

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Talita Santos de Araújo

O TEOREMA DE HALL E O GAP LEMMA

Maceió/AL

2022

Talita Santos de Araújo

O TEOREMA DE HALL E O GAP LEMMA

Trabalho de Conclusão de Curso
submetido à Universidade Federal
de Alagoas, como requisito necessá-
rio para obtenção do grau de Bacha-
rel em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Davi dos Santos Lima

Maceió/AL, 03 de Março de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

TALITA SANTOS DE ARAÚJO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Bacharel em Matemática, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Davi dos Santos Lima
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Wagner Ranter Gouveia da Silva
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo
Moreira
Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Maceió/AL, 03 de Março de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA BACHARELADO
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.mat@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Informamos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Licenciatura que o Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **TALITA SANTOS DE ARAÚJO** matrícula nº **16112972**, do curso de **Matemática Bacharelado**, intitulado “**O Teorema de Hall e o gap Lemma**”, recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: **9,875** (), média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Davi dos Santos Lima: _10,0_

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira: _10,0_

Prof. Dr. Wagner Ranter Gouveia da Silva: _9,75_

Prof. Dr. Carlos Gustavo Moreira: _9,75_

Maceió, 03 de Março de 2022.

Documento assinado digitalmente
gov.br Davi dos Santos Lima
Data: 03/03/2022 18:35:11-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Davi dos Santos Lima

Documento assinado digitalmente
gov.br WAGNER RANTER GOUVEIA DA SILVA
Data: 03/03/2022 22:32:30-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Wagner Ranter Gouveia da Silva

Documento assinado digitalmente
gov.br KRERLEY IRRACIEL MARTINS OLIVEIRA
Data: 04/03/2022 08:39:11-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira

Carlos Gustavo Moreira

Prof. Dr. Carlos Gustavo Moreira

Dedico esse trabalho aos meus pais
e ao meu irmão, que sempre me apoiam

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me ajudar em todos os momentos, aos meus pais, Jafé e Lucicleide, por todo o apoio e cuidado que sempre me deram, e ao meu irmão, Thiago, por estar sempre ao meu lado.

Agradeço a cada professor que me ajudou a crescer nesta etapa da minha formação, em especial ao meu orientador, Davi Lima, por todos os conselhos e conhecimento proporcionados. Ao professor Krerley Oliveira, que me apresentou diversos projetos na universidade, me concedendo não apenas bolsas, mas também experiências valiosas na minha formação. E a tantos outros professores, que sempre compartilharam comigo seus conhecimentos e experiências, dentre os quais gostaria de citar os professores Wagner Ranter, Isnaldo Isaac, Rafael Lucena e Carlos Gonçalves.

Agradeço também a cada um dos meus amigos, que durante a graduação compartilhou comigo momentos de estudo e descontração.

Por fim, agradeço a mim mesma, por nunca desistir.

*"A matemática é sobre entender coisas
e conectar coisas"*

Resumo

Este trabalho apresenta um teorema provado inicialmente por Marshall Hall [1947], que conecta um problema de Teoria dos Números à soma de Conjuntos de Cantor. o Teorema de Hall nos diz que todo número real pode ser escrito como soma de dois números cuja expansão em frações contínuas não contém coeficientes maiores que 4.

Para deixarmos o texto autocontido, apresentaremos algumas propriedades da expansão em frações contínuas, em seguida falaremos sobre alguns conjuntos de Cantor, sendo o principal deles $C(4)$, apresentando suas construções e algumas propriedades.

Mostraremos uma prova topológica para o Teorema de Hall, e em seguida mostraremos como este resultado pode ser obtido utilizando o Gap Lemma de Newhouse, que apareceu pela primeira vez em um trabalho de S. Newhouse no contexto de dinâmica hiperbólica.

Palavras-chave: Frações Contínuas, Conjuntos de Cantor, Teorema de Hall, Gap Lemma de Newhouse

Sumário

1	Introdução	9
2	Frações Contínuas e a Transformação de Gauss	11
3	O Conjunto $\mathcal{C}(N)$	20
3.1	Conjuntos de Cantor Dinamicamente Definidos	20
3.2	A Construção de $\mathcal{C}(N)$	25
3.2.1	Consequências da Construção	28
3.2.1.1	$\mathcal{C}(N)$ é Um Conjunto Perfeito	30
3.2.1.2	$\mathcal{C}(N)$ Tem Medida Nula	31
4	O Teorema de Hall	33
4.1	Um Pouco Sobre o Espectro de Lagrange	43
5	O Gap Lemma de Newhouse	45
6	Conclusão	54
	Referências	55

1 Introdução

O bastante conhecido Conjunto de Cantor Ternário, obtido a partir do intervalo $[0, 1]$ ao removermos sucessivamente os terços médios dos intervalos, é o conjunto dos pontos cuja expansão na base 3 possui apenas os dígitos 0 ou 2. Algumas propriedades interessantes deste conjunto também está presente em outros conjuntos de Cantor. Aqui estudaremos o conjunto $C(N)$, formado pelos números reais cuja expansão em frações contínuas não possui quocientes parciais maiores que N . Este conjunto possui propriedades similares ao Conjunto de Cantor Ternário, por exemplo, ambos são conjuntos perfeitos e possuem medida nula.

Analisando a soma $C(N) + C(N)$ nem sempre obtemos um intervalo de comprimento maior que 1, por exemplo, para $N = 3$ isto não é válido. Para o caso $N = 4$, Marshall Hall provou, em 1947, que qualquer número real pode ser escrito como soma de um número inteiro e dois números em $C(4)$, isto é,

$$\mathbb{Z} + C(4) + C(4) = \mathbb{R}$$

Este teorema é uma consequência do fato de

$$C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$$

Em nosso trabalho, apresentaremos duas provas para a soma $C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$ isto nos fornecerá duas provas distintas para o Teorema de Hall. Para a primeira usaremos resultados de topologia na reta, para a segunda usaremos o Gap Lemma de Newhouse, um importante resultado para conjuntos de Cantor.

Daremos agora um breve detalhamento de como se dividirá nosso texto.

Iniciaremos o segundo capítulo definindo frações contínuas e apresentando a Transformação de Gauss, que nos dá uma forma alternativa de obter a expansão em frações contínuas, desta vez com a iteração de um mapa. Também provaremos algumas propriedades desta expansão.

No terceiro capítulo, Falaremos um pouco sobre conjuntos de Cantor regulares, mostrando alguns exemplos destes conjuntos. Apresentaremos também duas construções para $C(N)$, a primeira será uma construção topológica, a segunda uma construção dinâmica, que faz de $C(N)$ um conjunto de Cantor regular. Neste capítulo mostraremos ainda algumas propriedades de $C(N)$ que são consequência de sua construção.

No quarto capítulo, estudaremos melhor o conjunto de Cantor $C(4)$, provaremos algumas propriedades deste conjunto, que serão utilizadas em ambas as provas do resultado sobre a soma de $C(4)$. Apresentaremos o Teorema de Marshall Hall, e uma demonstração para o mesmo utilizando argumentos topológicos.

Finalmente, no capítulo cinco, traremos definições úteis para o estudo de conjuntos de Cantor, como a noção de espessura e, em seguida, apresentaremos o Gap Lemma de Newhouse, que dá condições suficientes para que a interseção entre dois conjuntos de Cantor seja não vazia, e usaremos este resultado para estudar a soma de dois conjuntos de Cantor, isto nos permitirá provar o Teorema de Hall com um novo argumento.

2 Frações Contínuas e a Transformação de Gauss

Neste capítulo, apresentaremos a expansão em frações contínuas de um número real e algumas propriedades básicas desta expansão que serão bastante utilizadas posteriormente. Falaremos também da Transformação de Gauss, que será fundamental em nosso estudo sobre frações contínuas e em todo nosso trabalho.

Definiremos a expansão em frações contínuas de um número real x através da seguinte sequência $x = x_0, a_n = \lfloor x_n \rfloor$ e se $a_n \neq x_n$, definimos

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$$

assim,

$$x = x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

para simplificar nossa notação, escreveremos

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

como a expansão em frações contínuas de x . Chamaremos os a_i 's da expansão de quocientes parciais.

Esta mesma expansão pode ser obtida através da iteração da *Transformação de Gauss*, que apresentaremos a seguir.

Defina $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ por

$$T(x) = \begin{cases} x^{-1} - \lfloor x^{-1} \rfloor, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

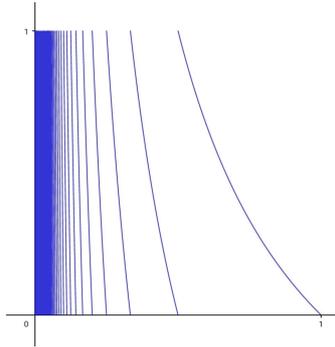


Gráfico de $T(x)$

Então se $x \in (0, 1)$ é tal que $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, temos

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, a_2 = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor, \dots, a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$$

e segue que

$$T(x) = [0; a_2, a_3, \dots], T^2(x) = [0; a_3, a_4, \dots], \dots, T^n(x) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$$

e obtemos a expansão em frações contínuas de qualquer $x \in [0, 1)$ através da iteração de $T(x)$.

Para obtermos a expansão em frações contínuas de qualquer $x \in \mathbb{R}$ basta fazermos, como antes, $a_0 = \lfloor x \rfloor$ e temos

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + T(x)} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + T^2(x)}} = \dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + T^n(x)}}}}}$$

Assim, $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + T^n(x)]$.

Exemplo 2.1. Ache a expansão em frações contínuas de $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (a razão áurea).

Solução. Seja $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ temos, $[x] = 1$, assim,

$$x = 1 + \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right] - T(x)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{x}$$

consequentemente, a expansão será dada por

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, 1, \dots]$$

Se $x \in (0, 1]$ possui expansão finita, ou seja, $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, temos $T^n(x) = 0$ e $x \in \mathbb{Q}$.

Por outro lado, se $x \in \mathbb{Q}$, é tal que $x = \frac{a}{b}$, com $a < b$, pelo Algoritmo da Divisão,

$$\begin{aligned} a &= a_0 b + r_1 \\ b &= a_1 r_1 + r_2, \\ r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= a_n r_n + r_{n+1} \end{aligned}$$

como este número é racional, $r_{n+1} = 0$ para algum n . Sendo n o menor número com tal propriedade, fazendo $a = r_1, b = r_0$ temos,

$$x = T^0(x) = \frac{r_1}{r_0}, T(x) = \frac{r_2}{r_1}, \dots, T^{n-1}(x) = \frac{r_n}{r_{n-1}}, T^n(x) = \frac{r_{n+1}}{r_n} = 0$$

ou seja, $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ e x possui expansão finita.

