UFAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOANATHAN WILLIAN MENÊSES DE ARAÚJO

A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS COMPLEXOS NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEORGE POLYA

Maceió
2021

Joanathan Willian Menêses de Araújo

A aprendizagem de números complexos na 3ª série do Ensino Médio utilizando a metodologia da resolução de problemas de George Polya

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial à obtenção do título de graduado em licenciatura em matemática.

Orientadora: Prof. Me. Elisa Fonseca Sena e Silva**.**

Maceió
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DEMATEMÁTICA LICENCIATURA
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.matl@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Declaramos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Licenciatura que o Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **JOANATHAN WILLIAN MENESES DE ARAÚJO**, matrícula nº **12212885**, do curso de **Matemática Licenciatura**, intitulado: "**A APRENDIZAGEM DE NÚMEROS COMPLEXOS NA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO A METODOLOGIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEORGE POLYA**", recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: 9,0 (nove pontos), média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Profa. Elisa Fonseca Sena e Silva (Orientadora) – (Ufal): 9,0
Prof. Isnaldo Isaac Barbosa (Ufal): 9,0
Prof. Luiz Gustavo Martins dos Santos (IFBaiano):9,0

Maceió, 29 de setembro de 2021.

gov.br Documento assinado digitalmente
Elisa Fonseca Sena e Silva
Data: 30/09/2021 19:49:42-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Elisa Fonseca Sena e Silva

gov.br Documento assinado digitalmente
Isnaldo Isaac Barbosa
Data: 30/09/2021 17:08:25-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

gov.br Documento assinado digitalmente
LUIZ GUSTAVO MARTINS DOS SANTOS
Data: 30/09/2021 08:53:42-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Me. Luiz Gustavo Martins dos Santos

RESUMO

Neste trabalho serão apresentados resultados sobre a aplicação da metodologia de resolução de problemas numa turma do 3º ano do Ensino Médio em escola em Maceió - Al, da rede privada. A resolução de problemas escolhida foi a de George Polya de 1995. Para a realização desse trabalho foram feitos um levantamento documental, um levantamento bibliográfico e um estudo de caso com a turma citada, visando uma metodologia qualitativa em práticas docentes. Para melhor caracterizar e escolher os tipos de problemas que se enquadram na metodologia e no assunto proposto de números complexos, foi realizado um estudo aprofundado por vários teóricos, para conhecer os tipos de problemas que existem. Após escolhido o problema, foi aplicado aos alunos da turma com a intenção de analisar a aprendizagem de números complexos na turma do 3º ano do Ensino Médio. Espera-se que esse trabalho levante uma discussão entre a importância de analisar a maneira de ensinar números complexos, e a maneira que o professor deve ministrar suas aulas, de uma forma não tradicional, mas voltada para que o aluno seja participante ativo.

Palavras-chave: Metodologia de Resolução de Problemas. Números complexos. Ensino Médio. George Polya

ABSTRACT

In this work, results will be presented on the application of the problem-solving methodology in a 3rd year high school class in a school in Maceió - Al, from the private network, the chosen problem solving was that of George Polya of 1995. To carry out this work, a documental survey was carried out, a bibliographic survey and a case study with the aforementioned class, aiming at a qualitative methodology in teaching practices. In order to better characterize and choose the types of problems that fit the methodology and the proposed subject of complex numbers, an in-depth study was carried out by several theorists, in order to know the types of problems that exist. After choosing the problem, it will be applied to students in the class with the intention of analyzing the learning of complex numbers in the 3rd year of high school. It is hoped that this work raises a discussion between the importance of analyzing the way to teach complex numbers, and the way that the teacher should teach his classes, in a non-traditional way, but aimed at making the student an active participant.

Keywords: Problem Resolution Methodology. Complex numbers. High school**.** George Polya

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Com a necessidade de proporcionar aos alunos melhores condições para a compreensão de conceitos matemáticos, surge a conveniência de encontrar metodologias que proporcionem a melhor interação dos alunos em sala de aula, e o despertar de um maior interesse pela matemática.

Com relação às metodologias mais pesquisadas e aplicadas, voltadas ao ensino de matemática, as metodologias de resolução de problemas estão sempre em destaque no cenário educacional. Dentre essas, deve-se destacar a metodologia de resolução de problemas de George Polya (1995).

Nessa metodologia, o professor deve levar o aluno a resolver um determinado problema, incentivando-o através de questões, não se deve deixar o aluno resolver o problema sozinho. Segundo Polya (1995, p.1) "o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanta Ihe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou sem auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso". O professor deve possuir uma postura equilibrada, procurando sempre incentivar o aluno a resolver o problema, contudo possuindo um determinado limite entre resolver o problema pelo aluno e deixar o aluno completamente sozinho. Nas palavras do autor "Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante cabe uma parcela razoável do trabalho" (POLYA, 1995, p. 1).

No caso da pesquisa que será apresentada nesse trabalho, a metodologia será implementada numa turma de 3º ano do Ensino Médio, voltada para o estudo de números complexos, com a seguinte questão de pesquisa investigada: qual a contribuição da aplicação da metodologia de resolução de problemas na aprendizagem de números complexos na 3ª série do Ensino Médio?

O professor iniciou a pesquisa elaborando uma sequência didática, usando um problema, que para ser resolvido, os alunos precisaram usar alguns conceitos de números complexos, já vistos em sala de aula, e em determinada parte da aplicação eles tinham que resolver equações do 2º grau, em que não há soluções nos números reais, intencionando despertar nos alunos a necessidade de encontrar essa solução, a curiosidade para saber se realmente há uma solução, ou mais soluções, e como chegar nessa solução, caso exista.

Com isso o professor pôde mostrar que não existem apenas números reais, como solução de uma equação do 2º grau, mas usando o conjunto dos números complexos existem, soluções para uma equação do 2º grau, mesmo com o discrimante sendo um número real negativo. Mostrando assim uma das grandes importâncias do conjunto dos Números

Para obter tal objetivo foi realizado uma sequência didática, que segundo Zabala (1998) é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos. A sequência foi realizada com um problema proposto aos alunos, para ser solucionado individualmente e depois discutido coletivamente, usando todos os passos da metodologia de Polya.

O presente trabalho tem como objetivo contribuir para a compreensão do conceito de números complexos e suas aplicações usando a metodologia da resolução de problemas. Pretende-se caracterizar a metodologia de resolução de problemas de Polya, identificar as dificuldades dos alunos da 3ª série do Ensino Médio na compreensão de números complexos e através de uma sequência didática contribuir com o processo de ensino aprendizagem do conteúdo. Por fim fazer uma criteriosa avaliação sobre o papel da metodologia na evolução e desenvolvimento do estudante pela metodologia da resolução de problemas para o conteúdo de números complexos.

A falta da metodologia em práticas docentes acarreta dificuldades para os alunos, em diversos aspectos da aprendizagem, nota-se que a literatura oficial apresenta poucas pesquisas sobre metodologias ativas no ensino dos números complexos e que elas são de fundamental importância para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem do estudante promovendo o entendimento, interpretação geométrica e algébrica bem como as aplicações dos números complexos.

Este trabalho, no primeiro capítulo, vai expor alguns tipos de resoluções de problemas, pois foi realizado um levantamento documental e um levantamento bibliográfico sobre artigos voltados para metodologia de resolução de problemas, e fará uma exposição melhor sobre a metodologia escolhida para ser aplicada que foi a de Polya, no segundo capítulo, será exposto o conteúdo de números complexos, quais aspectos deseja-se abordar neste trabalho, a importância do ensino de números complexos para a 3ª série do ensino médio e o que os documentos oficiais sugerem sobre o tema, no próximo momento, será abordado sobre a sequência didática, será exposto todo plano de aula e a sequência didática elaborada baseada na metodologia de Polya.

No terceiro capítulo, será relatado as respostas dos alunos, ao problema proposto, na aplicação da sequência didática, após isso, será realizada uma análise das respostas dos alunos para ser discutido sobre a eficácia da metodologia de Polya, no ensino de números complexos, na 3ª série de Ensino Médio. No quarto e último capítulo, serão feitas todas as considerações finais, baseada em todos os aspectos anteriores, poderá ser realizado comentários mais embasados nos resultados obtidos com as respostas dos alunos e tudo que foi observado na aplicação da sequência didática.

2. AS METODOLOGIAS DE RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

2.1 A metodologia da resolução de problemas nos documentos oficiais

A metodologia de resolução de problemas é um tema recorrente em muitas pesquisas e práticas docentes realizadas por diversos estudiosos de metodologias ativas voltadas para o ensino de matemática. Autores como Andrade (1998), Onuchic (1999), Alevatto (2004), Van de Walle (2009), Schoenfeld (1985) e Polya (1978), fizeram pesquisas, trabalhos e livros sobre a metodologia de resolução de problemas, dentre outros. A metodologia que será base desse trabalho é a metodologia de Polya.

Os documentos oficiais, como a Base Comum curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), frequentemente citam a metodologia de resolução de problemas, tanto nos trechos para o ensino fundamental quanto para o ensino médio. Existem algumas competências e habilidades que devem ser desenvolvidas nos alunos, pelo professor. Essas, frequentemente trazem a resolução de problemas, pois um dos objetivos do ensino é atingir o cotidiano dos alunos, e na vida deles sempre surgirão situações adversas e problemas a serem resolvidos, principalmente voltados à matemática.

O PCN possui algumas competências que o professor precisa formar no aluno, uma dessas competências, fala sobre a importância de o aluno saber investigar e compreender um problema, o aluno precisa, segundo o PCN (BRASIL, 2000, p. 12) "desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções. Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender." Para desenvolver essa competência, o professor deve levar o aluno segundo o PCN (BRASIL, 2000, p. 46):

> saber identificar o problema, procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema, formular hipóteses e prever resultados, selecionar estratégias de resolução de problemas, interpretar e criticar resultados numa situação concreta, distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos, fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades e discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Quando se analisa as habilidades que os documentos oficiais indicam que devem ser desenvolvidas nos alunos, pelo professor, é ressaltado também a relevância da resolução de problemas. A BNCC (BRASIL, 2017, p. 291) mostra que é importante o aluno

> reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas, isso já na 4ª série do ensino fundamental.

