

José Carlos do Amaral Rocha

Mistura não linear por duas ondas utilizando luz estruturada

Brasil

10 de Março de 2020

José Carlos do Amaral Rocha

Mistura não linear por duas ondas utilizando luz estruturada

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

Brasil

10 de Março de 2020

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

R672m Rocha, José Carlos do Amaral.

Mistura não linear por duas ondas utilizando luz estruturada / José Carlos do Amaral Rocha. – 2020.

57 f. : il. color.

Orientador: Eduardo Jorge da Silva Fonseca.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió.

Bibliografia: f. 56-57.

1. Luz estruturada. 2. Momento angular orbital. 3. Óptica não linear. I. Título.

CDU: 535



Universidade Federal de Alagoas Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
Fone : (082) 3214-1423/FAX (82) 3214-1645

ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PÓS-GRADUANDO JOSÉ CARLOS DO AMARAL ROCHA, REALIZADA NO DIA DEZ DE MARÇO DE DOIS MIL E VINTE.

Aos dez dias do mês de março de dois mil e vinte, às treze horas e trinta minutos, em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, o professor Eduardo Jorge da Silva Fonseca, na qualidade de Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Física, instalou os trabalhos para defesa de dissertação de mestrado do Pós-Graduando **José Carlos do Amaral Rocha**. O Coordenador apresentou a Banca Examinadora constituída pelos seguintes professores: Eduardo Jorge da Silva Fonseca, como presidente da banca examinadora e orientador, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Sandra Sampaio Vianna, do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco; e Pedro Valentim dos Santos, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; e como suplentes: Willamys Cristiano Soares Silva, do Curso de Física do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas; e Alcenísio José de Jesus Silva, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas. Em seguida, o presidente da banca convocou o candidato a expor seu trabalho de dissertação, intitulado: **“Mistura não linear por duas ondas utilizando luz estruturada”**. Após a exposição do candidato, teve início a arguição por parte da banca examinadora. O presidente da banca examinadora, após solicitar perguntas ou comentários do público presente, suspendeu os trabalhos para que fosse realizado o julgamento. A banca examinadora decidiu aprovar o candidato com grau **“A”**. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão, da qual eu, Victor Xavier Brito, secretário do Programa de Pós-Graduação em Física, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e que depois de lida e aprovada, será assinada pelo presidente da banca examinadora e demais membros, pelo candidato e por testemunhas que quiserem. Maceió, dez de março de dois mil e vinte.

Victor Xavier Brito

Eduardo Fonseca

Sandra S. Vianna

Pedro Valentim dos Santos

José Carlos do Amaral Rocha

Agradecimentos

- Aos meus pais e irmãos por todo apoio sempre;
- Aos meu orientador Eduardo J. S. F. pela paciência, confiança e ensinamentos ao longo dos anos;
- Aos meus amigos e amigas que fiz ao longo do curso e que levarei pro resto da vida: Helena ♡, Ruyter, Mari, Ananda, Marissol, Dayak, Débora;
- Aos meus amigos de curso, especialmente os integrantes do Hamilton-Jacobi e suas futuras variantes;
- Aos amigos de fora do curso que me acompanharam nessa jornada: Isadora, Catarina, Vitor, Raquel, Giselle, Babi;
- Aos meus colegas, ex-colegas e professores do GON pelo companheirismo, discussões e colaborações em todos esses anos.

Resumo

A modificação de propriedades ópticas devido a interação da luz com a matéria é objeto de estudo da óptica não linear. A possibilidade da polarização de um meio responder com potências da amplitude do campo aplicado dá surgimento a uma gama de fenômenos físicos de grande interesse científico e tecnológico. Junto a isso, temos que a estruturação da luz, ou seja, seu controle espacial, permite estudá-la em sistemas bastante particulares. Nesta dissertação de Mestrado, investigamos a interação de luz estruturada com um meio não linear no contexto de mistura por duas ondas. Inicialmente apresentamos a mistura não linear de feixes Laguerre-Gauss (LG) de ordens radiais nulas e momento angular orbital inteiro e fracionário. Observa-se que o meio não linear age como um acoplador dos diferentes graus de liberdade deste feixe estruturado, possibilitando a relação entre a carga topológica dos feixes incidentes com ordens radiais do feixe gerado a partir da interação não linear com a matéria. Em seguida, como primeiro resultado dessa dissertação, realizamos uma extensão desse tipo de mistura ao considerarmos feixes Laguerre-Gauss de ordens radiais não nulas e discorremos sobre suas implicações. Posteriormente, apresentamos a mistura de feixes LG contendo carga topológica fracionária e, com isso, observamos o surgimento do vórtice e de ordens radiais no campo gerado a partir dessa mistura. Posteriormente, utilizando uma superposição de modos Hermite-Gauss (HG) como mistura incidente, realizamos o processo inverso. Especificamos o feixe desejado que resulta da mistura e buscamos encontrar a superposição incidente. Dessa forma, pudemos realizar a conversão de modos entre diferentes bases paraxiais. Por fim, realizamos um estudo acerca da mistura não linear por duas ondas de modos Ince-Gauss (IG), determinando sua regra de seleção e analisando a transição da mistura entre modos LG e HG, que se revelam como casos particulares dos modos aqui estudados.

Palavras-Chave: Óptica Não Linear, Momento Angular Orbital, Luz Estruturada.

Abstract

The modification of optical properties due to light-matter interaction is object of study of Nonlinear Optics. The possibility of the polarization of a material to respond with powers of the applied field's amplitude gives rise to many physical phenomena of great scientific and technological interests. Together with it, structuring light, meaning the application of custom light fields, allow us to study it in very particular systems. In this dissertation, we investigate the structured light interaction with a nonlinear media in the context of two-wave mixing. Initially we present the nonlinear mixture of Laguerre-Gaussian (LG) beams of null radial order and arbitrary orbital angular momentum. It is observed that the nonlinear media acts as a coupler between different degrees of freedom of this particular structured beam, enabling the relation between the topological charge of the incoming beams with the radial orders of the generated beam through its nonlinear interaction with matter. Next, as a first set of results of this dissertation, we extend this type of mixture by considering LG beams of non-null radial order and discuss about its implications. Later we show the mixture of LG beams carrying fractional topological charge and, with it, showing the birth of a vortex and radial orders in the generated beam. Subsequently, using a superposition of Hermite-Gaussian (HG) modes as initial beams, we perform the inverse process. We specify the desired output beam that results from the nonlinear mixture and find the incoming beams mode superposition. In this way, we were able to perform optical mode conversion of different paraxial basis. Lastly, we perform a study of the two-wave nonlinear mixture of Ince-Gaussian (IG) modes, obtaining its selection rule and analyzing the transition between the mixture of LG and HG modes, that reveals itself as particular cases of the modes here considered.

Keywords: Nonlinear Optics, Orbital Angular Momentum, Structured Light.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Distribuição de intensidade para modos Hermite-Gauss junto da sua distribuição de fase. Aqui, os índices são da forma (m, n)	17
Figura 2 – Distribuição de intensidade para modos Laguerre-Gauss junto da sua distribuição de fase. Aqui, os índices são da forma (p, l)	18
Figura 3 – Distribuição de intensidade para modos Ince-Gauss junto da sua distribuição de fase. Aqui, os índices são (p, m, σ) , onde $\sigma = e, o$ é a paridade do modo.	19
Figura 4 – Diagrama que ilustra o processo de mistura não linear por duas ondas.	22
Figura 5 – Arranjo experimental utilizado para realização da mistura não linear por duas ondas. Os comprimentos focais das lentes são $f_{L1} = 30$ mm, $f_{L2} = 100$ mm, $f_{L3} = f_{L4} = 1000$ mm e $f_{L5} = 300$ mm. SLM - <i>Spatial Light Modulator</i> (Modulador Espacial da Luz, MEL). HWP - <i>Half-Wave Plate</i> (Placa de Meia Onda). PBS - <i>Polarized Beam Splitter</i> (Divisor de Feixes Polarizado). PH - <i>Pin-hole</i> (Filtro Espacial). M - <i>Mirror</i> (Espelho).	25
Figura 6 – Algoritmo para gerar holograma utilizando o método da fase dupla (HSUEH; SAWCHUK, 1978)	26
Figura 7 – Distribuição de intensidade teórica (esquerda) e experimental (direita) na zona de Fraunhofer para vórtices que co-rotacionam.	28
Figura 8 – Distribuição de intensidade teórica (esquerda) e experimental (direita) na zona de Fraunhofer para vórtices que contra-rotacionam.	30
Figura 9 – Distribuições de intensidade teórica e experimental na zona de Fraunhofer mostrando passo a passo o surgimento de um vórtice.	31
Figura 10 – Distribuição de intensidade (a) experimental, (b) teórica e padrão de fase (c) referente à Fig. 11 para $l = 0.4$, indicando a presença de carga topológica líquida inteira antes de l semi-inteiro.	32
Figura 11 – Distribuições de intensidade teórica e experimental na zona de Fraunhofer mostrando passo a passo o surgimento de ordens radiais adicionais.	33
Figura 12 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe $U_{2\omega}$ gerado a partir da mistura por duas ondas de modos Laguerre-Gauss. Aqui, os feixes de entrada são (a) $U_1 = LG_{12}^e$ e $U_2 = LG_{11}^o$, (b) $U_1 = LG_{11}^e$ e $U_2 = LG_{01}^o$, (c) $U_1 = LG_{11}^e$ e $U_2 = LG_{11}^e$. A associada superposição de modos gerada é ilustrada nos histogramas da coluna central.	35

Figura 13 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe $U_{2\omega}$ gerado a partir da mistura por duas ondas de modos Hermite-Gauss. Aqui, os feixes de entrada são (a) $U_1 = \text{HG}_{01}$ e $U_2 = \text{HG}_{10}$, (b) $U_1 = \text{HG}_{10}$ e $U_2 = \text{HG}_{11}$, (c) $U_1 = \text{HG}_{01}$ e $U_2 = \text{HG}_{21}$. A associada superposição de modos gerada é ilustrada nos histogramas da coluna central.	37
Figura 14 – Distribuições de intensidade exatos para os modos IG (a,d,g) comparados com os resultados teóricos (b,e,h) e experimentais (c,f,i) para feixes modos de paridade par e ímpar.	39
Figura 15 – Distribuições de intensidade exatos para os modos LG (a,d,g) comparados com os resultados teóricos (b,e,h) e experimentais (c,f,i) para feixes modos de paridade par e ímpar.	40
Figura 16 – Distribuição de intensidade do campo distante para valores discretos do parâmetro de excentricidade do modo IG_{42}^e . Aqui mostramos a transição entre os modos HG e LG ao variarmos este parâmetro	42
Figura 17 – Esfera de Poincaré para o modo IG_{42}^e na base Hermite-Gauss (HG). Os pontos indicam os diferentes valores de excentricidade da Fig. 16. . . .	42
Figura 18 – Distribuições de intensidade exatos para os modos LG (a,d) e IG (g,j) comparados com os resultados teóricos (b,e,h,k) e experimentais (c,f,i,l) para feixes carregando MAO.	43
Figura 19 – Distribuição de intensidade na zona de Fraunhofer para feixes carregando MAO referente aos modos (a) LG_{02} ,(c)* LG_{12} ,(e) IG_{22} e (g)* IG_{31} , junto da medida da carga topológica através do método da lente inclinada (b), (d), (f) e (h), respectivamente. Modos marcados com * denotam aqueles no qual não é possível encontrar uma solução para o sistema linear dos pesos ($\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m''n''}$) que compensa a integral de <i>overlap</i> inerente à mistura não linear de duas ondas	44
Figura 20 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe gerado $U_{2\omega}$ através da mistura não linear por duas ondas de modos Ince-Gauss com paridade definida junto dos feixes de entrada para cada caso. Aqui, (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^e$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^e$. A superposição de modos que compõem $U_{2\omega}$ é mostrada no histograma da coluna central.	48
Figura 21 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe gerado $U_{2\omega}$ através da mistura não linear por duas ondas de modos Ince-Gauss com paridade definida junto dos feixes de entrada para cada caso. Aqui, (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^o$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^o$. A superposição de modos que compõem $U_{2\omega}$ é mostrada no histograma da coluna central.	49