Além disso, observe que, como n é o menor número com tal propriedade, $a_n \geq 2$, temos

$$a_n = a_n - 1 + \frac{1}{1}$$

podemos então escrever

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n - 1 + \frac{1}{1}}}}}$$

Disto temos,

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$$

de modo que existe uma duplicidade na representação de números racionais.

Pelas observações anteriores, x é irracional se e somente se $T^n(x) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Neste caso, denotaremos $x = [0; a_1, a_2, \dots]$.

Definição 2.1. *Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ um número real definimos, para cada $n \geq 0$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, onde p_n e q_n são primos entre si, chamamos $\frac{p_n}{q_n}$ de convergentes de ordem n da fração contínua de x .*

Para entendermos melhor os convergentes de uma fração contínua, faremos a seguinte construção recursiva: $a_0 = \frac{p_0}{q_0}$, daí, $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$.

Agora,

$$[a_0; a_1] = a_0 + [0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

e temos $p_1 = a_1 a_0 + 1$ e $q_1 = a_1$.

Continuando,

$$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + [0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_0 + a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

de modo que $p_2 = a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0$ e $q_2 = a_2 a_1 + 1$.

Indutivamente, $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, onde

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ e } q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (2.1)$$

Algumas vezes, é conveniente considerar os convergentes de ordem -1 , definindo $p_{-1} := 1$ e $q_{-1} := 0$.

As relações acima são uma consequência da seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n]$, $x_n \geq 1$, então, para todo $n \geq 1$, $x = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}$.*

Demonstração. Pela definição da expansão, temos $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n]$ provaremos a proposição por indução sobre n .

Para $n = 1$, temos

$$[a_0; x_1] = a_0 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 a_0 + 1}{x_1} = \frac{x_1 p_0 + p_{-1}}{x_1 q_0 + q_{-1}}$$

Para $n = 2$, temos

$$[a_0; a_1, x_2] = [a_0; a_1 + \frac{1}{x_2}]$$

e usando o caso anterior,

$$[a_0; a_1 + \frac{1}{x_2}] = \frac{(a_1 + \frac{1}{x_2})a_0 + 1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = \frac{x_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{x_2 a_1 + 1} = \frac{x_2 p_1 + p_0}{x_2 q_1 + q_0}$$

Suponhamos agora que

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n] = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

então

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}}]$$

usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
 \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right] &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\
 &= \frac{x_{n+1} (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x_{n+1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\
 &= \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}}
 \end{aligned}$$

E a proposição está provada. \square

Corolário 2.1.1. Para todo $n \geq 1$, $x = \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}$.

Demonstração. Como

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + T^n(x)]$$

Temos $x_n = a_n + T^n(x)$, usando isto, segue da proposição anterior que

$$x = \frac{(a_n + T^n(x))p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + T^n(x))q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2} + T^n(x)p_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2} + T^n(x)q_{n-1}} = \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}$$

E temos o requerido. \square

Veremos mais alguns resultados a respeito dos convergentes.

Proposição 2.2. Para todo $n \geq 0$ temos $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ e, para $n \geq 1$ temos $q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$.

Demonstração. Para o primeiro resultado multiplicamos a primeira equação de (2.1) por q_{n-1} , a segunda por p_{n-1} , agora subtraindo a primeira da segunda obtemos

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = -(q_{n-1}p_{n-2} - p_{n-1}q_{n-2})$$

aplicado repetidas vezes e observando que $q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1$, temos o requerido.

Para obtermos a segunda igualdade, multiplicaremos a primeira equação de (2.1) por q_{n-2} e a segunda por p_{n-2} e subtraindo a primeira da segunda, temos

$$q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = a_n (q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2})$$

Aplicando o resultado provado anteriormente concluímos a prova. \square

Corolário 2.2.1. *Para todo $n \geq 1$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$ e, para todo $n \geq 2$, $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{q_n q_{n-2}}$.*

Como consequência deste corolário, temos que os convergentes de ordem par formam uma sequência crescente e os de ordem ímpar uma sequência decrescente. Além disso, os convergentes de ordem ímpar são maiores que os convergentes de ordem par.

Proposição 2.3. *Temos, para todo $n \geq 0$, $\frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$.*

Demonstração. Basta notarmos que

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \Rightarrow \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{1}{a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$$

e aplicar isto recursivamente.

\square

Outro interessante resultado diz respeito a diferença entre frações contínuas.

Proposição 2.4. *Sejam $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_1]$ e $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_2]$ duas expansões em frações contínuas que coincidem nos n primeiros quocientes parciais, então*

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_1] - [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_2] = \frac{(\mu_2 - \mu_1)(-1)^n}{(\mu_2 q_n + q_{n-1})(\mu_1 q_n q_{n-1})}$$

Demonstração. Usando resultados anteriores temos que

$$\begin{aligned}
 [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_1] - [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_2] &= \frac{\mu_1 p_n + p_{n-1}}{\mu_1 q_n + q_{n-1}} - \frac{\mu_2 p_n + p_{n-1}}{\mu_2 q_n + q_{n-1}} \\
 &= \frac{q_n p_{n-1}(\mu_2 - \mu_1) + q_{n-1} p_n(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 q_n + q_{n-1})(\mu_2 q_n + q_{n-1})} \\
 &= \frac{(\mu_2 - \mu_1)(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})}{(\mu_1 q_n + q_{n-1})(\mu_2 q_n + q_{n-1})} \\
 &= \frac{(\mu_2 - \mu_1)(-1)^n}{(\mu_1 q_n + q_{n-1})(\mu_2 q_n + q_{n-1})}
 \end{aligned}$$

□

Corolário 2.4.1. *Sejam $x_1 = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_1]$ e $x_2 = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \mu_2]$ onde $\mu_1 < \mu_2$. Então se n é ímpar $x_1 > x_2$, se n é par $x_1 < x_2$.*

Um outro importante resultado pode ser obtido usando a proposição 2.1, calculando

$$\begin{aligned}
 x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\
 &= \frac{q_n(x_{n+1} p_n + p_{n-1}) - p_n(x_{n+1} q_n + q_{n-1})}{q_n(x_{n+1} q_n + q_{n-1})} \\
 &= \frac{(-1)^n}{q_n(x_{n+1} q_n + q_{n-1})} \\
 &= \frac{(-1)^n}{q_n^2(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$$

Como $a_{n+1} < x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} < a_{n+1} + 2$ temos

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

Por outro lado, de $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, segue que,

$$q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots$$

Ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$.

Estas observações provam a proposição que segue.

Proposição 2.5. *Seja $\frac{p_n}{q_n}$ a seqüência dos convergentes de um número irracional x , então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$.*

Ao analisarmos a representação decimal de número real conseguimos facilmente localizá-lo na reta, dividindo-a em intervalos e analisando cada um dos dígitos do número. Veremos agora como fazer essa mesma análise na expansão em frações contínuas, estudando a dinâmica da Transformação de Gauss.

Escrevamos $(0, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ onde, $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right)$, então os extremos de cada I_k são exatamente os pontos de descontinuidade de $T(x)$, quando desconsideramos a origem.

Teremos então que

$$x \in I_k \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = a_1 = k$$

$$T(x) \in I_k \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = a_2 = k$$

De modo geral, teremos que

$$T^n(x) \in I_k \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{T^n(x)} \right\rfloor = a_{n+1} = k$$

Para estudarmos o comportamento desta expansão, basta então estudarmos os iterados da Transformação de Gauss. Esta análise é particularmente útil para estudarmos o comportamento de expansões infinitas.

3 O Conjunto $C(N)$

3.1 Conjuntos de Cantor Dinamicamente Definidos

Antes de apresentarmos os conjuntos de Cantor dinamicamente definidos, falaremos sobre o *Conjunto de Cantor Ternário K*.

Iniciaremos com sua construção topológica, tomaremos inicialmente o intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ e dele retiraremos o intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, o qual chamaremos de I_1 , após isto restarão dois intervalos, são eles $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, que chamaremos de I_0 e I_2 , respectivamente. Observe que os números pertencentes a I_0 são os que iniciam em 0 na sua expansão na base 3, da mesma forma os números pertencentes a I_1 e I_2 iniciam em 1 e 2, respectivamente quando expandidos na base 3. Em outras palavras, na primeira etapa da construção de K eliminamos os números que iniciam em 1 na expansão na base 3.

Na segunda etapa da construção removeremos de I_0 o intervalo $I_{01} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ cujos números iniciam sua expansão na base 3 em 01, restando assim dois intervalos, $I_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right]$ que conterà os números cuja expansão na base 3 inicia em 00 e $I_{02} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ que conterà os números cuja expansão na base 3 inicia em 02 . De I_2 removemos o intervalo $I_{21} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ restando $I_{20} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ cujos números iniciam em 20 na sua expansão na base 3 e $I_{22} = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ cujos elementos iniciam em 22 na base 3. Sendo assim, na segunda etapa da construção removemos os números cujo segundo dígito de sua expansão na base 3 é 1.

De modo análogo, na terceira etapa removeremos os números cujo terceiro dígito da expansão na base 3 é 1 e, de maneira geral, na n -ésima etapa da construção removemos os números cujo n -ésimo dígito da sua expansão na base

3 é 1.

Seguimos esse processo indefinidamente e, no fim restarão apenas os números cuja expansão na base 3 não contém o dígito 1, a este conjunto de pontos chamamos Conjunto de Cantor Ternário.

Geometricamente, em cada etapa da construção foi removido o terço médio de cada intervalo.

Observe ainda que todo número x neste conjunto pode ser identificado como uma lista contendo apenas 0's e 2's, onde a n -ésima entrada desta lista está totalmente determinada pelo intervalo ao qual x pertence na n -ésima etapa da construção.

Uma outra forma de obter K , a qual será particularmente importante para nós, é através da iteração da função $\Psi : \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$\Psi(x) = \begin{cases} 3x, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 3x - 2, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

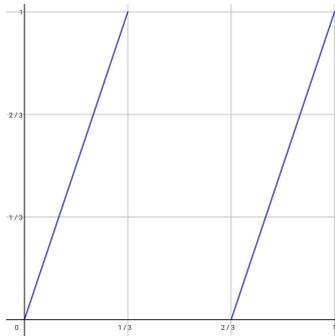


Gráfico de $\Psi(x)$

Observe que o domínio de Ψ é a primeira etapa da construção, isto é, $I_0 \cup I_2$.

