \omega_k + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ikl}\omega_{lj} \wedge \omega_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj}\Omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik}\Omega_{kj},
\end{aligned}$$

logo

$$\sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ijkl}(\omega_l \wedge \omega_k) = -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \phi_{mj} R_{mikl} + \sum_{m=1}^{n} \phi_{im} R_{mjkl} \right) (\omega_k \wedge \omega_l).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\phi_{ijkl} - \phi_{ijlk} &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n}\phi_{mj}R_{milk} + \sum_{m=1}^{n}\phi_{im}R_{mjlk}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n}\phi_{mj}R_{mikl} + \sum_{m=1}^{n}\phi_{im}R_{mjkl}\right) \\
&= -\sum_{m=1}^{n}\phi_{mj}R_{milk} - \sum_{m=1}^{n}\phi_{im}R_{mjlk},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi_{ijkl} - \phi_{ijlk} = -\sum_{m=1}^{n}\phi_{mj}R_{milk} - \sum_{m=1}^{n}\phi_{im}R_{mjlk}. \tag{1.28}$$

Lembrando que no referêncial ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ o laplaciano da função ϕ_{ij} é dado por $\sum_{k=1}^{n}\phi_{ijkk}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikjk} - \phi_{ikkj}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \left(\sum_{k=1}^{n}\phi_{kk}\right)_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \left(\sum_{k=1}^{n}\phi_{kk}\right)_{ij} \\
&\quad - \sum_{m,k=1}^{n}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{m,k=1}^{n}\phi_{im}R_{mkkj}.
\end{aligned}$$

O tensor ϕ_{ij} satisfaz a equação de Codazzi $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$, logo

$$\Delta\phi_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n}\phi_{kk}\right)_{ij} - \sum_{m,k=1}^{n}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{m,k=1}^{n}\phi_{im}R_{mkkj}. \tag{1.29}$$

Observação 1.8.1. Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Tomando $g = f^2$ temos que $dg = 2fdf$.

Assim, $g_i = 2ff_i$, onde $df = \sum_{i=1}^{n} f_i\omega_i$. Daí

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\omega_j &= dg_i + \sum_{j=1}^{n} g_j\omega_j = d(2ff_i) + \sum_{j=1}^{n} 2ff_j\omega_j \\ &= 2f_i df + 2f df_i + \sum_{j=1}^{n} 2ff_j\omega_j = 2f_i df + 2f\left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\omega_j\right).\end{aligned}$$

Logo, $g_{kk} = 2ff_{kk} + 2f_k^2$ e

$$\Delta g = 2f\Delta f + 2\sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

Como $|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}^2$ e $tr\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ii}$, obtemos que

$$\Delta|\phi|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}\Delta\phi_{ij} + 2\sum_{i,j,k=1}^{n} \phi_{ijk}^2.$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}\Delta\phi_{ij} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \phi_{ijk}^2.$$

A norma de $\nabla\phi$ é definida por $|\nabla\phi|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \phi_{ijk}^2$. Neste caso,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}(tr\phi)_{ij} - \sum_{i,j,k,m=1}^{n} \phi_{ij}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{i,j,k,m=1}^{n} \phi_{ij}\phi_{im}R_{mkkj}.$$

Escolha um referencial ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ tal que $\phi_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$. Tal condição é sempre possível, pois ϕ é uma forma bilinear simétrica. Visto que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i R_{ijij} = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j R_{ijij}$$

a fórmula anterior pode ser simplificada como a seguir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(tr\phi)_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j R_{jiji} - \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i^2 R_{ijji} \\
&= |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(tr\phi)_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j R_{ijij} + \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i^2 R_{ijij} \qquad (1.30) \\
&= |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j R_{ijij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[(\lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2)R_{ijij}] = \sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.
$$

Portanto, o Laplaciano de $|\phi|^2$ é dado por

$$
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2. \qquad (1.31)
$$

Capítulo 2

Resultados Principais

Neste capítulo demonstraremos o Teorema 0.0.2 de H. Alencar e M. do Carmo, ver [1], que descreve e caracteriza as hipersuperfícies de curvatura média constante na esfera. Em seguida, utilizaremos os resultados obtidos para demonstrar o Teorema de Li Haizhong, ver [10], que caracteriza as hipersuperfícies com curvatura escalar constante na esfera.

2.1 Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante na Esfera

Sejam M^n uma variedade orientada de dimensão n e $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão. Escolhamos uma campo normal unitário η ao longo de f. Como vimos na seção 1.7, existe uma base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de T_pM formada por autovetores da aplicação linear autoadjunta $A = S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ associada a segunda forma fundamental de f ao longo de η, A é denominado operador de Weingarten. Sejam $k_1, \ldots, k_n$ os autovalores associados a $e_1, \ldots, e_n$, respectivamente. Denotaremos por

$$|A|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2$$

o quadrado da norma do operador de Weingarten e

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i$$

a curvatura média de f.

Quando f é ma imersão mínima, isto é, $H \equiv 0$, é válido um resultado muito conhecido, a saber

Teorema 2.1.1. *Sejam M^n compacta, $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma hipersuperfície mínima e A o operador de Weingarten. Assuma que $|A|^2 \leq n$, para todo $p \in M$. Então*

(i) *$|A|^2 \equiv 0$(e M é totalmente geodésica) ou $|A|^2 \equiv n$.*

(ii) *$|A|^2 \equiv n$ se, e somente se, M^n é um toro de Clifford em S^{n+1}, i.e., M^n é o produto de esferas $S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, $n_1 + n_2 = n$, de raios apropriados.*

O item (i) deste teorema deve-se a Simons, ver [13]. A caracterização em (ii) foi obtida independentemente por Chern, do Carmo e Kobayashi em [3] e por Lawson em [11]. O resultado no item (ii) é local. Defina a aplicação linear autoadjunta