Figura 22 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe gerado $U_{2\omega}$ através da mistura não linear por duas ondas de modos Ince-Gauss com paridade definida junto dos feixes de entrada para cada caso. Aqui, (a) $U_1 = \text{IG}_{33}^o, U_2 = \text{IG}_{22}^o$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^o, U_2 = \text{IG}_{22}^o$. A superposição de modos que compõem $U_{2\omega}$ é mostrada no histograma da coluna central.	49
Figura 23 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para diferentes valores de excentricidade dos modos IG de entrada $U_1 = \text{IG}_{31}^e$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^o$. Aqui mostramos a transição entre modos LG e HG variando este parâmetro de 0 até 1000.	50
Figura 24 – Padrões de intensidade teórico e experimental para o campo gerado através da mistura por duas ondas de modos IG helicoidais, juntamente com os campos iniciais utilizados em cada caso. Aqui, os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{HIG}_{11}^+ e U_2 = \text{HIG}_{31}^+$, (b) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{31}^+$, (c) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{22}^-$ e (d) $U_1 = \text{HIG}_{31}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{11}^-$. A superposição de modos gerados é mostrado através dos histogramas para vórtices com sentido positivo (HIG_{pm}^+) e negativo (HIG_{pm}^-) situados na coluna central.	52
Figura 25 – Distribuições de fase calculadas numericamente para feixes HIG referentes à Figura 24. Aqui, os círculos sólidos vermelhos indicam singularidades de carga positiva, enquanto os círculos tracejados azuis indicam singularidades de carga negativa.	53

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela com os modos de entrada U_1 e U_2 utilizados no processo de mistura não linear por duas ondas para realização conversão de modos ópticos. Modos indicados com * são aqueles que não podemos encontrar um conjunto de pesos apropriados que compensem a integral de <i>overlap</i> (Consultar Seção 4.3).	44
Tabela 2 – Regras de seleção para feixes paraxiais no processo de mistura não linear por duas ondas. Aqui, $P = \min(l' , l'')$	51

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	MODOS ÓPTICOS E EFEITOS NÃO LINEARES	13
2.1	Equação da Onda	13
2.1.1	Equação de Helmholtz	15
2.1.2	Aproximação paraxial	16
2.1.2.1	Modos Hermite-Gauss	16
2.1.2.2	Modos Laguerre-Gauss	17
2.1.2.3	Modos Ince-Gauss	18
2.2	Equação da onda na matéria	19
2.3	Processos não lineares de segunda ordem	21
2.4	Mistura não-linear por duas ondas de feixes contendo vórtices ópticos	21
3	MISTURA NÃO-LINEAR DE FEIXES LAGUERRE-GAUSS	24
3.1	Mistura não linear de modos Laguerre-Gauss de ordem radial não nula	24
3.2	Mistura não linear de modos Laguerre-Gauss com carga fracionária	29
4	CONVERSÃO DE MODOS ÓPTICOS	34
4.1	Mistura não linear de modos Hermite-Gauss	34
4.2	Conversão de Modos Ópticos	36
4.2.1	Conversão para modos de paridade definida	38
4.2.2	Conversão para modos contendo MAO	41
4.3	Limitações do método	44
5	MISTURA NÃO-LINEAR DE FEIXES INCE-GAUSS	47
5.1	Mistura não linear de modos Ince-Gauss de paridade definida	47
5.2	Mistura não linear de modos Ince-Gauss Helicoidais	50
6	CONCLUSÃO	54
6.1	Artigos publicados ou submetidos relacionados à dissertação	55
6.2	Outros artigos do autor	55
	REFERÊNCIAS	57

1 Introdução

A modificação de propriedades ópticas devido a interação da luz com a matéria é objeto de estudo da óptica não linear. A possibilidade da polarização de um meio responder com potências da amplitude do campo aplicado dá surgimento a uma gama de fenômenos físicos, tais como segundo harmônico (MIDWINTER; WARNER, 1965), autofocalização (AKHMANOV; SUKHORUKOV; KHOKHLOV, 1968), efeito Kerr (IMOTO; HAUS; YAMAMOTO, 1985), para citar alguns. Junto a isso, temos que a estruturação da luz, ou seja, seu controle espacial, permite estudá-la em sistemas bastante particulares. Nesta dissertação de Mestrado, investigamos a interação de luz estruturada com um meio não linear no contexto de mistura por duas ondas.

Inicialmente, no Capítulo 2 apresentamos uma base teórica definindo o tipo de luz estruturada aqui utilizada, mais especificamente os modos paraxiais da luz. Em seguida, introduzimos ao leitor diferentes fenômenos ópticos que surgem ao considerarmos respostas da polarização de um material com ordens da amplitude do campo aplicado. Por fim, ainda neste capítulo, apresentamos a motivação inicial dos trabalhos aqui apresentados, que consiste na mistura não-linear de feixes contendo vórtices ópticos. Nesse trabalho (PEREIRA et al., 2017), os autores investigaram a mistura modos Laguerre-Gauss (LG) de ordem radial nula e momento angular orbital (MAO) arbitrário. Observou-se o acoplamento, advindo da mistura não linear, entre os diferentes graus de liberdade destes modos.

Em seguida, no Capítulo 3, apresentamos o primeiro conjunto de resultados dessa dissertação. Extendemos a mistura de modos LG ao considerarmos modos incidentes de ordens radiais não nulas e discorremos sobre suas implicações. Analisamos também o surgimento de um vórtice e de ordens radiais no campo gerado a partir dessa mistura ao considerarmos feixes incidentes com carga topológica fracionária.

Posteriormente, no Capítulo 4, realizamos o processo inverso. Consideramos a mistura de feixes Hermite-Gauss e, especificando o feixe gerado como sendo um modo de outra base paraxial, buscamos a superposição incidente que gere tal feixe.

Por fim, no Capítulo 5, analisamos pela primeira vez a mistura de feixes paraxiais elípticos no contexto não linear aqui estudado. Consideramos modos Ince-Gauss (IG) com paridade definida e modos IG helicoidais, que carregam MAO. Partindo de uma abordagem numérica, determinamos a regra de seleção desse tipo de mistura e examinamos a transição entre a mistura de feixes de simetria cilíndrica (Laguerre-Gauss) e feixes de simetria cartesiana (Hermite-Gauss) ao alterarmos o parâmetro de excentricidade destes modos elípticos.

2 Modos ópticos e efeitos não lineares

Neste capítulo iremos introduzir os principais conceitos necessários para o entendimento do objeto de estudo dessa dissertação: a mistura não linear por duas ondas de feixes paraxiais. Com este objetivo, partiremos das Equações de Maxwell em condições específicas e demonstraremos o conjunto de feixes paraxiais que são utilizados ao longo deste trabalho, são eles: feixes Laguerre-Gauss (Seção 2.1.2.2), Hermite-Gauss (Seção 2.1.2.2) e Ince-Gauss (Seção 2.1.2.3). Em seguida, na Seção 2.2, iremos apresentar a equação da onda na matéria. Na Seção 2.3, discutiremos sobre os processos não lineares relevantes para este trabalho. Por fim, na Seção 2.4 discorreremos sobre a motivação desse trabalho.

2.1 Equação da Onda

No estudo da óptica, estamos basicamente interessados em saber como quatro quantidades se comportam e se relacionam, são elas o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, a indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, o deslocamento elétrico $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ e o campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. A teoria fundamental dos campos eletromagnéticos que descreve as relações entre estas quantidades é expressa na forma das Equações de Maxwell. No entanto, ao considerarmos os campos eletromagnéticos no vácuo, as quantidades $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ não estão presentes. Em futuras seções iremos considerar os campos eletromagnéticos na matéria e estudar o surgimento de efeitos não lineares, mas por agora, buscamos apenas definir os feixes utilizados ao longo deste trabalho. Dessa forma, iremos restringir nossa discussão aos fenômenos eletromagnéticos no vácuo e na ausência de fontes (cargas e correntes). Nestas condições, as Equações de Maxwell são escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde ε_0 é a permissividade elétrica e μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo.

Maxwell foi o primeiro que notou que estas equações possuem soluções na forma de ondas que se propagam (MAXWELL, 1864). Esta solução pode ser demonstrada tomando

o rotacional das Equações 2.3 e 2.4:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \left[-\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right], \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \left[\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]. \quad (2.6)$$

Trocando a ordem das derivadas do lado direito ds equações acima, temos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.8)$$

Substituindo as equações 2.4 e 2.3, respectivamente, nas equações acima,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Fazemos agora uso da identidade vetorial

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}] = \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}] - \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Dessa forma, podemos reescrever as equações 2.9 e 2.10 como

$$\nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.12)$$

$$\nabla[\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

porém, devido a ausência de fontes (Equações 2.1 e 2.2), os primeiros termos se anulam, restando

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.15)$$

que caracterizam equações da onda vetoriais para os campos eletromagnéticos \mathbf{E} e \mathbf{B} com velocidade $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Como \mathbf{E} e \mathbf{B} obedecem a equação da onda vetorial, cada componente de ambos campos obedecem uma equação escalar idêntica. Assim, por exemplo, E_x obedece a equação

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

Dessa forma, é possível resumir o comportamento de todas as componentes dos campos eletromagnéticos \mathbf{E} e \mathbf{B} através de uma única equação da onda escalar,

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

onde $U(\mathbf{r}, t)$ representa qualquer uma das componentes dos campos. Esta aproximação só é válida considerando efeitos de polarização desprezíveis, e um meio linear, isotrópico, homogêneo e não dispersivo (GOODMAN, 2005). Todas estas aproximações são válidas em nosso contexto.

2.1.1 Equação de Helmholtz

Vamos agora restringir nossa discussão para campos ondulatórios monocromáticos. Para uma onda monocromática, podemos expressar o campo escalar da seguinte forma:

$$U(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \cos(2\pi\omega t - \phi(\mathbf{r})) \quad (2.18)$$

onde $A(\mathbf{r})$ denota a amplitude da onda no ponto \mathbf{r} num tempo t e $\phi(\mathbf{r})$ a fase, enquanto ω é a frequência dessa luz. Uma forma mais conveniente de escrever esta equação é utilizando a notação complexa. Utilizando-se da identidade de Euler,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (2.19)$$

podemos escrever 2.18 como

$$U(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{u(\mathbf{r}) \exp(i2\pi\omega t)\} \quad (2.20)$$

onde $\text{Re}\{x\}$ significa tomar a parte real da quantidade complexa x , e $A(\mathbf{r})$ é a amplitude complexa, também chamada de fasor

$$u(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(i\phi(\mathbf{r})) \quad (2.21)$$

Se a perturbação $U(\mathbf{r}, t)$ representa uma onda óptica, ela deve satisfazer a equação da onda,

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.17)$$

Como separamos a parte temporal, temos que $u(\mathbf{r}, t)$ serve como uma descrição adequada da perturbação. Substituindo $u(\mathbf{r}, t)$ na equação da onda temos

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.22)$$

sendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, conhecido como número de onda, e λ é o comprimento de onda.