Agora, seja $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ tal que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, então

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{3^k} = 0, a_2 a_3 a_4 \dots$$

ou seja, Ψ apaga o primeiro dígito da expansão.

Como $\Psi \circ \Psi = \Psi^2$ não está definida para $x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, o domínio de Ψ^2 corresponde aos x que não possuem o segundo dígito de sua expansão na base 3 igual a 1, isto é, $\Psi^2 : I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22} \rightarrow [0, 1]$.

Seguindo este mesmo raciocínio, o domínio de Ψ^n corresponde a n -ésima etapa da construção de K , desta forma,

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Psi^{-n}(I_0 \cup I_2)$$

Esta segunda forma de obter K explica a definição de conjunto de Cantor dinamicamente definido.

Definição 3.1. *Seja $X \in \mathbb{R}$ um conjunto, o fecho convexo de X , que denotaremos por \hat{X} é o menor conjunto fechado e convexo que contém X .*

Observação: O menor fechado convexo que contém X é a interseção de todos os fechados convexos que contém X .

Definição 3.2. *Sejam I_1, I_2, \dots, I_n intervalos fechados disjuntos, \hat{I} o fecho convexo de $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$, e $f : I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \rightarrow \hat{I}$ uma função de classe C^r , $r > 1$, tal que $|f'|_{I_k}| > 1$, $f|_{I_k}$ é o fecho convexo de uma união de intervalos I_j para $1 \leq k \leq n$ e, para m suficientemente grande, $f^m|_{I_k} \supset I$. Então $K = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I)$ é chamado Conjunto de Cantor Dinamicamente Definido, ou Conjunto de Cantor Regular. Se $f|_{I_k}$, $1 \leq k \leq n$ é sobrejetora, ou seja, $m = 1$ para todo $1 \leq k \leq n$, diremos que K é um Conjunto de Cantor Dinamicamente Definido (ou Regular) do Tipo Bernoulli. Chamamos de $\mathcal{R} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ Partição de Markov e I o Domínio de Markov associados a K .*

Veremos alguns exemplos de conjuntos de Cantor dinamicamente definidos onde $m > 1$ para ao menos um dos intervalos de definição.

Exemplo 3.1. Seja $f(x)$ uma função $f : \left[0, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & x \in \left[0, \frac{1}{5}\right] \\ 3x - \frac{6}{5}, & x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \\ -3x + \frac{17}{5}, & x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right] \end{cases}$$

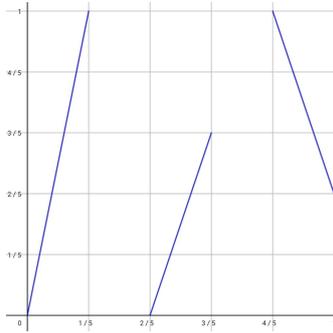


Gráfico de $f(x)$

então $|f'(x)| > 1$. Fazendo $I_1 = \left[0, \frac{1}{5}\right]$, $I_2 = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $I_3 = \left[\frac{4}{5}, 1\right]$, temos

$$f(I_1) = I$$

$$f(I_2) = I_1 \cup I_2 \Rightarrow f^2(I_2) = I$$

$$f(I_3) = I_2 \cup I_3 \Rightarrow f^2(I_3) = I$$

Segue que

$$K_f = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I)$$

é um conjunto de Cantor regular.

Podemos estudar algumas características deste conjunto. Em nosso primeiro exemplo, do Conjunto de Cantor Ternário, cada elemento pode ser representado de modo único como uma sequência em $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, conseqüentemente, existe uma quantidade não enumerável de elementos neste conjunto. Afim de obter afirmações similares em outros conjuntos de Cantor regulares identificaremos os

pontos de um conjunto de Cantor K cuja partição de Markov possui n elementos com um subconjunto do espaço das sequências em n símbolos $\Sigma_n = \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$. Denotaremos este subconjunto por Σ_K .

Para encontrarmos Σ_{K_f} , observamos inicialmente que nem todas as sequências de Σ_3 são permitidas, consideramos então a matriz de adjacência de K_f .

Definição 3.3. *Seja K um conjunto de Cantor e $\mathcal{R} = \{I_1, \dots, I_n\}$ sua partição de Markov associada, diremos que a sequência de números ij , $i, j = 1, \dots, n$ é permitida se $f|_{I_i} \supset I_j$ e, neste caso, diremos que $f|_{I_i}$ cobre I_j .*

Definição 3.4. *Seja K um conjunto de Cantor cuja partição de Markov contém n intervalos, definimos sua Matriz de Adjacência por $M_{n \times n}$, $m_{ij} = 1$ se ij é permitido e $m_{ij} = 0$ caso contrário.*

A imagem de I_2 cobre apenas I_1 e I_2 , o dígito 2 só poderá ser seguido por 1 ou 2, similarmente, 3 só poderá ser seguido por 2 ou 3, logo, a matriz de adjacência de K_f , que denotaremos por M_{K_f} será dada por

$$M_{K_f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\Sigma_{K_f} = \{x = (x_1 x_2 x_3 \dots); m_{x_i x_{i+1}} = 1 \forall i\}$$

observe que $\{1, 2\}^{\mathbb{N}} \subset \Sigma_{K_f}$, logo, K_f é não enumerável.

Exemplo 3.2. Seja g uma função $g : \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow [0, 1]$,

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ 2x - 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

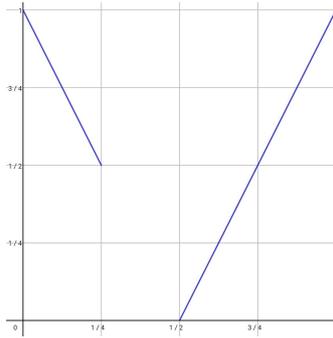


Gráfico de $g(x)$

temos $|g'(x)| > 1$, além disso, seja $I_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ e $I_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$g(I_1) = I_2 \Rightarrow g^2(I_1) = I$$

$$g(I_2) = I$$

daí,

$$K_g = \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(I)$$

é um conjunto de Cantor regular.

Sua matriz de adjacência, M_{K_g} será dada por

$$M_{K_g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deste modo, sequências com (12), (22), (21) são permitidas, enquanto sequências com (11) não são permitidas. Podemos chamar $0 = (12)$, $1 = (22)$ e $2 = (21)$, de modo que sequências de 0's e 1s são sempre permitidas, segue que

$$\{0, 1\} \subset \Sigma_{K_g}$$

logo K_g é não enumerável.

3.2 A Construção de $C(N)$

Primeiro, definiremos o conjunto $C(N)$, onde $N \geq 2$ é um número inteiro, por

$$C(N) = \{x = [0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}; a_i \leq N \forall i \geq 1\}$$

Para construirmos $C(N)$, iniciaremos com o intervalo $(0, 1)$, pois para todo $x \in (0, 1)$, $a_0 = 0$.

Observando o quociente parcial a_1 , pelo corolário 2.4.1, o maior elemento de $C(N)$ é da forma $[0; 1, a_2, a_3, \dots]$, ao analisar a_2 , temos que o elemento máximo é $[0; 1, N, a_3, a_4, \dots]$. Continuando, teremos que

$$\max(C(N)) = [0; 1, N, 1, N, \dots] = [0; \overline{1, N}]$$

De modo semelhante, o menor elemento de $C(N)$, será

$$\min(C(N)) = [0; N, 1, N, 1, \dots] = [0; \overline{N, 1}]$$

Aplicaremos este raciocínio para acharmos o maior e menor elemento dos intervalos mantidos em cada etapa.

Na primeira etapa queremos manter apenas os x tais que $a_1 \leq N$, serão mantidos então os intervalos

$$\begin{aligned} J_1 &= [[0; 1, \overline{1, N}], [0; 1, \overline{N, 1}]] \\ J_2 &= [[0; 2, \overline{1, N}], [0; 2, \overline{N, 1}]] \\ &\vdots \\ J_N &= [[0; N, \overline{1, N}], [0; N, \overline{N, 1}]] \end{aligned}$$

Na segunda etapa, manteremos os x tais que $a_2 \leq N$, para isto, em J_1 conservaremos os intervalos

$$\begin{aligned} J_{11} &= [[0; 1, 1, \overline{N, 1}], [0; 1, 1, \overline{1, N}]] \\ J_{12} &= [[0; 1, 2, \overline{N, 1}], [0; 1, 2, \overline{1, N}]] \\ &\vdots \\ J_{1N} &= [[0; 1, N, \overline{N, 1}], [0; 1, N, \overline{1, N}]] \end{aligned}$$

em J_2 restarão

$$\begin{aligned} J_{21} &= [[0; 2, 1, \overline{N, 1}], [0; 2, 1, \overline{1, N}]] \\ J_{22} &= [[0; 2, 2, \overline{N, 1}], [0; 2, 2, \overline{1, N}]] \\ &\vdots \\ J_{2N} &= [[0; 2, N, \overline{N, 1}], [0; 2, N, \overline{1, N}]] \end{aligned}$$

e finalmente, tem J_N restarão

$$\begin{aligned} J_{N1} &= [[0; N, 1, \overline{N, 1}], [0; N, 1, \overline{1, N}]] \\ J_{N2} &= [[0; N, 2, \overline{N, 1}], [0; N, 2, \overline{1, N}]] \\ &\vdots \\ J_{NN} &= [[0; N, N, \overline{N, 1}], [0; N, N, \overline{1, N}]] \end{aligned}$$

Na terceira etapa, manteremos os x tais que $a_3 \leq N$ e, continuando a construção como feito na terceira etapa teremos ao fim desta os intervalos J_{111} , J_{112} , J_{113} , J_{114}, \dots, J_{11N} , J_{121} , J_{122}, \dots, J_{1NN} , J_{211}, \dots, J_{N11} , J_{212}, \dots, J_{2NN} , J_{311}, \dots, J_{N11} .

Para aplicar este mesmo raciocínio a cada intervalo na n -ésima etapa da construção, fixaremos a_1, a_2, \dots, a_n com $1 \leq a_i \leq N, i = 1, 2, \dots, n$, seja $J_{a_1 a_2 \dots a_n}$ um intervalo da n -ésima etapa da construção. Se n é par

$$J_{a_1 a_2 \dots a_n} = [[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{N, 1}], [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{1, N}]]$$

se n é ímpar

$$J_{a_1 a_2 \dots a_n} = [[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{1, N}], [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{N, 1}]]$$

Continuamos indefinidamente a construção e o conjunto resultante será $C(N)$.

