

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WAGNO SEVERINO DA SILVA

**VISUALIZAÇÃO, RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS: Abordando
os números racionais a partir de uma linguagem para as frações unitárias**

MACEÓ-AL

2021

WAGNO SEVERINO DA SILVA

**VISUALIZAÇÃO, RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS: Abordando
os números racionais a partir de uma linguagem para as frações unitárias**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do recebimento do título de licenciado em matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lucia Cristina Silveira Monteiro

MACEIÓ-AL

2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S586v Silva, Wagno Severino da.

Visualização, resolução e formulação de problemas: abordando os números racionais a partir de uma linguagem para as frações unitárias / Wagno Severino da Silva. – 2021.

31 f. : il., figs. e tabs. color.

Orientadora: Lucia Cristina Silveira Monteiro.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 30-31.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Frações. 3. Régua de Cuisenaire (Material didático). I. Título.

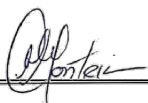
CDU: 511.13

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WAGNO SEVERINO DA SILVA

**VISUALIZAÇÃO, RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS: Abordando
os números racionais a partir de uma linguagem para as frações unitárias**

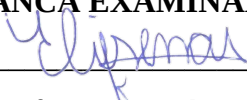
Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do recebimento do título de licenciado em matemática. Orientadora: Profa. Dra. Lucia Cristina Silveira Monteiro



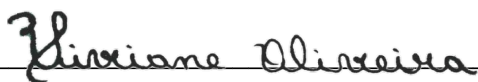
Orientadora: Profa. Dra. Lucia Cristina Silveira Monteiro
Universidade Federal de Alagoas

Aprovado em: Maceió-Al 16 / 07 / 2020

BANCA EXAMINADORA



Examinador 1: profa. Mestra Elisa Fonseca Sena e Silva
Universidade Federal de Alagoas



Examinador 2: Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos
Universidade Federal de Alagoas

RESUMO

A humanidade utiliza conceitos de frações há pelo menos cinco mil anos e, apesar do tempo de utilização, esse conhecimento não é repassado com facilidade. Salientamos que o domínio desse conceito é importante do ponto de vista prático, em uma perspectiva cognitiva e, também, para o raciocínio matemático. Para contribuir com a minimização dessa problemática efetuamos uma pesquisa bibliográfica e encontramos evidências de que a origem desse conhecimento se encontra em atividades humanas, mas, na educação matemática, os aspectos utilitários não são devidamente considerados. Na atualidade, ainda verificamos predominância de abordagem unilateral, privilegiando procedimentos operacionais com alusão às estruturas, noções de conjuntos numéricos, sem construção de significado. Diante dessas constatações, essa pesquisa buscará propor uma abordagem às frações, valorizando atividades com representações significativas, conhecimento anterior, buscando construir referencial significativo para a compreensão de frações e outros conceitos relacionados. Propomos iniciar com visualização e construção conduzindo pela problematização e transformação do material visualizado e destacamos a importância da construção de um vocabulário para as frações com a ideia da Régua de Cuisenaire para estudo de frações, incluindo nomeação de quantidades a partir das frações unitárias e utilizando frações unitárias para elaboração de problemas.

Palavras-chave: Comparação de Frações; Régua de Cuisenaire; Frações unitárias.

ABSTRACT

Humanity has used concepts of fractions for at least five thousand years and despite the time of use, this knowledge is not easily passed on. We emphasize that the mastery of this concept is important from a practical point of view, in a cognitive perspective, and also for mathematical reasoning. To contribute to the minimization of this problem, we carried out a bibliographic research, and we found evidence that the origin of this knowledge is found in human activities, but, in mathematical education, the utilitarian aspects are not properly considered. Currently, we still see a predominance of a unilateral approach, favoring operational procedures with allusion to structures, notions of numerical sets, without construction of meaning. In view of these findings, this research will seek to propose an approach to fractions, valuing activities with significant representations, previous knowledge, seeking to build a significant reference for the understanding of fractions and other related concepts. We propose to start with visualization and construction leading to the problematization and transformation of the visualized material and we highlight the importance of building a vocabulary for fractions with the idea of the Cuisenaire Ruler for the study of fractions including naming quantities from unit fraction, and using fractions unitary to elaborate problems.

Keywords: Mental processes; Cuisenaire ruler; Unit fractions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	6
2 A MATEMÁTICA E SUAS ORIGENS	8
2.1 Origem das frações.....	9
3 DIFICULDADES PARA COMUNICAR A IDEIA DE FRAÇÕES	11
3.1 A perda de referenciais significativos no uso das frações em alunos brasileiros.....	12
3.2 Falta de uma base de apoio na construção desse conhecimento	16
3.3 A necessidade de se encontrar novas formas de se transmitir o conhecimento	18
matemático	18
4 UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA	20
4.1 A importância dos erros no aprendizado de matemática	20
4.2 A passividade dos educadores frente aos erros dos educandos.....	21
4.3 Proposta de intervenção pedagógica: problematizando a Régua de Cuisenaire.....	23
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	29
REFERÊNCIA	30

1 INTRODUÇÃO

No início da graduação, a maioria dos alunos da licenciatura em matemática não se identifica com as disciplinas que denominam de *pedagógicas*. Porém, ao longo do curso, muitos desses alunos vão percebendo a importância de tais disciplinas para a construção de sua identidade de Professor de Matemática. Esses futuros educadores precisarão atentar para as dificuldades de compreensão de alunos com ritmos diferentes de aprendizado.

Assim, buscar desenvolver outras formas de diálogos com sujeitos da educação básica é uma competência a ser desenvolvida durante toda sua formação, inicial e continuada. Desenvolver empatia com alunos que não têm o perfil dos estudantes da licenciatura em matemática, ou seja, indivíduos que gostam da manipulação simbólica. Manipulações que, em alguns casos, são feitas sem atribuição de significados. Tais características são encontradas em apenas uma parte dos alunos da educação básica, os quais tradicionalmente são considerados “aptos e bons” para a matemática.

Tendo em vista esses diferentes desafios que o futuro professor de matemática irá enfrentar durante a sua atuação na educação básica, o docente em formação precisa adquirir conhecimentos variados relacionados, entre outros, com o fazer didático pedagógico para desenvolver atividades que sejam significativas e que possam contribuir para a aprendizagem dos seus estudantes e para despertar neles o interesse e o gosto pelos conteúdos que serão trabalhados nas aulas.

Dentre os conteúdos da matemática que são trabalhados na educação básica, nesta pesquisa será dada ênfase a problemática do trabalho com números racionais. Os currículos atuais que utilizam números racionais abrangem apenas competências procedimentais, indicando que os poucos alunos que se apropriam têm ênfase no conhecimento procedimental e não no conceitual. No entanto, os conceitos associados a este domínio são sumamente importantes em diferentes perspectivas. Vale e Barbosa (2019), apoiadas em Behr et al. (1983), destacam que conceitos relacionados aos números racionais são importantes,

[...] do ponto de vista prático, a capacidade de lidar de forma eficaz com estes conceitos melhora também a capacidade de resolver problemas do dia a dia; do ponto de vista da psicologia, os números racionais constituem uma área fértil na qual os alunos podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias ao seu desenvolvimento intelectual; e de uma perspectiva matemática, o conhecimento dos números racionais proporciona a base para a construção de operações algébricas elementares, sendo o raciocínio relacional com frações um veículo para melhorar o raciocínio algébrico (VALE; BARBOSA, 2019, p.236).

