

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

GUTEMBERG DA SILVA CARDOSO

**ESTUDO PARAMÉTRICO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DE LENTES
ACÚSTICAS DO TIPO CORE-SHELL PARA GERAÇÃO DE FEIXES
SUPERFOCALIZADOS**

**MACEIÓ
2022**

Gutemberg da Silva Cardoso

ESTUDO PARAMÉTRICO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DE LENTES ACÚSTICAS
DO TIPO CORE-SHELL PARA GERAÇÃO DE FEIXES SUPERFOCALIZADOS

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Física pelo Programa
de Pós-Graduação em Física da Universidade
Federal de Alagoas - UFAL, Instituto de Física.

Orientador: Prof. Dr. José Henrique Araujo
Lopes de Andrade

Coorientador: Prof. Dr. José Pereira Leão
Neto

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

C268e Cardoso, Gutemberg da Silva.
Estudo paramétrico das propriedades mecânicas de lentes acústicas do tipo core-shell para geração de feixes superfocalizados / Gutemberg da Silva Cardoso. – 2022.
90 f. : il. color.

Orientador: José Henrique Araújo Lopes de Andrade.

Coorientador: José Pereira Leão Neto.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 72-75.

Apêndices: f. 76-90.

1. Feixes superfocalizados. 2. COMSOL *Multiphysics* (Software). 3. Lentes acústicas. 4. Método dos elementos finitos I. Título.

CDU: 531.77



**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**“Estudo paramétrico das propriedades mecânicas de lentes acústicas
do tipo core-shell para geração de feixes superfocalizados”**

por

Gutemberg da Silva Cardoso

A Banca Examinadora composta pelos professores José Henrique Araújo Lopes de Andrade (orientador e presidente da banca), do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas; José Pereira Leão Neto (coorientador), do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas; Glauber José Ferreira Tomaz da Silva, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Theo Zeferino Pavan, da Universidade de São Paulo, consideram o candidato **aprovado com grau “A”**.

Maceió, 25 de fevereiro de 2022.

Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade

Prof. Dr. José Pereira Leão Neto

Prof. Dr. Glauber José Ferreira Tomaz da Silva

Prof. Dr. Theo Zeferino Pavan

Dedico este trabalho aos meus pais, Jocélia e Ivaldo, as minhas irmãs Gutylene e Kyara, e a todas as pessoas vítimas da COVID-19.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus amados pais Jocélia e Ivaldo por terem lutado diariamente para que eu permanecesse dentro da universidade, por me darem a melhor educação que conseguiram oferecer e por todo o apoio e suporte durante a pós-graduação; e as minhas irmãs Gutuelle e Kyara, por estarem sempre comigo.

Agradeço aos demais membros da minha família por sempre acreditarem no meu potencial, e me incentivarem em minha jornada.

Agradeço aos professores e servidores das escolas em que passei antes de iniciar minha vida acadêmica e aos amigos que fiz nestes locais.

Agradeço aos amigos e amigas que fiz durante a vida acadêmica, em especial a Célio, Aytana, Alisson, Taynah, Ana Maria e Daiane por me ajudarem a suportar e vencer todos os desafios de uma pós-graduação.

Agradeço a todos os integrantes do Grupo de Acústica e Aplicações (GAAP) da UFAL-Arapiraca e do Grupo de Acústica Física (GAF) do Instituto de Física por todo conhecimento e experiência adquiridos durante as reuniões.

Agradeço a todo o corpo docente do Instituto de Física pelo compartilhamento de conhecimento nas disciplinas do curso, especialmente ao professor Glauber T. Silva, por ser um exemplo de pesquisador e docente.

Agradeço aos meus orientadores e amigos José Henrique Araujo Lopes de Andrade e José Pereira Leão Neto por sempre se fazerem presentes quando precisei e desempenharem de forma primorosa a orientação deste trabalho.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro crucial durante o curso.

“Ninguém vai bater tão duro como a vida. Mas não se trata de bater duro. Se trata de quanto você aguenta apanhar e seguir em frente, o quanto você é capaz de aguentar e continuar tentando. É assim que se consegue vencer.”

Rocky Balboa

RESUMO

O ultrassom é uma modalidade de imagem clínica segura, não invasiva e econômica amplamente utilizada em diagnóstico médico e ensaios não-destrutivos. Porém, apesar de todos os avanços atuais, devido a sua natureza clássica, a resolução lateral de sistemas de imagem por ultrassom é limitada a um comprimento de onda do feixe incidente. Essa limitação é conhecida como limite de difração. Feixes superfocalizados gerados por lentes em forma de esfera têm chamado a atenção devido à sua simplicidade e eficácia na produção de imagens de alta resolução e na tarefa de vencer o limite de difração. Esses feixes são gerados no lado de sombra da lente após o espalhamento de um campo de ultrassom incidente. Devido à dependência desses feixes com os parâmetros mecânicos das lentes, um estudo detalhado das propriedades da lente é necessário para otimizar os sistemas e aplicações em imageamento de alta resolução. Assim, a presente dissertação visa o estudo paramétrico das propriedades mecânicas de lentes acústicas do tipo *core-shell* por meio de simulações numéricas. Para a realização de tal estudo, utilizamos o Método de Elementos Finitos (MEF) por meio do software comercial COMSOL *Multiphysics*. Todas as simulações foram realizadas com a lente submersa em um fluido ideal e irradiada por uma onda plana com frequência de 1MHz e comprimento de onda $\lambda = 1,49$ mm, onde variamos as propriedades mecânicas e as dimensões da lente *core-shell*. Nossas simulações utilizaram os módulos *Pressure Acoustics*, *Frequency Domain* e *Solid Mechanics*, onde em seguida foram calculados os parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados. Nossos resultados mostraram que os parâmetros de feixes gerados com uma casca de Rexolite e núcleos de fluidos são mais sensíveis em comparação com núcleos metálicos, de forma que os primeiros possuem maior versatilidade em termos de aplicações em sistemas de alta resolução. Variando o raio do núcleo e a espessura da casca obtivemos variações expressivas dos parâmetros dos feixes. Este estudo pode ser uma ferramenta útil para projetar novos transdutores de elemento único para aplicações em sistemas de imagem de alta resolução.

Palavras-chave: Feixes superfocalizados. COMSOL *Multiphysics*. Lentes acústicas. Método de elementos finitos. Estudo paramétrico.

ABSTRACT

Ultrasound is a safe, non-invasive, and cost-effective clinical imaging modality widely used in medical diagnostics and non-destructive testing. However, despite all current advances, due to its classical nature, the lateral resolution of ultrasound imaging systems is limited to one wavelength of the incident beam. This limitation is known as the diffraction limit. Superfocused beams generated by sphere-shaped lenses have attracted attention due to their simplicity and effectiveness in producing high resolution images and in the task of overcoming the diffraction limit. These beams are generated on the shadow side of the lens after scattering an incident ultrasound field. Due to the dependence of these beams on the mechanical parameters of the lens, a detailed study of the lens properties is necessary to optimize high resolution imaging systems and applications. Thus, the present dissertation aims at the parametric study of the mechanical properties of core-shell acoustic lenses through numerical simulations. To carry out this study, we used the Finite Element Method (FEM) through the commercial software COMSOL Multiphysics. All simulations were performed with the lens submerged in an ideal fluid and irradiated by a plane wave with a frequency of 1MHz and wavelength $\lambda = 1.49$ mm, where we varied the mechanical properties and dimensions of the lens core-shell. Our simulations used the modules Pressure Acoustics, Frequency Domain and Solid Mechanics, where the characteristic parameters of the generated superfocused beams were then calculated. Our results showed that the parameters of beams generated with a Rexolite shell and fluid cores are more sensitive compared to metallic cores, so that the former have greater versatility in terms of applications in high resolution systems. By varying the core radius and the shell thickness, we obtained expressive variations in the parameters of the beams. This study can be a useful tool for designing new single-element transducers for applications in high-resolution imaging systems.

Keywords: Superfocused beams. COMSOL Multiphysics. Acoustic lenses. Finite element method. Parametric study.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – a) Fotografia de uma moeda de 10 centavos de Real. b) Imagem de modo C feita utilizando-se um feixe superfocalizado com resolução lateral de $0,48\lambda$.	19
Figura 2 – Onda sonora unidimensional que se propaga ao longo de um eixo z para um tempo t arbitrário.	21
Figura 3 – Representação de um campo de velocidade \mathbf{v} para os tempos t e $t + \Delta t$ na descrição a) Lagrangiana (elemento de fluido representado pelo quadrado azul) e b) Euleriana (região fixa representada pelo círculo vermelho).	24
Figura 4 – Configuração do problema de espalhamento acústico por uma lente acústica imersa em um fluido ideal.	34
Figura 5 – Malha de elementos para um determinado domínio Υ	39
Figura 6 – Espalhamento de uma onda plana por uma lente acústica esférica.	40
Figura 7 – GUI do software COMSOL.	42
Figura 8 – Tela do COMSOL com as definições iniciais de simulação.	43
Figura 9 – Geometria desenhada no COMSOL para a) o meio fluido e b) para o núcleo de uma lente acústica de raio 4λ (5,972 mm).	45
Figura 10 – a) Geometria desenhada no COMSOL para a casca de uma lente acústica de espessura 3λ (4,479 mm). b) Geometria completa para uma lente acústica com núcleo de raio 4λ (5,972 mm) e casca de espessura 3λ (4,479 mm) e o meio na qual a lente está imersa.	46
Figura 11 – a) Objetos sob o domínio da física <i>Pressure Acoustics, Frequency Domain</i> (núcleo em verde válido somente para os materiais Benzeno, Metanol, Óleo de Oliva, Óleo de Silicone, Ar e Metanol), onde foram utilizadas as interfaces <i>Background Pressure Field</i> (em azul, exceto as camadas absorvedoras) e <i>Sound Hard Boundary (Wall)</i> (em amarelo). b) Objetos sob o domínio da física <i>Solid Mechanics</i> (núcleo em verde válido somente para os materiais Aço, Alumínio, Chumbo e Níquel).	50
Figura 12 – a) Camada absorvedora onde foi utilizada a PML. b) Interfaces sob o domínio da ferramenta <i>Acoustic-Structure Boundary</i> (interface verde válida somente para lentes acústicas com núcleo fluido).	51
Figura 13 – Malha criada para a realização das simulações utilizando as ferramentas <i>Mapped</i> (camada absorvedora em cinza) e <i>Free Triangular</i> (lente acústica e meio no qual a lente está imersa, em azul e verde, respectivamente).	53
Figura 14 – Intensidade normalizada em relação à direção a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de um feixe superfocalizado gerado por uma lente acústica com núcleo composto por Aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite com espessura $t = 3,5\lambda$. c) Perfil de intensidade 2D do feixe.	57

Figura 15 – Erros relativos das intensidades normalizadas em relação ao parâmetro do <i>Mesh</i> γ , onde I_{ref} é tomado como sendo o valor de intensidade para $\gamma = 30$. As simulações foram realizadas utilizando-se uma lente acústica com núcleo composto por aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite com espessura $t = 3,5\lambda$.	59
Figura 16 – Intensidade normalizada na interface Meio-PML nas direções a) axial e b) transversal de uma onda espalhada por uma lente acústica com núcleo composto por Aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite de espessura $t = 3,5\lambda$.	60
Figura 17 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções axial e transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por materiais a) - b) sólidos e c) - d) fluidos. e) - n) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados pelas lentes consideradas nos gráficos a) - d). Todas as lentes têm dimensões fixas $a = 3\lambda$, $t = 3,5\lambda$ e casca de Rexolite.	61
Figura 18 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Aço de diferentes raios e casca de Rexolite com espessura fixa $t = 3,5\lambda$. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).	64
Figura 19 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Benzeno de diferentes raios e casca de Rexolite com espessura fixa $t = 3,5\lambda$. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).	64
Figura 20 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Aço de raio $a = 3\lambda$ fixo e casca de Rexolite com diferentes espessuras. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).	66
Figura 21 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Benzeno de raio $a = 3\lambda$ fixo e casca de Rexolite com diferentes espessuras. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).	66
Figura 22 – Intensidades normalizadas em função do raio do núcleo (a) para cada um dos materiais componentes de núcleo.	68
Figura 23 – Esboço da região Ω e do fluxo de massa (setas azuis) através da superfície $\partial\Omega$.	75
Figura 24 – Deformação de um meio contínuo sólido de volume Ω_1 e superfície $\partial\Omega_1$ para o volume Ω_2 e superfície $\partial\Omega_2$.	83
Figura 25 – Representação do vetor tração \mathbf{q} de um meio contínuo sólido de volume Ω e superfície $\partial\Omega$ devido à forças externas \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, 3$).	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Parâmetros do feixe de ultrassom incidente e da água (meio).	44
Tabela 2	– Propriedades mecânicas do Rexolite.	48
Tabela 3	– Propriedades mecânicas dos materiais utilizados no núcleo das lentes.	48
Tabela 4	– Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados expostos na Figura 17.	62
Tabela 5	– Velocidade de compressão para cada material componente de núcleo e FWHM dos feixes gerados.	63
Tabela 6	– Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por Aço com espessura de casca fixa $t = 3,5\lambda$ para diferentes valores de raio do núcleo.	65
Tabela 7	– Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por benzeno com espessura de casca fixa $t = 3,5\lambda$ para diferentes valores de raio do núcleo.	65
Tabela 8	– Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por Aço com raio de núcleo fixo $a = 3\lambda$ para diferentes valores de espessura da casca.	67
Tabela 9	– Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por Benzeno com raio de núcleo fixo $a = 3\lambda$ para diferentes valores de espessura da casca.	67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABS	<i>Acrylonitrile Butadiene Styrene</i>
FLHM	<i>Full Length at Half Maximum</i>
FWHM	<i>Full Width at Half Maximum</i>
MEF	Método de Elementos Finitos
PMMA	<i>Poly(methyl methacrylate)</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Nome	Unidade (S.I.)
f	Frequência	Hz
λ	Comprimento de onda	m
ω	Frequência angular	rad s ⁻¹
p	Pressão acústica	Pa
T	Período	s
c	Velocidade do som	m s ⁻¹
c_0	Velocidade do som no fluido ideal	m s ⁻¹
\mathbf{k}	Vetor de onda	m ⁻¹
ρ_0	Densidade do fluido ideal	kg m ⁻³
ρ	Densidade	kg m ⁻³
p_a	Amplitude da pressão acústica	Pa
k	Número de onda	m ⁻¹
k_l	Número de onda longitudinal	m ⁻¹
k_s	Número de onda de cisalhamento	m ⁻¹
\mathbf{v}	Vetor velocidade	m s ⁻¹
c_p	Velocidade de compressão do som	m s ⁻¹
c_s	Velocidade de cisalhamento do som	m s ⁻¹
λ_L	Primeiro parâmetro de Lamé	Pa
μ_L	Segundo parâmetro de Lamé	Pa
ν	Coefficiente de Poisson	
E	Módulo de Young	Pa
α_p	Coefficiente de atenuação de compressão	
α_s	Coefficiente de atenuação de cisalhamento	
Re	Número de Reynolds	
β	razão de viscosidade adimensional	
η	Viscosidade dinâmica	Pa s
ζ	Segunda viscosidade	Pa s
\mathbf{J}	Densidade de corrente de massa	kg m ⁻² s ⁻¹
ρ_{el}	Densidade de carga elétrica	C m ⁻³
\mathbf{E}	Vetor campo elétrico	N C ⁻¹
a	Raio do núcleo de uma lente acústica	m
b	Raio total de uma lente acústica	m
t	Espessura da casca da lente acústica	m
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor de tensões	
ϕ	Potencial de velocidade	m ² s ⁻¹
\mathbf{r}	Vetor posição	m
\mathbf{u}	Vetor deslocamento	m
\mathbf{q}	Vetor de tração	N

Símbolo	Nome	Unidade (S.I.)
v	Velocidade de um elemento do fluido	m s^{-1}
$\psi_{s,1}, \psi_{s,2}$	Potenciais escalares de Debye	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
δ_{ij}	Delta de Kronecker	
\mathbf{n}	Vetor normal à superfície	
ϵ	Tensor deformação	
\mathbf{C}	Tensor de constantes elásticas do sólido	
I	Intensidade normalizada do feixe superfocalizado	
z_0	Distância de foco	m
Q	Fator de qualidade	
γ	Parâmetro do <i>mesh</i>	
a_{nm}	Coefficiente forma do feixe	
s_n	Coefficiente de espalhamento escalar	
$b_n, c_n, d_n,$ e_n, f_n, g_n	Coefficientes de expansão	
m_n, q_n, o_n		
j_n	Função esférica de Bessel de ordem n	
$h_n^{(1)}$	Função esférica de Hankel de primeiro tipo de ordem n	
y_n	Função esférica de Newmann de ordem n	
Y_n^m	Harmônicos esféricos	
P_n^m	Funções associadas de Legendre de ordem n	
Ω	Ângulo sólido	
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas	
(r, θ, ϕ)	Coordenadas esféricas	
∇	Operador gradiente	m^{-1}
$(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$	Componentes esféricas unitárias	
∇^2	Operador laplaciano	m^{-2}
$\nabla \cdot$	Operador divergente	m^{-1}
$i = \sqrt{-1}$	Unidade imaginária	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	21
2.1	ONDAS SONORAS	21
2.2	EQUAÇÕES BÁSICAS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	23
2.3	PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS EM UM FLUIDO	26
2.4	EQUAÇÕES BÁSICAS DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS	28
2.5	PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS EM UM MEIO SÓLIDO	29
2.5.1	Meios com atenuação	31
2.6	ESPALHAMENTO DE UMA ONDA PLANA POR UMA LENTE ACÚSTICA IMERSA EM UM FLUIDO IDEAL	33
2.7	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	38
3	MODELAGEM NUMÉRICA	40
3.1	COMSOL <i>MULTIPHYSICS</i>	41
3.2	DEFINIÇÕES DE SIMULAÇÃO	42
3.3	GEOMETRIA	44
3.4	MATERIAIS E CONFIGURAÇÃO DAS FÍSICAS	47
3.4.1	<i>Pressure Acoustics, Frequency Domain</i>	47
3.4.2	<i>Solid Mechanics</i>	49
3.4.3	<i>Perfectly Matched Layer</i>	50
3.4.4	<i>Acoustic-Structure Boundary</i>	51
3.5	<i>MESH</i>	52
3.6	<i>STUDY</i>	54
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	55
4.1	CÁLCULO DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DE UM FEIXE SUPERFOCALIZADO	55
4.2	CONVERGÊNCIA DOS RESULTADOS E FUNCIONALIDADE DA PML	58
4.3	INFLUÊNCIA DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS E ESPACIAIS DAS LENTES ACÚSTICAS	60
4.3.1	Influência do material componente do núcleo	60
4.3.2	Influência do raio do núcleo com espessura de casca fixa	63
4.3.3	Influência da espessura da casca com raio do núcleo fixo	65
4.3.4	Influência do raio do núcleo e espessura da casca com raio total fixo	67

5	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	71
	APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	75
A.1	EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE	75
A.2	EQUAÇÃO DE MOVIMENTO	76
A.3	EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES E NÚMERO DE REYNOLDS	78
A.4	EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	79
	APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS	83
B.1	DEFORMAÇÃO	83
B.2	TENSÃO	84
B.3	CONSERVAÇÃO DE MASSA	85
B.4	CONSERVAÇÃO DO MOMENTO	86
B.5	CONSERVAÇÃO DA ENERGIA	86
	APÊNDICE C – PUBLICAÇÕES	88
	APÊNDICE D – PRÊMIOS	89

1 INTRODUÇÃO

O ultrassom é um tipo de onda mecânica longitudinal que descreve uma oscilação de pressão e que se propaga através de compressões (regiões de maior pressão) e rarefações (regiões de menor pressão), possuindo frequência de oscilação acima de 20 kHz. Atualmente, o ultrassom é utilizado para diversos fins, entre eles, diagnósticos e tratamentos médicos (MAFFULLI et al., 1987), (BLANA et al., 2004); técnicas de ensaios não destrutivos (MIGLIORI; DARLING, 1996); criação de processos de limpeza para objetos (LAMMINEN et al., 2006); sonares e sensores (MCKERROW; ANTOUN, 2007), (ELLSMERE et al., 2003); e também na indústria de alimentos, tanto para análise como modificação de propriedades físico-químicas de produtos comestíveis (MCCLEMENTS, 1995). Entretanto, a mais conhecida e comum aplicação do ultrassom está relacionada à área de diagnóstico médico, principalmente ao que diz respeito à formação de imagens.

Embora os resultados obtidos através da aplicação de ultrassom para imageamento sejam satisfatório, a resolução alcançada por sistemas que empregam tal técnica depende fortemente do perfil de feixe utilizado, onde os parâmetros do ultrassom empregado, como por exemplo a frequência de oscilação (f) e comprimento de onda (λ), afetam diretamente a imagem gerada. Devido à natureza clássica das ondas de ultrassom, os métodos convencionais de imageamento sonoro possuem uma limitação natural na resolução das imagens formadas. Tal limite é conhecido como limite de difração (também existente na óptica) e restringe a resolução lateral das imagens geradas ao comprimento de onda do feixe incidente (ZHU et al., 2011). O limite de difração surge do fato de que os detalhes espaciais de sub-comprimento de onda são atribuídos a ondas acústicas evanescentes, que são atenuadas de forma exponencial em relação a distância do local de onde são emitidas (LEMOULT et al., 2011).

Na tentativa de superar o limite de difração, diversas técnicas de focalização de ondas em sub-comprimento de onda foram e continuam a ser desenvolvidas. Na óptica, técnicas que utilizam espelhos de reversão de tempo (LEROSEY et al., 2004) e espalhamento eletromagnético através de objetos que possuem formas e materiais variados (LIU, 2013), (WU et al., 2017) obtiveram sucesso em superar o limite de difração. Entre as técnicas que vencem o limite de difração na acústica, pode ser citada a utilização de um conjunto linear de transdutores regularmente espaçados que, ao serem utilizados, produzem interferência destrutiva e moldam um perfil sonoro mais estreito em um ponto do espaço. Utilizando uma frequência de 4 kHz foi possível realizar uma focalização de $0,30\lambda$ através desta técnica (onde λ é o comprimento de

onda do campo acústico incidente) (ABASI et al., 2011).

Também é recorrente a utilização de ressonadores de Helmholtz (cavidade aberta de sub-comprimento de onda equivalente ao ressonador elétrico LC) para focalização de ondas acústicas. Através de um aparato constituído de latas de refrigerante como ressonadores e auto-falantes comerciais, foi possível focalizar sons de banda larga em uma região equivalente à $\lambda/25$ (LEMOULT et al., 2011). Estudos demonstraram que metamateriais também podem ser empregados para a focalização de ondas sonoras. Através de uma lente acústica de metamaterial achatada composta de uma rede planar de ressonadores de Helmholtz de sub-comprimento de onda usinados em uma placa de alumínio imersa em água, uma focalização eficiente de $\lambda/2$ foi registrada para um ultrassom de 60,5 kHz (ZHANG et al., 2009). Além disso, um metamaterial formado por um bloco rígido perfurado com uma rede periódica de furos quadrados de sub-comprimento de onda (estrutura *Holey* 3D) foi utilizado para obter uma imagem com resolução de $\lambda/50$ quando utilizada uma onda acústica com frequência de 2,18 kHz. Este resultado foi obtido graças a eficiente transmissão das ondas evanescentes pelo metamaterial devido ao forte acoplamento da estrutura com ressonâncias de Fabry-Pérot (ZHU et al., 2011).

Outro estudo interessante utilizando metamateriais para a construção de lentes com índice gradiente, conhecidas como lentes GRIN acústicas (lente projetada para que a velocidade do som que se propaga na lente varie com a distância), demonstrou a capacidade de atingir valores de focalização abaixo de $\lambda/2$ para ondas acústicas com frequências de 500 Hz, 700 Hz e 1000 Hz que se propagam em um meio homogêneo (PARK et al., 2016). Uma quarta técnica para focalização de ondas acústicas utiliza o método de reversão de tempo (replicação em sentido contrário de uma onda propagante). Uma fonte pontual no centro de uma superfície fechada foi utilizada para emitir um campo pulsado de 500 kHz que, posteriormente, foi medido por transdutores. O sinal registrado foi revertido no tempo e transmitido de volta. Após o sinal alcançar o centro da superfície, um perfil de intensidade focalizado foi observado com um tamanho focal de $\lambda/14$ (ROSNY; FINK, 2002).

Também é possível realizar focalização de ondas sonoras através da utilização de cristais fonônicos. O cristal fonônico é um composto artificial periódico que possui a capacidade de criar bandas fonônicas proibidas (conceito semelhante às bandas fotônicas proibidas) e refração sonora negativa, sendo o análogo acústico do cristal fotônico (OLSSON-III; EL-KADY, 2008). Ao se utilizar um cristal fonônico constituído de um arranjo triangular 2D de hastes de aço preenchido com metanol, o fenômeno de refração sonora negativa (resultado do espalhamento de Bragg, ocorrendo em bandas de passagem com velocidade de grupo negativa) foi observado para

uma frequência de 530 kHz. O perfil de intensidade focalizado apresentou uma largura de $0,37\lambda$. É importante salientar que o resultado obtido neste estudo está intimamente ligado à distância da fonte até a lente (0,1 mm), não mostrando a mesma eficácia de focalização para valores maiores que este (SUKHOVICH et al., 2009). É possível, ainda, manipular e focalizar ondas sonoras recorrendo a inomogeneidade e à descontinuidade da impedância acústica incidindo essas ondas em objetos ou materiais que apresentem tais características acústicas (ZHAO et al., 2013).

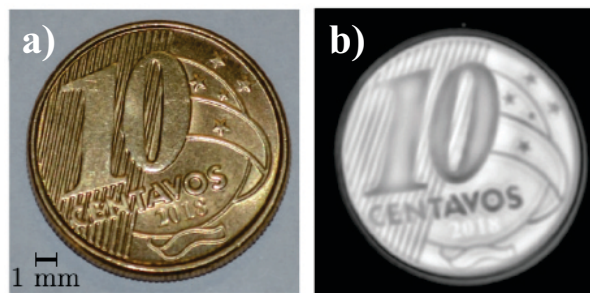
Embora todas as técnicas citadas anteriormente tenham obtido êxito na tarefa de focalizar ondas acústicas e de vencer o limite de difração, ou seja, conseguir uma focalização em uma região menor que λ , a complexidade destas técnicas impõe uma dificuldade em suas aplicações, já que todos os métodos citados envolvem uma complexa engenharia de metamateriais ou necessitam de uma grande capacidade de processamento de sinais. Entretanto, foi mostrado experimentalmente que objetos esféricos podem vencer o limite de difração ao realizar focalização através do espalhamento de ultrassom sem envolver as complexidades citadas acima. Através da interação de uma esfera homogênea composta de Rexolite e de um feixe de ultrassom com frequência de 1,01 MHz uma focalização com intensidade máxima 27,6 vezes maior que a intensidade da onda incidente e com uma resolução lateral de $\lambda/2$ foi obtido através da geração de feixes superfocalizados (LOPES et al., 2017). Um feixe acústico superfocalizado pode ser definido como um feixe estreito e de alta intensidade que emerge da superfície de um objeto esférico que espalha uma onda acústica. Devido ao espalhamento, o feixe é gerado na região de sombra do objeto, ou seja, na região oposta a de incidência da onda.