Podemos então concluir que o fecho convexo de $J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_N$ é $[[0; \overline{N, 1}], [0; \overline{1, N}]]$.

Consideraremos agora a *Transformação de Gauss* T , definida na seção 1, e a partir dela construiremos uma nova função cuja iteração irá nos auxiliar numa nova forma de obter $C(N)$.

Considere $\Phi : J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_N \rightarrow [[0; \overline{N, 1}], [0; \overline{1, N}]]$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^{-1} - 1, & x \in J_1 \\ x^{-1} - 2, & x \in J_2 \\ \vdots \\ x^{-1} - N, & x \in J_N \end{cases}$$

Observamos então que o domínio de Φ é formado pelos $x \in (0, 1)$ tais que $1 \leq a_1 \leq N$, isto é, a primeira etapa da construção de $C(N)$.

Além disso, seja $x = [0; a_1, a_2, \dots]$, então $\Phi(x) = [0; a_2, a_3, \dots]$, sendo assim, Φ^2 está definida apenas para os x tais que $1 \leq a_2 \leq N$, mais precisamente, Φ^2 está definida apenas nos intervalos $J_{a_1 a_2}$ Obtidos na segunda etapa da construção anterior. Semelhantemente, $\Phi^3(x)$ está definida apenas para x nos intervalos $J_{a_1 a_2 a_3}$, obtidos na terceira etapa da construção anterior.

De modo geral, teremos que a n -ésima etapa da construção de $C(N)$ corresponde ao domínio de $\Phi^n(x)$, assim, $C(N)$ é o conjunto dos pontos nos quais $\Phi^n(x)$ está bem definida para todo $n \geq 1$. Assim,

$$C(N) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n}([0; \overline{N, 1}], [0; \overline{1, N}])$$

Por fim, chamemos $\Phi_k(x)$ a restrição de Φ ao intervalo J_k , então,

$$|\Phi'_k(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} \right| \geq \frac{1}{[0; \overline{1, N}]^2} > 1$$

e ainda,

$$\Phi_k(J_k) = \Phi_k([0; \overline{k, 1, 4}], [0; \overline{k, 4, 1}]) = [0; \overline{1, 4}], [0; \overline{4, 1}]$$

para cada $1 \leq k \leq N$.

Segue que $C(N)$ é um conjunto de Cantor regular.

3.2.1 Consequências da Construção

Vimos anteriormente que o espaço das sequências de n símbolos nos auxilia no estudo simbólico de conjuntos de Cantor, usaremos agora Σ_N para estudar $C(N)$. Iniciaremos definindo uma métrica neste espaço.

Definição 3.5. *Seja $\Sigma_N = \{1, 2, \dots, N\}$ o conjunto das sequências de N símbolos. Dadas duas sequências $x, y \in \Sigma_N$, $x = (x_1 x_2 x_3 \dots)$, $y = (y_1 y_2 y_3 \dots)$, definimos a distância entre x e y por*

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i}$$

Neste espaço podemos definir o operador shift, denotado por σ , $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$, tal que se $x = (x_1x_2x_3\dots)$, $\sigma(x) = (x_2x_3x_4\dots)$, este operador, de definição simples, pode ser usado para estudar propriedades interessantes de $C(N)$, para isso, usaremos o conceito de conjugação topológica, que nos permite estudar propriedades comuns a dois mapas, desde que sejam topologicamente conjugados.

Definição 3.6. *Sejam $f : A \rightarrow A$ e $g : B \rightarrow B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ duas funções, dizemos que f e g são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : A \rightarrow B$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Dois mapas topologicamente conjugados possuem as mesmas propriedades dinâmicas, provando que existe um homeomorfismo $h : C(N) \rightarrow \Sigma_N$ tal que $h \circ \sigma = T \circ h$, poderemos estudar os elementos de $C(N)$ a partir das sequências de N símbolos. Seja $x = [0; a_1, a_2, \dots] \in C(N)$ definirmos $h : C(N) \rightarrow \Sigma_N$ por $h(x) = (a_1a_2\dots)$. h está bem definida. Tomando $x \in C(N)$, temos

$$x = \bigcap_{i=1}^{\infty} J_{a_1a_2\dots a_i}$$

assim, uma sequência de intervalos $J_{a_1}, J_{a_1a_2}, J_{a_1a_2a_3}, \dots$ determina um único elemento $(a_1a_2a_3\dots)$ e, dada uma sequência $(a_1a_2a_3\dots)$ podemos construir a sequência de intervalos $J_{a_1}, J_{a_1a_2}, J_{a_1a_2a_3}, \dots$ que determina um único elemento de $C(N)$, logo, h é uma bijeção. Resta verificarmos que esta função é contínua, bem como sua inversa, que é dada por $h^{-1} : \Sigma \rightarrow C(N)$, $h^{-1}(x) = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, onde $x = (a_1a_2a_3\dots)$.

Dados $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots] \in C(N)$ e $\epsilon > 0$, podemos tomar n tal que $\frac{1}{N^n} < \epsilon$ e considerar $J_{a_1\dots a_n}$, tomando também $\delta > 0$ e $y = [0; y_1, y_2, y_3, \dots] \in C(N)$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow y \in J_{a_1\dots a_n}$$

temos que $h(x)$ e $h(y)$ coincidem nos n primeiros elementos, assim

$$|h(x) - h(y)| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|a_i - y_i|}{N^i} < \epsilon$$

daí, h é uma função contínua.

Agora, dados $x = (a_1 a_2 a_3 \dots) \in \Sigma_N$ e $\epsilon > 0$, existe n tal que $|J_{a_1 \dots a_n}| < \epsilon$, isto é sempre possível, uma vez que $|J_{a_1 \dots a_n}| \rightarrow 0$. Tomando $\delta = \frac{1}{N^n}$, temos que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow y = (a_1 \dots a_n y_{n+1} \dots)$$

assim

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| \leq |J_{a_1 \dots a_n}| < \epsilon$$

de modo que h é um homeomorfismo.

Por fim, veremos que isto é uma conjugação entre T e σ . De fato, basta notar que dado $x = (a_1 a_2 a_3 \dots) \in \Sigma_N$

$$\begin{aligned} h \circ \sigma(x) &= h((a_2 a_3 \dots)) \\ &= [0; a_2, a_3, \dots] \\ &= T([0; a_1, a_2, a_3, \dots]) \\ &= T(h((a_1 a_2 a_3 \dots))) \\ &= T \circ h(x) \end{aligned}$$

3.2.1.1 $C(N)$ é Um Conjunto Perfeito

Definição 3.7. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto, dizemos que é um Conjunto Perfeito se é um conjunto fechado e cada ponto de X é um ponto de acumulação.*

Veremos que $C(N)$ é um conjunto perfeito. Claramente $C(N)$ é um conjunto fechado, pois trata-se de um intervalo fechado do qual removemos, do seu interior, sucessivamente, intervalos abertos. Resta mostrarmos que todo ponto de $C(N)$ é um ponto de acumulação, para isso usaremos a conjugação topológica com o shift.

Tomemos $x \in \Sigma_N$ com $x = (a_1 a_2 a_3 \dots)$, definimos a sequência

$$x_n = (a_1 a_2 \dots a_n b_{n+1} \dots)$$

onde $b_i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $i \geq (n+1)$. Então, dado $\epsilon > 0$, tomamos n tal que $\frac{1}{N^n} < \epsilon$, de modo que

$$|x_n - x| = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_{n_i} - x_i|}{N^i} < \frac{1}{N^n} < \epsilon$$

assim, $x_n \rightarrow x$ e como h é uma função contínua,

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow h(x_n) \rightarrow h(x)$$

onde $h(x_n)$ é uma sequência de elementos de $C(N)$ convergindo para $h(x)$. Além disso, $h(x)$ é arbitrário em $C(N)$, uma vez que h é uma função invertível, segue que todo ponto de $C(N)$ é um ponto de acumulação. Portanto, $C(N)$ é um conjunto perfeito.

3.2.1.2 $C(N)$ Tem Medida Nula

Mostraremos agora que $C(N)$ tem medida nula, para isso faremos uso de resultados de teoria ergódica, que não é o foco deste texto, por isso suas demonstrações serão omitidas, o leitor interessado poderá consultá-las nas fontes citadas.

Definição 3.8. *Sejam (X, χ) um espaço de medida e $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável, $A \subset X$ um subconjunto de X , A é dito invariante por f se $f^{-1}(A) = A$. uma medida μ é dita invariante por f se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Definição 3.9. *Sejam (X, χ) um espaço de medida e μ uma medida de probabilidade invariante por uma transformação mensurável $f : X \rightarrow X$, o sistema (f, μ) é dito ergódico quando para todo subconjunto invariante $A \subset X$ tem-se $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

Definiremos agora uma medida de probabilidade invariante por $T(x)$, dada por

$$\mu(A) = \frac{1}{\log(2)} \int_A \frac{dx}{1+x}$$

chamada Medida de Gauss.

Denotaremos por ℓ a medida de Lebesgue em \mathbb{R} .

Proposição 3.1. *A Medida de Gauss $\mu(A) = \frac{1}{\log(2)} \int_A \frac{dx}{1+x}$ é uma medida de probabilidade invariante pela Transformação de Gauss $T(x)$.*

Estas proposições estão demonstradas em [8].

Além disso, como

$$\frac{\ell(A)}{2\log(2)} < \mu(A) \leq \frac{\ell(A)}{\log(2)}$$

para qualquer mensurável $A \subset [0, 1)$, ℓ e μ possuem os mesmos conjuntos de medida nula.

Proposição 3.2. *(T, μ) é um sistema ergódico.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [8].

Como $C(N)$ é o conjunto dos pontos $x \in [0, 1)$ tais que T^n está definida para todo n , este conjunto é, por definição, invariante por T , mas em cada etapa da construção removemos intervalos com medida positiva, deste modo $C(N)$ não pode ter medida total, logo, possui medida nula.

É possível mostrarmos que $C(N)$ possui medida nula estimando o comprimento dos intervalos remanescentes em cada etapa, estratégia comumente utilizada para mostrarmos que o Conjunto de Cantor Ternário possui medida nula. Esta prova não será apresentada aqui.

4 O Teorema de Hall

Neste capítulo, conheceremos o teorema principal do nosso trabalho, o Teorema de Hall, que trata da soma $C(4) + C(4)$, para isso, iniciaremos definindo o que é a soma de dois conjuntos de números reais.