Dada a importância desse conhecimento, este trabalho foi idealizado com o intuito de entender os motivos pelos quais a maioria dos alunos comete tantos equívocos com relação a esse tópico do currículo de matemática, como somar numerador com numerador e denominador com denominador ao tentarem somar ou subtrair frações, mesmo nas séries finais da educação básica. Na maneira tradicional de olhar para esse fenômeno do erro cometido pelo aluno, ainda se mantém a crença de que o *treinamento* da manipulação simbólica exaustiva é suficiente para que não se cometa erro. Muitos licenciados em matemática que não procuram transitar pela Didática da Matemática ainda permanecem nessa crença e atribuem responsabilidade unicamente ao aprendiz.

Nesse sentido, esta pesquisa tem a finalidade de refletir sobre essa temática e, por meio de uma pesquisa bibliográfica, procurar compreender, além das manipulações simbólicas, quais processos cognitivos podem ser estimulados para contribuir para a apreensão de conceitos relacionados ao tema. Nesse intuito, buscaremos refletir a respeito dessa problemática e sugerir uma intervenção didática, propondo explorar o vocabulário das frações unitárias, a partir da visualização e transformação de materiais didáticos significativos, proposição e elaboração de problemas explorando processos mentais básicos.

Assim, objetivando contribuir para minimizar a problemática apresentada, desenvolveremos uma reflexão em quatro capítulos, inicialmente com um breve relato histórico sobre os primeiros contatos da humanidade com aquilo que viria se tornar essa ciência denominada matemática e como a humanidade já lidava com frações na antiguidade. Em seguida, apresentamos pesquisas que indicam a falta de compreensão de conceitos que envolvem as operações de soma e de subtração de frações de alunos brasileiros.

No capítulo que segue, identificamos alguns possíveis fatores que podem estar relacionados ao crescimento desses problemas, inclusive metodologias já *consagradas* no aprendizado das frações que podem causar algumas confusões no entendimento dos alunos. Para finalizar, com base na pesquisa bibliográfica efetuada, traçamos uma proposta metodológica para contribuir com o desenvolvimento de conceitos que envolvem as frações, considerando a construção de significados a partir da visualização de material didático, problematizando e propondo a elaboração de outro material didático relacionado ao primeiro, rumo à construção de uma linguagem numérica das quantidades fracionárias.

2 A MATEMÁTICA E SUAS ORIGENS

Para Boyer (1974), os matemáticos desempenham uma atividade intelectual altamente sofisticada que não é fácil de definir, mas esse autor também compreende que boa parte do que hoje denominamos matemática deriva das ideias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma.

A relação da humanidade com os conceitos primitivos de número, grandeza e formas é algo que já ocorre há muito tempo, pelo menos é o que alguns indícios sugerem. Como exemplo, podemos citar o osso de lobo encontrado na antiga Tchecoslováquia. Tal osso possuía algumas incisões dispostas, segundo Boyer (1974), em um número total de cinquenta e cinco, sendo sua idade estimada em aproximadamente 30 mil anos. Ao citar Heródoto e Aristóteles, Boyer (1974) deixa clara a sua crença de que a matemática surgiu, originalmente, como parte da vida diária do homem, seja pela necessidade de melhorar as tarefas do dia a dia ou por questões de cunho religioso.

Na busca por tentar entender de que forma a humanidade deu os primeiros passos, com respeito à matemática, Boyer acredita que a raça humana teria começado a pensar matematicamente muito antes de dominar a escrita. Portanto, mesmo na pré-história, foi deixado vestígios da sua preocupação em manter registro de suas posses. Tais registros eram feitos ao reunir pequenos objetos em coleções ou fazendo riscos em objetos que, por meio da associação, pudesse representar aquilo que queriam contar, que queriam manter registro.

As afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita (BOYER, 1974 p.4).

Assim, a falta de documentos e escritos que atestem o momento exato ou aproximado de quando a humanidade começa a desenvolver os conceitos matemáticos, ou até mesmo de quando começaram a desenvolver o que hoje conhecemos como operações básicas de matemática, remete-nos a um período que supera os 3000 mil anos (ROQUE, 2012).

Segundo Roque (2012), a maior parte das fontes mencionadas na história da matemática data da primeira metade do segundo milênio antes da era comum. São desse momento histórico os escritos mais antigos que se tem conhecimento e, já que não se tem outras comprovações que

possam atestar uma origem ainda mais antiga, resta manter-se na segurança dos escritos já encontrados.

Boyer (1974) afirma, ainda, que o conceito de números inteiros é o mais antigo na matemática e a noção de frações surgiu muito tempo depois. Contudo, em geral, não possui relacionamento direto com os sistemas para os inteiros.

O conceito de números inteiros é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros (BOYER, 1974, p.4).

Contudo, Roque (2012) nos lembra que essas questões envolvendo a evolução dos números não foram comprovadas, pois as fontes são poucas e fragmentadas. Mesmo assim, a autora reconhece que os aparecimentos da escrita e da matemática na região mesopotâmica estão intimamente ligados, tendo a escrita surgido pela necessidade de fazer os registros de certas quantidades

2.1 Origem das frações

Dizer ao certo onde e quando a humanidade começou a pensar em frações esbarra nas mesmas dificuldades já mencionadas anteriormente, quando a questão era a origem da matemática e seus diversos ramos, por isso não é uma tarefa nada fácil. Os indícios geram suposições, teorias, mas isso por si só não traz conforto suficiente para que se possa afirmar de certo a origem exata. Sendo assim, é preferível repousar na segurança dos achados arqueológicos que possuem pelo menos cinco milênios de idade.

Tais achados, alguns de origem egípcia, dão conta que a civilização do Egito antigo já possuía o conhecimento de alguns tipos de frações, na maioria frações unitárias. As frações unitárias são aquelas que possuem numerador 1. Na realidade, estudiosos destacam o uso bem difundido das frações pelos egípcios. Isso se deu pelo fato de eles lidarem com a agrimensura, relacionada ao movimento das águas do rio Nilo. Anualmente, o rio Nilo passa por um período de cheia e, diante das grandes faixas de terras que ficavam inundadas, o tamanho de alguns lotes eram reduzidos.

Lima (2006) também cita Heródoto para justificar que os impostos cobrados pelo faraó eram baseados nos tamanhos das propriedades. Por isso, frequentemente, essas terras tinham de ser remarcadas a fim de que os impostos fossem ajustados ao tamanho de cada propriedade.

Todavia, era comum, durante o processo de medição, a unidade de medida utilizada por eles precisar ser fracionada para se adequar à exata medida do terreno. As pessoas responsáveis por essa remarcação eram chamadas esticadores de cordas. O nome se justifica por eles usarem cordas como uma espécie de fita métrica.

Segundo Heródoto, o imposto que pagavam os proprietários de terras no Egito era diretamente proporcional a área de cada lote. As cheias do rio Nilo muitas vezes faziam desaparecer parte das terras dos agricultores. Então, os cobradores de impostos do faraó tinham que recalcular cada área a fim de que a cobrança fosse ajustada (LIMA, 2006, p. 9).

Pelos dados mencionados, encontramos uma relação de significados dos números inteiros com a atividade de contar objetos e das frações com a atividade de mensurar, mais especificamente de medir terra, medir objeto.

Percebemos que os processos de ensino e aprendizagem de frações, na maioria das práticas docentes e diferentes ciclos na educação básica, são apresentados sem a preocupação com a construção de atividades significativas, sem um referencial. Um referencial é algo que age inicialmente na percepção, uma atividade é a ação daquilo que se percebe por alguma perspectiva. Portanto, o entendimento dos conceitos em uma atividade, o vocabulário utilizado, a escrita utilizando números vão fazendo surgir novos objetos que são os símbolos matemáticos.

O professor ao propor atividades que envolvem ideias de números racionais, sua representação fracionária, aproveitando, inclusive, um vocabulário já construído, possibilitará que o aluno; que até então está totalmente envolvido em um ambiente em que só havia trabalhado com números inteiros, de uma hora para outra se vê diante de novos símbolos, novos significados, apresentados apenas como uma estrutura de um *novο conjunto e suas operações*; tenha novas e eficientes experiências de aprendizagem.