Na literatura é possível encontrar alguns trabalhos publicados que buscam fazer uma abordagem teórica e numérica acerca dos feixes superfocalizados gerados por objetos esféricos através da utilização de softwares disponíveis comercialmente (LOPES et al., 2016), (MININ; MININ, 2017). Ainda dentro do escopo de objetos esféricos, recentemente foi demonstrado numericamente e experimentalmente que esferas *core-shell* podem ser utilizadas como lentes acústicas para focalização de ondas sonoras através da geração de feixes superfocalizados, assim como a viabilidade da aplicação de tais lentes na área de imageamento sonoro de alta resolução. Utilizando-se uma esfera *core-shell* com diâmetro de 12,8 mm, núcleo composto de aço e casca feita de Rexolite, uma onda plana com frequência de 2 MHz foi espalhada dando origem a um feixe superfocalizado com intensidade 87 vezes maior que a do campo incidente e resolução lateral de $0,6\lambda$ (LEÃO-NETO et al., 2020).

Ainda, utilizando a mesma lente descrita acima, mas desta vez incidindo um campo pulsado, um feixe superfocalizado com resolução lateral de $0,48\lambda$ foi observado. A partir deste

feixe, uma imagem de modo C de alta resolução de uma moeda de 10 centavos de Real com 20 mm de diâmetro foi feita, posicionando-se a moeda no ponto de maior intensidade do feixe (ver Figura 1). Observando a imagem produzida, é possível distinguir algumas linhas paralelas presentes na moeda, onde a distância entre duas linhas consecutivas é de $350 \mu\text{m}$ (aproximadamente $\lambda/2$), evidenciando assim, a eficiência do imageamento através de feixes superfocalizados.

Figura 1 – a) Fotografia de uma moeda de 10 centavos de Real. b) Imagem de modo C feita utilizando-se um feixe superfocalizado com resolução lateral de $0,48\lambda$.



Fonte: (LEÃO-NETO et al., 2020).

Pesquisas recentes mostraram que feixes superfocalizados também podem ser obtidos através do espalhamento de um campo de ultrassom incidente por corpos não esféricos. Através da utilização de cilindros maciços compostos por ABS (Acrilonitrila butadieno estireno) de diversos raios, feixes com resolução lateral abaixo de $\lambda/2$ foram observados (CASTIÑEIRA-IBÁÑEZ et al., 2020). Com objetos cúbicos preenchidos com CO_2 (Dióxido de Carbono) focalizações de ultrassom através de feixes superfocalizados também foram obtidas, onde resoluções laterais abaixo do comprimento de onda foram apontadas (RUBIO et al., 2019). Outro estudo com objetos cúbicos, mas desta vez feitos de Rexolite e PMMA (polimetilmetacrilato), apresentou como resultado feixes com resoluções laterais também abaixo de $0,5\lambda$ (TARRAZÓ-SERRANO et al., 2020). Embora estes objetos não esféricos possam gerar feixes superfocalizados, lentes acústicas esféricas, especialmente do tipo *core-shell*, têm se mostrado mais eficientes na focalização do ultrassom incidente, uma vez que produzem feixes superfocalizados com intensidades e comprimentos maiores e resoluções abaixo de $\lambda/2$, além de serem mais fáceis de fabricar e de se trabalhar.

As propriedades mecânicas da lente utilizada exercem influência nos parâmetros espaciais do feixe superfocalizado gerado (principalmente em sua resolução lateral), parâmetros estes essenciais para aplicações em imageamento. Desta forma, levando-se em conta tudo o que foi exposto até aqui, a presente dissertação tem como objetivo realizar um estudo paramétrico das

propriedades mecânicas de lentes acústicas do tipo *core-shell* através de simulações numéricas. Para este fim, foi utilizado o Método de Elementos Finitos (MEF) por meio do software comercial COMSOL *Multiphysics* para realizar simulações da interação entre ondas de ultrassom com frequência de 1 MHz e lentes acústicas com parâmetros mecânicos diversos.

Após esta breve introdução sobre o tema central desta dissertação, no capítulo 2 serão expostos conceitos básicos sobre ondas sonoras, espalhamento acústico, grandezas físicas que estão envolvidas neste efeito e sobre o MEF. Já no capítulo 3 será mostrado como o modelo numérico do problema foi desenvolvido no software COMSOL *Multiphysics*, explanando sobre a geometria construída e ferramentas utilizadas. Em seguida, no capítulo 4 serão mostrados os resultados obtidos das simulações realizadas, expondo os feixes superfocalizados obtidos, suas principais características, assim como análises sobre as propriedades mecânicas das lentes utilizadas. Por fim, serão dadas conclusões sobre a presente dissertação.

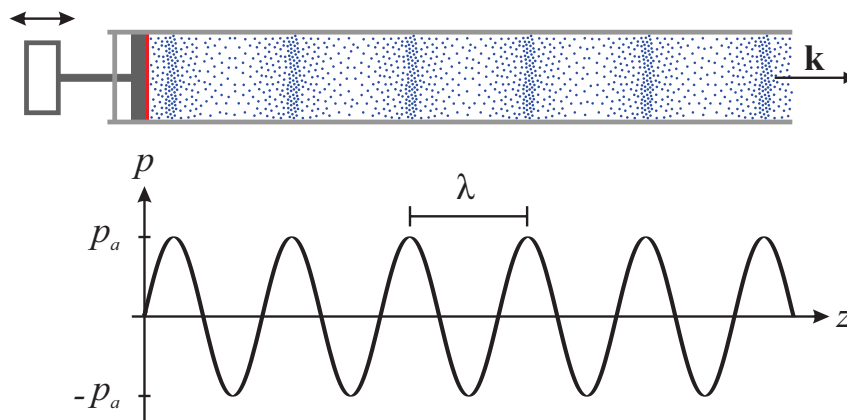
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo abordaremos conceitos teóricos necessários para o entendimento da formação de feixes superfocalizados através de espalhamento de uma onda sonora. Como este último depende tanto de parâmetros do objeto espalhador como das características da onda utilizada, é importante entender de que forma estes parâmetros e características contribuem para a formação de feixes superfocalizados.

2.1 ONDAS SONORAS

Podemos definir uma onda como uma perturbação que se propaga no espaço carregando consigo momento, energia e informação. Tal perturbação sempre é produzida pela variação de alguma grandeza física relevante dentro da região onde a onda se propaga. Dentre todos os tipos de ondas existentes, voltamos nossa atenção para as ondas sonoras, que são ondas mecânicas geralmente longitudinais definidas através da propagação da oscilação de pressão p no meio analisado, que pode ser sólido, líquido ou gasoso. Por ser uma onda longitudinal, as ondas sonoras se propagam através de rarefações (regiões de menor pressão) e compressões (regiões de maior pressão) limitadas por uma amplitude de pressão p_a , de modo que oscilam entre p_a (regiões de máxima compressão) e $-p_a$ (regiões de máxima rarefação) (YASUI, 2018). A Figura 2 mostra uma onda sonora unidimensional que se propaga ao longo de um eixo z arbitrário para um tempo t qualquer produzida pela movimentação de um pistão.

Figura 2 – Onda sonora unidimensional que se propaga ao longo de um eixo z para um tempo t arbitrário.



Fonte: Autor (2021).

Podemos caracterizar ondas sonoras através de alguns parâmetros, como por exemplo o comprimento de onda λ (distância entre repetições sucessivas da onda) e seu período de oscilação

T (tempo necessário para que a variável física atrelada à onda complete um ciclo de oscilação). Como em um período a variável física realiza uma oscilação, podemos relacionar f e T através da equação (HALLIDAY et al., 2009):

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1)$$

Podemos distinguir ondas sonoras através da frequência f . Ondas sonoras com frequências abaixo de 20 Hz são denominadas infrassom, enquanto as que possuem frequências acima de 20 kHz são chamadas de ultrassom. Um ser humano em condições normais de saúde consegue detectar ondas sonoras com frequência entre 20 Hz e 20 kHz, sendo essa faixa denominada de som audível. A título de curiosidade, os cachorros podem detectar ultrassons de até 50 kHz, sendo este o motivo do som proveniente de um apito de adestramento não ser audível ao ouvido humano, uma vez que produz uma onda sonora acima de 20 kHz. Já o morcego, através de seu sistema de orientação idêntico ao sonar, pode emitir e captar frequências acima de 120 kHz (BORGES; RODRIGUES, 2017).

Além dos parâmetros citados acima, também podemos atribuir a ondas sonoras um comprimento de onda λ e um número de onda k . O comprimento de onda é definido como a distância paralela à direção de propagação entre dois pontos sucessivos da onda em que sua forma se repete. Já o número de onda é o módulo do vetor de onda \mathbf{k} , que é perpendicular às frentes de onda (FOWLES, 1989) (ver Figura 2). Podemos relacionar λ e k escrevendo:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2)$$

Um tipo muito importante de onda é a chamada onda plana. A principal característica desse tipo de onda é que, ao se tomar planos perpendiculares ao sentido de propagação da onda, a variável oscilante possui um valor constante em cada plano, o que torna as frentes de onda planas. Além disso, devido a esta planicidade, o vetor de onda aponta na direção de propagação da onda (KINSLER et al., 1999). Matematicamente, expressamos a variação de pressão de uma onda plana acústica da seguinte forma:

$$p(\mathbf{r}, t) = e^{i(\pm\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (3)$$

onde a utilização do sinal $+$ ou $-$ depende do sentido de propagação da onda; \mathbf{r} é o vetor posição do ponto analisado, t é o tempo e ω é uma grandeza conhecida como frequência angular, que pode ser relacionada com a frequência f e com o período T utilizando as equações (1) e (2) da seguinte forma:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = k\lambda f = kc, \quad (4)$$

sendo c a velocidade de propagação da onda no meio considerado.

Como citado anteriormente, uma onda possui a capacidade de carregar consigo energia através do meio em que se propaga. Para computar esta energia, definimos uma grandeza conhecida como intensidade acústica I , que é a média temporal da taxa de transmissão de energia por uma área unitária normal à direção de propagação, ou seja (KINSLER et al., 1999):

$$I = \langle pu \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T (pu) dt, \quad (5)$$

onde u é o módulo da velocidade de um elemento do fluido que é perturbado pela onda. Para uma onda plana que se propaga em um meio fluido com densidade ρ , temos:

$$I = \frac{p_a^2}{2\rho c}. \quad (6)$$

Quando ondas sonoras se propagam em meios sólidos, naturalmente dois tipos de perturbações mecânicas aparecem no material simultaneamente: ondas de compressão e ondas de cisalhamento. As ondas de compressão movimentam os elementos de volume do meio no mesmo sentido de propagação da onda e se propagam com velocidade c_p , conhecida como velocidade de compressão. Já as ondas de cisalhamento movimentam os elementos de volume do meio no sentido perpendicular ao de propagação da onda e possuem velocidade c_s , denominada velocidade de cisalhamento.

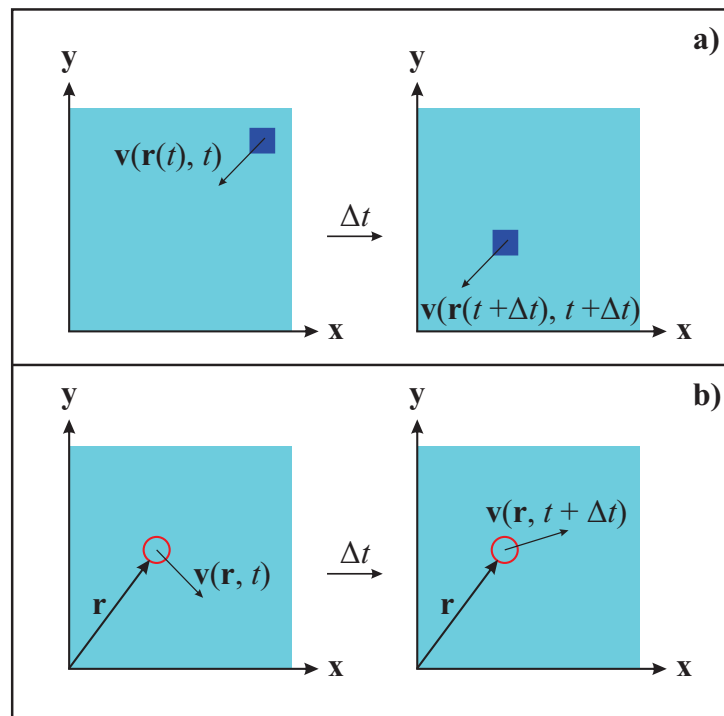
Geralmente, a velocidade de cisalhamento é aproximadamente metade do valor da velocidade de compressão, razão essa, que faz com que as ondas de compressão e cisalhamento sejam denominadas de ondas primárias e secundárias, respectivamente, uma vez que as ondas de compressão são detectadas primeiro. Devido a fraca força de resistência ao cisalhamento apresentada em líquidos, ondas de cisalhamento só ocorrem em meios sólidos. Ondas de cisalhamento e compressão são amplamente utilizadas em estudos realizados em sismologia e geofísica, sendo ferramentas importantes para o entendimento do funcionamento terrestre (SHEARER, 2009).

2.2 EQUAÇÕES BÁSICAS DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Para entender o comportamento de fluidos ao serem submetidos à campos acústicos, é de suma importância conhecermos as equações que regem a dinâmica de meios fluidos. Embora sejam compostos de átomos e moléculas, devido ao caráter clássico da maioria dos problemas envolvendo dinâmica de fluidos, podemos considerar estes meios como contínuos e descrever suas propriedades através de campos clássicos. Para fazer a descrição dessas quantidades temos a nossa disposição duas representações: a descrição Lagrangiana e a descrição Euleriana.

Na descrição Lagrangiana consideramos um elemento material de fluido e fixamos nossa atenção nele. Em seguida, seguimos sua trajetória à medida que o tempo passa, atribuindo ao elemento uma posição a cada instante de tempo, traçando assim, um caminho. Nesta representação, a posição do elemento de fluido depende do tempo (ver Figura 3(a)). Já na descrição Euleriana, fixamos nossa atenção em uma região fixa dentro do fluido e observamos a evolução dos campos nesta região. Na representação Euleriana a posição da região não depende do tempo (ver Figura 3(b)). Embora a descrição Lagrangiana seja útil em alguns casos, esta descrição leva a análises bastante complicadas da dinâmica dos elementos de fluidos, além de não oferecer diretamente os gradientes espaciais de velocidade no fluido (BATCHELOR, 2000). Desta forma, nesta seção utilizaremos a descrição Euleriana para caracterizar os campos envolvidos.

Figura 3 – Representação de um campo de velocidade \mathbf{v} para os tempos t e $t + \Delta t$ na descrição a) Lagrangiana (elemento de fluido representado pelo quadrado azul) e b) Euleriana (região fixa representada pelo círculo vermelho).



Fonte: Autor (2021).

Agora, sejam m_i e \mathbf{v}_i a massa e a velocidade da molécula i , respectivamente, dentro de um volume fixo $\Delta V(\mathbf{r})$ em um tempo t que possui N moléculas. Com isso, podemos definir a densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ e o campo de velocidade Euleriano $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ como (BRUUS, 2008):

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)\Delta V(\mathbf{r})} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i. \quad (8)$$

Uma ferramenta bastante utilizada em mecânica dos fluidos é o chamado teorema de Gauss ou da divergência. Seja Ω uma região sólida delimitada por uma superfície $\partial\Omega$ orientada positivamente (para fora). Se \mathbf{F} é um campo vetorial cujas funções componentes possuam derivadas parciais contínuas na região que contém Ω , então o teorema de Gauss afirma que:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} da \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}, \quad (9)$$

onde $d\mathbf{r}$ e da são os elementos de integração de volume e superfície, respectivamente, \mathbf{n} é o vetor normal a da , e $\nabla \cdot$ é o operador divergente. Dessa forma, o teorema de Gauss nos dá uma relação direta entre o fluxo total de \mathbf{F} por da e a divergência total de \mathbf{F} em Ω através de uma igualdade (STEWART, 2013).

Agora, como mencionado acima, para estudarmos o comportamento de ondas acústicas em meios compostos por fluidos utilizamos equações de mecânica dos fluidos. A primeira destas equações é a Equação de Continuidade, dada por (BRUUS, 2008):

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad \text{ou} \quad \partial_t \rho = -\partial_j (\rho v_j), \quad (10)$$

onde utilizamos a notação indicial no lado direito, sendo ρ a densidade do meio fluido, \mathbf{v} o campo de velocidade euleriano e $\partial_t = \partial/\partial t$. A Equação de Continuidade nos fornece uma relação direta entre a variação temporal da densidade do meio e o negativo da divergência do produto da densidade do meio e o campo de velocidade euleriano. Esta equação também nos fornece uma conservação de massa do meio, nos garantindo que não há massa sumindo ou aparecendo espontaneamente.

A segunda relação importante de mecânica dos fluidos é a Equação de Navier-Stokes:

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} + \rho_{el} \mathbf{E}, \quad (11)$$

onde p é a pressão, η e β são a viscosidade dinâmica e a razão de viscosidade adimensional do fluido, respectivamente, \mathbf{g} e \mathbf{E} são os campos gravitacional e elétrico, respectivamente e ρ_{el} é a densidade de cargas do meio. Nesta equação, temos a relação entre forças que podem variar o momento do sistema, como forças de viscosidade e de corpo (ou volumétricas). Além disso, a Equação de Navier-Stokes nos fornece a conservação de momento do meio fluido.

A terceira equação é a Equação de Transferência de Calor, que nos dá a conservação de energia do meio fluido relacionando as principais fontes de variação de energia dentro do meio

(convecção de energia e condução térmica, por exemplo). Esta equação é:

$$\rho T [\partial_t s + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s] = \boldsymbol{\sigma}' : \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (12)$$

onde $:$ indica o produto de dois tensores, T é a temperatura, s a entropia por unidade de massa do meio, $\boldsymbol{\sigma}'$ é o tensor de estresse viscoso e κ a condutividade térmica. Os detalhes e as demonstrações das equações expostas nessa seção são dadas no Apêndice A.

2.3 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS EM UM FLUIDO

Como citado na seção 2.1, ondas sonoras se propagam em meios fluidos através de compressões e rarefações. Normalmente, ondas acústicas podem ser consideradas como perturbações de pequena amplitude em um determinado meio, de forma que, a propagação pode ser modelada através da aplicação da teoria de perturbação em primeira ordem. Vamos considerar um meio fluido homogêneo que, antes de ser perturbado por uma onda, possui uma pressão p_0 , densidade ρ_0 e uma baixa viscosidade, de forma que podemos fazer $\eta \approx 0$. Além disso, antes da propagação da onda, o fluido está em repouso, de forma que o campo de velocidade é $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. Desconsiderando forças de corpo no sistema, podemos determinar a dinâmica do meio utilizando uma equação de estado para pressão $p(\rho)$ em função da densidade, a equação de continuidade, eq. (10), e a equação de Navier-Stokes, eq. (11). Considerando as condições impostas acima, estas três equações são, respectivamente:

$$p = p(\rho), \quad (13)$$

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (14)$$

$$\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p. \quad (15)$$

Agora, ao fazermos uma onda se propagar no meio, podemos escrever a pressão p , o campo de velocidade \mathbf{v} e a densidade do fluido ρ através de aproximações lineares de primeira ordem (PIERCE, 2019):

$$p = p_0 + p_1, \quad (16)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} + \mathbf{v}_1, \quad (17)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1. \quad (18)$$

Substituindo as equações (16), (17) e (18) nas equações (13), (14) e (15), observando que p_0 , \mathbf{v}_0 , ρ_0 são constantes e desprezando os termos de ordem maior que um, ficamos com:

$$\partial_t \rho_1 = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1, \quad (19)$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1. \quad (20)$$

Uma vez que estamos considerando perturbações com pequenas amplitudes no sistema, temos que $p_0 \gg p_1$. Dessa forma, podemos expandir p em uma série de Taylor em torno de $\rho = \rho_0$:

$$p = p_0 + (\partial_\rho p)_{\rho=\rho_0}(\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}(\partial_\rho^2 p)_{\rho=\rho_0}(\rho - \rho_0)^2 + \dots, \quad (21)$$

sendo $\partial_\rho^2 = \partial^2 / \partial \rho^2$. Considerando até o segundo termo do lado direito da expansão em (21) e utilizando as equações (16) e (18), encontramos uma relação direta entre p_1 e ρ_1 :

$$p_1 = c_0^2 \rho_1, \quad (22)$$

onde $c_0^2 = (\partial_\rho p)_{\rho=\rho_0}$ possui unidade de velocidade ao quadrado e, dessa forma, c_0 é definido como a velocidade do som no meio fluido. Agora, substituindo a eq. (22) em (19), tomando a derivada temporal da expressão resultante e utilizando a eq. (20), obtemos a famosa equação de onda para a pressão:

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 p_1, \quad (23)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano e $\partial_t^2 = \partial^2 / \partial t^2$. A solução da eq. (23) em coordenadas cartesianas é exatamente uma onda plana, com forma idêntica a da eq. (3), que pode ser obtida através de separação de variáveis. Podemos ainda, utilizar uma outra abordagem para encontrar a equação de onda. Se tomarmos o rotacional da eq. (20), obtemos que (LEÃO-NETO, 2015):

$$\nabla \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \quad (24)$$

uma vez que o rotacional de um gradiente é sempre nulo ($\nabla \times \nabla p = \mathbf{0}$). Dessa forma, podemos escrever o campo de velocidade \mathbf{v}_1 em função de um potencial escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_1 = \nabla \phi. \quad (25)$$

Substituindo a eq. (25) em (20), obtemos uma relação entre a pressão p_1 e o potencial ϕ , que é:

$$p_1 = -\rho_0 \partial_t \phi. \quad (26)$$

Com isso, introduzindo a eq. (26) em (23), encontramos uma equação de onda para o potencial ϕ :

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \phi. \quad (27)$$

Diversas ondas acústicas que possuem aplicação direta possuem uma dependência temporal harmônica com o tempo, de forma que podemos escrever $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, onde ω é a frequência angular da onda (ver eq. (4)) e $\phi(\mathbf{r})$ é a amplitude do potencial, que pode ser determinada pelas condições de contorno do problema específico considerado. Logo, substituindo o potencial harmônico na equação de onda para o potencial, ficamos com:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -k^2 \phi(\mathbf{r}), \quad (28)$$

onde k é o número de onda. A eq. (28) é conhecida como Equação de Helmholtz, onde sua solução depende do sistema de coordenadas adotado. Soluções e métodos de solução da equação de Helmholtz podem ser encontrados em (GUMEROV; DURAI SWAMI, 2005), (WU, 2014) e (LEÃO-NETO, 2015).

2.4 EQUAÇÕES BÁSICAS DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Assim como na mecânica dos fluidos, para fazer uma análise válida da mecânica dos sólidos devemos escolher a descrição que será utilizada para tal. Nesta seção, como comumente é feito, iremos realizar uma análise baseada na descrição Lagrangiana do sistema, onde agora a posição do objeto analisado depende do tempo, ou seja, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (ver início da seção 2.2). Dessa forma, para uma grandeza qualquer A que descreve alguma propriedade do objeto, temos que $A = A(\mathbf{r}(t), t)$. Entretanto, por simplicidade, iremos omitir a dependência da posição com o tempo das grandezas aqui apresentadas. Além disso, vamos utilizar o sistema de coordenadas cartesianas x_i ($i = 1, 2, 3$), evitando assim, as complexidades do cálculo tensorial.

A primeira grandeza importante na mecânica dos sólidos é a deformação ϵ dada por (LEÃO-NETO, 2015):

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (29)$$

onde \mathbf{u} é o vetor deslocamento, $\nabla \mathbf{u}$ é um tensor de segunda ordem e o sobrescrito T denota a transposta de um tensor. A eq. (29) nos informa como um ponto do meio sólido se deforma em

função do deslocamento \mathbf{u} . Além disso, quando um objeto sofre deformação devido à forças externas, passa a existir um vetor de tração interno \mathbf{q} que tende a fazer o corpo retornar à configuração de equilíbrio. O vetor tração é dado por:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (30)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e está relacionado às forças internas que tendem a fazer o corpo retornar ao seu ponto de equilíbrio e \mathbf{n} é um vetor normal à superfície.

Parecido com o que foi exposto na seção de mecânica dos fluidos, existem equações de conservação em mecânica dos sólidos. Para a conservação de massa do meio sólido, temos:

$$\partial_t \rho_s = -\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}), \quad (31)$$

onde ρ_s é a densidade do sólido, \mathbf{v} é o campo de velocidade de deformação do meio e, novamente, $\partial_t = \partial/\partial t$. Para a conservação do momento, podemos escrever (FUNG et al., 2001):

$$\rho_s \partial_t^2 \mathbf{u} = \mathbf{F}_V + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (32)$$

sendo \mathbf{F}_V forças de corpo (ou volumétricas) e $\partial_t^2 = \partial^2/\partial t^2$, onde a eq. (32) é derivada diretamente da Segunda Lei de Newton. Por fim, para a conservação da energia, temos:

$$\rho_s \partial_t \xi_s + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \cdot \rho_s \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}, \quad (33)$$

onde ξ_s é a energia interna do meio sólido por unidade de massa e $v^2 = |\mathbf{v}|^2$. Os detalhes e a derivação completa das equações mostradas nessa seção podem ser vistos no Apêndice B.

2.5 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS EM UM MEIO SÓLIDO

Para a análise da propagação de ondas acústicas em meios sólidos, é normalmente utilizado a idealização de um material elástico. Cauchy generalizou a lei de Hooke assumindo que as componentes da tensão são linearmente relacionadas com as componentes da deformação ao qual o corpo está submetido (LEÃO-NETO, 2015). Dessa forma, podemos escrever o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad (34)$$

onde utilizamos a convenção de Einstein para escrever σ_{ij} ; $\boldsymbol{\epsilon}$ é o tensor deformação e \mathbf{C} é um tensor que reúne as constantes elásticas do material, conhecido como tensor módulo de elasticidade, sendo este um tensor de quarta ordem.

