



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

VINÍCIUS GUARDIANO SOUZA

Maceió - AL
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

VINÍCIUS GUARDIANO SOUZA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio de A. Cavalcante

Maceió - AL
2022

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S729i

Souza, Vinícius Guardiano.

Introdução às superfícies mínimas / Vinícius Guardiano Souza. - 2022.
40 f. : il.

Orientador: Marcos Petrúcio de A. Cavalcante.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática :
Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática.
Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 40.

1. Superfícies mínimas. 2. Weierstrass, Pontos de. I. Título.

CDU: 514.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.matl@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Informamos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Bacharelado que o Trabalho de Conclusão de Curso do aluno **VINICIUS GUARDIANO SOUZA**, matrícula nº **17110531**, do curso de **Matemática Bacharelado**, intitulado “**Introdução às Superfícies Mínimas**”, recebeu da Banca Examinadora a nota **10,0** (dez), média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante (UFAL): 10,0

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (UFAL): 10,0

Profa. Dr. Marcos Ranieri (UFAL): 10,0

Maceió, 08 de março de 2022.


Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Documento assinado digitalmente



Marcio Henrique Batista da Silva
Data: 08/03/2022 20:10:43-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Documento assinado digitalmente



Marcos Ranieri da Silva
Data: 08/03/2022 20:06:12-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Profa. Dr. Marcos Ranieri

*Não reclama, contra o temporal
Que derrubou seu barracão
Não reclama, aguenta a mão, João
Com o Cibide aconteceu coisa pior*

*Não reclama, pois a chuva só levou a sua cama
Não reclama, aguenta a mão, João
Que amanhã tu levanta um barracão muito melhor.*

— Adoniran Barbosa, "Aguenta a mão, João".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a todos os meus familiares por todo o apoio e ressaltar a importância do meu pai, Hermann H. de Souza, e namorada, Mainah A. B. de Medeiros, em todos os momentos que me confortaram, dividiram os problemas e comemoraram as conquistas de toda a minha trajetória até aqui.

Agradeço também a todos os meus professores, tanto escolares quanto do Instituto de Matemática da UFAL, do primeiro período até o último. Em particular, ao professor do ensino médio Ezequias dos Santos Peixoto por ter me mostrado problemas bem mais desafiadores do que eu era capaz de solucionar e ter despertado o interesse matemático que carrego até hoje. Também cito o professor Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante, que me recebeu como aluno de PIBIC durante boa parte da graduação e que sempre teve bons papos, dicas e um ótimo jeito de explicar como todo o quebra cabeça da geometria se encaixava, o que me fez criar mais interesse e dedicação à área.

Agradeço aos professores Márcio Henrique Batista da Silva e Marcos Ranieri da Silva, por aceitarem participar da banca examinadora e serem generosos comigo ao contribuir com inúmeras dicas e correções para o presente trabalho.

Agradeço ao colegas da turma de 2017.1 e as tantas outras amizades que foram criadas por eventuais viagens de ônibus, cafés e partidas de xadrez. Estes são colegas que dividiram muito dos afitos e deram soluções para problemas que eventualmente apareceram.

Por fim, agradeço a todos que direta e indiretamente contribuíram para minha formação. Em particular, ao meu xará Vinicius de Moraes, Adoniran Barborsa e Noel Rosa por suas composições que me acompanharam repetidas vezes em diversas ocasiões.

RESUMO

A teoria das superfícies mínimas é um assunto fascinante que, apesar de ser bem antiga, é capaz de combinar várias áreas da matemática. Os estudos iniciais datam de 1760 com as investigações feitas por Joseph-Louis Lagrange. Em suma, ele estudou o problema de encontrar a superfície com a menor área possível cujo o bordo era uma curva de Jordan dada.

Trataremos inicialmente de uma revisão na qual abordamos o plano tangente, primeira e segunda forma fundamentais de superfícies parametrizadas. Depois, entraremos no objeto central de estudo deste trabalho, as superfícies mínimas. Desenvolveremos a representação de Ennerper-Weierstrass e suas consequências geométricas que totalizam as ferramentas iniciais para abordarmos aspectos globais como o teorema de Bernstein.

Portanto, o objetivo desse trabalho é apresentar e investigar vários exemplos importantes, além de expor e demonstrar os resultados mais clássicos da teoria.

Palavras-chave: *Superfícies, Mínimas, Representação de Weierstrass.*

ABSTRACT

The theory of minimal surfaces is a fascinating subject that, despite being quite old, is able to combine several areas of mathematics. Initial studies date back to the 1760s with investigations done by Joseph-Louis Lagrange. In short, he studied the problem of finding the surface with the smallest possible area whose edge was a given Jordan curve.

We start with a review of basic concepts such as the tangent plane, first and second fundamental forms of parameterized surfaces. Then, we will enter the central object of study of this work, the minimal surfaces. We will develop the Enneper-Weierstrass representation and its geometric consequences that complete the tools to approach global aspects of this theory such as Bernstein's theorem.

Therefore, the objective of this work is to present and investigate several important examples, in addition to exposing and demonstrating the most classic results of the theory.

Keywords: *Surfaces, Minimal, Enneper-Weierstrass Representation.*

Conteúdo

1	Superfícies Parametrizadas	2
1.1	Plano Tangente	7
1.2	Primeira Forma Fundamental	8
1.3	Segunda Forma Fundamental	9
1.4	Símbolos de Christoffel	14
2	Superfícies Mínimas	18
2.1	Superfícies Minimizantes de Área	18
2.2	Superfícies Não-Parametrizadas	22
2.3	Parâmetros Isotérmicos	24
2.4	Representação de Enneper–Weierstrass	28
2.4.1	Quantidades Geométricas em Função de Enneper-Weierstrass . .	30
3	Teorema de Bernstein	34
3.1	Superfícies Mínimas Completas	37

Capítulo 1

Superfícies Parametrizadas

Iniciaremos com a noção de uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . De modo, podemos imaginar que superfícies regulares são aquelas obtidas ao colarmos entre si pedaços deformados do plano, de tal modo que a figura resultante não contenha ponta, arestas ou auto-interseções. E que o plano definido por três pontos p_1, p_2, p_3 sobre a superfície tenha posição limite quando estes tendem para p . Mais formalmente, definimos o conceito de superfície como

Definição 1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito *superfície regular* se, para cada ponto $p \in S$, existe um aberto $V \ni p$ em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto de $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo :

1. A aplicação \mathbf{x} é de classe C^∞ . Em particular, \mathbf{x} é contínua.
2. \mathbf{x} é um homeomorfismo, assim, \mathbf{x} é uma bijeção contínua sobre sua imagem e ainda sua inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ é uma aplicação contínua.
3. A diferencial de \mathbf{x} , $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma aplicação (linear) injetiva para todo $q \in U$.

Chamaremos \mathbf{x} de *parametrização* de S em p e o conjunto $V \cap S$ é um aberto em S chamado de *vizinhança coordenada* de p em S . Por simplicidade, iremos chamar uma aplicação de diferenciável, se sua expressão possuir derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

As parametrizações, que embora introduzam elementos estranhos aos objetos geométricos, são as vezes indispensáveis para dar precisão a certas ideias, para descrever exemplos e para provar fatos gerais.

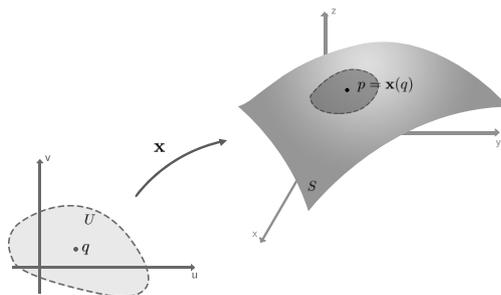


Figura 1.1

Exemplo 1. O gráfico de uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto definido por $\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)); x \in U\} \subset \mathbb{R}^3$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto. Se f for diferenciável em um conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, então seu gráfico $\text{Gr}(f)$ é uma superfície regular. De fato, considere $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2 e defina a aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Primeiramente note que \mathbf{x} é diferenciável pois cada uma de suas coordenadas são. Temos ainda que $d\mathbf{x}_q(e_1) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = \mathbf{x}_u$ e $d\mathbf{x}_q(e_2) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \mathbf{x}_v$ são vetores linearmente independentes para todo $q \in U$, logo $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva. Cada ponto $(u, v, f(u, v)) \in \text{Gr}(f)$ é a imagem de um único ponto $(u, v) \in U$. Consequentemente, \mathbf{x} é uma bijeção contínua tal que \mathbf{x}^{-1} é a restrição a $\text{Gr}(f)$ da projeção de \mathbb{R}^3 sobre o plano $z = 0$, em particular \mathbf{x}^{-1} é contínua. Portanto, $\text{Gr}(f)$ é uma superfície regular.

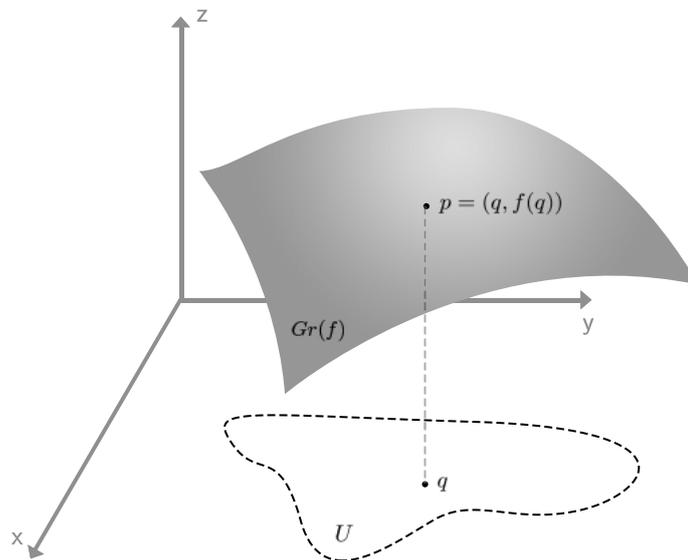


Figura 1.2

Seja $F : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável, chamamos $q \in X$ de *ponto crítico* de F se dF_q não é sobrejetiva. A imagem do ponto crítico é chamado *valor crítico*. Um ponto de \mathbb{R}^m que não é valor crítico, é dito ser *valor regular* de F . Com a ajuda do Teorema da Função Inversa podemos mostrar que se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular de \mathbb{R}^2 .

Proposição 1.1 (Mudança de Parâmetros). Considere S uma superfície regular. Dado $p \in S$, sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S , tais que $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Então a aplicação $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ é uma bijeção diferenciável e possui inversa h^{-1} diferenciável. E chamamos o difeomorfismo h de "*mudança de parâmetros*".

Demonstração. Observe que a aplicação $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ é a composição de homeomorfismos logo, h também é um homeomorfismo. Tome $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$ e defina $q = h(r)$. Como \mathbf{x} é uma parametrização podemos supor sem perda de generalidade que o determinante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ em q é não nulo. Considerando a aplicação $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$F(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + t(0, 0, 1)$, onde $(u, v) \in U$ e $t \in \mathbb{R}$ temos que F é diferenciável e que sua restrição ao conjunto $U \times \{0\}$ coincide com a parametrização \mathbf{x} . Um cálculo direto nos mostra que

$$\det(dF_q) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema da Função Inversa (veja em [9]) existe um aberto M de \mathbb{R}^3 contendo $\mathbf{x}(q)$ tal que F^{-1} é diferenciável em M . Ora, sendo \mathbf{y} contínua existe uma vizinhança $N \subset V$ de r tal que $\mathbf{y}(N) \subset M$. Assim, a composição h quando restrita ao domínio N temos que $h|_N = (F^{-1} \circ \mathbf{y})|_N$ é a composição de aplicações diferenciáveis e pela Regra da Cadeia concluímos que h é diferenciável em r . Como o ponto r foi tomado de modo arbitrário, segue que h é diferenciável em todo $\mathbf{y}^{-1}(W)$.

Podemos repetir os mesmos passos que fizemos para a aplicação \mathbf{x} mas agora para \mathbf{y} . Observando que $(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y})^{-1} = \mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x}$, vemos que a mudança de parâmetros é um difeomorfismo. \square

Definição 2. Dizemos que uma aplicação $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável e $dx_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva em cada $q \in U$ então \mathbf{x} é uma *imersão* do domínio U em \mathbb{R}^3 . Quando \mathbf{x} é um homeomorfismo com sua imagem dizemos que \mathbf{x} é um *mergulho*.

Em geral, o conceito anterior possa ser definido para variedades diferenciáveis. Embora este seja um contexto bem mais geral e rico de exemplos, esta abordagem foge do escopo do presente trabalho. Para mais referências consultar [6].