Assim, os números racionais, mais amplos e cheio de peculiaridades, precisam de um tratamento preparatório desde seu vocabulário, considerando os processos cognitivos básicos, como comparação, correspondência, inclusão, conservação, etc., em diferentes etapas de desenvolvimento simbólico.

3 DIFICULDADES PARA COMUNICAR A IDEIA DE FRAÇÕES

Todos os registros simbólicos com referência à história do conhecimento numérico da humanidade estão relacionados a algum tipo de atividade humana, destacadamente às frações, à mensuração de objetos.

A atividade matemática, como deixa claro Boyer (1974), historicamente, deu-se através de atividades humanas e que, para a descoberta das frações, há evidências de que houve essa mesma motivação. Os estudos mostram que a humanidade já manipulava frações mesmo antes da matemática se tornar essa atividade tão sofisticada ao qual o autor se refere. Essa sofisticação está relacionada à evolução simbólica das estruturas matemáticas que objetivam representar as ideias matemáticas que estavam incipientes nas ideias numéricas presentes nas atividades humanas, com maior generalidade.

Entretanto, mesmo a humanidade tendo descoberto as frações há milênios e as usar das mais variadas formas e para os mais variados fins ao logo desse tempo, o estudo apontou que, quanto ao repasse desse conhecimento, tem-se muito o que melhorar.

A pesquisa identificou, ainda, que esse problema tem ocorrido em diferentes partes do Brasil e do mundo, ou seja, tem-se o entendimento de que grande parte dos alunos possui muitas dificuldades para assimilar tal assunto, quando os conteúdos ministrados são as frações.

Renz (2011) percebeu esse problema durante seus estágios, quando foi aluna do curso de formação de professor de matemática para o ensino básico e esclarece:

Observei que a representação fracionária dos números racionais causa grandes problemas para os alunos que estão adaptados aos números inteiros e que, além disso, a dificuldade de compreender a parte de um todo e o pouco uso das visualizações de frações, acaba desestimulando quem tenta estudar esse assunto (RENZ, 2011, p. 9).

As dificuldades percebidas pela autora são diversas, desde a não compreensão do conceito de fração, passando pelo não entendimento da relação entre a parte e o todo a quem essa fração se refere. Sendo que ficam mais evidentes tais dificuldades nas operações com frações.

Na análise geral das questões diagnósticas foram constatadas que houve dificuldades para a resolução de todas as questões. A que mais chamou a atenção pelo número de educandos que não realizaram ou que a fizeram e não acertaram, foi na questão de operações com frações, na qual eles não souberam fazer a soma ou a diferença de duas frações, tanto com denominadores iguais como diferentes, onde eles somaram ou subtraíram tanto os numeradores

como os denominadores, enquanto na divisão não conseguiram resolver, porém na multiplicação houve um número maior de acertos (RENZ, 2011, p. 9).

A autora aponta alguns possíveis fatores que podem contribuir para tais ocorrências, como o pouco uso das visualizações das frações e o fato de os alunos estarem adaptados aos números inteiros.

Em pesquisa similar, Bonotto (2011) também chegou a resultados parecidos, tendo os alunos atingido um número grande de erros quando tentavam resolver operações de adição ou de subtração de frações. Ele observou, ainda, que erros na soma ou na subtração de frações chegam a ser maiores que os ocorridos com as operações de multiplicação entre frações, sendo o equívoco mais comum somar ou subtrair os numeradores ao mesmo tempo em que somam ou subtraem os denominadores.

Os relatos acima são de pesquisas realizadas com alunos das séries finais do Ensino Fundamental I e das séries iniciais do Ensino Fundamental II, o que equivale a alunos com idades entre 10 e 13 anos¹. A pesquisa sugere que esses fenômenos ocorrem em outras partes do país, para ser mais específico, esse é um problema que ocorreria, em maior ou menor grau, em outras partes do planeta, inclusive entre sociedades que atingiram um estágio alto de desenvolvimento.

Campos e Rodrigues (2007) trazem um outro relato, dessa vez feita com alunos com um grau maior de escolaridade. A pesquisa foi feita em escolas do estado de São Paulo e procurou avaliar alunos com pelo menos 15 anos de idade das etapas finais do Ensino Fundamental, do terceiro ano do Ensino Médio e alunos do Ensino Superior nas áreas das Ciências Exatas. Mesmo considerando um universo pouco usual para a realização de uma investigação acerca desses conhecimentos, tal escolha se justificava pelo fato de quererem entender em que estágio se encontra o conhecimento adquirido por alunos após terem tido contato, manuseando formalmente os símbolos das operações com números racionais.

3.1 A perda de referenciais significativos no uso das frações em alunos brasileiros

¹ Esses resultados, especificamente, são de escolas públicas do Rio Grande do Sul.

Essa última pesquisa, além de ratificar alguns problemas já citados anteriormente, coloca em evidência problemas causados no ensino de frações quanto ao uso do método partetodo. Segundo Campos e Rodrigues (2007), o uso dessa técnica de ensino acaba confundindo os alunos quanto ao referencial de unidade que devem adotar na identificação da representação fracionária.

O modelo parte-todo, de uso tão comum na educação brasileira, quando se quer ensinar frações, consiste na representação de uma figura repartida em certo número de partes congruentes entre si, onde certa quantidade das partes fracionadas é posta em destaque, seja por pinturas, seja por hachuras. Nesse método, o aluno deve exercer o que muitos autores denominam de dupla contagem, ou seja, conta-se em quantas partes o todo foi fracionado e o valor encontrado será o denominador da sua representação fracionária. Analogamente, contase a quantidade de partes hachuradas ou pintadas para que se obtenha o valor que será utilizado como o numerador de sua representação fracionária.

A questão mais significativa observada, portanto, é o fato de que há uma tendência do aluno em tomar como referencial o maior conjunto de objetos ou de partes de objetos disponível. As diferentes formas de apresentar a questão, por mais enfáticas que sejam ao definir o referencial, não impedem que um número considerável de sujeitos mantenha essa tendência. A observação das respostas também sugere que é irrelevante o fato de se tratar de fração imprópria ou não (CAMPOS; RODRIGUES 2007, p.87).

Na prática, o uso dessa técnica, tão comum no ensino desse conhecimento, traz alguns problemas, pois o aluno fica condicionado a contar todas as partes do objeto ou todos os objetos de um dado conjunto e tomar o resultado como o denominador de sua fração. Por isso, ao mostrar a eles a imagem de uma pizza fatiada em 8 pedaços, por exemplo, eles logo entendem que cada pedaço representa um oitavo do total da pizza. Porém, se acrescentado mais uma imagem de uma pizza, também fatiada em oito pedaços, isso irá gerar conflitos e alguns educandos, que não tenham entendido completamente o conceito de fração, poderão perder o referencial e afirmar que uma fatia equivale a um dezesseis avos mesmo tendo sido alertado que o referencial de unidade não foi alterado².