Se as propriedades do sólido são tais que independem da orientação dos eixos do sistema de coordenadas cartesianas, então o sólido é considerado isotrópico. Essa idealização é geralmente considerada boa se o sólido for feito de um conjunto aleatório de muitos grãos pequenos. Os grãos minúsculos são podem ser cristalinos com propriedades direcionais, mas a orientação dos grãos é aleatória, de modo que um elemento composto por um grande número de grãos não tem orientação direcional (ROSSING, 2007). Dessa forma, podemos escrever o tensor de tensões da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda_L \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_L \epsilon_{ij} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda_L (tr \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu_L \boldsymbol{\epsilon}, \quad (35)$$

onde $tr \boldsymbol{\epsilon}$ é o traço de $\boldsymbol{\epsilon}$, \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem, λ_L e μ_L são duas constantes do material que compõe o meio, conhecidos como primeiro e segundo parâmetros de Lamé, respectivamente. Agora, vamos considerar as equações de deformação, eq. (29), e de conservação de momento para sólidos, eq. (32) (desconsiderando forças volumétricas), na notação indicial, dadas respectivamente por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (36)$$

$$\rho_s \partial_t^2 u_i = \partial_j \sigma_{ij}. \quad (37)$$

Dessa forma, substituindo as equações (35) e (36) na eq. (37), temos:

$$\rho_s \partial_t^2 u_i = (\lambda_L + \mu_L) \partial_i \partial_j u_j + \mu_L \partial_j^2 u_i, \quad (38)$$

que na forma vetorial, é equivalente à:

$$\rho_s \partial_t^2 \mathbf{u} = (\lambda_L + \mu_L) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu_L \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39)$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}$, obtemos:

$$\partial_t^2 \mathbf{u} = c_p^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_s^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (40)$$

onde as velocidades de compressão e cisalhamento são dadas respectivamente por:

$$c_p^2 = \frac{\lambda_L + 2\mu_L}{\rho_s}, \quad c_s^2 = \frac{\mu_L}{\rho_s}. \quad (41)$$

A eq. (40) é conhecida como equação de Lamé-Navier e possui um alto grau de complexidade, devido ao acoplamento das equações resultantes quando são consideradas as componentes de \mathbf{u} . Uma forma de desacoplamento, é a utilização do teorema de decomposição de Helmholtz

(LAMMERING et al., 2017). Este teorema afirma que um campo vetorial pode ser dividido em duas partes: uma irrotacional e outra solenoidal, desde que estes termos desapareçam no infinito (ARFKEN; WEBER, 2007). Dessa forma, podemos escrever \mathbf{u} em termos de um potencial escalar ϕ_ℓ e de um potencial vetor \mathbf{A} , considerando que os potenciais possuem dependência harmônica com o tempo, de forma que:

$$\mathbf{u} = (\nabla\phi_\ell + \nabla \times \mathbf{A})e^{-i\omega t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (42)$$

onde ϕ_ℓ e \mathbf{A} são as amplitudes dos potenciais e $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ fornecer a condição adicional necessária para determinar exclusivamente as três componentes de \mathbf{u} a partir das componentes dos potenciais (GRAFF, 1991). Dessa forma, substituindo a eq. (42) na eq. (40), utilizando algumas identidades do cálculo vetorial e reorganizando os termos restantes, obtemos a seguinte relação:

$$\nabla [c_p^2 \nabla^2 \phi_\ell - \partial_t^2 \phi_\ell] e^{-i\omega t} + \nabla \times [c_s^2 \nabla^2 \mathbf{A} - \partial_t^2 \mathbf{A}] e^{-i\omega t} = 0. \quad (43)$$

Esta relação será válida somente se os termos entre colchetes forem individualmente iguais a zero. Dessa forma, obtemos duas equações de onda:

$$[c_p^2 \nabla^2 - \partial_t^2] \phi_\ell e^{-i\omega t} = 0, \quad [c_s^2 \nabla^2 - \partial_t^2] \mathbf{A} e^{-i\omega t} = 0, \quad (44)$$

que descrevem a propagação de ondas longitudinais com velocidade c_p e ondas transversais com velocidade c_s , respectivamente, ambas no sólido. Uma vez que \mathbf{A} é um campo vetorial solenoidal, podemos expressá-lo em termos de dois potenciais escalares $\psi_{s,1}$ e $\psi_{s,2}$, conhecidos como potenciais de Debye (LEÃO-NETO, 2015), de forma que:

$$\mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{s,1}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{s,2}), \quad (45)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição de algum ponto do espaço que está sendo analisado. Assim, substituindo a eq. (45) na eq. (44), encontramos equações escalares de Helmholtz:

$$\nabla^2 \phi_\ell = -k_\ell^2 \phi_\ell, \quad \nabla^2 \begin{pmatrix} \psi_{s,1} \\ \psi_{s,2} \end{pmatrix} = -k_s^2 \begin{pmatrix} \psi_{s,1} \\ \psi_{s,2} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

sendo k_ℓ e k_s os números de onda longitudinal e de cisalhamento, respectivamente, dados por:

$$k_\ell^2 = \left(\frac{\omega}{c_p}\right)^2, \quad k_s^2 = \left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2. \quad (47)$$

2.5.1 Meios com atenuação

Para meios elásticos onde a atenuação não pode ser desprezada, à exemplo, materiais viscoelásticos, podemos modelar a perda de energia pela onda ao se propagar neste meio

escrevendo os parâmetros de Lamé λ_L e μ_L como grandezas complexas. Dessa forma, temos:

$$\lambda_L = \lambda_{L,1} + i\lambda_{L,2}, \quad (48)$$

$$\mu_L = \mu_{L,1} + i\mu_{L,2}, \quad (49)$$

onde i é a unidade imaginária. Para $\lambda_{L,1}$ e $\mu_{L,1}$ nas eq. (48) e (49), podemos escrever e determinar estas grandezas através dos parâmetros mecânicos do meio elástico no qual a onda se propaga, de forma que:

$$\mu_{L,1} = \rho_s c_s^2, \quad (50)$$

$$\lambda_{L,1} = \rho_s c_p^2 - 2\mu_{L,1} = \rho_s (c_p^2 - 2c_s^2), \quad (51)$$

onde ρ_s é a densidade do meio sólido; c_p e c_s são as velocidades de compressão e de cisalhamento, respectivamente (HAMILTON et al., 1970). Já para $\lambda_{L,2}$ e $\mu_{L,2}$, além dos parâmetros mecânicos, estas grandezas dependem de coeficientes de atenuação, coeficientes esses que possuem dependência com o tipo de material que compõe o meio no qual a onda se propaga. Com isso, podemos escrever:

$$\mu_{L,2} = 2\alpha_s \rho_s c_s^2, \quad (52)$$

$$\lambda_{L,2} = 2\alpha_p \rho_s c_p^2 - 2\mu_{L,2} = 2\rho_s (\alpha_p c_p^2 - 2\alpha_s c_s^2), \quad (53)$$

onde α_p e α_s são os coeficientes de atenuação de compressão e de cisalhamento, respectivamente (LOPES et al., 2017). Em posse dos parâmetros de Lamé, podemos escrever os módulos elásticos do meio no qual a onda se propaga. Os dois principais módulos elásticos são: coeficiente de Poisson (ν) e módulo de Young (E).

Fisicamente, o coeficiente de Poisson é um número adimensional dado pela razão entre as deformações axial e lateral ou radial que um corpo sofre ao ser submetido a uma força de tração ou compressão, que dentro da faixa de elasticidade possui um valor constante e exclusivo para cada material. Já o módulo de Young é a razão entre a tensão mecânica aplicada em um corpo e a deformação longitudinal resultante desta tensão. Como normalmente estas duas grandezas são proporcionais, o módulo de Young é uma constante dada em Pascal (Pa) (CALLISTER; RETHWISCH, 2010). Dessa forma, podemos relacionar o coeficiente de Poisson e o módulo de Young com os parâmetros de Lamé através das seguintes relações, respectivamente (MAVKO et

al., 2009):

$$\nu = \frac{\lambda_L}{2(\lambda_L + \mu_L)}, \quad (54)$$

$$E = \frac{\mu_L(3\lambda_L + 2\mu_L)}{\lambda_L + \mu_L}. \quad (55)$$

2.6 ESPALHAMENTO DE UMA ONDA PLANA POR UMA LENTE ACÚSTICA IMERSA EM UM FLUIDO IDEAL

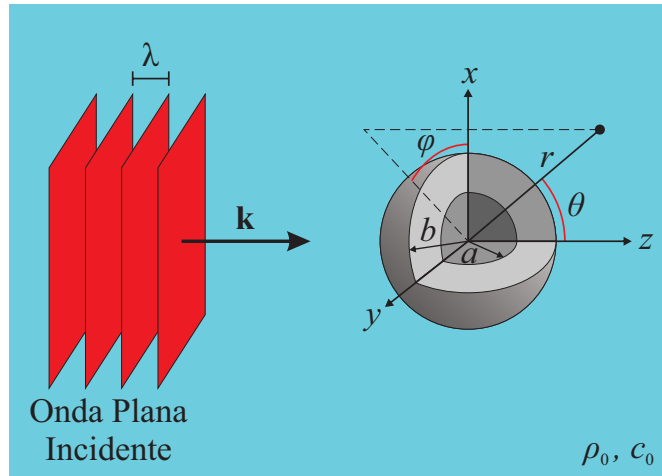
Quando uma onda sonora encontra um obstáculo em seu caminho de propagação, parte da onda é desviada de seu caminho original. É normal definir a onda que é desviada como onda espalhada. Tal fenômeno é conhecido com espalhamento acústico. O espalhamento acústico pode ser dividido em três regimes que dependem da ordem de grandeza do raio do objeto espalhador: regime de Rayleigh (raio da partícula muito menor que o comprimento de onda incidente); regime de Mie (raio da partícula da mesma ordem do comprimento de onda incidente); e regime geométrico (raio da partícula muito maior que o comprimento de onda incidente) (STOVER, 2012).

Vamos considerar um meio fluido homogêneo ideal caracterizado por uma densidade ρ_0 e velocidade do som c_0 . Nele, é posicionada uma lente acústica com núcleo composto por um material sólido com raio a e uma casca concêntrica feita de um polímero (material viscoelástico) de raio b , onde esses raios são medidos em relação ao centro da partícula em $r = 0$ que define o sistema de coordenadas. Além disso, vamos considerar que uma onda plana de frequência angular ω , comprimento de onda λ e número de onda $k = \omega/c_0$ se propaga no sentido positivo do eixo z no fluido e interage com a lente. Devido a simetria do problema, vamos adotar aqui o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) para descrever os campos acústicos, onde r é a distância radial até a origem e θ e φ são os ângulos polar e azimutal, respectivamente. A configuração descrita pode ser visualizada na Figura 4.

Ao incidir na casca da lente, parte da onda acústica é absorvida e a outra parte é espalhada. As ondas incidente e espalhada podem ser descritas em termos de potenciais de velocidade $\phi_{in}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ e $\phi_{sc}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, respectivamente, onde $e^{-i\omega t}$ é a dependência temporal das ondas. As amplitudes dos potenciais de velocidade satisfazem a equação de onda de Helmholtz da seguinte forma (LEÃO-NETO, 2015):

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \phi_{in} \\ \phi_{sc} \end{pmatrix} = 0. \quad (56)$$

Figura 4 – Configuração do problema de espalhamento acústico por uma lente acústica imersa em um fluido ideal.



Fonte: Autor (2021).

De acordo com as eqs. (25) e (26), em uma aproximação linear, podemos escrever as pressões incidente (p_{in}) e espalhada (p_{sc}) assim como as velocidades incidente (\mathbf{v}_{in}) e espalhada (\mathbf{v}_{sc}) como:

$$p_{in(sc)} = i\rho_0\omega\phi_{in(sc)}, \quad (57)$$

$$\mathbf{v}_{in(sc)} = \nabla\phi_{in(sc)}, \quad (58)$$

onde o operador gradiente ∇ em coordenadas esféricas é dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (59)$$

Resolvendo a equação de Helmholtz para os dois potenciais, eq. (56), em coordenadas esféricas, as amplitudes dos potenciais incidente e espalhado no meio fluido podem ser expandidos em uma série de ondas parciais da seguinte forma (detalhes da solução podem ser vistas em (WU, 2014) e (LEÃO-NETO, 2015)):

$$\phi_{in}(kr, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} a_{nm} j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (60)$$

$$\phi_{sc}(kr, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} a_{nm} s_n h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (61)$$

onde $\sum_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$, a_{nm} é o coeficiente de forma do feixe da onda incidente e s_n é o coeficiente de espalhamento escalar. Já j_n é a função esférica de Bessel de ordem n ; $h_n^{(1)}$ é

conhecida como função esférica de Hankel de primeiro tipo de ordem n ; e Y_n^m são harmônicos esféricos, que descrevem a parte angular da solução da equação de Helmholtz, de forma que:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad n \geq 0, -n \leq m \leq n, \quad (62)$$

sendo $P_n^m(\cos\theta)$ funções associadas de Legendre. Para a amplitude da onda espalhada, ϕ_{sc} deve satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld no infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \phi_{sc} = 0, \quad (63)$$

impondo que a onda espalhada não seja refletida neste limite. O coeficiente de forma do feixe pode ser determinado em termos do potencial de velocidade incidente avaliado sobre uma superfície esférica de controle de raio $R \gg b$. Logo, multiplicando a eq. (60) por $Y_n^{m*}(\theta, \varphi)$, integrando sobre um ângulo sólido ($\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$) e usando a relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, temos que:

$$a_{nm} = \frac{1}{j_n(kR)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \phi_{in}(kR, \theta, \varphi) Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (64)$$

Já o coeficiente de espalhamento escalar s_n será determinado aplicando-se as condições de contorno apropriadas sobre a interface meio-casca. A aproximação de campo distante ($kr \gg 1$) para a onda incidente é obtida substituindo a forma assintótica da função de Bessel esférica:

$$j_n(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin(kr - n\pi/2), \quad (65)$$

na eq. (60). Logo:

$$\phi_{in}(kr, \theta, \varphi) \sim \frac{1}{kr} \sum_{n,m} a_{nm} \sin(kr - n\pi/2) Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (66)$$

A onda espalhada no campo distante ($kr \gg 1$), pode ser obtida substituindo a relação assintótica:

$$h_n^{(1)}(kr) \sim i^{-n-1} \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad (67)$$

na eq. (61). Desta forma, obtemos:

$$\phi_{sc}(kr, \theta, \varphi) \sim -\frac{ie^{ikr}}{kr} \sum_{n,m} i^{-n} s_n a_{nm} Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (68)$$

A casca da lente acústica, por ser composta de um material viscoelástico, permite a absorção de ondas longitudinais e de cisalhamento em seu interior. Uma vez que as amplitudes

dos potenciais ϕ_{in} e ϕ_{sc} dentro da casca devem ser funções regulares (finitas), podemos escrever os potenciais de Debye na base de onda parcial como:

$$\phi_\ell = \sum_{n,m} a_{nm} [b_n j_n(k_\ell r) + c_n y_n(k_\ell r)] Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (69)$$

$$\psi_{s,1} = \sum_{n,m} a_{nm} [d_n j_n(k_s r) + e_n y_n(k_s r)] Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (70)$$

$$\psi_{s,2} = \sum_{n,m} a_{nm} [m_n j_n(k_s r) + q_n y_n(k_s r)] Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (71)$$

onde k_ℓ e k_s são os números de onda longitudinal e de cisalhamento, respectivamente dentro da casca; y_n é a função esférica de Neumann de ordem n ; e b_n , c_n , d_n , e_n , m_n e q_n são coeficientes de expansão que devem ser determinados através das condições de contorno do problema, juntamente com o coeficiente s_n presente na eq. (68). Para estas condições de contorno, temos a exigência da continuidade do tensor estresse (que descreve a deformação do material) e o vetor deslocamento (que descreve a perturbação de um elemento do material pela onda sonora) na interface meio-casca ($r = b$). Dessa forma, as condições de contorno nesta interface são (LEÃO-NETO, 2015):

- A componente radial do vetor deslocamento da partícula u_r na interface deve ser igual a componente radial do deslocamento do fluido ideal $(i/\omega)(v_{in,r} + v_{sc,r})$. Utilizando a eq. (58) podemos escrever:

$$u_r(b, \theta, \varphi) = \frac{i}{\omega} \partial_r [\phi_{in}(r, \theta, \varphi) + \phi_{sc}(r, \theta, \varphi)]|_{r=b}. \quad (72)$$

- A componente radial da tensão σ_{rr} na interface deve igual à pressão externa no fluido ideal $p_{in} + p_{sc}$. Utilizando a eq. (57) temos:

$$\sigma_{rr}(b, \theta, \varphi) = -i\rho_0\omega[\phi_{in}(b, \theta, \varphi) + \phi_{sc}(b, \theta, \varphi)]. \quad (73)$$

- As componentes tangenciais da tensão de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$ e $\sigma_{r\varphi}$ devem ser nulas na superfície da casca:

$$\sigma_{r\theta}(b, \theta, \varphi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(b, \theta, \varphi) = 0. \quad (74)$$

Agora, para o núcleo da lente acústica, levando em consideração o que foi dito para a casca, a dinâmica das ondas propagantes pode ser expressa novamente em termos de potenciais

de Debye. Dessa forma, temos que os potenciais de Debye longitudinal ($\phi_{\ell,nuc}$) e de cisalhamento ($\psi_{s,1,nuc}, \psi_{s,2,nuc}$) dentro do núcleo são escritos como (GUILD et al., 2011):

$$\phi_{\ell,nuc} = \sum_{n,m} a_{nm} f_n j_n(k_{\ell,nuc} r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (75)$$

$$\psi_{s,1,nuc} = \sum_{n,m} a_{nm} g_n j_n(k_{s,nuc} r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (76)$$

$$\psi_{s,2,nuc} = \sum_{n,m} a_{nm} o_n j_n(k_{s,nuc} r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (77)$$

onde $k_{\ell,nuc}$ e $k_{s,nuc}$ são os números de onda longitudinal e de cisalhamento, respectivamente, dentro do núcleo; f_n , g_n e o_n são coeficientes de expansão. Para a interface casca-núcleo ($r = a$), as condições de contorno são:

- As componentes do vetor deslocamento da partícula \mathbf{u} na interface devem ser contínuas em $r = a$;
- A componente radial da tensão σ_{rr} na interface deve ser contínua em $r = a$;
- As componentes tangenciais da tensão de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$ e $\sigma_{r\varphi}$ devem ser iguais na interface em $r = a$.

Entretanto, devido a simetria azimutal do sistema representado pela Figura (4), os potenciais de cisalhamento de Debye $\psi_{s,2}$ e $\psi_{s,2,nuc}$ são nulos, de forma que apenas os potenciais de Debye $\psi_{s,1}$ e $\psi_{s,1,nuc}$ são necessários para descrever ondas de cisalhamento dentro da casca e do núcleo, respectivamente (LEÃO-NETO, 2015). Enfim, ao aplicar as condições de contorno nas eqs. (60-61), (69-70) e (75-76), é produzido um conjunto de sete equações algébricas lineares que dependem das funções esféricas de Neumann, Bessel e Hankel, assim como dos parâmetros das ondas que se propagam em cada meio, como por exemplo a frequência angular e os números de onda. Expressando essas equações na forma matricial, com termos da forma d_{ij} e r_i , temos (GUILD et al., 2011):

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & 0 & 0 \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} \\ 0 & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} \\ 0 & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} \\ 0 & d_{72} & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & d_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Assim, para obter o coeficiente de espalhamento escalar s_n na casca, podemos utilizar a regra de Cramer para resolver o sistema linear da seguinte maneira:

$$s_n = \det \begin{bmatrix} r_1 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & 0 & 0 \\ r_2 & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & 0 & 0 \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} \\ 0 & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} \\ 0 & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} \\ 0 & d_{72} & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & d_{77} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & 0 & 0 \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} \\ 0 & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} \\ 0 & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} \\ 0 & d_{72} & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & d_{77} \end{bmatrix}^{-1} . \quad (79)$$

Os elementos das matrizes presente na eq. (78) podem ser encontrados no apêndice de (GUILD et al., 2011). Para o caso em que a lente acústica possui um núcleo composto por um fluido, a aplicação das condições de contorno expostas acima gera um conjunto de 6 equações algébricas lineares que podem ser obtidas da eq. (78) eliminando-se as linhas com $i = 5$, as colunas com $j = 7$ e tomando-se o limite em que $(1/k_{s,nuc}) \rightarrow 0$.

2.7 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

As bases do Método de Elementos Finitos (MEF) remontam ao final do século XVIII, quando o matemático Carl Friedrich Gauss propôs a utilização de funções de aproximação para a solução de problemas matemáticos. Durante os anos seguintes, diversas técnicas e teorias foram desenvolvidas afim de dar suporte ao MEF. Porém, devido a limitação no processamento de equações algébricas, pouco se evoluiu. Com os avanços tecnológicos e o advento da computação por volta do ano de 1950, o MEF ganhou praticidade com o apoio da matemática computacional. Isso permitiu a modelagem, elaboração e resolução de equações complexas, antes sem solução. Com o aumento da capacidade computacional, o MEF ganhou espaço e se tornou uma poderosa ferramenta na solução de problemas em diversas áreas da engenharia, física, matemática, medicina e áreas afins (LOTTI et al., 2006).

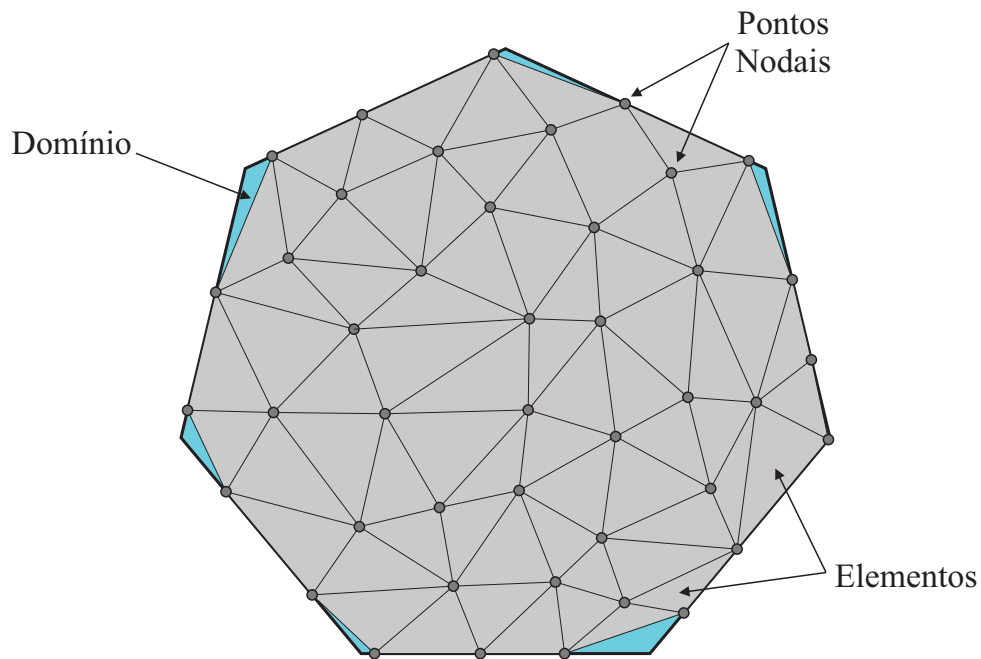
O MEF é uma técnica numérica que fornece soluções aproximadas para equações diferenciais parciais que modelam problemas que surgem nas mais diversas áreas do conhecimento. O MEF reduz o problema definido em um determinado domínio Υ discretizando-o em regiões menores δ_e que possuem geometria mais simples, onde o conjunto de todos os elementos δ_e é denominado de malha. Após a discretização, sobre cada elemento, as variáveis desconhecidas de interesses são aproximadas através de funções de interpolação. Essas funções são geralmente polinômios que podem ser expansões lineares ou de ordem superior (dependendo da complexidade

do problema) com base nas localizações geométricas de alguns pontos (nós) usados para definir a forma do elemento finito (ver Figura 5). Dessa forma, as equações que governam o problema são resolvidas para cada elemento, e as contribuições somadas sobre o todo o domínio do problema (PEPPER; HEINRICH, 2017). A relação entre o meio contínuo e os elementos é dada por:

$$\Upsilon = \sum_{e=1}^n \delta_e, \quad (80)$$

onde n é o número total de elementos da malha de discretização.

Figura 5 – Malha de elementos para um determinado domínio Υ .



Fonte: Autor (2021).

Existem diversas formas geométricas para os elementos de discretização do meio, onde a utilização de determinada geometria vai depender da dimensão da região de interesse. A precisão do método vai depender da quantidade de pontos nodais e do número e tamanho de elementos utilizados para a discretização, de forma que a solução obtida converge para a solução real à medida que o número de elementos e pontos nodais aumentam e o tamanho dos elementos da malha diminui (SOUZA, 2003). No mercado de softwares, diversos programas oferecem a análise através do MEF, como por exemplo Msc NASTRAN, Altair Hyperworks e Ansys Workbench. Entretanto, neste trabalho utilizaremos o software COMSOL *Multiphysics* para a realização das simulações.

No próximo capítulo, será exposto como os conceitos abordados até aqui foram implementados no software COMSOL *Multiphysics*, onde será relatado como foi realizada a configuração das ferramentas utilizadas para a simulação e a estruturação do domínio do problema.

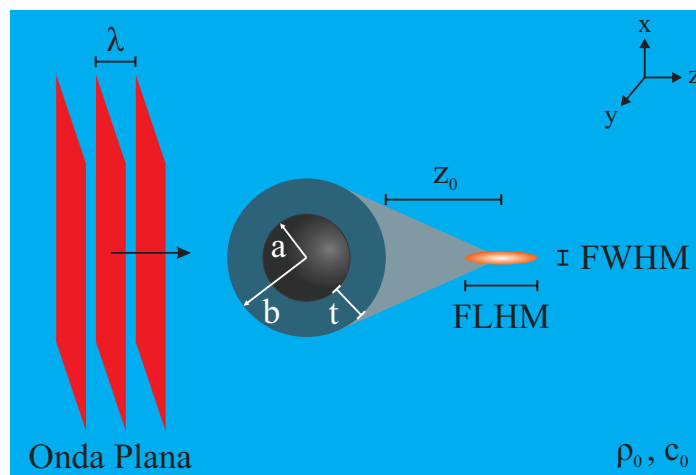
3 MODELAGEM NUMÉRICA

Para se observar a formação de feixes superfocalizados utilizando *core-shells* como lentes acústicas, foram realizadas várias simulações variando-se: o raio e o material componente do núcleo, e a espessura da casca. Neste capítulo será apresentada uma descrição detalhada de como foram realizadas as simulações numéricas através do Método de Elementos Finitos (MEF) disponível no software comercial COMSOL *Multiphysics*.

Para descrever quantitativamente o feixe superfocalizado produzido por espalhamento, tomamos alguns parâmetros característicos: o comprimento do feixe, conhecido como FLHM (*Full Length at Half Maximum*), a intensidade máxima de focalização normalizada em relação a amplitude da onda incidente (I), a distância de foco (z_0), definido como a distância entre a superfície da lente e o ponto de máxima intensidade do feixe superfocalizado, e a largura do feixe, denominada de FWHM (*Full Width at Half Maximum*). Para o caso aqui estudado, o limite de difração se manifesta no FWHM do feixe, limitando-o a λ (LOPES et al., 2017).

A Figura 6 mostra a configuração utilizada para o espalhamento de uma onda plana com comprimento de onda λ por uma lente acústica com núcleo de raio a e casca de espessura t , onde também é ilustrado o feixe superfocalizado (em laranja), além dos parâmetros espaciais citados anteriormente. Consideramos que a lente acústica está imersa em um fluido que pode ser caracterizado por sua densidade ρ_0 e pela velocidade do som neste fluido c_0 .

Figura 6 – Espalhamento de uma onda plana por uma lente acústica esférica.



Fonte: Autor (2021).

Já para uma descrição qualitativa de um feixe superfocalizado gerado por espalhamento

acústico é adotado um fator de qualidade (Q) dado por (LOPES et al., 2017):

$$Q = \left(\frac{FLHM}{FWHM} \right) I, \quad (81)$$

que relaciona os parâmetros de comprimento, largura e intensidade do feixe gerado. Analisando a eq. (81), é possível observar que Q é diretamente proporcional ao produto entre o FLHM e a intensidade (I) do feixe, além de ser inversamente proporcional ao valor do FWHM, de forma que quanto maior o comprimento do feixe e sua intensidade máxima melhor será seu fator de qualidade, assim como um menor valor de FWHM também maximiza Q .