Esta equação diferencial descreve de forma independente do tempo uma perturbação ondulatória escalar e é conhecida como Equação de Helmholtz. Na próxima seção iremos discutir como, utilizando a aproximação paraxial, podemos obter soluções para a mesma.

2.1.2 Aproximação paraxial

A aproximação paraxial consiste em assumir que o envelope do campo varia lentamente transversalmente ao longo da sua propagação em z . Com isso, buscamos soluções da Equação de Helmholtz para campos $U(\mathbf{r})$ que podem ser escritos como

$$U(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{ikz}. \quad (2.23)$$

onde $u(\mathbf{r})$ varia lentamente transversalmente ao longo de z . Aplicando 2.23 na equação de Helmholtz (Eq. 2.22), temos:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (2.24)$$

Para que esta aproximação seja válida, é necessário que $u(\mathbf{r})$ varie pouco em relação a z na ordem do comprimento de onda, ou seja

$$\lambda \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \ll |u| \quad (2.25)$$

$$\lambda \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (2.26)$$

A segunda derivada de $u(\mathbf{r})$ em relação a z é, portanto, desprezível. A equação 2.24 se simplifica para a forma

$$\nabla_{\perp}^2 u(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.27)$$

onde ∇_{\perp}^2 denota o laplaciano transversal, que muda de acordo com o sistema de coordenadas utilizado. A equação 2.27 é conhecida como equação paraxial da onda e descreve uma onda que se propaga de forma altamente direcional ao longo do eixo z .

Dependendo do sistema de coordenadas utilizado para resolver a Equação 2.27, diferentes classes de soluções podem ser obtidas. Nas Seções 2.1.2.2, 2.1.2.2 e 2.1.2.3, iremos apresentar tais soluções para os sistemas de coordenadas retangular, cilíndrico e elíptico, respectivamente. Estas soluções compõem o conjunto de feixes utilizados ao longo deste trabalho.

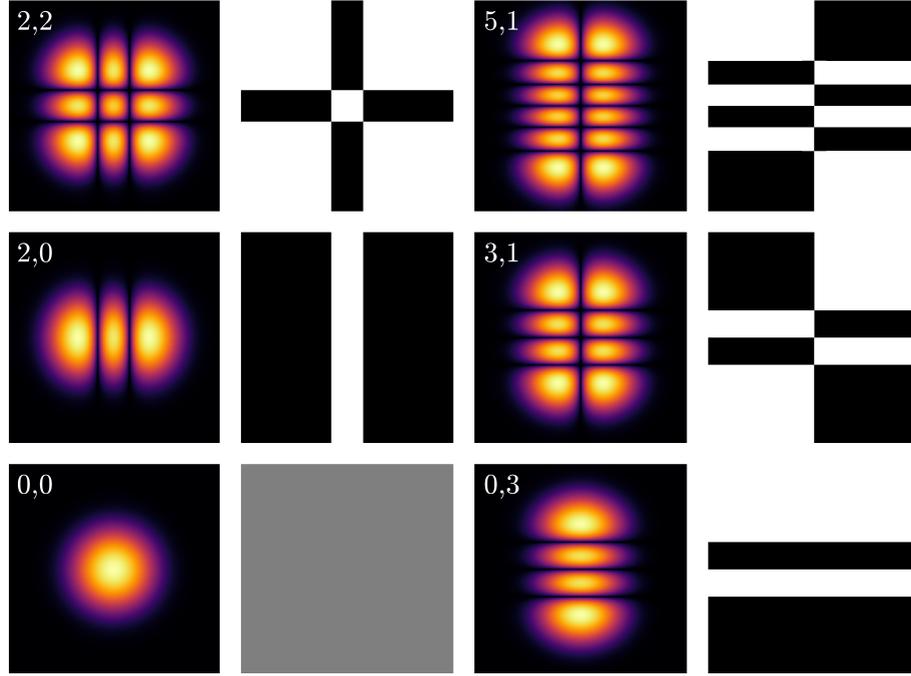
2.1.2.1 Modos Hermite-Gauss

A primeira classe de soluções que iremos apresentar são os Modos Hermite-Gauss(HG). Eles são obtidos a partir da solução da equação paraxial da onda (Eq. 2.27) em coordenadas retangulares (x, y) . Tais modos são expressos por:

$$\text{HG}_{mn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M_{m,n}}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \times e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{ik \left[\frac{x^2+y^2}{2R(z)} - \Psi_{HG}(z) \right]}, \quad (2.28)$$

onde $M_{m,n}$ é uma constante de normalização. O termo $\Psi_{HG}(z) = (m+n+1) \arctan(z/z_R)$ é a fase de Gouy, que é uma fase que o feixe adquire ao longo de sua propagação e depende

Figura 1 – Distribuição de intensidade para modos Hermite-Gauss junto da sua distribuição de fase. Aqui, os índices são da forma (m, n) .



do que chamamos de ordem do modo, N , que para o caso de modos HG é da forma $N_{\text{HG}} = m + n$. $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z_R^2/z^2}$ é o diâmetro do feixe. $R(z) = z(1 + z_R^2/z^2)$ é o raio de curvatura do feixe. Aqui, w_0 representa a cintura do feixe, ou seja, seu diâmetro mínimo. Por fim, z_R é o comprimento de Rayleigh, que é a distância em que a área da seção transversal do feixe dobra.

A Figura 1 mostra a distribuição de intensidade transversal de um conjunto de modos HG para diferentes índices m e n .

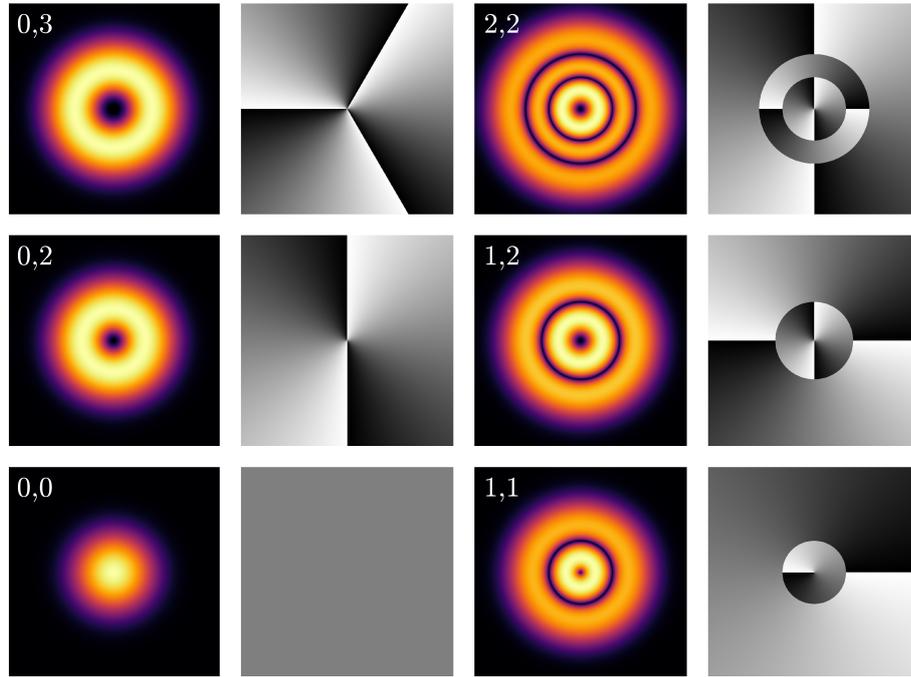
2.1.2.2 Modos Laguerre-Gauss

Apresentados por Allen *et. al.* (ALLEN et al., 1992), outra classe de soluções da equação paraxial pode ser obtida ao utilizarmos coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) para resolvê-la. Tais soluções levam o nome de modos Laguerre-Gauss(LG), cuja expressão é dada por

$$\text{LG}_{pl}(r, \phi, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M_{p,l}}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r^2}{w^2(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - \Psi_{LG}(z) + l\phi \right]} \quad (2.29)$$

aqui, $M_{p,l}$ é uma constante de normalização, $w(z)$ e $R(z)$ são definidos como anteriormente. $\Psi_{LG} = (2p + |l|) \arctan(z/z_R)$ é a fase de Gouy para modos LG. A ordem destes modos é dada por $N = 2p + |l|$. Como a fase de Gouy depende dos índices do modo, é de se esperar que uma superposição de modos LG mude sua distribuição de intensidade transversal ao longo da propagação, visto que cada modo carrega uma fase de Gouy diferente, que muda ao longo da propagação, até que fique estacionária (para $z \gg z_r$). Note que estes modos

Figura 2 – Distribuição de intensidade para modos Laguerre-Gauss junto da sua distribuição de fase. Aqui, os índices são da forma (p, l)

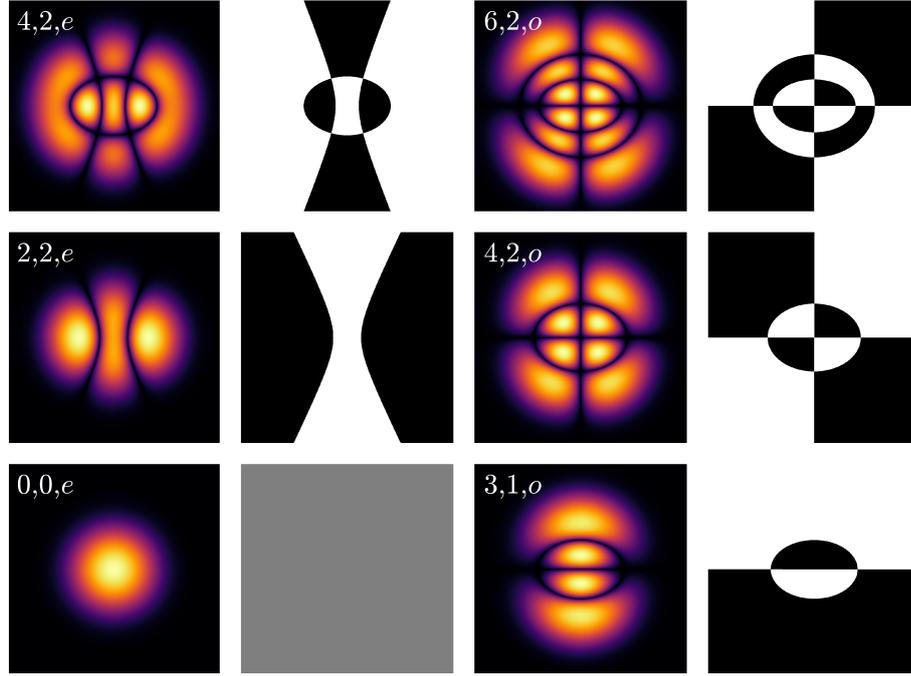


carregam uma fase que depende da coordenada azimutal ϕ e do índice l . Este termo de fase $\exp(il\phi)$ é responsável por criar uma frente de onda helicoidal, cujo sentido de rotação é dado pelo sinal de l . Em um caminho orientado que engloba o centro, a fase varia de $\pm 2\pi l$ dependendo do sentido de rotação. Exatamente em seu centro, a fase é singular, ou seja, não podemos associar um valor a ela, visto que é indefinido. Com isso dizemos que os feixes Laguerre-Gauss carregam singularidades de fase, com carga topológica l , que está associada à quantidade de momento angular orbital (MAO) que o feixe carrega (ALLEN et al., 1992). Por outro lado, o índice p corresponde às ordens radiais do feixe e está associada ao número de anéis no padrão de intensidade transversal, como pode ser visto na Figura 2. Após serem apresentados por Allen *et. al.* (ALLEN et al., 1992), os feixes Laguerre-Gauss têm sido de grande interesse da comunidade científica e algumas aplicações importantes podem ser citadas, como sua utilização em pinças ópticas (HE et al., 1995; SIMPSON; HANNA, 2009; PADGETT; BOWMAN, 2011), transmissão de informação (GIBSON et al., 2004; TAMBURINI et al., 2012) e protocolos quânticos (AOLITA; WALBORN, 2007; D'AMBROSIO et al., 2012), por exemplo. Alguns exemplos de modos LG podem ser vistos na Figura 2.

