



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPOS A.C SIMÕES
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

Fórmulas de Minkowski e Teorema de Rigidez de Liebmann

JOSAFÁ JOAQUIM DA SILVA JÚNIOR

Maceió - AL

2022

JOSAFÁ JOAQUIM DA SILVA JÚNIOR

Fórmulas de Minkowski e Teorema de Rigidez de Liebmann

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió - AL

2022

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586f

Silva Júnior, Josafá Joaquim da.

Fórmulas de Minkowski e teorema de rigidez de Liebmann / Josafá
Joaquim da Silva Júnior. - 2022.
50 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura)
– Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 50.

1. Fórmulas de Minkowski. 2. Teorema de Liebmann. 3. Superfícies
regulares. I. Título.

CDU: 514.75

Josafá Joaquim da Silva Júnior

Fórmulas de Minkowski e Teorema de Rigidez de Liebmann

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, aprovado em 1 de fevereiro de 2022 pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

Prof. Dr. Moreno Pereira Bonutti

*Ao meu Deus, aos meus pais, ao meu irmão, ao amor da minha vida e à todas as pessoas
que Deus pôs para me ajudar nesta caminhada.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por tudo o que Ele realizou e realiza em minha vida. pois se não fosse Ele, eu nem estaria aqui. Aos meus pais, meu irmão e meu amor que sempre estiveram comigo nessa caminhada me apoiando, me ajudando e me fortalecendo a cada dia. À todos os amigos que a UFAL me deu (tão densos quanto os racionais nos reais), em particular à galera do cafezinho e das discussões de questões, do PPGMAT e a turma de 2017.1, minha gratidão especial. Agradeço ao meu orientador que acreditou no meu potencial e aos professores, que sempre me ajudaram e foram humildes de estar com os alunos ensinando-os e aconselhando-os como os pais ensinam o caminho aos filhos. Agradeço à todas as pessoas que sempre me apresentaram e apresentam em suas orações, tantas que eu posso até acabar esquecendo. Mas, à todas essas mulheres maravilhosas das Piabas, tais como minha rainha minha mãe e companhia. Por fim à todas as pessoas que direta e indiretamente me ajudaram a chegar aqui, em particular ao Lucas Barreto e Cícero que me ajudaram imensamente no \LaTeX , mas não só. Apenas Deus para recompensar vocês. Que Deus vos abençoe.

"A matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o universo".

Galileu Galilei

Resumo

As superfícies regulares são subconjuntos do espaço euclidiano tridimensional que podem ser cobertas por aplicações satisfazendo à determinadas propriedades. À partir dessas aplicações, conseguimos dar características à esses conjuntos, tais como a *Curvatura Gaussiana* e a *Curvatura Média*. Um conjunto bem conhecido, a *esfera*, é uma superfície regular. Mas, ela é um tanto especial, pois o *Teorema de Liebmann* nos diz que a única superfície compacta e conexa que possui curvatura Gaussiana constante é uma esfera.

Palavras-chave: Superfícies Regulares; Fórmulas de Minkowski; Teorema de Liebmann.

Abstract

The regular surfaces are tridimensional euclidean space subsets that can be covered by applications satisfying certain properties. From these applications, we can give characteristics to these subsets, such as Gaussian Curvature and Median Curvature. A well-known subset, the sphere, is a regular surface. However, it is such a special one, as Liebmann's Theorem tells us that the only compact connected surface that has Gaussian Curvature constant is a sphere.

Keywords: Regular Surfaces; Minkowski Formulas; Liebmann's Theorem.

Sumário

	Sumário	8
1	SUPERFÍCIES REGULARES	9
1.1	Superfícies Regulares	9
1.1.1	O gráfico de uma função diferenciável	10
1.1.2	A esfera	10
1.1.3	Imagem inversa de um valor regular	15
1.2	Mudança de Parâmetros	16
1.3	Aplicações entre superfícies	18
1.3.1	Espaço Tangente	18
1.3.2	O espaço tangente à esfera	19
1.3.3	Aplicações diferenciáveis entre superfícies	21
1.3.3.1	Restrição de uma aplicação diferenciável	22
1.3.3.2	Diferencial de uma aplicação entre superfícies	22
1.4	Primeira forma fundamental	24
2	SUPERFÍCIES ORIENTÁVEIS	27
2.1	Superfícies Orientáveis	27
2.2	Aplicação Normal de Gauss	30
2.2.1	Diferencial da aplicação de Gauss	31
2.2.2	Segunda forma fundamental	31
3	FUNÇÕES DEFINIDAS SOBRE SUPERFÍCIES	40
3.1	Fórmulas de Minkowski	43
3.2	Teorema de Liebmann	49
	REFERÊNCIAS	52

1 Superfícies Regulares

1.1 Superfícies Regulares

Definição 1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma *superfície regular* se, para cada ponto $\mathbf{p} \in S$, existe um aberto V contendo \mathbf{p} , vizinhança de \mathbf{p} , em \mathbb{R}^3 , e uma aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ que satisfaz as propriedades:

1. X é uma aplicação de classe C^∞ .
2. X é um *homeomorfismo*, ou seja, bijetiva contínua¹ com inversa contínua.
3. A diferencial da aplicação X , $dX_{\mathbf{q}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é (uma aplicação linear) injetiva para todo $\mathbf{q} \in U$.

A aplicação X é dita uma *parametrização de S em \mathbf{p}* , e $V \cap S$ é dita *vizinhança coordenada de \mathbf{p} em S* (um aberto em S contendo \mathbf{p}).

Dizer que a derivada é injetiva nos dá informações sobre a matriz da aplicação linear $dX_{\mathbf{q}}$ que, nas bases canônicas, é²:

$$[dX_{\mathbf{q}}] = \begin{pmatrix} \partial_u x_1 & \partial_v x_1 \\ \partial_u x_2 & \partial_v x_2 \\ \partial_u x_3 & \partial_v x_3 \end{pmatrix},$$

com as derivadas parciais calculadas em \mathbf{q} . Sabemos que ela ser injetiva é uma condição necessária e suficiente para que o posto da matriz acima seja igual a 2, ou seja, os vetores-coluna de sua matriz são linearmente independentes. Isto resulta que o produto vetorial entre eles é não-nulo. Com isso, também podemos dizer (olhando o posto segundo linhas) que um dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{q}), \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{q}), \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{q}),$$

com

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{q}) = \begin{vmatrix} \partial_u x_i & \partial_v x_i \\ \partial_u x_j & \partial_v x_j \end{vmatrix},$$

é não-nulo, onde as derivadas parciais são calculadas em \mathbf{q} .

¹ Note que satisfazendo a propriedade 1 já obtemos que X é uma aplicação contínua.

² Seja f uma aplicação; $\partial_u f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{x})$; $\partial_v f = \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x})$.

1.1.1 O gráfico de uma função diferenciável

Temos, por exemplo, que se $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2$ aberto, é uma função de classe C^∞ , então o seu gráfico é uma superfície regular.

De fato, se tomarmos $X : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por: $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, f(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$, vemos que suas funções-coordenada são de classe C^∞ , e que sua derivada é injetiva para todo $\mathbf{q} \in \mathbf{U}$, visto que

$$\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Provemos que X é bijetiva sobre sua imagem: dados $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0), (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \in \mathbf{U}$, temos que

$$X(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = X(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \Leftrightarrow (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, f(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)) \Leftrightarrow (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1).$$

Logo X é injetiva. E, claramente, dado $(x_0, y_0, z_0) \in \text{Gr}(f)$, temos, por definição, que $z_0 = f(x_0, y_0)$. Basta então tomar $(x_0, y_0) \in \mathbf{U}$ donde $X(x_0, y_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$ e portanto X é sobrejetiva.

Dessa forma, para cada $(x, y, z) \in \text{Gr}(f)$ associamos o par (x, y) , definindo assim $X^{-1} : \text{Gr}(f) \rightarrow \mathbf{U}$, a qual é a restrição da projeção contínua, $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Portanto, X é uma parametrização de (todo o) $\text{Gr}(f)$, isto é, ele é uma superfície regular.

Resulta daí que qualquer conjunto que é localmente gráfico de uma função C^∞ é uma superfície regular, pois isso é ser uma superfície regular, já que ser superfície regular é uma propriedade local. De fato, se $S \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto que é localmente gráfico, dado $\mathbf{p} \in S$, existe uma função $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ e um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{Gr}(f) = W \cap S \ni \mathbf{p}.$$

Sendo assim, podemos definir $X : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, f(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$, que já sabemos ser uma parametrização de S em \mathbf{p} . Como \mathbf{p} foi arbitrário, S é uma superfície regular.

1.1.2 A esfera

Um exemplo disso, é a esfera. Considere o conjunto $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 (x_i)^2 = 1\}$. Este conjunto, denominada esfera de centro na origem e raio 1, é uma superfície regular. Para provarmos isto, podemos observar que as funções

- $f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $f_3(y, z) = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$;
- $f_3(x, z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$; $f_4(x, z) = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}$; $f_5(y, z) = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$;

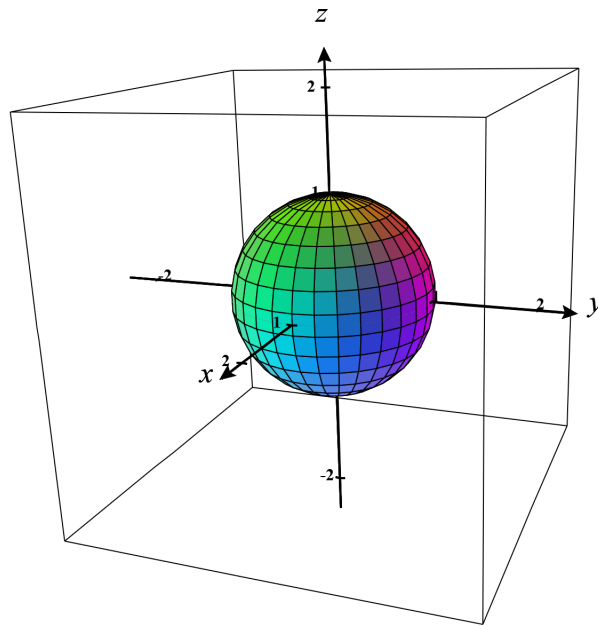


Figura 1 – Esfera unitária

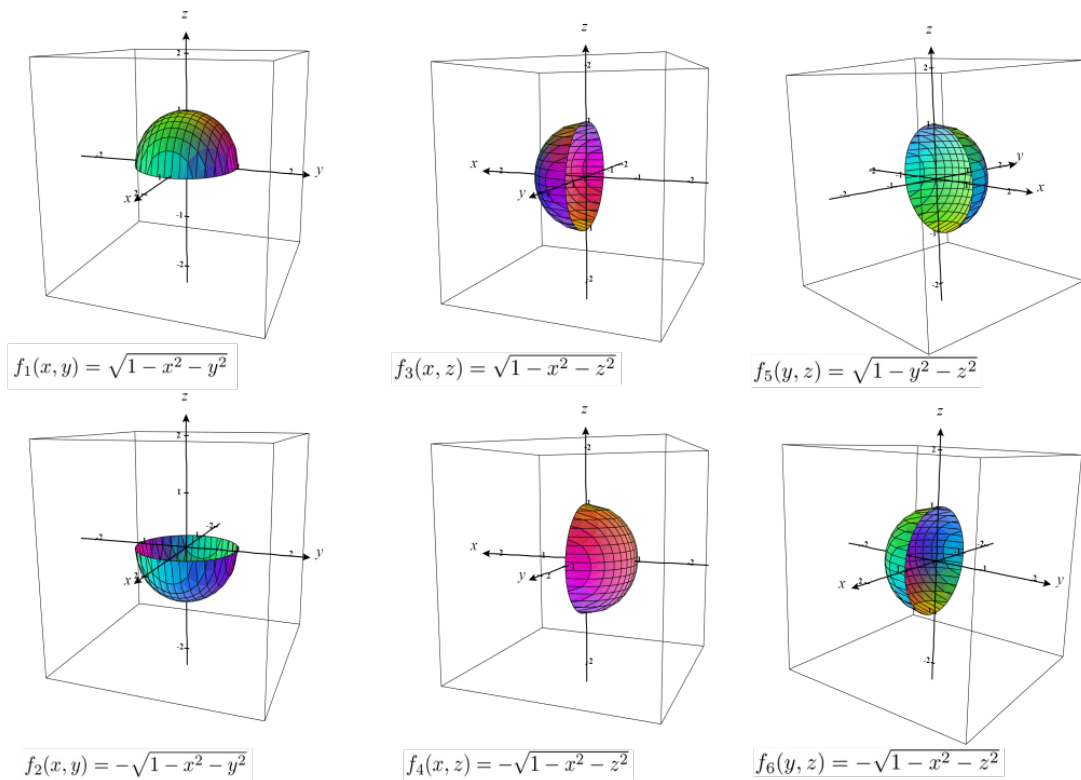


Figura 2 – Funções que cobrem a esfera

têm seus gráficos cobrindo toda a esfera, mostrando que a esfera é um conjunto que é localmente gráfico, portanto uma superfície regular.

Outra forma é se olharmos para a projeção estereográfica da seguinte forma: Considere

o subconjunto da esfera $\mathbb{S}^2 - \{e_3\}$, onde $e_3 = (0, 0, 1)$. Se tomarmos um ponto $x \in \mathbb{S}^2 - \{e_3\}$, a semirreta com origem em e_3 que passa por $x = (x_1, x_2, x_3)$ e tem direção do vetor $(x - e_3)$ pode ser descrita (parametrizada) da seguinte maneira:

$$r(t) = e_3 + t(x - e_3) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)),$$

com $t \in (0, \infty)$. Identificando o plano \mathbb{R}^2 com o subconjunto do espaço $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, temos que a reta intersecta o plano, $r(t) \in \mathbb{R}^2$, quando

$$1 + t(x_3 - 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Substituindo este valor de t na expressão da reta, vem que o ponto pertencente à reta que está no plano é

$$\mathbb{R}^2 \ni r(t) \Leftrightarrow r(t) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2, 0).$$