Fernandes (2008) chama a atenção para a importância de se construir, nos alunos, a ideia de unidade e suas subdivisões quando da construção do conceito de fração. Ele também nos

² O que não se configura um *erro* absoluto, mas, relativo, estrutural das representações de referência. O novo todo, tomado pelo aluno nesse erro citado, é uma visão de um novo todo, que são as duas pizzas agora vistas como uma única unidade. Para a distinção dessas unidades, e consequente *leitura* dessa fração imprópria, é necessária a elaboração de outros conceitos. Para o senso comum, fração é vista como *fração própria*, em que a fração é sempre uma quantidade menor que a unidade considerada.

alerta, por outro lado, que desenvolver nos alunos as ideias de ordem, sequência, equivalência e intervalo possui igual importância. Ressalta, ainda, que a compreensão da relação de ordem se faz pela relação entre números e que os alunos geralmente sabem que o número inteiro 5 é maior que o inteiro 2, por exemplo. Contudo, possuem muitas dificuldades em ordenar frações como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

Percebe-se que mesmo quando as frações possuem denominadores idênticos as dificuldades em ordená-las permanecem. Ao ser questionado por quais motivos o aluno acredita que $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{2}{3}$, em muitos casos, o aluno tenta justificar sua resposta usando a forma decimal dos números racionais. Dificilmente ficariam em dúvida ou procurando explicações para justificar o porquê do inteiro 5 ser maior que o inteiro 2, pois neste caso a ideia de unidade está bem internalizada, ao passo que naquele a ideia de unidade não é associada.

Quando o tema estudado são as frações, os alunos não conseguem perceber o caráter de unidade envolvido nelas, ou seja, eles não percebem que $\frac{1}{3}$ equivale a uma parte das três em que o todo foi fracionado nem que $\frac{2}{3}$ equivale a duas dessas partes e nós, enquanto professores, não temos chamando a atenção para isso.

O educador deve optar por trabalhar de maneira informal e intuitiva no sentido de garantir o efetivo conhecimento dos conceitos básicos partindo do contexto da coleção que já é familiar ao aluno pelo fato de lidar desde cedo com diferentes grupos de objetos, como brinquedos, coleções, entre outros. O conteúdo pode distribuir-se gradualmente a partir da noção intuitiva de fração (metade, quarta parte e outros) com ênfase para problemas do cotidiano, a serem resolvidos com o uso de material, sem apelar para representação simbólicas ou regras operatórias (FERNANDES, 2008, p. 6 - 7).

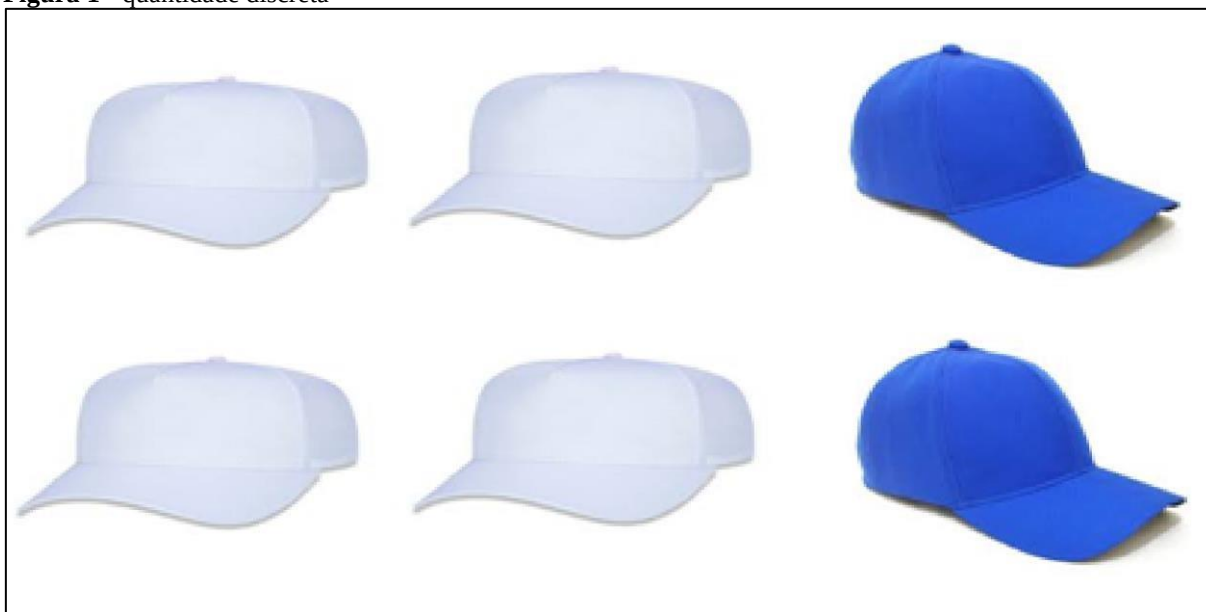
Tais argumentos reforçam o fato de que ao ensinarmos frações estamos nos distanciando tanto dos procedimentos aos quais os alunos estão habituados que fica a impressão de estarmos tratando de coisas totalmente distintas, sem nada em comum. Como os alunos irão compreender as frações e todas as suas peculiaridades sem que antes tenham construído as bases necessárias para tanto? Isso faz com que os alunos acumulem fracassos na disciplina e acaba criando um cenário de desmotivação que acomete alunos, professores e muitos outros profissionais da educação. Sem saber ao certo como agir diante da problemática, Fernandes (2008) afirma que muitas escolas têm, a cada dia, exigido menos dos seus alunos, em relação às operações com frações, deixando de relacionar as atividades com as situações do cotidiano.

As situações do dia a dia são riquíssimas de exemplos para o trato com frações e se o professor não usa essa gama de possibilidades as perdas são enormes, mesmo porque os alunos que estão no processo de aprendizagem de frações estão transitando entre os estágios cognitivos denominados por Piaget de, segundo Didats (2020), operatório-concreto e lógico-formal. O que os deixa, ainda, muito dependentes de exemplos com situações concretas para uma melhor assimilação, já que estão desenvolvendo a sua capacidade de abstração e parece haver uma distância grande entre conhecimento significativo e a realidade apresentada.

Santos (2016), quando da realização de sua pesquisa que teve como objetivo identificar e analisar o rendimento e as estratégias utilizadas por estudantes que estavam concluindo o Ensino Fundamental ao resolverem itens sobre números racionais de avaliações externas, traz uma outra questão problemática, o uso da dupla contagem parte-parte. Ao citar Santos (2011) e Merline (2005), ele afirma que o primeiro, ao realizar uma pesquisa com 276 concluintes do Ensino Fundamental, observou que 70,6% desses alunos realizaram a dupla contagem parteparte quando tentavam resolver uma questão com significado parte-todo, mas que envolvia quantidades contínuas. O segundo, em um estudo que investigou a formação e o desenvolvimento do conceito de frações em 120 alunos dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental identificou, em um item com significado parte-todo, mas com quantidade discreta, a estratégia de dupla-contagem parte-parte, onde 47,5% dos alunos cometeram esse erro.

Tentaremos esclarecer melhor o que seja a dupla contagem parte-parte, tomando como exemplo o exercício analisado por Merline: suponha seis bonés, sendo dois azuis e quatro brancos.

Figura 1 - quantidade discreta



Fonte: modificado de Dafiti (2020, p. 1); Bonés da Moda (2020, p.1).

Ao ser questionado qual a representação fracionária dos bonés azuis em relação a quantidade total de bonés os alunos respondem $\frac{2}{4}$ ao invés de $\frac{2}{6}$. Ou seja, eles não consideram o todo, a totalidade de uma unidade de referência.

A prática de sala de aula, entretanto, revela que mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações e demonstram não conhecer aspectos relevantes do conceito de número racional, o que acarreta prejuízos à compreensão de novos conceitos matemáticos (CAMPOS; RODRIGUES 2007, p. 70).

São tantas as lacunas no aprendizado das frações que vão se acumulando ao longo da vida acadêmica do aluno que boa parte deles apresenta dificuldades em ordená-las, ou seja, reconhecer quando uma fração é maior ou menor que a outra, isso ocorre até mesmo quando as duas frações possuem o mesmo denominador. Fica evidente as inúmeras dificuldades existentes na apropriação dos conceitos que envolve as frações.