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & x & \longmapsto & H(p)x - A(x), \end{array}$$

onde $H(p)$ é a curvatura média de f em p. À aplicação linear φ está associada uma forma bilinear simétrica ϕ dada por

$$\phi(x, y) = \langle \varphi(x), y \rangle \,, \ \forall \ x, y \in T_pM. \tag{2.1}$$

Observemos que $tr\phi = 0$. A forma bilinear ϕ é denominada *segunda forma bilinear sem traço*. De fato,

$$\langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \langle H(p)e_i - Ae_i, e_j \rangle = \langle (H(p) - k_i)e_i, e_j \rangle = (H(p) - k_i)\delta_{ij},$$

logo

$$tr\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (H(p) - k_i) = nH(p) - \sum_{i=1}^{n} k_i = 0.$$

Além disso, $|\phi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$, onde $\mu_i = H(p) - k_i$ é o autovalor de φ associado ao autovetor e_i, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como

$$(\mu_i - \mu_j)^2 = \mu_i^2 - 2\mu_i\mu_j + \mu_j^2,$$

obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\mu_i - \mu_j)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i\mu_j + \sum_{i,j=1}^{n} \mu_j^2 = n|\phi|^2 - 2(tr\phi)^2 + n|\phi|^2 = 2n|\phi|^2.$$

Visto que $k_i - k_j = \mu_j - \mu_i$, temos

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i - \mu_j)^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}(k_i - k_j)^2.$$

Daí

$$|\phi|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; A = H(p)I.$$

Em outras palavras, $|\phi|^2 = 0$ se, e somente se, f é umbílica.

Como ϕ é a segunda forma fundamental sem o traço e $|\phi|^2 = 0$ se, e somente se, f é umbílica, temos que ϕ é o objeto natural para utilizarmos quando estendermos o teorema anterior para hipersuperfícies com curvatura média constante.

Seja M^n uma variedade riemanniana compacta e orientável e seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície com curvatura média constante H; escolha uma orientação para M tal que $H \geq 0$. Para cada H, defina

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n(H^2+1)$$

e denote por B_H o quadrado da raiz positiva de P_H. Note que $B_0 = n$, pois $P_0 = x^2 - n$.

Enunciaremos a seguir o teorema principal deste capítulo, a saber:

Teorema 2.1.2 (H. Alencar e M. do Carmo). *Sejam M^n uma variedade compacta de dimensão n, $f : M^n \to S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão com curvatura média constante H e $\phi : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ o tensor simétrico dado por*

$$\phi(x,y) = \langle Hx - Ax, y\rangle\,,\ \forall\ x,y \in T_pM.$$

Se $|\phi|^2 \leq B_H$, para todo $p \in M$, então

(i) $|\phi|^2 = 0$ *(e M é totalmente umbílica) ou* $|\phi|^2 \equiv B_H$.

(ii) $|\phi|^2 \equiv B_H$ *se, e somente se,*

  (a) $H = 0$ *e M^n é um toro de Clifford em* $S^{n+1}(1)$;

  (b) $H \neq 0,\ n \geq 3,$ *e M^n é um $H(r)$-toro com* $r^2 < \dfrac{n-1}{n}$;

  (c) $H \neq 0,\ n = 2,$ *e M^n é um $H(r)$-toro com* $r^2 \neq \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{2}$.

Antes de demonstrarmos este teorema, precisamos demonstrar o lema a seguir, cujas desigualdades foram firmadas por Okumura em [12].

Lema 2.1.1. *Sejam μ_i, $i = 1, \ldots, n$, números reais tais que $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$ e $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \beta^2$, onde $\beta \geq 0$. Então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3, \tag{2.2}$$

onde

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^3 = \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^3 = -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3\right)$$

se, e somente se, $n-1$ dos μ_i's são não-positivos (não-negativos) e iguais.

Demonstração. Quando $\beta = 0$,

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 0.$$

Consequentemente, $\mu_i = 0$ e $\sum_{i=1}^n \mu_i^3 = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Suponhamos $\beta > 0$ e consideremos as funções $g, h, l : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad h(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i^3 \quad \text{e} \quad l(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2.$$

Necessitamos determinar o valor máximo e o valor mínimo de h sujeito ás condições

$$g(\mu_1, \ldots, \mu_n) = 0 \quad \text{e} \quad l(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \beta^2.$$

Em outras palavras, precisamos determinar os pontos críticos de h restrito a estas condições. Usando o método do multiplicador de Lagrange,

$$\operatorname{grad} h = (3\mu_1^2, \ldots, 3\mu_n^2) = \overline{\alpha} \operatorname{grad} g + \overline{\lambda} \operatorname{grad} l = \overline{\alpha}(1, \ldots, 1) + \overline{\lambda}(2\mu_1, \ldots, 2\mu_n),$$

isto é,

$$3\mu_i^2 = \overline{\alpha} + 2\overline{\lambda}\mu_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Assim, substituindo $\lambda = \dfrac{2\overline{\lambda}}{3}$ e $\alpha = \dfrac{\overline{\alpha}}{3}$ na última igualdade acima, os pontos críticos de h são dados pelos μ_i's que satisfazem a mesma equação, a saber:

$$\mu_i^2 - \lambda\mu_i - \alpha = 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, n.$$

Sejam a e $-b$ as raízes da equação acima. Visto que $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$, após uma reenumeração se necessário, os $\mu_i' s$ são dados por

$$\mu_1 = \ldots = \mu_p = a \geq 0 \ \text{ e } \ \mu_{p+1} = \ldots = \mu_n = -b \leq 0. \tag{2.3}$$

Nos pontos críticos de h,

$$\beta^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = pa^2 + (n-p)b^2, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = pa - (n-p)b = 0, \tag{2.5}$$

$$h = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^3 = pa^3 - (n-p)b^3. \tag{2.6}$$

Obtemos de (2.5) que $p \neq 0$ e $p \neq n$, pois

$$p = 0 \Longrightarrow nb = 0 \Longrightarrow b = 0$$

e, além disso, (2.4) implica $\beta^2 = nb^2 = 0$, isto é, $\beta = 0$. Contradizendo a hipótese de $\beta > 0$. O caso $p = n$ é inteiramente análogo.