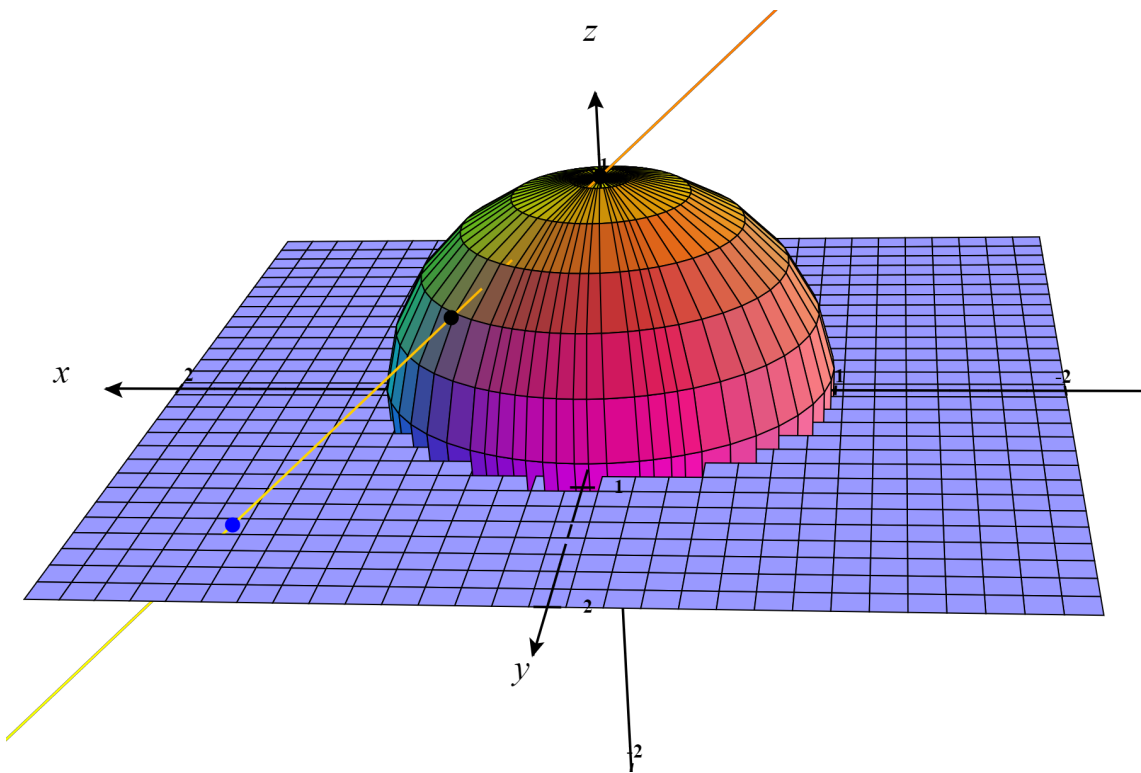


Figura 3 – Projeção estereográfica

Desta forma, defina a aplicação que a cada ponto da esfera o associa ao respectivo ponto pertencente à reta e ao plano por: $\zeta: \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\zeta(x) = \zeta(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3}p_3(x),$$

onde $\mathbf{p}_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção sobre \mathbb{R}^n , isto é, $\mathbf{p}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$. Segue daí que ζ é contínua, já que $\mathbf{p}_3(\mathbf{x})$ é *lipschitziana*³,

$$\|\mathbf{p}_{n+1}(\mathbf{x})\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x}\|,$$

e a função $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{1-x_3}$ é contínua para todo $x_3 \neq 1$, e como sabemos, o único ponto em que $x_3 = 1$ é $\mathbf{x} = \mathbf{e}_3$, que não pertence ao conjunto $\mathbb{S}^2 - \{\mathbf{e}_3\}$. Por outro lado, se definirmos a aplicação $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{\mathbf{e}_3\}$ tal que

$$\xi(\mathbf{y}) = \xi(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}, \frac{2y_2}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1} \right),$$

vemos que $\xi = \zeta^{-1}$, pois como

a) (numerador da última entrada referente a ζ)

$$\begin{aligned} \|\zeta(\mathbf{x})\|^2 - 1 &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} - 1 = \frac{(x_1^2 + x_2^2) - (1-x_3)^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) - 1 + 2x_3 - x_3^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1 + 2x_3 - 2x_3^2}{(1-x_3)^2} \\ (\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2) \quad &= \frac{1 - 1 + 2x_3 - 2x_3^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2x_3(1-x_3)}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2x_3}{(1-x_3)}; \end{aligned}$$

b) (denominador da última entrada referente a ζ)

$$\begin{aligned} \|\zeta(\mathbf{x})\|^2 + 1 &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} + 1 = \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (1-x_3)^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (1 - 2x_3 + x_3^2)}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 1 - 2x_3}{(1-x_3)^2} \\ (\mathbf{x} \in \mathbb{S}^2) \quad &= \frac{1 + 1 - 2x_3}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2(1-x_3)}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x_3)}; \end{aligned}$$

³ Uma aplicação $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita *lipschitziana* quando existe uma constante $k > 0$ de forma que

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

sejam quais forem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$. Em particular, f é contínua.

c) e (para $i = 1, 2$, onde $y_i = x_i/(1 - x_3)$)

$$\frac{2y_i}{\|y\|^2 + 1} = \frac{2x_i/(1 - x_3)}{2/(1 - x_3)} = x_i;$$

ao calcularmos, para qualquer $x \in \mathbb{S}^2$, tem-se que

$$\xi(\zeta(x)) = \xi\left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right) = (x_1, x_2, x_3) = x,$$

e para todo $y \in \mathbb{R}^2$, como

$$1 - \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} = \frac{2}{\|y\|^2 + 1},$$

segue também que

$$\begin{aligned} \zeta(\xi(y)) &= \zeta\left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \frac{2y_2}{\|y\|^2 + 1}, \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}\right) \\ &= \frac{\|y\|^2 + 1}{2} \left(\frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1}, \frac{2y_2}{\|y\|^2 + 1}\right) \\ &= (y_1, y_2) \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto, ζ é a inversa de ξ , ou seja, ξ é um homeomorfismo, já que também é contínua, pois cada uma de suas funções coordenadas é de classe C^∞ , em particular contínuas. Por fim, resta mostrar que a diferencial de ξ é injetiva, ou equivalentemente, um dos determinantes menores ser não-nulo. Como as derivadas parciais de ξ são

- $\partial_1 \xi(y) = \frac{1}{(\|y\|^2 + 1)^2} (2(\|y\|^2 + 1) - 4y_1^2, -4y_1y_2, 4y_1)$
- $\partial_2 \xi(y) = \frac{1}{(\|y\|^2 + 1)^2} (-4y_1y_2, 2(\|y\|^2 + 1) - 4y_2^2, 4y_2)$

segue que a jacobiana de ξ em um ponto $y = (y_1, y_2)$ é

$$[d\xi_y] = \frac{2}{(\|y\|^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} y_2^2 - y_1^2 + 1 & -2y_1y_2 \\ -2y_1y_2 & y_1^2 - y_2^2 + 1 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{bmatrix}.$$

Se calcularmos seus determinantes menores, obtemos o seguinte:

- $\frac{4}{(\|y\|^2 + 1)^4} \begin{vmatrix} y_2^2 - y_1^2 + 1 & -2y_1y_2 \\ -2y_1y_2 & y_1^2 - y_2^2 + 1 \end{vmatrix} = -4(\|y\|^2 - 1)/(\|y\|^2 + 1)^3;$
- $\frac{4}{(\|y\|^2 + 1)^4} \begin{vmatrix} y_2^2 - y_1^2 + 1 & -2y_1y_2 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{vmatrix} = 8y_2/(\|y\|^2 + 1)^3;$

$$\bullet \frac{4}{(\|y\|^2+1)^4} \begin{vmatrix} -2y_1y_2 & y_1^2 - y_2^2 + 1 \\ 2y_1 & 2y_2 \end{vmatrix} = -8y_1/(\|y\|^2+1)^3.$$

Tais determinantes nunca se anulam simultaneamente, logo, em um dado ponto, sempre algum é não nulo. Portanto, a diferencial é injetiva, e assim ξ é uma parametrização de $\mathbb{S}^2 - \{\mathbf{e}_3\}$. Para cobrirmos toda a esfera, falta apenas o ponto \mathbf{e}_3 . Portanto, agora consideramos o conjunto $\mathbb{S}^2 - \{-\mathbf{e}_3\}$, onde $-\mathbf{e}_3 = (-1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$ e procederemos analogamente, mas agora considerando a semirreta que tem origem em $-\mathbf{e}_3$ passa por \mathbf{x} e tem direção do vetor $(\mathbf{x} + \mathbf{e}_3)$, que pode ser descrita por:

$$s(t) = -\mathbf{e}_3 + t(\mathbf{x} + \mathbf{e}_3), \quad t \in (0, \infty).$$

Logo, \mathbb{S}^2 é uma superfície regular.

1.1.3 Imagem inversa de um valor regular

Definição 2. Um ponto $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é dito *valor regular* de uma aplicação diferenciável $f: \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, quando para todo ponto $\mathbf{q} \in f^{-1}(\mathbf{c}) = \{\mathbf{q} \in \mathbf{U}; f(\mathbf{q}) = \mathbf{c}\}$, a diferencial $df_{\mathbf{q}}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação sobrejetiva.

Esta definição nos dá mais uma forma de obter superfícies regulares: os conjuntos que são a imagem inversa de algum valor regular, por funções C^∞ , são também superfícies regulares. Com efeito, considere $f: \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, \mathbf{U} aberto, uma função de classe C^∞ de forma que em um ponto $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbf{U}$, $f(\mathbf{p}) = \mathbf{d}$, a diferencial de f seja sobrejetiva, ou seja, $\partial_x f \neq 0$ ou $\partial_y f \neq 0$ ou $\partial_z f \neq 0$ em \mathbf{p} . Podemos supor, por exemplo, que $\partial_x f(\mathbf{p}) \neq 0$ e definir $\phi: \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\phi(x, y, z) = (f(x, y, z), y, z).$$

Daí, a sua jacobiana em um ponto genérico qualquer é

$$[J\phi] = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes é $\partial_x f$, que, por hipótese, em \mathbf{p} é diferente de zero. Isto nos diz, pelo Teorema da Aplicação Inversa, que existem um aberto $\mathbf{Z} \subset \mathbf{U}$ com $\mathbf{p} \in \mathbf{Z}$ e um aberto em \mathbb{R}^3 que contenha $\phi(\mathbf{p}) = (\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, ao qual podemos supor ser da forma $\mathbf{W} \times \mathbf{V}$ (cartesiano de abertos) diminuindo \mathbf{Z} , se necessário, com $f(\mathbf{p}) = \mathbf{d} \in \mathbf{W} \subset \mathbb{R}$ e $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^2$, de tal forma que a aplicação $\phi|_{\mathbf{Z}}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{W} \times \mathbf{V}$ é um difeomorfismo C^∞ . A inversa deste difeomorfismo, que também é um difeomorfismo⁴, é a aplicação $(\phi|_{\mathbf{Z}})^{-1} := \psi: \mathbf{W} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{Z}$,

⁴ Logo suas funções coordenada são C^∞ .

que é da forma $\psi(w, y, z) = (g(w, y, z), y, z)$, com $(w, y, z) \in W \times V$ onde $g : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é C^∞ . Se olharmos para os pontos (x, y, z) pertencentes ao conjunto⁵ $f^{-1}(d) \cap Z \subset Z$, observa-se que

$$\phi(x, y, z) = (f(x, y, z), y, z) = (d, y, z) \Leftrightarrow \psi(d, y, z) \in f^{-1}(d) \cap Z.$$

Daí, para todo $(d, y, z) \in \phi(f^{-1}(d) \cap Z) \subset W \times V$,

$$(d, y, z) = (\phi \circ \psi)(d, y, z) = \phi(g(d, y, z), y, z) = \left(f(g(d, y, z), y, z), y, z \right),$$

ou seja,

$$d = f(g(d, y, z), y, z) \iff (g(d, y, z), y, z) \in f^{-1}(d),$$

o que nos mostra que $\bar{g} := g|_{\{d\} \times V} : \{d\} \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tem seu gráfico contido no aberto $f^{-1}(d) \cap Z$ de $f^{-1}(d)$. Por outro lado, se $(x, y, z) \in f^{-1}(d) \cap Z$, então

$$(x, y, z) = \psi(\phi(x, y, z)) = \psi(f(x, y, z), y, z) = \psi(d, y, z) = (g(d, y, z), y, z) \in \text{Gr}(\bar{g}).$$

Logo, $\text{Gr}(\bar{g}) = f^{-1}(d) \cap Z$. Dessa forma, mostramos que $f^{-1}(d)$ é localmente gráfico de uma aplicação C^∞ , portanto $f^{-1}(d)$ é uma superfície regular.

Exemplo 1. Um exemplo disso é a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ são constantes fixas. Se calcularmos suas derivadas parciais, $\partial_x f = 2a^{-2}x$, $\partial_y f = 2b^{-2}y$, $\partial_z f = 2c^{-2}z$, vemos que elas são de classe C^∞ , já que são polinomiais. Dessa forma, $f \in C^\infty$. Além disso, o seu gradiente é nulo se, e somente se, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Desta forma, se observarmos, por exemplo, o conjunto

$$f^{-1}(1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

vemos que o mesmo é uma superfície regular, haja vista que 1 é valor regular de f . Assim, temos mais uma forma de mostrar que \mathbb{S}^2 é uma superfície regular: tomando $a = b = c = 1$, obtemos que $f^{-1}(1) = \mathbb{S}^2$. Mais geralmente, temos que o elipsóide é uma superfície regular.

1.2 Mudança de Parâmetros

Dada uma superfície regular S , considere duas vizinhanças coordenadas de um ponto $p \in S$, parametrizadas por $X : V_0 \rightarrow V$, e $Y : W_0 \rightarrow W$, onde são abertos $V_0, W_0 \subset \mathbb{R}^2$, e $p \in V \cap W$. Podemos então considerar a aplicação

⁵ Que é não-vazio, pois $p \in f^{-1}(d) \cap Z$.

$$Y^{-1} \circ X : X^{-1}(V \cap W) \rightarrow Y^{-1}(V \cap W).$$

Tal aplicação é um difeomorfismo C^∞ . Para vermos isso considere os lemas a seguir:

Lema 1. Considere S uma superfície regular. Dado $\mathbf{p} \in S$, seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ uma parametrização de uma vizinhança coordenada V de $\mathbf{p} = X(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in S$. Então, existe uma projeção sobre duas coordenadas $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e uma bola aberta contida em U com centro em $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ tal que $\pi \circ X$ é um difeomorfismo de classe C^∞ de tal bola sobre sua imagem.

Demonstração. Sendo uma parametrização, vemos que $dX_{(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)}$ é uma aplicação linear injetiva. Ou seja, o posto de sua matriz é igual a 2. Isto nos diz que duas das três linhas da matriz

$$\begin{pmatrix} \partial_u x_1 & \partial_v x_1 \\ \partial_u x_2 & \partial_v x_2 \\ \partial_u x_3 & \partial_v x_3 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes. Daí, definimos a projeção π como sendo $\pi(x_1, x_2, x_3) = (x_s, x_k)$, onde s, k são os índices das linhas linearmente independentes, com $s, k \in \{1, 2, 3\}$. Dessa forma, a matriz jacobiana da composição $\pi \circ X$ é invertível, pois

$$\pi \circ X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(x_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}), x_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right),$$

e daí,

$$J(\pi \circ X)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \partial_u x_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \partial_v x_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \partial_u x_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \partial_v x_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix},$$

que por hipótese tem determinante não-nulo. Sendo assim, pelo Teorema da Aplicação Inversa, obtemos o nosso resultado. \square

Lema 2. Dada uma superfície regular S e uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$, com U aberto, se uma aplicação $f : V_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ é tal que $f(V_0) \subset V$, então $X^{-1} \circ f : V_0 \rightarrow U$ é de classe C^∞ .

Demonstração. Dado um ponto \mathbf{p} na interseção $V \cap f(V_0)$, sabemos que existe uma projeção $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\pi \circ X$ é um difeomorfismo C^∞ de uma bola centrada em \mathbf{p} sobre sua respectiva imagem. Temos também que nessa interseção, por ser $f(V_0) \subset V$, que $\mathbf{p} = f(\mathbf{y}_0)$, para algum $\mathbf{y}_0 \in V_0$. Por outro lado, se $\mathbf{x}_0 = X^{-1}(\mathbf{p})$, vem que $(\pi \circ X)(\mathbf{x}_0) = \pi(f(\mathbf{y}_0))$. Daí,

$$\mathbf{x}_0 = \left[(\pi \circ X)^{-1} \circ \pi \circ f \right](\mathbf{y}_0),$$

ou seja,

$$(X^{-1} \circ f)(\mathbf{y}_0) = \left[(\pi \circ X)^{-1} \circ \pi \circ f \right](\mathbf{y}_0).$$

Como a projeção depende apenas dos pontos $\mathbf{p} \in V$, podemos fazer isso para cada $\mathbf{y} \in V_0$. Ou seja, dado $\mathbf{y}_0 \in V_0$, a composição $(X^{-1} \circ f)$ é C^∞ em \mathbf{y}_0 , pois como conseguimos escrevê-la como uma composição de aplicações C^∞ , já que $\pi \circ X$ é um difeomorfismo C^∞ , π é linear, e, por hipótese, $f \in C^\infty$, vemos que $(X^{-1} \circ f) \in C^\infty$. \square

Voltando para a mudança de parâmetros, podemos aplicar o Lema 2 acima em ambos os lados: uma vez para X e outra para Y , considerando uma como parametrização e a outra como a função dita no enunciado, e depois fazendo o processo inverso. Com isso, observando que $(Y^{-1} \circ X)^{-1} = X^{-1} \circ Y$, vemos que a mudança de parâmetros é um difeomorfismo C^∞ .

1.3 Aplicações entre superfícies

1.3.1 Espaço Tangente

Definição 3. Um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é dito *tangente à superfície S em $\mathbf{p} \in S$* quando existe uma curva⁶ $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ de classe C^∞ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Ou seja, dada uma curva passando por \mathbf{p} em S , os vetores velocidade nesse ponto, segundo cada curva, é um vetor tangente à S em \mathbf{p} .