2.1.2.3 Modos Ince-Gauss

Uma terceira família de feixes paraxiais foi apresentada por Bandres *et. al.* (BANDRES; GUTIÉRREZ-VEGA, 2004), que demonstrou que a equação paraxial da onda também é separável num sistema de coordenadas elíptico, resultando nos modos Ince-Gauss (IG). Observou-se que os modos Laguerre-Gauss com paridade definida e Hermite-Gauss são

Figura 3 – Distribuição de intensidade para modos Ince-Gauss junto da sua distribuição de fase. Aqui, os índices são (p, m, σ) , onde $\sigma = e, o$ é a paridade do modo.



casos particulares de modos Ince-Gauss, em que este último, além de ter dois índices que o determinam (p, m) , possui um novo parâmetro, a excentricidade ϵ . Variando este parâmetro, podemos recuperar os modos LG ou HG como casos particulares, sendo $\epsilon \rightarrow 0$ recuperando os modos Laguerre-Gauss, e $\epsilon \rightarrow \infty$ recuperando os modos Hermite-Gauss. Os modos Ince-Gauss podem ser escritos como

$$\text{IG}_{pm}^e(\xi, \eta, \epsilon) = \frac{C_{p,m}w_0}{w(z)} C_p^m(i\xi, \epsilon) C_p^m(\eta, \epsilon) \exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \times \exp i \left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \psi_{IG}(z) \right], \quad (2.30)$$

$$\text{IG}_{pm}^o(\xi, \eta, \epsilon) = \frac{S_{p,m}w_0}{w(z)} S_p^m(i\xi, \epsilon) S_p^m(\eta, \epsilon) \exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \times \exp i \left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \psi_{IG}(z) \right], \quad (2.31)$$

onde p é a ordem do modo e m está associado à carga topológica do feixe. Aqui, separamos os modos IG em duas paridades, par (IG_{pm}^e) e ímpar (IG_{pm}^o). $C_{p,m}$ e $S_{p,m}$ são constantes de normalização. $C_p^m(\cdot, \epsilon)$ e $S_p^m(\cdot, \epsilon)$ correspondem aos polinômios de Ince par e ímpar, respectivamente, de ordem p e grau m . Alguns exemplos de modos Ince-Gauss são mostrados na Figura 3

2.2 Equação da onda na matéria

Os resultados desta dissertação devem-se primeiramente à interação da luz com a matéria, que dá surgimento a efeitos não lineares. Portanto, iremos mostrar nesta seção como estes efeitos surgem. Primeiro, devemos fazer algumas modificações nas Equações de Maxwell, introduzidas na Seção 2.1, pois agora estamos considerando a presença, dentro

do material, do deslocamento elétrico $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ e do campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. As equações tomam a forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho, \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Consideramos aqui um material não magnético, portanto $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. No entanto, por estarmos tratando de um material não linear, temos que $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, de forma que \mathbf{P} depende não linearmente da amplitude de \mathbf{E} . Podemos agora fazer um procedimento similar ao da Seção 2.1 e chegarmos à uma equação de onda para os campos eletromagnéticos na matéria. Para o campo elétrico, temos

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.36)$$

Note que obtivemos uma equação da onda similar a Eq. 2.14, sendo que agora, em vez do caso homogêneo, temos um termo de fonte associado ao vetor \mathbf{P} . A partir de agora, por simplicidade, iremos considerar o vetor polarização e o campo elétrico como quantidades escalares. Isto incorre em assumir um meio material sem perda, dispersão, e que a polarização responde com o valor instantâneo da amplitude do campo elétrico (BOYD, 1992). Dessa forma, podemos expandir a resposta da polarização com o campo elétrico em série de potência da seguinte forma

$$P(t) = \varepsilon_0 \left(\overbrace{\chi^{(1)} E(t)}^{\text{Óptica linear}} + \overbrace{\chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots}^{\text{Óptica Não-linear}} \right) \quad (2.37)$$

$$= P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots \quad (2.38)$$

Chamamos a quantidade $\chi^{(n)}$ de susceptibilidade óptica de ordem n e ela depende das propriedades do material em questão. Diversos fenômenos ópticos estão associados à presença de diferentes ordens dessa susceptibilidade nos materiais. Estivéssemos considerando apenas óptica linear, teríamos que $\chi^{(n)} = 0$ para $n \geq 2$, limitando a polarização a respostas lineares com a amplitude do campo aplicado. Ao considerarmos susceptibilidades ópticas de ordens mais altas ($n \geq 2$), permitimos o surgimento de diversos fenômenos que são o objeto de estudo da óptica não linear. Associados à presença de $\chi^{(2)}$ num material estão efeitos como geração de segundo harmônico, geração soma-frequência, oscilação paramétrica, para citar alguns. A presença de contribuição de terceira ordem da susceptibilidade óptica dá surgimento a efeitos como geração de terceiro harmônico, efeito Kerr e

espalhamento Raman estimulado (BOYD, 1992). Ao longo do presente trabalho, estamos apenas interessados nas respostas referentes à contribuição não linear da susceptibilidade óptica de segunda ordem $\chi^{(2)}$.

2.3 Processos não lineares de segunda ordem

Vamos aqui considerar E como sendo a superposição de dois campos monocromáticos de frequências ω_1 e ω_2

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + \text{c.c.} \quad (2.39)$$

onde c.c. denota o complexo conjugado do restante da equação para garantirmos que $E(t)$ seja uma quantidade real. Assumindo um material com contribuição de segunda ordem da susceptibilidade óptica, $\chi^{(2)}$, temos uma contribuição não linear da polarização que é da forma

$$P^{(2)}(t) = \varepsilon_0 E^2(t). \quad (2.40)$$

Calculando $E^2(t)$ da Eq. 2.39, temos que a polarização não linear de segunda ordem é dada por

$$P^{(2)}(t) = \varepsilon_0 \chi^{(2)} \left(E_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + E_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + 2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2E_1 E_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \text{c.c.} \right) + 2\varepsilon_0 \chi^{(2)} (E_1 E_1^* + E_2 E_2^*). \quad (2.41)$$

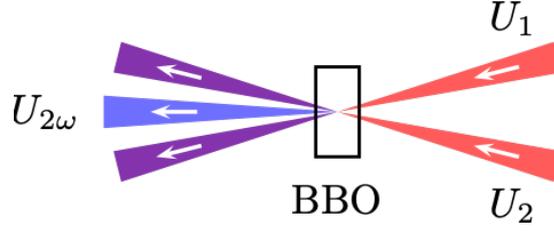
Aqui podemos identificar diversos efeitos não lineares, como geração de soma-frequência ($\omega_1 + \omega_2$), geração de segundo harmônico ($2\omega_i$), geração de diferença de frequência ($\omega_1 - \omega_2$) e retificação óptica ($\omega_i = 0$).

2.4 Mistura não-linear por duas ondas de feixes contendo vórtices ópticos

Nesta seção apresentamos a motivação inicial dos trabalhos que serão apresentados nos capítulos posteriores. Os resultados que se seguem podem ser consultados em (PEREIRA et al., 2017). Os autores consideraram a mistura não linear por duas ondas de feixes contendo vórtices ópticos. Os feixes considerados foram os modos Laguerre-Gauss, aqui apresentados na Seção 2.1.2.2, com carga topológica l inteira arbitrária e modos radiais p nulos. Observou-se a conservação da carga topológica dos feixes incidentes e o surgimento de ordens radiais devido à mistura de vórtices contendo cargas de sinais opostos.

Iniciemos definindo os campos de interesse U_1 e U_2 , como os campos incidentes que se cruzam num cristal com resposta não linear de segunda ordem, e $U_{2\omega}$, o campo

Figura 4 – Diagrama que ilustra o processo de mistura não linear por duas ondas.



no segundo harmônico gerado através da mistura. É possível expandí-los numa base ortornormal u_{pl} arbitrária da forma

$$\vec{E}_i = U_i e^{i(k_i z - \omega_i t)} \hat{e}_i, \quad (2.42)$$

$$U_i = \sqrt{\frac{\omega_i}{n_i}} \sum_{p,l} A_{pl}^i u_{pl}^i(\vec{r}, z), \quad (2.43)$$

onde o índice i indica $i = 1, 2$ para os feixes incidentes e $i = 2\omega$ para o feixe no segundo harmônico gerado a partir da mistura. Temos então dentro do cristal, os campos U_i obedecem, na aproximação paraxial, um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 U_1 + 2ik_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} &= -\frac{\chi\omega^2}{c^2} U_{2\omega} U_2^*, \\ \nabla_{\perp}^2 U_2 + 2ik_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} &= -\frac{\chi\omega^2}{c^2} U_{2\omega} U_1^*, \\ \nabla_{\perp}^2 U_{2\omega} + 2ik_{2\omega} \frac{\partial U_{2\omega}}{\partial z} &= -4\frac{\chi\omega^2}{c^2} U_1 U_2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

ao substituirmos a expansão dos campos U_i (Eq. 2.42) nas equações 2.44, temos que as amplitudes da expansão seguem o conjunto de equações acopladas

$$\begin{aligned} \frac{dA_{pl}^1}{dz} &= ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{p'p''}^{l'l''} A_{p'l'}^{2\omega} (A_{p''l''}^2)^*, \\ \frac{dA_{pl}^2}{dz} &= ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{p'p''}^{l'l''} A_{p'l'}^{2\omega} (A_{p''l''}^1)^*, \\ \frac{dA_{pl}^{2\omega}}{dz} &= ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} (\Lambda_{pp'}^{l'l''})^* A_{p'l'}^1 A_{p''l''}^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Onde introduzimos os parâmetros

$$g = \frac{\chi}{2c} \sqrt{\frac{2\omega^3}{n_1 n_2 n_{2\omega}}} R_{000}^{000}, \quad (2.46)$$

$$\Lambda_{pp'}^{l'l''} = \frac{R_{pp'}^{l'l''}}{R_{000}^{000}}, \quad (2.47)$$

$$R_{pp'}^{l'l''} = \int u_{pl}^{2\omega} (u_{p'l'}^1)^* (u_{p''l''}^2)^* d^2\vec{r}, \quad (2.48)$$