No desenvolver da atividade escolar, na 6ª série do Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 301) afirma que uma habilidade necessária para o aluno desenvolver é "resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora."

Já na 7ª série, do ensino fundamental surge outra habilidade a ser desenvolvida pelos alunos. Segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 307), o professor deve auxiliar o aluno a "resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos." E na 8ª série, o aluno precisa desenvolver a seguinte habilidade, segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 313): "Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso."

Contudo, é necessário não apenas que os alunos resolvam problemas, mas também elaborem problemas, pois na elaboração de novos problemas os alunos poderão e conseguirão reafirmar os conceitos assimilados, e também haverá uma possibilidade de reflexão e questionamentos sobre outras formas de aplicação dos conceitos. De acordo com a BNCC:

> Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "Resolver e Elaborar Problemas" em lugar de "Resolver Problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada BRASIL (2017, p. 536).

A resolução de problemas também aparece, na BNCC, em habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio, como as habilidades voltadas para a aprendizagem. Segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 544), uma habilidade a ser desenvolvida pelos alunos, no ensino médio é "resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais." Outra habilidade a ser desenvolvida no ensino médio, segundo a BNCC, é "resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria." (BRASIL, 2017, p. 545).

Então fica claro que, a resolução de problemas tem uma grande importância em todo o ensino fundamental. A BNCC (BRASIL, 2017, p. 527) afirma que, "os alunos do Ensino Fundamental têm a oportunidade de desenvolver habilidades referentes ao pensamento numérico, ampliando a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações." Para que essa habilidade seja desenvolvida, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 527), "propõe-se a resolução de problemas reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento)."

Em todo o texto está presente a resolução de problemas, não só na área do conhecimento de matemática, mas em outras, como por exemplo em geografia. A BNCC (BRASIL, 2017, p. 366) afirma que "aluno precisa desenvolver o pensamento espacial, fazendo uso das linguagens cartográficas e iconográficas, de diferentes gêneros textuais e das geotecnologias para a resolução de problemas que envolvam informações geográficas."

2.2 A importância da metodologia e os tipos de problemas

A metodologia da resolução de problemas é uma metodologia muito interessante de ser utilizada em práticas docentes, contudo, antes de colocá-la em prática o professor vai se deparar com o problema de saber se o problema proposto para seu aluno realmente é um problema ou apenas um exercício.

A BNCC (BRASIL, 2017) afirma que a resolução de problemas deve ser o ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos/conteúdos matemáticos, o aluno deve além de resolver refletir sobre os problemas, e para Onuchic e Allevato (2011, p. 81) um problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”. Essas afirmações levam a pensar que qualquer situação proposta pode ser um problema caso o aluno esteja interessado em fazer e que visem o desenvolvimento do aluno.

Mas será que um simples exercício de operação direta, sem contextualização, ou que trate de alguma situação do cotidiano do aluno, irá despertar esse interesse do aluno pelo problema? Para chegar à resposta dessa pergunta precisamos conhecer os tipos de problemas e conhecer as ideias de alguns autores que estudaram o tema proposto.

Para alguns autores existem diferenças entre exercícios e problemas, para Echeverría e Pozo (1998, p. 16): “[...] Um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução”. Villa e Callejo (2006) afirmam que ininterruptamente e desde cedo na vida dos alunos, os problemas devem originar-se, desenvolver-se e ser revisados em contextos da vida. Para esses autores a diferença de exercício para problema é a questão se a situação proposta está ligada com o cotidiano do aluno ou não.

Tanto os exercícios como os problemas possuem suas importâncias no estudo da matemática. Segundo Peduzzi (1997), é através dos exercícios que o estudante desenvolve e consolida habilidades. Este fato, no entanto, nem sempre fica claro ao aluno, que muitas vezes considera enfadonho, cansativo e sem propósito a repetição continuada de uma certa prática. Já os problemas tendem a despertar o maior interesse do aluno pelo problema, pela aproximação da realidade que vive.

Para alguns autores os problemas podem ser classificados de acordos com seus tipos. Segundo Silveira (2001), os problemas voltados para o ensino de matemática são divididos em quatro tipos: problemas de sondagem que servem para a introdução natural e intuitiva de um novo conceito; problemas de aprendizagem que servem para reforçar e familiarizar o aluno com um novo conceito; problemas de análise que servem para a descoberta de novos resultados derivados de conceitos já aprendidos; e problemas de revisão e aprofundamento que serve para revisar os tópicos já vistos e aprofundar alguns conceitos.

Já para Polya (1995) os problemas também podem ser divididos em quatro tipos: problemas de rotineiro que são aqueles que podem ser solucionados pela substituição de dados específicos, no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento passo a passo, de algum exemplo batido; problemas de determinação que são aqueles que têm por objetivo encontrar o valor de uma incógnita, pode ser teórico ou prático, abstrato ou concreto, problema sério ou simples enigma; problemas de demonstração que são aqueles que têm como objetivo mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa; e problemas de revisão e aprofundamento que servem para revisar os tópicos já vistos e aprofundar alguns conceitos.

Com base em todas afirmações e teorias acima, entende-se que é importante que um problema esteja ligado ao cotidiano do aluno, contudo para o estudo de números complexos a missão de encontrar problemas que envolvam o cotidiano do aluno não é simples e pode não ser eficaz. Provavelmente por isso, tantos alunos não devem se interessar tanto pelo assunto, mas se o professor usar a metodologia de resolução de problemas para problemas de sondagem, problemas de determinação, problemas de aprendizagem ou problemas de rotineiro e problemas de revisão e aprofundamento, deverá uma despertar um maior interesse do aluno, principalmente se o professor seguir as quatros fases expostas a seguir.

Para Polya (1995), problema rotineiro pode ser considerado o que consiste em resolver uma equação $x^2 – 3x + 2 = 0$, caso a resolução da forma geral da equação quadrática seja sido previamente ensinada e exemplificada. Então é sugerido nessa pesquisa, usar uma equação quadrática em que o discriminante seja menor que zero para incentivar o estudo dos números complexos a uma turma do 3º ano do Ensino Médio, pois eles já possuem o conhecimento prévio de como encontrar as raízes de uma equação quadrática.

2.3 A metodologia de Polya

Ao aplicar a metodologia de resolução de problemas de Polya (1995), o professor deve fazer seu aluno seguir por quatro fases: compreensão do problema, inter-relacionar a incógnita aos dados para a elaboração de um plano, executar o plano, e para ter uma maior firmeza de sua resolução, revisar e discutir a solução encontrada.

Nessa metodologia, o professor deve sempre fazer questões e recomendações aos alunos, levando assim, seus alunos a fazer operações mentais, para auxiliar que isso ocorra “o professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que ter ocorrido ao próprio estudante” (POLYA, 1995, p. 2).

Mas quais tipos de questões o professor deve fazer para levar o aluno a pensar pelo caminho que o levará a resposta do problema proposto? E quais recomendações? Polya (1995), sugere que as perguntas: Qual a incógnita? Quais os dados? Qual a condicionante? Elas são de aplicação geral, servem tanto para problemas matemáticos, quanto para qualquer problema da vida. Com relação às recomendações elas devem ser utilizadas quando as perguntas ainda não forem suficientes para levar o aluno a começar a caminhar pela estrada para a resposta, então cabe ao professor o papel de sugerir caminhos, para que o aluno tenha um ponto de partida. Ao colocar em prática essa metodologia o professor também precisa ter bom senso, em suas indagações e sugestões. Para Polya (1995) as indagações e sugestões devem ser naturais, simples e óbvias, mas devem formular o bom senso em termos gerais.

Para auxiliar o aluno a compreender o problema, o professor deve refletir bem ao escolher o problema proposto: “o problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante” (POLYA, 1995, p. 4). Para Polya (1995) a compreensão do problema deve ser subdividida em dois estágios, familiarização do problema e aperfeiçoamento da compreensão do problema, ou seja, o aluno deve ser levado a pensar se ele já se deparou com algum problema parecido com o problema proposto, e incentivado formalizar o problema, criando figuras, dando notações, por exemplo.

Para auxiliar o aluno, a obter uma compreensão do problema, o professor pode se utilizar de perguntas. Polya (1995) sugere algumas como: Qual a incógnita? Quais são os dados do problema? Qual a condicionante que relaciona os dados do problema? É possível generalizar os dados, representar as incógnitas por algumas letras?

Para Poyla (1995), a condicionante é a parte principal de um problema de determinação, que será detalhado, um pouco mais adiante. “Uma condicionante é chamada redundante quando contém partes supérfluas. É dita contraditória quando as suas partes são reciprocamente opostas e incompatíveis, de tal maneira que ela não possa ser satisfeita” (POLYA, 1995, p. 35). A condicionante muitas vezes ilude o aluno ao tentar resolver o problema, justamente pelo fato que algumas vezes ela ser supérflua ou contraditória, mas se não for esse o caso, a condicionante será fundamental para a resolução do problema. Para que o aluno possa estabelecer um plano de resolução, o professor primeiramente deve se colocar na posição do aluno "Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas" (POLYA, 1995, p. 6).

Caso o aluno não consiga elaborar um plano de resolução, o professor pode levar o aluno a ter uma boa ideia. A BNCC (BRASIL, 2017) fala que em matemática, a validação de ideias deriva da busca de certeza, e essa certeza pode ser validada por meio de sugestões. Sendo assim o professor pode fazer algumas sugestões para seus alunos, Polya (1995) sugere a reformulação do problema e o correlato do problema para o surgimento de ideias boas, contudo para que o aluno não fuja do problema em questão, ao pensar em outro problema, também é sugerido pelo autor que o professor se utilize de perguntas como: utilizou os dados? Utilizou a condicionante?