Pelo o que vimos anteriormente, o gráfico $\text{Gr}(f)$ de uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é homeomorfo ao seu domínio, então a aplicação $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é tanto uma imersão quando um mergulho. Poderíamos nos indagar o que ocorre se temos uma aplicação que seja uma imersão mas não um mergulho. Uma aplicação com tal propriedade possui auto-interseções e no próximo exemplo iremos abordar este fato

Exemplo 2 (Superfície de Enneper). A superfície parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right),$$

é conhecida como *Superfície de Enneper*. Esta é uma superfície imersa pois os determinantes menores não se anulam simultaneamente. De fato, basta notar que os determinantes menores são

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \det \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2uv \\ 2uv & 1 + u^2 - v^2 \end{pmatrix} = (1 - u^2 + v^2)(1 + u^2 - v^2) - (2uv)(2uv) \\ &= -(u^2 + v^2 - 1)(u^2 + v^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1 - u^2 + v^2 & 2u \\ 2uv & -2v \end{pmatrix} = (1 - u^2 + v^2)(-2v) - (2u)(2uv) = -2v(u^2 + v^2 + 1)$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 2uv & 2u \\ 1 - v^2 + u^2 & -2v \end{pmatrix} = (2uv)(-2v) - (2u)(1 - v^2 + u^2) = -2u(u^2 + v^2 + 1)$$

Para mostrar que a imagem de \mathbf{x} possui auto-interseções faça a mudança de parâmetros $u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta$ e pelas identidades

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad \text{e} \quad \sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

segue que

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos(3\theta), \rho \sin \theta + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\theta), \rho^2 \cos(2\theta) \right).$$

Suponha que $\mathbf{x}(\rho, \theta) = \mathbf{x}(\xi, \eta)$. Observe que

$$1 + \cos(4\theta) = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta)) = 2 \cos^2 \theta,$$

logo, a soma dos quadrados das duas primeiras coordenadas de \mathbf{x} é

$$\begin{aligned} (x(\rho, \theta))^2 + (y(\rho, \theta))^2 &= \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos(3\theta) \right)^2 + \left(\rho \sin \theta + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\theta) \right)^2 \\ &= \rho^2 - \frac{2}{3} \rho^4 (\cos \theta \cos(3\theta) - \sin \theta \sin(3\theta)) + \frac{\rho^6}{9} = \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \frac{2\rho^4}{3} \cos(4\theta) \\ &= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} + \frac{2\rho^4}{3} - \frac{2\rho^4}{3} - \frac{2\rho^4}{3} \cos(4\theta) = \left(\rho + \frac{\rho^3}{3} \right)^2 - \frac{2\rho^4}{3} (1 + \cos(4\theta)) \\ &= \left(\rho + \frac{\rho^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho^2 \cos(2\theta))^2. \end{aligned}$$

Portanto, como estamos supondo que $\rho^2 \cos(2\theta) = \xi^2 \cos(2\eta)$ então segue que $\rho + \frac{\rho^3}{3} = \xi + \frac{\xi^3}{3}$, ou ainda, $\rho = \xi$ e desse modo $\cos(2\theta) = \cos(2\eta)$. Daí temos dois casos: ou $\theta = \pi - \eta$ ou $\theta = 2\pi - \eta$. Se $\rho = \eta$ e $\theta = 2\pi - \eta$, obtemos $y(\rho, \theta) = y(\rho, 2\pi - \theta)$. O qual é equivalente a

$$\begin{aligned} \rho \sin(2\pi - \eta) + \frac{\rho^3}{3} \sin(6\pi - 3\eta) &= \rho \sin \eta + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\eta) \\ - \left(\rho \sin \eta + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\eta) \right) &= \rho \sin \eta + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\eta) \\ -y(\rho, \eta) &= y(\rho, \eta) \\ y(\rho, \eta) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, os pontos (ρ, θ) e $(\rho, 2\pi - \theta)$ estão sobre a curva $\rho \sin \theta + \frac{\rho^3}{3} \sin(3\theta) = 0$ e ainda temos $x(\rho, \theta) = x(\rho, 2\pi - \theta)$ e $z(\rho, \theta) = z(\rho, 2\pi - \theta)$. Logo, ao intersectarmos a superfície de Enneper com o plano $y = 0$ obtemos uma curva que possui auto-interseção. De modo totalmente análogo ao anterior, é possível mostrar que o caso $\rho = \xi$ e $\theta = \pi - \eta$ nos leva a conclusão de que a interseção da superfície com o plano $x = 0$ nos dá outra curva com auto-interseções. Portanto, este é um exemplo de uma superfície não-mergulhada.

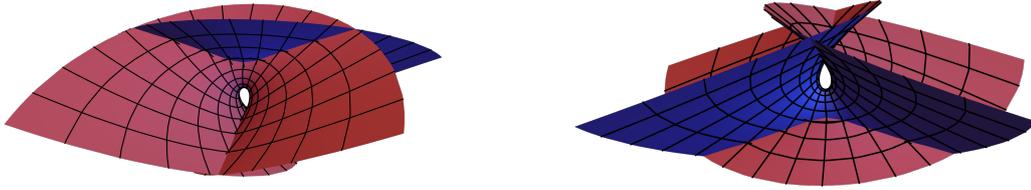


Figura 1.3: A superfície de Enneper.

Exemplo 3 (Superfícies de Revolução). Se $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ é uma parametrização de uma curva regular sobre o plano xz que não intersecta o eixo Oz então a aplicação $\mathbf{x} : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)),$$

onde $f(v) > 0$ para todo $v \in (a, b)$, define uma superfície regular. Geometricamente, a superfície definida por \mathbf{x} pode ser vista como o conjunto obtido ao girarmos uma curva dada em torno do eixo Oz .

Considerando as funções $f(v) = a \cosh(v/a) > 0$ e $g(v) = av$, onde $a > 0$ é constante, na parametrização acima obtemos a superfície conhecida como *Catenóide* que é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \sin u, a \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \cos u, av \right), \quad \text{onde } (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}.$$

Além disso,

$$\mathbf{x}_u = (-a \cosh(a/v) \sin u, a \cosh(a/v) \cos u, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_v = (\sinh(v/a) \sin u, \sinh(v/a) \cos u, a)$$

logo a condição da constante a ser positiva implica que \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v são linearmente independentes. Podemos ainda mostrar que \mathbf{x} é uma bijeção. Portanto, \mathbf{x} é um mergulho.

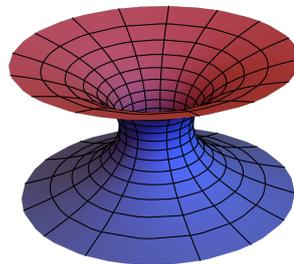


Figura 1.4: Exemplo de um Catenóide.

Exemplo 4 (Superfície Regrada). Uma família diferenciável a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$ é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor não-nulo $w(t) \in \mathbb{R}^3$, tais que ambos $\alpha(t)$ e $w(t)$ sejam diferenciáveis em t . Denote para cada $t \in I$ a reta L_t passando por $\alpha(t)$ e que é gerada por $w(t)$. Dada uma família

a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(t), w(t)\}$, a superfície parametrizada $\mathbf{x}(t, v) = \alpha(t) + vw(t)$ é chamada de *superfície regrada* gerada pela família $\{\alpha(t), w(t)\}$. Note que esta definição inclui a possibilidade de pontos singulares sobre a superfície, ou seja, pontos onde a diferencial de \mathbf{x} não é injetiva.

Geometricamente, as superfícies regradas são aquelas que tem a propriedade de que cada um de seus pontos passa uma reta que está inteiramente contida na superfície.

Considerando $\alpha(t) = bt$ e $w(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$, onde a e b são constantes não nulas, temos que a família $\{\alpha(t), w(t)\}$ gera a parametrização $\mathbf{x}(u, v) = (au \cos v, au \sin v, bv)$ cuja a imagem é conhecida como *Helicóide*.

Veja que

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a \cos v & a \sin v & 0 \\ -au \sin v & au \cos v & b \end{pmatrix} = (ab \sin v, -ab \cos v, a^2 u).$$

Daí $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = a^2(b^2 + u^2) > 0$ e portanto \mathbf{x} é uma imersão.

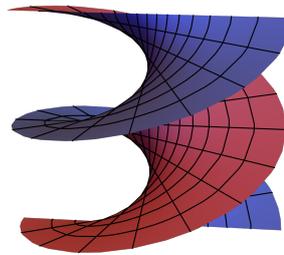


Figura 1.5: Exemplo de um Helicóide.

1.1 Plano Tangente

Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Entendemos por *vetor tangente* a S , em $p \in S$, o vetor $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.

Proposição 1.2. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2, $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $\mathbf{x}(q)$.

Demonstração. Seja w um vetor tangente em $\mathbf{x}(q)$, isto é, seja $w = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U)$ é diferenciável e $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$. Veja que a curva $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha$ é diferenciável e ainda $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = w$. Portanto, $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$.

Por outro lado, seja $w = d\mathbf{x}_q(v)$, onde $v \in \mathbb{R}^2$. É claro que v é o vetor velocidade da curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por $\gamma(t) = tv + q$. Pela definição de diferencial, $w = \alpha'(0)$, onde $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$. Isto mostra que w é um vetor tangente. \square

Pela proposição anterior, temos que o subespaço definido $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, que contém $\mathbf{x}(q) = p$, não depende da parametrização \mathbf{x} considerada. Denotaremos este por $T_p S$ e será chamado de *plano tangente* a S em p . Mas é claro que qualquer parametrização \mathbf{x} determina uma base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ de $T_p S$, chamada *base associada* a \mathbf{x} .

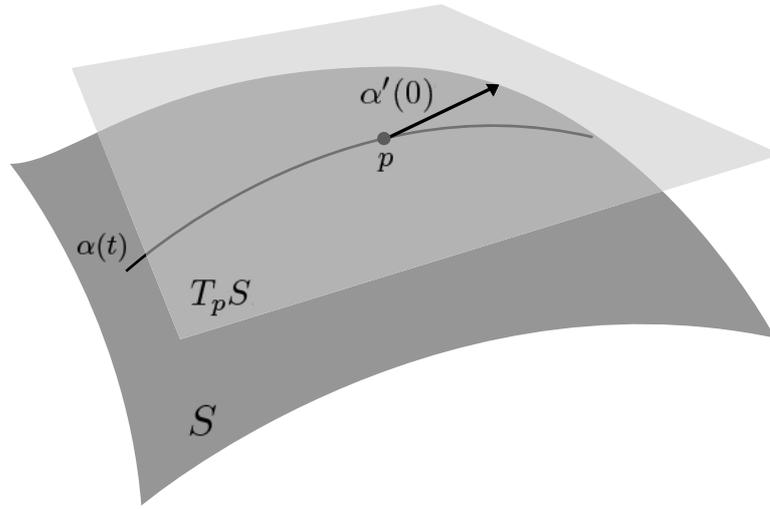


Figura 1.6

1.2 Primeira Forma Fundamental

Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Podemos ver que o produto interno canônico de \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente $T_p S$ um produto interno que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Como este produto interno é uma forma bilinear simétrica então temos uma forma quadrática $I : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ associada que é dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0.$$

Definição 3 (Primeira Forma Fundamental). A forma quadrática $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$, onde $w \in T_p S$, é chamada a *primeira forma fundamental* de S em $p \in S$.

Assim, a primeira forma fundamental nos traz uma métrica sobre a superfície e assim nos permite calcularmos comprimentos de curva, ângulos entre vetores e área de regiões sobre a superfície.

Se consideramos a base associada $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ a uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em p , então como cada vetor $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E[u'(0)]^2 + 2F[u'(0)][v'(0)] + G[v'(0)]^2 \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e $E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p$, $F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p$, $G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p$ são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$. Fazendo p variar sobre $\mathbf{x}(U)$, obtemos funções diferenciáveis $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$.

Vale salientar que se temos uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, então usando a *identidade de Lagrange* temos que

$$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|^2 = \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2 = EG - F^2$$

Exemplo 5. Vamos calcular a primeira forma fundamental de uma esfera em um ponto da vizinhança coordenada dada pela parametrização $\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$. Observe que

$$\mathbf{x}_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

Logo, $E = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = 1$, $F = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\varphi \rangle = 0$ e $G = \langle \mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}_\varphi \rangle = \sin^2 \theta$.

Portanto, se w é um vetor tangente à esfera em um ponto $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$, dado na base associada a $\mathbf{x}(\theta, \varphi)$ por $w = a\mathbf{x}_\theta + b\mathbf{x}_\varphi$, então o quadrado do módulo de w é dado por

$$\|w\|^2 = I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = a^2 + b^2 \sin^2 \theta.$$

Como foi mencionado anteriormente, a primeira forma fundamental é importante pois se conhecermos a expressão de I , então qualquer que seja a curva regular $\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$, então o seu comprimento é dado por

$$s(t) = \int_0^\ell |\alpha'(t)| dt = \int_0^\ell \sqrt{I(\alpha'(t))} dt.$$

Em particular, se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ está contida em uma vizinhança coordenada correspondente a parametrização $\mathbf{x}(u, v)$, podemos calcular o comprimento de arco de α por

$$s(t) = \int_0^\ell \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt$$

1.3 Segunda Forma Fundamental

Uma vez fixada a parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em $p \in S$, podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $q \in \mathbf{x}(U)$ por

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(q).$$

Assim, obtemos uma aplicação diferenciável $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Veja que, localmente, sempre podemos definir esta aplicação, mas para uma definição global devemos considerar a seguinte definição.

Definição 4. Diremos que uma superfície regular é *orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definidos em toda a superfície. Chamamos a escolha de tal campo N de *orientação* de S .

Outra definição de orientação sobre uma superfície regular S é considerar a existência uma família de parametrizações $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, onde $\mathbf{x}_\lambda : U_\lambda \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e U_λ são abertos, tal que $S \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{x}_\lambda(U_\lambda)$ e sempre que duas parametrizações satisfazem $\mathbf{x}_{\lambda_i}(U_{\lambda_i}) \cap \mathbf{x}_{\lambda_j}(U_{\lambda_j}) \neq \emptyset$ temos que a mudança de parâmetros $\mathbf{x}_{\lambda_j}^{-1} \circ \mathbf{x}_{\lambda_i}$ possui jacobiano positivo.