O conjunto do \mathbb{R}^3 constituído pelos vetores tangentes à S , acima definidos, denotado por $T_{\mathbf{p}}S$, é chamado de *Espaço Tangente a S em \mathbf{p}* . Dada uma parametrização de S em \mathbf{p} , o espaço tangente à S em \mathbf{p} pode ser obtido como a imagem da diferencial de uma parametrização de uma vizinhança do ponto \mathbf{p} , ou seja, se $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$, $X(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \in V$ é uma parametrização de S ,

$$T_{\mathbf{p}}S = dX_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2),$$

onde $dX(\mathbf{q}) = dX_{\mathbf{q}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. De fato, se tivermos um vetor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, existe uma curva C^∞ em S , $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ de forma que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Podemos supor que a curva está contida em $X(U) \subset S$. Desta maneira,

$$\beta := X^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \in C^\infty,$$

⁶ ou, equivalentemente, quando dada uma parametrização de S em \mathbf{p} , $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, C^∞ , tal que $\alpha(0) = X^{-1}(\mathbf{p})$ e $(X \circ \alpha)'(0) = \mathbf{v}$.

pelo Lema 2. Assim, obtemos uma curva C^∞ em \mathbb{R}^2 , com $\beta(0) = \mathbf{q}$. Daí,

$$\begin{aligned} dX_{\mathbf{q}}(\beta'(0)) &= dX_{\mathbf{q}}\left((X^{-1} \circ \alpha)'(0)\right) = dX\left((X^{-1} \circ \alpha)(0)\right)\left((X^{-1} \circ \alpha)'(0)\right) \\ &= \left[X \circ (X^{-1} \circ \alpha)\right]'(0) \\ &= \alpha'(0) \\ &= \mathbf{v}, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{v} \in dX_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2)$. Como $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ foi arbitrário, vemos que $T_{\mathbf{p}}S \subset dX_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado, seja $\mathbf{w} = dX_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}_0)$, para algum $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$. Definindo a curva $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbf{U}$ com $\gamma(s) = \mathbf{q} + s\mathbf{u}_0$, vem que $\gamma \in C^\infty$ e $\gamma' \equiv \mathbf{u}_0$. Daí, $X \circ \gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow S$ é uma curva em S , cuja derivada em $s = 0$ é

$$T_{\mathbf{p}}S \ni (X \circ \gamma)'(0) = dX_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = dX_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{w}.$$

Portanto, podemos ver que realmente o espaço tangente pode ser determinado pela imagem da diferencial da parametrização X em $\mathbf{q} = X^{-1}(\mathbf{p})$.

Na verdade, a definição de *Espaço Tangente* independe de uma parametrização escolhida, e isso nos mostra que podemos determiná-lo através de uma parametrização qualquer (de uma vizinhança de \mathbf{p}). Além disso, o Espaço Tangente é um plano e, a partir de uma parametrização, podemos encontrar uma base para tal: $\{X_{\mathbf{u}}, X_{\mathbf{v}}\}$. Com efeito, dado $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$, por definição considere uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{U}$, C^∞ , com $\alpha(t) = (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$ de sorte que $X \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ satisfaça $(X \circ \alpha)(0) = \mathbf{p}$ e $(X \circ \alpha)'(0) = \mathbf{w}$. Isso nos resulta o seguinte:

$$\mathbf{w} = (X \circ \alpha)'(0) = dX_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = dX_{(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0))}(\mathbf{u}'(0), \mathbf{v}'(0)) = dX_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}'(0), \mathbf{v}'(0)).$$

Daí, se $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (x_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), x_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), x_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$,

$$dX_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}'(0), \mathbf{v}'(0)) = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{u}}x_1(\mathbf{q}) & \partial_{\mathbf{v}}x_1(\mathbf{q}) \\ \partial_{\mathbf{u}}x_2(\mathbf{q}) & \partial_{\mathbf{v}}x_2(\mathbf{q}) \\ \partial_{\mathbf{u}}x_3(\mathbf{q}) & \partial_{\mathbf{v}}x_3(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}'(0) \\ \mathbf{v}'(0) \end{pmatrix} = \mathbf{u}'(0)X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) + \mathbf{v}'(0)X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}),$$

mostrando que $\{X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}), X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\}$ realmente é uma base para $T_{\mathbf{p}}S$, pois já sabíamos que eles eram linearmente independentes. Dessa forma, conseguimos uma base para o espaço tangente através de uma parametrização. Se escolhermos uma parametrização Y de S em \mathbf{p} , distinta de X , ainda teremos que $T_{\mathbf{p}}S = dY_{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^2)$, onde $\mathbf{r} = Y^{-1}(\mathbf{p})$, e que $\{Y_{\mathbf{u}}(\mathbf{r}), Y_{\mathbf{v}}(\mathbf{r})\}$ é uma base de $T_{\mathbf{p}}S$, embora possa ser distinta da proveniente de X .

1.3.2 O espaço tangente à esfera

Dado um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, consideremos o espaço tangente $T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^2$. Este espaço vetorial é, na verdade, o complemento ortogonal à posição $\langle \mathbf{p} \rangle^\perp$, ou seja, o único plano

perpendicular⁷ a \mathbf{p} . De fato, seja $\theta \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^2$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma curva C^∞ em \mathbb{S}^2 , com $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ e $\alpha'(0) = \theta$. Sendo α uma curva em \mathbb{S}^2 , temos a identidade

$$\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 1, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

que resulta, derivando em relação a t ,

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Em particular, para $t = 0$, vemos que $\langle \mathbf{p}, \theta \rangle = 0$, ou seja, $\theta \in \langle \mathbf{p} \rangle^\perp$, isto é, $T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^2 \subset \langle \mathbf{p} \rangle^\perp$.

Por outro lado, se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \langle \mathbf{p} \rangle^\perp$, então consideremos a curva⁸ $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que

$$\gamma(t) = \frac{\mathbf{p} + t\mathbf{v}}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} = \left(\frac{\alpha_1(0) + tv_1}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|}, \frac{\alpha_2(0) + tv_2}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|}, \frac{\alpha_3(0) + tv_3}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \right).$$

Note que $\gamma(0) = \mathbf{p}$ e $\|\gamma(t)\| = \|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|/\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\| = 1$, implicando que $\gamma(t) \in \mathbb{S}^2 \forall t \in (-\delta, \delta)$. Logo, $\gamma'(0) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^2$. Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|) &= \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^3 (\alpha_i(0) + tv_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \left[\sum_{i=1}^3 2(\alpha_i(0) + tv_i)v_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i(0)v_i + tv_i^2}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|}; \end{aligned}$$

e, para cada $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_j(0) + tv_j}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \right) &= \frac{v_j\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\| - (\alpha_j + tv_j) \frac{d}{dt}(\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|)}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|^2} \\ &= \frac{v_j\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\| - (\alpha_j + tv_j) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i(0)v_i + tv_i^2}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \right]}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|^2}, \end{aligned}$$

a derivada da curva fica

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_1(0) + tv_1}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_2(0) + tv_2}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_3(0) + tv_3}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\frac{v_j\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\| - (\alpha_j + tv_j) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i(0)v_i + tv_i^2}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|} \right]}{\|\mathbf{p} + t\mathbf{v}\|^2} \right] \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

⁷ Ou seja, a posição é *normal* à Esfera.

⁸ $\delta > 0$ sendo tomado de forma que $\gamma((-\delta, \delta)) \subset \mathbb{S}^2$.

onde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Donde, em $t = 0$

$$\begin{aligned}
 \gamma'(0) &= \sum_{j=1}^3 \left[\frac{v_j \|\mathbf{p} + 0\mathbf{v}\| - (\alpha_j + 0v_j) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i(0)v_i + 0v_i^2}{\|\mathbf{p} + 0\mathbf{v}\|} \right]}{\|\mathbf{p} + 0\mathbf{v}\|^2} \right] e_j \\
 &= \sum_{j=1}^3 \left[v_j - \alpha_j \left[\sum_{i=1}^3 \alpha_i(0)v_i \right] \right] e_j \\
 &= \sum_{j=1}^3 \left[v_j - \alpha_j \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \right] e_j \\
 &= \sum_{j=1}^3 v_j e_j \\
 &= \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

Portanto, vemos que o espaço tangente à esfera em um ponto \mathbf{p} é igual ao plano que passa por \mathbf{p} cujo vetor normal é o próprio \mathbf{p} , isto é, $T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^2 = \langle \mathbf{p} \rangle^\perp$.

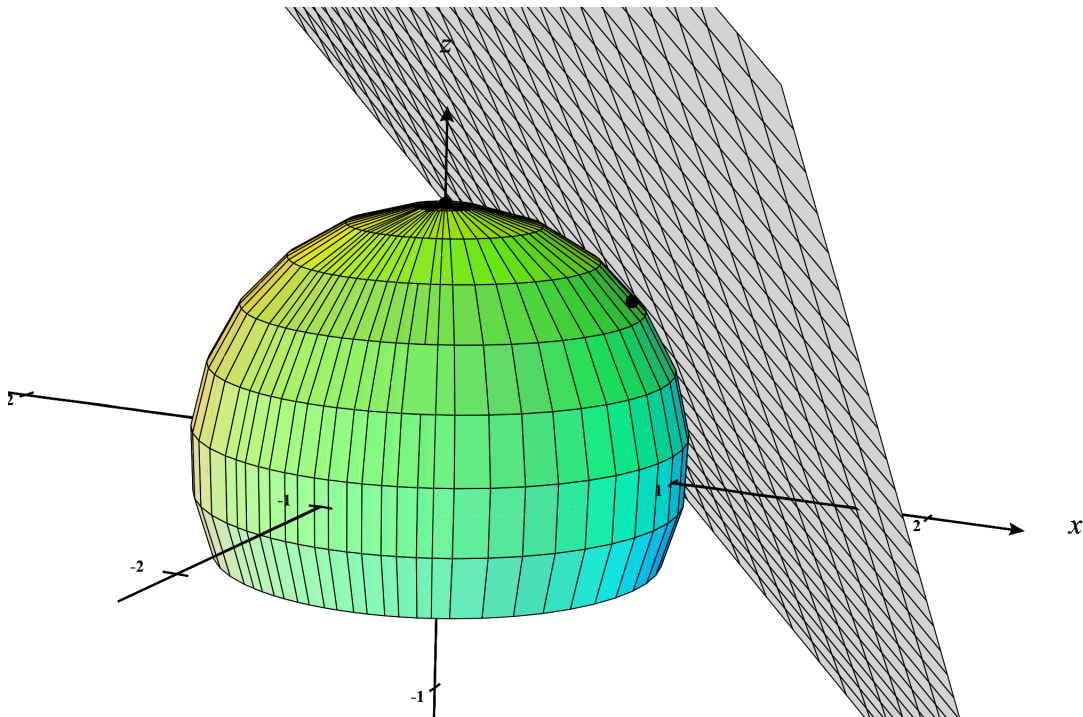


Figura 4 – Espaço tangente à esfera

1.3.3 Aplicações diferenciáveis entre superfícies

Definição 4. Seja S uma superfície regular e $V \subset S$ aberto em S . Uma aplicação $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *diferenciável em* $\mathbf{p} \in V$ se para alguma parametrização $X : U \rightarrow V$ de S em \mathbf{p} ,

$$\phi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

é uma aplicação C^∞ em $\mathbf{p} \in \mathbf{U}$. A aplicação ϕ é dita *diferenciável* quando é diferenciável em todos os pontos de S .

Tal definição não depende da parametrização de uma vizinhança de \mathbf{p} escolhida, visto que dadas parametrizações $X : \mathbf{U} \rightarrow S, Y : W \rightarrow S$ de S , com $\mathbf{p} \in X(\mathbf{U}) \cap Y(W)$, a mudança de coordenadas implica que $\phi \circ Y = (\phi \circ X) \circ (X^{-1} \circ Y)$ é uma aplicação diferenciável em \mathbf{p} (C^∞), desde que $\phi \circ X$ seja.

1.3.3.1 Restrição de uma aplicação diferenciável

Se uma aplicação $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$, com \mathbf{U} aberto e $S \subset \mathbf{U}$ uma superfície regular, é C^∞ em \mathbf{U} , então $f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável em S .

De fato, se observarmos que dada uma parametrização qualquer X de S a composição $f \circ X$ é C^∞ , segue da definição que $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável.

Definição 5. Sejam M, N superfícies regulares e $\psi : V \subset M \rightarrow N$ uma aplicação contínua definida num aberto V de S . Dizemos que a aplicação ψ é diferenciável em $\mathbf{p} \in V$ quando dadas parametrizações $X : \mathbf{U} \rightarrow V \subset M$ e $Y : W \rightarrow Z \subset N$, com $\mathbf{p} \in V, f(V) \subset Y(W)$, a composta

$$Y^{-1} \circ \psi \circ X,$$

é C^∞ em $X^{-1}(\mathbf{p})$.

1.3.3.2 Diferencial de uma aplicação entre superfícies

Definição 6. Dadas duas superfícies regulares M e N , considere ψ, X , e Y como na definição 5, e uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{U}$ tal que $\alpha(0) = X^{-1}(\mathbf{p})$ e $(X \circ \alpha)'(0) = \theta$, ou seja, $\theta \in T_{\mathbf{p}}M$. Se considerarmos a composição $(\psi \circ X \circ \alpha) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$, teremos agora uma curva em N , tal qual resulta que

$$(\psi \circ X \circ \alpha)'(0) \in T_{\psi(\mathbf{p})}N.$$

A aplicação que é definida a partir desta relação, $(X \circ \alpha)'(0) \mapsto (\psi \circ X \circ \alpha)'(0)$, é uma aplicação linear, denominada *diferencial de ψ em \mathbf{p}* :

$$d\psi_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\psi(\mathbf{p})}N.$$

Vejamos, pois, que de fato esta aplicação constitui uma aplicação linear:

Como f é diferenciável, ficam bem definidas as parametrizações X de M e Y de N de tal forma que $Y^{-1} \circ f \circ X : \mathbf{U} \rightarrow W$ seja C^∞ em $X^{-1}(\mathbf{p}) := \mathbf{q}$, por definição. Considere um vetor $\theta \in T_{\mathbf{p}}M$ e, por definição, uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{U}$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{q}$ e $(X \circ \alpha)'(0) = \theta$. A curva em N ,

$$\phi := \psi \circ X \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N,$$

pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\phi(t) = [(Y \circ Y^{-1}) \circ (\psi \circ X \circ \alpha)](t) = [Y \circ (Y^{-1} \circ \psi \circ X) \circ \alpha](t) = [Y \circ \gamma \circ \alpha](t),$$

onde $\gamma = Y^{-1} \circ \psi \circ X : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$, denotando $\gamma(u, v) = (w(u, v), z(u, v))$. Logo,

$$\phi(t) = Y\left(w(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))\right),$$

donde, sendo

$$r = Y^{-1}(p) = \left(w(u(0), v(0)), z(u(0), v(0))\right),$$

a derivada em $t = 0$ é

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= dY_r\left(\frac{d}{dt}w(u(t), v(t)), \frac{d}{dt}z(u(t), v(t))\right) \\ &= dY_r\left(\partial_u w u'(0) + \partial_v w v'(0), \partial_u z u'(0) + \partial_v z v'(0)\right). \end{aligned}$$

Se os elementos de \mathcal{W} são da forma (w, z) , então⁹

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= dY_r\left(\partial_u w u'(0) + \partial_v w v'(0), \partial_u z u'(0) + \partial_v z v'(0)\right) \\ &= \left(\partial_u w(q)u'(0) + \partial_v w(q)v'(0)\right)Y_w(r) + \left(\partial_u z(q)u'(0) + \partial_v z(q)v'(0)\right)Y_z(r). \end{aligned}$$

Desta forma, vemos que $\phi'(0)$ não depende da curva α , pois $u'(0)$ e $v'(0)$ são as coordenadas do vetor $\theta \in T_p\mathcal{M}$, que dependem apenas da base do mesmo, isto é, $\{X_u(q), X_v(q)\}$.