Para Polya (1995) interrogar o aluno, se ele conhece um problema correlato, sempre contribui o aluno a ter boas ideias, pois é difícil imaginar um problema absolutamente novo, então ao solucionar um problema sempre deve-se pensar num problema já resolvido que se assemelhe ao problema proposto, ou partes dele.

Após o aluno elaborar seu plano de execução, ele deverá colocá-lo em prática, se o aluno seguir todas as ideias, e os passos anteriormente expostos, ele provavelmente fará uma boa execução de seu plano, mas isso pode não ocorrer sempre. Contudo, pode acontecer ainda, do aluno não ter uma boa ideia, e não conseguirá executar o plano perfeitamente, caso isso ocorra, o professor deve levar o aluno pensar o problema de formas diferentes, ou seja, com relação as ideias, nas palavras de Polya (1995, p. 9), "se estas não funcionarem, precisaremos procurar, em torno, algum outro ponto de contato apropriado e examinar os diversos aspectos de nosso problema. Teremos de variar, de transformar, de modificá-la" (POLYA, 1995, p. 9).

Ao fim da execução do plano, o aluno deve estar seguro de que teve uma boa ideia e uma boa estratégia de resolução do problema, contudo um aluno pode achar que sabe demonstrar a resolução do problema, mas na realidade, ele só sabe perceber que está correto, caso isso ocorra, o professor deve auxiliar o aluno e mostrar a diferença entre perceber e demonstrar. Pode acontecer do aluno, por ter encontrado a resposta, acha que sua resolução já é suficiente para provar que chegou a resolução correta, mas na realidade ele só percebeu que a resposta está correta, mas ainda não demonstrou que realmente está correta, segundo o autor, “o principal é que o estudante fique honestamente convicto da correção de cada passo. Em certos casos, pode o professor realçar a diferença entre "perceber" e "demonstrar" (POLYA, 1995, p. 9). Sendo muitas vezes o aluno não conseguirá notar a diferença entre perceber e demonstrar e não conseguirá demonstrar sua resolução, mesmo já a tendo percebido, por isso a importância da execução do plano, para que a resolução seja demonstrada.

Por fim o aluno deve fazer um retrospecto de todo sua resolução, o aluno deve tentar resolver de outras formas, refletir se existem essas outras formas, se ele pensou em mais de um plano de execução, colocar o outro plano em prática afim de confirmar sua resolução. O retrospecto do plano de execução é importante, pois “com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução” (POLYA, 1995, p. 10).

O aluno precisa estar convicto da sua resolução, para isso, se faz necessário que o aluno faça um retrospecto completo de sua resolução, demonstrando que sua resolução está correta, para evitar que possua algum erro, ou seja, “se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas” (POLYA, 1995, p. 10). Por isso é tão importante a revisão da resolução, além disso pode haver erros na resolução. Polya (1995) também afirma que apesar de tudo, é sempre possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí, a conveniência de verificações.

Para auxiliar o aluno a fazer esse retrospecto o professor pode interrogá-lo de algumas formas. Polya (1995) sugere perguntas como: É possível verificar o argumento? É possível verificar o resultado? É possível utilizar o resultado, ou o método em algum outro problema?

Por fim, fica evidente que a metodologia de Polya, se trata de uma verificação cuidadosa ao analisar os dados e faz com o professor leve seu aluno a pensar e refletir em diversas maneiras de resolver um problema, como outros problemas correlacionados, também levando o aluno ter uma visão diferente do problema, um maior interesse pelo problema proposto e a compreensão do conteúdo de uma maneira mais leve.

3. OS NÚMEROS COMPLEXOS E A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.1 Os números complexos

Durante toda tragetória da vida escolar de um aluno, o conhecimento vai se completando aos poucos, o conhecimento vai crescendo, segundo a maneira que um conteúdo vai complementando o outro. Os números complexos são um conjunto que completa alguns conhecimentos e soluciona alguns problemas que outros conteúdos não resolvem, como por exemplo, a resolução de uma equação do 2º grau com discrimante negativo.

Alguns professores, não acreditam que os números complexos devem ser ensinados no Ensino Médio, pois eles acham que não existe uma utilidade na vida do cotidiano do aluno, para esse conteúdo. Na BNCC, os números complexos são um conteúdo que não está presente, nem é um conteúdo explorado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), contudo, está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que é um documento oficial que norteia os a construção dos demais.

A BNCC em seu texto, não traz nenhuma competência, ou habilidade voltada direta e objetivamente para o ensino de números complexos, mas é notória a importância desse estudo para atingir algumas habilidades que são necessárias ser desenvolvidas pelos alunos.

A BNCC (BRASIL, 2017, p. 533) sugere em uma das habilidades que os alunos devem "utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas." e quem estuda números complexos, sabe que pode se realizar translações, reflexões, rotações e composições usando as operações com números complexos.

É necessário que os alunos possam, segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 536) "construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais." Contudo, sem o estudo dos números complexos, os alunos ficariam limitados, pois algumas equações do 2º grau são totalmente resolvidas, apenas no conjunto dos complexos, como será o exemplo que utilizaremos na sequência didática posteriormente exposta.

Ao analisar outras áreas do conhecimento, os números complexos também surgem de forma direta, ou indireta, como por exemplo, em física de forma direta. Em sua tese, Juliano Portolan afirma que ao estudar um campo eletromagnético, é notável que ele possui duas componentes, uma elétrica e outra magnética, e para descrever essas componentes é necessário um par de números reais, logo esse par pode ser visto como um número complexo. (PORTOLAN, 2017).

Até na razão do surgimento dos números complexos, observamos sua importância para a matemática e também outras áreas do conhecimento. Os Números Complexos surgiram a fim de tornar possível a raiz quadrada de um número negativo. Sem eles, uma pessoa se limita resolver equações do 2º grau, em que o discriminante seja maior ou igual ao zero, mas quando um estudante percebe que $i^2 = -1$, o horizonte do conhecimento se amplia, e rompe barreiras de todas as áreas do conhecimento. Esse fato, torna esse conjunto, de extrema importância para o estudo da Álgebra Linear e nos estudos de Equações do 2º grau e Diferenciais.

Mas os números complexos não são importantes apenas para álgebra, segundo Lima (1991, p.01) os números complexos “se fazem presentes em grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc.”

Diferentemente da BNCC, os PCN, contemplam os números complexos em seu texto, esse documento relata que a matemática não é apenas algo que o aluno deve aprender para passar num vestibular, e ser treinado como um profissional para trabalhar para a sociedade, mas ela também precisa exercer um papel importante na formação do aluno como cidadão. Segundo os PCN a matemática ensina no Ensino Médio tem alguns objetivos:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo. (BRASIL, 2000, p. 42).

Como já foi falado anteriormente, o PCN é o documento que contempla o conjunto dos Números Complexos em seu texto, eles são citados da seguinte maneira:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2007, p.122).

Fica notório que a função da matemática não é apenas de treinar alunos para passar em vestibulares, ou concurso, mas ela é de suma importância, na formação desse indivíduo na sociedade. E segundo Kuenser:

> [...] os compromissos do Ensino Médio referem-se a todos os adolescentes, independentemente de sua origem de classe, é preciso destacar o papel da escola pública na construção de uma proposta pedagógica que propicie 41 situações de aprendizagem variadas e significativas a seus estudantes, de modo geral pauperizados economicamente, e, em consequência, cultural e socialmente (KUENZER, 2000, p.29)

Sendo assim, por que deixar de fora conteúdo programático, do Ensino Médio, um conteúdo que tem diversas ramificações em outras áreas do conhecimento e se prova tão vital, para o ensino de matemática? Fica esclarecido então, que o ensino de números complexos satisfaz os objetivos dos PCN’s e promove habilidades nos alunos que a BNCC tem como objetivo atingir.

3.2 A sequência didática

Como pretende-se estudar o desenvolvimento dos alunos e assimilação do conteúdo de Números Complexos, pela metodologia de Polya, foi realizada uma sequência didática com os mesmos. Uma sequência didática são atividades interligadas com um propósito final de atingir um objetivo geral, mas alcançando objetivos específicos nesse caminho, construindo assim o pensamento do aluno e a formação do conceito, utilizando também conhecimentos prévios dos alunos sobre conteúdos anteriores. Zabala (1998) defende que ao pensar na configuração das sequências didáticas, este é um dos caminhos mais acertados para melhorar a prática educativa.

Através de uma sequência didática com foco também em atividades investigativas, a construção do conhecimento pode acontecer de modo a possibilitar a experimentação, generalização, abstração e formação de significados (Lins e Gimenez, 2001). Por isso foi decidido usar uma sequência didática para realização desse trabalho, pois deseja-se que os alunos além de consolidar o significado dos Números Complexos, experimentem, generalizem e abstraiam, tornando assim algo mais atrativo para eles. Usando a Metodologia da Resolução de Problemas de Polya, pode-se observar que através de uma sequência didática é possível aplicar os quatro passos que Polya ensina ao professor usar.

Para aplicação da sequência didática foi programado um tempo de 100 minutos, 50 minutos para os alunos refletirem sobre o problema, tentarem resolver o problema, usando os quatro passos da metodologia de Polya, e posteriormente, mais 50 minutos, para que os alunos pudessem expor suas respostas e discutir suas soluções juntos.

Os recursos didáticos foram uma folha impressa com o problema e entregue aos alunos que estavam presencialmente, e foi enviado um arquivo de texto para um aluno que estava assistindo a aula online. Os alunos usaram lápis e borracha, ou caneta para a resolução do problema. Foi necessário um pincel para quadro branco, para a exposição das ideias no quadro, um aparelho de Datashow e um computador equipado com caixa de som, microfone e câmera, para a interação com aluno que estava em casa assistindo a aula por vídeo conferência.