Usando por (2.5),

$$a = \left(\frac{n-p}{p}\right) b,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \beta^2 &= pa^2 + (n-p)b^2 = p\left(\frac{n-p}{p}\right)^2 b^2 + (n-p)b^2 \\ &= \left[\frac{(n-p)^2}{p} + (n-p)\right] b^2 = \frac{(n-p)n}{p} b^2. \end{aligned}$$

Logo

$$b^2 = \frac{p}{n(n-p)}\beta^2.$$

Substituindo o valor acima em (2.4),

$$a^2 = \left(\frac{n-p}{np}\right)\beta^2.$$

Daí

$$\begin{aligned} h &= (pa)a^2 - ((n-p)b)\, b^2 = pa\left(\frac{n-p}{np}\right)\beta^2 - (n-p)b\left(\frac{p}{n(n-p)}\right)\beta^2 \\ &= \left(\frac{(n-p)}{n}a - \frac{p}{n}b\right)\beta^2. \end{aligned}$$

Segue que h decresce quando p cresce e, consequentemente, h atinge seu valor máximo em $p = 1$ e seu mínimo em $p = n - 1$.
Quando $p = 1$,

$$\mu_2 = \ldots = \mu_n = -b \leq 0$$

e

$$\begin{aligned} h &= a^3 - (n-1)b^3 = (n-1)^3 b^3 - (n-1)b^3 = \left((n-1)^3 - (n-1)\right) b^3 \\ &= n(n-1)(n-2)b^3 = \left(\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\right) \beta^3. \end{aligned}$$

Se $p = n - 1$, então

$$\mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = a \geq 0$$

e

$$\begin{aligned} h &= (n-1)a^3 - b^3 = \frac{1}{(n-1)^2} b^3 - b^3 = \left(\frac{1}{(n-1)^2} - 1\right) b^3 \\ &= -\left(\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \beta^3 = -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \beta^3. \end{aligned}$$

Portanto

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \beta^3 \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \beta^3.$$

□

Demonstração do Teorema 2.1.3. Inicialmente, calcularemos o Laplaciano de $|\phi|^2$. Como ϕ é bilinear, simétrica em T_pM e satisfaz a equação de Codazzi $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$, temos por (1.31) que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2, \tag{2.7}$$

onde R_{ijij} é a curvatura seccional do plano gerado por $\{e_i, e_j\}$ e $\mu_i = H - k_i$ é o autovalor de φ associado ao autovetor e_i. Visto que $tr\phi \equiv 0$, a hessiana de $tr\phi$ é identicamente nula e, portanto, $(tr\phi)_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Neste caso, a equação (2.7) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2. \tag{2.8}$$

Calcularemos, inicialmente, o último termo do lado direito de (2.8). Pela fórmula de Gauss, ver Exemplo 1.7.1, obtemos

$$K(e_i,e_j)-\overline{K}(e_i,e_j)=\langle B(e_i,e_i),B(e_j,e_j)\rangle-|B(e_i,e_j)|^2=k_ik_j-|0|^2=k_ik_j.$$

Como $\overline{K}(e_i,e_j)\equiv 1$, $k_i=H-\mu_i$ e $K(e_i,e_j)=R_{ijij}$ temos que

$$R_{ijij}=1+k_ik_j=1+\mu_i\mu_j-H(\mu_i+\mu_j)+H^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2\\ &\quad -\frac{1}{2}H\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2+\frac{1}{2}H^2\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i-\mu_j)^2.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^2-\sum_{i,j=1}^{n}2\mu_i\mu_j+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^3\mu_j\\ &\quad -\sum_{i,j=1}^{n}2\mu_i^2\mu_j^2+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\mu_j^3\\ &= 2n|\phi|^2-2(tr\phi)^2+2(tr\phi)\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3-2|\phi|^4\\ &= 2n|\phi|^2-2|\phi|^4\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i-\mu_j)^2=2n|\phi|^2.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2=n|\phi|^2-|\phi|^4-\frac{1}{2}H\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2+nH^2|\phi|^2. \tag{2.9}$$

Por outro lado,

$$(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2=\mu_i^3-\mu_i^2\mu_j-\mu_j^2\mu_i+\mu_j^3.$$

Daí

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^3-\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i^2\mu_j-\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j^2\mu_i+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j^3\\ &= 2n\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3-2(tr\phi)|\phi|^2=2n\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3.\end{aligned}$$

Portanto, (2.9) pode ser reescrito por

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2=n|\phi|^2-|\phi|^4+nH^2|\phi|^2-nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3. \tag{2.10}$$

Por conseguinte, usando (2.10) e lembrando que $\sum_{i=1}^{n}(tr\phi)_{ii}=0$, podemos reescrever (2.7) como a seguir

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2=|\nabla\phi|^2+n|\phi|^2-|\phi|^4+nH^2|\phi|^2-nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3. \tag{2.11}$$

Precisamos estimar $\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3$. Neste caso, utilizamos a primeira desigualdade em (2.2) para obtermos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= |\nabla\phi|^2+n|\phi|^2-|\phi|^4+nH^2|\phi|^2-nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3\\ &\geq |\nabla\phi|^2-|\phi|^2\left[|\phi|^2-n(1+H^2)+\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|H\right]\\ &= |\nabla\phi|^2+|\phi|^2\left(-P_H(|\phi|)\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2\geq|\nabla\phi|^2+|\phi|^2\left(-P_H(|\phi|)\right). \tag{2.12}$$