Definição 4.1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, definimos $A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\}$*

Quando consideramos o Conjunto de Cantor Ternário temos $K + K = [0, 2]$. Depois de estudarmos as propriedades anteriores nos surge o questionamento: Valeria algo similar em $C(N) + C(N)$? No caso em que $N = 4$ a resposta é sim! Então voltaremos nossa atenção para $C(4)$.

Em 1947 Marshall Hall provou que $C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$, e como consequência disto, todo número real pode ser escrito como a soma de um número inteiro e dois elementos de $C(4)$. Aqui apresentaremos duas provas para o teorema de Hall, uma usando argumentos básicos com conjuntos compactos, e uma segunda prova que nos mostra uma conexão entre este teorema e a espessura de um conjunto de Cantor através do Gap Lema. Antes disso, vamos entender melhor a construção do $C(4)$.

Seguindo alguns argumentos anteriores, $\max(C(4)) = [0; \overline{1}, 4]$, fazendo $x = [0; \overline{1}, 4]$, temos

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{4+x}} \Rightarrow x = \frac{1}{5+x} \Rightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

como queremos um elemento de $C(4)$, $x = 2\sqrt{2} - 2$, com cálculos análogos,

$$\min(C(4)) = y = [0; 4, \overline{1}] = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

Vamos identificar os intervalos abertos removidos numa dada etapa, da construção de $C(4)$, tais intervalos serão também chamados de gaps de $C(4)$.

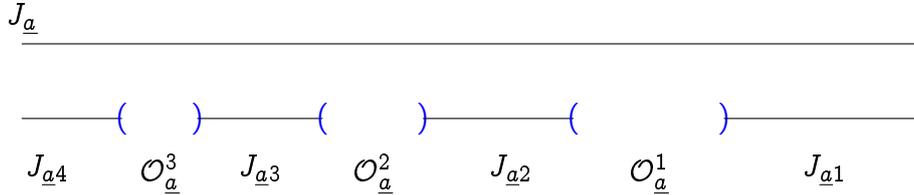
Tomemos um intervalo qualquer da n -ésima etapa, $J_{a_1 a_2 \dots a_n}$, inicialmente, suporemos n par e fixaremos $\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n$ e considerando a ordem estabelecida por esta paridade, $J_{\underline{a}}$ se divide é dividido nos intervalos

$$\begin{aligned} J_{\underline{a}1} &= [[0; \underline{a}, 1, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 1, \overline{4, 1}]] \\ J_{\underline{a}2} &= [[0; \underline{a}, 2, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 2, \overline{4, 1}]] \\ J_{\underline{a}3} &= [[0; \underline{a}, 3, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 3, \overline{4, 1}]] \\ J_{\underline{a}4} &= [[0; \underline{a}, 4, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 4, \overline{4, 1}]] \end{aligned}$$

Os intervalos removidos serão então

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\underline{a}}^1 &= ([0; \underline{a}, 2, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 1, \overline{1, 4}]) \\ \mathcal{O}_{\underline{a}}^2 &= ([0; \underline{a}, 3, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 2, \overline{1, 4}]) \\ \mathcal{O}_{\underline{a}}^3 &= ([0; \underline{a}, 4, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 3, \overline{1, 4}]) \end{aligned}$$

A configuração neste caso está ilustrada na figura abaixo



Fixaremos $J_{a_1 a_2 \dots a_n} = J_{\underline{a}}$ na n -ésima etapa, os próximos resultados são válidos para os intervalos $J_{\underline{a}1}$, $J_{\underline{a}2}$, $J_{\underline{a}3}$, $J_{\underline{a}4}$, $\mathcal{O}_{\underline{a}}^1$, $\mathcal{O}_{\underline{a}}^2$ e $\mathcal{O}_{\underline{a}}^3$ que resultam de $J_{\underline{a}}$ na $(n + 1)$ -ésima etapa.

Proposição 4.1. *Os intervalos removidos satisfazem $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| < |\mathcal{O}_{\underline{a}}^2| < |\mathcal{O}_{\underline{a}}^1|$.*

Demonstração. Primeiro, calcularemos o comprimento de cada um desses intervalos. Fazamos $\mu = [\overline{1, 4}] = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$, e então podemos escrever

$$\mathcal{O}_{\underline{a}}^1 = [[0; \underline{a}, 2, 4\mu], [0; \underline{a}, 1, \mu]] = [[0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{4\mu}], [0; \underline{a}, 1 + \frac{1}{\mu}]]$$

$$\mathcal{O}_{\underline{a}}^2 = [[0; \underline{a}, 3, 4\mu], [0; \underline{a}, 2, \mu]] = [[0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{4\mu}], [0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{\mu}]]$$

$$\mathcal{O}_{\underline{a}}^3 = [[0; \underline{a}, 4, 4\mu], [0; \underline{a}, 3, \mu]] = [[0; \underline{a}, 4 + \frac{1}{4\mu}], [0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{\mu}]]$$

Os comprimentos destes intervalos são dados por

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}}^1| = \frac{1 + \frac{1}{\mu} - 2 - \frac{1}{4\mu}}{((2 + \frac{1}{4\mu})q_n + q_{n-1})(1 + \frac{1}{\mu})q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_n^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$$

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}}^2| = \frac{2 + \frac{1}{\mu} - 3 - \frac{1}{4\mu}}{((3 + \frac{1}{4\mu})q_n + q_{n-1})(2 + \frac{1}{\mu})q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_n^2(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$$

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| = \frac{3 + \frac{1}{\mu} - 4 - \frac{1}{4\mu}}{((4 + \frac{1}{4\mu})q_n + q_{n-1})(3 + \frac{1}{\mu})q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_n^2(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$$

Como todos possuem o mesmo numerador, mas

$$\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) < \left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)$$

e

$$\left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) < \left(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)$$

segue que

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| < |\mathcal{O}_{\underline{a}}^2| < |\mathcal{O}_{\underline{a}}^1|$$

□

Lembre que este resultado foi obtido suposto n par, porém, se tivéssemos n ímpar, fixando $\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n$, os intervalos seriam

$$J_{\underline{a}1} = [[0; \underline{a}, 1, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 1, \overline{1, 4}]]$$

$$J_{\underline{a}2} = [[0; \underline{a}, 2, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 2, \overline{1, 4}]]$$

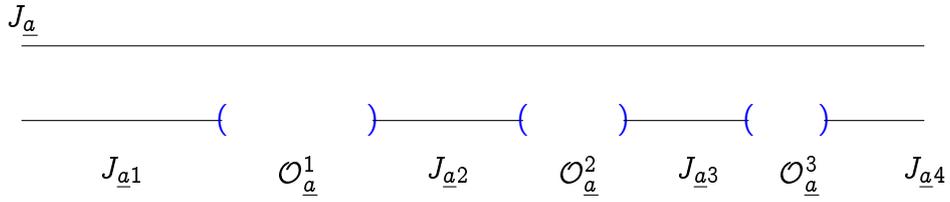
$$J_{\underline{a}3} = [[0; \underline{a}, 3, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 3, \overline{1, 4}]]$$

$$J_{\underline{a}4} = [[0; \underline{a}, 4, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 4, \overline{1, 4}]]$$

e os intervalos removidos

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\underline{a}}^1 &= [[0; \underline{a}, 1, \overline{1,4}], [0; \underline{a}, 2, \overline{4,1}]] \\ \mathcal{O}_{\underline{a}}^2 &= [[0; \underline{a}, 2, \overline{1,4}], [0; \underline{a}, 3, \overline{4,1}]] \\ \mathcal{O}_{\underline{a}}^3 &= [[0; \underline{a}, 3, \overline{1,4}], [0; \underline{a}, 4, \overline{4,1}]]\end{aligned}$$

A figura abaixo ilustra a configuração neste caso



Então a proposição continua válida para o caso em n é ímpar.

Argumentos similares também mostram que $|J_{\underline{a}4}| < |J_{\underline{a}3}| < |J_{\underline{a}2}| < |J_{\underline{a}1}|$

Proposição 4.2. *Os intervalos satisfazem $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^1| < |J_{\underline{a}i}|$, $i = 1, 2$, $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^2| < |J_{\underline{a}i}|$, $i = 2, 3$ e $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| < |J_{\underline{a}i}|$, $i = 3, 4$.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade n par. Tomando $\mu = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, nos será conveniente observar que $\frac{1}{\mu} = 4\mu - 1 = 2\sqrt{2} - 2$ e $\frac{1}{4\mu} = \mu - 1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. podemos escrever

$$J_{\underline{a}4} = [[0; \underline{a}, 4, \overline{1,4}], [0; \underline{a}, 4, \overline{4,1}]] = [[0; \underline{a}, 4 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 4 + \frac{1}{4\mu}]]$$

$$J_{\underline{a}3} = [[0; \underline{a}, 3, \overline{1,4}], [0; \underline{a}, 3, \overline{4,1}]] = [[0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{4\mu}]]$$

$$J_{\underline{a}2} = [[0; \underline{a}, 2, \overline{1,4}], [0; \underline{a}, 2, \overline{4,1}]] = [[0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{4\mu}]]$$

e temos

$$|J_{a4}| = \frac{4 + \frac{1}{4\mu} - 4 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2 \left(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} = \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2 \left(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}$$

$$|J_{a3}| = \frac{3 + \frac{1}{4\mu} - 3 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2 \left(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} = \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2 \left(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}$$

$$|J_{a2}| = \frac{2 + \frac{1}{4\mu} - 2 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2 \left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} = \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2 \left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}$$

Acharemos o valor mínimo de $\frac{|J_{a4}|}{|\mathcal{O}_a^3|}$

$$\begin{aligned} \frac{|J_{a4}|}{|\mathcal{O}_a^3|} &= \frac{\frac{-3}{4\mu} \left(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3}{4\mu} - 1\right) \left(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) \left(3 + 2\sqrt{2} - 2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-3}{2} - 1\right) \left(4 + 2\sqrt{2} - 2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) \left(2\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right) \left(2 + 2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

e como $0 \leq \frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$, podemos olhar essa expressão como uma função em x e encontrar seu mínimo em $[0, 1]$ que será alcançado em 0, dado por

$$f(0) = \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) \left(2\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right) \left(2 + 2\sqrt{2}\right)} \geq 1,300\dots > 1$$