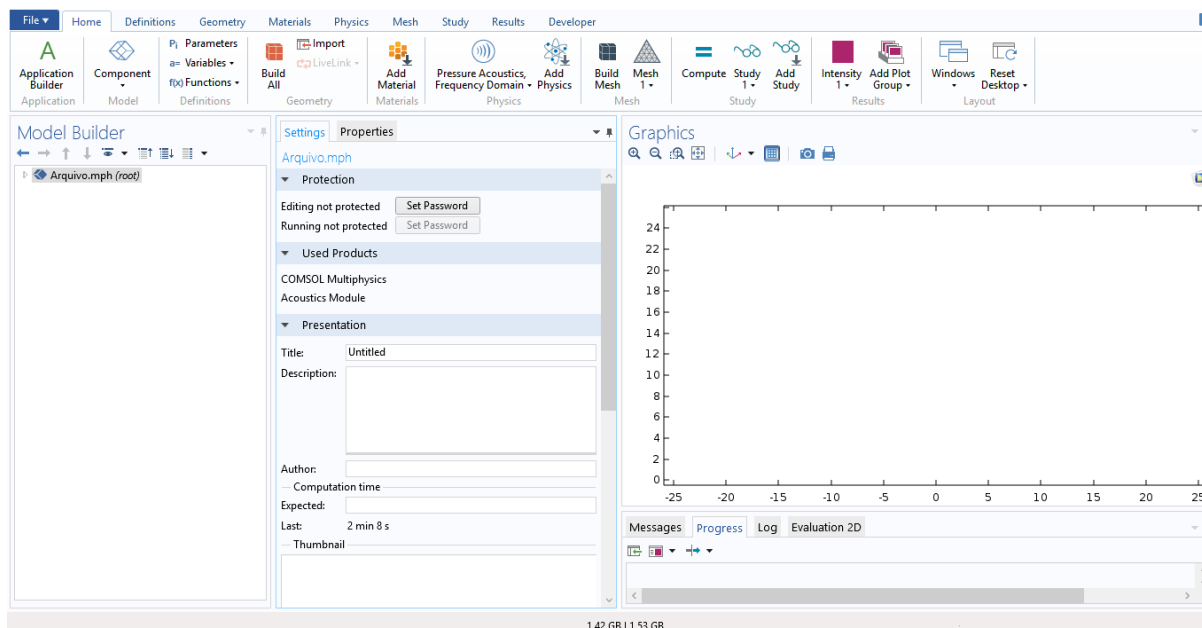
3.1 COMSOL MULTIPHYSICS

O COMSOL *Multiphysics* é um software comercial desenvolvido pela empresa COMSOL Inc. que possibilita o desenvolvimento de simulações e análises numéricas para as mais diversas áreas de aplicação, possibilitando o estudo de problemas que vão desde análises de escoamento de fluidos até comportamentos biológicos de células. O software se baseia no MEF para realizar tais estudos, de forma que é realizada a discretização do problema em pequenas regiões, solucionada as equações que descrevem o modelo para cada uma dessas regiões e somados os resultados de todos os cálculos para obter uma convergência para o problema.

Em relação à abrangência do software, o COMSOL disponibiliza diversas áreas de trabalho denominadas de Módulos, onde cada um destes corresponde a uma área de estudo. Como exemplo, podemos citar os módulos *Acoustics* e *Fluid Flow*. Dentro de cada módulo existem diversas interfaces de análises, conhecidas como físicas, que podem ser configuradas dependendo da necessidade e utilizadas juntas através da função *Multiphysics*. A estrutura do software é feita sob o modelo de blocos (denominados nós ou árvores), onde cada bloco também pode ser editado dependendo da necessidade do usuário, possibilitando também, uma maior organização do ambiente de trabalho. Para acessar ao programa, existe a *Graphical User Interface* (GUI) que é dividido em três partes: *Model Builder* (local onde são exibidos os blocos utilizados na simulação), Configurações do nó (local designado para edição e configuração dos nós) e *Graphics* (local que exhibe o trabalho realizado até o momento). A GUI e sua divisão são mostradas na Figura 7.

Para a aplicação do MEF, o COMSOL disponibiliza o nó *Mesh*. Este nó realiza a discretização do objeto de estudo em pequenos elementos, formando assim, uma malha que pode ser configurada de diversas maneiras. Entre as configurações possíveis estão a escolha do

Figura 7 – GUI do software COMSOL.



Fonte: Autor (2021).

formado e tamanho dos elementos da malha, onde é possível utilizar tamanhos pré definidos ou entrar com o tamanho do elemento conforme a necessidade. Além disso, o software disponibiliza o nó *Study*, onde é determinado qual tipo de estudo será realizado, sendo possível escolher entre estudos estacionários, perturbativos, entre outros (COMSOL, 2017).

Nesta dissertação, serão realizadas simulações da interação entre uma onda plana de ultrassom com frequência de 1 MHz com lentes acústicas compostas de núcleos de materiais diferentes e cascas confeccionadas de um polímero conhecido como Rexolite, onde todo o sistema está imerso em um meio fluido. Para isso, foram utilizados os Módulos *Acoustics*, através da física *Pressure Acoustics, Frequency Domain* para a análise da propagação do ultrassom no meio fluido; e *Structural Mechanics*, através da física *Solid Mechanics* para o estudo da propagação da onda através da lente.

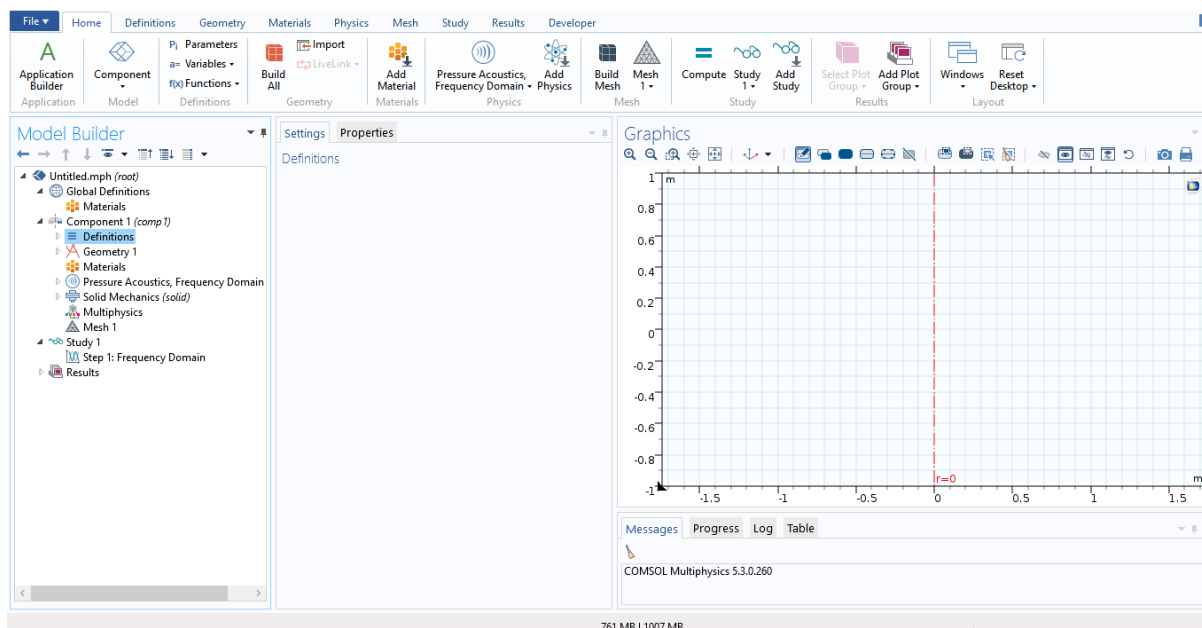
3.2 DEFINIÇÕES DE SIMULAÇÃO

A primeira coisa a se fazer para realizar uma simulação dentro do COMSOL é definir um novo modelo. Isto inclui determinar qual a dimensão do espaço em que a simulação deverá ser feita. Devido a simetria axial existente em relação ao eixo central das lentes acústicas consideradas nesta dissertação, para as simulações aqui realizadas, foi escolhida a opção 2D *Axisymmetric*, de forma que todos os objetos de estudo são definidos em um plano que, ao ser

rotacionado em torno do eixo de simetria, nos proporciona um resultado em 3D. Além de tornar a modelagem mais simples, esta opção de dimensão reduz a demanda computacional necessária para realizar as simulações, otimizando o tempo de trabalho. Por padrão, esta opção gera um plano com sistema de coordenadas r (vertical) e z (horizontal).

Em seguida, foram escolhidas as físicas utilizadas para estudar a interação entre o feixe de ultrassom e as lentes acústicas. Para a análise da propagação do ultrassom no meio líquido, foi utilizada a física *Pressure Acoustics, Frequency Domain*, que possibilita calcular a variação de pressão para propagação de ondas acústicas em fluidos inicialmente em repouso (situação considerada aqui). Para a interação entre o ultrassom e a lente acústica foi utilizada a física *Solid Mechanics*, que descreve o comportamento da lente enquanto é perturbada pela onda acústica (COMSOL, 2017).

Figura 8 – Tela do COMSOL com as definições iniciais de simulação.



Fonte: Autor (2021).

Em seguida, foi definido o tipo de estudo que seria realizado através do nó *Study*. Na presente dissertação, foi escolhido o estudo *Frequency Domain*, que calcula a resposta de um sistema submetido a uma excitação harmônica (a onda, neste caso) para um ou vários valores de frequência. Na Figura 8 é possível visualizar a estrutura da simulação levando-se em conta o que foi dito até agora em relação às definições iniciais de simulação. Além disso, é exibida também uma linha vermelha pontilhada na janela *Graphics* (eixo $r = 0$) que representa o eixo axial de simetria do sistema.

Para facilitar a análise dos dados obtidos, as simulações foram parametrizadas em relação

ao comprimento de onda (λ) do feixe de ultrassom incidente, de forma que os resultados obtidos são dados em função de λ . Com isso, os parâmetros do ultrassom utilizado nas simulações foram adicionados no nó *Global Definitions* utilizando a ferramenta *Parameters*. Como a velocidade de uma onda mecânica depende do meio em que ela se propaga, foi determinado de antemão que o fluido no qual a lente acústica iria ser imersa seria água. Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros do feixe de ultrassom incidente e da água (utilizada como meio) que foram adicionados no software.

Tabela 1 – Parâmetros do feixe de ultrassom incidente e da água (meio).

Parâmetro	Valor	Descrição
f	1 MHz	Frequência de oscilação da onda
c_0	1493 m s ⁻¹	Velocidade de propagação do ultrassom na água
ρ_0	998 kg m ⁻³	Densidade da água
λ	1,493 mm	Comprimento de onda
k	4208,4 m ⁻¹	Número de onda

Fonte: (HAYNES, 2016)

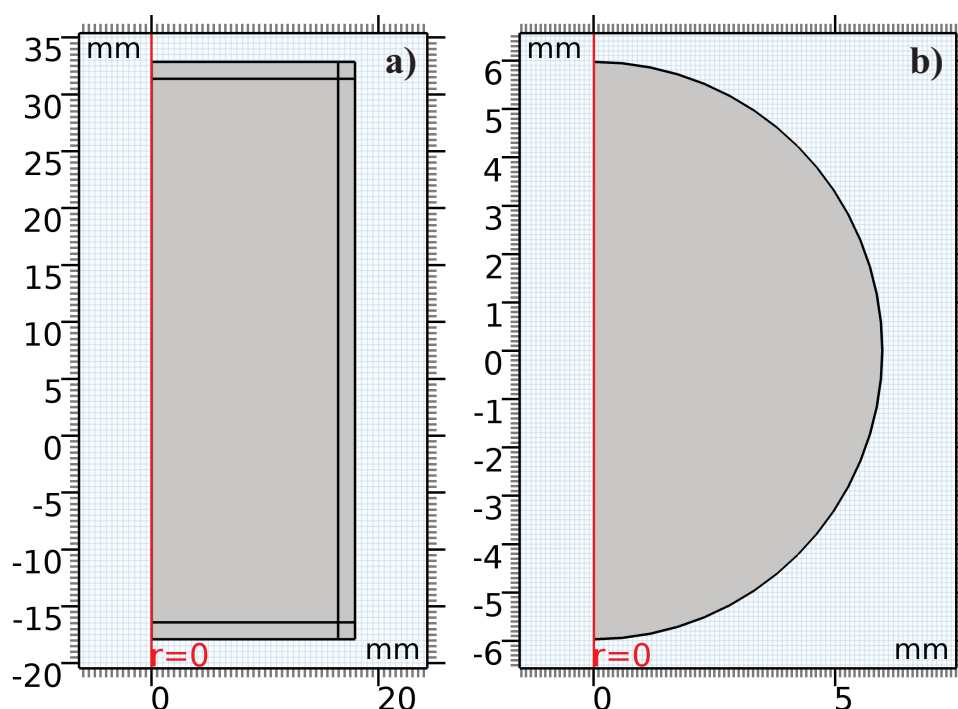
3.3 GEOMETRIA

Com as definições iniciais para as simulações definidas, se fez necessário a implementação dos objetos de estudo. Nesta dissertação, como já dito anteriormente, temos como objetivo analisar a interação entre um feixe de ultrassom e lentes acústicas, que na verdade são esferas *core-shells*. Dessa forma, temos que definir os seguintes objetos para realizar as simulações: a lente acústica, composta de um núcleo e uma casca e o meio fluido no qual a lente está imersa. Para tal finalidade, o COMSOL possui o nó *Geometry*, que disponibiliza diversas ferramentas que possibilitam a modelagem do sistema de interesse. Embora o COMSOL aceite importação de arquivos no formato CAD, a simplicidade da geometria dos objetos aqui considerados permite a utilização das ferramentas contidas no nó *Geometry*.

Devido a simetria do problema, todas as simulações foram desenvolvidas no modo 2D *Axisymmetric*, o que diminuiu a demanda computacional e otimizou o tempo de trabalho (ver seção 3.2). Dessa forma, o meio composto por água no qual a lente acústica se encontra foi delimitado por um retângulo desenhado utilizando a ferramenta *Rectangle*, com 12λ (17,916 mm) de largura e 33λ (49,269 mm) de comprimento. Além disso, foi definida uma borda de espessura

λ (1,493 mm) no topo, na base e na lateral direita do retângulo, borda esta que desenvolveu o papel de camada absorvedora nas simulações. No decorrer deste capítulo será dada uma melhor explicação sobre esta camada. O retângulo foi posicionado de forma que seu canto inferior esquerdo estivesse posicionado em $r = 0$ e $z = -12\lambda$ ($-17,916$ mm) em relação ao sistema de coordenadas adotado. A Figura 9(a) mostra a geometria construída para o meio levando em consideração o que foi dito acima.

Figura 9 – Geometria desenhada no COMSOL para a) o meio fluido e b) para o núcleo de uma lente acústica de raio 4λ (5,972 mm).



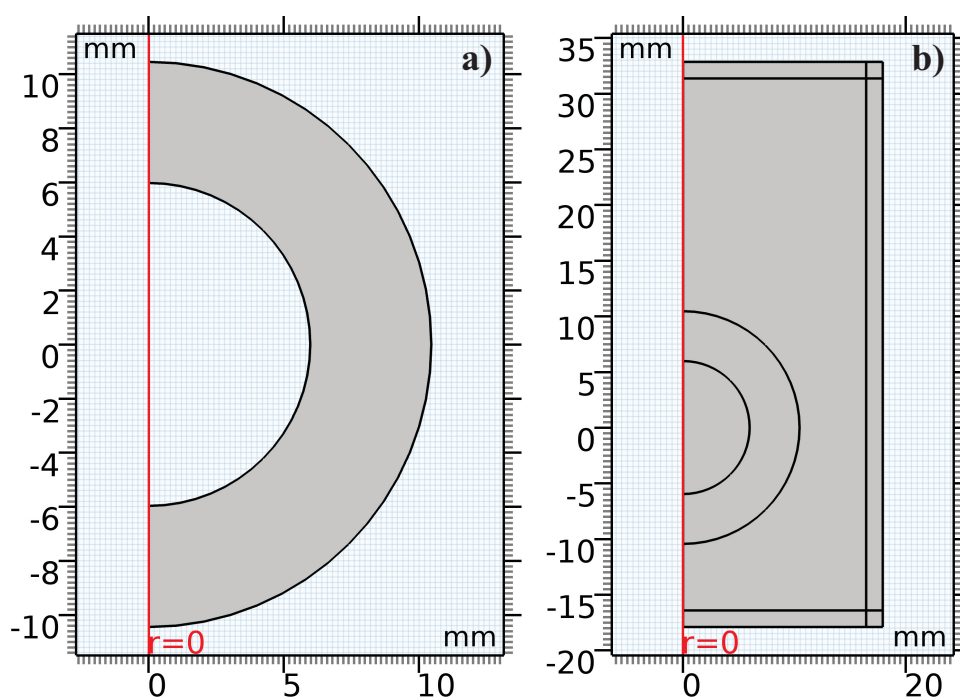
Fonte: Autor (2021).

O segundo objeto construído foi o núcleo da lente acústica utilizando-se a ferramenta *Circle*. Para tal, foi desenhado um setor circular de 180° à direita do eixo de simetria do sistema, de forma que o centro do setor circular estivesse posicionado em $z = 0$ e $r = 0$ em relação ao sistema de coordenadas adotado. Foram feitas simulações individuais com núcleos de raio λ , 2λ , 3λ e 4λ . Como exemplo, a Figura 9(b) apresenta a geometria construída para um núcleo de raio 4λ (5,972 mm).

O último objeto a ser desenhado no software foi a casca da lente acústica, que foi feito novamente com a ferramenta *Circle*. Entretanto, ao se construir a casca, foi necessário levar em conta o espaço que o núcleo ocuparia em seu interior. Para isso, ao escrever o raio do setor circular que representaria a casca, foi adicionado o raio do setor circular que representa o núcleo, de forma que ao sobrepor os dois setores a diferença entre os raios fosse igual a espessura da

casca desejada. Por exemplo, para modelar uma lente acústica com casca de espessura 3λ e núcleo de raio 4λ , o setor circular que representa a casca deve ser inserido com raio 7λ , de forma que quando houver a sobreposição dos semi-círculos a parte não sobreposta pelo núcleo seja exatamente de 3λ . A Figura 10(a) mostra a geometria desenhada no COMSOL para a casca de uma lente acústica de espessura 3λ (4,479 mm).

Figura 10 – a) Geometria desenhada no COMSOL para a casca de uma lente acústica de espessura 3λ (4,479 mm). b) Geometria completa para uma lente acústica com núcleo de raio 4λ (5,972 mm) e casca de espessura 3λ (4,479 mm) e o meio na qual a lente está imersa.



Fonte: Autor (2021).

Com a geometria totalmente definida, ainda precisamos fazer uma consideração. Como um dos parâmetros a serem variados nesta dissertação é a espessura da casca, foi conveniente desenvolver um método para conseguir realizar todas as simulações com variação de casca para um núcleo específico de uma só vez, já que realizar uma simulação para cada espessura de casca é pouco prático. Para isso, foi criado um novo parâmetro n adimensional que, ao ser variado, mudasse a espessura da casca. Assim, o raio do setor circular que representa a casca foi reescrito, passando a ser a soma entre o raio do núcleo (a) e um termo que envolvesse o produto entre n e λ , ou seja, $a + n\lambda$. Pegando o exemplo do núcleo com raio 4λ o raio do setor circular que representa a casca passou a ser $4\lambda + n\lambda$, onde agora $n\lambda$ é a espessura da casca. Fazendo $n = 3$, teremos a mesma configuração anterior, com casca de espessura 3λ . A ferramenta utilizada para realizar a variação de n , o modo que essa variação foi feita e os valores utilizados para tal serão

descritos nas próximas seções. Na Figura 10(b) é possível visualizar a geometria construída para uma lente acústica com núcleo de raio 4λ (5,972 mm) e casca de espessura 3λ (4,479 mm).

3.4 MATERIAIS E CONFIGURAÇÃO DAS FÍSICAS

Com a geometria pronta, o próximo passo dado foi selecionar os materiais componentes dos objetos desenhados para realizar as simulações. Para isso, o COMSOL disponibiliza o nó *Materials*, que dispõe de uma rica biblioteca de materiais que podem ser utilizados. Além disso, se necessário, é possível adicionar materiais manualmente inserindo as grandezas pertinentes de cada material. Nesta dissertação, como já citado anteriormente, em todas as simulações realizadas foi utilizado água como material para o meio no qual a lente acústica está imersa, assim como as bordas absorvedoras. Os valores de densidade e velocidade do som para água são mostrados na Tabela 1.

Para a casca da lente acústica, foi escolhido um polímero viscoelástico denominado Rexolite, devido suas boas propriedades acústicas, com por exemplo, baixa atenuação e impedância acústica específica relativamente próxima da água (LOPES et al., 2017). Como a biblioteca de materiais do COMSOL não possui Rexolite, este material foi adicionado manualmente. A Tabela 2 expõe as propriedades mecânicas do Rexolite adicionados no COMSOL. Para o núcleo da lente acústica, foram utilizados diversos materiais com propriedades mecânicas diferentes, sendo eles: Aço, Alumínio, Benzeno, Chumbo, Metanol, Níquel, Óleo de Oliva, Óleo de Silicone, Ar e Glicerol. Tais materiais foram escolhidos por serem de baixo custo e devido à facilidade de serem encontrados ou produzidos. A Tabela 3 expõe as propriedades mecânicas dos materiais utilizados. Aqui, é importante frisar que para cada material citado acima foram realizadas simulações com variação do raio do núcleo e espessura de casca.

3.4.1 *Pressure Acoustics, Frequency Domain*

A física *Pressure Acoustics, Frequency Domain* pode ser usada para calcular a variação de pressão para propagação de ondas acústicas em fluidos em condições de repouso. A pressão sonora p , que se resolve nesta física, representa as variações acústicas em relação à pressão ambiente, ou seja, uma perturbação em primeira ordem no sistema (ver seção 2.3). Na ausência de fluxo (caso aqui considerado), a pressão ambiente é simplesmente a pressão atmosférica absoluta de 10^5 Pa. Desta forma, esta física foi utilizada para se analisar a propagação do feixe de ultrassom em todos os objetos composto de fluidos, o que inclui o meio no qual a lente acústica

Tabela 2 – Propriedades mecânicas do Rexolite.

Parâmetro	Valor	Descrição
c_p	2337 m s ⁻¹	Velocidade de compressão
c_s	1157 m s ⁻¹	Velocidade de cisalhamento
ρ	1049 kg m ⁻³	Densidade
α_p	0,0028	Coef. de atenuação de compressão
α_s	0,0037	Coef. de atenuação de cisalhamento
λ_L	(2,921 · 10 ⁹ + 1,130 · 10 ⁷ <i>i</i>) Pa	Primeiro Parâmetro de Lamé
μ_L	(1,404 · 10 ⁹ + 1,139 · 10 ⁷ <i>i</i>) Pa	Segundo Parâmetro de Lamé
E	(3,757 · 10 ⁹ + 2,671 · 10 ⁷ <i>i</i>) Pa	Módulo de Young
ν	(0,337 - 3,871 · 10 ⁻⁴ <i>i</i>)	Coefficiente de Poisson

Fonte: (LOPES et al., 2017)

Tabela 3 – Propriedades mecânicas dos materiais utilizados no núcleo das lentes.

Material	Densidade	Vel. de compressão	Vel. de cisalhamento
Aço	7900 kg m ⁻³	5900 m s ⁻¹	3200 m s ⁻¹
Alumínio	2700 kg m ⁻³	6420 m s ⁻¹	3040 m s ⁻¹
Chumbo	11200 kg m ⁻³	2200 m s ⁻¹	700 m s ⁻¹
Níquel	8840 kg m ⁻³	5600 m s ⁻¹	3000 m s ⁻¹
Benzeno	870 kg m ⁻³	1295 m s ⁻¹	–
Metanol	791 kg m ⁻³	1103 m s ⁻¹	–
Óleo de Oliva	915 kg m ⁻³	1464 m s ⁻¹	–
Óleo de Silicone	1110 kg m ⁻³	1352 m s ⁻¹	–
Ar	1,240 kg m ⁻³	343 m s ⁻¹	–
Glicerol	1260 kg m ⁻³	1920 m s ⁻¹	–

Fonte: (KINO, 1987), (SILVA, 2014)

está imersa e os materiais de núcleo fluidos, sendo eles: Benzeno, Metanol, Óleo de Oliva, Óleo de Silicone, Ar e Metanol.

Por padrão, esta física utiliza uma equação de onda para ondas sonoras em um meio sem perdas por condução térmica e viscosidade, sendo ela (COMSOL, 2017):

$$\frac{1}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0} [\nabla p - \mathbf{q}_d] \right) = Q_m, \quad (82)$$

onde c_0 e ρ_0 são a velocidade do som e a densidade do fluido, respectivamente; \mathbf{q}_d é o vetor fonte do tipo dipolo e Q_m é a fonte do tipo monopólo. Quando $\mathbf{q}_d = \mathbf{0}$ e $Q_m = 0$ a eq. (82) corresponde exatamente à equação de onda para a pressão (eq. (23)). Para esta dissertação, estudamos a interação entre uma onda plana e lentes acústicas, de forma que tivemos que adicionar o feixe de ultrassom à simulação. Para isso, foi utilizada a interface *Background Pressure Field*, onde a

dependência espacial da onda plana adicionada foi:

$$p(\mathbf{r}) = e^{-ikz}, \quad (83)$$

onde k é o número de onda (ver Tabela 1), i é a unidade imaginária e z é o eixo no qual a onda se propaga. Aqui é importante frisar que a física *Pressure Acoustics, Frequency Domain* já considera que a onda plana utilizada possui dependência harmônica com o tempo ($p(t) = e^{-i\omega t}$). Notamos da eq. (83) que o feixe de ultrassom se propaga no sentido de $-z$ para $+z$. Além disso, a onda plana foi escrita de forma que sua amplitude fosse $p_a = 1$ Pa. Destacamos também que esta interface foi utilizada somente no meio no qual a lente acústica está imersa, de forma que não foi utilizada na camada absorvedora. Considerando que não temos fontes no domínio da simulação ($\mathbf{q}_d = \mathbf{0}$; $Q_m = 0$) e utilizando a eq. (83), podemos reescrever a eq. (82) como:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad (84)$$

que é a equação de Helmholtz para a pressão que descreve a propagação do feixe de ultrassom no meio fluido. A eq. (84) pode ser obtida diretamente da eq. (23) quando considerada uma dependência temporal harmônica para a pressão p . Além disso, esta física trás por padrão a interface *Sound Hard Boundary (Wall)*, que funciona como uma condição de contorno de parede rígida, onde a componente normal da aceleração no fluido é zero, de modo que para termos de fonte nulos e uma densidade de fluido constante implica em:

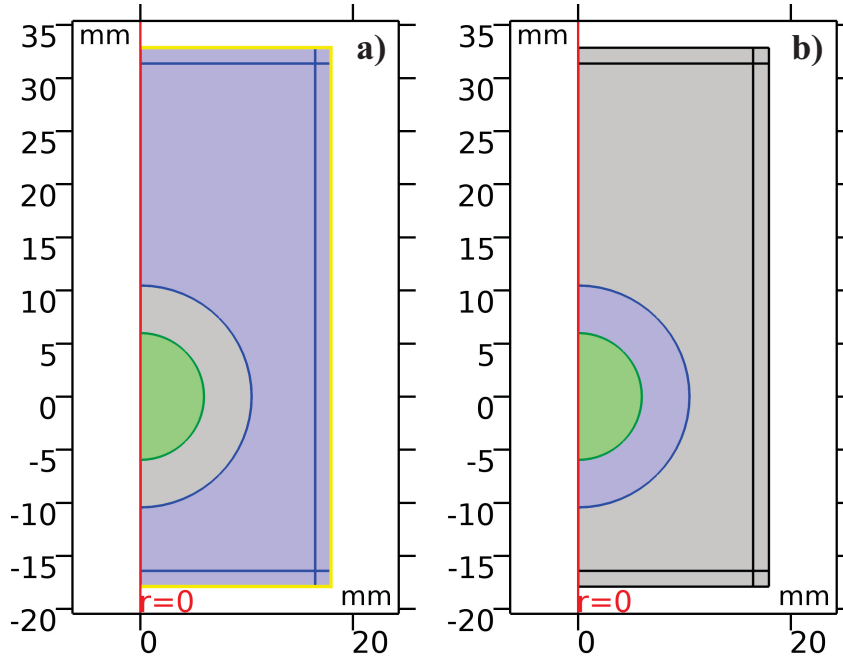
$$-\mathbf{n} \cdot \left(-\frac{\nabla p}{\rho_0} \right) = 0, \quad (85)$$

sendo \mathbf{n} é o vetor normal à superfície onde esta condição é aplicada. A identificação do termo entre parênteses no lado esquerdo da eq. (85) como aceleração no fluido vem diretamente da eq. (20). Esta condição de contorno (equivalente a uma condição de contorno de Neumann) é aplicada na extremidade das bordas, para evitar que haja a transposição de campos acústicos para fora do domínio da simulação. A Figura 11(a) mostra os objetos sob domínio da física *Pressure Acoustics, Frequency Domain*, assim como das interfaces descritas acima.