Aqui, $R_{pp'}^{l'l''}$ é chamada de integral de recobrimento (*overlap*) de três modos, e $\Lambda_{pp'}^{l'l''}$ de integral de recobrimento *normalizada*. Até então a escolha da base ortogonal u_{pl} foi

considerada arbitrária. No presente trabalho, os autores optaram por trabalhar com a base Laguerre-Gauss, restringindo-se aos modos de ordens radiais nulas ($p' = p'' = 0$). As amplitudes dos campos da decomposição da Eq. 2.43 são proporcionais à integral de recobrimento e, com isso, ela possui um papel central nesse tipo de mistura não linear. A partir da mistura de U_1 e U_2 , a integral de recobrimento seleciona os modos que surgirão campo do segundo harmônico, $U_{2\omega}$. Em geral, a mistura dos campos gera uma superposição de modos neste campo. Os autores calcularam analiticamente esta integral considerando modos LG de ordens radiais nulas, e, para misturas feixes com vórtices que co-rotacionam ($l' \cdot l'' \geq 0$), temos

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{\xi_h^{|l'|} \xi_v^{|l''|} (|l'| + |l''|)!}{|l'|! |l''|!}}, \quad (2.49)$$

para $p = 0$ e zero para os outros casos. Aqui, $\xi_\mu = (w_{2\omega}/w_\mu)^2$ foi utilizado para simplificação dos termos. Observa-se que $\delta_{l,l'+l''}$ age como um filtro, selecionando apenas o modo que obedece à conservação do momento angular orbital ($l = l' + l''$) e nenhuma ordem radial adicional é criada, já que $\Lambda_{p00}^{l'l''}$ se anula para $p > 0$. Um fenômeno mais interessante surge quando consideramos feixes incidentes com cargas topológicas de sinais opostos ($l' \cdot l'' < 0$)

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \frac{(-1)^P}{(P-p)!} \sqrt{\frac{\xi_h^{|l'|} \xi_v^{|l''|} |l'|! |l''|!}{p!(p + |l' + l''|)!}}, \quad (2.50)$$

para $p \leq P$ e zero para os outros casos. Neste caso, $P = \min(|l'|, |l''|)$. Ou seja, aqui, ordens radiais podem surgir no campo $U_{2\omega}$ a partir a mistura de campos de ordens radiais nulas e vórtices que contra-rotacionam. Este é um interessante resultado que mostra o acoplamento entre diferentes graus de liberdade (angular l e radial p) que surge devido à mistura não linear.

Nos próximos capítulos mostraremos resultados para o estudo desse tipo de mistura, generalizando para modos LG de ordens radiais não nulas e l fracionário (Capítulo 3). No Capítulo 4, utilizaremos como base os modos Hermite-Gauss e feixes de entrada que são uma superposição destes modos. Com isso, faremos o processo inverso: especificando $U_{2\omega}$, quais seriam os modos dos feixes de entrada? No Capítulo 5 tomaremos como foco o estudo dessa mistura não linear considerando modos Ince-Gauss como feixes de entrada.

3 Mistura não-linear de feixes Laguerre-Gauss

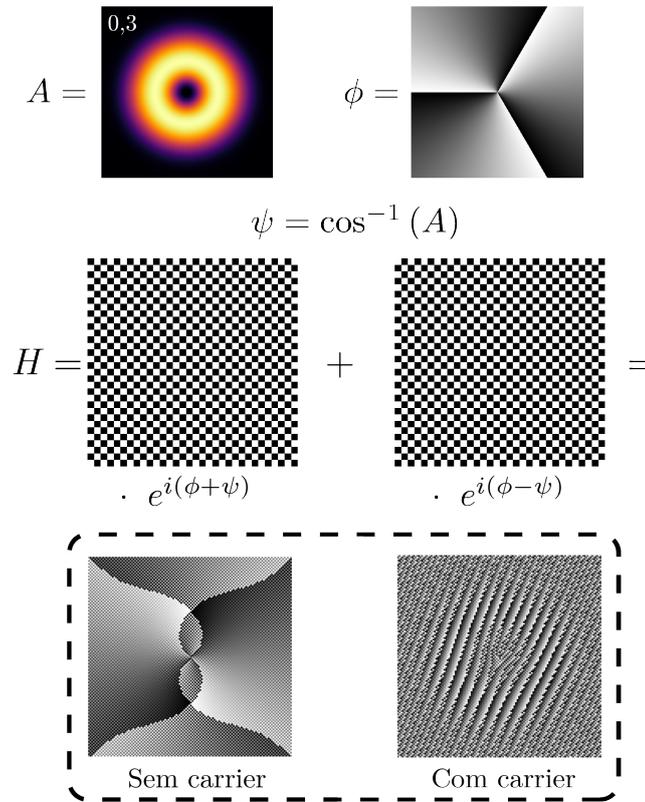
Neste primeiro capítulo de resultados desta dissertação, apresentamos uma generalização da mistura não linear por duas ondas de modos Laguerre-Gauss. Na seção 3.1 introduzimos o estudo da mistura não linear de modos LG contendo carga topológica inteira arbitrária e ordens radiais p não nulas, discutindo suas implicações. Na seção 3.2 apresentamos os resultados para a mistura não linear de modos LG contendo carga topológica fracionária, e, assim, realizando uma análise do nascimento do vórtice e de ordens radiais através do processo não linear já apresentado anteriormente.

3.1 Mistura não linear de modos Laguerre-Gauss de ordem radial não nula

Nos capítulos anteriores, apresentamos a base teórica necessária para compreendermos resultados dessa dissertação. Na seção 2.4 introduzimos o conceito de mistura não linear por duas ondas de feixes Laguerre-Gauss contendo vórtices ópticos e ordens radiais nulas (PEREIRA et al., 2017). Aqui, faremos uma extensão deste trabalho, levando em conta ordens radiais não nulas e suas implicações. De forma geral, nas futuras seções, especificando os modos de entrada, buscamos encontrar uma regra de seleção que nos diz como que o resultado da mistura não linear depende desses modos de entrada. Ou seja, devemos resolver a integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}$ considerando certos modos iniciais, que neste caso são ($U_1 = \text{LG}_{p'l'}$ e $U_2 = \text{LG}_{p'l''}$). Tendo obtido o campo gerado $U_{2\omega}$, propagamos até a zona de Fraunhofer, obtendo assim a sua distribuição de intensidade no campo distante.

Para nossos resultados experimentais apresentados nessa dissertação, utilizamos o arranjo experimental da Figura 5. Utilizamos um *laser* de Ti:Sapphire pulsado com comprimento de onda centrado em 780 nm. Utilizamos a combinação de uma placa de meia onda (HWP) e divisor de feixes (*beam splitter*) polarizado (PBS) de forma a controlar a intensidade do feixe que ilumina o modulador espacial da luz (sigla MEL, ou SLM, em inglês), que controla apenas a fase. Lentes L1 e L2 de comprimentos focais $f_{L1} = 30$ mm e $f_{L2} = 100$ mm, respectivamente, funcionam como um telescópio, expandindo a largura do feixe gaussiano inicial com o intuito iluminar uma área maior no MEL. Ao longo deste trabalho, utilizamos luz estruturada e, para estruturá-la, ou seja, moldá-la a ter certas propriedades (principalmente amplitude e fase), utilizamos o MEL. Os modos apresentados na introdução são definidos por uma distribuição específica de amplitude e fase, como pode ser visto nas equações 2.29, 2.28, 2.30 e 2.31. Existem diversos tipos de moduladores

Figura 6 – Algoritmo para gerar holograma utilizando o método da fase dupla (HSUEH; SAWCHUK, 1978)



problema, adiciona-se uma fase linear ao campo desejado da seguinte forma

$$\underbrace{U}_{\text{campo codificado no holograma}} = \underbrace{Ae^{i\phi}}_{\text{campo desejado}} \cdot \underbrace{e^{i(\alpha x + \beta y)}}_{\text{fase linear (carrier)}}, \quad (3.2)$$

com α e β sendo números a serem determinados experimentalmente. Este fator de fase fará com que o campo desejado apareça na primeira ordem de difração do feixe refletido do MEL. Utilizando um filtro espacial (*pinhole*) podemos bloquear a luz indesejada.

Utilizando o método de fase dupla (HSUEH; SAWCHUK, 1978), aplicamos um holograma de fase no MEL que modula a amplitude e fase de uma superposição dos feixes iniciais U_1 e U_2 com uma diferença de fase linear entre eles, construindo, assim, dois feixes iniciais que se separam ao longo da propagação por terem vetores de onda diferentes. Esta é uma característica importante de nosso *setup* que o distingue de *setups* anteriores propostos para realização experimental dessa mistura não linear (ROGER et al., 2013). Como vimos anteriormente, é necessário que haja o casamento de fase entre os feixes incidentes para que ocorra a mistura não linear por duas ondas e, por usarmos um *laser* pulsado, isto implica que os pulsos de cada feixe devem chegar em fase na face do cristal. A solução mais comum para gerar dois feixes a partir de um único bombeamento *laser* é separá-los usando um divisor de feixes, iluminando separadamente duas janelas no MEL, e fazendo o ajuste dos pulsos utilizando um suporte móvel com espelhos em um dos

feixes. Aqui, eliminamos esta necessidade utilizando apenas uma iluminação no MEL e gerando uma superposição dos dois feixes, que se separam ao longo da propagação, com isto, garantimos que o casamento dos pulsos de forma mais simples. Após o MEL, temos uma lente L3 ($f_{L3} = 1000$ mm), que focaliza o feixe refletido, para que, com o auxílio do filtro espacial PH, possamos selecionar a ordem de difração que contém U_1 e U_2 . A lente L4 ($f_{L4} = 1000$ mm) focaliza ambos feixes no cristal não linear de Borato de Bário (BBO) do tipo II, com dimensões 10x10x3 mm. Utilizamos uma placa de meia onda (HWP) para rotacionar a polarização dos feixes incidentes otimizando-os para maior eficiência no processo da mistura de ondas. Após o cristal, temos um filtro espectral que permite apenas a passagem do feixe no segundo harmônico. No foco da lente L5 ($f_{L5} = 300$ mm) capturamos a distribuição de intensidade na zona de Fraunhofer com um detector (CCD).

Agora, vamos analisar a regra de seleção advinda da integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{ll''}$ para dois feixes LG contendo cargas topológicas l' e l'' e ordens radiais não nulas p' e p'' .