Para o valor mínimo de $\frac{|J_{a3}|}{|\mathcal{O}_a^2|}$

$$\begin{aligned} \frac{|J_{a3}|}{|\mathcal{O}_a^2|} &= \frac{\frac{-3}{4\mu} \left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3}{4\mu} - 1\right) \left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) \left(2 + 2\sqrt{2} - 2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-3}{2} - 1\right) \left(3 + 2\sqrt{2} - 2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) \left(2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right) \left(1 + 2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

cujo valor mínimo em $[0, 1)$ que será alcançado em 0, dado por

$$\frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) 2\sqrt{2}}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right) (1 + 2\sqrt{2})} \geq 1,212... > 1$$

Finalmente, $\frac{|J_{a2}|}{|\mathcal{O}_a^1|}$

$$\begin{aligned} \frac{|J_{a2}|}{|\mathcal{O}_a^1|} &= \frac{\frac{-3}{4\mu} \left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3}{4\mu} - 1\right) \left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) \left(1 + 2\sqrt{2} - 2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-3}{2} - 1\right) \left(2 + 2\sqrt{2} - 2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) \left(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right) \left(2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

que terá seu valor mínimo em $[0, 1)$ alcançado em 0, dado por

$$\frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right) (2\sqrt{2} - 1)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right) 2\sqrt{2}} \geq 1,060... > 1$$

Com as contas acima e as desigualdades entre os intervalos remanescentes, temos

$$\begin{aligned} |J_{a3}| &> |J_{a4}| > |\mathcal{O}_a^3| \\ |J_{a2}| &> |J_{a3}| > |\mathcal{O}_a^2| \\ |J_{a1}| &> |J_{a2}| > |\mathcal{O}_a^1| \end{aligned}$$

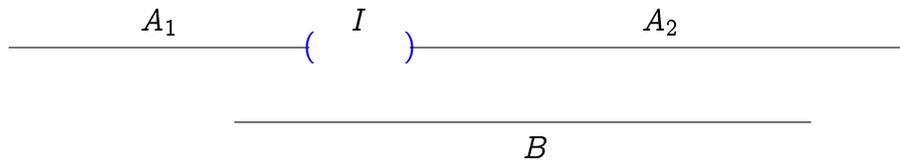
como queríamos.

□

Os lemas a seguir são válidos para quaisquer intervalos de números reais satisfazendo as hipóteses solicitadas, estes resultados nos auxiliarão na prova do Teorema de Hall.

Lema 4.1. *Sejam A e B intervalos fechados de números reais. Suponha que um intervalo aberto I é removido do meio de A , deixando os intervalos A_1 e A_2 à esquerda e à direita de I , respectivamente. Se $|B| \geq |I|$, então $A + B = (A_1 \cup A_2) + B$.*

Demonstração. Primeiro, observe a ilustração abaixo:



Podemos escrever estes intervalos usando seus extremos $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, assim, $A_1 = [a_1, a_1 + |A_1|]$ e $A_2 = [a_1 + |A_1| + |I|, a_2]$. Os intervalos somados são fechados, logo, resultam em intervalos fechados.

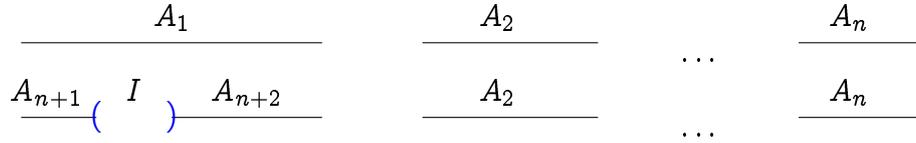
O extremo à esquerda de $A + B$ e $A_1 + B$ é dado por $a_1 + b_1$ e o extremo à direita de $A + B$ coincide com o extremo à esquerda de $A_1 + B$, que é dado por $a_2 + b_2$.

Agora, $A + B = (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$ se, e somente se, $A_1 + B$ e $A_2 + B$ possui interseção não vazia, isto é, $a_1 + |A_1| + |I| \leq a_1 + |A_1| + |B| \Leftrightarrow |I| \leq |B|$.

□

Lema 4.2. *Seja B a união de um número finito de intervalos compactos de números reais A_1, A_2, \dots, A_n . Suponha que um intervalo I é removido do meio de A_1 deixando dois intervalos A_{n+1} e A_{n+2} à esquerda e à direita de I , respectivamente. Seja $B' = \bigcup_{i=2}^{n+2} A_i$. Se $|A_i| \geq |I|$, $2 \leq i \leq n + 2$, então $B' + B' = B + B$.*

Demonstração. A figura abaixo ilustra os intervalos



Fazendo $A' = A_{n+1} \cup A_{n+2}$, temos pelo Lema 1,

$$\begin{aligned} A_1 + A_1 &= (A_{n+1} \cup A_{n+2}) + A_1 \\ &= A' + A_1 \\ &= A_1 + A' \\ &= (A_{n+1} \cup A_{n+2}) + A' \\ &= A' + A' \end{aligned}$$

e ainda

$$A_1 + A_i = A' + A_i$$

para $2 \leq i \leq n$. Então

$$\begin{aligned} B + B &= \bigcup_{i,j=1}^n (A_i + A_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (A_1 + A_i) \cup \bigcup_{i,j=2}^n (A_i + A_j) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (A' + A_i) \cup \bigcup_{i,j=2}^n (A_i + A_j) \\ &= \bigcup_{i,j=2}^{n+2} (A_i + A_j) \\ &= B' + B' \end{aligned}$$

□

Lema 4.3. *Seja A_1, A_2, \dots uma seqüência decrescente de conjuntos compactos de números reais, isto é, $A_{i+1} \subset A_i$ $i = 1, 2, \dots$, então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i + \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i + A_i)$.*

Demonstração. Para provar este resultado mostraremos ambas as continências.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i + \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x + y; x, y \in A_i \text{ para todo } i\}, \text{ assim,}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i + \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i + A_i)$$

Agora, seja $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x + y = t\}$ e $V_i = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x, y \in A_i\}$, então T é fechado e V_i é compacto. Segue que $T \cap V_i$, $i = 1, 2, \dots$ forma uma seqüência decrescente de compactos, assim

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (T \cap V_i) = T \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \neq \emptyset$$

e cada um dos seus elementos está em $\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i + A_i)$.

Tomemos $t \in T \cap V_i$, então $t = x + y$, $x, y \in A_i$, $i = 1, 2, \dots$ e temos que

$$t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i + \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

daí,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i + \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i + A_i)$$

□

Os lemas acima são válidos, em particular, se considerarmos intervalos da n -ésima etapa da construção de $C(4)$.

Teorema 4.1 (Teorema de Hall). *Qualquer número real pode ser escrito na forma $a + [0; b_1, b_2, \dots] + [0; c_1, c_2, \dots]$, $1 \leq b_i, c_i \leq 4$, $a \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras $\mathbb{R} = \mathbb{Z} + C(4) + C(4)$.*

Demonstração. Iniciaremos com o intervalo $I_0 = \left[\frac{\sqrt{2}-1}{2}, 2\sqrt{2}-2 \right]$. Sabemos que $C(4)$ pode ser obtido a partir de I_0 removendo-se em cada etapa uma quantidade finita de intervalos abertos disjuntos.

Ao fim da construção, obtemos $C(4)$ removendo de I_0 uma quantidade infinita de intervalos abertos disjuntos, os quais organizaremos em ordem decrescente de tamanho, no caso dos intervalos de mesmo tamanho, os organizaremos na ordem em que aparecem de I_0 da esquerda para a direita. Chamemos U_0, U_1, \dots esta sequência de intervalos (observe que isto é uma ordenação de todos os gaps obtidos na construção). Definimos I_{i+1} como sendo I_i removido U_i . Temos então uma nova construção de $C(4)$ obtida a partir da remoção dos gaps em ordem decrescente de tamanho.

A sequência construída é tal que $I_i \supset I_{i+1}$ e $\bigcap_{i=0}^{\infty} I_i = C(4)$.

Na remoção de U_i restam dois intervalos compactos, um à direita e outro à esquerda de U_i , que chamaremos I_{i1}, I_{i2} . Consideremos então nossa construção inicial de $C(4)$. Como U_i é um dos gaps $\mathcal{O}_{\underline{a}}^r$, $r = 1, 2, 3$, se $I_{i1} \supseteq J_{\underline{a}j}$, $j = r, r+1$, pela proposição 4.2, $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^r| \leq |I_{i1}|$. Se $I_{i1} \subset J_{\underline{a}j}$, então, do lado oposto a U_i teremos um gap que foi removido anteriormente, digamos U_n , então $|U_n| \geq |U_i|$, temos então que $|U_n|$ intersecta $J_{\underline{a}j}$, mas como ele é um gap, deverá ser removido em alguma etapa posterior na construção de $C(4)$, restando intervalos adjacentes a ele que terão comprimento maior que ele, novamente pela proposição 4.2, chamemos de $J_{\underline{a}a'}$, então, $J_{\underline{a}a'} \subset I_{i1}$, assim, $|I_{i1}| \geq |J_{\underline{a}a'}| \geq |U_n| \geq |U_i|$. Com argumentos análogos temos $|I_{i2}| \geq |U_i|$.

Podemos agora usar o lema 4.2 e temos $I_i + I_i = I_{i+1} + I_{i+1}$. Como

$$I_0 + I_0 = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$$

temos

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} (I_i + I_i) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$$

e pelo lema 4.3

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} (I_i + I_i) = \bigcap I_i + \bigcap I_i = C(4) + (4)$$

Assim, $C(4) + C(4)$ cobre um intervalo de comprimento maior que 1, logo, todo número real pode ser escrito na forma

$$a + [0; b_1, b_2, \dots] + [0; c_1, c_2, \dots], \quad 1 \leq b_i, c_i \leq 4, \quad a \in \mathbb{Z}$$

como queríamos. □

4.1 Um Pouco Sobre o Espectro de Lagrange

Nesta seção, derivaremos um resultado sobre o espectro de Lagrange que são uma consequência do Teorema de Hall. Para isso, primeiro apresentaremos o problema proposto.

Seja α um número irracional, a desigualdade $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ tem uma quantidade infinita de soluções racionais $\frac{p}{q}$. Este resultado é conhecido como teorema de Dirichlet, e é uma consequência da proposição 2.5.