3.4.2 Solid Mechanics

Para a análise da propagação do feixe de ultrassom na lente acústica, foi utilizada a física *Solid Mechanics*, que descreve como um determinado objeto sólido se comporta ao ser perturbado mecanicamente. Esta física se baseia na resolução de equações de movimento e dinâmica de corpos rígidos para analisar o objeto sólido que é perturbado. Através desta física, é possível

Figura 11 – a) Objetos sob o domínio da física *Pressure Acoustics, Frequency Domain* (núcleo em verde válido somente para os materiais Benzeno, Metanol, Óleo de Oliva, Óleo de Silicone, Ar e Metanol), onde foram utilizadas as interfaces *Background Pressure Field* (em azul, exceto as camadas absorvedoras) e *Sound Hard Boundary (Wall)* (em amarelo). b) Objetos sob o domínio da física *Solid Mechanics* (núcleo em verde válido somente para os materiais Aço, Alumínio, Chumbo e Níquel).



Fonte: Autor (2021).

descrever, por exemplo, a tensão e a deformação sofrida pelo objeto durante a perturbação. Para modelar o problema de perturbação, o COMSOL utiliza uma equação de movimento que é uma expressão direta da Segunda Lei de Newton, sendo ela (COMSOL, 2017):

$$\rho_s \partial_t^2 \mathbf{u} = \mathbf{F}_V + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (86)$$

onde \mathbf{u} é o vetor deslocamento do corpo, ρ_s é a densidade do corpo, \mathbf{F}_V são forças volumétricas e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões em um sólido. Esta equação corresponde a eq. (32) obtida no cap. 2. A Figura 11(b) expõe os objetos sob o domínio da física *Solid Mechanics*.

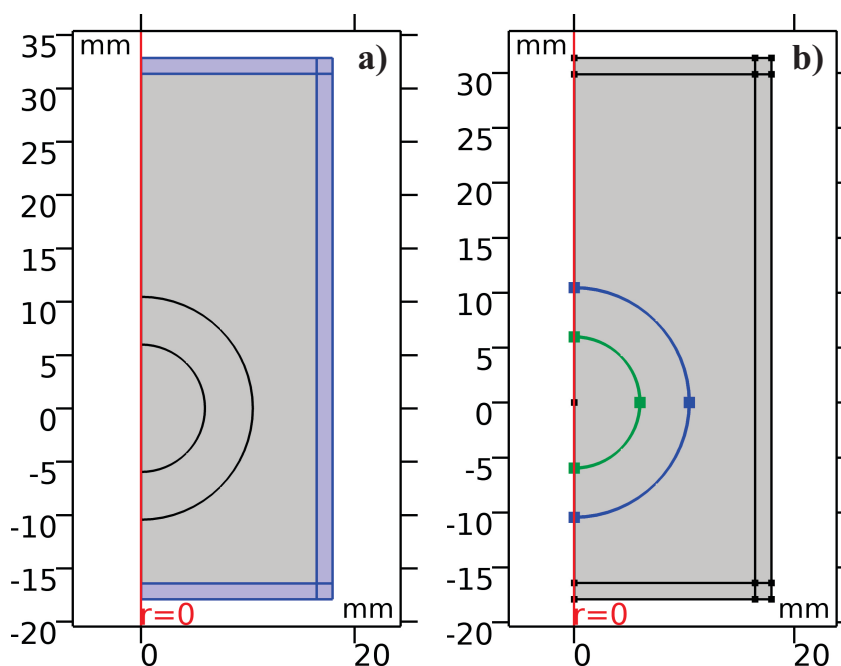
3.4.3 *Perfectly Matched Layer*

Como a região em que a lente acústica se encontra (meio) foi limitada, normalmente os limites se comportam como barreiras para o COMSOL. Com isso, é possível ocorrer a reflexão do feixe de ultrassom quando a onda alcançar tais limites, podendo essas ondas refletidas interferirem ou até mesmo modificarem os resultados das simulações. Para evitar tal efeito, foi

definida uma borda no meio (ver a seção 3.3) que deveria absorver as ondas quando chegassem nestes limites, evitando assim, a reflexão indesejada.

Para criar essa característica de absorção foi utilizada a ferramenta *Perfectly Matched Layer* (PML) dentro do nó *Definitions*. A PML absorve toda a energia da onda que alcança a região na qual a ferramenta é aplicada, evitando assim, que a onda seja refletida. A interface PML aplica um alongamento de coordenadas complexo definida em função de uma coordenada adimensional ξ , que varia de 0 a 1 sobre a camada PML. A função retorna uma nova coordenada complexa e esticada interpretada como relativa ao comprimento de onda típico para cada frequência de simulação. (COMSOL, 2017). A Figura 12(a) mostra os objetos onde a PML foi utilizada.

Figura 12 – a) Camada absorvedora onde foi utilizada a PML. b) Interfaces sob o domínio da ferramenta *Acoustic-Structure Boundary* (interface verde válida somente para lentes acústicas com núcleo fluido).



Fonte: Autor (2021).

3.4.4 *Acoustic-Structure Boundary*

Uma das características principais do COMSOL é a capacidade de utilizar as mais diversas físicas juntas para a análise de um problema. Entretanto, é necessário que haja a acoplagem destas físicas, para que exista uma descrição real do problema estudado. Para isto, o COMSOL trás consigo o nó *Multiphysics*, que desempenha o papel de acoplar as físicas utilizadas. Nesta dissertação, como descrito acima, foram utilizadas as físicas *Pressure Acoustics*,

Frequency Domain e Solid Mechanics. Para a acoplagem destas físicas, o COMSOL utiliza a interface *Acoustic-Structure Boundary*, que considera o fenômeno em que a pressão acústica causa uma carga de fluido no domínio sólido e a aceleração estrutural atua no domínio do fluido como uma aceleração normal através do limite fluido-sólido. Dessa forma, para uma interface fluido-sólido, a ferramenta utiliza as condições de contorno (considerando que não há termos de fonte) (COMSOL, 2017):

$$-\mathbf{n} \cdot \left(-\frac{\nabla p}{\rho_0} \right) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{tt}, \quad (87)$$

$$\mathbf{F}_A = p\mathbf{n}, \quad (88)$$

onde \mathbf{u}_{tt} é a aceleração estrutural sofrida pelo sólido, \mathbf{n} é o vetor normal a superfície do sólido e \mathbf{F}_A é a carga (força por unidade de área) experimentada pela estrutura. Para um objeto composto por um interior fluido envolto em uma estrutura sólida, como as lentes acústicas com núcleo fluido, as condições de contorno são:

$$-\mathbf{n} \cdot \left(-\frac{\nabla p}{\rho_0} \right)_{acima} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{tt}, \quad (89)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \left(-\frac{\nabla p}{\rho_0} \right)_{abaixo} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{tt}, \quad (90)$$

$$\mathbf{F}_A = (p_{abaixo} - p_{acima})\mathbf{n}, \quad (91)$$

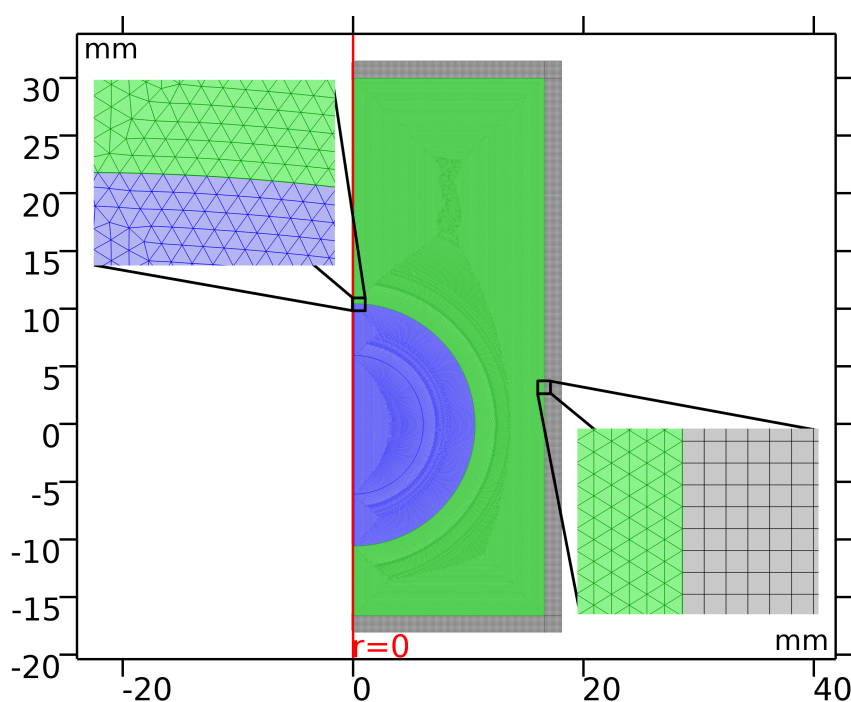
onde os subscritos "abaixo" e "acima" se referem às duas interfaces da estrutura sólida. A Figura 12(b) expõe as interfaces dos objetos onde a ferramenta *Acoustic-Structure Boundary* foi utilizada.

3.5 MESH

Para a discretização da geometria construída no COMSOL, o software disponibiliza o nó *Mesh*, responsável pela criação dos elementos para a aplicação do MEF. A combinação de todos os elementos discretizados da geometria é denominada de Malha. A malha pode ser feita através de diferentes ferramentas dentro do nó *Mesh*, onde cada uma delas disponibiliza formas, tamanhos e combinações diferentes de elementos para a simulação, podendo cada uma dessas características dos elementos serem configuradas. Nesta dissertação, foram utilizadas duas ferramentas de criação de malhas: *Mapped* e *Free Triangular*.

A ferramenta *Mapped* cria uma malha de objetos quadrangulares baseado em interpolação transfinita (COMSOL, 2017), ou seja, construção de uma função sobre um domínio planar que corresponde a uma dada função no limite geométrico (DYKEN; FLOATER, 2009). Essa ferramenta foi usada para discretizar somente das bordas, já que a característica regular da discretização criada propicia uma melhor análise da absorção da PML. Já a ferramenta *Free Triangular* discretiza a geometria da simulação em elementos de forma triangular, onde o tamanho dos elementos não é fixa. O COMSOL cria elementos menores em áreas críticas da simulação, como limites divisórios entre objetos, e elementos maiores para regiões contínuas. O meio contendo água e a lente acústica foram discretizados através dessa ferramenta. A Figura 13 apresenta uma ampliação da malha criada pelas ferramentas *Mapped* e *Free Triangular*.

Figura 13 – Malha criada para a realização das simulações utilizando as ferramentas *Mapped* (camada absorvedora em cinza) e *Free Triangular* (lente acústica e meio no qual a lente está imersa, em azul e verde, respectivamente).



Fonte: Autor (2021).

Embora o COMSOL já possua tamanhos predefinidos para os elementos, através da guia *Size*, dentro de cada ferramenta, é possível alterar os parâmetros dos elementos. Para as simulações aqui descritas, o tamanho máximo dos elementos para as duas ferramentas foi limitado a $\lambda/15$ ou seja, a cada λ de comprimento da geometria existem no mínimo 15 elementos. Este valor foi escolhido após uma análise da convergência do problema, sendo tal análise apresentada na parte de resultados.

3.6 STUDY

Com a geometria e as físicas configuradas, foi dado o último passo para se iniciar as simulações: a configuração do nó *Study*. Como dito na seção 3.2, nesta dissertação foi utilizado o estudo *Frequency Domain*, que calcula a resposta de um sistema submetido a uma excitação harmônica. Porém, como foram realizadas várias simulações onde em cada uma delas foram variadas as espessuras das cascas e o material do núcleo (para um valor fixo de raio do núcleo), é pouco prático realizar uma simulação para cada valor de casca devido ao alto número de resultados e, com isso, de simulações. Para resolver este problema, o raio do círculo que representa a casca foi escrito como $a + n\lambda$, onde a é o raio do núcleo da lente acústica, $n\lambda$ é a espessura da casca e n é um parâmetro adimensional que ao ser variado, possibilita a variação da espessura da casca (ver seção 3.3).

Para realizar a variação de n dentro do COMSOL de forma automática foi utilizada a ferramenta *Parametric Sweep* dentro do nó *Study*. Para utilizar essa ferramenta, basta especificar o parâmetro que se deseja variar, o intervalo de variação do parâmetro e o passo da variação, ou seja, a diferença entre um tamanho e outro, isto dentro do comando *range*. Para as simulações aqui realizadas, foram utilizadas lentes acústicas com núcleos de raio λ , 2λ , 3λ e 4λ individualmente, onde foram feitas simulações utilizando os materiais descritos na seção 3.4 para cada valor de raio nuclear e, dentro de cada uma destas simulações, foram variadas as espessuras das cascas, indo de $0,1\lambda$ até 5λ em passos de $0,1\lambda$. Dessa forma, foi preciso variar n dentro da ferramenta *range* de 0,1 até 5. Como exemplo, vamos considerar uma lente acústica com núcleo composto por Alumínio com raio de 4λ . Assim, foi utilizado o comando *range* da seguinte forma (padrão do próprio comando):

$$\text{range}(0.1, 0.1, 5)$$

onde 0,1 (na esquerda) é o valor de n para a primeira casca, 0,1 (no centro) é o passo utilizado para a variação e 5 o valor de n para a última casca. Ao utilizar o comando *range*, o COMSOL simula individualmente a interação entre o feixe de ultrassom e a lente acústica de casca compatível com o valor de n selecionado, ou seja, para os valores $n = 0,1$, $n = 0,2$, $n = 0,3$, e assim sucessivamente, até o valor de $n = 5$. Feitos todos esses passos, as simulações foram rodadas clicando no botão *Compute* dentro da ferramenta *Parametric Sweep*. No próximo capítulo, analisaremos os resultados obtidos das simulações realizadas e como os parâmetros das lentes utilizadas influem nos parâmetros dos feixes superfocalizados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta dissertação, temos como objetivo realizar um estudo numérico dos principais parâmetros relacionados com as propriedades mecânicas de lentes acústicas do tipo *core-shell* e analisar como os parâmetros da lente utilizada influenciam na geração de feixes superfocalizados. Para tal, como já explicitado, utilizamos o Método de Elementos Finitos (MEF) através do software comercial COMSOL *Multiphysics*. Para as simulações, foram definidas lentes com núcleos compostos por oito materiais diferentes (quatro sólidos e seis fluidos), sendo eles: Aço, Alumínio, Benzeno, Chumbo, Metanol, Níquel, Óleo de Oliva, Óleo de Silicone, Ar e Glicerol, onde variações dos parâmetros espaciais da lente como raio do núcleo e espessura da casca foram realizadas para cada material componente do núcleo. Em todas as simulações, para a casca da lente acústica, foi utilizado um polímero chamado Rexolite, que foi escolhido devido suas boas propriedades acústicas, como por exemplo, baixa atenuação e impedância acústica específica relativamente próxima da água (LOPES et al., 2017). Neste capítulo, após a configuração e realização das simulações dentro do COMSOL, iremos analisar os resultados obtidos a partir destes estudos, onde procuraremos discutir a relevância dos parâmetros da lente acústica no processo de geração de feixes superfocalizados.

4.1 CÁLCULO DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DE UM FEIXE SUPERFOCALIZADO

Para caracterizar o feixe produzido pelo espalhamento de uma frente de onda plana por uma lente acústica precisamos calcular os parâmetros que descrevem a super focalização. O campo acústico produzido na região de sombra da lente é caracterizado calculando-se seu perfil de intensidade normalizada. Aqui, como frequentemente assumido na literatura, consideramos a intensidade normalizada I do feixe como sendo a razão entre o módulo da pressão ao quadrado $|p|^2$ da região considerada e o quadrado da amplitude da pressão da onda incidente p_a^2 , de forma que

$$I = \frac{|p|^2}{p_a^2}, \quad (92)$$

onde nesta dissertação, como mencionado anteriormente, a amplitude p_a da onda utilizada é 1 Pa. Para adicionar a eq. (92) no software COMSOL foi criado um grupo de plotagem 2D denominado *Intensity* dentro do nó *Results* (nó de resultados), e o seguinte comando foi introduzido:

$$\frac{1}{p_a^2} \text{abs}((\text{acpr}.p_t) * (\text{acpr}.p_t)).$$

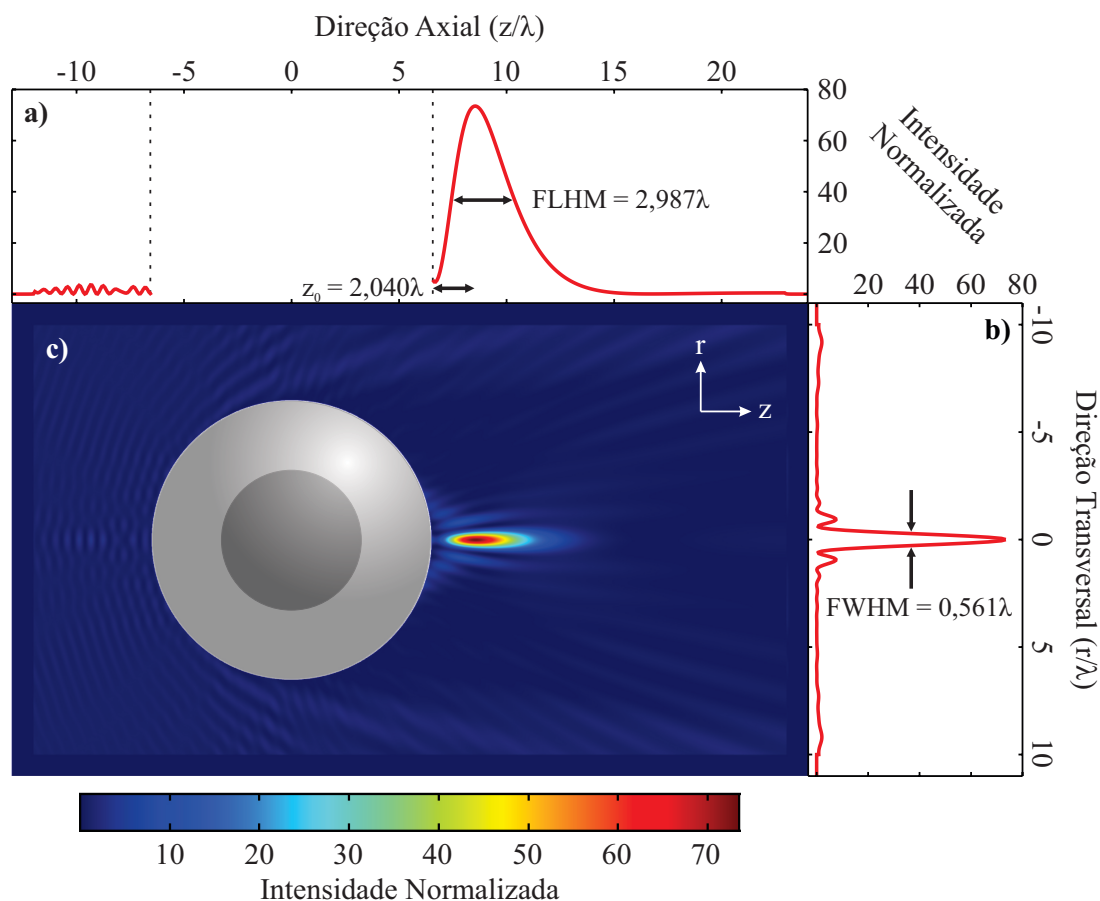
É importante salientar que não estamos considerando para os resultados o perfil de intensidade dentro da lente, uma vez que os feixes superfocalizados se formam fora da lente acústica. Uma vez configurado o grupo de plotagem *2D Intensity*, como retorno o COMSOL disponibiliza uma visualização 2D do perfil de intensidade normalizada, onde é possível discernir mais facilmente o feixe gerado.

Com o perfil 2D de intensidade normalizada do feixe obtido, é plotado em seguida o gráfico da intensidade normalizada do feixe em relação a distância axial da superfície da lente acústica, ou seja, ao longo do eixo z , onde parametrizamos o este eixo em função do comprimento de onda incidente (z/λ). Dentro do COMSOL, isto é feito criando-se um grupo de plotagem 1D dentro do nó *Results* e em seguida um gráfico de linha, onde novamente utilizamos o comando da intensidade normalizada. Através deste gráfico, conseguimos calcular o FLHM (comprimento) do feixe, que é determinado obtendo-se a intensidade máxima alcançada durante a focalização (I) e dividindo-o por dois ($I/2$). O valor do comprimento do feixe será a distância entre os dois pontos da curva localizadas na altura de $I/2$. Além disso, deste gráfico é obtida também a distância de foco z_0 , que é definida como a distância entre o ponto de intensidade máxima e a superfície da lente acústica.

O próximo parâmetro do feixe a ser determinado é o FWHM. Este parâmetro é importante, pois é ele que indica se a super focalização foi atingida. Para calcular o FWHM, é traçada uma linha na direção transversal ao feixe (paralela ao eixo r) passando por seu ponto de maior intensidade. Em seguida, é criado um novo grupo de plotagem 1D e calcula-se a intensidade normalizada do feixe em função da distância transversal utilizando-se dois gráficos de linha (um para o eixo r positivo e outro para o eixo r negativo), sendo tal distância parametrizada também em função do comprimento de onda incidente (r/λ). Em seguida, com o gráfico plotado, novamente é medida a distância entre os dois pontos do gráfico localizados à meia altura, de forma semelhante ao que foi feito para a medida do comprimento do feixe, citado anteriormente. Assim sendo, a distância entre esses dois pontos é tido como o FWHM do feixe gerado.

Como exemplo, a Figura 14 expõe o perfil 2D de intensidade normalizada, e os gráficos de intensidade normalizada em relação às direções axial e transversal parametrizadas em relação ao comprimento de onda incidente de um feixe superfocalizado gerado pelo espalhamento de uma onda plana por uma lente acústica com núcleo composto por aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite de espessura $t = 3,5\lambda$, onde a barra colorida abaixo da figura indica a variação de intensidade. Para tal lente acústica, conseguimos um feixe superfocalizado com intensidade normalizada de $I = 73,503$, assim como $FLHM = 2,987\lambda$ e $z_0 = 2,040\lambda$. Já o

Figura 14 – Intensidade normalizada em relação à direção a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de um feixe superfocalizado gerado por uma lente acústica com núcleo composto por Aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite com espessura $t = 3,5\lambda$. c) Perfil de intensidade 2D do feixe.



Fonte: Autor (2021).

FWHM obtido foi de $0,561\lambda$, ficando assim, abaixo do limite de difração. Todos os parâmetros do feixe superfocalizado gerado podem ser vistos na figura.

Por fim, o último parâmetro a ser calculado é o fator de qualidade Q , dado pela eq. (81). Este fator nos possibilita fazer uma análise qualitativa dos feixes gerados através da relação entre a intensidade normalizada I , o FLHM e FWHM. Para o feixe mostrado na Figura 14 obtemos um fator de qualidade de 391,361. Com esses resultados, é possível compreender o porquê do feixe ser superfocalizado, uma vez que, o valor da intensidade obtida para esta configuração de lente acústica indica que o feixe possui uma intensidade aproximadamente 73 vezes superior a da onda incidente na lente. Além disso, através do FWHM pudemos notar que o ultrassom utilizado foi focalizado em uma região de $0,561\lambda$, conseguindo gerar uma focalização se sub-comprimento de onda. Na presente dissertação, todos os resultados obtidos em relação aos parâmetros dos feixes superfocalizados que serão expostos daqui em diante foram calculados utilizando-se os

métodos e ferramentas citadas acima de forma análoga ao que foi relatado nessa seção.

4.2 CONVERGÊNCIA DOS RESULTADOS E FUNCIONALIDADE DA PML

Como foi dito anteriormente, a precisão dos resultados obtidos através da aplicação do Método de Elementos Finitos (MEF) depende da quantidade e do tamanho dos elementos que compõem a malha de discretização. Dessa forma, determinar quais as dimensões ideais dos parâmetros anteriores é de extrema importância para a realização do estudo numérico, uma vez que isto pode poupar tempo de simulação e reduzir a demanda de capacidade computacional sem, entretanto, perder a precisão dos resultados. Nesta dissertação, utilizamos $\lambda/15$ como o tamanho máximo para um elemento da malha de discretização.

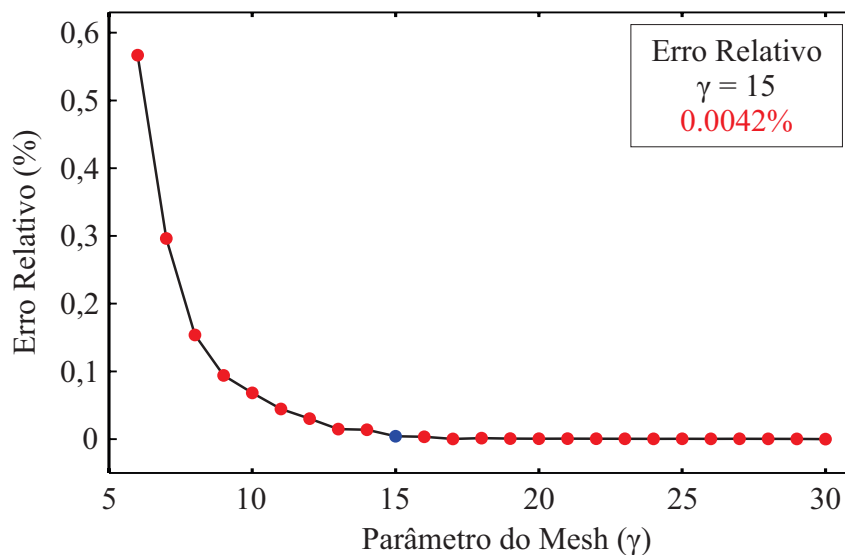
Para realizar uma análise da convergência dos resultados, e com isso determinar se o tamanho máximo de elemento utilizado aqui nos devolve um resultado próximo ao real, escrevemos o tamanho máximo dos elementos da malha como λ/γ , onde γ pode ser denominado parâmetro do *Mesh*, e realizamos simulações para uma configuração específica de lente acústica variando seu valor. Em seguida, calculamos o erro relativo das intensidades máximas normalizadas obtidas através da fórmula:

$$\text{Erro Relativo} = \frac{|I - I_{\text{ref}}|}{I_{\text{ref}}} \times 100\%, \quad (93)$$

onde I é o valor de intensidade normalizada obtido para cada valor de γ e I_{ref} é o valor de intensidade normalizada de referência, tomado como o mais próximo do valor real. Dessa forma, a Figura 15 expõe os erros relativos das intensidades normalizadas para cada valor de γ , onde a geometria utilizada para as simulações consiste de uma lente acústica com núcleo composto por aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite de espessura $t = 3,5\lambda$. Para os cálculos, I_{ref} é tomado como sendo o valor de intensidade normalizada para $\gamma = 30$. Através desta figura, vemos que para $\gamma = 15$ (ponto azul no gráfico, que corresponde ao valor utilizado em todas as simulações desta dissertação) temos um erro relativo da ordem de 0,0042%, de forma que o valor $\lambda/15$ escolhido para o *Mesh* das simulações desta dissertação é adequado e nos retorna um resultado bastante preciso.