3.2 Falta de uma base de apoio na construção desse conhecimento

A ausência de uma complementaridade entre conhecimento empírico e conhecimento formal é um complicador para os processos de comunicação do conhecimento científico como um todo, mais especificamente do conhecimento matemático, pois a matemática é o conhecimento que depende totalmente das representações simbólicas e das possibilidades de interpretações que podem ser apresentadas para diferentes sujeitos com níveis baixos de conhecimento científico. Campos e Rodrigues (2007) nos lembram que:

A aquisição do conhecimento matemático escolar, como modernamente é concebida, pressupõe que o aluno desenvolva a capacidade de estabelecer relações entre conceitos, construindo uma teia de saberes relacionados, que possibilite agregar novos conhecimentos ao seu repertório – embasando-se em etapas anteriores – e, assim, construir um conjunto de novos conceitos, sempre interligados uns aos outros, que virão a formar seu conhecimento matemático (CAMPOS; RODRIGUES 2007, p. 2).

Esses conceitos aos quais se referem a citação anterior fazem referência ao ensino tradicional de Matemática. Por ainda estarmos na *hegemonia formalista*, as habilidades cognitivas predominantes giram em torno da memorização e manipulação simbólica de propriedades em suas estruturas, é a regra.

Os trabalhos analisados e as observações em sala de aula têm mostrado que o ensino de frações, nas escolas brasileiras, não tem sido capaz de fornecer aos alunos uma base para que possam desenvolver esse conceito em toda a sua plenitude.

A forte ênfase no modelo parte-todo e o ensino totalmente desvinculado da prática tem deixado grandes lacunas na apropriação desse conhecimento. Soma-se a isto os problemas que se criam quando se quer ensinar apenas as operações que as envolvem, percebe-se uma atenção exagerada nos procedimentos e nos algoritmos fazendo com que os educandos tenham enormes dificuldades em assimilar o conteúdo.

Os alunos que vão iniciar o aprendizado de frações já estão familiarizados com os números inteiros e suas operações básicas. Esse fato faz os alunos, vez ou outra, tratarem as frações como números inteiros. Assim, trazemos nesse trabalho uma reflexão sobre sequências didáticas, partindo de algo conhecido, já adquirido pelo aluno como base na construção desse conhecimento.

Segundo Gómez-Granell (1998) uma boa parcela dos erros cometidos pelos alunos deve-se ao fato do ensino ter sido baseado muito mais na aplicação de regras que na compreensão do significado. Os alunos aprendem a manipular símbolos sem se aperceberem do sentido que eles têm, aplicam as regras que lhes foram ensinadas, mas não são capazes de conectá-las nem com seu conhecimento procedimental nem com o conceitual (FERNANDES, 2008, p. 11).

Desde cedo as crianças são estimuladas a fazerem uso dos números inteiros ao indicar quantos anos possuem, quantos doces elas têm nas mãos, quantos dedos possuem em cada mão, etc. Assim, elas passam a internalizar alguns conceitos fundamentais que acabam carregando por toda vida, como: a noção de contar e de ordenar (onde 1 é menor que 2, 2 é menor que 3, etc.). Elas também entendem, logo cedo, que juntando um dedinho com o outro dedinho equivale a dois dedinhos, que juntando mais um dedinho aos outros dois, terá três dedinhos.

Dessa forma a criança vai construindo seu conceito de soma mesmo antes do ambiente escolar. Analogamente, se ela tem dois doces nas mãos e come um deles, ela entende que restou apenas um. Desenvolvendo, dessa forma, as primeiras noções de subtração.

Esse processo se inicia muito cedo na vida da criança e perdura por um grande período do início da vida dela. São esses conceitos iniciais que servirão de base para que no futuro elas se apropriem, com mais facilidade, das operações com números inteiros.

No entanto, quando se inicia o processo de ensino e aprendizagem de frações nada disso é considerado. O aluno, de uma hora para outra, vê-se diante de conceitos, simbologias e um processo de soma e de subtração que diferem muito daquelas ao qual estavam familiarizados.

A formação de uma base que sirva de alicerce na construção do conceito de frações é de fundamental importância. Antes de se falar em procedimentos, algoritmos e em mínimo múltiplo comum, o aluno precisa entender que $\frac{1}{3}$ é menor que $\frac{2}{3}$ e que $\frac{2}{3}$ é menor que $\frac{3}{3}$, etc. e que isso ocorre não apenas porque ao dividirmos os respectivos numeradores pelos respectivos denominadores encontraremos decimais, também, respectivamente menores, mas sim por terem observado o caráter unitário de cada fração, onde um terço representa uma das três partes em que algo foi fracionado e que dois terços equivalem a duas partes das três em que algo foi repartido, por exemplo.

A compreensão, por parte do aluno, de que as frações são números, portanto, que podem usá-las para contar e medir semelhante ao que fazem com os números inteiros é importante, pois ajuda a entender que esse processo não acaba quando se atinge o valor inteiro da fração e dessa forma ao se contar $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{3}$ a conta não se encerrará ao atingir $\frac{3}{3}$. Significa que se pode continuar contando de forma indefinida ($\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \dots$). Ou seja, se faz necessário que eles entendam que apesar de estudos indicarem que as frações surgiram do fracionamento de algo é comum termos frações que representam uma porção maior que o todo, porém esse entendimento só será possível se tiverem onde se apoiar. Ele precisa aprender a contar, a medir, a brincar com frações, antes de mergulhar nesse mundo complexo e abstrato, pois assim estará retomando os esquemas já adquiridos quando no uso dos inteiros e conseguirá visualizar com maior facilidade as propriedades que envolvem as frações.

3.3 A necessidade de se encontrar novas formas de se transmitir o conhecimento matemático

Entre os muitos desafios aos quais o professor precisa superar para exercer sua profissão, tem-se a necessidade de encontrar novas metodologias que possa envolver os alunos tornando as aulas mais atrativas.

Atrair a atenção dos alunos já não era algo muito fácil antes, agora, com o advento da internet cada vez mais presente no dia a dia deles, se tornou um trabalho árduo. Estudos apontam para a necessária mudança de comportamento, por parte dos educadores, diante de tantas distrações que a vida moderna tem oferecido para os alunos. Já não é mais aceitável uma aula meramente expositiva onde o aluno não passa de um simples expectador.

A necessidade de o aluno ter uma maior participação no processo de ensino e aprendizagem ao qual está inserido é fundamental, pois:

É necessária a busca de novas metodologias e recursos didáticos com objetivo de tornar o ensino de matemática contextualizado. Para isso a utilização de materiais manipuláveis permite superar o ensino pronto e acabado, exposto por meio de regras por atividades que fazem o aluno descobrir os conceitos em um ambiente prazeroso e interagindo com os colegas (MATIOLI, 2014, p.11).

Por esse motivo e compreendendo que a teoria precisa caminhar junta com a prática para um melhor aproveitamento dos conteúdos ministrados, sugerimos uma opção de intervenção pedagógica com o uso do material didático denominado *Réqua de Cuisenaire*.

4 UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Acredita-se que a utilização de materiais concretos e lúdicos auxilia e contribui para a eficácia do aprendizado do aluno que permite ao aluno evoluir segundo seu próprio ritmo (FERNANDES, 2008).

Enriquecer as aulas fazendo uso de material que possa ser manipulado pelos alunos traz a oportunidade de observar de forma concreta alguns conceitos envolvendo as frações, já que ainda é comum fazer o ensino destes conceitos de uma forma abstrata, com poucas possibilidades de visualização. Temos, como exemplo, que ao somar $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ eles poderão observar e manusear as peças que representam cada terça-parte. Percebendo, dessa forma, que juntando uma terça-parte com outra terá duas terças-partes ($\frac{2}{3}$). De modo análogo, se ele juntar mais uma dessas partes as outras duas terá três terças-partes ($\frac{3}{3}$) e assim sucessivamente.