A integral de overlap normalizada para vórtices que co-rotacionam ($l' \cdot l'' \geq 0$) e ordens radiais p' e p'' , respectivamente, interagindo dentro do cristal não linear é

$$\begin{aligned} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} &= \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_h^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_v^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p''+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \\ &\times \frac{(-1)^{m+n}(m+n)! (|l'+l''|+m+n)!}{m!n!(p'-m)!(p''-n)! (|l'|+m)! (|l''|+n)! (m+n-p)!}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

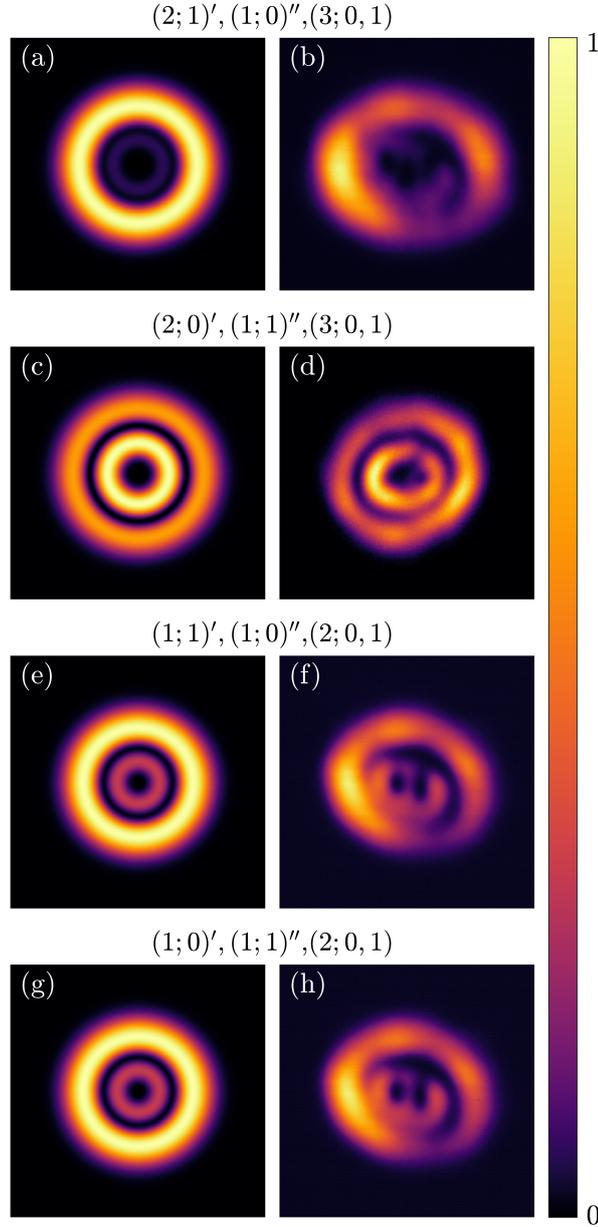
para $p \leq p'+p''$ e zero caso contrário. Aqui, $\xi = (w_{2\omega}/w_j)^2$. Podemos inferir que, para feixes com a mesma helicidade, o feixe $U_{2\omega}$ no segundo harmônico vai obedecer à conservação de momento angular orbital ($l = l' + l''$) e gerar um número de anéis até a soma das ordens radiais dos feixes incidentes (p' e p''). Naturalmente, se os feixes incidentes tiverem $p' = p'' = 0$, ordens radiais não são criadas com a mistura.

Por outro lado, se vórtices que contra-rotacionam ($l' \cdot l'' < 0$) forem utilizados como feixes incidentes, a integral de *overlap* normalizada toma a forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} &= \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_h^{\frac{|l'|}{2}+m} \xi_v^{\frac{|l''|}{2}+n} \sqrt{\frac{p'!p''!(p'+|l'|)!(p''+|l''|)!}{p!(p+|l'+l''|)!}} \\ &\times \frac{(-1)^{m+n+P}(P+m+n)! (|l'+l''|+P+m+n)!}{m!n!(p'-m)!(p''-n)! (|l'|+m)! (|l''|+n)! (P+m+n-p)!}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

para $p \leq P + p' + p''$ e zero caso contrário. Neste caso, $P = \min(|l'|, |l''|)$. Agora, para feixes com helicidades opostas, modos radiais p são gerados a depender do valor das cargas topológicas dos feixes incidentes. Mais especificamente, são geradas ordens radiais até a soma do valor mínimo entre $|l'|$ e $|l''|$ e as ordens radiais dos feixes incidentes (p', p''). É interessante notar que o número de anéis na zona de Fraunhofer depende dos índices radiais dos feixes incidentes. Se $p' = p'' = 0$, então devemos observar um P anéis adicionais,

Figura 7 – Distribuição de intensidade teórica (esquerda) e experimental (direita) na zona de Fraunhofer para vórtices que co-rotacionam.



como reportado em (PEREIRA et al., 2017). No entanto, uma análise mais cuidadosa deve ser feita ao considerarmos ordens radiais não nulas.

Analisando as regras de seleção advinda da integral de *overlap* normalizada descrita pelas Equações 3.3 e 3.4, é claro que o número de anéis adicionais, na zona de Fraunhofer, do feixe no segundo harmônico $U_{2\omega}$ é diretamente dependente das ordens radiais p' e p'' também. Mostramos nas Figuras 7 e 8 as distribuições de intensidade teóricas e experimentais para as misturas não linear de dois modos LG U_1 e U_2 , com índices $(l'; p)'$ e $(l''; p'')''$, respectivamente. Os últimos índices $(l; p)$ indicam a superposição gerada no campo $U_{2\omega}$. Figura 7 corresponde aos resultados para mistura feixes LG com vórtices que co-rotacionam ($l' \cdot l'' \geq 0$). Resultados teóricos são mostrados na primeira coluna, e, na

segunda coluna, os resultados experimentais. Para os resultados teóricos, utilizamos a Equação 3.3 para calcularmos a superposição do campo gerado $U_{2\omega}$, propagamos até a zona de Fraunhofer e obtivemos sua distribuição de intensidade. Utilizamos aqui ordens radiais não nulas nos feixes incidentes. Comparando as Figuras 7 (a,b) e (c,d), observa-se que, mesmo que a superposição gerada seja contenha os mesmos modos ($l = 3, p = 0, 1$), os padrões de intensidade de campo distante são diferentes. Neste caso, temos $l' \neq l''$ e trocamos apenas o valor de p' por p'' , obtendo dois padrões de intensidade diferentes, com a mesma superposição de modos. Nas Figuras 7 (e,f) e (g,h), realizamos a mesma troca de p' por p'' , mas neste caso $l' = l''$ e obtivemos padrões de intensidade são iguais. Isto se deve ao fato de que, ao realizarmos esta troca com $l' \neq l''$, embora tenhamos a mesma superposição de modos, o termo interno aos somatórios da Equação 3.3 atribui pesos diferentes aos modos, enquanto no caso $l' = l''$, estes pesos são iguais.

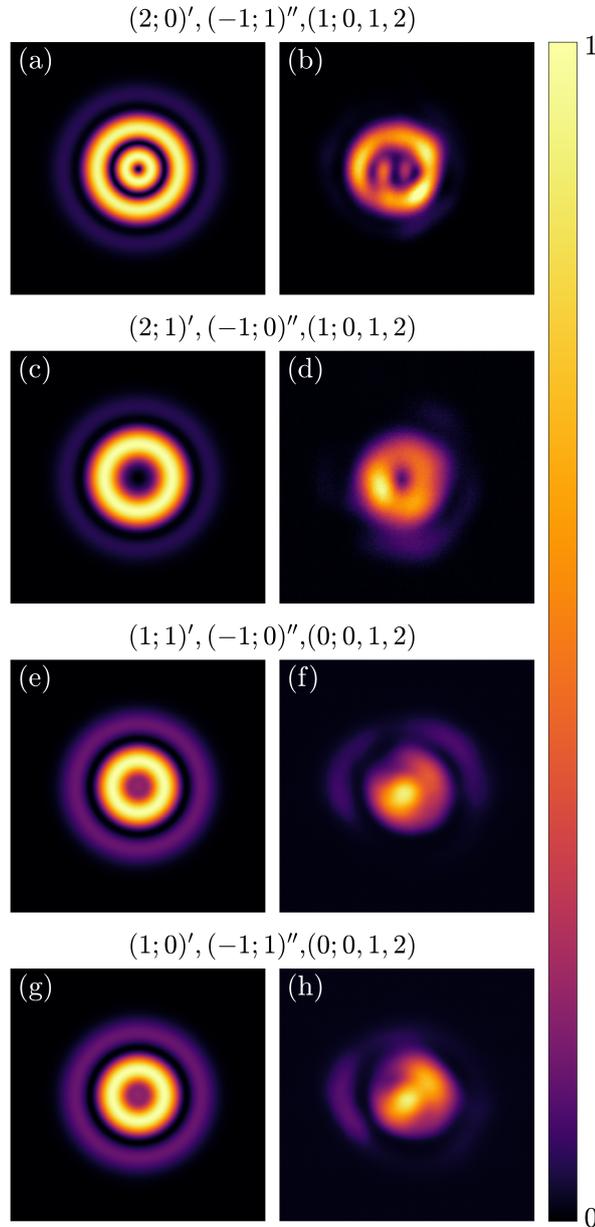
A Figura 8 corresponde aos resultados para mistura de vórtices que contra-rotacionam ($l' \cdot l'' < 0$), onde $p \leq P + p' + p''$. Novamente, os resultados teóricos e experimentais são mostrados nas colunas esquerda e direita, respectivamente, seguindo a notação $(l'; p)'$, $(l''; p)''$, $(l; p)$ denotando os índices dos feixes U_1, U_2 e $U_{2\omega}$, respectivamente. Para mistura de vórtices que contra-rotacionam, ordens radiais adicionais são geradas além da soma das ordens dos feixes incidentes. Para Figura 8 (a,b), temos que a mistura $(2; 0)'$ e $(-1; 1)''$ gera uma superposição de modos radiais $p \leq 2$, onde esperaríamos 2 anéis (além do anel central da carga topológica), e é observa-se neste caso. Por outro lado, ao trocarmos p' por p'' , o número de anéis decresce. Como no caso para vórtices co-rotacionando, esta troca $p' \leftrightarrow p''$ com $l' \neq l''$ atribui pesos diferentes $\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}$ aos modos da mesma superposição. Isto significa que cada feixe adquire uma fase diferente ao longo da propagação, onde alguns anéis podem ser aniquilados. Para o caso em que $l' = l''$ isto não acontece, já que a distribuição de pesos entre os modos é igual.

Os resultados desse trabalho são úteis para um melhor entendimento da criação de mais alta ordens radiais no processo de mistura por duas ondas. O controle preciso da superposição dos campos é um requerimento importante para aplicações tais como medições de momento angular orbital, pinças ópticas e protocolos de comunicação, por exemplo.

3.2 Mistura não linear de modos Laguerre-Gauss com carga fracionária

Até então apresentamos os feixes Laguerre-Gauss e mostramos que eles possuem um termo de fase azimutal $\exp(il\phi)$, responsável pela carga topológica l , considerando possíveis apenas valores inteiros de l . Berry *et al.* (BERRY, 2004) generalizou, teoricamente, esta noção de carga topológica para valores de l reais. Ele mostrou o surgimento de vórtices

Figura 8 – Distribuição de intensidade teórica (esquerda) e experimental (direita) na zona de Fraunhofer para vórtices que contra-rotacionam.