O problema proposto aos alunos, criado pelo próprio autor deste texto, foi o seguinte:

Mário escreveu, em seu caderno de desenhos, 4 pontos num plano de Argand-Gauss: A (2, 1), B (2, -1), C (0, 2) e D (0, -2) e foi cochilar, mas deixou seu caderno aberto na página do gráfico.

a) Katia, irmã de Mário, viu seu caderno aberto, pegou um lápis e resolveu unir os quatro pontos, formando um determinado polígono. Qual polígono ela formou?

b) Marcos, pai de Mário, também chegou ao local, e escreveu no papel, ao lado do gráfico, que os pontos A e B representam as raízes de uma equação e que os pontos C e D representam as raízes de outra equação do 2º grau. Quais as equações que Marcos estava falando?

Planejando todos os passos que os alunos devem tomar, baseando-se na Metodologia da Resolução de Problemas de Polya, foi perguntado aos alunos, após eles lerem o problema, quais os dados do problema, pois para Polya o primeiro passo que o aluno deve dar ao resolver um problema é a compreensão do problema. Sendo assim essa é a pergunta fundamental para iniciar a resolução do problema.

Note que os alunos devem separar os dados, observando o problema em geral, ou cada aspecto solicitado.

Analisando a pergunta inicial, pretende-se que aluno observe que os dados são:

1. Mário escreveu em seu caderno 4 pontos no plano de Argand-Gauss.
2. Ponto A (2, 1).
3. Ponto B (2, -1)
4. Ponto C (0, 2)
5. Ponto D (0, -2)

Analisando o item a, pretende-se que os alunos destaquem:

1. Katia uniu os 4 pontos.
2. Katia formou um polígono.

Analisando o item b, pretende-se que os alunos destaquem:

1. Os pontos A e B representam as raízes de uma equação do 2º grau.
2. Os pontos C e D representam as raízes de uma equação do 2º grau.

Após essa separação dos dados, o aluno deve estabelecer um plano de execução do problema. Para auxiliar nessa elaboração o professor pode fazer algumas perguntas, como:

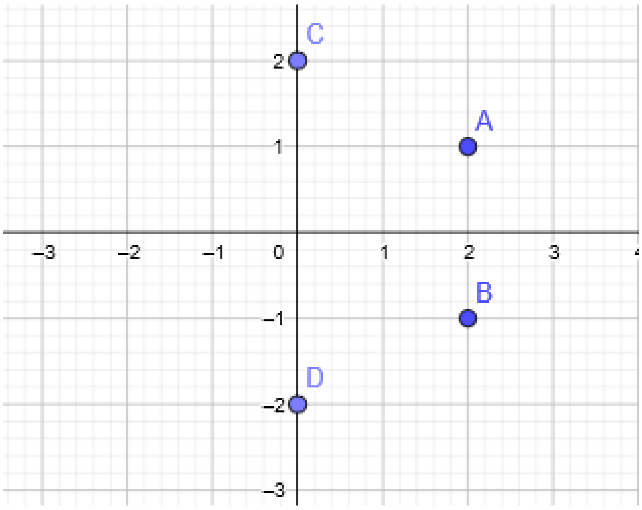
- Por que Mario escreveu os pontos no Plano de Argand-Gauss e não no plano Cartesiano? Através dessa pergunta o aluno já perceberá que se trata de algo que envolva Números Complexos, e não apenas relações entre funções.

- Você pode fazer uma cópia do gráfico que Mario Fez? Ao escrever a cópia do gráfico o aluno terá uma melhor percepção do problema.

Através da primeira pergunta o aluno já perceberá que se trata de algo que envolva Números Complexos, e não apenas relações entre funções. E ao escrever a cópia do gráfico o aluno terá uma visão melhor do problema e conseguirá coisas que talvez não tinha enxergado ainda, proporcionando assim uma melhor elaboração de plano de execução.

O gráfico que pretende-se que o aluno faça, ou se aproxime de fazer é o gráfico da figura 1, abaixo:

Figura 1 - Gráfico de Mário



Fonte: autor do texto

Nesse momento, a mente do aluno já deverá ter entendido as premissas do problema e estará pronto entender as perguntas dos itens solicitados. Alguns alunos já até deverão fazer a junção dos pontos e formar o polígono.

Para auxiliar ainda na elaboração do plano, com relação ao item a, o professor pode fazer os seguintes questionamentos, se necessários, caso o próprio aluno não se pergunte:

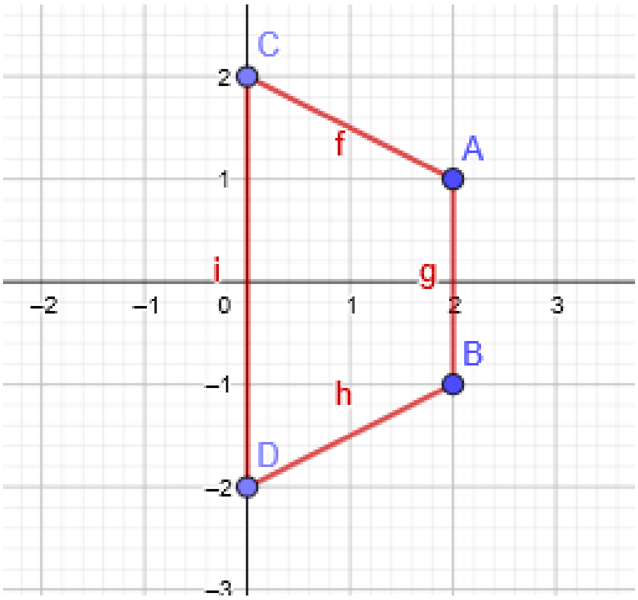
– É possível escrever um polígono usando os pontos marcados por Mário?
– Como você pode reproduzir o desenho que Katia fez?
– Que polígono Katia formou?

Essas perguntas são importantes, pois os alunos vão percebendo que agora o problema tem um âmbito geométrico, e ele ainda nem imagina o quanto de Números Complexos há nesse problema. Além disso, essas perguntas são fundamentais para a elaboração do plano de execução do item a. O aluno que tiver uma base de geometria vai perceber que é possível escrever um polígono, pois a partir de 3 pontos não colineares já se pode formar um polígono. Ele vai conseguir reproduzir o polígono e o classificará como trapézio, e aquele aluno mais atento ainda vai dizer que se trata de um trapézio isósceles.

Note que ao elaborar o problema, o aluno que o compreende já põe o plano de elaborado em execução e chega a solução do problema. Até esse momomento, o aluno além de ter encontrado a respota do item a, fez uma retrospetiva de conheciementos anteriormente. Contudo, não foi solicitado aos alunos o retrospecto do item a, por conta do tempo, e o item b, seria mais importante para o objetivo que devemos alcançar.

A figura que os alunos devem escrever deve seguir o modelo da figura 2 a seguir:

Figura 2: Desenho de Kátia



Fonte: Autor do texto

Para auxiliar a elaboração do plano, com relação ao item b, foram pensadas na seguintes perguntas para contribui para a resolução dos alunos:

– Que tipo de equação Marcos encreveu com os pontos A e B?

– Que tipo de equação Marcos encreveu com os pontos C e D?

– Qual a relação dos pontos da equação com números complexos?

– Como escrever uma equação do 2º grau a partir de suas raízes?

– Qual equação foi escrita com os pontos A e B?

– Qual equação foi escrita com os pontos C e D?

Essas perguntas vão levar o aluno a perceber, caso já não tenha percebido, que não se trata apenas de uma equação do 1º grau e sim do 2º grau, pela quantidade de raízes. O aluno também perceberá que existem relação entre os pontos de um plano e um número complexo; ele terá a percepção que cada ponto representa um Número Complexo, e que cada Número Complexo pode ser representado por um ponto do plano. Após essas percepções o aluno vai precisar lembrar como escrever uma equação do 2º grau a partir se suas raízes. Por fim, ele conseguirá colocar o plano elaborado em execução, e escrever as equações solicitadas.

Nesse caminho, o professor conseguirá ter revisado com o aluno a relação entre os pontos de um plano de Argand-Gauss e um Número Complexo, como marcar esses pontos no Plano de Argand-Gauus e como determinar uma equação do 2º grau a partir de suas raízes. Nesse último processo o professor também conseguirá revisar as operações de adição e multiplicação de números complexos com os alunos.

Pois para encontrar essas equações o aluno deve usar a regra da soma e do produto de duas raízes. Pelos dados, ao transformar os pontos na forma algébrica dos números complexos temos que A representa $Z_1 = 2 + i$, B representa $Z_2 = 2 – i$, C representa $Z_3 = 2i$ e D representa $Z_4 = -2i$.

Então pela regra da soma e do produto das duas raízes da equação, aluno deverá fazer:

Nos pontos A e B: Soma = $(2 + i) + (2 – i) = 4$ e Produto = $(2 + i).(2 – i) = 2^2 – (2i)^2 = 4 + 4 = 8$. Logo a equação qua Mario escreveu dos ponts A e B é $x^2 – 4x + 8 = 0$. Já nos pontos C e D: Soma = $2i + (– 2i) = 0$ e Produto = $(2i).(– 2i) = –4i^2 = 4$. Logo a equação qua Mario escreveu dos ponts C e D é $x^2 + 4 = 0$

Após encontrar a solução, se faz necessário que o aluno faça um retrospecto, uma análise, ou reformulação do problema, para provar que sua solução está correta. A maioria dos alunos já pensarão em resolver a equação do 2º grau, utilizando o método de Bhaskara que é o mais tradicional e ensinado nas escolas, alguns poderão pensar que basta apenas substituir os valores das raízes por x, e verificar a igualdade da equação. Mas como o objetivo é atingir números complexos, o professor poderia até incentivar os alunos a fazerem pelo método de Bhaskara, mesmo que fazendo pelo método de susbstituiçaõ de raízes, para que o objetivo seja atingido.