A motivação para esta definição se dá ao observarmos o seguinte caso: Dadas duas parametrizações $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, onde U e V são abertos e $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$ é não-vazio. Já mostramos na Proposição 1.1 que a mudança de parâmetros $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ é um difeomorfismo, então se estas parametrizações são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(h, k) = (y_1(h, k), y_2(h, k), y_3(h, k)),$$

podemos definir as funções $h(u, v)$ e $k(u, v)$ tais que $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{y}(h(u, v), k(u, v))$. Desse modo, as parametrizações ficam associadas pelas equações

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial v},$$

e assim podemos relacionar os vetores normais sobre $p \in S$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= (\mathbf{y}_h h_u + \mathbf{y}_k k_u) \wedge (\mathbf{y}_h h_v + \mathbf{y}_k k_v) \\ &= (\mathbf{y}_h h_u + \mathbf{y}_k k_u) \wedge (\mathbf{y}_h h_v) + (\mathbf{y}_h h_u + \mathbf{y}_k k_u) \wedge (\mathbf{y}_k k_v) \\ &= \mathbf{y}_h h_u \wedge \mathbf{y}_h h_v + \mathbf{y}_k k_u \wedge \mathbf{y}_h h_v + \mathbf{y}_h h_u \wedge \mathbf{y}_k k_v + \mathbf{y}_k k_u \wedge \mathbf{y}_k k_v \\ &= \mathbf{y}_k k_u \wedge \mathbf{y}_h h_v + \mathbf{y}_h h_u \wedge \mathbf{y}_k k_v = (h_u k_v - h_v k_u)(\mathbf{y}_h \wedge \mathbf{y}_k) \\ &= \det \left[\frac{\partial(h, k)}{\partial(u, v)} \right] (\mathbf{y}_h \wedge \mathbf{y}_k). \end{aligned}$$

Portanto, se a mudança de parâmetros for positiva, temos que

$$\frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{y}_h \wedge \mathbf{y}_k}{\|\mathbf{y}_h \wedge \mathbf{y}_k\|}.$$

Assim, podemos pensar que a orientação sobre uma superfície é, de certo modo, uma forma de estender a aplicação N sobre todas as parametrizações da família $\{\mathbf{x}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Definição 5. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, assim definida, é chamada de *aplicação normal de Gauss*.

Para todo ponto p sobre uma superfície regular temos que a diferencial de N é uma aplicação linear sobre os espaços $T_p S$ e $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$. Mas, o plano tangente à esfera \mathbb{S}^2 , em $p \in \mathbb{S}^2$, é o espaço ortogonal a p , ou seja, o plano $\{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, p \rangle = 0\}$. Porém, este conjunto é $T_p S$ e, portanto, dN_p é um operador linear de $T_p S$.

Mostremos uma interpretação geométrica para esta aplicação dN_p . Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $(N \circ \alpha)(t) = N(\alpha(t))$ está sobre a esfera \mathbb{S}^2 . O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de $T_p S$ e ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito a curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. Assim, dN_p mede o quanto N se afasta de $N(p)$, em uma vizinhança do ponto p .

Proposição 1.3. A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

Demonstração. Como já sabemos que dN_p é linear, basta verificarmos que $\langle dN_p(x), y \rangle = \langle x, dN_p(y) \rangle$ para uma base $\{x, y\}$ de \mathbb{R}^2 . Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é a base associada de $T_p S$. Se $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, temos

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(u(t), v(t)) = N_u u'(0) + N_v v'(0).$$

Em particular, $dN_p(\mathbf{x}_u) = N_u$ e $dN_p(\mathbf{x}_v) = N_v$. Veja que ao derivamos $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ e $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$, respectivamente a v e u obtemos

$$\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 0$$

Assim,

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle.$$

□

Ora, em toda aplicação linear auto-adjunta podemos definir uma forma quadrática, associada à aplicação bilinear simétrica definida pelo produto interno. Assim, podemos definir a segunda forma fundamental:

Definição 6 (Segunda Forma Fundamental). A forma quadrática II_p , definida em T_pS por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a *segunda forma fundamental* de S em p .

Definição 7. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, κ a curvatura de C em p e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a curva C e N é o vetor normal a S em p . O número $\kappa_n = \kappa \cos \theta$ é chamado de *curvatura normal* de C em p .

Mostremos uma interpretação geométrica para a segunda forma fundamental II_p . Considere uma curva regular C sobre S parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha(s)$, com $\alpha(0) = p$. Seja $N(s) = (N \circ \alpha)(s)$, então segue que $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ e ao derivamos obtemos $\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle$. Portanto,

$$II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N, \kappa n \rangle(p) = \kappa_n(p)$$

Logo, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_pS$ é igual a curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v .

Já mostramos anteriormente que a diferencial da aplicação normal é linear e auto-adjunta, então pelo Teorema Espectral segue que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $-dN_p(e_1) = k_1 e_1$ e $-dN_p(e_2) = k_2 e_2$. Além disso, k_1 e k_2 são, respectivamente, o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de T_pS , ou seja, são os valores extremos para a curvatura normal em p .

Definição 8. Chamaremos de *curvaturas principais* em p os valores de máximo e mínimo k_1, k_2 da curvatura normal em p . Já as direções correspondentes serão chamadas de *direções principais* em p .

Relembre que o traço e o determinante de uma matriz são invariantes por mudança de base. Logo, podemos definir as quantidades geométricas mais importantes desse estudo:

Definição 9. Seja $p \in S$ e $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado de *curvatura Gaussiana* K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado de *curvatura média* H de S em p . Em termos das curvaturas principais temos que

$$K = k_1 k_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Observe que se a curvatura Gaussiana, por exemplo, é negativa então as curvaturas principais tem sinais contrários e, portanto, existem curvas passando pelo ponto p cujos os vetores normais apontam para lados diferentes do plano tangente. Desse modo, podemos estudar informações sobre geometria de uma vizinhança de um ponto sobre a superfície ao considerarmos a classificação a seguir:

Definição 10. O ponto $p \in S$ é dito ser

1. *Elíptico*, se $\det(dN_p) > 0$;
2. *Hiperbólico*, se $\det(dN_p) < 0$;

3. *Parabólico*, se $\det(dN_p) = 0$, mas $dN_p \neq 0$;

4. *Planar*, se $dN_p \equiv 0$;

5. *Umbílico*, se $k_1 = k_2$;

Proposição 1.4. Toda superfície compacta em \mathbb{R}^3 admite um ponto elíptico.

Demonstração. Com efeito, seja S uma superfície compacta em \mathbb{R}^3 e considere a função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p\|^2$. Como f é contínua e S é compacta, existe um ponto $p_0 \in S$ tal que $f(p_0)$ é máximo. Afirmamos que p_0 é um ponto elíptico de S . Seja $v \in T_{p_0}S$ um vetor unitário e considere uma curva regular e parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $0 \in I$, $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha'(0) = v$. Diante disso, a função $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g = f \circ \alpha$ admite um máximo em 0, assim temos que $g'(0) = 0$ e $g''(0) \leq 0$. Mas como $g(s) = \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle$, então $0 = g'(0) = 2\langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = 2\langle v, p_0 \rangle$, isto é, p_0 é normal a S em p_0 . Pelo fato da curva ser regular, temos que $p_0 \neq 0$, logo $p_0/\|p_0\|$ é um vetor normal a S em p_0 . Temos ainda,

$$0 \geq g''(0) = 2\langle \alpha''(0), \alpha(0) \rangle + 2\langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = 2(\langle \alpha''(0), p_0 \rangle + 1)$$

então $\langle \alpha''(0), p_0 \rangle \leq -1$. Assim,

$$k_n(v) = \langle \alpha''(0), p_0 \rangle \leq -\frac{1}{\|p_0\|},$$

onde $k_n(v)$ é a curvatura normal em v com respeito ao vetor unitário $p_0/\|p_0\|$. Em particular, as curvaturas principais em p_0 satisfazem $k_1(p_0) \leq -1/\|p_0\|$ e $k_2(p_0) \leq -1/\|p_0\|$, donde temos que a curvatura Gaussiana de S em p_0 satisfaz

$$K(p_0) = k_1(p_0)k_2(p_0) \geq \frac{1}{\|p_0\|^2} > 0.$$

Portanto p_0 é um ponto elíptico de S , como queríamos demonstrar. \square

Corolário 1.5. Não existe superfície compacta tal que $H = 0$ para todo $p \in S$.

De modo análogo a exposição da primeira forma fundamental, também podemos associar funções diferenciáveis à segunda forma fundamental do seguinte modo: Considere $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S e uma curva $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ tal que $(\mathbf{x} \circ \alpha)(0) = p$. Assim, pondo $q = \mathbf{x}^{-1}(p)$, de $v = (\mathbf{x} \circ \alpha)'(0) \in T_pS$ segue $v = d\mathbf{x}_q(\alpha'(0)) = u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q)$ e daí

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= dN_p((\mathbf{x} \circ \alpha)'(0)) = dN_p(d\mathbf{x}_q(\alpha'(0))) = dN_p(u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q)) \\ &= u'(0)dN_p(\mathbf{x}_u(q)) + v'(0)dN_p(\mathbf{x}_v(q)) = u'(0)N_u(q) + v'(0)N_v(q) \end{aligned}$$

Logo, usando o fato de dN_p ser auto-adjunta segue que sobre a base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ a segunda forma fundamental é expressa por

$$\begin{aligned} II_p(v) &= -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle u'(0)N_u(q) + v'(0)N_v(q), u'(0)\mathbf{x}_u(q) + v'(0)\mathbf{x}_v(q) \rangle \\ &= (u'(0))^2e - 2u'(0)v'(0)f + (v'(0))^2g \end{aligned}$$

onde

$$e = -\langle N_u(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle, \quad f = -\langle N_u(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle = -\langle N_v(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle \quad \text{e} \quad g = -\langle N_v(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle$$

são as funções conhecidas como coeficientes da segunda forma fundamental. Além disso, usando que $\langle N(p), \mathbf{x}_u(q) \rangle = \langle N(p), \mathbf{x}_v(q) \rangle = 0$ nos vem ao derivarmos que

$$e = \langle N(p), \mathbf{x}_{vv}(q) \rangle, \quad f = \langle N(p), \mathbf{x}_{uv}(q) \rangle = \langle N(p), \mathbf{x}_{vu}(q) \rangle \quad \text{e} \quad g = \langle N(p), \mathbf{x}_{vv}(q) \rangle.$$

Proposição 1.6. A curvatura Gaussiana pode ser determinada, em função dos coeficientes da primeira e segunda forma, por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (1.1)$$

e a curvatura média por

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \quad (1.2)$$

Demonstração. Ora, já sabemos que as curvaturas principais são autovalores de $-dN_p$, logo estas são raízes do polinômio $\det(dN_p + \lambda I) = 0$, ou ainda,

$$\lambda^2 + \text{tr}(dN_p)\lambda + \det(dN_p) = 0.$$

Assim, como $k_1 \geq k_2$ temos que

$$k_1 = \frac{-\text{tr}(dN_p) + \sqrt{\Delta}}{2} = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{-\text{tr}(dN_p) - \sqrt{\Delta}}{2} = H - \sqrt{H^2 - K}$$

onde $\Delta = \text{tr}(dN_p)^2 - 4\det(dN_p)$. Veja que se $dN_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ou seja, $N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v$ e $N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v$ implicam que

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G & -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F & -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

E como $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$ segue que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & gF - fG \\ eF - fE & fF - gE \end{pmatrix}.$$

E portanto,

$$K = k_1 k_2 = \det(dN_p) = \det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \left(\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

e

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2} \text{tr}(dN_p) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

□

Exemplo 6. Considere a superfície de revolução parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)),$$

onde $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (a, b)$ e $\varphi(v) > 0$. Veja que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= (-\varphi(v) \sin u, \varphi(v) \cos u, 0), & \mathbf{x}_v(u, v) &= (\varphi'(v) \cos u, \varphi'(v) \sin u, \psi'(v)) \\ \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (-\varphi(v) \cos u, -\varphi(v) \sin u, 0), & \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= (\varphi''(v) \cos u, \varphi''(v) \sin u, \psi''(v)) \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva geratriz é parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, que $G = (\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$. Portanto, a segunda forma fundamental é dada por

$$e = \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \begin{pmatrix} -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \\ -\varphi \cos u & -\varphi \sin u & 0 \end{pmatrix} = \frac{-\varphi^2 \psi'}{\varphi} = -\varphi \psi',$$

$$f = 0,$$

$$g = \frac{\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv} \rangle}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det \begin{pmatrix} -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \psi' \\ \varphi'' \cos u & \varphi'' \sin u & \psi'' \end{pmatrix} = \varphi'' \psi' - \varphi' \psi''.$$

Mas ao derivarmos $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$ obtemos $\varphi' \varphi'' = -\psi' \psi''$ e daí a curvatura Gaussiana é dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\psi'(\varphi'' \psi' - \varphi' \psi'')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2 \varphi + (\varphi')^2 \varphi''}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}$$

Note ainda que como temos $F = f = 0$, então as curvaturas principais são dadas por $\frac{e}{E} = -\frac{\psi' \varphi}{\varphi^2} = -\frac{\psi'}{\varphi}$ e $\frac{g}{G} = \varphi'' \psi' - \varphi' \psi''$. Desse modo,

$$H = \frac{eG + gE}{2EG} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = \frac{\varphi(\psi' \varphi'' - \psi'' \varphi') - \psi'}{2\varphi}.$$

1.4 Símbolos de Christoffel

Considere uma parametrização regular $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e defina $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$, assim sabemos que $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ forma uma base para o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Temos ainda, pela segunda forma fundamental que as componentes normais de \mathbf{x}_{uu} , \mathbf{x}_{uv} e \mathbf{x}_{vv} são dadas por

$$\mathbf{x}_{uu}^\perp = e\mathbf{N}, \quad \mathbf{x}_{uv}^\perp = f\mathbf{N}, \quad \mathbf{x}_{vv}^\perp = g\mathbf{N}$$

Porém para algumas aplicações se faz necessário também conhecermos as componentes tangenciais \mathbf{x}_{uu}^\top , \mathbf{x}_{uv}^\top e \mathbf{x}_{vv}^\top . Como \mathbf{x} é regular e $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ determina uma base do espaço $T_p S$ então existem as funções Γ_{ij}^k , onde $i, j, k = 1, 2$ tais que

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + f\mathbf{N} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + f\mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + g\mathbf{N} \end{cases}$$

como \mathbf{x} é diferenciável, então $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, assim, iremos definir $\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k$. Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados de *símbolos de Christoffel* de S na parametrização \mathbf{x} .