As raízes de P_H são

$$x_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}+\sqrt{\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2+4c}\right)<0$$

e

$$x_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}-\sqrt{\left(\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2+4c}\right)=\sqrt{B_H}>0,$$

onde $c = n(H^2+1) > 0$. O coeficiente de maior grau na equação de segundo grau $P_H(x) = 0$ é positivo, logo

$$P_H(x) \leq 0, \ \forall x \in [x_1, x_2].$$

Como $0 \leq |\phi| \leq \sqrt{B_H}$, temos $P_H(|\phi|) \leq 0$. Utilizando o teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_M \Delta|\phi|^2 \nu &= \int_M \operatorname{div}(\operatorname{grad}|\phi|^2)\nu = \int_M d\theta \\ &= \int_{\partial M} \theta = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $\nu = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$ é a forma volume de M e $\theta = (-1)^n i_{\operatorname{grad}|\phi|^2}\nu$.

Integrando ambos os lados da desigualdade (2.12), obtemos

$$0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta|\phi|^2 \geq \int_M |\nabla\phi|^2 + \int_M |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) \geq 0. \tag{2.14}$$

Visto que

$$|\nabla\phi|^2 \geq 0 \ \text{ e } \ |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) \geq 0,$$

temos

$$\int_M |\nabla\phi|^2 = 0 \ \text{ e } \ \int_M |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) = 0.$$

Daí

$$\int_M |\nabla\phi|^2 = 0 \Longrightarrow |\nabla\phi| = 0.$$

Além disso,

$$\int_M |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) = 0$$

implica que $|\phi|^2 = 0$ ou $P_H(|\phi|) = 0$ (i.e $|\phi|^2 = B_H$). Com isso, provamos a parte (i) do teorema.

Consideremos agora a parte (ii) do teorema, isto é, o caso $|\phi|^2 = B_H$. Inicialmente, observemos que $n \geq 2$, pois $n = 1$ implica $\dim T_pM = 1$ e, neste caso, $|\phi|^2 = \mu_1^2 = 0$; contradizendo o fato de $P_H(0) = -n(H^2+1) < 0$.

Quando $H = 0$, tem-se $B_H = n$ e, consequentemente, $|\phi|^2 = |A|^2 = n$. Usando o item (ii) do Teorema 2.1.1, obtemos que M^n é um toro de Clifford em $S^{n+1}(1)$, isto é, $M^n = S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, onde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $n_1 + n_2 = n$.

No caso $H \neq 0$, temos que

$$|\nabla\phi| = 0 \ \text{ e } \ P_H(|\phi|) = |\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| - n(H^2+1) = 0,$$

segue de (2.11) e (2.12) que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 - nH\sum_{i=1}^n \mu_i^3 \\ &\geq |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) = 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Logo

$$\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 \geq nH\sum_{i=1}^n \mu_i^3.$$

Se $\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 > nH\sum_{i=1}^n \mu_i^3$, então $\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 > 0$ e, teríamos

$$0 = \int_M \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 > 0.$$

Portanto

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|^3 = \sum_{i=1}^n \mu_i^3.$$

Além disso, o Lema 2.1.1 acrescenta que $n-1$ dos $\mu_i's$ são iguais e não-positivos, consequentemente, $n-1$ dos $k_i's$ são iguais. Após reenumeração, se necessário,

$$k_1 = \cdots = k_{n-1} \text{ e } k_n \neq k_1.$$

Como $\nabla\phi = 0$ tem-se, para cada $i = 1, \ldots, n$, que

$$\mu_i = const.$$

Logo, $k_i = H - \mu_i = const$. Visto que $\mu_i \leq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$,

$$k_i = H - \mu_i \geq H > 0, \ \forall i = 1, \ldots, n-1 \text{ e } k_n \neq k_1.$$

Nesta situação, para $n \geq 3$, o Teorema 1.7.2 afirma que M^n está contido numa hipersuperfície de rotação em $S^{n+1}(1)$ obtida pela rotação de uma curva com curvatura constante, isto é, M^n é um H(r)-toro.

Identificaremos qual H(r)-toro aparece. Observemos que

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = a \leq 0 \text{ e } \mu_n = b \geq 0,$$

onde $0 = \sum_{i=1}^n \mu_i = (n-1)a + b$, isto é, $b = -(n-1)a$. Assim

$$|\phi|^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i^3 = (n-1)a^2 + b^2 = n(n-1)a^2.$$

Logo, $a = -\dfrac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}}$ e, consequentemente,

$$\mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = -\frac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}} \;\text{ e }\; \mu_n = |\phi|\sqrt{\frac{n-1}{n}}. \tag{2.16}$$

Usando (2.16) e o fato de $P_H(|\phi|) = 0$, obtemos

$$nk_nk_1 = n\left(H - |\phi|\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)\left(H + \frac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}}\right) = -P_H(|\phi|) - n = -n,$$

ou seja,

$$k_nk_1 = -1.$$

Como $k_1 > 0$ temos $k_n < 0$. Segue que o H(r)-toro é dado por

$$S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}),\; k_1 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \;\text{ e }\; r = \sqrt{\frac{1}{k_1^2+1}}.$$

Além disso,

$$H = \frac{(n-1)k_1 + k_n}{n} = \frac{(n-1)\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}{n} = \frac{(n-1) - nr^2}{rn\sqrt{1-r^2}} > 0.$$

Neste caso,

$$(n-1) - nr^2 > 0, \text{ i.e., } r^2 < \frac{n-1}{n}.$$

O que termina a prova do item (b) de (ii).