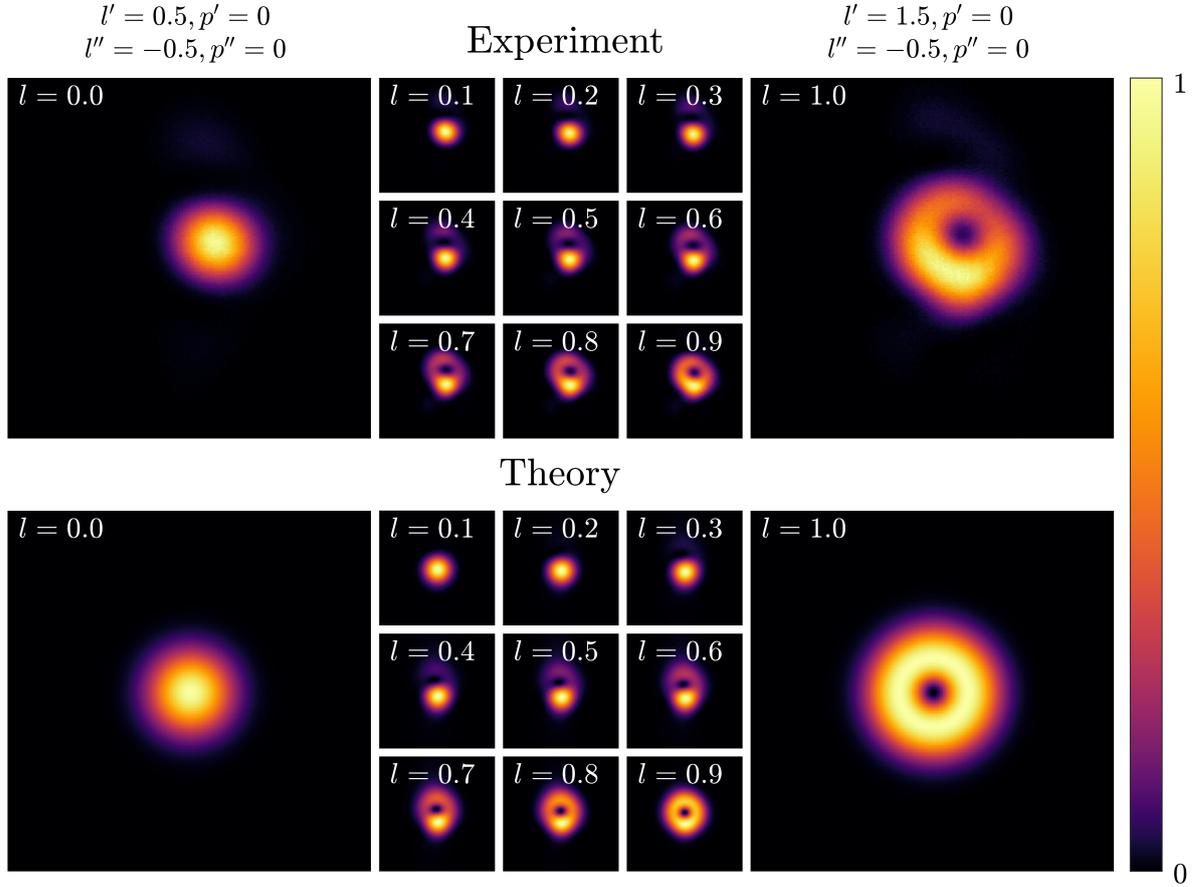


se dá quando o valor da carga topológica passa por valores semi-inteiros. Aqui, estendemos o estudo até então apresentado da mistura não linear de feixes LG para valores de carga fracionários. Com isso, almejamos mostrar o surgimento do vórtice e de ordens radiais no processo de mistura não linear por duas ondas.

Não analisamos aqui o caso em que os vórtices co-rotacionam ($l' \cdot l'' \geq 0$), pois o surgimento das ordens radiais adicionais p é independente das cargas topológicas l' e l'' , e dependem apenas das ordens radiais dos feixes incidentes p' e p'' , portanto nenhum efeito interessante surge ao considerarmos l' e l'' fracionários.

Para vórtices que contra-rotacionam ($l' \cdot l'' < 0$), a mistura não linear de feixes

Figura 9 – Distribuições de intensidade teórica e experimental na zona de Fraunhofer mostrando passo a passo o surgimento de um vórtice.



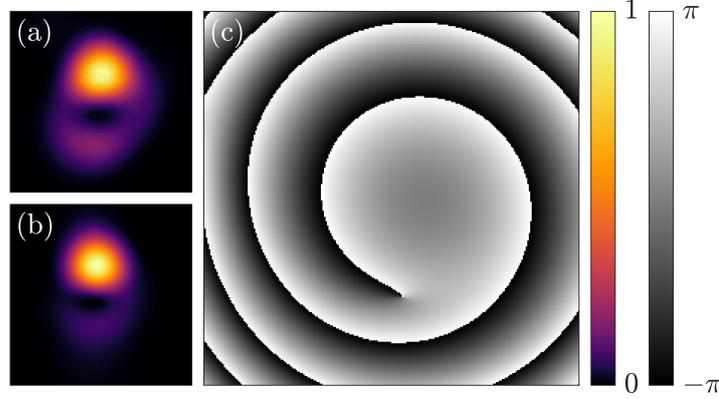
LG carregando cargas fracionárias l', l'' , ordens radiais p', p'' , segue uma regra de seleção similar ao caso para l', l'' inteiros

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll''} = \delta_{l, l'+l''} \sum_{m=0}^{p'} \sum_{n=0}^{p''} \xi_h^{\lfloor l' \rfloor + m} \xi_v^{\lfloor l'' \rfloor + n} \sqrt{\frac{p'! p''! (p' + |l'|)! (p'' + |l''|)!}{p! (p + |l' + l''|)!}} \times \frac{(-1)^{m+n+\lfloor P \rfloor} (\lfloor P \rfloor + m + n)! (|l' + l''| + \lfloor P \rfloor + m + n)!}{m! n! (p' - m)! (p'' - n)! (|l'| + m)! (|l''| + n)! (\lfloor P \rfloor + m + n - p)!}, \quad (3.5)$$

para $p \leq \lfloor P \rfloor + p' + p''$ e zero caso contrário. Aqui, nota-se que a função piso $\lfloor \cdot \rfloor$ atua sobre P .

O nascimento do vórtice a partir da mistura não linear por duas ondas pode ser observado quando a carga topológica de um dos feixes é acrescida suavemente. Em nosso caso, utilizamos incrementos em l' de $\Delta l' = 0.1$. Iniciando de uma mistura onde os feixes carregam carga topológica $l' = 0.5$ e $l'' = -0.5$, respectivamente. Inicialmente, o campo gerado $U_{2\omega}$ não carrega MAO já que, devido a conservação da carga topológica, $l = l' + l'' = 0$. Assim que incrementamos l' , observa-se a partir da Equação 3.5 e corroborada com os resultados experimentais, que o feixe resultante $U_{2\omega}$ já adquire carga topológica inteira. A Figura 9 mostra resultados teóricos e experimentais deste processo.

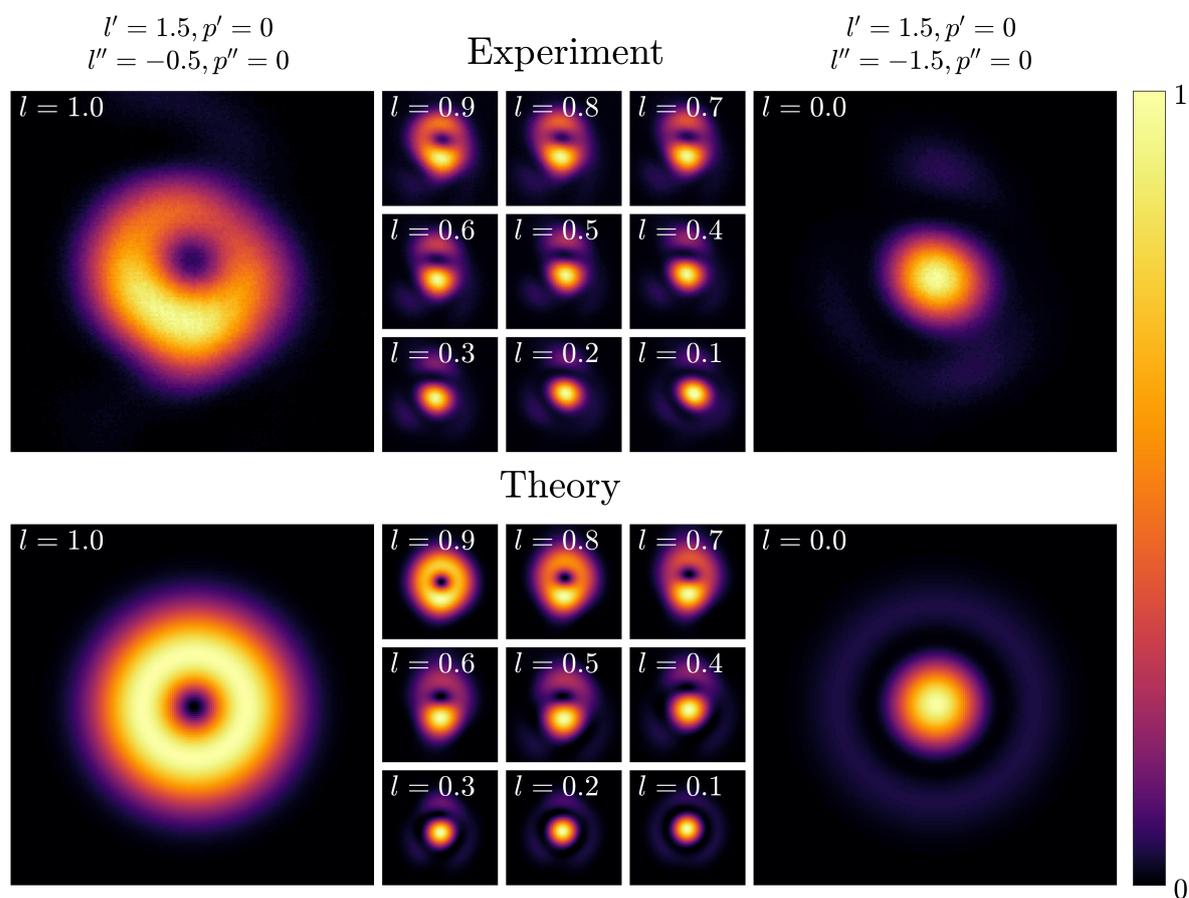
Figura 10 – Distribuição de intensidade (a) experimental, (b) teórica e padrão de fase (c) referente à Fig. 11 para $l = 0.4$, indicando a presença de carga topológica líquida inteira antes de l semi-inteiro.



Durante o acrescimento da carga topológica, observamos a assimetria no padrão de intensidade, onde a singularidade, que já surge após o primeiro passo de $l' + \Delta l'$, se move do exterior para o centro. Como esperado (JESUS-SILVA; FONSECA; HICKMANN, 2012), o campo gerado $U_{2\omega}$ na zona de Fraunhofer apresenta carga topológica líquida igual a 1. Para corroborar esta afirmação, mostramos, na Figura 10 o padrão de fase para $l = 0.4$, onde já podemos observar uma carga topológica de força 1, indicando que os passos da carga líquida do feixe no segundo harmônico ocorre em passos inteiros de $l' + l''$ ($\lceil l' + l'' \rceil$), e não semi-inteiros ($\lceil l' + l'' - 1/2 \rceil$).

A formação de anéis também pode ser estudada através da teoria aqui apresentada. Para feixes incidentes com ordens radiais nulas ($p' = p'' = 0$), a regra de seleção (Equação 3.5) nos diz que o surgimento de ordens radiais no processo de mistura não linear é limitado ao maior inteiro maior que, ou igual, ao valor mínimo entre $|l'|$ e $|l''|$. Neste caso, iniciaremos com vórtices carregando $l' = 1.5$ e $l'' = -0.5$ e sucessivamente *decrecendo* l'' de 0.1. Em cada passo, o campo gerado $U_{2\omega}$ decresce a carga topológica l e começa a contribuição do anel externo em $l'' = -1.0$. Neste passo, o valor mínimo entre as cargas topológicas dos feixes incidentes é igual a 1 e, pela Equação 3.5, esperamos uma superposição p com modos $p = 0$ e $p = 1$. Quando $l'' = -1.5$, a mistura não linear leva a um campo gerado $U_{2\omega}$ com um anel (referente ao modo $p = 1$) totalmente formado e carga topológica nula, já que $l = l' + l'' = 0$. Aqui, a singularidade caminha do centro para o exterior após cada passo. Os resultados teóricos e experimentais deste processo podem ser observados na Figura 11.