Proposição 1.7. Se $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização regular. Então

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u, & \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v, & \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_v, & \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v, \end{cases}$$

Demonstração. Basta observarmos que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \|\mathbf{x}_u\|^2 = E$, $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = F$ e $\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \|\mathbf{x}_v\|^2 = G$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \|\mathbf{x}_u\|^2 = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \|\mathbf{x}_u\|^2 = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \|\mathbf{x}_v\|^2 = \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv} \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_v, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \|\mathbf{x}_v\|^2 = \frac{1}{2} G_v. \end{aligned}$$

□

Corolário 1.8. Se $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização regular. Então

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}, \end{cases}$$

Demonstração. Basta resolvermos os sistemas a seguir

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_u}{2} \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{E_v}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{E_v}{2} \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{G_u}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{G_u}{2} \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{G_v}{2} \end{cases}.$$

□

Definição 11. Uma aplicação $f : S \rightarrow \bar{S}$ é dita ser uma *isometria* se f é um difeomorfismo e para todo $p \in S$ tenhamos

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle,$$

para quaisquer $w_1, w_2 \in T_p S$. Neste caso, dizemos que S é *isométrica* a \bar{S} .

Desse modo, um difeomorfismo f é uma isometria se a diferencial df preserva o produto interno. Neste caso, temos que a primeira forma fundamental satisfaz

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = \langle df_p(w), df_p(w) \rangle = I_{f(p)}(df_p(w)),$$

para todo $w \in T_p S$. Reciprocamente, se um difeomorfismo f preserva a primeira forma fundamental, então para todos $w_1, w_2 \in T_p S$ temos

$$\begin{aligned} 2 \langle w_1, w_2 \rangle &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{f(p)}(df_p(w_1 + w_2)) - I_{f(p)}(df_p(w_1)) - I_{f(p)}(df_p(w_2)) \\ &= 2 \langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, f é uma isometria.

Definição 12. Uma aplicação $f : V \subset S \rightarrow \bar{S}$ de uma vizinhança V de $p \in S$ é dita *isometria local* se existe uma vizinhança \bar{V} de $f(p) \in \bar{S}$ tal que $f : V \rightarrow \bar{V}$ é uma isometria. Neste caso, diremos que S é *localmente isométrica* a \bar{S} . Se esta relação for simétrica, então S e \bar{S} são *superfícies localmente isométricas*.

Embora tenhamos desenvolvido uma expressão para a curvatura Gaussiana que dependa da segunda forma fundamental, um extraordinário teorema demonstrado por Gauss nos diz que esta curvatura é determinada apenas pela primeira forma fundamental.

Teorema Egregium (Gauss, 1827). A curvatura Gaussiana K de uma superfície é invariante por isometrias locais.

Uma prova deste resultado pode ser encontrado em [5]. Este teorema afirma que a curvatura Gaussiana de uma superfície fica completamente determinada pela medição de ângulos, distâncias e suas proporções na própria superfície, sem qualquer referência à forma particular segundo a qual a superfície esteja situada no ambiente do espaço tridimensional euclidiano. Assim, a curvatura gaussiana é um invariante intrínseco das superfícies regulares.

Exemplo 7 (Aplicações do Teorema Egregium).

- i) A parametrização $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ é tal que $E = G = 1$ e $F = 0$. Assim, \mathbf{x} é uma isometria local entre o plano e o cilindro. Porém, \mathbf{x} não preserva nem a segunda forma fundamental nem a curvatura média.
- ii) A esfera e o plano não são localmente isométricas, pois curvatura da esfera é positiva e a do plano é nula. Este resultado pode ser interpretado ao afirmarmos que qualquer tentativa de “planificar” um mapa terrestre sempre existirá uma distorção entre as distâncias.
- iii) Considere a parametrização do catenóide sendo a superfície gerada pela rotação da catenária $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ao longo do eixo Oz , isto é,

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

$0 < u < 2\pi, -\infty < v < +\infty$. Como temos,

$$x_u = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_v = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a)$$

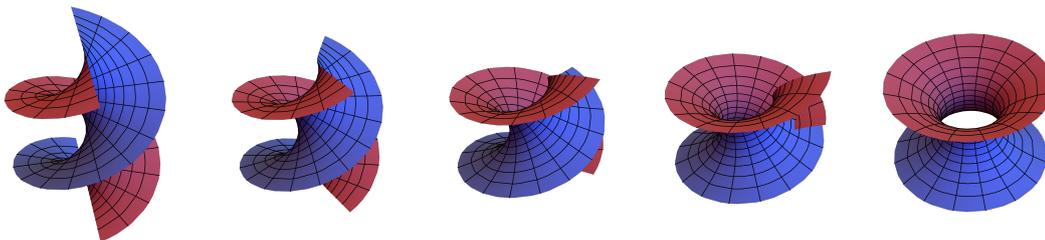


Figura 1.7: A deformação do Helicóide no Catenóide.

é possível verificar que $E_x = G_x = (a \cosh v)^2$ e $F_x = 0$. Considere a parametrização para o helicóide dada por $\mathbf{y}(p, q) = (q \cos p, q \sin p, aq)$ onde $(p, q) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Veja que a mudança de parâmetros $p = u$ e $q = a \sinh u$ tem jacobiano $\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} = a \cosh v > 0$. Assim, ao reparametrizarmos $\mathbf{y}(p, q)$ temos que $\mathbf{y}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, av)$ donde segue

$$\mathbf{y}_u = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, a) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_v = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0)$$

e os coeficientes da primeira forma fundamental são $E_y = G_y = (a \cosh v)^2$ e $F_y = 0$. Portanto, o catenóide e helicóide são superfícies localmente isométricas. Mais geralmente, temos que $H_x = H_y = 0$ e definindo para cada $t \in [0, 2\pi]$ a parametrização

$$\mathbf{z}_t = (\cos t)\mathbf{x} + (\sin t)\mathbf{y} \tag{*}$$

todas as superfícies da família a 1-parâmetro (*) tem a mesma forma fundamental e são tais que $H_{z_t} = 0$. Logo, podemos deformar o helicóide no catenóide por uma família de superfícies localmente isométricas.

Capítulo 2

Superfícies Mínimas

2.1 Superfícies Minimizantes de Área

Vamos agora discutir um pouco sobre o problema que iniciou o desenvolvimento da teoria das superfícies mínimas. A saber, o problema de caracterizar as superfícies que tem a menor área dentre todas que possuem a mesma fronteira. Mais especificamente, iremos abordar o seguinte caso:

Sejam S uma superfície regular definida por $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um domínio em \mathbb{R}^2 , considere a curva fechada Γ em U que limita a fronteira de $D \subset U$ e $\overline{D} \subset U$. Suponhamos que a superfície Σ , definida por \mathbf{x} quando restrita a D , possui área menor ou igual a de qualquer outra superfície Σ_λ definida por $\mathbf{x}_\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, que possua a mesma fronteira.

Primeiro iremos considerar apenas variações normais. Seja N o normal sobre a superfície e consideremos uma função diferenciável $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e pra cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos a aplicação $\mathbf{x}_\lambda(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \lambda h(u, v)N(u, v)$ que é chamada de *variação normal da superfície* determinada por h . Então temos que

$$\frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial u} = \mathbf{x}_u + \lambda h_u N + \lambda h N_u \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial v} = \mathbf{x}_v + \lambda h_v N + \lambda h N_v$$

Assim, a primeira forma fundamental da superfície Σ_λ é dada por

$$\begin{aligned} E^\lambda &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial u} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + 2\lambda h \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + \lambda^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + \lambda^2 h_u h_u, \\ F^\lambda &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial v} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + 2\lambda h \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \lambda^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + \lambda^2 h_u h_v, \\ G^\lambda &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}_\lambda}{\partial v} \right\rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle + 2\lambda h \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + \lambda^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + \lambda^2 h_v h_v. \end{aligned}$$

Mas como $\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle = -e$, $\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle = -f$ e $\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle = -g$, então usando a expressão para curvatura média da Proposição 1.6 segue que

$$\begin{aligned} E^\lambda G^\lambda - (F^\lambda)^2 &= EG - F^2 - 2\lambda h(gE - 2fF + eG) + \lambda^2 \\ &= (EG - F^2) + (-4hH(EG - F^2))\lambda + R\lambda^2 \end{aligned}$$

onde R é uma função contínua de u, v e λ em U . Como estamos considerando uma parametrização, então $EG - F^2 > 0$ e R atinge seu mínimo em \overline{D} . Assim, existe $\varepsilon > 0$

tal que se $|\lambda| < \varepsilon$, então $E^\lambda G^\lambda - (F^\lambda)^2 > 0$. Logo, para λ suficientemente pequeno \mathbf{x}_λ é uma superfície parametrizada regular. Temos ainda que a área de Σ_λ é dada por $A(\lambda) = \iint_D \sqrt{E^\lambda G^\lambda - (F^\lambda)^2} dudv$. Portanto, ao derivarmos sob o sinal de integração e olhar a derivada em $\lambda = 0$, temos que

$$\begin{aligned} A'(0) &= \iint_D \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \sqrt{E^\lambda G^\lambda - (F^\lambda)^2} dudv = \iint_D \frac{-4hH(EG - F^2)}{2\sqrt{EG - F^2}} dudv \\ &= -2 \iint_D hH\sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

Esta fórmula é conhecida como *primeira variação da área*.

Como Σ é um mínimo do funcional área, então devemos ter $A'(0) = 0$. Suponha, por absurdo, que exista um ponto $q \in D$ tal que $H(q) \neq 0$. Então basta considerar uma função $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $h(q) = H(q)$ e possua o mesmo sinal de H em uma pequena vizinhança de q e seja zero fora dela, pois assim teríamos $A'(0) < 0$, o que é uma contradição. Portanto, devemos ter $H = 0$. Reciprocamente, se $H = 0$ então pela primeira variação da área temos que $A'(0) = 0$. Assim acabamos de demonstrar a seguinte proposição

Proposição 2.1. Para que uma superfície regular seja um ponto crítico do funcional área é necessário, e suficiente, que sua curvatura média seja identicamente nula.

Definição 13. Diremos que uma superfície regular é uma *superfície mínima* se a sua curvatura média é identicamente nula.

Exemplo 8. Vamos considerar superfícies não-paramétricas, isto é, como um gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$ sobre um domínio $U \subset \mathbb{R}^2$. Tal superfície pode ser descrita pela parametrização $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Veja que $\mathbf{x}_u = (1, 0, f_u)$ e $\mathbf{x}_v = (0, 1, f_v)$. Desse modo, a primeira forma fundamental é dada por

$$E = 1 + (f_u)^2, \quad F = f_u f_v \quad \text{e} \quad G = 1 + (f_v)^2.$$

Assim, $N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2}} (-f_u, -f_v, 1)$ é um campo normal unitário sobre a superfície e os coeficientes da segunda forma, por esta orientação, são dados por

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \quad \text{e} \quad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Portanto, as expressões para as curvatura Gaussiana e curvatura média são

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \quad \text{e} \quad H = \frac{(1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2)f_{uu}}{2\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Desse modo, a condição $H = 0$ é equivalente a equação diferencial parcial não-linear elíptica de segunda ordem

$$(1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2)f_{uu} = 0 \quad (2.1)$$

conhecida como *Equação das Superfícies Mínimas*.

Para continuarmos nosso estudos seria interessante encontrarmos alguns exemplos não triviais de superfícies mínimas. Com a teoria desenvolvida até o momento iremos procurar as superfícies mínimas de rotação, regradas e com alguma outra propriedade em sua expressão.

Teorema 2.1. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima de revolução, então S está contida em um plano ou num catenóide.

Demonstração. Como S é uma superfície de revolução, então esta pode ser parametrizada localmente por $\mathbf{x}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$ onde a curva geratriz é $\alpha(t) = (\varphi(t), \psi(t))$. Assim, temos os seguintes casos para considerar

Caso 1: Se $\psi' = 0$ então ψ é constante, portanto S é a superfície de rotação gerada por uma reta. Portanto, S é um plano.

Caso 2: Se $\psi'(t_0)$ não se anula, então pelo teorema da função inversa temos que ψ admite uma inversa em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$. Defina $\bar{\alpha}(t) = \alpha(\psi^{-1}) = (h(t), t)$, onde $h = \varphi \circ \psi^{-1}$ e podemos considerar uma nova parametrização $\mathbf{y}(u, v) = (h(v) \cos u, h(v) \sin u, v)$. Pelas fórmulas expostas no Exemplo 6 temos que as curvaturas principais são

$$\frac{e}{E} = \frac{-1}{h\sqrt{1+(h')^2}} \quad \text{e} \quad \frac{g}{G} = \frac{h''}{[1+(h')^2]^{2/3}}.$$

Donde a condição $H = 0$ implica que

$$\frac{e}{E} + \frac{g}{G} = 0 \iff h''h = 1 + (h')^2 \iff \frac{2h'h''}{1+(h')^2} = \frac{2h'}{h},$$

e após integrarmos nos vem que

$$\ln(1+(h')^2) = \ln h^2 - \ln c^2 \iff 1+(h')^2 = \frac{h^2}{c^2} \iff \frac{h'/c}{\sqrt{(h/c)^2 - 1}} = \frac{1}{c}.$$

Daí, $\cosh^{-1}(h/c) = \frac{v}{c} + b$, ou ainda, $h(v) = c \cosh\left(\frac{c}{v} + b\right)$ e portanto S é parte de um catenóide. \square

Teorema 2.2. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima regrada não-planar, então S está contida em um helicóide.