Definindo, portanto, $d\psi_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{\psi(p)}\mathcal{N}$ como

$$d\psi_p(aX_u(q) + bX_v(q)) = \left(\partial_u w(q)a + \partial_v w(q)b\right)Y_w(r) + \left(\partial_u z(q)a + \partial_v z(q)b\right)Y_z(r),$$

que de fato é uma aplicação linear: sejam $\theta_1 = aX_u(q) + bX_v(q)$ e $\theta_2 = cX_u(q) + dX_v(q)$ em $T_p\mathcal{M}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. A combinação linear $d\psi_p(\theta_1 + \lambda\theta_2)$ é igual a

$$\begin{aligned} &= \left(\partial_u w(a + \lambda c) + \partial_v w(b + \lambda d)\right)Y_w(r) + \left(\partial_u z(a + \lambda c) + \partial_v z(b + \lambda d)\right)Y_z(r) \\ &= \left[\left(\partial_u w a + \partial_v w b\right)Y_w(r) + \left(\partial_u z a + \partial_v z b\right)Y_z(r)\right] + \\ &+ \left[\left(\partial_u w \lambda c + \partial_v w \lambda d\right)Y_w(r) + \left(\partial_u z \lambda c + \partial_v z \lambda d\right)Y_z(r)\right] \\ &= d\psi_p(\theta_1) + \lambda \left[\left(\partial_u w c + \partial_v w d\right)Y_w(r) + \left(\partial_u z c + \partial_v z d\right)Y_z(r)\right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d\psi_p(\theta_1 + \lambda\theta_2) = d\psi_p(\theta_1) + \lambda d\psi_p(\theta_2).$$

E assim, temos (tomando $a = 1$ e $b = 0$, em seguida $a = 0$ e $b = 1$) que a matriz desta transformação é

$$[d\psi_p] = \begin{pmatrix} \partial_u w(q) & \partial_v w(q) \\ \partial_u z(q) & \partial_v z(q) \end{pmatrix}.$$

⁹ Isto daqui, na segunda igualdade, mostra que ele realmente pertence a $T_{\psi(p)}\mathcal{N}$.

1.4 Primeira forma fundamental

Temos que um espaço vetorial E munido de produto interno, $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, induz, de maneira natural, o produto interno sobre cada subespaço $F \subset E$. Da mesma forma, \mathbb{R}^3 induz, para cada $\mathbf{p} \in S$, S superfície regular, o seu produto interno (canônico) sobre $T_{\mathbf{p}}S = dX_{\mathbf{q}}(\mathbb{R}^2)$ (onde $\mathbf{q} = X^{-1}(\mathbf{p})$). Sendo assim, para cada $\mathbf{p} \in S$,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \times T_{\mathbf{p}}S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

A forma quadrática associada a essa forma bilinear é chamada de *Primeira Forma Fundamental*:

Definição 7. A forma quadrática $I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{p}},$$

é dita a **a primeira forma fundamental de S em \mathbf{p}** .

A primeira forma fundamental indica uma aproximação de primeira ordem do comprimento de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões sobre a superfície de um ponto de vista observado da superfície, sem olhar para \mathbb{R}^3 .

Seja $X : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização da superfície S em \mathbf{p} . Vamos considerar $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ e seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(\mathbf{U})$ uma curva parametrizada diferenciável em 0 com $\alpha(0) = \mathbf{p}$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Então faz sentido considerar a composição $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{U}$, onde $\gamma(t) := (X^{-1} \circ \alpha)(t) =: (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$. Onde podemos expressar α como sendo

$$\alpha(t) = X(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)),$$

tal que $\alpha(0) = \mathbf{p} = X(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$, onde $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$, e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Donde, nos resulta que

$$\alpha'(t) = X_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))\mathbf{u}'(t) + X_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))\mathbf{v}'(t),$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{p}} = \langle [X_{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + X_{\mathbf{v}}\mathbf{v}'], [X_{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + X_{\mathbf{v}}\mathbf{v}'] \rangle_{\mathbf{p}} \\ &= \left[\langle X_{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + X_{\mathbf{v}}\mathbf{v}', X_{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + X_{\mathbf{v}}\mathbf{v}' \rangle_{\mathbf{p}} \right] \\ &= \left[\langle X_{\mathbf{u}}, X_{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbf{p}} (\mathbf{u}')^2 + 2\langle X_{\mathbf{u}}, X_{\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{p}} \mathbf{u}'\mathbf{v}' + \langle X_{\mathbf{v}}, X_{\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{p}} (\mathbf{v}')^2 \right] \end{aligned}$$

calculados em $t = 0$. Onde, definimos

1. $E(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \langle \mathbf{X}_u(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0), \mathbf{X}_u(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \rangle_{\mathbf{p}}$;
2. $F(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \langle \mathbf{X}_u(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0), \mathbf{X}_v(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \rangle_{\mathbf{p}}$;
3. $G(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \langle \mathbf{X}_v(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0), \mathbf{X}_v(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \rangle_{\mathbf{p}}$;

denominados coeficientes da primeira forma fundamental de S em \mathbf{p} na base coordenada

$$\{\mathbf{X}_u(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0), \mathbf{X}_v(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\}$$

de $T_{\mathbf{p}}S$. Donde, fazendo $\mathbf{p} \in S$ variar sobre $X(\mathbf{U})$, obtemos as funções diferenciáveis

- I. $E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$,
- II. $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$ e
- III. $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$,

com $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{U}$. Portanto, a primeira forma fundamental fica

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = E(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) [\mathbf{u}'(0)]^2 + 2F(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) [\mathbf{u}'(0)] [\mathbf{v}'(0)] + G(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) [\mathbf{v}'(0)]^2.$$

Exemplo 2. Dada uma função $C^\infty f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sabemos que seu gráfico é uma superfície regular, conforme a seção 1.1.1. E, além disso, $\mathbf{X} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{X}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, f(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ é uma parametrização de todo o gráfico de f . Para calcularmos a primeira forma fundamental, calculemos os coeficientes da primeira forma fundamental, $E(\mathbf{u}, \mathbf{v}), F(\mathbf{u}, \mathbf{v}), G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dados pelas equações I, II e III acima. Primeiramente, temos que:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (1, 0, f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \\ \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 1, f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \end{cases}$$

onde $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{U}$. Dessa forma, obtemos que

$$E = \langle \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle = \langle (1, 0, f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})), (1, 0, f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \rangle = 1 + [f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2; \quad (1.1)$$

$$F = \langle \mathbf{X}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle = \langle (1, 0, f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})), (0, 1, f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \rangle = f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \quad (1.2)$$

$$G = \langle \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{X}_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle = \langle (0, 1, f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})), (0, 1, f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \rangle = 1 + [f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2. \quad (1.3)$$

Dada uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(\mathbf{U})$, tal que $\alpha(0) = \mathbf{p}$ e $\alpha'(0) = \mathbf{w}$, onde $\alpha(t) = \mathbf{X}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$ vem, à partir das equações (1.1), (1.2) e (1.3), que a primeira forma fundamental em \mathbf{p} aplicada em \mathbf{w} é:

$$I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = (1 + [f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2) \mathbf{u}'(0)^2 + 2f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{u}'(0)\mathbf{v}'(0)] + (1 + [f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2) \mathbf{v}'(0)^2.$$

Exemplo 3. Considere o conjunto do espaço $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Tal conjunto é denominado cilindro circular reto sobre o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Uma parametrização deste conjunto é a aplicação $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\cos \mathbf{u}, \sin \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U$$

onde $U = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \mathbf{u} < 2\pi \text{ e } \mathbf{v} \in \mathbb{R}\}$.

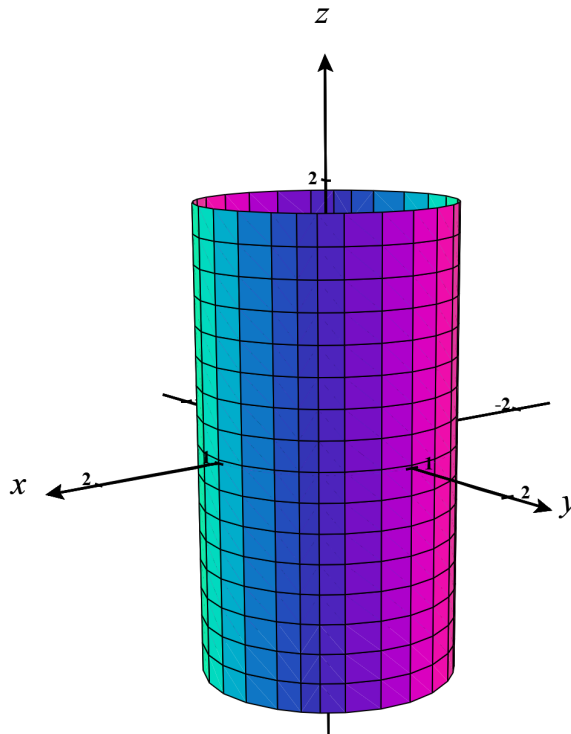


Figura 5 – Cilindro circular reto sobre o círculo unitário

Se calcularmos as derivadas parciais de X , obtemos que: $X_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-\sin \mathbf{u}, \cos \mathbf{u}, 0)$ e $X_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 0, 1)$, de onde obtemos, pelas equações (I), (II) e (III) que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle (-\sin \mathbf{u}, \cos \mathbf{u}, 0), (-\sin \mathbf{u}, \cos \mathbf{u}, 0) \rangle = [\sin \mathbf{u}]^2 + [\cos \mathbf{u}]^2 = 1;$$

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle (-\sin \mathbf{u}, \cos \mathbf{u}, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0;$$

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle = \|\mathbf{e}_3\|^2 = 1.$$

2 Superfícies Orientáveis

2.1 Superfícies Orientáveis

Dada uma superfície regular S , sabemos que se X e Y são parametrizações de S , cujas imagens se intersectam, a mudança de coordenada é um difeomorfismo C^∞ , ou seja, o determinante da diferencial da mesma é diferente de zero, nos dando assim duas possibilidades: positivo ou negativo. Se conseguirmos cobrir a nossa superfície de forma que quaisquer duas parametrizações da mesma tenham a propriedade de que o determinante seja positivo, ou suas imagens não se intersectam, dizemos que ela é dita orientável. Isto é:

Definição 8. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita orientável se é possível obter uma família de parametrizações $\{X_\lambda\}_{\lambda \in I}$, onde $X_\lambda : U_\lambda \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, U_λ aberto, de tal forma que $S \subset \bigcup_{\lambda \in I} X_\lambda(U_\lambda)$ e dadas quaisquer duas parametrizações $X_{\lambda_i}, X_{\lambda_j}$ de S nesta família:

- Ou $X_{\lambda_i}(U_{\lambda_i}) \cap X_{\lambda_j}(U_{\lambda_j}) = \emptyset$;
- Ou $X_{\lambda_i}(U_{\lambda_i}) \cap X_{\lambda_j}(U_{\lambda_j}) \neq \emptyset$ e a mudança de coordenadas tem jacobiano positivo.

Dado um espaço vetorial E , considere duas bases V e W de um subespaço $F \subset E$. Dizemos que elas têm a mesma orientação quando a matriz de mudança de base tem determinante positivo.

Observemos o seguinte: dadas duas parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S , com $W := X(U) \cap Y(V) \neq \emptyset$, sabemos que a mudança de coordenadas $Y^{-1} \circ X : X^{-1}(W) \rightarrow Y^{-1}(W)$ é um difeomorfismo C^∞ . Se nós denotarmos as parametrizações por

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \text{ e } Y(h, k) = (y_1(h, k), y_2(h, k), y_3(h, k)),$$

podemos fazer que $Y^{-1}(w_1, w_2, w_3) = (h(w_1, w_2, w_3), k(w_1, w_2, w_3))$, donde

$$\begin{aligned} [Y^{-1} \circ X](u, v) &= Y^{-1}(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \\ &= \left(h(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)), k(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \right) \\ &= (h(u, v), k(u, v)), \end{aligned}$$

onde a última igualdade define $h(u, v)$ e $k(u, v)$. Desta forma, duas parametrizações X e Y de uma superfície regular S ficam associadas pelas equações

$$X(u, v) = Y(h(u, v), k(u, v)) \Rightarrow \begin{cases} \partial_u X = \partial_u h \partial_h Y + \partial_u k \partial_k Y \\ \partial_v X = \partial_v h \partial_h Y + \partial_v k \partial_k Y \end{cases},$$

ou seja, pela matriz jacobiana da mudança de coordenadas

$$\begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u h & \partial_v h \\ \partial_u k & \partial_v k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_h \\ Y_k \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, dado um ponto $\mathbf{p} = X(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in S$, temos um vetor normal ao plano tangente em \mathbf{p} , $T_{\mathbf{p}}S$, resultado do produto vetorial dos vetores de uma base obtida a partir da parametrização¹: $X_u(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \wedge X_v(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$; cujo versor é

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \mathbf{N}(X(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)) = \frac{X_u(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \wedge X_v(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)}{\|X_u(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \wedge X_v(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\|},$$

denominado *vetor normal unitário* \mathbf{N} em \mathbf{p} . Se escolhermos outra parametrização Y de S em \mathbf{p} , podemos utilizar a relação que obtemos a pouco,

$$\begin{cases} X_u = \partial_u h Y_h + \partial_u k Y_k \\ X_v = \partial_v h Y_h + \partial_v k Y_k \end{cases},$$

para relacionar os vetores normais unitários em um ponto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= (\partial_u h Y_h + \partial_u k Y_k) \wedge (\partial_v h Y_h + \partial_v k Y_k) \\ &= (\partial_u h Y_h + \partial_u k Y_k) \wedge (\partial_v h Y_h) + (\partial_u h Y_h + \partial_u k Y_k) \wedge (\partial_v k Y_k) \\ &= (\partial_u h Y_h) \wedge (\partial_v h Y_h) + (\partial_u k Y_k) \wedge (\partial_v h Y_h) + (\partial_u h Y_h) \wedge (\partial_v k Y_k) \\ &\quad + (\partial_u k Y_k) \wedge (\partial_v k Y_k) \\ &= (\partial_u k Y_k) \wedge (\partial_v h Y_h) + (\partial_u h Y_h) \wedge (\partial_v k Y_k) \\ &= \partial_u k \partial_v h (Y_k \wedge Y_h) + \partial_u h \partial_v k (Y_h \wedge Y_k) \\ &= \partial_u h \partial_v k (Y_h \wedge Y_k) - \partial_v h \partial_u k (Y_h \wedge Y_k) \\ &= \begin{vmatrix} \partial_u h & \partial_v h \\ \partial_u k & \partial_v k \end{vmatrix} (Y_h \wedge Y_k), \end{aligned}$$

ou seja, a relação entre os unitários fica determinada pelo sinal do jacobiano da aplicação mudança de coordenadas

$$\frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \pm \frac{Y_h \wedge Y_k}{\|Y_h \wedge Y_k\|}.$$

Assim, vemos que se uma superfície regular é orientável, numa determinada orientação, em interseções de vizinhanças coordenadas não-vazias, os vetores normais unitários são os mesmos, definindo bem, portanto, uma aplicação diferenciável na superfície S que a cada ponto $\mathbf{p} \in S$, associa um vetor normal unitário ao plano tangente a S em \mathbf{p} .

¹ O símbolo \wedge aqui, bem como onde aparecer, é substituído do \times para representar o produto vetorial entre dois vetores.

Definição 9. Dada S uma superfície regular, uma aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita um *campo normal de vetores em S* quando associa a cada ponto $p \in S$ um vetor $N(p)$ ortogonal ao plano tangente a S em p . Se esta aplicação é contínua, dizemos que tal campo é um *campo normal contínuo de vetores em S* . Se for diferenciável, *campo normal diferenciável de vetores em S* .

Proposição 1. A fim de que uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ seja orientável, é necessário e suficiente que exista um *campo normal diferenciável de vetores em S* .

Demonstração. (\Rightarrow) Como vimos acima, S ser orientável é necessário para existir um campo normal diferenciável em S , e tal é, por definição, de classe C^∞ já que suas funções coordenadas são.