Ao resolver a equação do 2º grau pelo método de Bhaskara o aluno vai se deparar com um conflito, pois se ele calcular o valor do discriminante de qualquer uma das equações, ele perceberá que o resultado será negativo. Até o momento, ele só sabe que quando o valor do discrimante é negativo, a equação não possui soluções reais, mas ele já tem a solução encontrada, antes de encontrar a equação, e alem do mais, a solução é de um tipo que ele ainda vira ao resolver uma equação do 2º grau.

Nesse momento ele indagará ao professor o que deve fazer e como ele pode resolver aquela situação, surge então o momento do professor introduzir a importância do surgimento dos Números Complexos, o professor deve introduzir que $\sqrt{-1} = i$, e fazer que seu aluno a partir daí desenvolva a solução encontrando a resposta desejada. Note que o professor terá todo um aparato pra mostrar ao aluno a importância dos Números Complexos e não em apenas um exemplo de matemática pura apenas como exercício, mas usando a Metodologia da Resolução de Problemas de Polya.

4. A aplicação da sequência didática

4.1 Relatos sobre a aplicação

A aplicação foi realizada no dia 26 do mês de agosto do ano de 2021, num colégio da rede privada, em Maceió, Alagoas. O colégio possuia os materias necessários para a execução da aplicação, tanto para os alunos que estavam presencialmente, como para um aluno que estava assistindo aula remotamente, por video conferência.

A turma escolhida foi uma turma da 3ª série do Ensino Médio, no horário matutino. A turma possui ao todo quinze alunos, onde quase todos os alunos estão participando da aula de forma presencial, pois pelo reduzido número de alunos, foi liberado para todos os alunos irem para a escola, respeitarando o distancialmente social, e todos os protocolos do combate a pandemia causada pelo COVID-19. Contudo, dois alunos, opataram a participar das aulas apenas de forma remota, por conta disso, a escola instalou um computador, equipado com microfone, caixa de som, câmera e datashow, para a comunicação entre os alunos que optaram por ficar em casa, com o professor e os colegas de sala.

No dia da aplicação da sequência didática estavam presentes dez alunos, nove presencialmente e um aluno remotamente. É importante ressaltar que os alunos que estão assitindo aula remotamente, são bem participativos das aulas, inclusive no dia da aplicação o aluno que estava em casa, interagiu bastante. Os alunos que estavam presencialmente, também são bem participativos, e interagem bastante entre eles e com o professor, e estavam em todo tempo focados em realizar a atividade e resolver o problema.

Ao chegar na sala o professor primeiro se conectou com o aluno que estava de forma remota, e enviou a atividade para o aluno por um aplicativo de envio e recebimento de mensagens, e após isso entregou o problema aos alunos, de forma impressa, além de projetar a atividade, pelo projetor, para todos os alunos. Foi solicitado, primeiramente, que os alunos lessem os problemas e pensarem sobre o problema.

O primeiro passo, segundo a metodologia de Polya é compreensão do problema, por esse motivo foi solicitado que os alunos tivessem um tempo para ler o problema e pensar sobre o problema, assim eles iriam se familiarizar com o mesmo, e ao ocorrer essa familiarização os alunos tendem a memorizar as informações do problema e a probabilidade de esquecerem alguns dos dados se reduz. Após a familiarização, os alunos precisam aperfeiçoar a compreensão do problema. Para que isso pudesse acontecer, foi solicitado que os alunos separassem os dados do problema e de cada um dos itens posteriores, após isso, foi interrogado aos alunos quais eram as perguntas de cada item, fazendo assim, os alunos terem um melhor compreensão do problema, memorizar mais as informações e já ir imaginado um plano de execução.

Na parte de separar os dados do problema, todos os alunos, não apresentaram dificuldades extremas, em separar os dados do problema, mas alguns deixaram passar algumas informações cruciais, a maioria não observou todos os detalhes.

Como o problema proposto foi:

Mario escreveu, em seu caderno de desenhos, 4 pontos num plano de Argand-Gauss: A (2, 1), B (2, -1), C (0, 2) e D (0, -2) e foi cochilar, mas deixou seu caderno aberto na página do gráfico. a) Katia, irmã de Mario, viu seu caderno aberto, pegou um lápis e resolveu unir os quatro pontos, formando um determinado polígono. Qual polígono ela formou? b) Marcos, pai de Mário, também chegou ao local, e escreveu no papel, ao lado do gráfico, que os pontos A e B representam as raízes de uma equação e que os pontos C e D representam as raízes de outra equação do 2º grau. Quais as equações que Marcos estava falando?

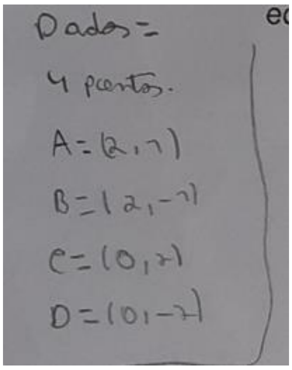
Esperava-se que do enunciado os alunos retirassem os seguintes dados:

1. Mário escreveu em seu caderno 4 pontos no plano de Argand-Gauss.
2. Ponto A (2, 1).
3. Ponto B (2, -1)
4. Ponto C (0, 2)
5. Ponto D (0, -2)

A maioria dos alunos, dos cinco pontos do problema, colocaram só os dados relativos aos pontos que Mário marcou, contudo se esqueceram de uma informação crucial, que era a questão de Mário escrever os pontos no plano de Argand-Gauss.

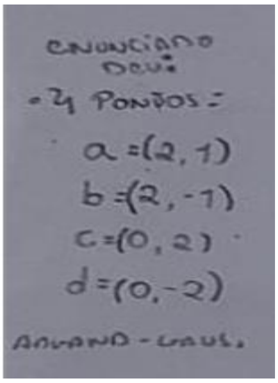
Sem perceber esse fato, o aluno poderia não perceber que se tratava de números complexos. Mas um aluno percebeu, e até perguntou o porquê de ser no plano de Argand-Gauss e não no plano cartesiano. Na figura 3, a seguir, está mostrando como um aluno escreveu os dados, sem notar a questão de ser escrito no plano de Argand-Gauss, já na figura 4, está a resposta do aluno que interrogou ao professor, sobre o plano que Mario utilizou para escrever os pontos.

Figura 3: Dados sem os plano de Argand-Gauss



Fonte: autor do texto

Figura 4: Dados com os plano de Argand-Gauss



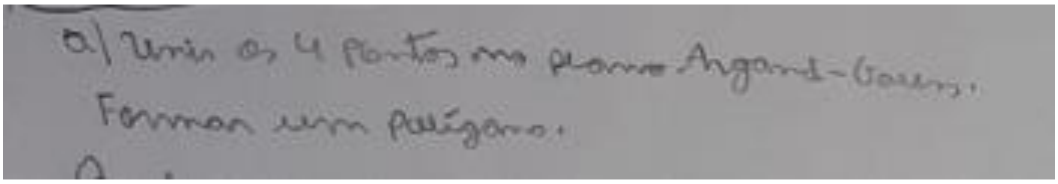
Fonte: Autor do texto

Com relação aos dados do item a, a maioria dos alunos escreveram os dois dados em única frase. A maioria dos alunos colocaram que Katia uniu os quatro pontos e formou um polígono. Nesse momento, um determinado aluno interrogou ao professor sobre o que era um polígono, pois ele havia esquecido o conceito, outros alunos presentes explicaram para o aluno o que era um polígono, fazendo-o lembrar do que era um polígono, após isso o professor confirmou o que era um polígono, com um conceito mais formal. Essa parte é importante de ressaltar, pois nesse fato, que parece ser simples, pode-se observar dois pontos importantes: o fato dos alunos responderem antes do professor a resposta da pergunta feita pelo aluno, fazendo assim que o professor fique em segundo plano, e os alunos tomarem o protagonismo na aula; e o fato da metodologia fornecer a possibilidade do professor revisar tópicos de assuntos anteriores e firmar assim esses conceitos na mente dos alunos.

Com relação ao dados do item b, todos os alunos fizeram a resposta esperada que era Os pontos A e B representam as raízes de uma equação e os pontos C e D representam as raízes de outra equação. Mas nem todos perceberam o tipo de equação, que era uma equação do 2º grau, dado fundamental para a resolução do problema e para atingir o objetivo da aplicação da sequência didática,.

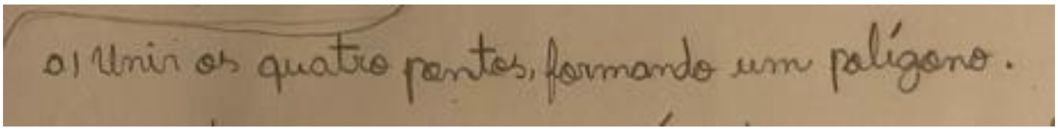
A figura 5 e 6, abaixo, mostram exemplos que dois alunos escreveram os dados do item a e a figura 7, a seguir, mostra um exemplo do que um aluno escreveu sobre os dados do item b.