Demonstração. Se S é uma superfície regrada então esta pode ser localmente parametrizada por $\mathbf{x}(t, u) = \alpha(t) + uw(t)$, onde $\|w(t)\|^2 = 1$ e $\|w'(t)\|^2 = 1$. Assim, a função $\left\| \frac{\partial \mathbf{x}(t, u)}{\partial t} \right\|^2 = \|\alpha'(t) + uw'(t)\|^2$ tem mínimo em $u = -\langle \alpha'(t), w'(t) \rangle$. Ponha

$$\beta(t) = \alpha(t) - \langle \alpha'(t), w(t) \rangle w(t)$$

então a parametrização

$$\mathbf{y}(t, u) = \beta(t) + uw(t)$$

ainda descreve S . Esta curva se chama *curva de estrição* e esta satisfaz $\langle \beta'(t), w'(t) \rangle = 0$. Note que nos pontos da curva diretriz β , o plano tangente é gerado por $\beta'(t), w(t)$ e o vetor $w'(t)$ é o normal unitário a este plano. Ao calcularmos a primeira e segunda forma obtemos:

$$E = \langle \beta' + uw', \beta' + uw' \rangle = \langle \beta', \beta' \rangle + u^2,$$

$$F = \langle \beta', w \rangle,$$

$$G = 1,$$

$$e = [\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle + u(\langle \beta'', w' \wedge w \rangle + \langle w'', \beta' \wedge w \rangle) + u^2 \langle w'', w' \wedge w \rangle] / \|\mathbf{y}_t \wedge \mathbf{y}_u\|,$$

$$f = \langle w', \beta' \wedge w \rangle / \|\mathbf{y}_t \wedge \mathbf{y}_u\|,$$

$$g = 0.$$

Então como S é mínima temos que:

$$\langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle - 2 \langle \beta', w \rangle \langle w', \beta' \wedge w \rangle + u(\langle \beta'', w' \wedge w \rangle + \langle w'', \beta' \wedge w \rangle) + u^2 \langle w'', w' \wedge w \rangle = 0$$

Como esta última equação deve ser satisfeita para todo u , então temos as seguintes equações

$$\begin{cases} \langle \beta'', \beta' \wedge w \rangle - 2 \langle \beta', w \rangle \langle w', \beta' \wedge w \rangle = 0 & (1) \\ \langle \beta'', w' \wedge w \rangle + \langle w'', \beta' \wedge w \rangle = 0 & (2) \\ \langle w'', w' \wedge w \rangle = 0 & (3) \end{cases}$$

Veja que β' e w geram o espaço tangente, então a primeira equação implica que a componente normal do vetor β'' é $2 \langle \beta', w \rangle w'$ e daí podemos escrever

$$\beta'' = a_1 \beta' + a_2 w + 2 \langle \beta', w \rangle w'. \quad (4)$$

Como $\|w'\|^2 = 1$, então derivando obtemos $\langle w'', w' \rangle = 0$, que implica que w'' é um vetor tangente. Desse modo, podemos escrever $w'' = a_3 \beta' + a_4 w$. Porém, desde que $\langle \beta', w' \wedge w \rangle \neq 0$, a equação (3) nos dá $a_3 = 0$ e $w'' = a_4 w$. Mais ainda, desde $\langle w', w \rangle = 0$ então ao derivarmos nos vem $0 = \langle w'', w \rangle + \langle w', w' \rangle = \langle w'', w \rangle + 1$, e portanto,

$$w'' = -w. \quad (5)$$

Aplicando (4) e (5) em (2), obtemos $a_1 = 0$ e $\beta'' = a_2 w + 2 \langle \beta', w \rangle w'$. Derivando $\langle \beta', w' \rangle = 0$, obtemos

$$0 = \langle \beta', w' \rangle' = \langle \beta'', w' \rangle + \langle \beta', w'' \rangle = 2 \langle \beta', w \rangle - \langle \beta', w \rangle = \langle \beta', w \rangle$$

e daí $\beta'' = a_2 w$. Por fim, derivando $\langle \beta', w \rangle = 0$, segue

$$0 = \langle \beta', w \rangle' = \langle \beta'', w \rangle + \langle \beta', w' \rangle = a_2$$

ou ainda $\beta'' = 0$.

Em resumo, obtemos as seguintes propriedades:

- i. A curva diretriz é uma reta pois $\beta'' = 0$, logo existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\beta(t) = (0, 0, at + b)$.
- ii. Como $\langle \beta', w \rangle = 0$ e w é unitário, então existe $\varphi(t)$ tal que $w(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), 0)$.
- iii. O vetor direção roda com respeito a reta diretriz com velocidade constante já que $\|w'\|^2 = 1$. Desse modo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) = t + c$.

Portanto,

$$\mathbf{y}(t, u) = \beta(t) + uw(t) = (\cos(t + c), \sin(t + c), at + b),$$

onde $a \neq 0$. Portanto, S está contida em um pedaço de um helicóide.

2.2 Superfícies Não-Parametrizadas

Analogamente, podemos apresentar um conceito variacional para a classe das superfícies não paramétricas. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e conexo tal que seu bordo ∂D é uma curva suave por partes. Dada uma função $\psi \in C(\overline{D})$ tal que o gráfico de ψ , quando restrita a ∂D , seja uma curva fechada, iremos considerar o conjunto

$$\Omega = \{u(x, y) \in C^2(\overline{D}); u(x, y) = \psi(x, y), \forall (x, y) \in \partial D\}.$$

Usando que a área do gráfico de $u \in \Omega$ é dada por $A(u) = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla u(x, y)|^2} dx dy$, segue que os valores mínimos do funcional área ocorrem quando $\nabla u = 0$, e neste caso, temos que $A(u) = \text{Área}(D)$. Nós procuramos $f \in \Omega$ tal que $A(f) = \inf_{w \in \Omega} A(w)$. Suponha que exista uma tal $f \in \Omega$ que tenha menor área dentre todas as $w \in \Omega$. Daí podemos considerar uma função $v \in C^2(D)$ que se anule no bordo de D e definimos $f_t = f + tv$. Derivando em relação a t obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(f_t) &= \frac{d}{dt} \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f(x, y) + t\nabla v(x, y)|^2} dx dy \\ &= \iint_D \frac{\langle \nabla f(x, y) + t\nabla v(x, y), \nabla v(x, y) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f(x, y) + t\nabla v(x, y)|^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Donde temos que a *Primeira Variação da Área* é dada por

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(f_t) = \iint_D \frac{\langle \nabla f(x, y), \nabla v(x, y) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}} dx dy,$$

e como v se anula em ∂D , então segue pelo Teorema da Divergência

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(f_t) = - \iint_D v \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f(x, y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}} \right) dx dy.$$

Como a última equação é válida para qualquer $v \in C^2(D)$, então devemos ter a *Equação das Superfícies Mínimas* em sua forma divergente

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f(x, y)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}} \right) = 0. \quad (2.2)$$

As funções que satisfazem a *Equação das Superfícies Mínimas* são chamadas de gráficos mínimos. Donde obtemos mais uma definição para as superfícies mínimas.

Definição 14. Uma superfície S é dita ser mínima se, e somente se, ela pode ser representada localmente por um gráfico mínimo. Assim, localmente, os gráficos mínimos minimizam área.

Em \mathbb{R}^3 , ao efetuarmos as derivadas, encontramos que as funções $f \in \Omega$ com esta propriedade minimizante devem satisfazer a Equação (2.1). Lagrange foi capaz de demonstrar esse fato, mas devido a complexidade do problema, o único exemplo dado por ele foram os planos de \mathbb{R}^3 .

Já H. Scherk, procurou soluções da equação das superfícies mínimas que satisfazem $f(x, y) = h(x) + g(y)$, assim ao aplicarmos na EDP e manipularmos obtemos

$$\frac{h_{xx}}{1 + (h_x)^2} = \frac{-g_{yy}}{1 + (g_y)^2}.$$

Assim, ao integrarmos duas vezes temos que $h(x) = -\ln \cos x$ e $g(y) = \ln \cos y$ e está é a conhecida superfície de Scherk.

Na verdade, a superfície de Scherk está definida sobre o conjunto

$$\mathcal{R} = \{(u, v); \cos u \cos v > 0\},$$

que pode ser visto como a união dos casas pretas de um tabuleiro de xadrez infinito. De fato, considerando os quadrados

$$\mathcal{Q}(m, n) = \left\{ (x, y) \mid m\pi - \frac{\pi}{2} < x < m\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi - \frac{\pi}{2} < y < n\pi + \frac{\pi}{2} \right\},$$

colorimos de preto se $m + n$ é par e de branco se $m + n$ é ímpar. Então,

$$\mathcal{R} = \bigcup \{ \mathcal{Q}(m, n) \mid m, n \text{ são inteiros tais que } m + n \text{ é par} \}.$$

Considerando a superfície de Scherk parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \log \left(\frac{\cos v}{\cos u} \right) \right),$$

vemos que $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u + 2m\pi, v + 2n\pi)$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Portanto, a superfície de Scherk sobre um quadrado que colorimos de preto $\mathcal{Q}(m, n)$ coincide com a porção sobre o quadrado $\mathcal{Q}(0, 0)$. Assim, podemos plotar esta superfície ao juntarmos os pedaços idênticos sobre os quadrados pretos.

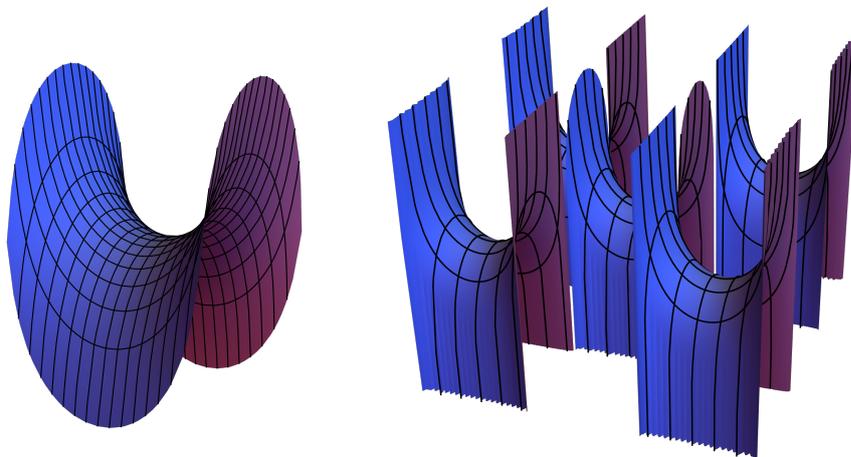


Figura 2.1: A superfície de Scherk.

2.3 Parâmetros Isotérmicos

Definição 15. Diremos que uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação conforme quando a sua diferencial é uma aplicação que preserva ângulos, ou seja, que exista uma função $\lambda(q) > 0$ diferenciável para todo $q \in U$ tal que

$$\langle d\mathbf{x}_q(u), d\mathbf{x}_q(v) \rangle = \lambda^2(q) \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in T_{\mathbf{x}(q)}S$$

Quando \mathbf{x} é conforme, as coordenadas $(u, v) \in U$ são chamados de *parâmetros isotérmicos*.

Observe quando temos uma parametrização sobre parâmetros isotérmicos, temos que sua primeira forma fundamental é $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$. De fato, basta considerar uma base $\{e_1, e_2\}$ ortonormal em T_pS para que tenhamos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle d\mathbf{x}_q(e_1), d\mathbf{x}_q(e_1) \rangle = \lambda^2 \langle e_1, e_1 \rangle = \lambda^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle d\mathbf{x}_q(e_1), d\mathbf{x}_q(e_2) \rangle = \lambda^2 \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle d\mathbf{x}_q(e_2), d\mathbf{x}_q(e_2) \rangle = \lambda^2 \langle e_2, e_2 \rangle = \lambda^2. \end{aligned}$$

Assim, muitas das expressões que ocorrem na teoria se tornam consideravelmente simples quando estamos considerando parâmetros isotérmicos. Por exemplo, a curvatura média, nessas condições é expressa por

$$H = \frac{e + g}{2\lambda^2}.$$

Veja que numa superfície mínima S temos que as curvaturas principais são tais que $k_1 = -k_2$, logo $-K = k_1k_2 > 0$. Desse modo, se S não possui pontos planares temos que

$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle = -K(p) \langle w_1, w_2 \rangle,$$

para todo $p \in S$ e quaisquer $w_1, w_2 \in T_pS$ onde $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ é a aplicação normal de Gauss.

Proposição 2.2. Se \mathbf{x} é uma parametrização ortogonal, isto é, $F = 0$, então

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Em particular, se \mathbf{x} é conforme temos

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda.$$

Demonstração. Com a ajuda dos símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k obtemos os sistemas

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{E_u}{2} \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{E_v}{2} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{E_v}{2} \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{G_u}{2} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{G_u}{2} \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{G_v}{2} \end{array} \right\}.$$

Se $F = f = 0$, então dos sistemas segue que

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

Desse modo, da equação de Gauss nos vem

$$\begin{aligned}
-EK &= (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \\
&= \left(\frac{G_u}{2G} \right)_u - \left(-\frac{E_v}{2G} \right)_v - \frac{E_v}{2E} \cdot \frac{E_v}{2G} + \left(\frac{G_u}{2G} \right)^2 + \frac{E_v}{2G} \cdot \frac{G_v}{2G} - \frac{E_u}{2E} \cdot \frac{G_u}{2G} \\
&= \frac{2G_{uu}G - 2G_u^2}{4G^2} + \frac{2E_{vv}G - 2E_vG_v}{4G^2} - \frac{E_v^2 + E_uG_u}{4EG} + \frac{G_u^2 + E_vG_v}{4G^2} \\
&= \frac{2G_{uu}G - 2G_u^2 + 2E_{vv}G - 2E_vG_v + G_u^2 + E_vG_v}{4G^2} - \frac{E_v^2 + E_uG_u}{4EG} \\
&= \frac{2(E_{vv} + G_{uu})EG - EG_u^2 - EE_vG_v - E_v^2G - GE_uG_u}{4EG^2} \\
&= \frac{2(E_{vv} + G_{uu})EG}{4EG^2} - \frac{G_u(EG_u + E_uG)}{4EG^2} - \frac{E_v(EG_v + E_vG)}{4EG^2},
\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
-K2\sqrt{EG} &= \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} - \frac{E_v(EG)_v}{2(EG)^{3/2}} + \frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} - \frac{G_u(EG)_u}{2(EG)^{3/2}} \\
&= \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u.
\end{aligned}$$

Por fim, obtemos

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

Em particular, se \mathbf{x} é tal que $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$, segue que

$$K = \frac{-1}{2\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\lambda_u}{\lambda^2} \right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda^2} \right)_v \right\} = \frac{-1}{2\lambda^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) \right] = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda.$$

□

Proposição 2.3. Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é uma parametrização conforme e $\mathbf{H} = HN$ o vetor curvatura média. Então

$$\Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

onde $\lambda^2 = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$.