(\Leftarrow) Suponhamos que exista um campo normal diferenciável de vetores $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ em S . Queremos então uma família de parametrizações que cubram S e que a mudança de coordenadas entre duas quaisquer delas tenha jacobiano positivo. A partir desse campo, vamos construir uma família de parametrizações que é, na verdade, uma orientação para S :

$$\mathcal{A} = \left\{ X_p : B_p \rightarrow S, p \in S; \frac{\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p}{\|\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p\|} \equiv N \right\}.$$

Sendo uma superfície regular, dado um ponto $p \in S$, existe uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de S em p . O ponto $X^{-1}(p) \in U$ é um ponto interior ao aberto U . Desta forma, existe uma bola de centro $X^{-1}(p)$ contida em U ,

$$B_p := B(X^{-1}(p); \delta(p)) = \{q \in U; \|q - X^{-1}(p)\| < \delta(p)\},$$

a qual X restrita ainda é uma parametrização de S em p , no entanto, agora ganhando o benefício do domínio ser *conexo*. Logo, $S = \bigcup_{p \in S} X_p(B_p)$.

Note que dado $p \in S$, para cada $q \in B_p$, os vetores

$$N(X_p(q)) \text{ e } \frac{\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p}{\|\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p\|}(q)$$

são normais a S em p , ou seja, são múltiplos. Isto significa que: para todo $q \in B_p$,

$$\left\langle N(X_p(q)) \frac{\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p}{\|\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p\|}(q) \right\rangle = \pm 1,$$

já que o ângulo entre eles ou é 0 ou é π . Mas note que a expressão acima define uma função contínua em um conjunto conexo, isto é, $\phi_p : B_p \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_p(q) = \left\langle N(X_p(q)) \frac{\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p}{\|\partial_u X_p \wedge \partial_v X_p\|}(q) \right\rangle,$$

donde ela ou é constante igual a 1 ou constante igual a -1 , pois caso contrário, pela conexidade, teríamos $\phi_p(q_0) = 0$, para algum $q_0 \in B_p$, o que não pode acontecer. Portanto, $\phi_p \equiv 1$ ou $\phi_p \equiv -1$.

Se $\phi_p \equiv 1$, então os vetores normais são, na realidade, iguais e isso nos dá o que queríamos: uma parametrização de S em p cujo vetor normal em $X_p(q)$, pelo campo N previamente dado, é igual ao normal resultante do produto vetorial.

Se $\phi_p \equiv -1$, então a aplicação $X_p^* : B_p^* \rightarrow S$ tal que $X_p^*(q^*) = X_p(q)$ é ainda uma parametrização de S em p tal que $X_p^*(B_p^*) = X_p(B_p)$, onde $B_p^* := \{q^* = (r, s) \in \mathbb{R}^2; q = (s, r) \in B_p\}$, porém, agora se tem

$$N(X_p^*(q^*)) = \frac{\partial_r X_p^* \wedge \partial_s X_p^*}{\|\partial_r X_p^* \wedge \partial_s X_p^*\|}(q^*).$$

Portanto, em ambos os casos, teremos uma parametrização de S em p cujo normal resultante do produto vetorial na imagem inversa de p pela parametrização é igual ao $N(p)$. Isso nos mostra que \mathcal{A} é uma família de parametrizações cobrindo S . Além disso, dadas duas parametrizações X e Y em \mathcal{A} , cuja interseção das imagens é não-vazia, sabemos que

$$N \equiv \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \pm \frac{Y_h \wedge Y_k}{\|Y_h \wedge Y_k\|} \equiv N,$$

e portanto o jacobiano da mudança de coordenadas relativo à duas parametrizações deve ser positivo, ou seja, \mathcal{A} é uma orientação de S . \square

Exemplo 4. Se uma superfície regular é imagem inversa de um valor regular de uma função C^∞ então ela é orientável. De fato, seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ e c um valor regular seu. Sabemos que seu gradiente é um campo de vetores normais à superfície de nível. Além disso, tal é diferenciável, haja vista que as derivadas parciais de f são funções de classe C^∞ . Portanto, conclui-se que a superfície é orientável.

2.2 Aplicação Normal de Gauss

Definição 10 (Aplicação normal de Gauss). Seja S uma superfície orientável e escolha uma orientação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ para S . A superfície com uma orientação N é dita *superfície orientada*. Seja S uma superfície orientada com uma orientação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é dita *aplicação normal de Gauss de S* .

A aplicação normal de Gauss é uma aplicação C^∞ : De fato, podemos observar que localmente ela pode ser descrita como o produto vetorial das derivadas parciais de uma parametrização de S no ponto, que são funções C^∞ , logo N é uma aplicação C^∞ . Outra forma é a seguinte: sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização (pertencente à orientação) de S e ξ a projeção estereográfica, parametrização de \mathbb{S}^2 , tais que $N(X(U)) \subset \xi(\mathbb{R}^2)$. Dessa forma, $U \xrightarrow{X} S \xrightarrow{N} \mathbb{S}^2 \xleftarrow{\xi} \mathbb{R}^2$, a aplicação $\xi^{-1} \circ N \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é C^∞ já que é diferenciável $N \circ X$ é C^∞ e ξ^{-1} é a restrição de uma aplicação C^∞ à uma superfície regular, logo também é C^∞ .

2.2.1 Diferencial da aplicação de Gauss

Dada uma superfície orientada S , sua aplicação normal de Gauss é uma aplicação diferenciável entre superfícies, ou seja, $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$. Mas, como vimos, o espaço tangente à S^2 em um ponto nada mais é do que o complemento ortogonal deste, isto é, o plano $\{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, N(p) \rangle = 0\}$. Porém, este conjunto é $T_p S$ e, portanto, na verdade $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ é um operador linear em $T_p S$.

Proposição 2. A diferencial da aplicação normal de Gauss de uma superfície orientada S com uma orientação N é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização (compatível) de S em um ponto p . Sendo, para cada $X^{-1}(p) = q \in U$, $\{X_u(q), X_v(q)\}$ uma base para $T_p S$, é suficiente mostrar que $\langle dN_p(X_u(q)), X_v(q) \rangle = \langle dN_p(X_v(q)), X_u(q) \rangle$, pela linearidade de dN_p . Observemos o seguinte: $\{X_u(q), X_v(q)\}$ são vetores tangentes à S em $p = X(q)$, enquanto $N(X(q))$ é normal à S em $p = X(q)$; ambas valendo para qualquer $q \in U$. Isto nos diz que $N(X(q)) \perp \{X_u(q), X_v(q)\} \forall q \in U$, que resulta no seguinte: $\forall q \in U$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle N(X(q)), X_u(q) \rangle = 0 \\ \langle N(X(q)), X_v(q) \rangle = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \partial_v \langle N(X(q)), X_u(q) \rangle = 0 \\ \partial_u \langle N(X(q)), X_v(q) \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \langle \partial_v N(X(q)), X_u(q) \rangle + \langle N(X(q)), X_{uv}(q) \rangle = 0 \\ \langle \partial_u N(X(q)), X_v(q) \rangle + \langle N(X(q)), X_{vu}(q) \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \langle dN_p[X_v(q)], X_u(q) \rangle + \langle N(X(q)), X_{uv}(q) \rangle = 0 \\ \langle dN_p[X_u(q)], X_v(q) \rangle + \langle N(X(q)), X_{vu}(q) \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e como, por *Schwarz*, $X_{uv} = X_{vu}$, segue que

$$\langle dN_p[X_v(q)], X_u(q) \rangle = \langle dN_p[X_u(q)], X_v(q) \rangle,$$

como queríamos demonstrar. □

2.2.2 Segunda forma fundamental

À toda aplicação linear auto-adjunta podemos definir uma forma quadrática, associada à aplicação bilinear simétrica definida pelo produto interno. Assim, podemos definir a segunda forma fundamental:

Definição 11 (segunda forma fundamental). Seja S uma superfície orientada com uma orientação N . A forma quadrática $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ associada à aplicação normal de Gauss de S em um ponto p é dita *segunda forma fundamental de S em p* . Costuma-se denotar $A_p = A(p) = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

Nas direções dos vetores ortonormais que formam a base na qual dN_p possui uma matriz diagonal $\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$, a segunda forma alcança o máximo e o mínimo em $\{v \in T_p S; |v| = 1\}$, que são os inversos aditivos dos autovalores de dN_p : k_1 e k_2 . Estas são ditas *curvaturas normais principais*. Isto decorre do seguinte:

Lema 3. Se $ax^2 + 2bxy + cy^2$ restrita aos pontos tais que $x^2 + y^2 = 1$ possui um máximo em $(1, 0)$, então $b = 0$.

Demonstração. Parametrize a esfera por $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in (0, 2\pi + \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$. Substituindo, temos que em $t = 0$ a função tem um ponto crítico, isto é,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(a \cos^2(t) + 2b \cos(t) \sin(t) + c \sin^2(t) \right) = 0,$$

o que resulta

$$0 = -2a \cos(0) \sin(0) - 2b \sin^2(0) + 2b \cos^2(0) + 2c \sin(0) \cos(0) = 2b.$$

□

Proposição 3. Dada uma forma quadrática $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma base ortonormal $\{v_1; v_2\}$ do espaço vetorial E de tal forma que

$$Q(u) = k_1(u_1)^2 + k_2(u_2)^2,$$

onde $u = u_1v_1 + u_2v_2$ e k_1, k_2 são, respectivamente, o máximo e o mínimo de Q sobre $\{u \in E; |u| = 1\}$.

Demonstração. Sendo contínua num subconjunto compacto de um espaço vetorial normado de dimensão finita, Q possui um máximo na esfera unitária de E , o qual denotaremos por k_1 . Seja v_1 o ponto da esfera que atinja k_1 , ou seja, $Q(v_1) = k_1$. Tome² v_2 na esfera de tal forma que $v_2 \perp v_1$ e $Q(v_2) = k_2$. A afirmação é que a base $\{v_1, v_2\}$ realiza o que queremos: sendo uma base de E , podemos escrever um vetor qualquer $u \in E$ como $u = u_1v_1 + u_2v_2$, donde se B é a aplicação bilinear que dá origem à Q , temos que

$$\begin{aligned} Q(u) &= B(u, u) = B(u_1v_1 + u_2v_2, u_1v_1 + u_2v_2) \\ &= (u_1)^2 B(v_1, v_1) + 2u_1u_2 B(v_1, v_2) + (u_2)^2 B(v_2, v_2) \\ &= (u_1)^2 Q(v_1) + 2u_1u_2 B(v_1, v_2) + (u_2)^2 Q(v_2) \\ &= k_1(u_1)^2 + 2u_1u_2 B(v_1, v_2) + k_2(u_2)^2. \end{aligned}$$

² Por exemplo: Dado qualquer u na esfera, defina $v_2 = u - \langle u, v_1 \rangle v_1$.

Daí, vemos que, pelo Lema acima, $B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$, já que se tomarmos $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (1, 0)$, obtemos o máximo de Q na esfera em E . Portanto,

$$Q(\mathbf{u}) = k_1(\mathbf{u}_1)^2 + k_2(\mathbf{u}_2)^2.$$

Finalmente,

$$Q(\mathbf{u}) = k_1(\mathbf{u}_1)^2 + k_2(\mathbf{u}_2)^2 \geq k_2[(\mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{u}_2)^2] = k_2,$$

já que k_1 é máximo, mostrando assim que k_2 é mínimo (global). \square

Teorema 1. Seja $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ de uma superfície orientada S em um ponto $p \in S$. O fato de $-dN_p$ ser auto-adjunta garante a existência de uma base ortonormal de autovetores $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ cujos autovalores são $-k_1$ e $-k_2$ que são o máximo e o mínimo, respectivamente, da segunda forma fundamental $II_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $II_p(\mathbf{w}) = \langle -dN_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle$ restrita à esfera centrada na origem e raio 1 de T_pS (e, além disso, constituem a matriz, que é diagonal, de dN_p nesta mesma base).

Demonstração. Pela proposição anterior, sabemos que existe uma base ortonormal de T_pS , $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$, de tal forma que: se $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2$,

$$II_p(\mathbf{w}) = -k_1(\mathbf{u}_1)^2 - k_2(\mathbf{u}_2)^2,$$

onde $-k_1$ é o máximo e $-k_2$ o mínimo da segunda forma II_p sobre $\mathbb{S}[0; 1] \subset T_pS$ (aqui tomamos a enumeração de forma que $-k_1 \geq -k_2$). Destarte, resta provar que a base é constituída de auto-vetores, com os respectivos auto-valores $-k_1$ e $-k_2$. Com efeito, se $B : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ é a aplicação bilinear que dá origem à (forma quadrática) segunda forma fundamental, $B(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) := \langle -dN_p(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2 \rangle$, temos que $B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$ (proposição 3), ou seja, $0 = \langle -dN_p(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle -dN_p(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_1 \rangle$. Isto nos diz que $-dN_p(\mathbf{v}_1)$ é paralelo a \mathbf{v}_1 ou é nulo; e $-dN_p(\mathbf{v}_2)$ é paralelo a \mathbf{v}_2 ou é nulo. Se são múltiplos, para algum λ_1 e λ_2 em \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} -dN_p(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1\mathbf{v}_1 \\ -dN_p(\mathbf{v}_2) &= \lambda_2\mathbf{v}_2 \end{aligned} .$$

Porém,

$$\begin{aligned} -k_1 &= \langle -dN_p(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \lambda_1\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \lambda_1 \\ -k_2 &= \langle -dN_p(\mathbf{v}_2), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \lambda_2\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_2 \end{aligned} ,$$

isto é, os vetores da base ortonormal são autovetores, com os autovalores que queríamos. Caso seja $-dN_p(\mathbf{v}_1) = 0$, isto implica que $-k_1 = 0$, donde $-dN_p(\mathbf{v}_1) = -k_1\mathbf{v}_1$. Analogamente, caso seja $-dN_p(\mathbf{v}_2) = 0$, tem-se $-dN_p(\mathbf{v}_2) = -k_2\mathbf{v}_2$. Em todos os casos, chegamos no que queríamos demonstrar. \square

Definição 12 (Curvatura Gaussiana e Curvatura Média). Dado um ponto $p \in S$, definimos duas funções associadas à segunda forma fundamental de uma superfície regular orientada:

- A função $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$H(\mathbf{p}) := \frac{1}{2} \text{traço}(-dN_{\mathbf{p}}) = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

é denominada *Curvatura média*.

- A função $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$K(\mathbf{p}) := \det(-dN_{\mathbf{p}}) = k_1 k_2,$$

é denominada *Curvatura Gaussiana*.

Definição 13. Um ponto $\mathbf{p} \in S$ é dito

1. *Elíptico*, se $\det [dN_{\mathbf{p}}] > 0$;
2. *Hiperbólico*, se $\det [dN_{\mathbf{p}}] < 0$;
3. *Parabólico*, se $\det [dN_{\mathbf{p}}] = 0$ sem que $dN_{\mathbf{p}} \equiv 0$;
4. *Planar*, se $dN_{\mathbf{p}} \equiv 0$;
5. *Umbílico*, se $k_1 = k_2$.

Note o seguinte: $(H(\mathbf{p}))^2 = (\frac{1}{2}(k_1(\mathbf{p}) + k_2(\mathbf{p})))^2 = \frac{1}{4}(k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2)$ e $K(\mathbf{p}) = k_1(\mathbf{p})k_2(\mathbf{p})$.
Daí,

$$H(\mathbf{p})^2 - K(\mathbf{p}) = \frac{k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2}{4} = \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Portanto, obtemos que $H(\mathbf{p})^2 \geq K(\mathbf{p})$, com a igualdade ocorrendo se $k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p})$, ou seja, quando \mathbf{p} é um ponto umbílico. Caso para todo $\mathbf{p} \in S$, S superfície regular, $k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p})$, então S é dita *umbílica*. À segunda forma fundamental, analogamente à primeira, associamos determinadas funções que são ditas coeficientes da segunda forma fundamental, da seguinte forma:

Sabemos o seguinte: Dada uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$, de classe C^∞ , onde $\alpha(t) = (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$, com $(X \circ \alpha)(0) = \mathbf{p}$, o vetor $\mathbf{v} = (X \circ \alpha)'(0) \in T_{\mathbf{p}}S$; e tem-se $\mathbf{v} = dX_{\mathbf{q}}(\alpha'(0)) = \mathbf{u}'(0)X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) + \mathbf{v}'(0)X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} dN_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= dN_{\mathbf{p}}[(X \circ \alpha)'(0)] = dN_{\mathbf{p}}[dX_{\mathbf{q}}(\alpha'(0))] \\ &= dN_{\mathbf{p}}[dX_{\mathbf{q}}(\mathbf{u}'(0), \mathbf{v}'(0))] \\ &= dN_{\mathbf{p}}[\mathbf{u}'(0)X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) + \mathbf{v}'(0)X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})] \\ &= \mathbf{u}'(0)dN_{\mathbf{p}}[X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q})] + \mathbf{v}'(0)dN_{\mathbf{p}}[X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})] \\ &= \mathbf{u}'(0)N_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) + \mathbf{v}'(0)N_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

onde $N_u(\mathbf{q}) := dN_p[X_u(\mathbf{q})]$ e $N_v(\mathbf{q}) := dN_p[X_v(\mathbf{q})]$.