Figura 5: Primeiro exemplo de dados do item a



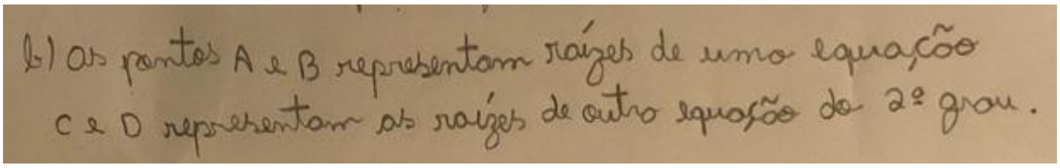
Fonte: Autor do texto

Figura 6: Segundo exemplo de dados do item a



Fonte: Autor do texto

Figura 7: Exemplo de dados do item b

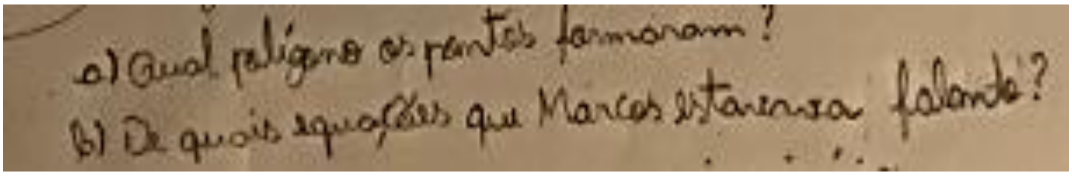


Fonte: Autor do texto

Depois de destacar os dados do problema, é necessário destacar a questão do problema, a pergunta do problema, o que o problema quer que você solucione, pensando nisso, o professor fez as seguintes interrogações aos alunos: Qual a questão do item a? Qual a questão do item b?

Foi dado um tempo para os alunos pensarem, mas o tempo foi bem mais curto, pois as respostas foram mais rápidas e com resultados satisfatórios, todos responderam o que se esperava do problema. As figuras 8 e 9, abaixo, mostram como dois alunos destacaram as perguntas dos itens a e b, um deles escreveu separadamente cada pergunta, e o outro, que era o aluno que estava de forma remota, apenas destacou no texto.

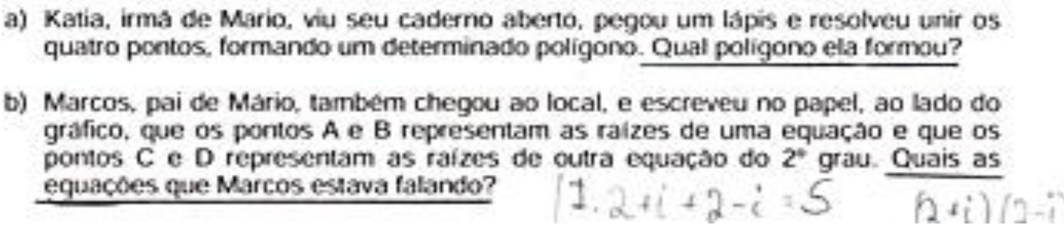
Figura 8: Primeiro exemplo de destaque das perguntas


a) Qual polígono os pontos formaram?
b) De quais equações que Marcos estava falando?

Fonte: Autor do texto

/

Figura 9: Segundo exemplo de destaque das perguntas


a) Katia, irmã de Mario, viu seu caderno aberto, pegou um lápis e resolveu unir os quatro pontos, formando um determinado polígono. Qual polígono ela formou?

b) Marcos, pai de Mário, também chegou ao local, e escreveu no papel, ao lado do gráfico, que os pontos A e B representam as raízes de uma equação e que os pontos C e D representam as raízes de outra equação do 2º grau. Quais as equações que Marcos estava falando?

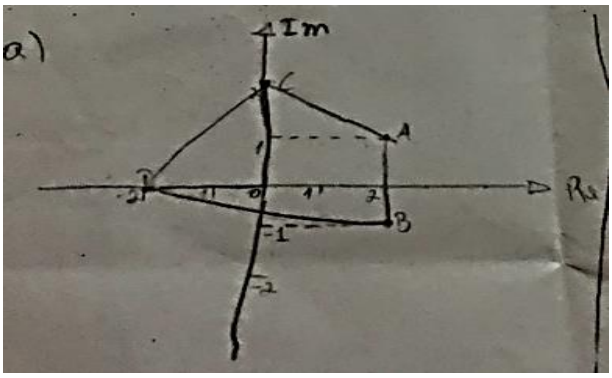
Fonte: Autor do texto

Após se familiarizar com o problema e aperfeiçoar essa compreensão, o aluno precisa procurar ideias proveitosas, pensar por onde deve começar o problema e como solucionar o problema. Para isso, os alunos tiveram primeiramente a ideia de fazer o plano de Argand-Gauss, e depois marcar os quatro pontos que Katia marcou no plano. Como eles acreditaram que essa ideia era boa, colocaram em execução.

Nessa parte, os alunos encontraram dificuldades, muitos marcaram os pontos em lugares errados, não conseguindo assim descobrir o polígono que o problema citava. O aspecto positivo dessa parte da aula foi que eles perceberam os seus erros, e tentaram resolver, e entenderam a importância de saber marcar um ponto devidamente, num plano, seja o cartesiano, ou o de Argand-Gauss, atingindo assim outro objetivo da sequência didática, que era fazer uma revisão de assuntos anteriores e até corrigindo algo que eles tinham estudado, mas não tinham aprendido tão bem.

Outro ponto importante, que parece ser algo simples, mas é de extrema importância para o objetivo da sequência didática, foi que eles colocaram em seus gráficos, eixo real e eixo imaginário, e não eixo x e eixo y, mostrando que eles perceberam que o plano era o de Argand-Gauss, resultado da boa compreensão dos dados do problema. A figura 10, é uma imagem do gráfico de um aluno, que errou a marcação de um dos pontos, mas colocou os eixos com nomes corretos.

FIGURA 10: Gráfico incorreto de um aluno

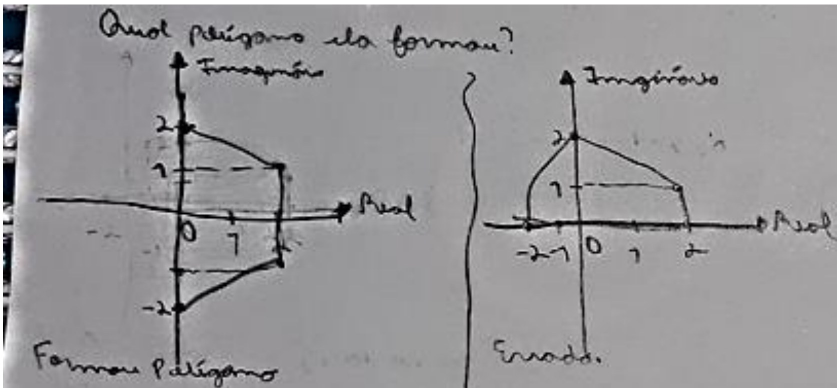


Fonte: Autor do texto

Os alunos que não conseguiram marcar os pontos corretamente, perceberam que havia algo errado, pelo fato de não formar um polígono algumas vezes, outras vezes por ser um polígono não comum para eles. Mas eles analisaram os pontos que marcaram, fazendo um retrospecto da questão, até acharem quais pontos estavam marcados incorretamente, fizeram as correções e conseguiram formar o polígono encontrado, que era um trapézio isósceles, contudo, nem todos lembraram que o trapézio era isósceles, a maioria colocou o nome trapézio, e um aluno tinha esquecido o nome do polígono. O professor aproveitou esse momento para revisar o que era um trapézio isósceles, além de falar sobre os tipos de trapézios e os tipos de polígonos.

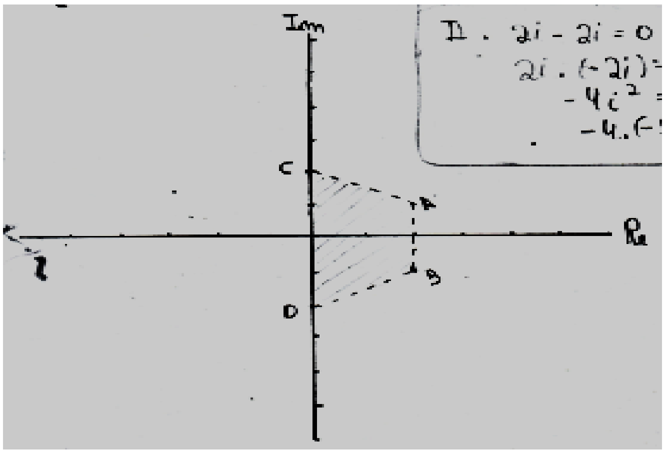
As figuras 11 e 12, mostram os gráficos de dois alunos, o primeiro de um aluno que fez a correção dos pontos que estavam errados e outro que fez corretamente.

Figura 11: Exemplo de correção de gráfico



Fonte: Autor do texto

Figura 12: Gráfico feito de maneira correta



Fonte: Autor do texto

Após a finalização do item a, os alunos foram pensar numa estratégia para resolver o item b, foram em busca de ideias proveitosas, nessa parte, eles também encontraram dificuldades, aí o professor teve que intervir utilizando as perguntas que já estavam planejadas na sequência didática, a fim de levar os alunos a terem boas ideias. A pergunta que o professor utilizou foi: Qual a relação dos pontos da equação com números complexos?

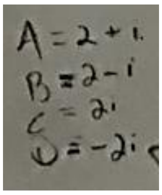
Eles refletiram um pouco, e após isso, começaram a perceber que com os pontos do plano cartesiano, poderiam formar quatro números complexos na forma algébrica, que cada ponto poderia ser associado a um número complexo diferente e decidiram escrever esses números complexos na forma algébrica. Após esse momento, alguns alunos já começaram a se interrogar e interrogar o professor outra pergunta planejada na sequência didática:Como escrever uma equação do 2º grau a partir de suas raízes?

Nesse momento surgiu a necesssidade do professor revisar para os alunos como escrever uma equação do 2º grau, a partir de suas equações pela regra da soma e do produto, parte de extrema importância, pois muitos alunos aprendem a resolver equações do 2º grau, apenas pela fórmula de Bhaskara, e não entendem a regra da soma e do produto de duas raízes. Além disso, um método interessante de ensinar é usar diversas formas de encontrar uma resposta de um problema, e quando um aluno sabe mais de um método de resolver um tipo de problema, ele terá mais facilidade de fazer o retrospecto do problema e garantir que sua resolução está correta.