Outro fator importante que pode influenciar nos resultados obtidos com as simulações diz respeito a implementação e funcionalidade da *Perfect Match Layer* (PML). Como já mencionado, foi adicionada uma PML nos limites da geometria, para absorver a energia da onda incidente nas bordas do meio, evitando assim, que a onda seja refletida. Dessa forma, determinar se a PML está atenuando a onda que alcança os limites do meio de forma eficiente é muito importante, uma

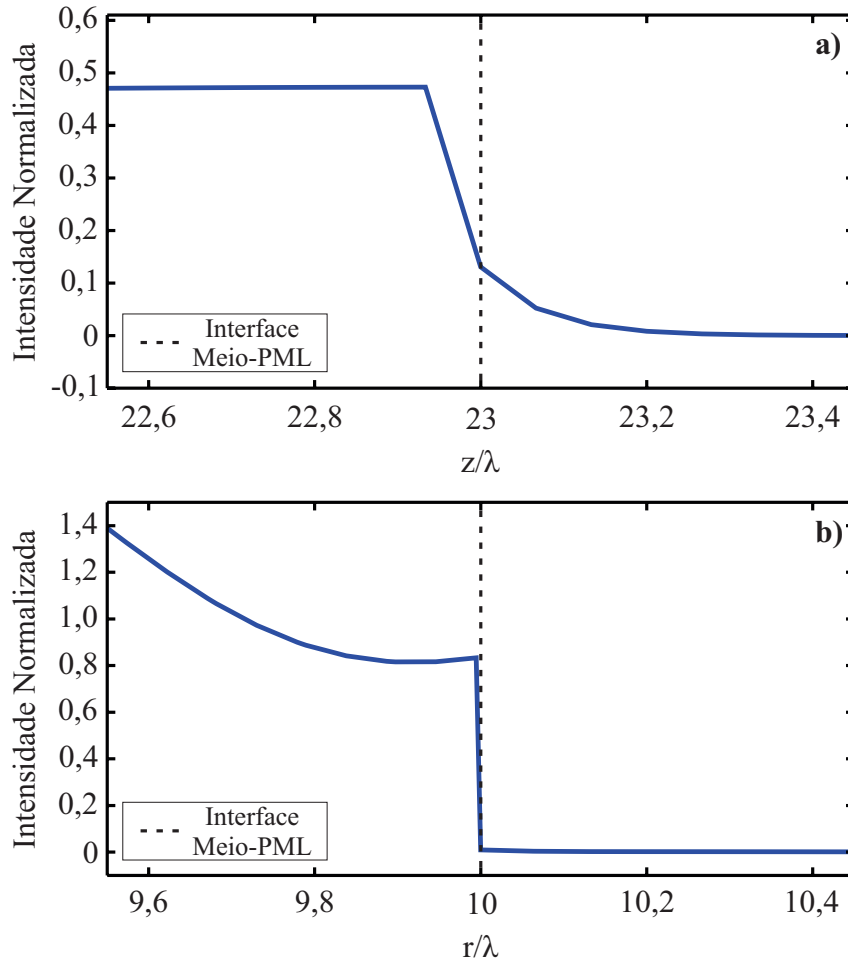
Figura 15 – Erros relativos das intensidades normalizadas em relação ao parâmetro do *Mesh* γ , onde I_{ref} é tomado como sendo o valor de intensidade para $\gamma = 30$. As simulações foram realizadas utilizando-se uma lente acústica com núcleo composto por aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite com espessura $t = 3,5\lambda$.



Fonte: Autor (2021).

vez que, dessa forma, pode ser determinado se está ou não havendo interferências nos resultados por parte de uma reflexão indesejada da onda. A Figura 16 mostra a intensidade normalizada na interface Meio-PML nas direções axial (parte superior da geometria) e transversal (lado direito da geometria) de uma onda incidente espalhada por uma lente acústica com núcleo composto por aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite de espessura $t = 3,5\lambda$. Para a plotagem dos gráficos consideramos duas linhas ortogonais que cruzam o meio exatamente no ponto de máxima intensidade do feixe gerado por esta lente. Além disso, as distâncias em ambos os gráficos estão parametrizados em função do comprimento de onda λ . Através dos gráficos, vemos que existe uma queda brusca na intensidade normalizada nos entornos da interface Meio-PML (linha tracejada), onde a intensidade tende a zero dentro da camada PML. Dessa forma, é evidente que a PML utilizada nas simulações apresenta uma boa funcionalidade e exerce muito bem seu papel de camada atenuadora. Aqui, é importante salientar que as análises realizadas em relação ao *Mesh* e a funcionalidade da PML se estendem a todas as simulações realizadas, uma vez que tanto o *Mesh* quanto a PML são idênticas para todas as simulações.

Figura 16 – Intensidade normalizada na interface Meio-PML nas direções a) axial e b) transversal de uma onda espalhada por uma lente acústica com núcleo composto por Aço de raio $a = 3\lambda$ e casca de Rexolite de espessura $t = 3,5\lambda$.



Fonte: Autor (2021).

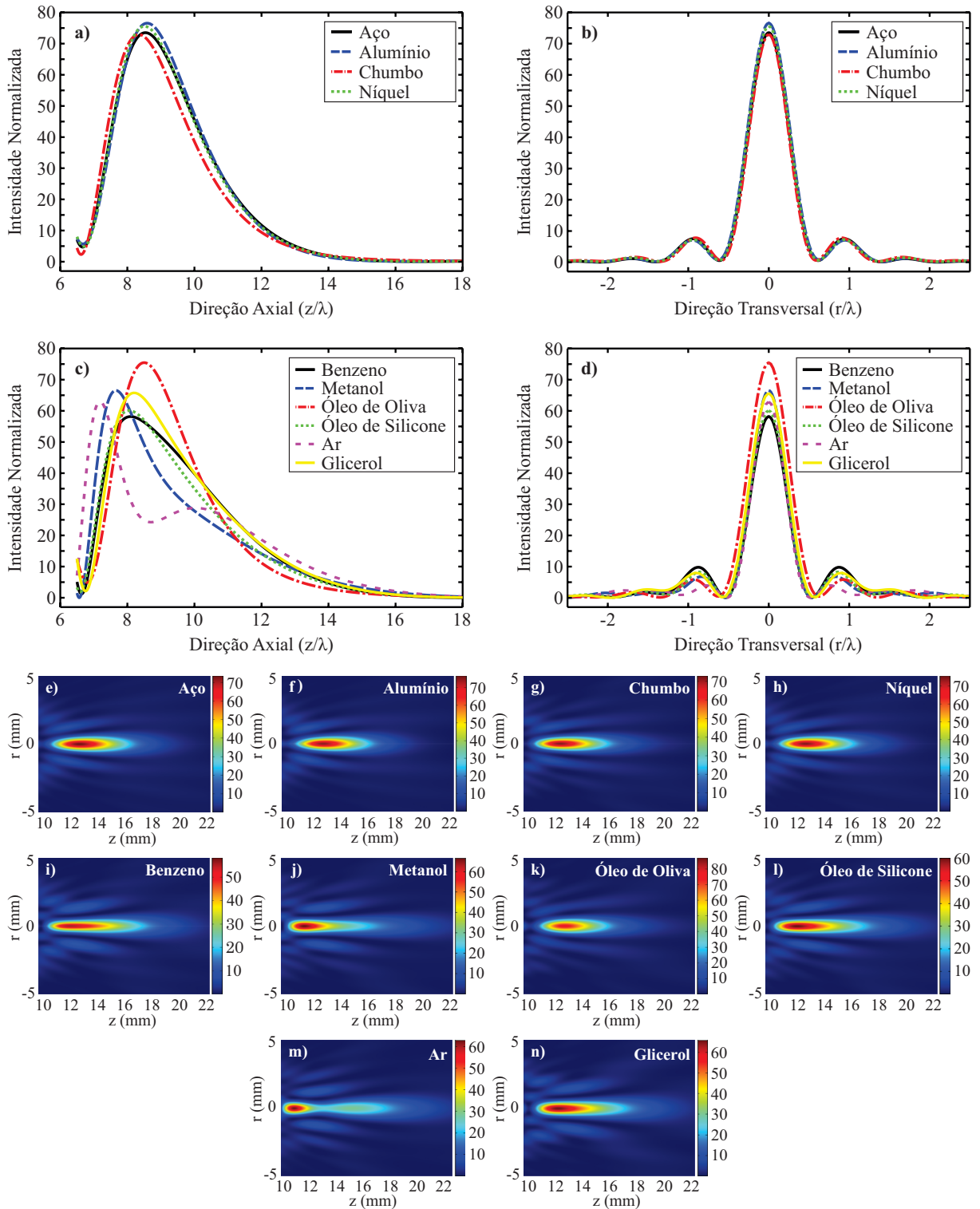
4.3 INFLUÊNCIA DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS E ESPACIAIS DAS LENTES ACÚSTICAS

4.3.1 Influência do material componente do núcleo

Para analisar a influência exercida nos parâmetros característicos dos feixes superfocalizados por parte do material componente do núcleo da lente acústica, vamos considerar uma lente com um núcleo de raio $a = 3\lambda$ e casca de espessura $t = 3,5\lambda$ feita de Rexolite. A Figura 17 expõe as intensidades normalizadas medidas em relação às direções axial e transversal (parame-trizadas em relação a λ) para cada um dos materiais componentes de núcleo considerados nesta dissertação, assim como os perfis de intensidade 2D.

Observando essa figura, vemos que os feixes gerados por lentes de núcleo sólido possuem intensidades normalizadas próximas umas das outras, de forma que suas curvas de intensidade se

Figura 17 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções axial e transversal (parâmetrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por materiais a) - b) sólidos e c) - d) fluidos. e) - n) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados pelas lentes consideradas nos gráficos a) - d). Todas as lentes têm dimensões fixas $a = 3\lambda$, $t = 3,5\lambda$ e casca de Rexolite.



Fonte: Autor (2021).

sobrepõem parcialmente, o que indica que os feixes analisados neste caso possuem características semelhantes. No entanto, lentes com núcleos fluidos geram feixes com intensidades normalizadas mais diversas, bem como parâmetros característicos mais variados, como pode ser visto mais claramente nos perfis de intensidade 2D da Figura 17, e com isso, estas últimas geram feixes superfocalizados mais sensíveis à variação do material do núcleo. Esse fato indica que tais lentes possuem uma versatilidade maior em relação à aplicabilidade. Os parâmetros característicos dos feixes superfocalizados mostrado na Figura 17 são expostos na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados expostos na Figura 17.

Material do Núcleo	I	z_0	FLHM	FWHM	Q
Aço	73,503	$2,040\lambda$	$2,987\lambda$	$0,561\lambda$	391,361
Alumínio	76,547	$2,090\lambda$	$2,854\lambda$	$0,572\lambda$	381,932
Chumbo	72,910	$1,843\lambda$	$2,785\lambda$	$0,541\lambda$	375,331
Níquel	75,557	$2,010\lambda$	$2,838\lambda$	$0,562\lambda$	381,549
Benzeno	58,151	$1,604\lambda$	$3,708\lambda$	$0,499\lambda$	432,112
Metanol	66,525	$1,158\lambda$	$2,438\lambda$	$0,489\lambda$	331,668
Óleo de Oliva	75,452	$2,005\lambda$	$2,709\lambda$	$0,566\lambda$	361,130
Óleo de Silicone	60,068	$1,550\lambda$	$3,254\lambda$	$0,501\lambda$	390,142
Ar	64,914	$0,685\lambda$	$1,346\lambda$	$0,456\lambda$	191,610
Glicerol	65,754	$1,691\lambda$	$3,212\lambda$	$0,522\lambda$	404,601

Chamamos atenção para o fato de que todos os feixes possuem $\text{FWHM} < \lambda$, comprovando assim, que o limite de difração foi superado. Destacamos os feixes gerados por lentes com núcleo de Aço e Benzeno, que possuem fator de qualidade $Q = 391,361$ e $Q = 432,112$, respectivamente, obtendo os maiores valores entre os sólidos (núcleo de aço) e fluidos (núcleo de benzeno). Dessa forma, vemos que a variação do material que compõe o núcleo da lente pode ser utilizada como ferramenta de adequação e controle dos parâmetros dos feixes superfocalizados gerados para aplicações específicas, principalmente para o caso de lentes com núcleos fluidos, que geram feixes mais sensíveis.

Além disso, vale a pena frisar a relação observada entre o FWHM do feixe gerado e a velocidade de compressão do material componente do núcleo da lente acústica. Como mostrado na Tabela 5, notamos que o valor do FWHM do feixe superfocalizado gerado pela lente tende a aumentar à medida que a velocidade de compressão do material aumenta, tanto para fluidos quanto para sólidos, de forma que, para uma determinada configuração espacial de lente ($a = 3\lambda$ e $t = 3,5\lambda$ no caso aqui explicitado), núcleos compostos por materiais com menor velocidade de compressão tendem a gerar feixes com menor FWHM e vencer o limite de difração de forma mais eficiente.

Tabela 5 – Velocidade de compressão para cada material componente de núcleo e FWHM dos feixes gerados.

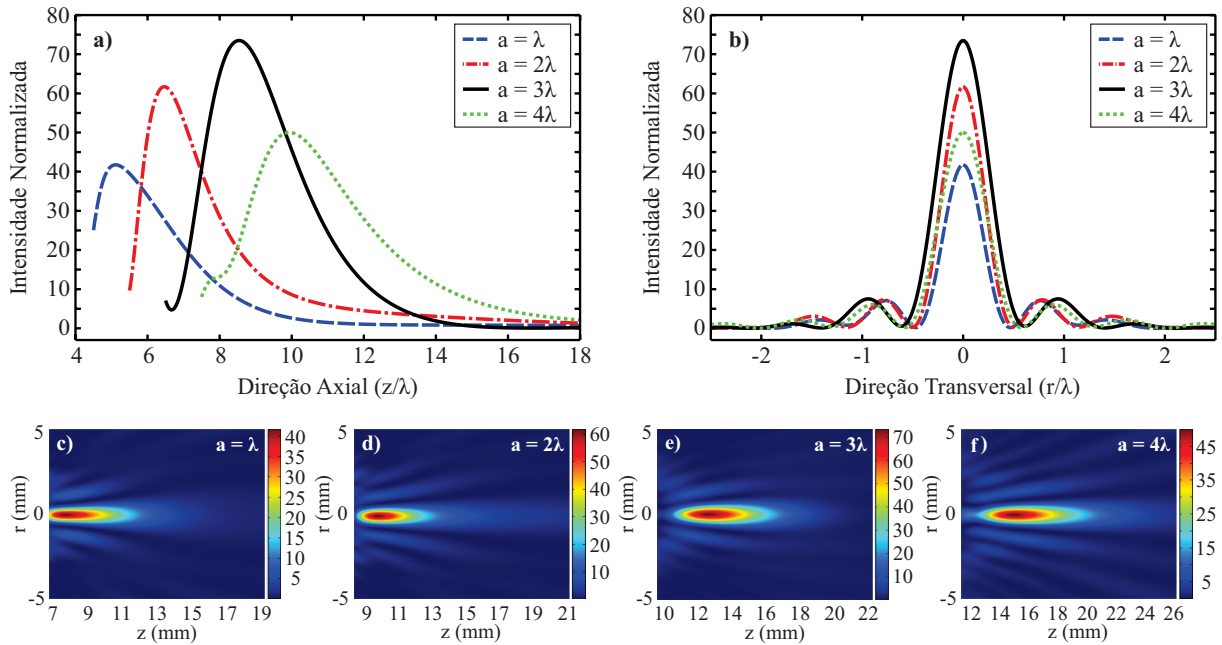
Material	Vel. de Compressão	FWHM
Ar	343 m s ⁻¹	0,456λ
Metanol	1103 m s ⁻¹	0,489λ
Benzeno	1295 m s ⁻¹	0,499λ
Óleo de Silicone	1352 m s ⁻¹	0,501λ
Óleo de Oliva	1464 m s ⁻¹	0,566λ
Glicerol	1920 m s ⁻¹	0,522λ
Chumbo	2200 m s ⁻¹	0,541λ
Níquel	5600 m s ⁻¹	0,562λ
Aço	5900 m s ⁻¹	0,561λ
Alumínio	6420 m s ⁻¹	0,572λ

4.3.2 Influência do raio do núcleo com espessura de casca fixa

Vamos utilizar os materiais componentes de núcleo que apresentaram melhor fator de qualidade dentre os expostos na Tabela 4, sendo eles Aço e Benzeno. Nesta subseção, vamos considerar lentes acústicas com núcleos compostos pelos dois materiais citados anteriormente, cujos raios do núcleo possuem valores λ , 2λ , 3λ e 4λ e suas cascas são compostas de Rexolite com espessura fixa de $t = 3,5\lambda$. Dessa forma, as Figuras 18 e 19 mostram os gráficos de intensidade normalizadas medidas em relação às direções axial e transversal de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Aço e Benzeno, respectivamente, para cada um dos valores de raio de núcleo, assim como os perfis de intensidade 2D destes feixes.

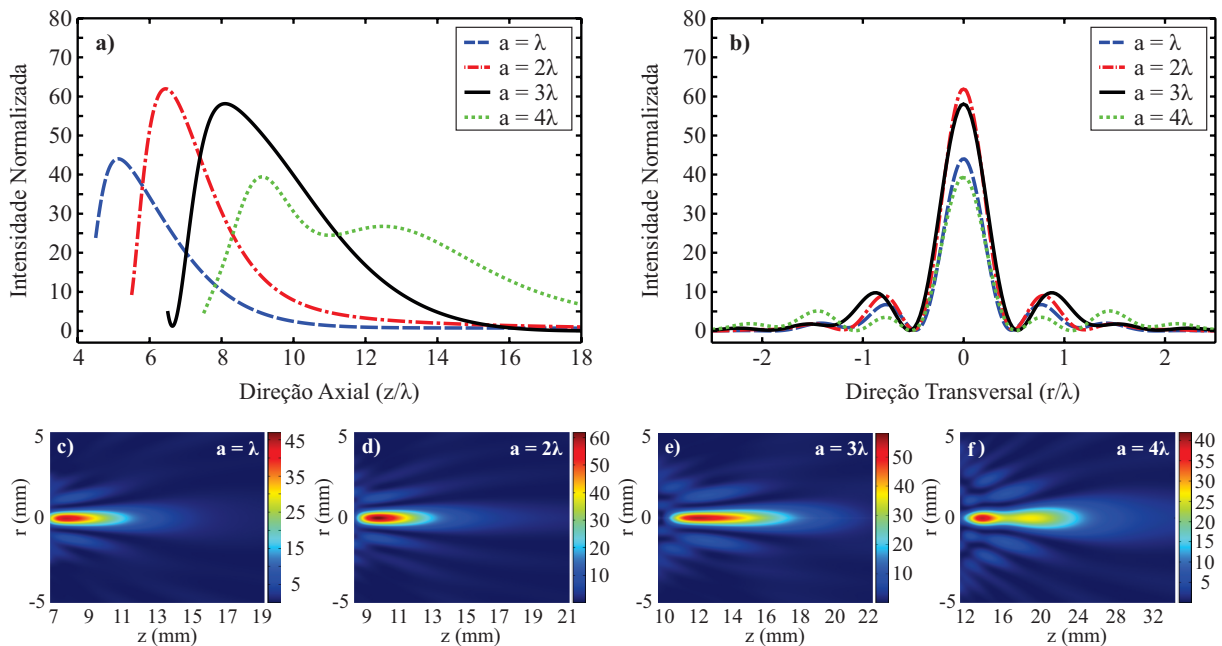
Os gráficos em relação à direção axial apresentam deslocamento entre as curvas pois a medida que aumentamos o raio do núcleo mantendo a espessura da casca fixa deslocamos a superfície da lente cada vez mais para a direita. Através destas figuras, vemos que para ambos os materiais componentes de núcleo utilizados, temos uma variação expressiva tanto em intensidade normalizada como em parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados a medida que o raio do núcleo é variado. Nas Tabelas 6 e 7 os parâmetros característicos dos feixes mostrados nas Figuras 18 e 19, respectivamente, são expostos e confirmam as afirmações feitas acima. Aqui, chamamos a atenção para o fato de que, novamente, todas as lentes utilizadas venceram o limite de difração, uma vez que temos $\text{FWHM} < \lambda$ para todos os feixes considerados, com $\text{FWHM} < \lambda/2$ para os feixes gerados por lentes com o núcleo composto por Benzeno. Logo, através desses resultados, podemos constatar que a variação do raio do núcleo da lente acústica também pode ser utilizado como ferramenta de adequação dos parâmetros dos feixes superfocalizados para uma aplicação específica.

Figura 18 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Aço de diferentes raios e casca de Rexolite com espessura fixa $t = 3,5\lambda$. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).



Fonte: Autor (2021).

Figura 19 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Benzeno de diferentes raios e casca de Rexolite com espessura fixa $t = 3,5\lambda$. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).



Fonte: Autor (2021).

Tabela 6 – Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por Aço com espessura de casca fixa $t = 3,5\lambda$ para diferentes valores de raio do núcleo.

Raio do núcleo (a)	I	z_0	FLHM	FWHM	Q
λ	41,750	$0,612\lambda$	$2,504\lambda$	$0,437\lambda$	239,226
2λ	61,703	$0,963\lambda$	$2,126\lambda$	$0,464\lambda$	282,717
3λ	73,503	$2,040\lambda$	$2,987\lambda$	$0,561\lambda$	391,361
4λ	50,007	$2,430\lambda$	$3,620\lambda$	$0,523\lambda$	346,129

Tabela 7 – Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por benzeno com espessura de casca fixa $t = 3,5\lambda$ para para diferentes valores de raio do núcleo.

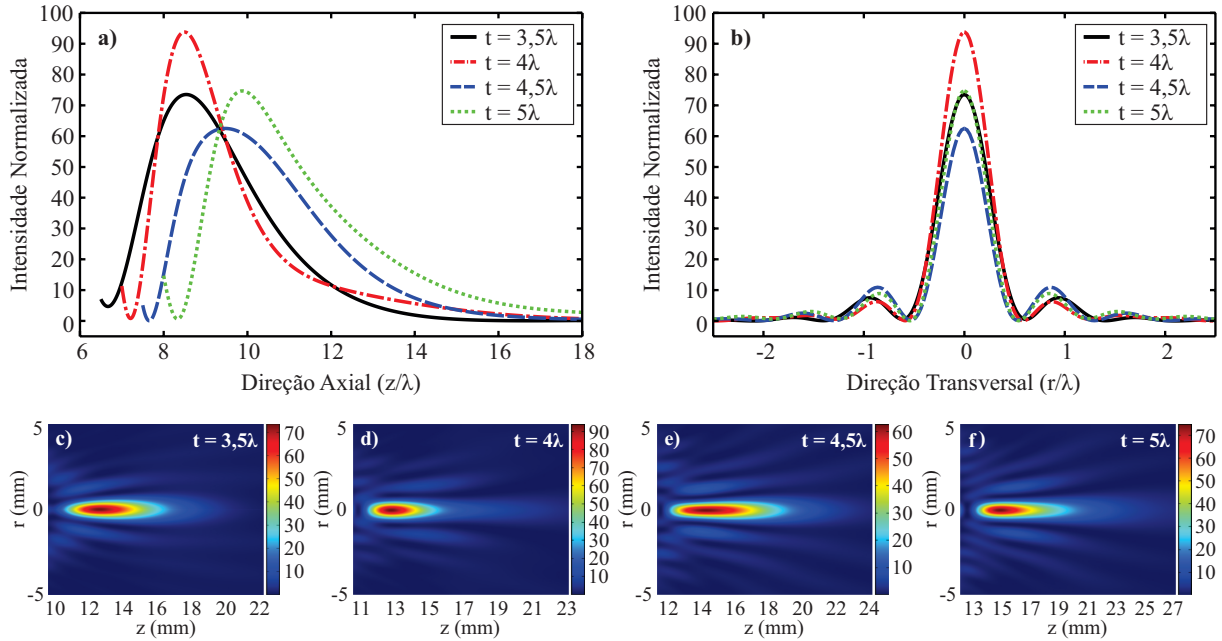
Raio do núcleo (a)	I	z_0	FLHM	FWHM	Q
λ	44,037	$0,622\lambda$	$2,352\lambda$	$0,443\lambda$	233,804
2λ	61,955	$0,944\lambda$	$2,240\lambda$	$0,459\lambda$	302,351
3λ	58,151	$1,604\lambda$	$3,708\lambda$	$0,499\lambda$	432,112
4λ	39,430	$1,633\lambda$	$6,449\lambda$	$0,474\lambda$	536,464

4.3.3 Influência da espessura da casca com raio do núcleo fixo

Para explicitar a dependência dos parâmetros característicos dos feixes superfocalizados com a espessura da casca (t) vamos considerar, novamente, lentes com núcleos compostos por Aço e Benzeno de raios $a = 3\lambda$ fixo para espessuras de casca $3,5\lambda$, 4λ , $4,5\lambda$ e 5λ . As Figuras 20 e 21 trazem os gráficos de intensidade normalizada que caracterizam os feixes superfocalizados gerados pelas lentes com núcleos compostos por Aço e Benzeno, respectivamente, assim como seus perfis de intensidade 2D. Aqui, consideramos valores de espessura de casca acima de $3,5\lambda$ pois valores abaixo deste não apresentaram bons resultados (comparados aos mostrados aqui) ou não resultaram na formação de feixes superfocalizados.