Substituindo o valor de $dN_p(\mathbf{v})$ na expressão da segunda forma fundamental, resulta:

$$\begin{aligned} II_p(\mathbf{v}) &= -\langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{u}'(0)N_u(\mathbf{q}) + \mathbf{v}'(0)N_v(\mathbf{q}), \mathbf{u}'(0)X_u(\mathbf{q}) + \mathbf{v}'(0)X_v(\mathbf{q}) \rangle \\ &= -[\mathbf{u}'(0)]^2 \langle N_u(\mathbf{q}), X_u(\mathbf{q}) \rangle - \mathbf{u}'(0)\mathbf{v}'(0) \langle N_u(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q}) \rangle - [\mathbf{u}'(0)\mathbf{v}'(0)] \langle N_v(\mathbf{q}), X_u(\mathbf{q}) \rangle \\ &\quad - [\mathbf{v}'(0)]^2 \langle N_v(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q}) \rangle. \end{aligned}$$

Como vimos acima, na proposição 2,

$$\langle N_v(\mathbf{q}), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle dN_p(X_v(\mathbf{q})), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle dN_p(X_u(\mathbf{q})), X_v(\mathbf{q}) \rangle = \langle N_u(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q}) \rangle,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} II_p(\mathbf{v}) &= -[\mathbf{u}'(0)]^2 \langle N_u(\mathbf{q}), X_u(\mathbf{q}) \rangle - 2[\mathbf{u}'(0)\mathbf{v}'(0)] \langle N_u(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q}) \rangle - [\mathbf{v}'(0)]^2 \langle N_v(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q}) \rangle \\ &= [\mathbf{u}'(0)]^2 \mathbf{e} + 2[\mathbf{u}'(0)\mathbf{v}'(0)] \mathbf{f} + [\mathbf{v}'(0)]^2 \mathbf{g}, \end{aligned}$$

onde, por definição,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\langle N_u(\mathbf{q}), X_u(\mathbf{q}) \rangle, \\ \mathbf{f} &= -\langle N_u(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q}) \rangle = -\langle N_v(\mathbf{q}), X_u(\mathbf{q}) \rangle, \\ \mathbf{g} &= -\langle N_v(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q}) \rangle, \end{aligned}$$

são ditos os coeficientes da segunda forma fundamental. Além disso, veja que pelo fato de $0 = \langle N(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_v(\mathbf{q}) \rangle$, onde $\mathbf{q} = X^{-1}(\mathbf{p})$, vem que

$$0 = \langle N(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle \xrightarrow{\partial_u} \mathbf{e} = -\langle N_u(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{uu}(\mathbf{q}) \rangle \quad (2.1)$$

$$0 = \langle N(\mathbf{p}), X_v(\mathbf{q}) \rangle \xrightarrow{\partial_v} \mathbf{g} = -\langle N_v(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{vv}(\mathbf{q}) \rangle \quad (2.2)$$

e se derivarmos parcialmente a equação (2.1) à esquerda em relação a \mathbf{v} (ou a equação (2.2) em relação a \mathbf{u}) vem que

$$\begin{aligned} 0 = \langle N(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle \xrightarrow{\partial_v} \mathbf{f} &= -\langle N_v(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{uv}(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{vu}(\mathbf{q}) \rangle \\ &= -\langle N_u(\mathbf{p}), X_v(\mathbf{q}) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se

$$\mathbf{e} = -\langle N_u(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{uu}(\mathbf{q}) \rangle; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{f} = -\langle N_v(\mathbf{p}), X_u(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{uv}(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{vu}(\mathbf{q}) \rangle; \quad (2.4)$$

$$\mathbf{g} = -\langle N_v(\mathbf{p}), X_v(\mathbf{q}) \rangle = \langle N(\mathbf{p}), X_{vv}(\mathbf{q}) \rangle. \quad (2.5)$$

Exemplo 5. Novamente, se considerarmos uma função $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ em um aberto \mathbf{U} do \mathbb{R}^2 , e $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, f(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ uma parametrização de seu gráfico (uma

superfície regular) conforme subseção 1.1.1, vemos que um campo normal diferenciável sobre $\text{Gr}(f)$ pode ser dado pelo versor de $X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, isto é,

$$N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|}.$$

Como $X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (1, 0, f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ e $X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 1, f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$, vem que

$$X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ 0 & 1 & f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{vmatrix} = (-f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}), -f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}), 1),$$

donde vem que

$$\|X_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge X_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| = \sqrt{1 + [f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2 + [f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2}$$

e, portanto,

$$N(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 + [f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2 + [f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2}} (-f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v}), -f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v}), 1).$$

Calculando as segundas derivadas parciais da parametrização X , vem que $X_{uu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 0, f_{uu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$, $X_{vv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 0, f_{vv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ e $X_{uv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = X_{vu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (0, 0, f_{uv}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$. Donde, pelas equações (2.3), (2.4) e (2.5), os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{f_{uu}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\sqrt{1 + [f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2 + [f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2}} e_3.$$

$$f = \langle N, X_{vu} \rangle = \frac{f_{uv}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\sqrt{1 + [f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2 + [f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2}} e_3.$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{f_{vv}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\sqrt{1 + [f_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2 + [f_v(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^2}} e_3,$$

onde $e_3 = (0, 0, 1)$, com $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U$.

Proposição 4. Se $\mathbf{p} \in S$ é um ponto elíptico de uma superfície orientada S , então existe uma vizinhança de \mathbf{p} em S tal que todos os pontos de V estão num mesmo semi-espaço determinado por $T_{\mathbf{p}}S$. Ou seja, se $\Pi_{(\mathbf{p}, N(\mathbf{p}))}^+$ é o semi-espaço determinado por $T_{\mathbf{p}}S$ na direção de $N(\mathbf{p})$ e $\Pi_{(\mathbf{p}, N(\mathbf{p}))}^-$ é o semi-espaço determinado por $T_{\mathbf{p}}S$ na direção oposta ao de $N(\mathbf{p})$, tem-se $V \subset \Pi_{(\mathbf{p}, N(\mathbf{p}))}^+$ ou $V \subset \Pi_{(\mathbf{p}, N(\mathbf{p}))}^-$.

Demonstração. Dada $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S$ uma parametrização de S em \mathbf{p} , um ponto elíptico de S , tal que $X(0, 0) = \mathbf{p}$. Podemos definir a função distância de um ponto $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{q} \in X(U)$ ao plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ da seguinte maneira:

$$d(\mathbf{q}; T_{\mathbf{p}}S) := \langle X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{p}, N(\mathbf{p}) \rangle.$$

Note que tal função faz sentido pois ela nos dá justamente a constante da projeção do vetor $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{p}$ sobre o normal $\mathbf{N}(\mathbf{p})$, que em módulo é justamente a distância de $X(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ à $T_{\mathbf{p}}S$. Por outro lado, vemos que, também, a mesma nos dá, a menos de uma multiplicação por uma constante positiva, o ângulo entre $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{p}$ e $\mathbf{N}(\mathbf{p})$, o que nos diz que para que V esteja inteiramente contida em um dos semi-espacos, é necessário e suficiente que ela não mude de sinal, ou seja, que para todo ponto o ângulo seja sempre agudo, se estiver no semi-espaco na direção de $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ ou seja sempre obtuso, caso na direção oposta à $\mathbf{N}(\mathbf{p})$. Como a parametrização é uma aplicação C^∞ , em particular nós podemos desenvolver a fórmula de Taylor de X em $(0, 0)$:

$$X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{p} = dX_{(0,0)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(X_{uu}(0, 0)u^2 + 2X_{uv}(0, 0)uv + X_{vv}(0, 0)v^2) + \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

onde $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})/\|(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|^2 \rightarrow 0$, quando $\mathbf{u}, \mathbf{v} \rightarrow 0$. Daí,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{q}; T_{\mathbf{p}}S) &= \left\langle \left[dX_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(u^2X_{uu} + 2uvX_{uv} + v^2X_{vv}) + \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right], \mathbf{N}(\mathbf{p}) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}(u^2X_{uu} + 2uvX_{uv} + v^2X_{vv}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \right\rangle + \langle \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[\langle X_{uu}, \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle u^2 + 2\langle X_{uv}, \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle uv + \langle X_{vv}, \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle v^2 \right] + \langle \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \end{aligned}$$

com as segundas derivadas parciais de X calculadas em $(0, 0)$. Donde, pelas equações (2.3), (2.4) e (2.5), vem que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{q}; T_{\mathbf{p}}S) &= \frac{1}{2} \left(eu^2 + 2fuv + gv^2 \right) + \langle \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \Pi_{\mathbf{p}}(w) + \langle \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle, \end{aligned}$$

onde w é o vetor cujas coordenadas na base $\{X_u(\mathbf{q}), X_v(\mathbf{q})\}$ são $[\mathbf{u} \ \mathbf{v}]$; ainda, $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tende a zero porque $|\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})/\|(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|^2| \|(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|^2$, donde o produto $\langle \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \rightarrow 0$, haja vista que $|\langle \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle| \leq |\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$. O fato de \mathbf{p} ser um ponto elíptico nos dá uma informação sobre $\Pi_{\mathbf{p}}$: $\Pi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) > 0 \ \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$ ou $\Pi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) < 0 \ \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$. Com efeito, sabemos que $\det [dN_{\mathbf{p}}] > 0$. Isso nos diz que as curvaturas principais, isto é, o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental, são ou ambas negativas ($k_1, k_2 < 0$) ou ambas positivas ($k_1, k_2 > 0$), nos fazendo concluir que $\Pi_{\mathbf{p}}$ não muda de sinal, seja qual for $w \in T_{\mathbf{p}}S$. Sendo assim, existe uma vizinhança V de $(0, 0)$ em U (que determina uma vizinhança de \mathbf{p} em S) de tal modo que $\Pi_{\mathbf{p}}(w) + \langle \mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle$ continue positivo, se $\Pi_{\mathbf{p}}(w)$ for sempre positiva, ou continue negativa, se $\Pi_{\mathbf{p}}(w)$ for sempre negativa. Ou seja, para qualquer ponto \mathbf{q} de tal vizinhança $d(\mathbf{q}; T_{\mathbf{p}}S) > 0$ ou para qualquer ponto de tal vizinhança $d(\mathbf{q}; T_{\mathbf{p}}S) < 0$. Sendo assim, os pontos dessa vizinhança sempre estão $\Pi_{(\mathbf{p}; \mathbf{N}(\mathbf{p}))}^+$, logo $V \subset \Pi_{(\mathbf{p}; \mathbf{N}(\mathbf{p}))}^+$, pois o ângulo entre $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ e $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ é sempre agudo, ou em $\Pi_{(\mathbf{p}; \mathbf{N}(\mathbf{p}))}^-$, logo $V \subset \Pi_{(\mathbf{p}; \mathbf{N}(\mathbf{p}))}^-$, pois nesse caso o ângulo é sempre obtuso. \square

Proposição 5. Seja S uma superfície orientada, umbílica e conexa. Então, S é um aberto em um plano ou um aberto em uma esfera.

Demonstração. Dado um ponto qualquer $\mathbf{p} \in S$, considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em \mathbf{p} com U conexo. O fato de S ser umbílica, nos diz que $k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p})$. Dessa forma, numa base ortonormal de $T_{\mathbf{p}}S$, temos que $[-dN_{\mathbf{p}}] = kI_{2 \times 2}$, onde $k = k_1 = k_2$ e $I_{2 \times 2}$ é a matriz identidade 2×2 , ou seja, para todo $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$, vemos que

$$-dN_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = k\mathbf{w}.$$

Em particular, sendo $\mathbf{q} = X^{-1}(\mathbf{p}) \in U$, vem que: para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$-N_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) := -dN_{\mathbf{p}}(X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q})) = kX_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}); \quad (2.6)$$

$$-N_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) := -dN_{\mathbf{p}}(X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})) = kX_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}), \quad (2.7)$$

que implica (por exemplo) $k(\mathbf{q}) = \langle -N_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}), X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \rangle / |X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q})|^2$, que nos mostra que k é uma função C^∞ . Voltando às equações envolvendo as derivadas parciais de N acima, podemos derivar parcialmente a primeira em relação à \mathbf{v} , enquanto a segunda em relação à \mathbf{u} , ficando com:

$$-N_{\mathbf{uv}}(\mathbf{q}) = k_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) + k(\mathbf{q})X_{\mathbf{uv}}(\mathbf{q}); \quad (2.8)$$

$$-N_{\mathbf{vu}}(\mathbf{q}) = k_{\mathbf{u}}(\mathbf{q})X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) + k(\mathbf{q})X_{\mathbf{vu}}(\mathbf{q}). \quad (2.9)$$

Pelo teorema de Schwarz, segue que

$$k_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) - k_{\mathbf{u}}(\mathbf{q})X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = 0,$$

donde, sendo os vetores $X_{\mathbf{u}}(\mathbf{q})$ e $X_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ linearmente independentes, $k_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = k_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) = 0$. Como \mathbf{p} foi tomado arbitrário (consequentemente \mathbf{q}), segue que as parciais das curvaturas principais sempre são nulas em um conjunto conexo. Dessa forma, pelo teorema do valor médio (para aplicações) segue que na realidade k é constante: $k \equiv c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Temos então duas possibilidades: $k \equiv 0$ ou $k \equiv c \neq 0$:

- Se $k \equiv 0$, resulta das equações (2.6) e (2.7) acima que $N_{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) = N_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) = 0$, $\forall \mathbf{q} \in U$. Donde, novamente, obtemos que $N \equiv N_0 \in \mathbb{R}^3$ é constante. Definimos, portanto, a função $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle N_0, X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle$. Se calcularmos as parciais de g , vemos que

$$\partial_{\mathbf{u}}g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle N_0, X_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle \equiv 0; \quad (2.10)$$

$$\partial_{\mathbf{v}}g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle N_0, X_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle \equiv 0, \quad (2.11)$$

e assim g é constante em U . Ou seja, para qualquer $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in U$, $\langle N_0, X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rangle = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, isto é, $X(U)$ está contido num plano, cujo normal é N_0 . Pela conexidade, S está contida num plano.

- Se $k \equiv c \neq 0$, então para todo $w \in T_p S$,

$$-dN_p(w) = cw.$$

Em particular, sendo $X(q) = p$, para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$, $dX_q(v) \in T_p S$, donde

$$-dN_p(dX_q(v)) = kdX_q(v),$$

o que equivale a: dada uma parametrização $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de S em p , para todo $v \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} -d(N \circ X)_q(v) = kdX_q(v) &\Leftrightarrow d(N \circ X + kX)_q \equiv 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow (N \circ X) + kX = c_2, \end{aligned}$$

para algum $c_2 \in \mathbb{R}^3$. Logo, para qualquer $q \in U$

$$\begin{aligned} (N \circ X) + kX = c_2 &\Leftrightarrow X(q) - \frac{1}{k}c_2 = -\frac{(N \circ X)(q)}{k} \\ &\Rightarrow \left\| X(q) - \frac{1}{k}c_2 \right\|^2 = \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Donde, pela conexidade, $X(U) \subset S[k^{-1}c_2; k^{-2}]$.

□

3 Funções definidas sobre superfícies

Definição 14. Uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma *função sobre a superfície S*, onde S é uma superfície orientada. Tal função sobre a superfície é dita *diferenciável em $p \in S$* caso dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S$, de S em p e uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tal que $(X \circ \alpha)(0) = p$, a função composta $f \circ X \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ seja C^∞ em $t = 0$. Assim, se $v = (X \circ \alpha)'(0) \in T_p S$,

$$df_p(v) = (f \circ X \circ \alpha)'(0).$$

Ela é dita *diferenciável sobre S* quando é diferenciável para todo $p \in S$, e representamos com $f \in C^\infty(S)$.