Com isso, as operações de soma e de subtração, com o mesmo denominador, farão muito mais sentido para eles do que simplesmente lhes ensinarmos técnicas de resolução que eles irão decorar e pouco tempo depois irão esquecer. Claro que as operações de soma e de subtração de frações com o mesmo denominador são apenas uma parte do problema, diga-se de passagem, a menor delas, uma vez que as operações envolvendo frações com denominadores distintos são onde ocorre o maior número de erros. Mas se o aluno não sanar todas as dúvidas a respeito dessa parte da temática, essas dúvidas irão se acumular e as dificuldades serão ainda maiores quando estiverem tratando com frações de denominadores distintos.

4.1 A importância dos erros no aprendizado de matemática

Jo Boaler (2019) em seu livro “O que a matemática tem a ver com isso?” fala da importância de se cometer erros durante o aprendizado da matemática. Segundo essa autora:

Sempre elogie os erros e diga que você está muito satisfeito que seu filho está cometendo erros. Pesquisas recentes mostram que nosso cérebro cresce quando cometemos erros. Os cientistas descobriram que quando as pessoas cometem erros de matemática, as sinapses se ativam e ocorre atividade cerebral que não está presente quando acertam (BOALER, 2019, p. 143).

A autora continua destacando que tanto adultos quanto crianças odeiam cometer erros em matemática, pois os erros os fazem pensar que não foram feitos para aquilo. Daí, a

importância de dizer-lhes o quanto eles podem aprender com cada erro cometido. Boaler (2019) relata algo ocorrido com sua filha quando um professor decidiu que ela não era boa em matemática.

De certa forma, é bem característico do professor tradicional usar os erros cometidos por seus alunos para determinar quem é bom e quem é ruim em matemática, quem aprende e quem não irá aprender matemática ao invés de agir de forma reflexiva a respeito de tais erros.

A capacidade de se colocar no lugar de seus alunos é um requisito indispensável ao professor desses novos tempos para que, assim, perceba as dificuldades de seus alunos e dessa forma possa criar mecanismos para ajudá-los. É através das dificuldades de seus alunos, procurando caminhos para saná-las, que o professor terá a oportunidade de corrigir as falhas no processo de ensino e aprendizagem, aperfeiçoando o seu próprio processo didático.

O professor tem de estar sempre revendo o que pode ser melhorado, fazendo uma reflexão crítica acerca do trabalho que vem desempenhado em sala de aulas e investigando quais as principais dificuldades dos alunos. No caso em estudo, relativo ao estudo das frações, o professor tem de investigar, principalmente, se os alunos estão tendo uma aprendizagem significativa sobre as operações com frações ou se estão apenas reproduzindo regras matemáticas que não fazem sentido algum (RENZ, 2011, p. 17).

Sem dúvida que o sonho de todo professor é que seus alunos, em sua totalidade, entendam plenamente os conteúdos ministrados e que os erros cheguem a um patamar de zero por cento. Contudo, essa não é a realidade dos alunos brasileiros e os erros ocorrem com mais frequência do que se gostaria. Errar quando se está tentando aprender matemática não é o fim do mundo, ao contrário, é uma ótima oportunidade de se apropriar verdadeiramente de tal conhecimento.

Assim, é perfeitamente compreensível e aceitável que se cometa equívocos quando se quer aprender algo novo, entretanto, quando os erros ocorrem com muita frequência e de forma persistente são indícios de uma má compreensão dos conceitos. Afinal, não se quer que os alunos permaneçam no erro, muito pelo contrário, a ideia é que eles possam aprender com seus próprios erros.

4.2 A passividade dos educadores frente aos erros dos educandos

São inúmeros os estudos que apontam onde os alunos irão errar, com relação às frações, e os tipos de erros que irão cometer, mesmo assim ainda se encontra profissionais permitindo que eles continuem a cometer tais erros sem que seja feita uma reflexão a respeito.

Os erros cometidos pelos alunos devem ser considerados material para pesquisa, pois se sabemos que eles irão errar e os tipos de erros que irão cometer ao lidar com frações, então por que os deixamos cometê-los? Por que, nós, enquanto educadores, não os alertamos a respeito de tais possibilidades? Por que não os informamos do número grande de alunos que, provavelmente, irá cometer tais erros naquela turma?

Talvez, sabendo antecipadamente das possibilidades de cometerem tais erros, antes mesmo de chegarem a cometê-los, poderá se amenizar a ocorrência desse problema. Servindo, assim, como mais uma opção metodológica na luta por uma melhor compreensão e assimilação dos conceitos de fração.

Sem dúvidas que os algoritmos e o processo de mínimo múltiplo comum facilitam muito as operações, porém no início do processo de aprendizagem das frações, eles mais dificultam do que ajudam, pois omitem a percepção de muitos conceitos.

Por isso, torna-se importante investigar os conceitos envolvidos e buscar representá-los em diferentes níveis, explorar seu vocabulário, campos de significados, representações significativas, etc. Podemos explorar com o MMC, como representar *múltiplos*, buscar compreender por que existe um múltiplo que é o menor, ou seja, *o mínimo*, e por que um múltiplo pode ser *comum* a dois ou mais números.

Para Escolano e Gairín (2005) a construção do conceito de fração, tendo como ponto de partida o modelo parte-todo aqui descrito, tem como característica a constatação de que boa parte do conhecimento é adquirido de forma visual, e o fato de que a atividade não está associada a tarefa de medir grandezas. Os autores entendem que não considerar um processo de medição, intrínseco a própria gênese do número racional, faz com que o modelo crie obstáculos a formação de concepções adequadas (RODRIGUES, 2007, p. 53).

Portanto, precisamos considerar que muitas reflexões podem ser efetuadas, como, por exemplo, em se tratando de um todo discreto, uma clara relação com noções de distribuição de unidades, noções empíricas de divisão. Em se tratando de um todo contínuo, como uma barra retangular, uma pizza, há uma relação com área, que em sua noção empírica é algo percebido, visualizável e comparável com outros objetos da percepção, destacadamente as frações.

Outra questão conceitual apropriada para o destaque diz respeito a que duas frações com denominadores diferentes são elementos em unidades de medidas diferentes. Não dá para somar centímetros com quilômetros sem que haja a compreensão da transformação que precisa ser efetuada, ou seja, a conversão para uma mesma unidade de medidas, por exemplo. Parece óbvio, mas não se tem dado tanta importância a esse fato na hora de repassar tal conhecimento.

Os processos de soma ou de subtração de frações com o uso de algoritmos ou através de frações equivalentes, ao mesmo tempo em que efetuam a operação também convertem a uma mesma unidade de medida, deixando todo o processo com uma aparência muito diferente do que os educandos estão habituados.

4.3 Proposta de intervenção pedagógica: problematizando a Régua de Cuisenaire

O material escolhido para formular uma proposta tem grande potencial didático, pois permite que o aluno desenvolva o seu conhecimento através da manipulação de suas peças. O educando terá a oportunidade de trabalhar todos os conceitos que envolvem as frações de modo palpável, coisa que até então eles têm feito, unicamente, por meio da visualização abstrata. Esse material possibilita atividades significativas com quantidades fracionárias, problematizações, transformações pela visualização dos conceitos.

Como Renz (2011) já havia alertado, a falta de visualização é um primeiro problema criado com a prática procedimental, apenas da manipulação de símbolos, que se torna obstáculo, uma dificuldade a mais.

A Régua de Cuisenaire consiste, originalmente, em um conjunto de barrinhas, semelhantes a paralelepípedos, congruentes entres si, que foram repartidas de modo a representarem as mais variadas frações.

O material com o qual são produzidos pode ser plástico ou madeira, mas também podem ser confeccionados, de forma artesanal, com cartolina, EVA, etc. Para ajudar no aspecto visual as barrinhas precisam ter cores distintas, de modo que as barras vizinhas não possuam a mesma cor.