Provaremos finalmente o item (c) de (ii). Observemos que $M^2 \subset S^3(1)$ é uma superfície isoparamétrica (i.e. tem curvaturas principais constantes) em $S^3(1)$ que sabemos ser totalmente umbílica (i.e. $k_1 = k_2$) ou um H(r)-toro. Assim, M^2 é um H(r)-toro, pois $|\phi|^2 \neq 0$. Seguindo o mesmo processo do item (b), obtemos

$$k_1k_2 = -1.$$

Logo

$$k_1 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} > 0, k_2 = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} < 0 \;\text{ e }\; H = \frac{1-2r^2}{2r\sqrt{1-r^2}}$$

ou

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} < 0, k_2 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} > 0 \;\text{ e }\; H = \frac{2r^2-1}{2r\sqrt{1-r^2}}.$$

Como $H \neq 0$ temos $r^2 \neq \dfrac{1}{2}$, demonstrando o item (c). □

2.2 Hipersuperfícies com Curvatura Escalar Constante na Esfera

Sejam M uma hipersuperfície em $\overline{M}^{n+1}(c)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em M e $\omega_1, \ldots, \omega_n$ seu correferencial dual associado. Então a segunda forma fundamental de M pode ser expressa, em termos de formas, por

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \left(\omega_i \otimes \omega_j \right). \tag{2.17}$$

Numa vizinhança de $p \in M$, podemos escolher um referencial local $e_1, \ldots, e_n$ em M tal que

$$B = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\omega_i \otimes \omega_i \right). \tag{2.18}$$

Consideremos

$$|B|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2$$

o quadrado da norma da segunda forma fundamental,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii}$$

a curvatura média,

$$R_{ijij} = \langle R(e_i, e_j) e_i, e_j \rangle, \ \forall i, j = 1, \ldots, n$$

e

$$R = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}$$

a curvatura escalar de M. Segue da equação de Gauss que

$$R_{ijij} = c + k_i k_j, \ \ i \neq j. \tag{2.19}$$

Em particular, $R_{iiii} = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Além disso,

$$\begin{aligned} n(n-1)R &= \sum_{i,j=1}^{n} (c + k_i k_j) - \sum_{i=1}^{n} (c + k_i^2) = n^2 c + n^2 H^2 - nc - |B|^2 \\ &= n(n-1)c + (n^2 H^2 - |B|^2). \end{aligned}$$

Logo

$$n(n-1)(R-c) = n^2H^2 - |B|^2. \tag{2.20}$$

Dado $p \in M$, podemos escolher um referencial local $e_1, \ldots, e_{n+1}$ ortonormal numa vizinhança de p em $\overline{M}^{n+1}(c)$ tal que $e_1, \ldots, e_n$ seja um referencial local em M. Consideremos $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$ o correspondente correferencial dual. Faremos a seguinte convenção de índices:

$$1 \leq A, B, C, D \leq n+1 \quad \text{e} \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

A primeira e a segunda equações de estrutura em $\overline{M}^{n+1}(c)$ são, respectivamente,

$$d\omega_A = \sum_B (\omega_{AB} \wedge \omega_B), \quad \omega_{AB} = -\omega_{BA} \tag{2.21}$$

e

$$d\omega_{AB} = \sum_C (\omega_{AC} \wedge \omega_{CB}) + \Omega_{AB}, \quad \Omega_{AB} = -c\,(\omega_A \wedge \omega_B). \tag{2.22}$$

As equações de estrutura já foram introduzidas neste texto, precisamente, nas seções 1.4 e 1.7; sendo necessário provar que

$$\Omega_{AB} = -c\,(\omega_A \wedge \omega_B).$$

Como $\overline{M}^{n+1}(c)$ tem curvatura seccional constante c, pelo Corolário 1.6.2, temos

$$\overline{R}_{ABCD} = c\,(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Omega_{AB} &= -\frac{1}{2}\sum_{C,D} \overline{R}_{ABCD}\,(\omega_C \wedge \omega_D) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{C,D} c\,(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC})\,(\omega_C \wedge \omega_D) \\
&= -\frac{1}{2}c\sum_{C,D} (\delta_{AC}\delta_{BD})\,(\omega_C \wedge \omega_D) + \frac{1}{2}c\sum_{C,D} (\delta_{AD}\delta_{BC})\,(\omega_C \wedge \omega_D) \\
&= -\frac{1}{2}c\,(\omega_A \wedge \omega_B) + \frac{1}{2}c\,(\omega_B \wedge \omega_A) = -c\,(\omega_A \wedge \omega_B).
\end{aligned}$$

Restritas a M, a primeira e a segunda equações de estrutura são dadas por

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n} (\omega_{ij} \wedge \omega_j), \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{2.23}$$

e

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj}) + \Omega_{ij}, \tag{2.24}$$

onde $\Omega_{ij} = -\dfrac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} R_{ijkl} (\omega_k \wedge \omega_l)$ e R_{ijkl} é o tensor curvatura da métrica induzida em M. Além disso, restrito a M, $\omega_{n+1} = 0$, logo

$$0 = d\omega_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \omega_{j(n+1)} \wedge \omega_j,$$

isto é,

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \omega_{j(n+1)} \wedge \omega_j. \tag{2.25}$$

Aplicando o Lema de Cartan em (2.25),

$$\omega_{i(n+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\omega_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Observemos que $a_{ij} = h_{ij}$. De fato,

$$a_{ij} = \omega_{i(n+1)}(e_j) = \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, e_{n+1} \right\rangle = \langle B(e_j, e_i), e_{n+1} \rangle = h_{ji} = h_{ij}.$$

A equação de Codazzi é dada por

$$h_{ijk} = h_{ikj}, \tag{2.26}$$

onde a derivada covariante da segunda forma fundamental de M é definida por

$$\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\omega_{kj}. \tag{2.27}$$

A segunda derivada covariante de B é definida por

$$\sum_{l=1}^{n} h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} + \sum_{l=1}^{n} h_{lkj}\omega_{li} + \sum_{l=1}^{n} h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_{l=1}^{n} h_{ijl}\omega_{lk}. \tag{2.28}$$

Tomando $\phi = B$ em (1.28), obtemos a seguinte *Identidade de Ricci*

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_{m=1}^{n} h_{mj}R_{mikl} + \sum_{m=1}^{n} h_{im}R_{mjkl}. \tag{2.29}$$

Vimos na seção 1.6 que o gradiente, a hessiana e o Laplaciano de uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 em M são dados, respectivamente, por

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i, \tag{2.30}$$

$$\operatorname{Hess} f = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\omega_i \otimes \omega_j) \tag{2.31}$$

e

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ii}. \tag{2.32}$$

Aqui $df = \sum_{i=1}^{n} f_i \omega_i$ e $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\omega_j = df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j \omega_j$.