Demonstração. Como \mathbf{x} é conforme, então ao derivarmos $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ com respeito a u e $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$ com respeito a v obtemos $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle$, logo, $\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{x}_u \rangle = 0$. De modo análogo, temos que $\langle \Delta \mathbf{x}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$. Portanto, $\Delta \mathbf{x}$ é um vetor normal paralelo ao vetor normal da superfície. Além disso, como $2\lambda^2 H = e + g = \langle \Delta \mathbf{x}, N \rangle$. Donde, $\Delta \mathbf{x} = 2\lambda^2 \mathbf{H}$. □

Corolário 2.4. Uma superfície parametrizada regular isotérmica $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ é mínima se, e somente se, as suas funções coordenadas de \mathbf{x} são funções harmônicas em U .

Desse modo, temos que superfícies mínimas naturalmente ocorrem em um cenário um pouco diferente do qual iniciamos nosso estudo. De modo a firmar uma conexão entre superfícies mínimas e funções harmônicas iremos introduzir a seguinte notação:

Dado uma superfície $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ iremos considerar as funções complexas

$$\varphi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}, \quad \text{onde } \zeta = u + iv.$$

Assim temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \varphi_k^2(\zeta) &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial v} - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 \\ &= \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle - \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\|^2 = E - G - 2iF, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^3 |\varphi_k(\zeta)|^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 = E + G. \quad (2.4)$$

Proposição 2.5. Usando a notação anterior segue que

- a) $\varphi_k(\zeta)$ é uma função analítica $\iff x_k$ é harmônica em u, v .
- b) u, v são parâmetros isotérmicos $\iff \sum \varphi_k^2(\zeta) = 0$.
- c) Se u, v são parâmetros isotérmicos $\iff \sum |\varphi_k(\zeta)|^2 \neq 0 \iff S$ é regular.

Proposição 2.6. Suponha que $\mathbf{x}(u, v)$ define uma superfície regular mínima com parâmetros isotérmicos. Então as funções $\varphi_k(\zeta)$ são analíticas e satisfazem $\sum \varphi_k^2 = 0$ e $\sum |\varphi_k|^2 \neq 0$. Reciprocamente, se φ_k são analíticas satisfazendo $\sum \varphi_k^2 = 0$ e $\sum |\varphi_k|^2 \neq 0$ num domínio simplesmente conexo D . Então existe uma superfície regular $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujas as funções coordenadas são tais que $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}$, onde $k = 1, 2$ e 3 .

Demonstração. A primeira afirmação segue imediatamente pelas identidades mencionadas anteriormente e pela proposição anterior. Reciprocamente, defina para $k = 1, 2$ e 3

$$x_k(\zeta) = \mathbf{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(z) dz \right),$$

para algum $\zeta_0 \in U$ fixado. As funções x_k estão bem definidas pois φ_k é holomorfa sobre o conjunto U que é simplesmente conexo, logo x_k é holomorfa. Desse modo, pelas equações de Cauchy-Riemann segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(z) dz &= \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(z) dz \right) + i \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{Im} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(z) dz \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(z) dz \right) - i \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{Im} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \varphi_k(z) dz \right). \end{aligned}$$

Então valem as identidades em (2.3) e (2.4) e o resultado segue pela última proposição e corolário. \square

Nos últimos resultados estamos supondo que a superfície admite uma representação local em termos de parâmetros isotérmicos. Iremos agora mostrar que esta representação sempre existe sobre qualquer ponto regular de uma superfície mínima.

Teorema 2.3. Todo ponto regular sobre uma superfície mínima S admite uma vizinhança tal que exista uma reparametrização por termos isotérmicos.

Demonstração. Primeiro, pelo teorema da função implícita, para todo $p \in S$ existe uma vizinhança tal que a superfície pode ser vista como o gráfico de uma função diferenciável h , ou seja, existe $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, h(x, y))$ é uma parametrização local de S . Pela equação das superfícies mínimas temos que a função h satisfaz

$$(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy} = 0.$$

Desse modo, denotando $\mathcal{W} = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}$ e por um cálculo¹ direto obtemos as equações

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + h_x^2}{\mathcal{W}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x h_y}{\mathcal{W}} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + h_x^2}{\mathcal{W}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_x h_y}{\mathcal{W}} \right).$$

Tomando U simplesmente conexo, isto implica a existência de funções F e G satisfazendo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1 + h_x^2}{\mathcal{W}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{h_x h_y}{\mathcal{W}}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{h_x h_y}{\mathcal{W}}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1 + h_y^2}{\mathcal{W}}.$$

Pondo $\xi = x + F(x, y)$ e $\eta = y + G(x, y)$ nos vem que

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 + \frac{1 + h_x^2}{\mathcal{W}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{h_x h_y}{\mathcal{W}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{h_x h_y}{\mathcal{W}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 + \frac{1 + h_y^2}{\mathcal{W}}.$$

e daí o jacobiano da transformação $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ é dado por

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2 + \frac{2 + h_x^2 + h_y^2}{\mathcal{W}} = \frac{(\mathcal{W} + 1)^2}{\mathcal{W}} > 0.$$

Desse modo, essa aplicação admite uma inversa $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$. Daí, podemos representar a superfície em termos de ξ e η , donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\mathcal{W} + 1 + h_y^2}{J\mathcal{W}}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{-h_x h_y}{J\mathcal{W}}, & \frac{\partial h(x, y)}{\partial \xi} &= \frac{\mathcal{W} + 1 + h_y^2}{J\mathcal{W}} P - \frac{h_x h_y}{J\mathcal{W}} Q, \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{-h_x h_y}{J\mathcal{W}}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\mathcal{W} + 1 + h_x^2}{J\mathcal{W}}, & \frac{\partial h(x, y)}{\partial \eta} &= \frac{\mathcal{W} + 1 + h_x^2}{J\mathcal{W}} Q - \frac{h_x h_y}{J\mathcal{W}} P. \end{aligned}$$

Portanto, com respeito aos parâmetros ξ e η temos

$$E = G = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\|^2 = \frac{\mathcal{W}}{J} = \left[\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{W} + 1} \right]^2 > 0 \quad \text{e} \quad F = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right\rangle = 0,$$

ou seja, estes são parâmetros isotérmicos sobre S . ■

Nas condições do teorema anterior, as funções F e G satisfazem $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$, então existe uma função E tal que $\frac{\partial E}{\partial x} = F$ e $\frac{\partial E}{\partial y} = G$ e daí

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + h_x^2}{\mathcal{W}} & \frac{h_x h_y}{\mathcal{W}} \\ \frac{h_x h_y}{\mathcal{W}} & \frac{1 + h_y^2}{\mathcal{W}} \end{pmatrix}$$

é uma matriz positiva.

¹Estes cálculos foram feitos no capítulo seguinte.

Proposição 2.7. Seja $E \in C^2$ tal que a sua hessiana é positiva. Então a aplicação $(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{\partial E}{\partial u}(x_1, x_2), \frac{\partial E}{\partial v}(x_1, x_2) \right) = \tau(x)$, onde $x = (x_1, x_2)$, é tal que se $x \neq y$ então chamando de u e v , respectivamente, suas imagens por esta aplicação, então vale

$$\langle \tau(y) - \tau(x), y - x \rangle > 0.$$

Demonstração. Defina $G(t) = E(ty + (1-t)x)$, para $t \in [0, 1]$. Então temos

$$G'(t) = \frac{\partial E}{\partial x_1}(ty + (1-t)x)(y_1 - x_1) + \frac{\partial E}{\partial x_2}(ty + (1-t)x)(y_2 - x_2)$$

e

$$G''(t) = \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}(ty + (1-t)x) \right] (y_i - x_i)(y_j - x_j) > 0$$

para todo $t \in [0, 1]$. Desse modo, $G'(1) > G'(0)$ ou seja,

$$\sum \tau_i(y)(y_i - x_i) > \sum \tau_i(x)(y_i - x_i) \iff \langle \tau(y) - \tau(x), y - x \rangle > 0.$$

□

Proposição 2.8. Ainda nas condições do lema anterior, temos que a aplicação $\psi(x) = x + \tau(x)$, satisfaz

$$\langle \psi(y) - \psi(x), y - x \rangle \geq \|y - x\|^2,$$

para quaisquer $x \neq y$.

Demonstração. Basta observar que $\psi(y) - \psi(x) = (y - x) + (\tau(y) - \tau(x))$. Assim,

$$\|\psi(y) - \psi(x)\|^2 = \|y - x\|^2 + 2 \langle \tau(y) - \tau(x), y - x \rangle + \|\tau(y) - \tau(x)\|^2 \geq \|y - x\|^2$$

□

Veja ainda que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\|\psi(y) - \psi(x)\| > \|y - x\|.$$

E assim, pelas proposições anteriores, a transformação $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ considerada na demonstração do Teorema 2.3 satisfaz o último lema. Em particular, tomando $x = (0, 0)$ temos que $\tau(x) = 0$, logo para qualquer $y \neq 0$ segue $\|\tau(y)\| > \|y\|$. Portanto, se $U = \mathbb{R}^2$ então esta transformação é um difeomorfismo de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^2 .

2.4 Representação de Enneper–Weierstrass

Note que da Proposição 2.6, temos que a teoria local das superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 pode ser estudada por triplas formadas por funções holomorfas. A seguir mostraremos exatamente como isso pode ser feito. Sabemos que x é isotérmica se, e somente se, suas funções φ_k satisfazem

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0 \iff (\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2.$$

Estamos desconsiderando os casos $\varphi_1 = i\varphi_2$ e $\varphi_3 = 0$, pois estes correspondem aos casos planares. Desse modo, defina as funções

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2},$$

assim, f é uma função holomorfa e g é meromorfa. Além disso, temos

$$\varphi_3 = fg, \quad \varphi_1 + i\varphi_2 = \frac{-\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -fg^2,$$

Donde concluímos que

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \text{e} \quad \varphi_3 = fg.$$

Note que os nossos cálculos mostram que fg^2 é uma função holomorfa e que se $z \in D$ é polo de g de ordem m então z é zero de f de ordem pelo menos $2m$. Além disso, a condição $|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2 \neq 0$ nos diz que estas funções não podem se anular simultaneamente, ou seja, f apenas tem zeros nos polos de g e a ordem deve ser exatamente o dobro da ordem do polo. Portanto, acabamos de demonstrar um importantíssimo teorema de representação para superfícies mínimas.

Teorema 2.4 (Representação de Enneper-Weierstrass). Toda superfície mínima com parâmetros isotérmicos e não planar pode ser representada localmente por

$$\begin{aligned} x_1(\zeta) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1}{2} f(z)(1 - g^2(z)) dz \right), \\ x_2(\zeta) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{i}{2} f(z)(1 + g^2(z)) dz \right), \\ x_3(\zeta) &= \operatorname{Re} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} f(z)g(z) dz \right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Onde as funções f e g são, respectivamente, uma função holomorfa e meromorfa sobre um conjunto D simplesmente conexo. Além disso, f se anula nos polos de g e a ordem de seus zeros são exatamente o dobro da ordem do polo de g . Reciprocamente, qualquer par de funções (f, g) satisfazendo essas condições definem uma superfície mínima regular parametrizada por parâmetros isotérmicos por meio das equações acima. Ao par (f, g) chamaremos *dados de Weierstrass*.

A representação de Enneper-Weierstrass não apenas nos permite construir uma grande variedade de superfícies mínimas possuindo as mais diversas propriedades, mas também serve como uma ferramenta para demonstrar teoremas sobre estas superfícies ao interpretarmos as afirmações em termos de funções holomorfas.

Exemplo 9. Podemos obter a representação do helicóide pondo $f = -ie^z$ e $g = e^{-z}$ e considerando $U = \mathbb{C}$. De fato, veja que

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{f(1 - g^2)}{2} = \frac{-ie^z(1 - e^{-2z})}{2} = -i \sinh z, \\ \varphi_2 &= \frac{if(1 + g^2)}{2} = \frac{i(-ie^z)(1 + e^{-2z})}{2} = \cosh z, \\ \varphi_3 &= fg = -i. \end{aligned}$$

Então, se $\zeta = u + iv$ segue que

$$\begin{aligned}x_1(u, v) &= \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \varphi_1(z) dz \right) = \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta -i \sinh z dz \right) = \sinh u \sin v, \\x_2(u, v) &= \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \varphi_2(z) dz \right) = \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \cosh z dz \right) = \sinh u \cos v, \\x_3(u, v) &= \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \varphi_3(z) dz \right) = \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta -idz \right) = v.\end{aligned}$$

Obtemos assim a parametrização $\mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$, vista no Exemplo (iii).

Exemplo 10. Para o mesmo domínio $U = \mathbb{C}$, se pusermos $f = 1$ e $g = z$ segue

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{f(1-g^2)}{2} = \frac{1-z^2}{2}, \\ \varphi_2 &= \frac{if(1+g^2)}{2} = \frac{i(1+z^2)}{2}, \\ \varphi_3 &= fg = z.\end{aligned}$$

Então, se $\zeta = u + iv$ segue que

$$\begin{aligned}x_1(u, v) &= \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \varphi_1(z) dz \right) = \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{1-z^2}{2} dz \right) = \frac{1}{2} \left(u + uv^2 - \frac{1}{3}u^3 \right), \\x_2(u, v) &= \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \varphi_2(z) dz \right) = \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{1+z^2}{2} dz \right) = -\frac{1}{2} \left(v + vu^2 - \frac{1}{3}v^3 \right), \\x_3(u, v) &= \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta \varphi_3(z) dz \right) = \mathbf{Re} \left(\int_0^\zeta -idz \right) = \frac{1}{2}(u^2 - v^2).\end{aligned}$$

Assim, obtemos a bem conhecida parametrização da superfície de Enneper, vista no Exemplo 2.