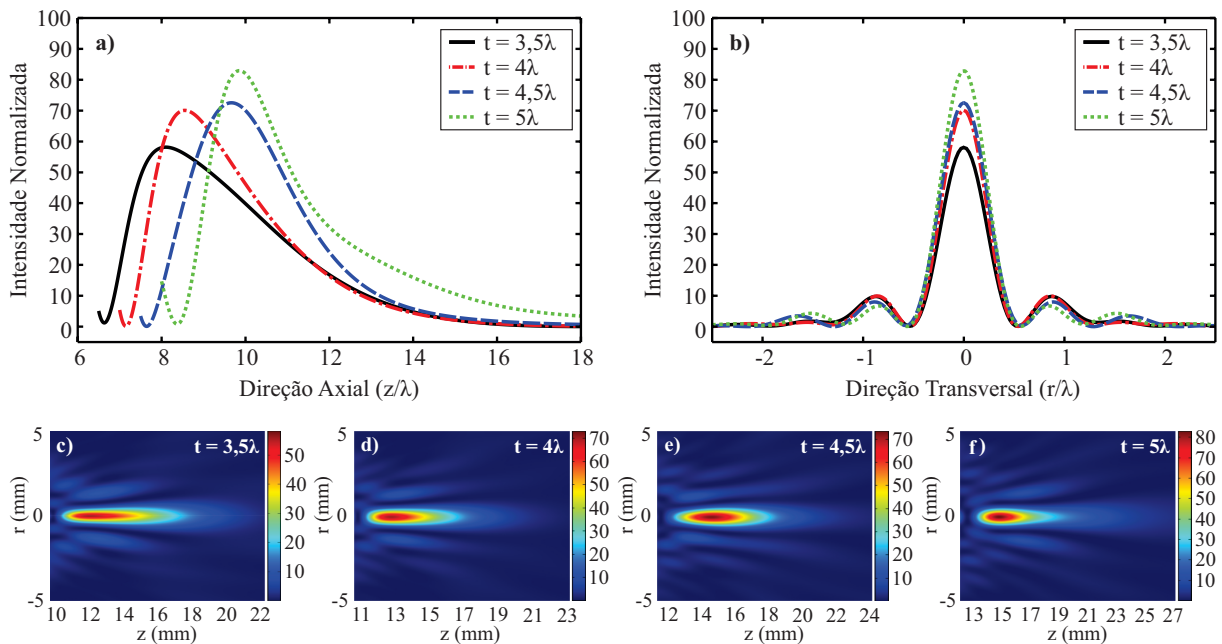
Através das figuras, vemos que, novamente, temos variações significativas nos parâmetros característicos dos feixes à medida que é variado o valor de espessura da casca para ambos os materiais componentes do núcleo, indicando que a dimensão espacial da casca selecionada para a lente influencia diretamente no feixe gerado. As Tabelas 8 e 9 expõem os parâmetros característicos dos feixes considerados, onde todos possuem $FWHM < \lambda$, ficando abaixo do limite de difração. Novamente, a variação da espessura da casca da lente acústica constitui uma forma de variar os parâmetros característicos dos feixes gerados e, com isso, personalizar os feixes a depender da aplicação.

Figura 20 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Aço de raio $a = 3\lambda$ fixo e casca de Rexolite com diferentes espessuras. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).



Fonte: Autor (2021).

Figura 21 – Intensidades normalizadas medidas em relação às direções a) axial e b) transversal (parametrizadas em relação a λ) de feixes superfocalizados gerados por lentes com núcleos compostos por Benzeno de raio $a = 3\lambda$ fixo e casca de Rexolite com diferentes espessuras. c) - f) Perfis de intensidade 2D dos feixes gerados nos gráficos a) e b).



Fonte: Autor (2021).

Tabela 8 – Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por Aço com raio de núcleo fixo $a = 3\lambda$ para diferentes valores de espessura da casca.

Espessura da Casca (t)	I	z_0	FLHM	FWHM	Q
3,5 λ	73,503	2,040 λ	2,987 λ	0,561 λ	391,361
4 λ	93,784	1,496 λ	2,018 λ	0,526 λ	359,802
4,5 λ	62,487	1,966 λ	3,554 λ	0,497 λ	446,838
5 λ	74,661	1,878 λ	3,027 λ	0,498 λ	453,813

Tabela 9 – Parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por Benzeno com raio de núcleo fixo $a = 3\lambda$ para diferentes valores de espessura da casca.

Espessura da Casca (t)	I	z_0	FLHM	FWHM	Q
3,5 λ	58,151	1,604 λ	3,708 λ	0,499 λ	432,112
4 λ	70,067	1,550 λ	2,925 λ	0,497 λ	218,519
4,5 λ	72,529	2,167 λ	2,957 λ	0,530 λ	404,657
5 λ	82,931	1,858 λ	2,432 λ	0,511 λ	394,693

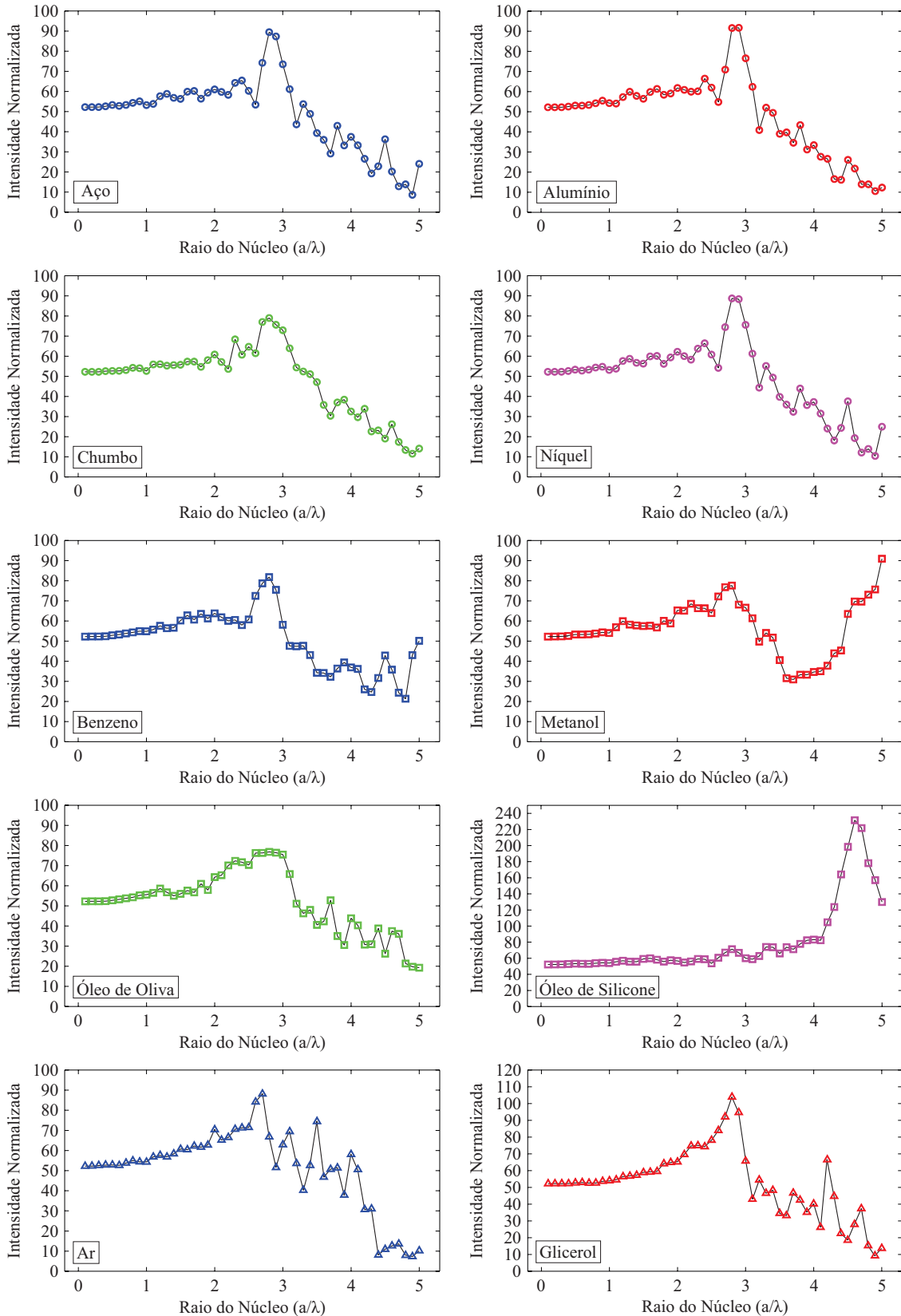
4.3.4 Influência do raio do núcleo e espessura da casca com raio total fixo

Agora, vamos considerar lentes acústicas com o raio total $b = 6,5\lambda$ fixo. Realizamos simulações variando o raio do núcleo de $0,1\lambda$ até 5λ em passos de $0,1\lambda$ para todos os materiais componentes de núcleo apresentados nesta dissertação, de forma que, como o raio total é fixo, o valor de espessura de casca também foi variado. A Figura 22 expõe os valores de intensidade normalizada em função do raio do núcleo (a) para cada um dos materiais componentes de núcleo.

Analisando os gráficos, observamos que existem picos de intensidade em $a = 2,8\lambda$ em todos os casos (com exceção do gráfico para lentes com o núcleo composto por Ar, onde o pico se localiza em $a = 2,7\lambda$). Isto indica que a intensidade dos feixes superfocalizados gerados por lentes com um raio total $b = 6,5\lambda$ pode ser otimizada quando a razão $a/b = 2,8\lambda/6,5\lambda = 0,43$ é satisfeita, independente do material componente do núcleo. A otimização da intensidade dos feixes pode trazer a melhora do fator de qualidade Q , que depende diretamente da intensidade, e também das imagens geradas por aplicações em imageamento.

Embora alguns gráficos apresentem intensidades bem superiores à observada em $a = 2,8\lambda$ (como pode ser visto nos gráficos para lentes com núcleo de Metanol e Óleo de Silicone), não foram observados feixes bem definidos para estes valores, onde identificamos somente pequenos pontos de alta intensidade sem formação de feixe superfocalizado.

Figura 22 – Intensidades normalizadas em função do raio do núcleo (a) para cada um dos materiais componentes de núcleo.



Fonte: Autor (2021).

5 CONCLUSÃO

Esta dissertação teve como objetivo realizar um estudo paramétrico numérico das propriedades mecânicas de lentes acústicas do tipo *core-shell* utilizando-se o Método de Elementos Finitos (MEF) através do software COMSOL *Multiphysics*, assim como analisar a influência destas propriedades nos parâmetros característicos de feixes superfocalizados gerados por estas lentes.

Para tal, foram realizadas simulações considerando-se lentes com núcleos compostos por diversos materiais diferentes, onde foram variados os parâmetros espaciais destas lentes, sendo estes o raio do núcleo e espessura da casca. Aqui consideramos que as cascas eram feitas unicamente de Rexolite e que as lentes estavam imersas em um fluido ideal composto por água. Em seguida, calculamos os parâmetros característicos dos feixes superfocalizados gerados: Intensidade Normalizada (I), Comprimento do Feixe (FLHM), Largura do Feixe (FWHM), Distância de Foco (z_0) e Fator de Qualidade (Q).

Através dos resultados obtidos, concluímos que os feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com núcleos compostos por fluidos são mais sensíveis à variação das propriedades mecânicas e parâmetros espaciais da lente quando comparados à feixes gerados por lentes com núcleos compostos por sólidos. Além disso, concluímos que existe uma relação entre a velocidade de compressão do material componente do núcleo e o FWHM do feixe superfocalizado gerado, onde este último aumenta com a velocidade de compressão para ambos os tipos de materiais (sólidos e fluidos).

Nossos resultados também mostraram que a intensidade de feixes superfocalizados gerados por lentes acústicas com raio total $b = 6,5\lambda$ pode ser otimizada quando a razão $a/b = 0,43$ é satisfeita (o que corresponde à $a = 2,8\lambda$) independentemente do material do qual o núcleo da lente é composto. Além disso, constatamos que a escolha do material componente do núcleo e seu raio, assim como a espessura da casca utilizada pode servir como ferramenta de controle dos parâmetros característicos dos feixes gerados em futuras aplicações. Pudemos observar também a eficiência das lentes acústicas na tarefa de vencer o limite de difração, uma vez que todos os feixes aqui expostos tiveram $\text{FWHM} < \lambda$.

Por fim, concluímos que a metodologia utilizada neste trabalho sanou as expectativas criadas inicialmente, explicitando de forma clara a influência das propriedades mecânicas e espaciais de lentes acústicas do tipo *core-shell* nos parâmetros característicos de feixes superfocalizados. Este estudo pode ser uma ferramenta útil para projetar novos transdutores de elemento

único para aplicações em sistemas de imagem de alta resolução.

REFERÊNCIAS

- ABASI, R.; MARKLEY, L.; ELEFThERIADES, G. V. Experimental verification of subwavelength acoustic focusing using a near-field array of closely spaced elements. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 130, n. 6, p. EL405–EL409, 2011.
- ARFKEN, G.; WEBER, H. H. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. [S.l.]: Cambridge university press, 2000. ISBN 9780511800955.
- BLANA, A.; WALTER, B.; ROGENHOFER, S.; WIELAND, W. F. High-intensity focused ultrasound for the treatment of localized prostate cancer: 5-year experience. **Urology**, Elsevier, v. 63, n. 2, p. 297–300, 2004.
- BORGES, A. N.; RODRIGUES, C. G. **Introdução à física acústica**. São Paulo: Editora Livraria Física: [s.n.], 2017.
- BRUUS, H. **Theoretical microfluidics**. [S.l.]: Oxford university press Oxford, 2008. v. 18.
- CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Materials science and engineering: an introduction**. 8. ed. [S.l.]: John wiley & sons NY, 2010.
- CASTIÑEIRA-IBÁÑEZ, S.; TARRAZÓ-SERRANO, D.; URIS, A.; RUBIO, C.; MININ, O. V.; MININ, I. V. Cylindrical 3d printed configurable ultrasonic lens for subwavelength focusing enhancement. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 10, n. 1, p. 1–8, 2020.
- COMSOL. **COMSOL Multiphysics Reference Manual**. [S.l.], 2017.
- DYKEN, C.; FLOATER, M. S. Transfinite mean value interpolation. **Computer Aided Geometric Design**, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 117–134, 2009.
- ELLSMERE, J.; STOLL, J.; RATTNER, D.; BROOKS, D.; KANE, R.; WELLS, W.; KIKINIS, R.; VOSBURGH, K. A navigation system for augmenting laparoscopic ultrasound. In: SPRINGER. **International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention**. [S.l.], 2003. p. 184–191.
- FOWLES, G. R. **Introduction to modern optics**. 2. ed. [S.l.]: Courier Corporation, 1989.
- FUNG, Y.-c.; TONG, P.; CHEN, X. **Classical and computational solid mechanics**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2001. v. 1.
- GRAFF, K. F. **Wave motion in elastic solids**. [S.l.]: Dover Publications, 1991.
- GUILD, M. D.; ALU, A.; HABERMAN, M. R. Cancellation of acoustic scattering from an elastic sphere. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 129, n. 3, p. 1355–1365, 2011.
- GUMEROV, N. A.; DURAI SWAMI, R. **Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions**. [S.l.]: Elsevier, 2005.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física, vol. 2: gravitação, ondas e termodinâmica**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC: [s.n.], 2009.

HAMILTON, E.; BUCKER, H.; KEIR, D.; WHITNEY, J. Velocities of compressional and shear waves in marine sediments determined in situ from a research submersible. **Journal of Geophysical Research**, Wiley Online Library, v. 75, n. 20, p. 4039–4049, 1970.

HAYNES, W. M. **CRC Handbook of Chemistry and Physics**. 97th. ed. [S.l.]: CRC press, 2016. ISBN 9781498754293.

KINO, G. S. **Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing (Prentice-Hall Signal Processing Series)**. [S.l.]: Prentice Hall, 1987.

KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A. B.; SANDERS, J. V. **Fundamentals of acoustics**. 4. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 1999. ISBN 0-471-84789-5.

LAMMERING, R.; GABBERT, U.; SINAPIUS, M.; SCHUSTER, T.; WIERACH, P. **Lamb-wave based structural health monitoring in polymer composites**. [S.l.]: Springer, 2017.

LAMMINEN, M. O.; WALKER, H. W.; WEAVERS, L. K. Cleaning of particle-fouled membranes during cross-flow filtration using an embedded ultrasonic transducer system. **Journal of Membrane Science**, Elsevier, v. 283, n. 1-2, p. 225–232, 2006.

LEÃO-NETO, J.; CARDOSO, G.; MARQUES, A.; ANDRADE, M.; ADAMOWSKI, J.; PAVAN, T.; SILVA, G.; LOPES, J. Subwavelength focusing beam and superresolution ultrasonic imaging using a core-shell lens. **Physical Review Applied**, APS, v. 13, n. 1, p. 014062, 2020.

LEÃO-NETO, J. P. **Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal**. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Alagoas - Ufal, Maceió, Brazil, 2015.

LEMOULT, F.; FINK, M.; LEROSEY, G. Acoustic resonators for far-field control of sound on a subwavelength scale. **Physical Review Letters**, APS, v. 107, n. 6, p. 064301, 2011.

LEROSEY, G.; ROSNY, J. D.; TOURIN, A.; DERODE, A.; MONTALDO, G.; FINK, M. Time reversal of electromagnetic waves. **Physical review letters**, APS, v. 92, n. 19, p. 193904, 2004.

LIU, C.-Y. Tunable photonic nanojet achieved using a core-shell microcylinder with nematic liquid crystal. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 60, n. 7, p. 538–543, 2013.

LOPES, J.; ANDRADE, M.; LEAO-NETO, J.; ADAMOWSKI, J.; MININ, I.; SILVA, G. Focusing acoustic beams with a ball-shaped lens beyond the diffraction limit. **Physical Review Applied**, APS, v. 8, n. 2, p. 024013, 2017.

LOPES, J.; LEAO-NETO, J.; MININ, I.; MININ, O.; SILVA, G. A theoretical analysis of acoustic jets. In: **Proceedings of the 22nd International Congress on Acoustics, Buenos Aires, Argentina**. [S.l.: s.n.], 2016.

LOTTI, R. S.; MACHADO, A. W.; MAZZIEIRO, Ê. T.; JÚNIOR, J. L. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial**, SciELO Brasil, v. 11, n. 2, p. 35–43, 2006.

MAFFULLI, N.; REGINE, R.; ANGELILLO, M.; CAPASSO, G.; FILICE, S. Ultrasound diagnosis of achilles tendon pathology in runners. **British journal of sports medicine**, British Association of Sport and Exercise Medicine, v. 21, n. 4, p. 158–162, 1987.

MAVKO, G.; MUKERJI, T.; DVORKIN, J. **The Rock Physics Handbook**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.

MCCLEMENTS, D. J. Advances in the application of ultrasound in food analysis and processing. **Trends in Food Science & Technology**, Elsevier, v. 6, n. 9, p. 293–299, 1995.

MCKERROW, P. J.; ANTOUN, S. M. Research into navigation with ctfm ultrasonic sensors. In: **Proceedings of the 63rd Annual Meeting of The Institute of Navigation**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 674–680.

MIGLIORI, A.; DARLING, T. W. Resonant ultrasound spectroscopy for materials studies and non-destructive testing. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 34, n. 2-5, p. 473–476, 1996.

MININ, O. V.; MININ, I. V. Acoustojet: acoustic analogue of photonic jet phenomenon based on penetrable 3d particle. **Optical and Quantum Electronics**, Springer, v. 49, n. 2, p. 54, 2017.

OLSSON-III, R. H.; EL-KADY, I. Microfabricated phononic crystal devices and applications. **Measurement science and technology**, IOP Publishing, v. 20, n. 1, p. 012002, 2008.

PARK, C. M.; KIM, C. H.; PARK, H. T.; LEE, S. H. Acoustic gradient-index lens using orifice-type metamaterial unit cells. **Applied Physics Letters**, AIP Publishing LLC, v. 108, n. 12, p. 124101, 2016.

PEPPER, D. W.; HEINRICH, J. C. **The finite element method: basic concepts and applications with MATLAB, MAPLE, and COMSOL**. [S.l.]: CRC press, 2017.

PIERCE, A. D. **Acoustics: an introduction to its physical principles and applications**. [S.l.]: Springer, 2019.

ROSNY, J. de; FINK, M. Overcoming the diffraction limit in wave physics using a time-reversal mirror and a novel acoustic sink. **Physical review letters**, APS, v. 89, n. 12, p. 124301, 2002.

ROSSING, T. **Springer handbook of acoustics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

RUBIO, C.; TARRAZÓ-SERRANO, D.; MININ, O. V.; URIS, A.; MININ, I. V. Wavelength-scale gas-filled cuboid acoustic lens with diffraction limited focusing. **Results in Physics**, Elsevier, v. 12, p. 1905–1908, 2019.

SHEARER, P. M. **Introduction to Seismology**. 2nd ed. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 0521882109,9780521882101.

SILVA, G. T. Acoustic radiation force and torque on an absorbing compressible particle in an inviscid fluid. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 136, n. 5, p. 2405–2413, 2014.

SOUZA, R. M. **O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor**. Universidade Federal do Pará, Belém, 2003.

STEWART, J. **Cálculo, Volume 2**. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2013.

STOVER, J. C. **Optical scattering: measurement and analysis**. [S.l.]: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2012.

SUKHOVICH, A.; MERHEB, B.; MURALIDHARAN, K.; VASSEUR, J.; PENNEC, Y.; DEYMIER, P. A.; PAGE, J. Experimental and theoretical evidence for subwavelength imaging in phononic crystals. **Physical review letters**, APS, v. 102, n. 15, p. 154301, 2009.

TARRAZÓ-SERRANO, D.; RUBIO, C.; MININ, O. V.; URIS, A.; MININ, I. V. Ultrasonic focusing with mesoscale polymer cuboid. **Ultrasonics**, Elsevier, v. 106, p. 106143, 2020.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics**. 8th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, New York, 2016.

WU, M.; CHEN, R.; LING, J.; CHEN, Z.; CHEN, X.; JI, R.; HONG, M. Creation of a longitudinally polarized photonic nanojet via an engineered microsphere. **Optics Letters**, Optical Society of America, v. 42, n. 7, p. 1444–1447, 2017.

WU, S. F. **The Helmholtz Equation Least Squares Method: For Reconstructing and Predicting Acoustic Radiation**. [S.l.]: Springer, 2014.

YASUI, K. **Acoustic cavitation and bubble dynamics**. [S.l.]: Springer, 2018.

ZHANG, S.; YIN, L.; FANG, N. Focusing ultrasound with an acoustic metamaterial network. **Physical review letters**, APS, v. 102, n. 19, p. 194301, 2009.

ZHAO, J.; LI, B.; CHEN, Z.; QIU, C.-W. Manipulating acoustic wavefront by inhomogeneous impedance and steerable extraordinary reflection. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 3, n. 1, p. 1–6, 2013.

ZHU, J.; CHRISTENSEN, J.; JUNG, J.; MARTIN-MORENO, L.; YIN, X.; FOK, L.; ZHANG, X.; GARCIA-VIDAL, F. A holey-structured metamaterial for acoustic deep-subwavelength imaging. **Nature physics**, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 52–55, 2011.

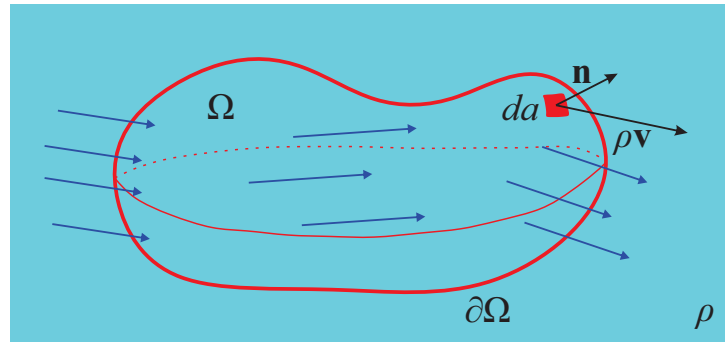
APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

A.1 EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

Vamos considerar um fluido compressível, ou seja, cuja densidade ρ pode variar com o espaço e com o tempo. Além disso, seja uma região arbitrária fixa Ω delimitada por uma superfície $\partial\Omega$, como mostrado na Figura 23. Podemos expressar a massa total $M(\Omega, t)$ dentro de Ω utilizando a densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ da seguinte forma (BRUUS, 2008):

$$M(\Omega, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t). \quad (94)$$

Figura 23 – Esboço da região Ω e do fluxo de massa (setas azuis) através da superfície $\partial\Omega$.



Fonte: Autor (2021).

Considerando o caso de existir um fluxo de massa pela superfície $\partial\Omega$ (setas azuis na Figura 23), podemos definir uma densidade de corrente de massa \mathbf{J} , que representa o fluxo de massa por unidade de área por unidade de tempo (com unidade $\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$) dada por:

$$\mathbf{J} = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (95)$$

onde cada elemento de área da é associado a um vetor unitário \mathbf{n} apontando pra fora da superfície, sendo a corrente de massa através de da dada por $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Uma vez que a massa no fluido não pode desaparecer espontaneamente, a massa total em Ω só pode variar devido ao fluxo de massa total através de $\partial\Omega$. Dessa forma, temos que (considerando que \mathbf{r} e t são grandezas independentes):

$$\partial_t M(\Omega, t) = \partial_t \int_{\Omega} d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_t \rho(\mathbf{r}, t), \quad (96)$$

sendo $\partial_t = \partial/\partial t$. Utilizando a eq. (95), podemos escrever:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = - \int_{\partial\Omega} da \mathbf{n} \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = - \int_{\Omega} d\mathbf{r} \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)], \quad (97)$$

onde utilizamos o teorema de Gauss, eq. (9), para reescrever a integral de superfície de $\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Além disso, o sinal negativo aparece na eq. (97) pois a massa dentro de Ω diminui se $\rho\mathbf{v}$ é paralelo à \mathbf{n} . Uma vez que a eq. (97) é verdadeira se os integrandos de ambos os lados forem iguais, temos que:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \quad \text{ou} \quad \partial_t \rho = -\partial_j(\rho v_j), \quad (98)$$

que é a equação de continuidade ou conservação da massa para fluidos, onde a reescrevemos utilizando a notação indicial.

A.2 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Vamos novamente considerar a região fixa e arbitrária Ω delimitada pela superfície $\partial\Omega$ dentro do fluido com densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ (ver Figura 23). Entretanto, analisaremos agora a densidade de momento $\rho\mathbf{v}$ do sistema. Seja $P_i(\Omega, t)$ a componente i do momento total do fluido dentro da região Ω . Considerando a taxa de variação de $P_i(\Omega, t)$ com o tempo, temos (BRUUS, 2008):

$$\partial_t P_i(\Omega, t) = \partial_t \int_{\Omega} d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} [(\partial_t \rho) v_i + \rho \partial_t v_i], \quad (99)$$

onde novamente consideramos que \mathbf{r} e t são variáveis independentes e utilizamos a regra do produto. Agora, podemos ter variação de $P_i(\Omega, t)$ através de: convecção (ou transporte) de momento, por forças de superfície, como forças de pressão e viscosidade, por exemplo, e por forças de corpo, como as forças gravitacional e elétrica. Com isso, podemos escrever $\partial_t P_i(\Omega, t)$ como:

$$\partial_t P_i(\Omega, t) = \partial_t P_i^{\text{CONV}}(\Omega, t) + \partial_t P_i^{\text{PRES}}(\Omega, t) + \partial_t P_i^{\text{VISC}}(\Omega, t) + \partial_t P_i^{\text{CORPO}}(\Omega, t). \quad (100)$$

- **Convecção de Momento:** Podemos descrever a convecção do vetor de momento $\rho\mathbf{v}$ através do tensor de densidade de fluxo de momento $\mathbb{\Pi}$, que é um tensor de segunda ordem dado por:

$$\mathbb{\Pi} \equiv \rho\mathbf{v}\mathbf{v} \quad \text{ou} \quad \mathbb{\Pi}_{ij} \equiv \rho v_i v_j, \quad (101)$$

onde utilizamos a notação indicial. Dessa forma, através de uma área infinitesimal da , a quantidade da i -ésima componente do momento que entra ou sai de Ω é $(\rho v_i)\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da$, e com isso, a quantidade total é:

$$\partial_t P_i^{\text{CONV}}(\Omega, t) = - \int_{\partial\Omega} da \mathbf{n} \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} d\mathbf{r} \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_j (\rho v_i v_j), \quad (102)$$

onde, novamente, o sinal negativo aparece da condição de paralelismo entre \mathbf{n} e $\rho v_i \mathbf{v}$ e utilizamos o teorema de Gauss, eq. (9), para reescrever a integral de superfície.