Seja $L^2(M)$ o espaço de Hilbert das funções de classe C^2 em M com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_M fg.$$

A seguinte proposição é verificada

Proposição 2.2.1 (S. S. Cheng e S. T. Yau)**.** *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta e orientável. Suponhamos que $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij}(\omega_i \otimes \omega_j)$ é um tensor simétrico definido em M. Defina um operador associado a φ por*

$$\Box f = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} f_{ij},$$

onde $f \in \mathcal{D}(M)$. Então o operador $\Box$ é autoadjunto em $L^2(M)$ se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ijj} = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Demonstração. Ver [4], pág. 196, Proposição 1. $\square$

Seja $T = \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij}(\omega_i \otimes \omega_j)$ um tensor simétrico definido em M, onde

$$T_{ij} = T(e_i, e_j) = \langle nHe_i, e_j \rangle - B(e_i, e_j) = nH\delta_{ij} - h_{ij}. \tag{2.33}$$

Seguindo Cheng-Yau [4], introduzimos um operador $\Box$ associado a T, agindo nas funções $f \in \mathcal{D}(M)$ de classe C^2 em M, por

$$\Box f = \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij} f_{ij}. \tag{2.34}$$

Afirmativa: T_{ij} é livre de divergência, isto é, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} T_{ijj} = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} T_{ijj} &= n\delta_{ij} H_j - h_{ijj} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} h_{kkj} - h_{ijj} \\ &= \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} h_{kjk} - h_{ijj} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} h_{jkk} - h_{ijj}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} T_{ijj} &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \sum_{k=1}^{n} h_{jkk} - \sum_{j=1}^{n} h_{ijj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} h_{ikk} - \sum_{j=1}^{n} h_{ijj} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o operador $\Box$ é autoadjunto relativo ao produto interno em $L^2(M)$. Em outras palavras,

$$\int_M f \Box g = \int_M g \Box f. \tag{2.35}$$

Lema 2.2.1. *Se M é uma hipersuperfície definida em $\overline{M}^{n+1}(c)$, então*

$$\Box(nH) = \frac{1}{2} n(n-1)\Delta R + |\nabla B|^2 - n^2 |\nabla H|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(k_i - k_j)^2. \tag{2.36}$$

Demonstração. Observemos, de (2.18), que $h_{ij} = k_i\delta_{ij}$. Daí

$$\begin{aligned}
\Box(nH) &= \sum_{i,j=1}^{n}(nH\delta_{ij} - h_{ij})(nH)_{ij} \\
&= nH\sum_{i=1}^{n}(nH)_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(nH)_{ij} \\
&= nH\Delta(nH) - \sum_{i=1}^{n} k_i(nH)_{ii}.
\end{aligned}$$

Como $\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2$, temos que

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}\Delta(nH)^2 - n^2|\nabla H|^2 - \sum_{i=1}^{n} k_i(nH)_{ii}.$$

Visto que $(nH)^2 = n^2H^2 = n(n-1)\overline{R} + |B|^2$, onde $\overline{R} = R - c$, tem-se

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R + \frac{1}{2}\Delta|B|^2 - n^2|\nabla H|^2 - \sum_{i=1}^{n} k_i(nH)_{ii}. \tag{2.37}$$

Além disso, aplicando (1.31) em B,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|B|^2 &= |\nabla B|^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i(trB)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(k_i - k_j)^2 \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i(nH)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2
\end{aligned} \tag{2.38}$$

e substituindo (2.38) em (2.37), teremos

$$\Box(nH) = \frac{1}{2}n(n-1)\Delta R + |\nabla B|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(k_i - k_j)^2 - n^2|\nabla H|^2.$$

$\Box$

Seja $\mu_i = H - k_i,\ i = 1, \ldots, n$, então, considerando o tensor ϕ como na seção anterior,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0 \quad \text{e} \quad |\phi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = |B|^2 - nH^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)(|B|^2 - n\overline{R}).$$

Suponhamos $c = 1$ e que a curvatura escalar R em M é constante, então $\Delta R = 0$. Substituindo $\Delta R = 0$ e (2.10) em (2.36),

$$\Box(nH) = |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + n|\phi|^2 - |\phi|^4 + nH^2|\phi|^2 - nH\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3. \quad (2.39)$$

Usando a segunda desigualdade de (2.2), Lema 2.1.1, obtemos a seguinte desigualdade

$$\Box(nH) \geq |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + n|\phi|^2 - |\phi|^4 + nH^2|\phi|^2 - nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|^2. \quad (2.40)$$

Em outras palavras,

$$\Box(nH) \geq |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + |\phi|^2\left(-P_H(|\phi|)\right), \quad (2.41)$$

onde $P_H(|\phi|)$ foi dado na seção anterior.

O lema a seguir foi obtido por Alencar, do Carmo e Colares em [2], pág. 125.