Fixando α , estamos interessados em encontrar k para os quais a desigualdade $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq^2}$ tenha infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$. Vamos denotar por $k(\alpha)$ a maior constante com tal propriedade, então

$$k(\alpha) = \limsup_{p, q \in \mathbb{Z}, q \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{1}{q(q\alpha - p)} \right| \right)$$

onde $k(\alpha) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Os casos de interesse serão aqueles onde $k(\alpha) < +\infty$, isto é, $L = \{k(\alpha); \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, k(\alpha) < +\infty\}$, este conjunto é chamado Espectro de Lagrange.

Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, sabemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \beta_n)}$$

onde $\alpha_n = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots]$ e $\beta_n = [0; a_n, \dots, a_1]$.

Obtemos então uma fórmula para $L(\alpha)$. Seja $\lambda_n(\alpha) = \alpha_n + \beta_n$

$$L(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$$

para $n \in \mathbb{Z}$, onde $\alpha_n = [a_{n+1}; a_{n+2}, a_{n+3}, \dots]$ e $\beta_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]$.

Usando o Teorema de Hall podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *O espectro de Lagrange contém $[6, +\infty)$.*

Demonstração. Suponhamos $\lambda \geq 6$, pelo Teorema de Hall

$$\lambda = a + [0; b_1, b_2, \dots] + [0; c_1, c_2, \dots] \quad 1 \leq b_i, c_i \leq 4$$

Uma vez que $\lambda \geq 6$, temos $a \geq 5$. Definimos

$$\alpha = [b_{k_1}; b_{k_1-1}, \dots, b_1, a, c_1, \dots, c_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_1, a, c_1, \dots, c_{k_2}, a, \dots] = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

onde k_n é uma sequência qualquer estritamente crescente de inteiros positivos.

Temos que

$$L(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$$

o lim sup será alcançado quando $a_{n+1} = a \geq 5$ nestes casos

$$\lambda_n = a + [0; b_1, \dots, b_{k_n}] + [0; c_1, \dots, c_{k_n}]$$

como k_n é estritamente crescente, quando $n \rightarrow \infty$ temos $\lambda_n \rightarrow \lambda$, logo

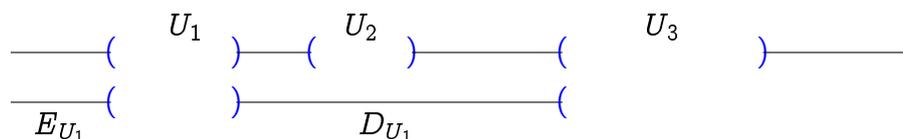
$$L(\alpha) = \lambda$$

ou seja, $\lambda \in L$, segue que $[6, +\infty) \in L$. □

5 O Gap Lemma de Newhouse

Neste capítulo, usaremos o Gap Lemma, para provar dar uma prova alternativa ao Teorema de Hall, utilizando propriedades de Conjuntos de Cantor. Para isto, iniciaremos com algumas definições.

Definição 5.1. *Seja U um gap de um Conjunto de Cantor K e $u \in \partial U$, chamamos de ponte entre K e u ao intervalo maximal que contém u em sua fronteira e separa U de um gap maior mais próximo a ele. Para cada gap teremos duas pontes, uma à esquerda E_U e outra à direita D_U , como ilustrado abaixo.*



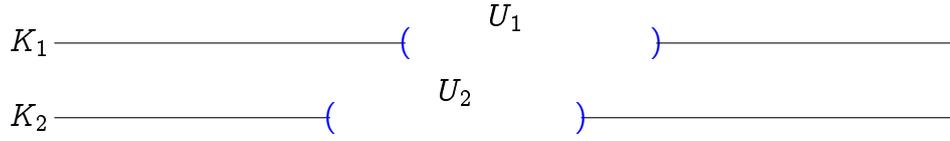
Definição 5.2. *Seja U um gap limitado de um Conjunto de Cantor K , definimos $\tau_D(U) = \frac{|D_U|}{|U|}$ e $\tau_E(U) = \frac{|E_U|}{|U|}$. Chamamos $\tau_D(K) = \inf_K \{\tau_D(U)\}$ a espessura direita de K , similarmemente, $\tau_E(K) = \inf_K \{\tau_E(U)\}$ é a espessura esquerda de K . $\tau(K) = \min\{\tau_D(K), \tau_E(K)\}$ é a espessura de K .*

Com estas definições podemos apresentar nosso próximo resultado.

Teorema 5.1 (Gap Lemma). *Sejam K_1, K_2 conjuntos de Cantor. Se $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$, então ou K_1 está contido num gap de K_2 ou K_2 está contido num gap de K_1 ou $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que K_1 não está contido num gap de K_2 e que K_2 não está contido num gap de K_1 , mostraremos que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Como nenhum deles está contido num gap do outro, existe um par de gaps (U_1, U_2) , com $U_1 \in K_1$ e $U_2 \in K_2$ se intersectando, podemos supor, sem perda de generalidade a configuração abaixo.



Como $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2)$, temos $\frac{|E_{U_1}|}{|U_1|} \cdot \frac{|D_{U_2}|}{|U_2|} > 1 \Rightarrow |E_{U_1}| > |U_2|$ ou $|D_{U_2}| > |U_1|$, então $E_{U_1} \cap \partial U_2 \neq \emptyset$ ou $D_{U_2} \cap \partial U_1 \neq \emptyset$, suponhamos, sem perda de generalidade, o primeiro caso e seja $u \in E_{U_1} \cap \partial U_2$, se $u \in K_1$, temos $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, uma vez que $\partial U_2 \subset K_2$. Se $u \notin K_1$, então existe um novo gap U_1^1 tal que $u \in U_1^1$, neste caso repetimos a construção para (U_1^1, U_2) , fazendo isso sucessivas vezes construímos uma sequência de gaps (U_1^n, U_2^m) convergindo para um ponto de acumulação de $K_1 \cap K_2$, como este ponto está na fronteira de uma sequência de gaps, ele deverá pertencer a ambos os conjuntos de Cantor logo, $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

□

A próxima proposição nos mostra como o Gap Lemma será utilizado para provar o Teorema de Hall.

Proposição 5.1. *Sejam K_1 e K_2 conjuntos de Cantor tais que $\tau(K_1)\tau(K_2) > 1$ e I_1, I_2 os fechos convexos de K_1 e K_2 , respectivamente. Suponhamos que, I_1 tem comprimento maior que qualquer gap de K_2 e que I_2 tem comprimento maior que qualquer gap de K_1 , então $K_1 + K_2 = I_1 + I_2$.*

Demonstração. Consideramos os Conjuntos de Cantor K_1 e K_2 , cujos fechos convexos correspondem a I_1 e I_2 , respectivamente. Tome $k \in I_1 + I_2$, então $k - K_1$ ainda é um conjunto de Cantor e sua espessura é preservada, uma vez que comprimentos de intervalos são invariantes por translação e esta propriedade seguirá para seu ínfimo. Como $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$, temos $\tau(k - K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$. Além disso, os gaps de K_1 e $k - K_1$ possuem o mesmo comprimento, segue que $k - K_1$ não está contido em qualquer gap de K_2 , e K_2 não está contido em qualquer gap de $k - K_1$. Usando o Gap Lemma, temos $(k - K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$, daí $k \in K_1 \cap K_2$. Como k é arbitrário em $I_1 + I_2$, temos $K_1 + K_2 = I_1 + I_2$.

□

Calcularemos a espessura de $C(4)$. Fixada uma etapa n , com n ímpar, o comprimento do maior gap da $(n+1)$ -ésima etapa é dado por

$$|\mathcal{O}_{a_i}^1| = \frac{1 + \frac{1}{\mu} - 2 - \frac{1}{4\mu}}{\left((2 + \frac{1}{4\mu})q_{n+1} + q_n\right)\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)q_{n+1} + q_n} = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_{n+1}^2\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}$$

Sabemos que $q_{n+1} = iq_n + q_{n-1}$, assim, $\frac{q_{n+1}}{q_n} = i + \frac{q_{n-1}}{q_n}$. Lembramos ainda que $\frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$, pela construção das etapas, cada um destes elementos estão entre 1 e 4, como n é ímpar, o maior valor possível para $\frac{q_{n-1}}{q_n}$ será alcançado quando

$$[0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] = [0; 1, 4, \dots, 1, 4, 1] > [0; \overline{1, 4}]$$

e o menor valor para $\frac{q_{n+1}}{q_n}$

$$[0; a_{n+1}, a_n, \dots, a_1] \leq [0; 4, 1]$$

e o menor valor para $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ será alcançado em $i + [0; 4, 1]$.

Com estas informações acharemos as pontes da etapa fixada. Inicialmente, devemos encontrar os gaps maiores mais próximos

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{O}_{a_i}^1|}{|\mathcal{O}_{a_1}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}{q_n^2\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}{\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \cdot \frac{\left(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}{\left(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &> 1,44 \cdot 1,051 \cdot 1,061 \\ &= 1,605 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{O}_{a_i}^2|}{|\mathcal{O}_{a_2}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}{q_n^2\left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}{\left(\frac{5+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \cdot \frac{\left(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}{\left(2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\ &> 4,840 \cdot 0,731 \cdot 0,696 \\ &= 2.462 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}3}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{q_n^2(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
&= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(\frac{7 + \sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(2\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
&> 10,240 \cdot 0,561 \cdot 0,518 \\
&= 2,975
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{q_n^2(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
&= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{(3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(\frac{7 + \sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(2\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
&> 17,64 \cdot 0,561 \cdot 0,518 \\
&= 5,126
\end{aligned}$$

Concluimos então que o maior gap à direita mais próximo de $\mathcal{O}_{\underline{a}1}$ é $\mathcal{O}_{\underline{a}}^1$. Para o gap maior à esquerda, o qual denotaremos por U_e , temos $U_e \neq \mathcal{O}_{\underline{a}1}^2, \mathcal{O}_{\underline{a}1}^3$, pelos resultados obtidos na proposição 4.1, fazendo $\underline{a}' = a_1 \dots a_{n-1}$, então se $a_n = 1$, o próximo gap será $\mathcal{O}_{\underline{a}'}^1$, e pelas contas acima,

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}'}^1| > |\mathcal{O}_{\underline{a}'1}^1| = |\mathcal{O}_{\underline{a}}^1| > |\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1|$$

e obtemos

$$E_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1} = J_{\underline{a}12} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}1}^2 \cup J_{\underline{a}13} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}1}^3 \cup J_{\underline{a}4}$$

é a ponte à esquerda e

$$D_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1} = J_{\underline{a}11}$$

é a ponte à direita. Além disso,

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^2} &= J_{\underline{a}13} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}1}^3 \cup J_{\underline{a}14} \\
D_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^2} &= J_{\underline{a}12} \\
E_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^3} &= J_{\underline{a}14} \\
D_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^3} &= J_{\underline{a}13}
\end{aligned}$$

Os demais valores de a_n nos dão conclusões similares.