- Forças de Pressão: Cada elemento de área da da superfície $\partial\Omega$ está sujeito a uma força exercida pela pressão do meio circundante dada por $-p\mathbf{n}da$. Logo, a variação total da componente do momento na direção \mathbf{e}_i devido forças de pressão é dada por:

$$\partial_t P_i^{\text{PRES}}(\Omega, t) = - \int_{\partial\Omega} da \mathbf{n} \cdot (p\mathbf{e}_i) = - \int_{\partial\Omega} da n_j p \delta_{ij} = - \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_j (p \delta_{ij}), \quad (103)$$

onde utilizamos $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = n_j \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} a delta de Kronecker definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (104)$$

- Forças de Viscosidade: Podemos caracterizar uma força $d\mathbf{F}$ devido a um atrito viscoso em um elemento da com vetor normal \mathbf{n} da superfície $\partial\Omega$ através de um tensor de rank dois σ'_{ij} denominado tensor de estresse viscoso. Este tensor expressa a i -ésima componente da força de atrito viscoso por área que atua sobre um elemento de superfície da orientado com vetor normal \mathbf{n} paralelo ao vetor unitário \mathbf{e}_j , de forma que podemos escrever $dF_i = \sigma'_{ij} n_j da$. Assim, a variação no momento devido à força de atrito viscoso é:

$$\partial_t P_i^{\text{VISC}}(\Omega, t) = \int_{\partial\Omega} da n_j \sigma'_{ij} = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_j \sigma'_{ij}. \quad (105)$$

O atrito interno só é diferente de zero quando as partículas de fluido se movem em relação umas às outras. Portanto, o tensor de tensão viscoso σ'_{ij} depende apenas das derivadas espaciais da velocidade. Para pequenos valores de gradientes de velocidade, σ'_{ij} depende linearmente de $\partial_i v_j$, e com isso (BRUUS, 2008):

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k v_k \right) + \zeta \delta_{ij} \partial_k v_k = \eta (\partial_j v_i + \partial_i v_j) + \eta (\beta - 1) (\partial_k v_k) \delta_{ij}, \quad (106)$$

onde η e ζ são a viscosidade dinâmica (atrito interno devido à tensão de cisalhamento) e a segunda viscosidade (atrito interno devido à compressão) do fluido, respectivamente, e β é um parâmetro conhecido como razão de viscosidade adimensional, dado por:

$$\beta \equiv \frac{\zeta}{\eta} + \frac{1}{3}. \quad (107)$$

- Forças de Corpo: Ao se trabalhar com fluidos, podemos levar em conta situações em que existam forças de corpo que atuam sob toda a região Ω . As principais forças de corpo são

as forças gravitacional e elétrica. Dessa forma, a variação de momento devido à forças de corpo é:

$$\partial_t P_i^{\text{CORPO}}(\Omega, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} (\rho \mathbf{g} + \rho_{el} \mathbf{E}) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} (\rho g_i + \rho_{el} E_i), \quad (108)$$

onde \mathbf{g} é a aceleração gravitacional, ρ_{el} é a densidade de carga elétrica de Ω e \mathbf{E} o campo elétrico que atua no meio fluido.

Igualando as equações (99) e (100) e utilizando as expressões para cada variação de momento dadas pelas equações (102), (103), (105) e (108) obteremos uma expressão que envolve uma integral de volume de ambos os lados, que será válida somente se os integrandos forem iguais, ou seja:

$$(\partial_t \rho) v_i + \rho \partial_t v_i = -\partial_j (\rho v_i v_j) - \partial_j (p \delta_{ij}) + \partial_j \sigma'_{ij} + \rho g_i + \rho_{el} E_i. \quad (109)$$

Por fim, observando que $-\partial_j (\rho v_i v_j) = -\partial_j (\rho v_j) v_i - \rho v_j \partial_j v_i$ e utilizando a eq. (98) (equação da continuidade), chegamos em:

$$\rho \partial_t v_i + \rho v_j \partial_j v_i = \partial_j (-p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}) + \rho g_i + \rho_{el} E_i, \quad (110)$$

que é a equação de movimento geral para um campo de velocidade Euleriana de um fluido viscoso, também conhecida como equação geral de conservação do momento.

A.3 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES E NÚMERO DE REYNOLDS

Vamos considerar o caso de fluidos Newtonianos. Para esta classe de fluidos, temos que os coeficientes de viscosidade η e ζ variam pouco e podem ser tomados como aproximadamente constantes. Dessa forma, considerando que $\partial_k v_k = \partial_j v_j$, $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ e utilizando a eq. (106) podemos escrever:

$$\partial_j (-p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}) = -\partial_i p + \eta \partial_j \partial_j v_i + \beta \eta \partial_i \partial_j v_j, \quad (111)$$

que ao ser substituída na equação de movimento geral, eq. (110), nos retorna:

$$\rho \partial_t v_i + \rho v_j \partial_j v_i = -\partial_i p + \eta \partial_j \partial_j v_i + \beta \eta \partial_i \partial_j v_j + \rho g_i + \rho_{el} E_i. \quad (112)$$

Escrevendo de forma geral na notação vetorial, obtemos a famosa equação de Navier-Stokes para fluidos compressíveis:

$$\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (113)$$

O termo não linear $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ da equação de Navier-Stokes torna a análise matemática complicada, embora seja responsável por efeitos hidrodinâmicos como turbulência, por exemplo. Podemos ainda definir um operador D_t denominado derivada material dado por $D_t \equiv \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ e escrever a equação de Navier-Stokes como:

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} + \rho_{el} \mathbf{E}. \quad (114)$$

Normalmente, quando trabalhamos com fluidos, temos que levar em conta a contribuição de forças inerciais e forças viscosas no sistema. Para fluidos Newtonianos, podemos determinar a dominância de efeitos de inercia ou de efeitos viscosos através do Número de Reynolds adimensional, dado por:

$$Re = \frac{\rho V_0 L_0}{\eta}, \quad (115)$$

onde V_0 e L_0 são escalas características de velocidade e comprimento, respectivamente, que são parâmetros constantes definidos em função das características do problema, como por exemplo, uma velocidade média de escoamento para V_0 e o comprimento do tubo no qual o fluido escoava para L_0 . Fisicamente, podemos interpretar o Número de Reynolds como a razão entre efeitos inerciais e efeitos viscosos. Para $Re \ll 1$ temos que os efeitos de viscosidade dominam a dinâmica do fluido, de forma que os efeitos de inercia podem ser desprezados. Já para $Re \gg 1$ os efeitos de inercia dominam, e podemos desprezar efeitos de viscosidade (WHITE, 2016).

A.4 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

A equação que rege a conservação de energia em fluidos é derivada diretamente da primeira Lei da Termodinâmica. Normalmente, quando conciliamos fluidos e termodinâmica trabalhamos com as grandezas termodinâmicas expressas por unidade de massa. Com isso, lidaremos com a energia interna por unidade de massa ξ , entropia por unidade de massa s e volume por unidade de massa $1/\rho$. Através da primeira Lei da Termodinâmica, podemos relacionar a variação da energia interna $d\xi$, o calor Tds (onde T é a temperatura) e o trabalho mecânico $-pd(1/\rho)$ por unidade de massa escrevendo (BRUUS, 2008):

$$d\xi = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho. \quad (116)$$

Vamos considerar novamente a região fixa Ω delimitada pela superfície $\partial\Omega$ mostrada na Figura 23. Podemos analisar a taxa de variação $\partial_t E(\Omega, t)$ da energia do fluido dentro da região Ω . Considerando que a densidade de energia cinética e a densidade de energia interna são $(1/2)\rho v^2$

e $\rho\xi$, respectivamente, e que a densidade de energia total é a soma das duas, podemos escrever que:

$$\partial_t E(\Omega, t) = \partial_t \int_{\Omega} d\mathbf{r} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \xi \right] = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_t \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \xi \right]. \quad (117)$$

Realizando a derivação do lado direito da eq. (117) em relação ao tempo através da regra do produto e utilizando as equações (98) e (112) (desprezando os termos de forças de corpo), podemos escrever (observando que $v_j \partial_k v_j = (1/2) \partial_k v^2$):

$$\partial_t E(\Omega, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \left[- \left(\frac{v^2}{2} + \xi \right) \partial_j (\rho v_j) - \rho v_k \partial_k \left(\frac{v^2}{2} \right) - v_j \partial_j p + v_j \partial_k \sigma'_{jk} + \rho \partial_t \xi \right]. \quad (118)$$

Utilizando a primeira Lei da Termodinâmica, eq. (116), é possível mostrar que:

$$dp = d \left(\xi + \frac{p}{\rho} \right) \rho - \rho T ds, \quad (119)$$

e com isso, podemos reescrever o terceiro termo da eq. (118) como:

$$-v_j \partial_j p = -\rho v_j \partial_j \left(\xi + \frac{p}{\rho} \right) + \rho T v_j \partial_j s. \quad (120)$$

Utilizando novamente a eq. (116) juntamente com a equação de continuidade, eq. (98), vemos que o quarto termo da eq. (118) pode ser escrito como:

$$\rho \partial_t \xi = \rho T \partial_t s - \partial_j (\rho v_j) \frac{p}{\rho}. \quad (121)$$

Assim, substituindo as equações (120) e (121) em (118) e rearranjando os termos, temos:

$$\partial_t E(\Omega, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \left\{ -\partial_j \left(\left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \xi + p \right] v_j \right) + v_j \partial_k \sigma'_{jk} + \rho T [\partial_t s + v_j \partial_j s] \right\}. \quad (122)$$

Agora, a energia dentro do fluido pode variar devido convecção de energia e por trabalho realizado por forças de pressão e viscosidade, ambas em $\partial\Omega$ e por condução de calor devido gradientes de temperatura. Logo, temos que:

$$\partial_t E(\Omega, t) = \partial_t E^{\text{CONV}}(\Omega, t) + \partial_t E^{\text{PRES}}(\Omega, t) + \partial_t E^{\text{VISC}}(\Omega, t) + \partial_t E^{\text{COND}}(\Omega, t). \quad (123)$$

- Convecção de energia: podemos definir um vetor densidade de fluxo de energia \mathbf{J}_ξ que nos dá o fluxo de energia por unidade de área por unidade de tempo (com unidade $\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$) escrevendo:

$$\mathbf{J}_\xi = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \xi \right) \mathbf{v}. \quad (124)$$

Dessa forma, a variação da energia interna na região Ω é dada por:

$$\partial_t E^{\text{CONV}}(\Omega, t) = - \int_{\partial\Omega} da \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_\xi = - \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_j \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \xi \right) v_j \right], \quad (125)$$

onde utilizamos o teorema de Gauss, eq. (9), para reescrever a integral de superfície. O sinal negativo aparece uma vez que se \mathbf{n} e \mathbf{J}_ξ forem paralelos isso significa que a energia na região diminui.

- Trabalho devido forças de pressão e viscosidade: utilizando os argumentos descritos na subseção A.2 para forças de pressão e viscosidade, podemos escrever a potência transferida pelas forças através de um elemento da de $\partial\Omega$ como $(-p + \sigma'_{jk})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da$. Com isso, a variação de energia devido forças de pressão e viscosidade é dada por:

$$\partial_t E^{\text{PRES}}(\Omega, t) + \partial_t E^{\text{VISC}}(\Omega, t) = \int_{\partial\Omega} da n_j [-p\delta_{jk} + \sigma'_{jk}] v_k = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_j [-p\delta_{jk} + \sigma'_{jk}] v_k. \quad (126)$$

- Condução térmica: uma vez que a temperatura varie espacialmente, temos a ocorrência de uma condução térmica. Podemos caracterizar essa condução através do vetor densidade de fluxo de calor \mathbf{J}_h , que é a transferência de calor por unidade de área por unidade de tempo (com unidade $\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$). Para pequenas variações de temperatura \mathbf{J}_h é dado pela Lei de Fourier:

$$\mathbf{J}_h = -\kappa \nabla T, \quad (127)$$

onde κ é a condutividade térmica do meio, T é a temperatura e ∇ é o operador gradiente.

Logo, a variação de energia devido à condução térmica é:

$$\partial_t E^{\text{COND}}(\Omega, t) = - \int_{\partial\Omega} da \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_h = \int_{\partial\Omega} da n_j (\kappa \partial_j T) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \partial_j (\kappa \partial_j T). \quad (128)$$

Dessa forma, substituindo as equações (125), (126) e (128) em (123), temos:

$$\partial_t E(\Omega, t) = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \left\{ \partial_j \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \xi - p \right) v_j \right] + \partial_j (\sigma'_{jk} v_k) + \partial_j \kappa \partial_j T \right\}. \quad (129)$$

Agora, igualando as equações (122) e (129), já que descrevem a mesma grandeza, ficamos com uma expressão que envolve uma integral de volume em ambos os lados. Para que a igualdade seja válida, os integrandos de ambos os lados devem ser equivalentes. Dessa forma, comparando estes integrandos, temos que:

$$v_j \partial_k \sigma'_{jk} + \rho T [\partial_t s + v_j \partial_j s] = \partial_j (\sigma'_{jk} v_k) + \partial_j \kappa \partial_j T. \quad (130)$$

Entretanto, utilizando a simetria do tensor de estresse viscoso, ou seja, $\sigma'_{jk} = \sigma'_{kj}$, podemos escrever:

$$\partial_j (\sigma'_{jk} v_k) = \partial_k (\sigma'_{kj} v_j) = v_j \partial_k \sigma'_{jk} + \sigma'_{jk} \partial_k v_j, \quad (131)$$

de forma que, substituindo na eq. (130), ficamos com:

$$\rho T[\partial_t s + v_j \partial_j s] = \sigma'_{jk} \partial_k v_j + \partial_j \kappa \partial_j T. \quad (132)$$

Finalmente, escrevendo em notação vetorial, temos que:

$$\rho T[\partial_t s + (\mathbf{v} \cdot \nabla)s] = \boldsymbol{\sigma}' : \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (133)$$

onde $:$ indica o produto de dois tensores. A eq. (133) é conhecida como equação geral de transferência de calor ou equação de conservação da energia.

APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS

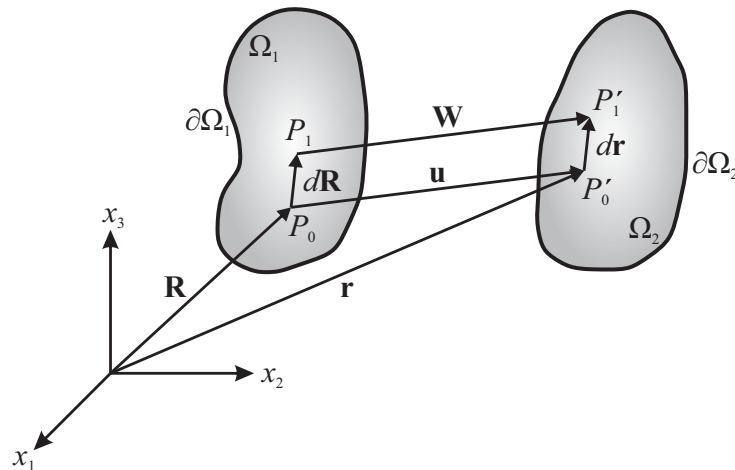
B.1 DEFORMAÇÃO

Vamos considerar um meio contínuo sólido de volume Ω_1 que possui uma superfície delimitadora $\partial\Omega_1$ sujeito a uma deformação. Em uma situação inicial, o ponto P_0 possui um vetor posição $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ em relação à um determinado sistema de coordenadas. Próximo a P_0 , existe um ponto P_1 que dista $d\mathbf{R}$ de P_0 . Após uma deformação, o volume e a superfície delimitadora do meio passam a ser Ω_2 e $\partial\Omega_2$, respectivamente. Agora, o ponto P_0 passa a ser representado por P'_0 e possui um vetor posição $\mathbf{r}(x'_1, x'_2, x'_3)$. Já o ponto P_1 passa a ser representado por P'_1 , que agora dista $d\mathbf{r}$ em relação à P'_0 . Dessa forma, o deslocamento de P_0 para P'_0 é dado pelo vetor $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, como mostrado na Figura 24. Através de uma análise geométrica da Figura 24, podemos relacionar os vetores citados acima da seguinte forma (LEÃO-NETO, 2015):

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}, \quad (134)$$

$$\mathbf{u} + d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{W}. \quad (135)$$

Figura 24 – Deformação de um meio contínuo sólido de volume Ω_1 e superfície $\partial\Omega_1$ para o volume Ω_2 e superfície $\partial\Omega_2$.



Fonte: Autor (2021).

Tomando o diferencial da eq. (134), temos que $d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{u}$. Substituindo na eq. (135), ficamos com:

$$\mathbf{W} = \mathbf{u} + d\mathbf{u}. \quad (136)$$

Além disso, podemos escrever o diferencial da i -ésima componente de \mathbf{u} utilizando notação indicial como:

$$du_i = \partial_j u_i dx_j, \quad (137)$$

onde $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Entretanto, podemos ainda representar a eq. (137) através de:

$$du_i = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) dx_j + \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j) dx_j. \quad (138)$$

Com isso, podemos definir os tensores infinitesimais de deformação ϵ_{ij} e rotação ω_{ij} para pequenas deformações como:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j). \quad (139)$$

Na forma vetorial, podemos escrever a deformação da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (140)$$

onde $\nabla \mathbf{u}$ é um tensor de segunda ordem e o sobrescrito T denota a transposta de um tensor. Com isso, observando a eq. (137), vemos que a cinemática de um ponto arbitrário próximo à P_0 é governada pelo campo gradiente local $\partial_j u_i$ e que o movimento é uma combinação de efeitos locais de distorção ϵ_{ij} e rotação ω_{ij} de um corpo rígido.

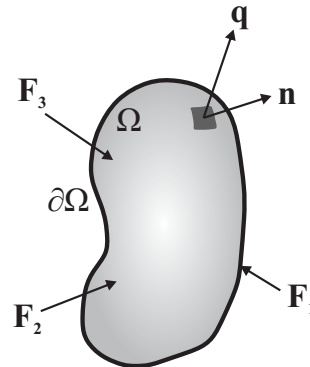
B.2 TENSÃO

Vamos considerar um meio contínuo sólido de volume Ω e superfície delimitadora $\partial\Omega$ que está sujeito à forças externas \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, 3$), como exibido na Figura 25. Quando o objeto sofre deformação devido à forças externas, a configuração espacial das moléculas que o compõe é alterada, fazendo com que o corpo saia do seu estado de equilíbrio original. Com isso, passa a existir um vetor de tração interno \mathbf{q} que tende a fazer o corpo retornar à configuração de equilíbrio. O vetor \mathbf{q} atua sobre um elemento arbitrário de superfície que possui um vetor normal \mathbf{n} , como pode ser visto na Figura 25 (LEÃO-NETO, 2015). O vetor tração é dado por:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (141)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e está relacionado às forças internas que tendem a fazer o corpo retornar ao seu ponto de equilíbrio. Se não há deformação, não existe tensão interna.

Figura 25 – Representação do vetor tração \mathbf{q} de um meio contínuo sólido de volume Ω e superfície $\partial\Omega$ devido à forças externas \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, 3$).



Fonte: Autor (2021).

B.3 CONSERVAÇÃO DE MASSA

Vamos considerar um meio contínuo sólido de volume Ω e superfície delimitadora $\partial\Omega$, como o representado pela Figura 25. Além disso, vamos considerar que este objeto possui uma densidade $\rho_s(\mathbf{r}, t)$. Para qualquer instante de tempo t , podemos escrever a massa total m deste meio como:

$$m = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \rho_s. \quad (142)$$

Uma vez que a massa deste meio não pode sumir espontaneamente, temos que a taxa de variação temporal da massa deve ser nula, ou seja, $dm/dt = 0$. Dessa forma, utilizando a eq. (142), temos:

$$\partial_t \int_{\Omega} d\mathbf{r} \rho_s = \int_{\Omega} [d\mathbf{r} (\partial_t \rho_s) + \rho_s \partial_t (d\mathbf{r})] = 0. \quad (143)$$

Agora, podemos escrever o deslocamento de uma partícula devido à deformação do meio durante um tempo dt como $\mathbf{v}dt$, onde \mathbf{v} é a velocidade de deformação. Sendo \mathbf{n} o vetor normal de uma superfície infinitesimal da de $\partial\Omega$, então o volume deslocado pela deformação através da área da é $d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt da$. Substituindo na eq. (143), temos que:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{r} (\partial_t \rho_s) = - \int_{\partial\Omega} da \rho_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \quad (144)$$

Utilizando o teorema de Gauss, eq. (9), podemos reescrever a integral de superfície:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{r} (\partial_t \rho_s) = - \int_{\Omega} d\mathbf{r} \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}). \quad (145)$$

Uma vez que temos integrais de volume em ambos os lados da eq. (145), para que a equação seja válida, os integrandos devem ser equivalentes, de forma que a equação de conservação da massa é:

$$\partial_t \rho_s = -\nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}). \quad (146)$$

B.4 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

Para um meio contínuo sólido de volume Ω , superfície delimitadora $\partial\Omega$ e densidade ρ_s , temos que a densidade de momento é $\rho_s \mathbf{v}$. Em qualquer instante de tempo t , podemos escrever o momento linear total \mathbf{P} através de (FUNG et al., 2001):

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \rho_s \mathbf{v}. \quad (147)$$

Além disso, o corpo pode estar submetido à forças volumétricas \mathbf{F}_V (à exemplo, forças gravitacional e elétrica), além da força superficial exercida pela tração \mathbf{q} , dada pela eq. (141). Dessa forma, a força resultante no meio \mathbf{F}_R pode ser escrita como:

$$\mathbf{F}_R = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \mathbf{F}_V + \int_{\partial\Omega} da \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (148)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões em um sólido. Agora, pela segunda Lei de Newton, sabemos que a variação temporal do momento linear de um corpo é igual a força resultante que atua sob este corpo, ou seja, $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_R$. Com isso, utilizando as equações (147) e (148), temos:

$$\partial_t \int_{\Omega} d\mathbf{r} \rho_s \mathbf{v} = \int_{\Omega} [d\mathbf{r} \partial_t(\rho_s \mathbf{v}) + \rho_s \mathbf{v} \partial_t(d\mathbf{r})] = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \mathbf{F}_V + \int_{\partial\Omega} da \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (149)$$

Utilizando a regra do produto no primeiro termo do lado esquerdo da eq. (149) e lembrando que $\partial_t(d\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da$ (determinado na subseção B.3), temos que:

$$\int_{\Omega} d\mathbf{r} [\mathbf{v} \partial_t \rho_s + \rho_s \partial_t \mathbf{v}] + \int_{\partial\Omega} da \rho_s \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \mathbf{F}_V + \int_{\partial\Omega} da \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (150)$$

Agora, utilizando a eq. (144) podemos eliminar o primeiro e o terceiro termo da eq. (150). Além disso, fazendo $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}$ e utilizando o teorema de Gaus, eq. (9), na integral de superfície, ficamos com integrais de volume em ambos os lados, de forma que a mesma só será válida se os integrandos forem equivalentes. Dessa forma, chegamos na seguinte equação:

$$\rho_s \partial_t^2 \mathbf{u} = \mathbf{F}_V + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (151)$$

que é a equação de conservação do momento para sólidos.

B.5 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Vamos novamente considerar o meio contínuo sólido exibido na Figura 25. Pela conservação da energia, temos que a variação temporal da energia total do meio deve ser igual ao

trabalho realizado por todas as forças externas que atuam no corpo por unidade de tempo. Dessa forma, podemos escrever a energia cinética total do corpo E_c como:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\mathbf{r} v^2 \rho_s, \quad (152)$$

onde $v^2 = |\mathbf{v}|^2$. Sendo ξ_s a energia interna do corpo por unidade de massa, podemos escrever a energia interna total U como:

$$U = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \xi_s \rho_s. \quad (153)$$

Considerando que temos forças volumétricas e forças relacionadas à tração \mathbf{q} , temos que a variação da energia total em relação ao tempo do corpo pode ser escrita como (LEÃO-NETO, 2015):

$$\partial_t \int_{\Omega} d\mathbf{r} \left(\frac{v^2}{2} + \xi_s \right) \rho_s = \int_{\partial\Omega} da (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} d\mathbf{r} \mathbf{F}_V \cdot \mathbf{v}. \quad (154)$$

Expandindo o lado esquerdo da eq. (154), lembrando que $\partial_t[(1/2)v^2] = \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v}$, $\partial_t(d\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da$ e aplicando o teorema de Gauss, eq. (9), nas integrais de superfície temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\mathbf{r} \left[(\mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} + \partial_t \xi_s) \rho_s + \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \partial_t \rho_s \right] + \int_{\Omega} d\mathbf{r} \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \rho_s \mathbf{v} \right] \\ = \int_{\Omega} d\mathbf{r} [\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{F}_V \cdot \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (155)$$

Entretanto, temos que:

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \rho_s \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \cdot \rho_s \mathbf{v} + \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v}). \quad (156)$$

Com isso, igualando os integrandos:

$$\begin{aligned} \left[(\mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} + \partial_t \xi_s) \rho_s + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \cdot \rho_s \mathbf{v} \right] + \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) [\partial_t \rho_s + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{v})] \\ = [\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{F}_V \cdot \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (157)$$

Observando a eq. (157), vemos que a parcela dentro dos colchetes no segundo termo é a equação de conservação da massa, eq. (146) e se anula. Além disso, sendo:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (158)$$

onde $:$ indica o produto de dois tensores, rearranjando os termos e substituindo $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}$, podemos escrever a eq. (157) como:

$$(\partial_t^2 \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{F}_V) \cdot \partial_t \mathbf{u} + \rho_s \partial_t \xi_s + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \cdot \rho_s \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}. \quad (159)$$

Por fim, a parcela entre parênteses no primeiro termo da eq. (159) é exatamente a equação de conservação do momento, eq. (151), que se anula. Com isso, obtemos a seguinte equação:

$$\rho_s \partial_t \xi_s + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 + \xi_s \right) \cdot \rho_s \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}, \quad (160)$$

que é a equação de conservação da energia para meios sólidos.

APÊNDICE C – PUBLICAÇÕES

Artigos publicados em periódicos e conferências

PHYSICAL REVIEW APPLIED

[Highlights](#) [Recent](#) [Subjects](#) [Accepted](#) [Collections](#) [Authors](#) [Referees](#) [Search](#) [Press](#) [About](#)

Subwavelength Focusing Beam and Superresolution Ultrasonic Imaging Using a Core-Shell Lens

J. P. Leão-Neto, G. S. Cardoso, A. S. Marques, M. A. B. Andrade, J. C. Adamowski, T. Z. Pavan, G. T. Silva, and J. H. Lopes
Phys. Rev. Applied **13**, 014062 – Published 30 January 2020

Conferences > 2021 IEEE UFFC Latin America ...

Parametric Study of the Subwavelength Ultrasound Beam Generated by Core-Shell Lens

Publisher: **IEEE**

[Cite This](#)

[PDF](#)

Gutemberg Da Silva Cardoso ; José Pereira Leão-Neto ; José Henrique Lopes [All Authors](#)

4
Full
Text Views



APÊNDICE D – PRÊMIOS

Segundo lugar no *Student Pitch Competition* promovido pelo *2021 IEEE Latin America Ultrasonics Symposium (LAUS)*



Student Pitch Competition Runner-Up

Gutemberg da Silva Cardoso

Presented at the 2021 IEEE Latin America Ultrasonics Symposium (LAUS)

4-5 October 2021 | Virtual Conference