Lema 2.2.2. *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão. Suponhamos que M tem curvatura escalar constante R, com $R - c \geq 0$. Então*

$$|\nabla B|^2 \geq n^2|\nabla H|^2. \quad (2.42)$$

Demonstração. Inicialmente, observemos em (2.20) que

$$n(n-1)(R-c) = n^2H^2 - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2.$$

Derivando covariantemente os dois lados da expressão acima e considerando R constante, tem-se

$$2n^2HH_k - \sum_{i,j=1}^{n} 2h_{ij}h_{ijk} = 0,$$

isto é,

$$n^4H^2H_k^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}h_{ijk}\right)^2. \quad (2.43)$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz em (2.43),

$$n^4H^2H_k^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ijk}^2\right). \quad (2.44)$$

Logo
$$\sum_{k=1}^{n} n^4 H^2 H_k^2 \leq |B|^2 \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 \right),$$
ou seja
$$n^4 H^2 |\nabla H|^2 \leq |B|^2 |\nabla B|^2.$$
Como $n^2 H^2 - |B|^2 = n(n-1)(R-c) \geq 0$, temos que
$$n^4 H^2 |\nabla H|^2 \leq |B|^2 |\nabla B|^2 \leq n^2 H^2 |\nabla B|^2.$$
Em outras palavras,
$$n^2 |\nabla H|^2 \leq |\nabla B|^2,$$
como queríamos demonstrar. □

Observação 2.2.1. Se $|\nabla B|^2 = n^2 |\nabla H|^2$, então
$$h_{ij} = const., \ \forall\ i,j = 1,\ldots,n.$$

De fato, $|\nabla B|^2 = n^2 |\nabla H|^2$ implica
$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} h_{ijk} \right)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n} h_{ijk}^2 \right).$$
Logo, existe $g \in \mathcal{D}(M)$ tal que
$$h_{ijk} = g h_{ij}, \ \forall\ i,j,k = 1,\ldots,n.$$
Quando $g(p) = 0$, tem-se $h_{ijk}(p) = 0$ para todo $i,j,k = 1,\ldots,n$. Suponhamos que $g(p) \neq 0$, então
$$g(p) h_{ij}(p) - g(p) h_{ik}(p) = h_{ijk}(p) - h_{ikj}(p) = 0,$$
pois B satisfaz a equação de Codazzi
$$h_{ijk} = h_{ikj}.$$
Consequentemente, $h_{ij} = h_{ik}$ em p, para quaisquer $i,j,k = 1,\ldots,n$. Como $h_{ii} = k_i$ e $h_{ij} = 0,\ i \neq j$, temos
$$h_{ii}(p) = h_{ik}(p) = 0, \ i \neq k, \forall\ i = 1,\ldots,n.$$
Assim
$$h_{ijk}(p) = g(p) h_{ij}(p) = 0, \ \forall\ i,j,k = 1,\ldots,n.$$

Em qualquer caso, $h_{ijk} = 0$, quaisquer que sejam $p \in M$ e $i, j, k = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$h_{ij} = const., \ \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

O resultado a seguir, obtido por Li Haizhong em [10], caracteriza as hipersuperfícies com curvatura escalar constante na esfera. Mais precisamente,

Teorema 2.2.1 (Li Haizhong). *Seja M uma hipersuperfície compacta de dimensão n, $n \geq 3$, com curvatura escalar constante R em $S^{n+1}(1)$. Se $\overline{R} = R - 1 \geq 0$ e*

$$n\overline{R} \leq |B|^2 \leq \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n], \tag{2.45}$$

então

$$|B|^2 \equiv n\overline{R} \tag{2.46}$$

e M é totalmente umbílica ou

$$|B|^2 = \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n] \tag{2.47}$$

e $M = S^1(\sqrt{1-r^2}) \times S^{n-1}(r)$, onde $r = \sqrt{\dfrac{n-2}{n(\overline{R}+1)}}$.

Lema 2.2.3. *Assuma que $\overline{R} \geq 0$ e*

$$|B|^2 \leq \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n].$$

Então

$$-P_H(|\phi|) \geq 0.$$

Além disso, $P_H(|\phi|) = 0$ implica

$$|B|^2 \equiv \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n].$$

Demonstração. Sejam

$$a = n + 2(n-1)\overline{R} - \left(\frac{n-2}{n}\right)|B|^2$$

e

$$b = \left(\frac{n-2}{n}\right)\sqrt{(n(n-1)\overline{R} + |B|^2)(|B|^2 - n\overline{R})}.$$

Observemos que $a > 0$. Com efeito,

$$|B|^2 \leq \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n]$$

implica

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n-2}{n}\right)|B|^2 &\leq \frac{1}{(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n] \\
&\leq \left(\frac{1}{(n\overline{R}+2)}(n\overline{R}+2) + \frac{2}{(n\overline{R}+2)}\right)(n-1)\overline{R} + \frac{n}{(n\overline{R}+2)} \\
&\leq (n-1)\overline{R} + (n-1)\overline{R} + \frac{n}{2} \\
&< 2(n-1)\overline{R} + n.
\end{aligned}$$

Logo

$$a = n + 2(n-1)\overline{R} - \left(\frac{n-2}{n}\right)|B|^2 > 0.$$

Visto que $n(n-1)\overline{R} = n^2H^2 - |B|^2$ e $\left(\frac{n}{n-1}\right)|\phi|^2 = |B|^2 - nH^2$, obtemos

$$a = n + 2(n-1)\overline{R} - \left(\frac{n-2}{n}\right)|B|^2 = n(1+H^2) + |\phi|^2 > 0$$

e

$$b = \left(\frac{n-2}{n}\right)\sqrt{(n(n-1)\overline{R} + |B|^2)(|B|^2 - n\overline{R})} = \frac{(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H = |\phi| \geq 0.$$