Para $\mathcal{O}_{\underline{a}2}$, temos que $\mathcal{O}_{\underline{a}}^2$ é o gap maior à direita mais próximo e $\mathcal{O}_{\underline{a}}^1$ o gap maior à esquerda mais próximo, segue que

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^1} &= J_{\underline{a}22} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^2 \cup J_{\underline{a}23} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^3 \cup J_{\underline{a}24} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^1} &= J_{\underline{a}21} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^2} &= J_{\underline{a}23} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^3 \cup J_{\underline{a}24} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^2} &= J_{\underline{a}22} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^3} &= J_{\underline{a}24} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^3} &= J_{\underline{a}23} \end{aligned}$$

Para $\mathcal{O}_{\underline{a}3}$ o gap maior à esquerda mais próximo é $\mathcal{O}_{\underline{a}}^2$, enquanto à direita é $\mathcal{O}_{\underline{a}}^3$, e temos

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^1} &= J_{\underline{a}32} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}3}^2 \cup J_{\underline{a}33} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}3}^3 \cup J_{\underline{a}34} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^1} &= J_{\underline{a}31} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^2} &= J_{\underline{a}33} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}3}^3 \cup J_{\underline{a}34} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^2} &= J_{\underline{a}32} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^3} &= J_{\underline{a}34} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^3} &= J_{\underline{a}33} \end{aligned}$$

Finalmente, para $\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1$, o gap maior à esquerda mais próximo é $\mathcal{O}_{\underline{a}}^3$, para o gap à direita, fazemos, novamente, $\underline{a}' = a_1 \dots a_{n-1}$, e, se $a_n = 4$,

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}'3}| > |\mathcal{O}_{\underline{a}'4}^3| = |\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| > |\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1|$$

daí,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1} &= J_{\underline{a}42} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}4}^2 \cup J_{\underline{a}43} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}4}^3 \cup J_{\underline{a}44} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1} &= J_{\underline{a}41} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^2} &= J_{\underline{a}43} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}4}^3 \cup J_{\underline{a}44} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^2} &= J_{\underline{a}42} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^3} &= J_{\underline{a}44} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^3} &= J_{\underline{a}43} \end{aligned}$$

Proposição 5.2. $C(4)$ tem espessura maior que 1, ou seja, $\tau(C(4)) > 1$.

Demonstração. Seja n um número natural ímpar fixado e $\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n$

$$J_{\underline{a}1} = [[0; \underline{a}, 1, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 1, \overline{4, 1}]] = [[0; \underline{a}, 1 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 1 + \frac{1}{4\mu}]]$$

e temos

$$\begin{aligned} |J_{\underline{a}1}| &= \frac{1 + \frac{1}{4\mu} - 1 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(1 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(1 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J_{\underline{a}2} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}}^2 \cup J_{\underline{a}3} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}}^3 \cup J_{\underline{a}4}| &= \frac{2 + \frac{1}{4\mu} - 4 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \frac{\frac{-3}{4\mu} - 2}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J_{\underline{a}3} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}}^3 \cup J_{\underline{a}4}| &= \frac{3 + \frac{1}{4\mu} - 4 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \frac{\frac{-3}{4\mu} - 1}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \end{aligned}$$

usando isto podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{|J_{\underline{a}1}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^1|} &= \frac{(\frac{-3}{4\mu})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(1 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \frac{(\frac{-3}{4\mu})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(1 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \frac{((\frac{3-3\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}+3}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}))}{(\frac{3\sqrt{2}-3}{2})(\frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &\geq 2,999\dots \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|J_{a2} \cup \mathcal{O}_a^2 \cup J_{a3} \cup \mathcal{O}_a^3 \cup J_{a4}|}{|\mathcal{O}_a^1|} &= \frac{(\frac{-3}{4\mu} - 2)(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &= \frac{(\frac{-3}{4\mu} - 2)(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &= \frac{(\frac{-3\sqrt{2}-1}{2})(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3\sqrt{2}-3}{2})(2 + 2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &\geq 2,621\dots
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|J_{a2}|}{|\mathcal{O}_a^2|} &= \frac{(\frac{-3}{4\mu})(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &= \frac{(\frac{-3}{4\mu})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &= \frac{((\frac{3-3\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}+5}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}))}{(\frac{3\sqrt{2}-3}{2})(\frac{\sqrt{2}+3}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &\geq 2,384\dots
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|J_{a3} \cup \mathcal{O}_a^3 \cup J_{a4}|}{|\mathcal{O}_a^2|} &= \frac{(\frac{-3}{4\mu} - 1)(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &= \frac{(\frac{-3}{4\mu} - 1)(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &= \frac{(\frac{1-3\sqrt{2}}{2})(2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3\sqrt{2}-3}{2})(2 + 2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 &\geq 2,508\dots
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{|J_{\underline{a}3}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3|} &= \frac{\left(\frac{-3}{4\mu}\right)\left(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3}{4\mu} - 1\right)\left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{-3}{4\mu}\right)\left(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3}{4\mu} - 1\right)\left(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}+7}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}+5}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \\
 &\geq 2,152\dots
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Pelas equações 5.1 e 5.2, as espessuras de $\mathcal{O}_{\underline{a}i}^1$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 \tau_E(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^1) &= \frac{|J_{\underline{a}i2} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}i}^2 \cup J_{\underline{a}i3} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}i}^3 \cup J_{\underline{a}i4}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}i}^1|} \geq 2,621\dots \\
 \tau_D(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^1) &= \frac{|J_{\underline{a}i}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}i}^1|} \geq 2,999\dots
 \end{aligned}$$

Assim, $\tau(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^1) \geq 2,621\dots$

Usando as equações 5.3 e 5.4, as espessuras de $\mathcal{O}_{\underline{a}i}^2$ serão dadas por

$$\begin{aligned}
 \tau_E(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^2) &= \frac{|J_{\underline{a}i3} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}i}^3 \cup J_{\underline{a}i4}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}i}^2|} \geq 2,508\dots \\
 \tau_D(\mathcal{O}_{\underline{a}i2}) &= \frac{|J_{\underline{a}i2}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}i}^2|} \geq 2,384\dots
 \end{aligned}$$

E temos $\tau(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^2) \geq 2,384\dots$

Por fim, usando as equações 4.1 e 5.5, as espessuras de $\mathcal{O}_{\underline{a}i}^3$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 \tau_E(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^3) &= \frac{|J_{\underline{a}i4}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}i}^3|} \geq 1,300\dots \\
 \tau_D(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^3) &= \frac{|J_{\underline{a}i3}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}i}^3|} \geq 2,152\dots
 \end{aligned}$$

E obtemos $\tau(\mathcal{O}_{\underline{a}i}^3) \geq 1,300\dots$, de modo que $\tau(C(4)) \geq 1,300\dots$

□

Usando as proposições 5.1 e 5.2,

$$C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$$

provando o Teorema de Hall.

O leitor interessado pode consultar [6], onde vemos que $\tau(C(4)) = 1,300\dots$. No texto referenciado encontramos ainda que $\tau(C(3)) = 0,822$, usando isso temos

$$\tau(C(3)) \cdot \tau(C(4)) > 1$$

como a interseção entre tais conjuntos não é vazia, podemos aplicar argumentos similares aos feitos anteriormente, e obtemos

$$\mathbb{Z} + C(3) + C(4) = \mathbb{R}$$

Para $\mathbb{Z} + C(3) + C(3)$ este resultado não é válido. Nosso objetivo com estes comentários é incentivar a continuidade da leitura, por isso não traremos maiores detalhes.

6 Conclusão

Em nosso trabalho, apresentamos algumas propriedades dos conjuntos de Cantor regulares que nos ajudaram a estudar de forma mais profunda as propriedades de $C(N)$, e então voltamos nossa atenção para $C(4)$, no qual estudamos o Teorema de Hall, que trata da soma $C(4) + C(4)$.

Para provarmos o Teorema de Hall, inicialmente estudamos os comprimentos dos gaps deste conjunto, relacionando com os tamanhos dos intervalos restantes em cada etapa. Supondo condições, que mostramos ser satisfeitas em $C(4)$, provamos resultados para a soma de conjuntos de números reais, com estes resultados apresentamos uma primeira prova para o Teorema de Hall.

Em seguida, apresentamos o conceito de espessura de conjuntos de Cantor e, desta vez relacionamos os tamanhos dos gaps e suas respectivas pontes para calcular a espessura de $C(4)$. Para provar o Teorema de Hall fizemos uso do Gap Lemma de Newhouse que nos deu condições suficientes para a interseção entre dois conjuntos de Cantor ser não vazia, e uma proposição que seguiu como corolário do Gap Lemma, desta vez nos dando condições para a sua soma. De posse destas informações derivamos uma nova demonstração do Teorema de Hall.

A beleza dos resultados aqui apresentados reside no fato de um problema inicialmente construído por uma propriedade numérica ter solução a partir de uma interpretação dinâmica.

Referências

- [1] Marshall Hall Jr, *On the sum and product of continued fractions*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 48, No. 4 (Oct., 1947), pp. 966-993
- [2] Lorenzo J. Díaz, Danielle de Rezende Jorge, *Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*. 26 Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2007
- [3] Fábio B. Martinez, Carlos G. Moreira, Nicolau Saldanha, Eduardo Tengan, *Teoria dos Números: Um Passeio Com Primos e Outros Números Familiares Pelo Mundo Inteiro*. Projeto Euclides. 4 Ed. IMPA, 2015
- [4] Thomas W. Cusick, Mary E. Flahive, *The Markoff And Lagrange Spectra*. American Mathematical Society. 1989
- [5] Carlos G. Moreira, *Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética*. 22º Colóquio Brasileiro de Matemática. 1999
- [6] S. Astels, *Cantor sets and numbers with restricted partial quotients*, PhD thesis, Univerity of Waterloo, 1999
- [7] Davi Lima, Carlos G. Moreira, *Dynamical Characterization of the initial segments of the Markov and Lagrange spectra*, arXiv:2010.15291 [math.DS], 2020
- [8] Krerley Oliveira, Marcelo Viana, *Fundamentos de Teoria Ergódica*, SBM, 2019
- [9] J. Palis, F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: fractal dimensions and infinitely many attractors*, Cambridge Univ. Press, 1992.