Figura 2 – Régua de Frações

Fonte: modificado de Escolaronline.com (2020).

Ao usarmos a Régua de Cuisenaire para desenvolvermos com os alunos os conceitos de frações, como o meio, o terço, o quarto, etc. as barras são fracionadas de modo a representar esses conceitos.

A primeira barrinha representa a parte inteira, daí não possui divisões; a segunda barrinha vem repartida em duas partes congruentes entre si para representar o meio; a terceira barrinha vem repartida em três partes congruentes para representar o terço enquanto a quarta barrinha está repartida em quatro partes indicando o quarto, a quinta barrinha está repartida em cinco representando o quinto e daí por diante até a última barrinha, que, em geral, representa o décimo. Nada impede que se dê continuidade nesse processo e se faça Régua de Cuisenaire com mais de dez barrinhas.

Para Polya, a atividade de resolução de problemas fica empobrecida se não for articulada com a formulação de problemas. Para muitos outros autores, é necessária a incorporação das atividades de:

[...] formulação de problemas no processo de ensino/aprendizagem da matemática (e.g. Kontorovich, Koichu, Leikin, & Berman, 2011), particularmente por possibilitar o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos assim como promover a compreensão dos processos resultantes da sua resolução (BOA VIDA et al., 2008 apud PINHEIRO; VALE, 2019, p. 174).

A Régua de Cuisenaire permite apresentar os conceitos de forma visual e explorar outro aspecto fundamental que é problematizar durante a atividade utilizando conceitos relacionados à fração e suas operações. É possível elaborar problemas manipulando material, fazendo

comparações e até formular hipóteses sobre operações, equivalências, desigualdades, etc., enfim, elaborar e resolver problemas. Devemos nos lembrar que o sucesso de um conhecimento profundo e sólido passa por combinar, de forma harmônica, teoria e prática.

A utilização de um material didático não implica na sua manipulação, simplesmente. Tentar adquirir-lo na forma industrializada produz dificuldades. Assim, propomos que a atividade para o estudo de frações, utilizando a Régua de Cuisenaire, inicie-se com a construção, por parte dos alunos, de sua própria régua. É possível construí-lo com materiais disponíveis em ambientes escolares, como papel, cartolina, EVA, papelão ou mesmo sucata disponível em ambientes extra classe, como madeira, compensados ou algum outro material que possa parecer apropriado.

A cada etapa do processo de produção os alunos irão acrescentando conceitos, utilizando instrumentos de medidas e, assim, desenvolvendo vocabulário em uma atividade que possibilita novas habilidades e até consolidando algumas já conhecidas. Os alunos devem ser elaboradores desde seu próprio material didático e em todo processo de ensino/aprendizagem, começando pela escolha, em uma lista de possibilidades, do material que eles irão utilizar na construção de suas Régua de Cuisenaire. Cada aluno deverá escolher o tamanho, a largura e as cores que as barrinhas terão.

Em Matemática, a importância da construção do próprio material didático vai além da reprodução de algum objeto já industrializado. A transformação do objeto deve estar inserida no rol de problematizações. Assim, ao exibirmos uma Régua de Cuisenaire tradicional, observaremos que são padronizadas para representarem apenas até a fração $\frac{1}{10}$. Nessa proposta, compreendemos que é necessário ir além, e, sugerir o uso de uma cartolina ou folha de EVA para problematizarmos a possibilidades de outras subdivisões, desafiar para a construção de uma Régua de Cuisenaire até o limite da execução utilizando material didático e depois elaborar atividades na hipótese do que acontece se usamos só representação numérica.

Ao produzir seu próprio material, desde a escolha da matéria prima para o objeto, os alunos e o educador matemático podem problematizar, elaborando questões que contém os mais variados conceitos envolvendo frações. Por exemplo, ao dividirem uma barrinha em duas partes iguais eles deverão denominar cada parte por meio, ou metade, utilizando a mesma linguagem anterior à escola, escrevendo também a representação numérica da fração correspondente ($\frac{1}{2}$).

$\frac{1}{2}$ Meio	$\frac{1}{2}$ Meio
-----------------------	-----------------------

A ideia é que os alunos façam isso durante todo o processo de produção de sua Régua de Cuisenaire. Portanto, ao dividirem uma barrinha em três partes iguais devem denominá-las por *terça parte*.

$\frac{1}{3}$ Terça parte	$\frac{1}{3}$ Terça parte	$\frac{1}{3}$ Terça aprte
------------------------------	------------------------------	------------------------------

Dessa forma, à medida que forem dividindo cada barrinha, os alunos deverão denominar cada parte fracionada pelo *nome* que representa cada parte, em linguagem natural, e representando por números. Ou seja, meio, ao dividir uma barrinha em duas partes iguais; terço, ao dividir uma barrinha em três partes iguais; quarto, ao dividir uma barrinha em quatro partes iguais e assim por diante.

Figura 3 _ Tabela Fracionada

$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{3}$			
$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$	
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Fonte: modificado de Ensinandomatematica.com (2017, p. 7).

O material também permite que o aluno perceba, por visualização e por comparação, que a metade é maior que a terça parte, que a terça parte, ou, *um terço* é maior que a quarta parte ou *um quarto*, etc. Essa descrição, denominando e numerando as partes fracionadas da régua, é um vocabulário de referência para compreensão das frações. Obviamente, devemos ressaltar que isso vale para régua com mesma área. Depois desse vocabulário é possível explorar o conceito de ordem das frações unitárias e depois as desigualdades, equivalências, etc.

Deve-se permitir a manifestação, pelos alunos, dos aspectos lúdicos que o material sugere, manifestação espontânea para elaboração de hipóteses que são perguntas que devem sempre ser respondidas. Afirmarções devem ser comprovadas ou refutadas, usando comparações, sobreposição de peças, usar representações numéricas para hipóteses sobre operação com frações, ou seja, provar explicando. Por exemplo, é provável que, com essa

abordagem, ao serem questionados sobre qual o resultado da soma de *uma quinta parte*, mais, *outra quinta parte*, a resposta - *duas quintas partes*, ou, simplesmente, $\frac{2}{5}$ surja com naturalidade sem as regras ainda terem sido apresentadas. Assim, ao apresentarmos a regra – *para somar fração com mesmo denominador, soma o numerador e repete o denominador* terá outro significado, terá uma referência.

Se retomarmos a problemática anteriormente abordada por Fernandes (2008), que apontou as dificuldades dos alunos em ordenarem frações como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, porque não percebem seu

23

caráter unitário, atividades com a Régua de Cuisenaire permitem que o aluno atue sobre o que visualiza como, por exemplo, efetuando uma sobreposição de peças.

Tendo a disposição uma variedade de frações unitárias, sujeitos em diferentes níveis conceituais poderão utilizar sobreposição de peças para comprovar diferentes conceitos, por exemplo, somar frações unitárias com denominadores diferentes. Podemos sugerir que somem $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{3}$ sobrepondo peças menores como forma de desafio, até que encontre uma fração que se encaixe tanto em $\frac{1}{2}$ como em $\frac{1}{3}$. Caso o aluno não encontre, podemos sugerir e, assim, fazê-lo testar a fração $\frac{1}{6}$, permitindo a ele observar, por sobreposição, que na representação, $\frac{1}{2}$, da Régua de Cuisenaire cabem exatamente três frações $\frac{1}{6}$, que reforçaremos denominando $\frac{3}{6}$, ao passo que na representação de $\frac{1}{3}$ cabem exatamente duas dessas frações.