2.4.1 Quantidades Geométricas em Função de Enneper-Weierstrass

Além disso, podemos expressar as quantidades geométricas básicas quando olhamos para uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ em termos dos dados de Weierstrass (f, g) . Se $E = G = \lambda^2$ e $F = 0$, então pelas identidades anteriores segue que o fator conforme é dado por

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{1}{2}(E + G) = \frac{1}{2}(\|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \|\varphi_3\|^2) \\ &= \frac{1}{8} \|f\|^2 \|1-g^2\|^2 + \frac{1}{8} \|f\|^2 \|1+g^2\|^2 + \frac{1}{2} \|fg\|^2 = \left[\frac{\|f\| (1 + \|g\|^2)}{2} \right]^2.\end{aligned}$$

Como,

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{Re} \left(\frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_v = -\mathbf{Im} \left(\frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{i}{2}f(1+g^2), fg \right)$$

e daí

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}\left(\frac{i}{2}f(1-g^2)\right) \operatorname{Im}(fg) + \operatorname{Re}(fg) \operatorname{Im}\left(\frac{i}{2}f(1+g^2)\right), \\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}f(1-g^2)\right) \operatorname{Im}(fg) - \operatorname{Re}(fg) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}f(1-g^2)\right), \\ -\operatorname{Re}(f(1-g^2)) \operatorname{Im}\left(\frac{i}{4}f(1+g^2)\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{i}{4}f(1+g^2)\right) \operatorname{Im}(f(1-g^2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\left(\frac{i}{2}f(1+g^2)\overline{f}g\right), \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}f(1-g^2)fg\right), \\ \operatorname{Im}\left(\frac{-i}{4}f(1+g^2)f(1-g^2)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\|f\|^2 \operatorname{Re}(\overline{g} + \|g\|^2 g), \\ \frac{1}{2}\|f\|^2 \operatorname{Im}(g - \|g\|^2 \overline{g}), \\ \frac{1}{4}\|f\|^2 \operatorname{Re}(\|g\|^4 - 1 - \overline{g}^2 + g^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \left[\frac{\|f\|(1+\|g\|^2)}{2} \right]^2 (2\operatorname{Re}(g), 2\operatorname{Im}(g), \|g\|^2 - 1). \quad (2.6)$$

Relembre que a *Projeção Estereográfica* é a aplicação $\pi : \mathbb{S}^2 - \{n\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida pelo seguinte modo: considere o ponto $p \in \mathbb{S}^2$, diferente do polo norte $n = (0, 0, 1)$, então definimos $\pi(p) = q$ onde q é a interseção da reta que contém p e n com o plano complexo. Podemos encontrar uma expressão para esta aplicação em função do ponto p . Denote $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, 0)$ e a reta que contém esses pontos é dada por $\ell(t) = tq + (1-t)n = (tq_1, tq_2, 1-t)$. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\ell(t_0) = p$. Mas como $\ell(t_0) = (t_0q_1, t_0q_2, 1-t_0)$, então temos que $p_3 = 1-t_0$, logo

$$q_1 = \frac{p_1}{t_0} = \frac{p_1}{1-p_3} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{p_2}{t_0} = \frac{p_2}{1-p_3}.$$

Portanto, a aplicação estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 - \{n\} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$\pi(p_1, p_2, p_3) = \frac{p_1 + ip_2}{1-p_3}.$$

Podemos ainda obter uma expressão para a aplicação inversa. Primeiro observe que se $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{S}^2 - \{n\}$ então pondo $\pi(p) = q$, obtemos

$$\|\pi(p)\|^2 = \pi(p)\overline{\pi(p)} = \frac{p_1 + ip_2}{1-p_3} \cdot \frac{p_1 - ip_2}{1-p_3} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{(1-p_3)^2} = \frac{1-p_3^2}{(1-p_3)^2} = \frac{1+p_3}{1-p_3}.$$

Deste modo,

$$(1-p_3)\|q\|^2 = 1+p_3 \iff (\|q\|^2 + 1)p_3 = \|\pi(p)\|^2 - 1 \iff p_3 = \frac{\|q\|^2 - 1}{\|q\|^2 + 1} = \frac{q\overline{q} - 1}{q\overline{q} + 1}.$$

Assim, usando que a parte real de z é dada por $(z + \overline{z})/2$ e observando que $\operatorname{Re}(q) = p_1/(1-p_3)$, segue

$$p_1 = \frac{q + \overline{q}}{2}(1-p_3) = \frac{q + \overline{q}}{2} \cdot \left(1 - \frac{q\overline{q} - 1}{q\overline{q} + 1}\right) = \frac{\overline{q} + q}{q\overline{q} + 1} = \frac{2\operatorname{Re}(q)}{\|q\|^2 + 1}.$$

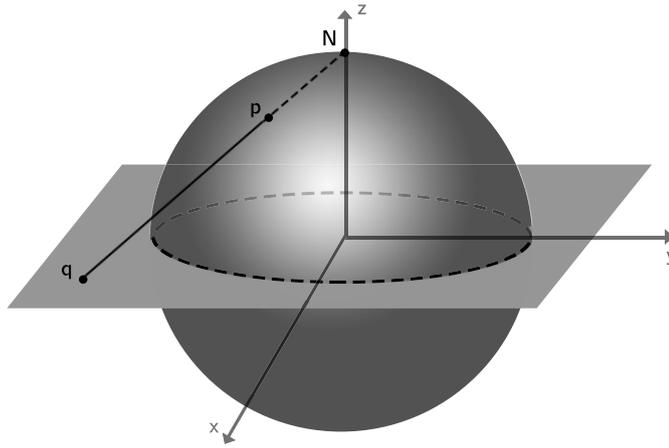


Figura 2.2: A projeção estereográfica

Analogamente obtemos que $p_2 = \frac{2\text{Im}(q)}{\|q\|^2 + 1}$. Portanto a inversa é dada por

$$\pi^{-1}(q) = \left(\frac{2\text{Re}(q)}{\|q\|^2 + 1}, \frac{2\text{Im}(q)}{\|q\|^2 + 1}, \frac{\|q\|^2 - 1}{\|q\|^2 + 1} \right).$$

Desse modo, se x é uma aplicação conforme com dados de Weierstrass (f, g) então segue que

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{1 + \|g\|^2} (2\text{Re}(g), 2\text{Im}(g), \|g\|^2 - 1) = \pi^{-1} \circ g.$$

Desse modo temos outra caracterização de superfícies mínimas

Proposição 2.9. Seja $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um imersão conforme. Então x é mínima se, e somente se, a função $g = \pi \circ N$ é meromorfa.

Introduzindo os operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

temos que o Laplaciano é expresso por $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$. Desse modo,

$$\Delta \log \|f\| = 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (\log \|f\|^2) = 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (\log f + \overline{\log f}) = 0,$$

e também

$$\Delta \log(1 + \|g\|^2) = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (\log(1 + g\bar{g})) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{g'\bar{g}}{1 + \|g\|^2} \right) = \frac{4 \|g'\|^2}{(1 + \|g\|^2)^2}.$$

Logo, a curvatura Gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda = -\frac{4}{\|f\|^2 (1 + \|g\|^2)^2} (\Delta \log \|f\| + \Delta \log(1 + \|g\|^2)) = \frac{-16 \|g'\|^2}{\|f\|^2 (1 + \|g\|^2)^4}.$$

Desse modo, ou K é identicamente nula ou K se anula apenas em pontos isolados.

Por fim, podemos mostrar que cada componente da aplicação normal de Gauss é autovetor do operador Laplaciano. De fato, mostraremos que $\Delta N = 2\lambda^2 KN$. Veja que

$$\begin{aligned}\Delta N &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} N = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \left[\frac{1}{1 + \|g\|^2} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) \right] \\ &= 4(2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (1 + \|g\|^2)^{-1} + \frac{4}{1 + \|g\|^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) \\ &\quad + 8\mathbf{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (1 + \|g\|^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) \right\}.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial z} (1 + \|g\|^2)^{-1} = \frac{-g'\bar{g}}{(1 + \|g\|^2)^2} \quad \text{e} \quad 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (1 + \|g\|^2)^{-1} = \frac{4 \|g'\|^2 (\|g\|^2 - 1)}{(1 + \|g\|^2)^3},$$

e pelas equações de Cauchy-Riemann segue que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) = (\bar{g}', i\bar{g}', \overline{gg'}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) = (0, 0, \|g'\|^2)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Delta N &= \frac{4 \|g'\|^2 (\|g\|^2 - 1)}{(1 + \|g\|^2)^3} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) + 4(1 + \|g\|^2)^{-1} (0, 0, \|g'\|^2) \\ &\quad + 8\mathbf{Re} \left\{ \frac{-g'\bar{g}}{(1 + \|g\|^2)^2} \bar{g}'(1, i, g) \right\} \\ &= \frac{4 \|g'\|^2}{(1 + \|g\|^2)^2} \cdot \frac{\|g\|^2}{1 + \|g\|^2} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) + \frac{4 \|g'\|^2}{(1 + \|g\|^2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \|g\|^2} (0, 0, (1 + \|g\|^2)^2) \\ &\quad - \frac{4 \|g'\|^2}{(1 + \|g\|^2)^2} \cdot \frac{1 + \|g\|^2}{1 + \|g\|^2} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, 2\|g\|^2) \\ &= \frac{-8 \|g'\|^2}{((1 + \|g\|^2)^2)} \left\{ \frac{1}{1 + \|g\|^2} (2\mathbf{Re}g, 2\mathbf{Im}g, \|g\|^2 - 1) \right\} = \frac{-8 \|g'\|^2}{(1 + \|g\|^2)^2} N = 2\lambda^2 KN.\end{aligned}$$

Capítulo 3

Teorema de Bernstein

Iremos iniciar o estudo de resultados globais sobre as superfícies mínimas. Até agora não demos um exemplo de superfície que está definida em todo o plano como um gráfico mínimo. O resultado que desejamos provar é o célebre *Teorema de Bernstein*, este nos diz que toda solução da equação das superfícies mínimas definida em todo plano deve ser uma aplicação linear.

Na verdade Bernstein foi capaz de provar um resultado mais forte numa versão mais geométrica também, este outro resultado afirma que funções de $C^2(\mathbb{R}^2)$ tais que seu gráfico possui curvatura Gaussiana não-positiva $K \leq 0$, necessariamente possui curvatura nula. Desse modo, ele pode obter teoremas do tipo Liouville para uma classe mais geral de equações elípticas de segunda ordem.

Veja que por um cálculo direto nos dá que uma solução $h(x, y)$ da equação das superfícies mínimas também satisfaz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + h_y^2}{\mathcal{W}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x h_y}{\mathcal{W}} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_x h_y}{\mathcal{W}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + h_x^2}{\mathcal{W}} \right).$$

Mostraremos a primeira das igualdades, e por simetria, a segunda é inteiramente análoga. Note primeiramente,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + h_y^2}{\mathcal{W}} \right) = \frac{1}{\mathcal{W}^2} \left(\mathcal{W} \frac{\partial}{\partial x} (1 + h_y^2) - (1 + h_y^2) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} \right). \quad (3.1)$$

Para simplificar nossos cálculos, iremos introduzir a seguinte notação

$$p = h_x, \quad q = h_y, \quad r = h_{xx}, \quad s = h_{xy}, \quad t = h_{yy}, \quad \mathcal{W} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad (3.2)$$

ao derivarmos e separarmos os termos contendo r ou s segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + q^2}{\mathcal{W}} \right) &= \frac{1}{\mathcal{W}} \left(2qs\mathcal{W} - (1 + q^2) \frac{1}{2\mathcal{W}} (2qs + 2rp + 2rpq^2 + 2qsp^2 - 2pq(rq + ps)) \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{W}^2} \left[((2\mathcal{W}^2 - (1 + q^2)(1 + p^2))q + (pq)(1 + q^2)p) s \right. \\ &\quad \left. + (pq(1 + q^2)q - (1 + q^2)(1 + q^2)p) r \right]. \end{aligned}$$

Também temos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{\mathcal{W}} \right) = \frac{1}{\mathcal{W}^2} \left(\mathcal{W} \frac{\partial(pq)}{\partial y} - (pq) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} \right).$$

Assim a equação das superfícies mínimas é dada por

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

Voltando para a Equação (3.1), vamos separar os termos contendo s ou t temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{\mathcal{W}} \right) &= \frac{1}{\mathcal{W}^2} \left((sq - pt)\mathcal{W} - pq \frac{1}{2\mathcal{W}} (2tq + 2sp + 2spq^2 + 2tqp^2 - 2pq(sq + pt)) \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{W}^3} [((\mathcal{W}^2 + (pq)^2)q - pq(1 + q^2)p) s + ((\mathcal{W}^2 + (pq)^2)p - (pq)(q + p^2)q) t]. \end{aligned}$$

Por fim, usando que $\mathcal{W}^2 = (1 + p^2)(1 + q^2) - (pq)^2$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + q^2}{\mathcal{W}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{\mathcal{W}} \right) &= \frac{1}{\mathcal{W}^3} (((pq)q - (1 + q^2)p)(1 + q^2)r + (2(pq)(1 + q^2)p - 2(pq)^2q)s \\ &\quad - ((1 + p^2)(1 + q^2)p - pq(1 + p^2)q)t) \\ &= \frac{1}{\mathcal{W}^3} ((pq)q - (1 + q^2)p) [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]. \end{aligned}$$

Portanto, como a função é um gráfico mínimo, ou seja, satisfaz a equação das superfícies mínimas, temos que o termo dentro dos colchetes é zero e assim obtemos a equação desejada.