Depois dessas perguntas realizadas e as respostas encontradas, os alunos já tinham um plano de execução elaborado, faltava apenas colocar em execução. Para colocar em execução, eles tiveram que relembrar as operações com números complexos na forma algébrica, mais especificamente, a adição e o produto, pois eles precisaram fazer a soma e o produto das raízes informadas por Marcos, no problema, para encontrar as equações desejadas.

A figura 13, abaixo, mostra como um aluno escreveu os pontos que estavam na forma de par ordenado representado por um número complexo na forma algébrica.

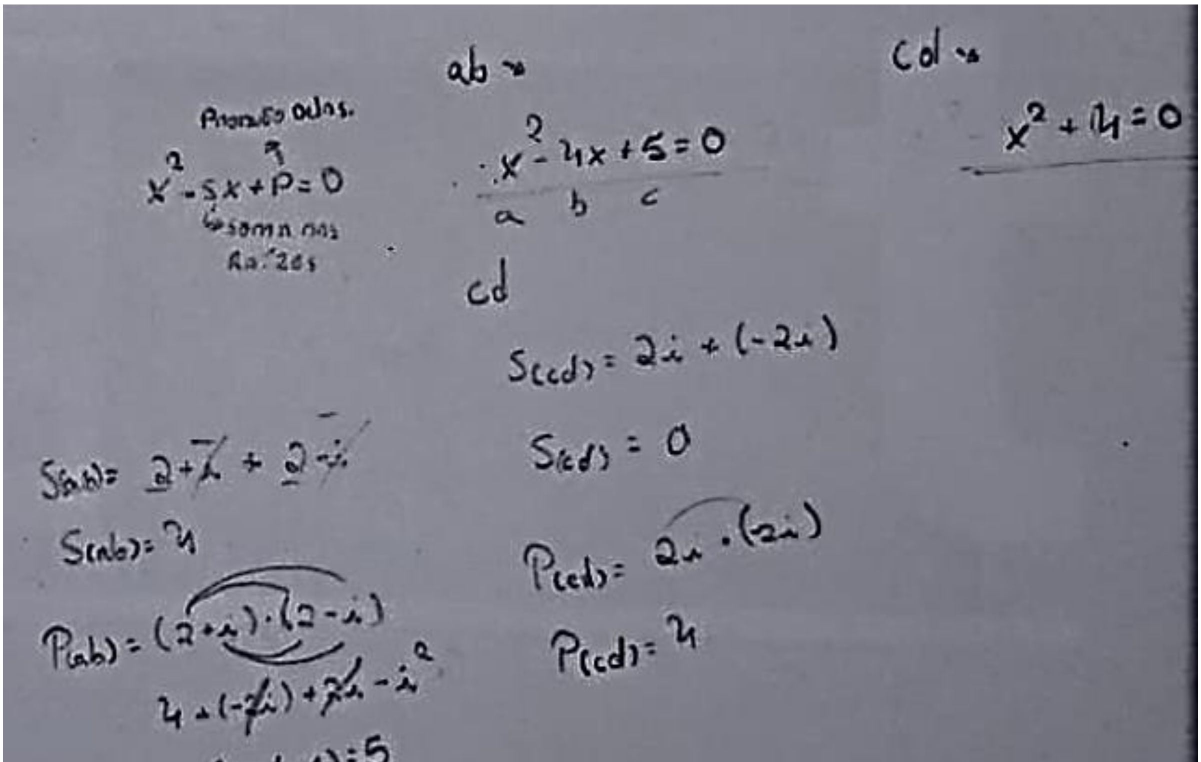
Figura 13: Pontos escritos na forma algébrica



Fonte: Autor do texto

A figura 14, a seguir, mostra os cálculos de um aluno, realizando a soma e o produto das raízes da equação e depois formando as equações desejadas.

Figura 14: Formando as equações



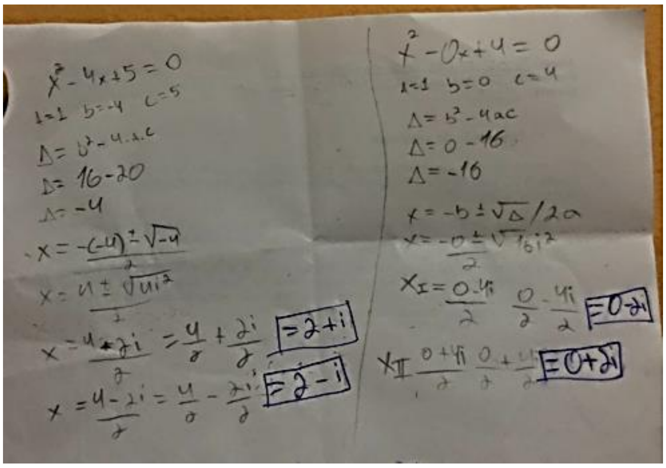
Fonte: Autor do texto

Após a execução do plano, os alunos precisavam fazer o retrospecto do problema. A ideia que o professor esperava é que eles fizessem a resolução da equação pela fórmula de Bhaskara, para que eles percebessem a questão de ter uma equação do 2º grau com discrimante negativo, mas com duas soluções já encontradas.

O professor perguntou aos alunos: Como eles poderiam ter certeza que aquela resposta que eles encontraram estavam certas? Eles passaram um tempo pensando e alguns lembraram que poderiam usar o método de resolução de Bhaskara para resolver a equação, inicaram o processo, calculando o discrimante e quando perceberam que o resultado era negativo, começaram a achar algo estranho, incomum, e não sabiam o que fazer e começaram a interrogar ao professor o que poderia ser feito.

Nessa oportunidade o professor levou eles a pensarem e não entregou a resposta apenas, pra o aluno não sair do protagonismo da aula, o professor, num primeiro momento, fez a seguinte pergunta: Como você torna algo negativo em positivo? Alguns alunos começaram a responder que era multiplicando por -1. Como os alunos na multiplicação de números complexos, já sabiam que $i^2 = -1$, e esse fato já tinha sido revisado quando usaram a regra do produto pra encontrar as equações, o professor fez a segunda pergunta: Como posso escrever o -1, em algo que que tem haver com número complexo? Então alguns lembraram que $i^2 = -1$. Com essas perguntas, alguns alunos tiveram a ideia de tranformar -4 em $4i^2$ e -16 em $16i^2$, ao resolver as equações pelo método de resolução de Bhaskara. A figura 15, abaixo, mostra resolução de um aluno, ao fazer o retrospecto do problema.

Figura 15: Resolução do retrospecto

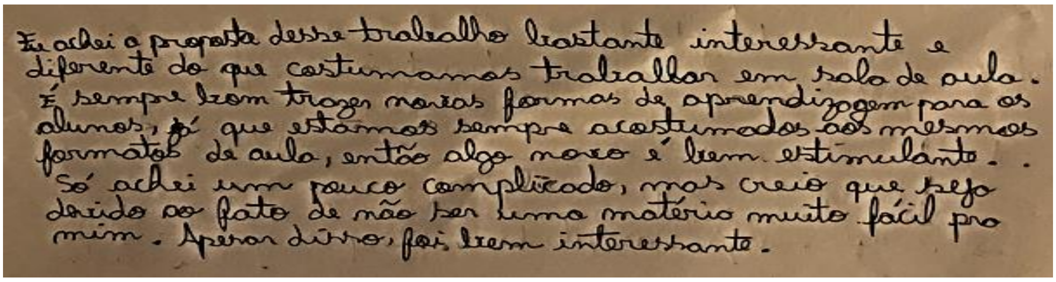


Fonte: Autor do texto

4.2 Discussão sobre a aplicação

Por fim, foi solicitado aos alunos que escrevessem comentários sobre a metodologia aplicada, alguns escreveram na própria folha e outros escreveram na plataforma moodle, onde eles postaram seus as fotos de suas respostas. A figura 16 e 17 a seguir, mostram as opiniões de dois alunos, escritas na própria folha.

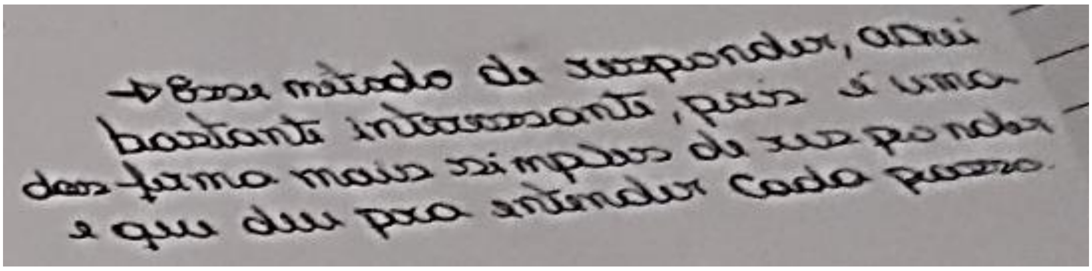
Figura 16: Relato de um aluno



Eu achei a proposta desse trabalho bastante interessante e diferente do que costumamos trabalhar em sala de aula. É sempre bom trazer novas formas de aprendizagem para os alunos, já que estamos sempre acostumados aos mesmos formatos de aula, então algo novo é bem estimulante. Só achei um pouco complicado, mas creio que seja devido ao fato de não ser uma matéria muito fácil pro mim. Apesar disso, foi bem interessante.

Fonte: Autor do texto

Figura 16: Relato de outro aluno



→ Esse método de responder, achei bastante interessante, pois é uma das forma mais simples de responder e que deu pra entender cada passo

Fonte: Autor do texto

Outro aluno deixou o seguinte comentário na plataforma:

> “como eu disse em sala, por mais que seja a primeira vez com essa metodologia, eu gostei muito, pois aborda um dos pontos que mais "dá trabalho" não só para mim, mas outros alunos, em especial os que não tem tanta afinidade ou interesse em matemática. não me considero um aluno ruim com cálculos, sempre tive mais problemas em entender o enunciado do que propriamente na resolução, então trabalhar e entender os enunciados, além de ser a parte crucial da questão, desenvolve melhor a interpretação do aluno. e ainda que, sendo algo novo, estimula mais a participação do aluno, sujeita ele mais ao erro de uma forma pedagógica. Tira também um pouco do estigma do professor montar a questão e ele mesmo resolver sozinho. então ao resumo; gostei bastante e seria bom ter mais atividades nesse estilo.”