Esse tipo de problematização permite explorar um referencial significativo para frações equivalentes, pois eles mesmos podem observar que $\frac{3}{6}$ equivalem a $\frac{1}{2}$ e de modo análogo $\frac{2}{6}$ equivalem a $\frac{1}{3}$ e devemos estimular a exploração para que também encontre a fração $\frac{3}{9}$, equivalente a $\frac{1}{3}$. Devem ser sempre estimulados a representar essas equivalências utilizando apenas símbolos numéricos e o sinal de igualdade.

Dessa forma, ofereceremos um referencial significativo para o aluno pensar em frações por comparações, correspondência, equivalência geométrica, equivalência de frações e até o porquê da importância de termos uma técnica para extrairmos um mínimo múltiplo comum.

Toda atividade humana implica, em algum grau, em teoria e prática. Na atividade docente, portanto, não é diferente, já que teoria e prática devem estar aliadas, para que seja possível a reflexão sobre a prática (FOTANA; FÁVERO, 2013).

O aluno precisa ser conduzido a fazer matemática. São várias as possibilidades com esse recurso didático que traz para o aluno a possibilidade de manipular esse material, fazendo com que atuem de forma participativa no seu aprendizado. Saindo, assim, da situação de observador a qual eles têm sido submetidos e que tornam as aulas tão desmotivadoras, para alguns. São tantos os concorrentes com o qual os professores precisam lidar, na busca pela atenção de seus alunos, que não é mais possível ignorar a ineficiência de uma aula onde o aluno participa apenas como um observador.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar essa pesquisa, a tentativa era entender o que leva tantos alunos a errarem as operações de soma ou de subtração de frações. Percebo, hoje, que as lacunas criadas no processo de ensino e aprendizagem de frações, aos moldes tradicionais, são maiores do que pensava no início.

O acúmulo de conceitos mal compreendidos gera dificuldades para que se possa compreender novos conceitos. Aliado à prática da manipulação simbólica, muitos conceitos não são apresentados explicitamente, o que faz com que os alunos executem manipulações simbólicas, sem saber ao certo o porquê.

Desta forma, como não conseguem entender os motivos pelo qual as coisas são daquele modo, o único processo cognitivo possível é a memorização. Esse privilégio apenas à memorização passa a falsa impressão de que os alunos que manipulam satisfatoriamente os símbolos compreenderam bem os conceitos, pois manipulam frações como se dominassem os conceitos relacionados. Porém basta um breve período sem *treinar* que alguns já apresentam dificuldades na compreensão e não possuem referenciais significativos para organizar novos pensamentos.

Assim, é fácil perceber a importância do Educador Matemático, que precisa agir como educador e como Matemático, explorando os métodos, ou procedimentos, e, também, os conceitos que são abordados em cada aula, visando assim, contribuir para que a aprendizagem aconteça.

Um dos grandes desafios do docente contemporâneo é encontrar formas de tornar as aulas mais atrativas, motivadoras a fim de envolver os alunos para que participem do seu aprendizado. Mas, para motivação, precisamos considerar a importância da ressignificação dos conteúdos curriculares, oferecendo referenciais mais significativos, como os visualizáveis em materiais didáticos, e que permitam explorar não só os conceitos, mas, também, raciocínios como o indutivo, o dedutivo, o analógico, intuitivos, utilizando linguagem natural.

Portanto, precisamos elaborar atividades em que os alunos possam fazer matemática, ou seja, formular hipóteses, tentar comprovar a existência ou não de suas afirmações e descrever seu próprio pensamento, desde os primeiros ciclos de ensino.

REFERÊNCIA

BOALER, JO. **O que a matemática tem a ver com isso?:** como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso. 1 ed. Porto Alegre: Penso, 2019

BONÉSDEMARCA.COM. **Boné azul liso esporte sem estampa unissex aba curva - super leve e com ajuste de tamanho.** 2020. 1 foto. Consulta online.

Disponível em: < <https://www.bonesdamoda.com.br/bones-aba-curva/bone-azul-liso-esportesem-estampa-unissex-aba-curva-super-leve-e-com-ajuste-de-tamanho> > Acessado em 03 de outubro de 2020.

BONNOTO, D. M. **Estratégia de ensino-aprendizagem de frações.** 2011, 62 p. (monografia) Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2011. Disponível em:

<<https://www.ufrgs.br/bibliotecas>>

Acessado em: 09 de outubro de 2019.

BOYER, C.B. **História da matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1974

CAMPOS, T. M.M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racionais. **Revemat**, Florianópolis, v. 2, n. 4, p.68-93, 2007. Disponível em:

<<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992/12093>>

Acessado em: 19 de agosto de 2019

DAFITI. **New era 940.** 2020. 1 foto. Consulta online.

Disponível em: < <https://www.dafiti.com.br/Bone-New-Era-940-A-frame-New-Era-BrasilAba-Curva-Branco-5056325.html> >

ESINANDOMATEMATICA.COM. **Tabela fracionada.** 2017. 1 foto. Consulta online.

Disponível em: < <https://www.ensinandomatematica.com/mais-sobre-fracoes/> > Acessado 10 de junho de 2020.

ESCOLARONLINE.COM. **Régua de frações 62 peças.** 2020. 1 foto. Consulta online.

Disponível em: < <http://www.escolaronline.com.br/produtos/reguas-de-fracoes/> > Acessado 10 de junho de 2020.

PIAGET(4)-ESTÁGIO DE DESENVOLVIMENTO | CONSTRUTIVISMO. Didatics.

Yountube. 2020. 11min.

Disponível em: < https://youtu.be/CRokAZi_RWM > Acessado em 03 de outubro de 2020.

FERNANDES, S. F. H. **As frações do dia-a-dia: operações.** 2008, 27 p. (Projeto de intervenção pedagógica na escola realizado pelo Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE) Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2008. Disponível em:

<<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/48-2.pdf>

Acessado em: 14 de setembro de 2019

FONTANA, M. J.; FÁVERO, A. A. professor reflexivo: uma integração entre teoria e prática. **Rei**, v.8, n.17, p. 15, 2013. Disponível em:

<https://www.caxias.ideau.com.br/wpcontent/files_mf/de946928fc01518999bb019ba65f89a830_1.pdf>

acessado em: 04 de fevereiro de 2020

LIMA, E. L. **Medida e Forma em geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MATIOLI, C. E. R. **Estratégia para o ensino das frações no sexto ano do ensino fundamental**. 2014, 45 p. (Monografia). Universidade Tecnológica do Paraná. Medianeira 2014.

MELO, I. A. S. C.; ANDRADE, P. H. F. Análise de erros em questões de adição e subtração com frações. **Web-mat**, Belém, v. 1, n. 1, p. 51-60, 2014. Disponível em:

<<https://paginas.uepa.br/seer/index.php/web-mat/article/view/265/229>>

Acessado em: 8 de agosto de 2019

POLYA, G. **Como resolver problemas**. 1ª edição. (Lisboa: Trabalho original publicado em 1945). Lisboa: Gradiva, 2003

RENZ, J.L. **Adição e subtração de frações**: uma proposta de ensino com auxílio das mídias digitais. 2011, 39 p. (Monografia). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sapianga, 2011.

Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/bibliotecas>> Acessado

12 de agosto de 2019.

ROQUE, Tatiana. **Historia da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RODRIGUES, W. R. **Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal**. 2005, p 247. (Monografia). PUC/SP. São Paulo, 2005.

Acesso em: 24 de agosto de 2019

SANTOS, R. S. **Rendimento e estratégias de estudantes concluintes do ensino fundamental na resolução de itens de avaliações externas**. 2016, p 2006. (monografia). Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2016.

VALE, I., & BARBOSA, A. **A resolução de problemas com frações - uma abordagem visual**. In E. Mamede, H. Pinto, C. Monteiro (Orgs), Contributos para o desenvolvimento do sentido ensino do número racional (pp. 233-260). Lisboa: Associação de professores de Matemática (APM) ISBN: 978-972-8768-72-0. 2019