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável ($\in C^\infty(S)$) em S . Ou seja, dada uma parametrização X de S , a aplicação composta $f \circ X \in C^\infty$. Sabemos que sua diferencial é linear e, portanto, valem as propriedades: Para todos $v, w \in T_p S; \lambda \in \mathbb{R}; f, g \in C^\infty(S)$

- $d(f + g)_p[(\lambda v) + w] = \lambda [df_p(v) + dg_p(v)] + df_p(w) + dg_p(w)$;
- $d(fg)_p(v) = df_p(v)g(p) + f(p)dg_p(v)$.

Definição 15. Seja S uma superfície orientada. Uma aplicação diferenciável sobre S , $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, é dita um *campo de vetores sobre S*. Quando $\Psi(p) \in T_p S$, para todo $p \in S$, diz-se que Ψ é um *campo de vetores tangente sobre S*.

Definição 16. Seja uma função $f \in C^\infty(S)$. O gradiente de f em $p \in S$ é definido como o único vetor $\nabla f(p)$ em \mathbb{R}^3 tal que

$$df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

A aplicação $\nabla f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ define, portanto, um campo de vetores sobre S .

A derivada usual de um campo tangente é dada considerando-o como uma aplicação definida numa superfície, isto é:

Definição 17. $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável em $p \in S$ quando dada uma curva qualquer $\alpha : I \rightarrow S$ diferenciável sobre S com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, $\Psi \circ \alpha$ é diferenciável em $t = 0$; e a diferencial de Ψ com relação à p em um ponto v é dada por:

$$d\Psi_p(v) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Psi \circ \alpha).$$

Note que nada garante que necessariamente $d\Psi_p(T_pS) \subset T_pS$, isto é, pode acontecer de $d\Psi_p(v) \notin T_pS$ para algum $v \in T_pS$. Por esta razão, considera-se a definição de *Derivada Covariante* de um campo de vetores tangentes:

Definição 18 (Derivada covariante de campos). Seja S uma superfície orientada. Consideremos o conjunto $\mathfrak{X}(S) = \{\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ campo tangente diferenciável}\}$. Dado um campo de vetores tangente $\Psi \in \mathfrak{X}(S)$, a *derivada covariante de Ψ em p* é a aplicação dada por:

$$\nabla_v \Psi(p) := d\Psi_p(v) - \langle d\Psi_p(v), N(p) \rangle N(p),$$

onde $v \in T_pS$ e $N(p)$ ($= N(X(q))$, X parametrização de S em p e $X(q) = p$.) é aplicação normal de Gauss de S em p .

Tal definição satisfaz algumas propriedades: Para qualquer $p \in S$,

- $\nabla_{(v+w)} \Psi = \nabla_v \Psi + \nabla_w \Psi, \quad \forall v, w \in T_pS;$
- $\nabla_{\lambda v} \Psi = \lambda \nabla_v \Psi, \quad \forall v \in T_pS, \lambda \in \mathbb{R};$
- $\nabla_v (\Psi + \Phi) = \nabla_v \Psi + \nabla_v \Phi, \quad \forall \Psi, \Phi \in \mathfrak{X}(S);$
- $\nabla_v (f\Psi)(p) = df_p(v)\Psi(p) + f(p)\nabla_v \Psi(p), \quad \forall f \in C^\infty(S) \text{ e } \forall \Psi \in \mathfrak{X}(S);$
- $d(\langle \Psi, \Phi \rangle)_p = \langle \nabla_v \Psi, \Phi(p) \rangle + \langle \Psi(p), \nabla_v \Phi \rangle, \quad \forall v \in T_pS \text{ e } \Psi, \Phi \in \mathfrak{X}(S).$

Definição 19. Considere S uma superfície orientada. Dados $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathfrak{X}(S)$ dois campos tangente a S , a *derivada covariante de Ψ_2 com respeito ao campo Ψ_1 em $p \in S$* é, por definição, o campo de vetores tangente dado por:

$$\nabla_{\Psi_1} \Psi_2(p) := \nabla_{\Psi_1(p)} \Psi_2.$$

Definição 20. Dada uma função $f \in C^\infty(S)$, onde S é uma superfície orientada, podemos definir, em cada ponto $p \in S$ o *hessiano de f em p* como a aplicação

$$\text{Hess } f_p = \nabla^2 f_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle \nabla_v (\nabla f(p)), w \rangle,$$

onde $\nabla f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o campo gradiente.

Como, por definição,

$$\nabla_v (\nabla f)(p) = d(\nabla f)_p(v) - \langle d(\nabla f)_p(v), N(p) \rangle N(p),$$

vem que

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_p(v, w) &= \left\langle d(\nabla f)_p(v) - \langle d(\nabla f)_p(v), N(p) \rangle N(p), w \right\rangle \\ &= \left\langle d(\nabla f)_p(v), w \right\rangle - \langle d(\nabla f)_p(v), N(p) \rangle \langle N(p), w \rangle \\ &= \left\langle d(\nabla f)_p(v), w \right\rangle.\end{aligned}$$

Definição 21. Dada uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável sobre S , dizemos que p_0 é um extremo local de f em S se satisfaz algum dos itens abaixo:

- Existe uma vizinhança V de p_0 em S de tal forma que $f(p_0) \leq f(p)$, $\forall p \in V$. Neste caso, p_0 é dito *mínimo local*. Quando $V = S$, p_0 é dito *mínimo global*.
- Existe uma vizinhança V de p_0 em S de tal forma que $f(p_0) \geq f(p)$, $\forall p \in V$. Neste caso, p_0 é dito *máximo local*. Quando $V = S$, p_0 é dito *máximo global*.
- Se $\nabla f(p) = 0$, então p_0 é dito *ponto crítico* de f .

Teste da segunda derivada. Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada e $p_0 \in S$ um ponto crítico de f .

1. Se p_0 for um ponto de mínimo, $\nabla^2 f_{p_0}(w, w) \geq 0 \forall w \in T_{p_0}S$;
2. Se p_0 for um ponto de máximo, $\nabla^2 f_{p_0}(w, w) \leq 0 \forall w \in T_{p_0}S$;
3. Se $\nabla^2 f_{p_0}(w, w) > 0 \forall w \in T_{p_0}S, w \neq 0$, então p_0 é um mínimo local;
4. Se $\nabla^2 f_{p_0}(w, w) < 0 \forall w \in T_{p_0}S, w \neq 0$, então p_0 é um máximo local;

Exemplo 6. Se tomarmos $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ no aberto W de \mathbb{R}^3 , $S \subset W$, e $f := F|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$, então

- $\text{grad } f(p) = \nabla F(p) - \langle \nabla F(p), N(p) \rangle N(p)$;
- $\text{Hess } f_p(v, w) = \nabla^2 f_p(v, w) = \langle d(\nabla f)_p(v), w \rangle$. Utilizando a expressão obtida para o gradiente, vem que

$$\begin{aligned}d(\nabla f)_p(v) &= d \left[\nabla F - \langle \nabla F, N \rangle N \right]_p(v) \\ &= d[\nabla F]_p(v) - d \left[\langle \nabla F, N \rangle N \right]_p(v) \\ &= d[\nabla F]_p(v) - [\langle d[\nabla F]_p(v), N(p) \rangle + \langle \nabla F(p), dN_p(v) \rangle] N(p) - \\ &\quad - \langle \nabla F, N \rangle dN_p(v).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Hess } f_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \langle d[\nabla F]_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle - \langle \nabla F(\mathbf{p}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \\ &= \text{Hess } F_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \langle \nabla F(\mathbf{p}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \langle \mathbf{A}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Exemplo 7. Complementando o exemplo anterior, a função altura é definida da seguinte maneira: Dada uma superfície orientada S , fixe $\mathbf{p}_0 \in S$. A função $h_{\mathbf{p}_0} : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) := \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{N}(\mathbf{p}_0) \rangle$ é dita *função altura*.

Como sabemos, o gradiente de $h_{\mathbf{p}_0}$ é o único campo de vetores $\nabla h_{\mathbf{p}_0} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que dado $\mathbf{p} \in S$ e $\mathbf{v} \in T_p S$

$$\langle \nabla h_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}), \mathbf{v} \rangle = d(h_{\mathbf{p}_0})_p(\mathbf{v}) = d[\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{N}(\mathbf{p}_0) \rangle]_p(\mathbf{v}).$$

Se tomarmos $H_{\mathbf{p}_0} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $H_{\mathbf{p}_0} = \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{N}(\mathbf{p}_0) \rangle$, entramos no caso anterior.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \nabla h_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) &= \nabla H_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) - \langle \nabla H_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \mathbf{N}(\mathbf{p}) \\ &= \mathbf{N}(\mathbf{p}_0) - \langle \mathbf{N}(\mathbf{p}_0), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \mathbf{N}(\mathbf{p}); \end{aligned}$$

e, além disso, $\nabla h_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}$, isto é, \mathbf{p}_0 é ponto crítico de $h_{\mathbf{p}_0}$. E, já que $\nabla H_{\mathbf{p}_0} \equiv \mathbf{N}(\mathbf{p}_0)$,

$$\begin{aligned} \left(\text{Hess } h_{\mathbf{p}_0} \right)_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \left(\text{Hess } H_{\mathbf{p}_0} \right)_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \langle \nabla H_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \langle \mathbf{A}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{N}(\mathbf{p}_0), \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle \langle \mathbf{A}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\left(\text{Hess } h_{\mathbf{p}_0} \right)_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{N}(\mathbf{p}_0), \mathbf{N}(\mathbf{p}_0) \rangle \langle \mathbf{A}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = \text{II}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{v}).$$

3.1 Fórmulas de Minkowski

Definição 22. Dada uma superfície regular S , uma aplicação Φ é dita um *campo de tensores* quando para cada $\mathbf{p} \in S$,

$$\Phi(\mathbf{p}) = \Phi_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

é um endomorfismo. Além disso, diz-se que tal é diferenciável sobre S quando para qualquer campo de vetores tangente $\Psi \in \mathfrak{X}(S)$, o campo $(\Phi\Psi)(\mathbf{p})$ definido por

$$\Phi(\Psi(\mathbf{p})) := \Phi_p(\Psi(\mathbf{p})), \quad \mathbf{p} \in S,$$

for diferenciável.

Note que um campo de tensores diferenciável sobre S determina uma aplicação $\Phi : \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$, segundo a definição da diferenciabilidade de campos de tensores. Além disso, para quaisquer $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^\infty(S)$, vemos que

$$\Phi(f\Psi_1 + \Psi_2) = f\Phi(\Psi_1) + \Phi(\Psi_2).$$

Reciprocamente, se tivermos uma aplicação $\Phi : \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ tal que, para quaisquer $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^\infty(S)$,

$$\Phi(f\Psi_1 + \Psi_2) = f\Phi(\Psi_1) + \Phi(\Psi_2),$$

tal Φ determina um campo de tensores da seguinte forma: para cada $\mathbf{p} \in S$ e $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$,

$$[\Phi(\mathbf{p})](\mathbf{v}) = \Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) := \Phi[\Psi(\mathbf{p})],$$

sendo $\Psi \in \mathfrak{X}(S)$ qualquer campo de vetores tal que $\Psi(\mathbf{p}) = \mathbf{v}$.

Exemplo 8. Se S é uma superfície regular e \mathbf{N} é sua aplicação normal de Gauss, a aplicação \mathbf{A} que para cada $\mathbf{p} \in S$ associa o operador linear $\mathbf{A}_{\mathbf{p}} := -d\mathbf{N}_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$, é um campo de tensores.

Definição 23. Seja $\Psi \in \mathfrak{X}(S)$ e $\Phi : \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ um campo de tensores diferenciável sobre S . A *derivada covariante de Φ com respeito à Ψ* é o campo de tensores diferenciável $\nabla_{\Psi}\Phi : \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$, definido por

$$(\nabla_{\Psi}\Phi)(\Theta) := \nabla_{\Psi}(\Phi\Theta) - \Phi(\nabla_{\Psi}\Theta),$$

para todo $\Theta \in \mathfrak{X}(S)$. Equivalentemente, temos que

$$\nabla_{\Psi}(\Phi\Theta) = (\nabla_{\Psi}\Phi)(\Theta) + \Phi(\nabla_{\Psi}\Theta).$$

Definição 24. Seja $\Phi : \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ um campo de tensores diferenciável sobre uma superfície S . Então, dado $\mathbf{p} \in S$, para cada $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S$, define-se

$$\text{traço}(\nabla_{\mathbf{v}}\Phi) := \langle \mathbf{v}, \nabla(\text{traço}(\Phi))(\mathbf{p}) \rangle, \quad (3.1)$$

onde $\nabla(\text{traço}(\Phi))$ é o gradiente do traço de Φ .

Definição 25 (Divergente). Dado $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores diferenciável sobre S , a divergência (ou divergente) de Ψ é definida por:

$$\text{div}_S\Psi(\mathbf{p}) := \langle d\mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\mathbf{E}_1), \mathbf{E}_1 \rangle + \langle d\mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\mathbf{E}_2), \mathbf{E}_2 \rangle = \text{traço}(d\mathbf{X}_{\mathbf{p}}), \quad (3.2)$$

onde $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ é uma base ortonormal de $T_{\mathbf{p}}S$.

Observação. Caso $\Psi \in \mathfrak{X}(S)$, note que como $d\Psi_p(E_i) = \nabla_{E_i}\Psi(p) + \langle d\Psi_p(E_i), N(p) \rangle N(p)$, $\forall p \in S$, segue que

$$\langle d\Psi_p(E_i), E_i \rangle = \langle \nabla_{E_i}\Psi + \langle d\Psi_p(E_i), N(p) \rangle N(p), E_i \rangle = \langle \nabla_{E_i}\Psi, E_i \rangle,$$

donde, a equação acima fica

$$\operatorname{div}_S \Psi(p) := \langle \nabla_{E_1}\Psi, E_1 \rangle + \langle \nabla_{E_2}\Psi, E_2 \rangle.$$

Caso Ψ seja um campo qualquer, podemos escrevê-lo como: $\Psi = \Psi^T + \langle \Psi, N \rangle N$, onde Ψ^T representa a parte tangente de Ψ . Daí, vemos que a diferencial em um ponto $p \in S$ fica:

$$\begin{aligned} d\Psi_p &= d(\Psi^T)_p + d(\langle \Psi, N \rangle)_p N + \langle \Psi, N \rangle dN_p \\ &= d(\Psi^T)_p + [\langle d\Psi_p, N \rangle + \langle \Psi, dN_p \rangle] N + \langle \Psi, N \rangle dN_p. \end{aligned}$$

Dessa forma, dado $p \in S$, se $\{E_1, E_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p S$, então o divergente de Ψ fica:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S \Psi &= \sum_{i=1}^2 \langle d\Psi_p, E_i \rangle = \sum_{i=1}^2 \left\langle d(\Psi^T)_p + [\langle d\Psi_p, N \rangle + \langle \Psi, dN_p \rangle] N + \langle \Psi, N \rangle dN_p, E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle d(\Psi^T)_p, E_i \rangle + \langle \Psi, N \rangle \langle dN_p, E_i \rangle \\ &= \operatorname{div}_S(\Psi^T) + \langle \Psi, N \rangle \sum_{i=1}^2 \langle dN_p, E_i \rangle \\ &= \operatorname{div}_S(\Psi^T) + \langle \Psi, N \rangle \operatorname{traço}(dN_p). \end{aligned}$$

Portanto, dado um campo de vetores Ψ qualquer,

$$\operatorname{div}_S \Psi = \operatorname{div}_S(\Psi^T) - 2\langle \Psi, N \rangle H, \quad (3.3)$$

onde H é a curvatura média.

Teorema da Divergência. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e orientada e $\Psi \in \mathfrak{X}(S)$. Então,

$$\int_S \operatorname{div}_S \Psi \, d\rho = 0, \quad (3.4)$$

onde $d\rho$ denota o elemento de área da superfície S .