Se a função h está definida em todo o plano \mathbb{R}^2 então existe uma função de classe C^2 que chamaremos de u tal que

$$u_{xx} = \frac{1 + p^2}{\mathcal{W}}, \quad u_{yy} = \frac{1 + q^2}{\mathcal{W}} \quad \text{e} \quad u_{xy} = \frac{pq}{\mathcal{W}}.$$

E assim

$$\det(\text{Hess}(u)) = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = 1.$$

Nesse contexto, será de grande importância o Teorema de Jörgens, que provaremos agora

Teorema 3.1 (Jörgens). Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ solução de

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = 1.$$

Então $u(x, y)$ é um polinômio de grau dois.

Demonstração. Veja que se $u \in C^2$ é tal que

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = 1,$$

então temos que u ou $-u$ é uma função convexa. Sem perda de generalidade vamos supor que u seja convexa. Considere a transformação

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y))$$

definida por

$$\xi(x, y) = x + u_x(x, y) \quad \text{e} \quad \eta(x, y) = y + u_y(x, y).$$

Desse modo, φ é um difeomorfismo de classe C^1 de \mathbb{R}^2 pois como u é convexa então

$$\det \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 1 + u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & 1 + u_{yy} \end{pmatrix} = 2 + u_{xx} + u_{yy} \geq 2.$$

Assim, φ é invertível localmente em todos os pontos de \mathbb{R}^2 . Além disso, pela Proposição 2.8, φ é injetiva e portanto um difeomorfismo em \mathbb{R}^2 em si próprio. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\psi(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ a inversa de classe C^1 da aplicação φ . Sua jacobiana é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right]^{-1} = \frac{1}{2 + u_{xx} + u_{yy}} \begin{pmatrix} 1 + u_{yy} & -u_{xy} \\ -u_{xy} & 1 + u_{xx} \end{pmatrix}.$$

Defina a função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $h(\xi, \eta) = (x - u_x(x, y), -y + u_y(x, y))$, onde estamos fazendo $(x, y) = \psi(\xi, \eta)$.

Ora, pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial(\xi, \eta)} &= \frac{\partial h}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \\ &= \frac{1}{2 + u_{xx} + u_{yy}} \begin{pmatrix} 1 - u_{xx} & -u_{xy} \\ u_{xy} & -1 + u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + u_{yy} & -u_{xy} \\ -u_{xy} & 1 + u_{xx} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 + u_{xx} + u_{yy}} \begin{pmatrix} u_{yy} - u_{xx} & -2u_{xy} \\ 2u_{xy} & u_{yy} - u_{xx} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

logo, as funções coordenadas $h_1(\xi, \eta)$ e $h_2(\xi, \eta)$ de h satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, ou seja,

$$\frac{\partial h_1}{\partial \xi} = \frac{\partial h_2}{\partial \eta} = \frac{u_{yy} - u_{xx}}{2 + u_{xx} + u_{yy}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h_1}{\partial \eta} = -\frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{-2u_{xy}}{2 + u_{xx} + u_{yy}}$$

e portanto definem uma função holomorfa em \mathbb{C} cuja a derivada é dada por

$$h'(\zeta) = \frac{dh}{d\zeta} = \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + i \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - i \frac{\partial h_2}{\partial \eta},$$

onde $\zeta = \xi + i\eta$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \|h'(\zeta)\|^2 &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial \xi} \right)^2 = \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \eta} - \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \det \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(\xi, \eta)} \\ &= \frac{(u_{yy} - u_{xx})^2 + 4u_{xy}^2}{(2 + u_{xx} + u_{yy})^2} = \frac{u_{yy}^2 + 2u_{xx}u_{yy} + u_{yy}^2 - 4(u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2)}{(2 + u_{xx} + u_{yy})^2} \\ &= \frac{(u_{xx} + u_{yy})^2 - 4}{(2 + u_{xx} + u_{yy})^2} = \frac{u_{xx} + u_{yy} - 2}{u_{xx} + u_{yy} + 2} < 1. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Liouville segue que $h'(\zeta)$ é constante o que implica que as funções u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} também são constantes. Portanto, existem $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ constantes tais que

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

■

Teorema 3.2 (Bernstein). Suponha que $z \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é uma solução da equação das superfícies mínimas. Então z é uma aplicação linear, ou seja, o gráfico de z é um plano.

Demonstração. Pelo o que já foi discutido no início desse capítulo, sabemos que se $z \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é solução da equação das superfícies mínimas então existe uma função u de classe C^2 tal que

$$u_{xx} = \frac{1+p^2}{\mathcal{W}}, \quad u_{yy} = \frac{1+q^2}{\mathcal{W}} \quad \text{e} \quad u_{xy} = \frac{pq}{\mathcal{W}},$$

e assim, $u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = 1$. Logo, pelo Teorema de Jörgens segue que $u_{xx} = \frac{1+p^2}{\mathcal{W}}$, $u_{yy} = \frac{1+q^2}{\mathcal{W}}$ e $u_{xy} = \frac{pq}{\mathcal{W}}$ são funções constantes donde segue que $p = z_x$ e $q = z_y$ também são constantes. Portanto, $z(x, y)$ é uma função linear. ■

Em [10] podemos encontrar outra demonstração desse fato. Com um pouco mais de cálculos podemos encontrar uma versão local e quantitativa do teorema de Bernstein provada por E. Heinz, ver [3] para uma demonstração.

Teorema 3.3 (Heinz). Se um disco centrado em x_0 com raio r está contido no domínio de uma superfície mínima não-paramétrica $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, então sua curvatura em x_0 pode ser estimada por

$$|K(x_0)| \leq \frac{16}{r^2}.$$

Ao tomarmos $r \rightarrow \infty$, segue o Teorema de Bernstein. Assim, poderíamos nos perguntar quais generalizações admite o resultado devido a Bernstein. Mas apesar de bastante surpreendente, este resultado não é verdadeiro em todos os espaços euclidianos. De fato, esta conjectura foi estudada por vários matemáticos, em particular Bombieri, de Giorgi e Giusti mostraram que o resultado se mantém para $1 \leq n \leq 7$ e para $n \geq 8$ foram mostrados contra-exemplos com o estudo sobre o cone

$$C = \{x \in \mathbb{R}^8; x = (y, z), y, z \in \mathbb{R}^4 \text{ e } |y|^2 = |z|^2\},$$

ver [4] para mais detalhes.

3.1 Superfícies Mínimas Completas

Nesta seção iremos mostrar que a ideia de “completude” sobre a superfície nos traz resultados mais fortes que o teorema de Bernstein. Assim, desenvolveremos um pouco da teoria para expor alguns resultados que relacionam as superfícies mínimas completas com a aplicação normal de Gauss.

Definição 16. Diremos que uma superfície regular mínima $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é *completa* se seu domínio M induzido com a métrica Riemanianna $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ de \mathbb{R}^3 via \mathbf{x} é uma variedade Riemanniana completa.

Relembre que uma variedade Riemanniana com a métrica $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é dita completa quando é um espaço métrico completo com respeito a distância $d(p, q)$. Aqui a distância $d(p, q)$ é definida como o ínfimo dos comprimentos $\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. O conceito de variedade completa pode ser vista em [9] e o célebre Teorema de Hopf-Rinow nos dá uma caracterização desses conceitos.

Definição 17. Uma *curva divergente* sobre uma variedade Riemanniana é definida como uma curva parametrizada tal que para cada compacto $K \subset M$ existe um número $t_0(M) \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) \in M - K$ para todo $t > t_0(M)$.

Ou seja, podemos pensar que uma curva divergente é aquela que não pode ser limitada por nenhum compacto. Como aplicação do Teorema de Hopf-Rinow temos

Proposição 3.1. Uma variedade Riemanniana M é completa se, e somente se, qualquer curva divergente em M possui comprimento infinito.

Definição 18. Chamaremos de recobrimento universal de \tilde{M} é uma aplicação $\pi : M \rightarrow \tilde{M}$ de uma 2-variedade M simplesmente conexa com a propriedade que todo ponto $p \in \tilde{M}$ possui uma vizinhança tal que $\pi^{-1}(U)$ é a união disjunta de abertos S_i de M que são mapeados homeomorficamente por π em U .

Uma superfície mínima $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita ser do tipo *parabólico* se M é conformemente equivalente a \mathbb{C} e *hiperbólico* quando M é conformemente equivalente ao disco unitário. Quando M não é simplesmente conexo, então podemos passar o argumento ao recobrimento universal $\hat{x} : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo o domínio \hat{M} é simplesmente conexo e assim podemos classificar como anteriormente.

Relembre que a representação de Enneper-Weierstrass nos dá uma função $g = \pi \circ N$ meromorfa, assim, para obtermos informações sobre a aplicação normal de Gauss podemos usar as mais diversas ferramentas que a análise complexa pode nos dar. Por exemplo, o Teorema de Picard (ver [1] ou [8]) nos diz que qualquer função inteira não constante assume todos os pontos de \mathbb{C} ou o plano complexo com a exceção de um ponto, isto nos dá o seguinte resultado.

Proposição 3.2. A aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima $x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ omite no máximo dois pontos se $x(\mathbb{C})$ não está contida em um plano.

É possível construir exemplos de superfícies mínimas que a imagem esférica omite uma quantidade finita de pontos usando a projeção estereográfica, esses fatos podem ser vistos em [3] ou em [10]. Em conexão com a proposição anterior, vamos provar o seguinte resultado devido a Osserman.

Teorema 3.4 (Ossermann). Se S é uma superfície mínima não planar, então a sua imagem pela aplicação de Gauss é densa em \mathbb{S}^2 .

Para isso usaremos o lema, que está provado em [10].

Lema 1. Seja $f(z)$ uma função analítica no disco unitário D que possui uma quantidade finita de zeros. Então existe uma curva divergente C em D tal que

$$\int_C |f(z)||dz| < \infty.$$

Demonstração (Do Teorema de Ossermann). Passando o argumento ao recobrimento universal, podemos assumir que M é igual a \mathbb{C} ou a $B = \{w \in \mathbb{C}; |w| < 1\}$. Se x é do tipo parabólico e se sua imagem esférica não é densa em \mathbb{S}^2 . Então a Proposição 3.2 nos diz que $x(\mathbb{C})$ está contido em algum plano de \mathbb{R}^3 . Como x é completo, então sua imagem é todo o plano.

Suponha agora que x é do tipo hiperbólico e a sua imagem não é densa em \mathbb{S}^2 . Então a aplicação normal de Gauss de x omite um conjunto aberto que pode ser assumido, sem perda de generalidade, uma vizinhança do polo norte. Pela representação de Weierstrass obtemos que a função g é limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|g\| \leq M$ e como \hat{x} é regular a função f não se anula. Pelo lema anterior, existe um caminho divergente

γ em D tal que $\int_{\gamma} |f(z)||dz| < \infty$. Por outro lado, o comprimento da curva $\mathbf{x} \circ \gamma$ é dado por

$$\ell(\mathbf{x} \circ \gamma) = \int_{\mathbf{x} \circ \gamma} \lambda |d\zeta| = \int_{\gamma} \frac{\|f\| (1 + \|g\|^2)}{2} |d\zeta| = \frac{1 + M^2}{2} \int_{\gamma} |f||dz| < \infty$$

Mas isto resulta numa contradição com a completude da superfície mínima \mathbf{x} . ■

Vale ressaltar que este teorema tem como uma consequência imediata o teorema de Bernstein. Pois, uma superfície mínima não-paramétrica em \mathbb{R}^3 é uma superfície tal que sua imagem esférica está contida em um hemisfério. Osserman provou ainda que o conjunto dos pontos omitidos pela normal de Gauss tem capacidade logarítma igual a zero.

Nos exemplos dados até o momento, todos omitem muito menos que um domínio aberto da esfera. A imagem esférica do catenóide omite dois pontos da esfera; a da superfície de Enneper omite um único ponto e a da superfície de Scherk omite quatro pontos. Em [2] é mostrado como possível construir exemplos de superfícies mínimas completas cujas imagens esféricas cobrem toda a esfera ou toda a esfera menos três pontos. Até o presente, não se conseguiu construir uma superfície mínima completa cuja imagem esférica omita cinco pontos.

Uma generalização desse teorema foi dada por F. Xavier, ver [12].

Teorema 3.5 (F. Xavier, 1981). Suponha que a imagem esférica de uma superfície mínima completa S omite sete ou mais pontos. Então S é um plano.

Em 1988, H. Fujimoto [7] provou um resultado mais forte.

Teorema 3.6 (H. Fujimoto, 1988). A aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa não pode omitir mais de quatro pontos.

Pode-se encontrar em [3] ou [11] uma demonstração desse resultado.

Bibliografia

- [1] Ahlfors, L. V. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [2] Barbosa, J. L.; Colares, A. C. *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* , Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [3] Dierkes, U.; Hildebrandt, S.; Sauvigny, F. *Minimal Surfaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [4] Dierkes, U.; Hildebrandt, S.; Tromba, A. J. *Global Analysis of Minimal Surfaces. 2nd ed.*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [5] do Carmo, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies. 6a ed.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [6] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana. 5a ed.*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [7] Fujimoto, H. *On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces*. J. Math. Soc. Jpn. 40, 235–247 (1988)
- [8] Krantz, S. G. *Handbook of Complex Variables*, Birkhäuser Boston, 2012.
- [9] Lima, E. L. *Curso de análise, vol. 2. 11a Ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [10] Ossermann, R. *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications, Inc., 1986.
- [11] Ossermann, R. *Minimal surfaces in \mathbb{R}^3* , Global differential geometry. MAA Studies in Mathematics vol. 27, pp. 73–98. Washington, 1990,
- [12] Xavier, F. *The Gauss Map of a Complete Non-Flat Minimal Surface Cannot Omit 7 Points of the Sphere*. Annals of Mathematics 113, no. 1 (1981): 211–14.
- [13] Fang, Y. *Lectures on Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* , Proceedings of the Centre for Mathematics and Its Applications, Australian National University, 1996.