Outro aluno também deixou o seguinte comentário na plataforma: “Achei superinteressante esse tipo de metodologia, pois ajuda, nós alunos, aprender na prática e ajuda muito quem tem muita facilidade de cálculos indo devagar, explicando passo a passo, separando pontos importantes, fica mais fácil pra aprender.”

Pelos comentários dos alunos e por toda maneira que se portaram ao resolver o problema, percebe-se que a metodologia de Polya pode ser eficaz em diversos pontos, como a oportunidade que o professor tem de revisar conteúdos em meio a resolução do problema, a maneira que o aluno se comporta e o foco que ele desenvolve ao resolver o problema e o tira tanto o aluno como o professor da zona de conforto; o aluno se torna o protagonista na aula e o professor um mediador, auxiliando quando necessário, de preferências com interrogações, para levar o aluno a pensar e assim ter boas ideias.

Em diversas ocasiões, o professor teve a oportunidade de revisar conteúdos anteriores, pois no planejamento da sequência didática já era esperado que isso ocorresse, nota-se então que a metodologia de Polya oportuniza o professor a realizar revisões, sobre qualquer conteúdo, ele sabendo planejar bem sua aula. O professor pode até aplicar a metodologia numa aula que seja apenas de revisão e não tenha introdução de novos conceitos.

Com relação a maneira que os alunos se comportaram na resolução do problema, foi bem diferente da maneira que eles se comportam em uma aula tradicional num formato mais tradicional. Geralmente nas aulas, os alunos ficam distraídos, ou querendo conversar entre si, ou seja, se distrair de alguma forma, e o professor sempre precisa intervir, pedir atenção dos mesmos, para a aula, então mesmo que o professor tenha esse controle de turma, o aluno vai estar em silêncio, e por obrigação, e muitos não conseguem reter os conceitos e o professor não atinge seus objetivos. Mas na aplicação, em nenhum momento o professor pediu pra que eles fizessem silêncio, ou tivessem foco na aula, pois eles automaticamente, estavam focados e interessados em resolver o problema, e o professor ficou só mediando e auxiliando os alunos a terem boas ideias.

Os alunos, durante toda aplicação, saíram da zona de conforto, tomando o protagonismo na aula, descobrindo os dados do problema, pensando em estratégias pra resolver o problema, interagindo uns com os outros, curiosos para comparar as respostas um dos outros e sem restrições de perguntar ao professor, ou dizer que não estava conseguindo fazer alguma parte. Geralmente os alunos ficam acanhados de revelar suas respostas e até perguntar ao professor, por medo de revelar seus erros, coisa que praticamente não ocorreu em meio a aplicação, talvez pelo fato, dos alunos serem protagonistas, eles não se colocaram numa posição tão inferior ao professor, quanto os alunos se colocam, numa aula em formato mais tradicional.

O professor também sai da zona de conforto, pois requer do professor todo um planejamento e um controle para permitir que o aluno tome posse do papel principal da aula. Um bom planejamento traz resultados esperados, como foi visto em toda aplicação, quando até as perguntas que poderiam ser sugeridas, os próprios alunos as fizeram. Contudo, o professor precisa ficar atento, e realmente deixar o aluno ficar em evidência, ficar no papel apenas de intermediador, para isso, é necessário se desapegar da mente tradicional e saber esperar, para que o aluno possa encontrar o caminho da solução, e quando o aluno encontrar uma dificuldade e realmente precisar de um auxílio, o professor deve intervir, não com as respostas, mas com questionamentos que levem o aluno a chegar nas ideias satisfatórias.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

O trabalho apresentou resultados sobre uma pesquisa qualitativa realizada com dez alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada de Maceió – Al. O objetivo do trabalho foi levantar uma discussão sobre a maneira de ministrar o conteúdo de números complexos, numa turma do 3º ano do Ensino Médio, utilizando a metodologia da resolução de problemas de George Polya.

Antes de fazer uma aplicação da sala de aula, foi realizado um levantamento documental e um levantamento bibliográfico, para criar bases e nortear um caminho a que metodologia usar. Foram estudados os documentos oficiais brasileiros, como a BNCC e o PCN, para entender as competências e habilidades que precisam ser desenvolvidas nos alunos, e as diversas metodologias de resolução de problema, para saber qual utilizar. A metodologia escolhida foi a de George Polya.

Baseado na metodologia escolhida, foi planejada uma sequência didática, a fim de melhor atingir os objetivos. Nessa sequência foi proposto um problema que pudesse levar o aluno a revisar alguns conteúdos anteriores e também introduzir conceitos de números complexos, principalmente a maneira de resolver uma equação do 2º grau no conjunto dos Números Complexos. Para isso ocorrer, as equações propostas nos problemas tinham o descriminante negativo, para que as raízes fossem complexas.

O conjunto dos Números Complexos é julgado por alguns como um assunto que não deveria ser estudado no Ensino Médio, mas nesse trabalho foi apresentado aspectos da relevância do assunto para os alunos nesse nível de estudo. Muitos professores ensinam o assunto de números complexos de uma forma tradicional e não levam o aluno a entender o porquê de estudar esse conteúdo, além de não usar uma metodologia ativa para despertar o interesse de seus alunos a aula ministrada. Por esse motivo, muitos alunos perdem o interesse pelo assunto e acha que Números Complexos é um assunto que não tem ligação com outros assuntos visto no Ensino Médio.

Por esse fato, surge a necessidade de uma discussão sobre a importância do ensino de Números Complexos no Ensino Médio, inclusive nota-se que Números Complexos poderiam ser inseridos no Ensino Médio como um bom tema a ser explorado nos itinerários formativos, e a relevância de usar metodologias que tirem o professor da forma tradicional de ensinar esse conteúdo, que levem os alunos se tornarem protagonistas nas aulas e despertem um maior interesse sobre o assunto, compreendendo o conteúdo e percebendo a sua relevância. E pelos resultados obtidos a metodologia da resolução de problemas de George Polya se mostrou eficaz aos objetivos a serem atingidos.

Os resultados obtidos na aplicação da sequência didática foram muitos satisfatórios, os alunos participaram ativamente em toda realização da sequência didática, expressando suas dificuldades, tomando o protagonismo da aula e compreendendo bem os conceitos, tanto os que foram revisados, como os que foram introduzidos, pelo fato dos próprios se questionarem sobre o problema e encontrarem as respostas através de suas perguntas ou pelas perguntas que o professor fazia para auxiliar os alunos a chegarem as suas respostas.

O presente trabalho tem como objetivo contribuir para a compreensão do conceito de Números Complexos e suas aplicações usando a metodologia da resolução de problemas de George Polya

Ao utilizar a resolução de problemas de Polya, os alunos atingiram resultados satisfatórios, além de compreenderem o conceito de Números Complexos, os próprios alunos, em seus relatos, demonstraram aprovar a metodologia e a maneira que foi aplicada. A metodologia de Polya foi bem caracterizada no trabalho, ao mostrar todos os passos da metodologia e aplicar a sequência didática usando cada passo sugerido por Polya.

A falta de documentos oficiais que sugiram os professores a desenvolver competências e habilidades diretamente voltadas para Números Complexos é um problema, além da insistência de professores ao ministrar suas aulas de forma tradicional, que causam falta de interesse de alunos sobre em suas aulas, e causam uma deficiência em assuntos que são base para os números complexos.

Pesquisas em metodologias voltadas para Números Complexos, por metodologias ativas, como a de resolução de problemas de Polya, em práticas docentes são muito importantes para que professores reflitam na forma de ministrar suas aulas sobre o tema pesquisado e consigam auxiliar seus alunos a conhecer o conjunto dos números complexos, mas também tenham um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, tenham mais facilidades para resolver problemas e desenvolvam mais o cálculo mental.

REFERÊNCIAS:

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília (DF), 2007. Disponível em: <http:portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 19 set. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - Parte III. Brasília (DF), 2000. Disponível em: < portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 19 set. 2021.

ECHEVERRÍA, M. del P. P.; POZO, J. I. **Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender**. In: POZO, J. I. **A solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

KUENZER, A. Z. **O Ensino Médio agora é para a vida**: entre o pretendido, o dito e o feito. Educação & Sociedade, Artigo. Campinas, v. 1, p. 15-39, 2000. Disponível em:< http://www.scielo.br/pdf/es/v21n70/a03v2170.pdf>. Acesso em: 19 set. 2021.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Sociedade Brasileira de Matemática.1991. Disponível em: < http://www.ebah.com.br/content/ABAAABo-gAJ/numeros-complexos>. Acesso em: 19 set. 2021.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas da aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 2001.

ONUCHIC, L. de L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em resolução de problemas:** caminhos, avanços e novas perspectivas. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PEDUZZI, L. O. de Q. **Sobre a resolução de problemas no ensino da Física.** Caderno Brasileiro de Ensino de Física, Florianópolis, v. 14, n. 3, p. 229-253, dez. 1997.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. In: STANFORD. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência Ltda.

PORTOLAN, J. **A importância do ensino de números complexos no ensino médio, na visão dos professores de matemática, em alguns municípios da região Oeste do Paraná**. 2017. Disponível em: < epositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/3024/1/PB_PROFMAT_M_Portolan%2C%20 Juliano_2017.pdf >. Acesso em: 19 set. 2021.

SILVEIRA, J. F. Porto, 2001. **Enseñando a aprender.** Caracas: Polar, 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>. Acesso em: 1 jun. 2021.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar:** o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212 p.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.