Corolário. Se S é uma superfície compacta e Ψ é um campo de vetores arbitrário, então

$$\int_S \operatorname{div}_S \Psi \, d\rho = -2 \int_S \langle \Psi, N \rangle H \, d\rho.$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\int_S \operatorname{div}_S \Psi \, d\rho = \int_S \operatorname{div}_S(\Psi^T) - 2\langle \Psi, \mathbf{N} \rangle H \, d\rho = \int_S -2\langle \Psi, \mathbf{N} \rangle H \, d\rho.$$

□

Teorema (Codazzi-Mainardi)¹. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Para todos $\Psi, \Theta \in \mathfrak{X}(S)$, vale que

$$(\nabla_\Psi \mathcal{A})(\Theta) = (\nabla_\Theta \mathcal{A})(\Psi),$$

onde $\mathcal{A} : \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)$ é (a aplicação que determina) o campo de tensores que para cada ponto $\mathbf{p} \in S$ associa o operador auto-adjunto da segunda forma fundamental, $-dN_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S \rightarrow T_{\mathbf{p}}S$.

Teorema (Fórmulas de Minkowski). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e orientada com orientação de Gauss $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ fixo, vale que: $\forall \mathbf{p} \in S$,

$$\int_S [1 + H(\mathbf{p})\langle \mathbf{p} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle] \, d\rho = 0; \quad (3.5)$$

$$\int_S [H(\mathbf{p}) + K(\mathbf{p})\langle \mathbf{p} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle] \, d\rho = 0, \quad (3.6)$$

onde H é a curvatura média e K a curvatura Gaussiana.

Demonstração. Dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ fixo, consideremos a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2$. Seu gradiente (euclidiano) é, por definição, $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Tal, portanto, define um campo de vetores (arbitrário). Segundo a equação (3.3), ficamos com o seguinte: $\forall \mathbf{p} \in S$,

$$\operatorname{div}_S(\nabla f) = \operatorname{div}_S[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T] - 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle H,$$

donde,

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{div}_S(\nabla f) \, d\rho &= \int_S \operatorname{div}_S[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T] \, d\rho - \int_S 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle H \, d\rho \\ &= - \int_S 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle H \, d\rho. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de divergente, temos que: $\forall \mathbf{p} \in S$, se $\{E_1, E_2\}$ é uma base ortonormal de $T_{\mathbf{p}}S$,

$$\operatorname{div}_S(\nabla f)(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^2 \langle d(\nabla f)_{\mathbf{p}}(E_i), E_i \rangle.$$

¹ Veja [1] ou [7]

Mas, como $\nabla f = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, vem que $\mathbf{d}(\nabla f)_p(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$, $\forall \mathbf{p} \in S$. Logo,

$$\operatorname{div}_S(\nabla f) \equiv \sum_{i=1}^2 \langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i \rangle = 2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2 \int_S 1 \, d\rho &= \int_S \operatorname{div}_S(\nabla f) \, d\rho = -2 \int_S \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle H \, d\rho \\ &\quad \Updownarrow \\ \int_S 1 + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle H \, d\rho &= 0, \end{aligned}$$

e a primeira equação está provada. Para provarmos a segunda equação, considere o campo de tensores $-\mathbf{A}$ e o campo $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top \in \mathfrak{X}(S)$. Obtemos um novo campo em $\mathfrak{X}(S)$ fazendo: $-\mathbf{A}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top] : S \rightarrow T_p S$, tal que $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{A}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top](\mathbf{p}) := -\mathbf{A}_p[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top]$. Daí, seu divergente é, $\forall \mathbf{p} \in S$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S \left[-\mathbf{A}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top] \right] &:= \sum_{i=1}^2 \langle -\nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{A}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top], \mathbf{E}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\langle -(\nabla_{\mathbf{E}_i} \mathbf{A})[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top] - \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{E}_i}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top]], \mathbf{E}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\langle -(\nabla_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top} \mathbf{A})(\mathbf{E}_i) - \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{E}_i}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top]], \mathbf{E}_i \right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^2 \left\langle (\nabla_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top} \mathbf{A})(\mathbf{E}_i), \mathbf{E}_i \right\rangle - \sum_{i=1}^2 \left\langle \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{E}_i}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top]], \mathbf{E}_i \right\rangle \\ &= -\operatorname{traço}(\nabla_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top} \mathbf{A}) - \sum_{i=1}^2 \left\langle \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{E}_i}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top]], \mathbf{E}_i \right\rangle \\ (\text{auto-adjunta}) \quad &= -\operatorname{traço}(\nabla_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top} \mathbf{A}) - \sum_{i=1}^2 \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \nabla_{\mathbf{E}_i}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top] \right\rangle. \end{aligned}$$

Tendo em vista que, por definição, a derivada covariante de $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top$ em \mathbf{E}_i é

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_i}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top] &:= \left[\mathbf{d} \left((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} \right) (\mathbf{E}_i) \right]^\top \\ &= \left[\operatorname{Id}(\mathbf{E}_i) - \left(\langle \operatorname{Id}(\mathbf{E}_i), \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{dN}(\mathbf{E}_i) \rangle \right) \mathbf{N} - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \mathbf{dN}(\mathbf{E}_i) \right]^\top \\ &= \mathbf{E}_i + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \end{aligned}$$

segue que o divergente do campo tangente $-\mathbf{A}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top]$ fica

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S \left[-\mathbf{A}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top] \right] &= -\operatorname{traço}(\nabla_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top} \mathbf{A}) - \sum_{i=1}^2 \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \mathbf{E}_i + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i) \right\rangle \\ &= -\operatorname{traço}(\nabla_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top} \mathbf{A}) - 2H - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \sum_{i=1}^2 \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \mathbf{A}(\mathbf{E}_i) \right\rangle, \end{aligned}$$

Como valem que:

$$-\text{traço}(\nabla_{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T} \mathbf{A}) = -\langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, \nabla(\text{traço } \mathbf{A}) \rangle = -\langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, 2\nabla(\mathbf{H}) \rangle;$$

e como $\langle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \mathbf{A}(\mathbf{E}_i) \rangle = \langle \mathbf{A}^2(\mathbf{E}_i), \mathbf{E}_i \rangle$, pois é auto-adjunta, $i = 1, 2$,

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{k}_1)^2 & 0 \\ 0 & (\mathbf{k}_2)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \mathbf{A}^2(\mathbf{E}_i), \mathbf{E}_i \rangle = (\mathbf{k}_i)^2;$$

ficamos com o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{div}_S \left[-\mathbf{A}[(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T] \right] &= -\text{traço}(\nabla_{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T} \mathbf{A}) - 2\mathbf{H} - \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \sum_{i=1}^2 \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \mathbf{A}(\mathbf{E}_i) \right\rangle \\ &= -\langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, 2\nabla(\mathbf{H}) \rangle - 2\mathbf{H} - \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle [(\mathbf{k}_1)^2 + (\mathbf{k}_2)^2] \\ &= -\langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, 2\nabla(\mathbf{H}) \rangle - 2\mathbf{H} - \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle [(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 - 2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2] \\ &= -\langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, 2\nabla(\mathbf{H}) \rangle - 2\mathbf{H} - \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle [4\mathbf{H}^2 - 2\mathbf{K}]. \end{aligned}$$

Guardemos um pouco esta expressão,

$$\text{div}_S \left[-\mathbf{A}[(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T] \right] = -2\langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, \nabla(\mathbf{H}) \rangle - 2\mathbf{H} - \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle [4\mathbf{H}^2 - 2\mathbf{K}], \quad (3.7)$$

e vejamos o seguinte: segundo as propriedades da derivada covariante, para o campo $\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T$ tem-se que

$$\begin{aligned} \text{div}_S(\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T) &= \sum_{i=1}^2 \left\langle \nabla_{\mathbf{E}_i} \left(\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \right), \mathbf{E}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\langle \langle \nabla \mathbf{H}, \mathbf{E}_i \rangle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T + \mathbf{H} \nabla_{\mathbf{E}_i} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, \mathbf{E}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla \mathbf{H}, \mathbf{E}_i \rangle \langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, \mathbf{E}_i \rangle + \mathbf{H} \langle \nabla_{\mathbf{E}_i} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, \mathbf{E}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla \mathbf{H}, \mathbf{E}_i \rangle \langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, \mathbf{E}_i \rangle + \mathbf{H} \langle \mathbf{E}_i + \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \mathbf{E}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla \mathbf{H}, \mathbf{E}_i \rangle \langle (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T, \mathbf{E}_i \rangle + \mathbf{H} \left[\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i \rangle + \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \langle \mathbf{A}(\mathbf{E}_i), \mathbf{E}_i \rangle \right] \\ &= \langle \nabla \mathbf{H}, (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \rangle + \mathbf{H} \left[2 + \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle 2\mathbf{H} \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$-2\langle \nabla \mathbf{H}, (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T \rangle = -2\text{div}_S(\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T) + 4\mathbf{H} \left[1 + \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \mathbf{H} \right]. \quad (3.8)$$

Denote por $\Psi := \left[-A[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T + 2H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T] \right]$. Substituindo as informações obtidas na equação (3.7), vem que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_S \Psi &= 4H[1 + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle H] - 2H - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle [4H^2 - 2K] \\ &= 2H + 2K \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Como o campo $\Psi \in \mathfrak{X}(S)$, segue que

$$0 = \int_S \operatorname{div}_S \Psi \, d\rho = \int_S 2H + 2K \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \, d\rho,$$

e, portanto,

$$\int_S H + K \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{N} \rangle \, d\rho = 0. \quad (3.9)$$

□

3.2 Teorema de Liebmann

Existem algumas características importantes que as superfícies regulares compactas possuem. Em primeiro lugar, elas são orientáveis. Podemos ver isso ao definirmos uma aplicação $g : W \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ num aberto de uma superfície regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que $g(\mathbf{x}) := \operatorname{dist}(\mathbf{x}; S) = \inf_{\mathbf{p} \in S} d(\mathbf{x}; \mathbf{p})$. Podemos ver que a superfície é a imagem inversa do valor regular 0, e portanto é orientável.

Entre os geômetras, desde o início do século XIX, era questionado se as superfícies com curvatura de Gauss constante possuíam uma relação entre si. Um matemático chamado Ernest Minding em 1839 forneceu uma resposta para tal questionamento. Ele provou o seguinte resultado, em linguagem atual:

“Toda superfície regular cuja sua curvatura de Gauss é a mesma constante são localmente isométricas”.

Uma consequência direta de tal resultado é que toda superfície com curvatura de Gauss nula é obtida dobrando um pedaço de uma região plana. Tais superfícies hoje são conhecidas como superfícies desenvolvíveis.

No trabalho no qual Minding apresenta uma demonstração do resultado citado acima, ele apresenta uma pergunta natural, a qual pode ser apresentada em linguagem atual como:

Pergunta (Minding – 1839): As superfícies regulares compactas com curvatura de Gauss constante são necessariamente rígidas?

Em 1900, um matemático chamado Karl Liebmann apresentou uma resposta positiva para tal questionamento. Liebmann provou o seguinte resultado:

Teorema de Liebmann. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e conexa com curvatura de Gauss $K : S \rightarrow \mathbb{R}$ constante. Então, a superfície S é uma esfera com raio $1/\sqrt{K}$.

Demonstração. Existe um teorema, *Teorema de Jordan-Brouwer*², que nos diz que uma superfície compacta (logo orientável) e conexa S determina duas regiões: uma limitada e outra ilimitada, tendo por fronteira comum a superfície S . Dessa forma, denomine por Ω a região compacta proveniente da separação realizada pela superfície S , com $\partial\Omega = S$. Como S é uma superfície compacta, o teorema da vizinhança tubular nos garante que ela é orientável. Podemos então tomar uma orientação de tal forma que a aplicação normal de Gauss de S , $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ aponte para a região Ω . Além disso, a compacidade nos garante a existência de, ao menos, um ponto $p_0 \in S$ que seja *elíptico*³, ou seja, os autovalores da segunda forma fundamental possuem o mesmo sinal: $K(p_0) > 0$. Mas, observe que já que neste tal ponto p_0 a curvatura Gaussiana é positiva, ela é positiva em todos os pontos da superfície S , haja vista que, por hipótese, ela é constante sobre S . Segue daí que $II_p(v) > 0$ para qualquer $p \in S$ e $v \in T_p S$ ou que $II_p(v) < 0$ para qualquer $p \in S$ e $v \in T_p S$. Caso tenhamos que II_{p_0} seja sempre positiva, como tal é a *hessiana* da função altura,

$$h_{p_0}(p) = \langle p - p_0, N(p) \rangle, \quad p \in S,$$

segue que p_0 é mínimo global de h_{p_0} , ou seja, Ω está inteiramente num semi-espço determinado por $T_{p_0} S$, sem cruzá-lo. No entanto, observe que este último fato segue inteiramente da razão da segunda forma fundamental ser sempre positiva, o que independe do ponto. Logo, isto nos diz que qualquer que seja o ponto $p \in S$, a região Ω sempre está para um mesmo lado, ou seja, no subespaço de mesma direção determinado por $T_p S$, qualquer que seja p . Caso II_p seja sempre negativa, o fato se repete, justamente porque os pontos, agora, serão sempre de máximos globais. Resulta então que dado $p \in S$,

$$\langle x - p, N(p) \rangle > 0, \quad \forall x \in \text{int.}(\Omega). \quad (3.10)$$

Em particular, dado $c \in \text{int.}(\Omega)$,

$$\langle c - p, N(p) \rangle > 0, \quad \forall p \in S.$$

Como o teorema nos garante todas as hipóteses necessárias sobre a superfície, podemos utilizar as fórmulas de Minkowski. A primeira fórmula de Minkowski nos diz que: dado $c \in \mathbb{R}^3$ fixo,

$$\int_S [1 + H(p) \langle p - c, N(p) \rangle] \, d\rho = 0,$$

² Veja [7].

³ Veja Lema 2, página 387 de [2]

que ao multiplicarmos por $\sqrt{K} > 0$, resulta que

$$\int_S [\sqrt{K(p)} + \sqrt{K(p)}H(p)\langle p - c, N(p) \rangle] d\rho = 0. \quad (3.11)$$

Como a segunda fórmula de Minkowski diz que: $\forall p \in S$,

$$\int_S [H(p) + K(p)\langle p - c, N(p) \rangle] d\rho = 0, \quad (3.12)$$

ao fazermos a subtração das equações (3.12)-(3.11), vem que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \left[[H(p) - \sqrt{K(p)}] + [K(p) - \sqrt{K(p)}H(p)]\langle p - c, N(p) \rangle \right] d\rho \\ &= \int_S \left[[H(p) - \sqrt{K(p)}] - \sqrt{K(p)}[-\sqrt{K(p)} + H(p)]\langle p - c, N(p) \rangle \right] d\rho \\ &= \int_S \left[[H(p) - \sqrt{K(p)}] [1 - \sqrt{K(p)}\langle p - c, N(p) \rangle] \right] d\rho \\ &= \int_S \left[[H(p) - \sqrt{K(p)}] [1 + \sqrt{K(p)}\langle c - p, N(p) \rangle] \right] d\rho \end{aligned}$$

Como $\langle c - p, N(p) \rangle > 0$ e $H(p) - \sqrt{K(p)} \geq 0$, segue-se que a única possibilidade é que $H(p) = \sqrt{K(p)}$ para todo $p \in S$, o que resulta que S é uma superfície umbílica. Dessa forma, vemos que a superfície é um aberto em uma esfera ou em um plano. Mas, nossa superfície é compacta. Logo, temos que S é um conjunto aberto e fechado numa esfera. Sendo conexo, conclui-se que S é, na realidade, toda a esfera e como já havíamos visto na proposição 5, tal esfera possui raio $1/\sqrt{K}$. \square

Referências

- [1] ALÍAS, L. J. *Análisis Geométrico y Geometría Global de Superficies: Una Introducción Elemental*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [2] DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 6^a ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [3] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 9^a Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [4] LIMA, E. L. *Curso de análise, vol. 1*. 14^a Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- [5] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 5^a Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- [6] LIMA, E. L. *Curso de análise, vol. 2*. 11^a Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [7] MONTIEL, S. ROS, A. *Curves and Surfaces*. 2^a ed. American Mathematical Society, 2005.