Como $a + b > 0$ e

$$a^2 - b^2 = n\left(n + 4(n-1)\overline{R} + n(n-1)\overline{R}^2\right) - (n-2)(2+n\overline{R})|B|^2 \geq 0,$$

temos que

$$a - b \geq 0.$$

Portanto,

$$-P_H(|\phi|) \geq -P_{|H|}(|\phi|) = a - b \geq 0.$$

Além disso, se $P_H(|\phi|) = 0$ tem-se $a - b = 0$ e, consequentemente, $a^2 - b^2 = 0$. Em outras palavras,

$$|B|^2 = \frac{n}{(n-2)(n\overline{R}+2)}[n(n-1)\overline{R}^2 + 4(n-1)\overline{R} + n].$$

□

Demonstração do Teorema 2.2.1. Visto que $\Box$ é um operador autoadjunto,

$$\int_M \Box(nH) = \int_M (nH)\Box(1) = \int_M (nH)\cdot 0 = 0.$$

Como consequência do Lema 2.2.2 e do Lema 2.2.3, tem-se

$$\Box(nH) \geq |\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 + |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) \geq 0,$$

logo

$$0 = \int_M \Box(nH) \geq \int_M \left(|\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2\right) + \int_M |\phi|^2\left(-P_H(|\phi|)\right) \geq 0.$$

Sabendo que $\Box(nH) \geq 0,\ |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) \geq 0$ e $|\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 \geq 0$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\Box(nH) = 0; \tag{2.48}$$

$$|\phi|^2(-P_H(|\phi|)) = 0; \tag{2.49}$$

$$|\nabla B|^2 - n^2|\nabla H|^2 = 0. \tag{2.50}$$

A última igualdade implica $k_i = h_{ii} = const.$ para todo $i = 1, \ldots, n$, mostrando que H é constante. Decorre da equação (2.49) que

$$|\phi|^2 = \left(|B|^2 - n\overline{R}\right) \equiv 0 \text{ ou } P_H(|\phi|) = 0.$$

No primeiro caso, $|B|^2 \equiv n\overline{R}$ e o Teorema 2.1.2 afirma que M é totalmente umbílica.

Observemos que

$$n^2H^2 - |B|^2 = n(n-1)\overline{R} \geq 0.$$

Assim, $H = 0$ implica $-|B|^2 \geq 0$ e, consequentemente, $|B|^2 \equiv 0$ e $|\phi| = 0$, ou seja, estamos no primeiro caso e não podemos ter $P_H(|\phi|) = |\phi|^2 - n = 0$. No segundo caso, como $n \geq 3$, obtemos do Teorema 2.1.2 que M é um H(r)-toro, isto é, $M = S^1(\sqrt{1-r^2}) \times S^{n-1}(r)$. Além disso, as curvaturas principais de M são dadas por

$$k_1 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{e} \quad k_2 = \cdots = k_n = -\frac{1-r^2}{r}.$$

Daí,

$$n(n-1)\overline{R} = n^2H^2 - |B|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = (n-1)\frac{n-2-nr^2}{r^2},$$

logo

$$n\overline{R}r^2 = n - 2 - nr^2.$$

Portanto,

$$r = \sqrt{\frac{n-2}{n(1+\overline{R})}}\ ,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] H. Alencar & M. do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. of Amer. Math. Soc. (4) **120** (1994), 1223-1229.

[2] H. Alencar, M. do Carmo & A. G. Colares, *Stable hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Z. **213** (1993), 117-131.

[3] S. S. Chern, M. do Carmo & S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant lenght*, Functional Analysis and Related Fields (F. Browder, ed.), Springer-Verlag, Berlim, 1970, pp. 59-75.

[4] S. Y. Cheng & S. T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann. **225** (1977), 195-204.

[5] M. do Carmo, Differential Forms and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[6] M. do Carmo, Geometria Riemanniana, 4 ed., Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[7] M. do Carmo, O Método do Referencial Móvel, Publicações Matemáticas, IMPA, 2008.

[8] M. do Carmo & M. Djaczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 685-709.

[9] L. Haizhong, *Global rigidity theorems of hypersurfaces*, Ark. Mat. **35** (1997), 327-351.

[10] L. Haizhong, *Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms*, Math. Ann. **305** (1996), 665-672.

[11] B. Lawson, *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. (2) **89** (1996), 187-197.

[12] M. Okumura, *Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. Math. **96** (1974), 207-213.

[13] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62-105.

Índice Remissivo

Aplicação
  diferenciável, 12
  normal de Gauss, 62

Campo
  de vetores, 17
  paralelo, 30
Codimensão de uma imersão, 14
Colchete, 18
Conexão
  afim, 27
  de Levi-Civita, 33
  normal, 59
  riemanniana, 35
  simétrica, 33
Curva parametrizada, 22
Curvatura, 40
  de Ricci, 53
  escalar, 53
  Gaussiana, 63
  média, 62
  normal, 59
  seccional, 49

Derivada covariante, 28, 38
Difeomorfismo, 14
Diferencial covariante, 38
Direções principais, 62
Divergência, 39

Equação
  de Codazzi, 61
  de Gauss, 60
Estrutura diferenciável, 11

Fibrado
  normal, 59
  tangente, 16
Forma
  espacial, 65
  exterior, 23

Geodésica, 37
Gradiente, 39

H(r)-toro, 64

Imersão, 14
  mínima, 57
  totalmente geodésica, 57
  umbílica, 57
Isometria, 22
  Local, 22

Laplaciano, 39
Lema de Cartan, 25

Métrica
  produto, 21
  riemanniana, 21
Merguho, 14

Referencial
  móvel, 24
  móvel ortonormal, 24

Segmento de geodésica, 37
Segunda Forma Fundamental, 54

Tensor, 37
  curvatura, 44

Topologia em uma variedade, 11
Transporte paralelo, 30

Variedade
  diferenciável, 11
  imersa, 22
  orientável, 16
  produto, 21
  riemanniana, 21
Vetor tangente, 13