Figura 11 – Distribuições de intensidade teórica e experimental na zona de Fraunhofer mostrando passo a passo o surgimento de ordens radiais adicionais.



4 Conversão de modos ópticos

No presente capítulo iremos apresentar as regras de seleção para a mistura não linear de duas para modos do tipo Hermite-Gauss (HG) e Laguerre-Gauss (LG) com paridade definida. Em seguida, na Seção 4.2, utilizaremos os modos HG como base para protocolos de conversão de modos e argumentaremos a favor dessa escolha de base em detrimento da base LG com paridade definida.

4.1 Mistura não linear de modos Hermite-Gauss

No capítulo anterior, apresentamos a mistura não-linear de duas ondas onde os campos incidentes eram modos LG contendo momento angular orbital e vimos que tal mistura gera, em geral, uma superposição de modos p no segundo harmônico que obedecem à conservação da carga topológica da mistura dos campos incidentes ($l = l' + l''$). Aqui, tomaremos como foco a mistura de modos HG e LG de paridade definida. Por questões de praticidade, optamos por resolver a integral de *overlap* numericamente. Os modos LG são dados pela expressão

$$\begin{aligned} \text{LG}_{pl}^{e,o}(\mathbf{r}, z) = & \sqrt{\frac{4p!}{(1 + \delta_{0,l}) \pi(p+l)!}} \frac{1}{w(z)} \begin{pmatrix} \cos l\phi \\ \sin l\phi \end{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{|l|} \\ & \times L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - \Psi_{LG}(z) \right]}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Na expressão acima, $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$ é a largura do feixe, $R = z \left[1 + (z_R/z)^2 \right]$ é o raio de curvatura da frente de onda e $\Psi_{LG}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan(z/z_R)$ é a fase de Gouy. Como mostrado no capítulo anterior, a mistura não linear de feixes LG que carregam MAO resulta, de forma geral, em uma superposição de modos onde a carga topológica é conservada ($l = l' + l''$), junto com a criação de ordens radiais $p \leq p' + p''$ para vórtices que corotacionam ($l' \cdot l'' \geq 0$) e $p \leq p' + p'' + \min(|l'|, |l''|)$ para vórtices de sentidos opostos ($l' \cdot l'' < 0$). Durante a propagação da luz, cada modo adquire uma diferente fase de Gouy, que resulta numa diferença no padrão de intensidade entre o campo próximo e campo distante, podendo haver uma diferença no número de anéis entre estes padrões. No entanto, os modos LG de paridade definida apresentam um comportamento diferente. O campo gerado da mistura de modos LG paridades σ', σ'' , respectivamente, cargas topológicas l', l'' e ordens radiais p', p'' é dado por

$$\text{LG}_{p'l'}^{\sigma'} \cdot \text{LG}_{p''l''}^{\sigma''} = \sum_{p=0}^{\frac{N-l}{2}} \sum_{l=\{|l'-l''|, |l'+l''|\}} \Lambda_{l'l''}^{pp'p''} \text{LG}_{pl}^{\sigma}, \quad (4.2)$$

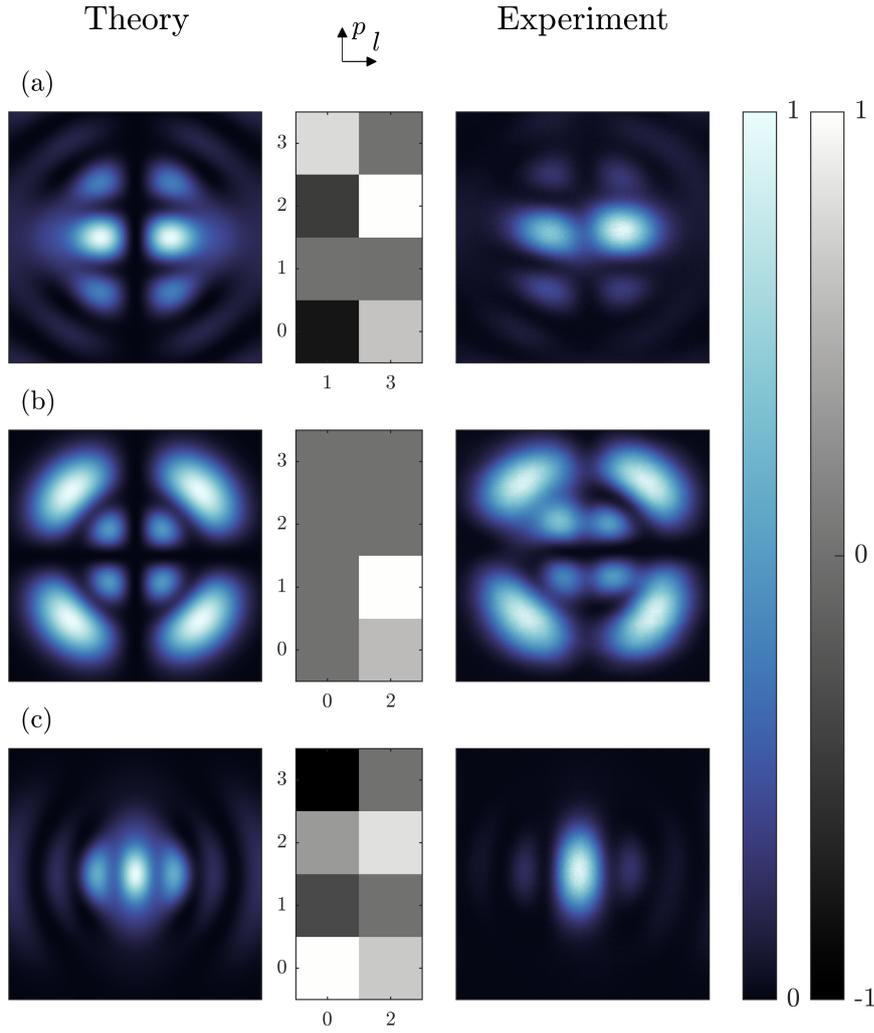


Figura 12 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe $U_{2\omega}$ gerado a partir da mistura por duas ondas de modos Laguerre-Gauss. Aqui, os feixes de entrada são (a) $U_1 = LG_{12}^e$ e $U_2 = LG_{11}^o$, (b) $U_1 = LG_{11}^e$ e $U_2 = LG_{01}^o$, (c) $U_1 = LG_{11}^e$ e $U_2 = LG_{11}^e$. A associada superposição de modos gerada é ilustrada nos histogramas da coluna central.

onde $\sigma = \text{mod}(\sigma' + \sigma'', 2)$ and $N = N' + N'' = 2(p' + p'') + l' + l''$. Isto significa que esperamos um campo gerado consistindo de uma superposição de modos p até o valor máximo de p permitido pela soma das ordens ($N = N' + N''$). A integral de *overlap* é responsável por distribuir os pesos referentes aos possíveis modos LG gerados por esta mistura. Adicionalmente, se a paridade dos modos incidentes forem iguais (diferentes), a superposição resultante contém modos LG de paridade par (ímpar). Note que, como buscamos comparar os modos HG aos modos LG na mistura não linear de duas ondas, usar feixes LG que carregam MAO não é uma boa escolha neste contexto, já que a presença de OAM introduz graus de liberdade adicionais, que os modos HG não possuem. No entanto, modos LG de paridade definida e modos HG compartilham os mesmos graus de liberdade, fazendo-os uma boa escolha no contexto aqui discutido. Consideremos agora os feixes

incidentes como sendo modos HG, que são dados pela equação 2.28

$$\begin{aligned} \text{HG}_{mn}(x, y, z) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M_{m,n}}{w(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ & \times e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{ik \left[\frac{x^2+y^2}{2R(z)} - \Psi_{HG}(z) \right]}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde a largura do feixe $w(z)$ e o raio de curvatura $R(z)$ são definidos da mesma forma que para modos LG. A fase de Gouy neste caso é dada por $\Psi_{HG} = (m + n + 1) \arctan(z/z_R)$, e a constante de normalização $M_{m,n} = \sqrt{2^{-(m+n)}/m!n!}$. No caso da mistura não linear de dois modos HG que carregam índices m', n' e m'', n'' , o feixe resultante obedece a expressão (ALVES et al., 2018)

$$\text{HG}_{m'n'} \cdot \text{HG}_{m''n''} = \sum_{m= \text{mod}(m'+m'',2)}^{m'+m''} \times \sum_{n= \text{mod}(n'+n'',2)}^{n'+n''} \Lambda_{mm'n''}^{nn'm'} \text{HG}_{mn}. \quad (4.3)$$

Na expressão acima, o índice m corre por valores pares, se $\text{mod}(m' + m'', 2) = 0$, ou valores ímpares, caso $\text{mod}(m' + m'', 2) = 1$. O mesmo é válido para o índice n . Considerando similaridades das equações 4.2 e 4.3, seria de se esperar um comportamento similar dessas misturas independentemente da escolha do tipo de modo. No entanto, quando analisamos a integral de *overlap* $\Lambda_{\alpha\alpha'\alpha''}^{\beta\beta'\beta''}$ para estes casos, a diferença entre os modos HG e LG fica clara. A Figura 13 (a) ilustra a mistura de $U_1 = \text{HG}_{01}$ e $U_2 = \text{HG}_{10}$ gerando $U_{2\omega} = \text{HG}_{11}$. Na Figura 13 (b), através da mistura de $U_1 = \text{HG}_{10}$ e $U_2 = \text{HG}_{11}$, o modo $U_{2\omega} = \text{HG}_{21}$ revela-se como modo dominante da superposição. Na Figura 13 (c), o modo $U_{2\omega} = \text{HG}_{22}$ surge como dominante através da mistura de $U_1 = \text{HG}_{01}$ and $U_2 = \text{HG}_{21}$. Os histogramas mostram que, para a mistura não linear de modos HG, o modo dominante da superposição resultante é sempre aquele que carrega os índices $m = m' + m''$ and $n = n' + n''$. O mesmo não ocorre com a mistura não linear de modos LG. Neste caso, o modo dominante pode ser qualquer um dentro dos índices permitidos pelo somatório da expressão 4.2. Na próxima seção será mostrado como que a escolha dos modos HG como base para mistura não linear favorece a conversão de modos ópticos de diferentes sistemas de coordenadas, já que a escolha dos modos incidentes pode ser feita com maior facilidade.

4.2 Conversão de Modos Ópticos

Vimos na seção anterior como prever o modo dominante de uma mistura não linear de modos HG. Este carrega índices que são a soma dos índices dos modos misturados ($m = m' + m'', n = n' + n''$). Partindo disso, iremos então buscar formas de misturar tais modos com o objetivo de controlar os modos dominantes que aparecerão no feixe resultante $U_{2\omega}$.

Aqui, em vez de utilizarmos um único modo como feixe incidente, uma superposição de modos HG é considerada. Isto significa que podemos escrever campos incidentes

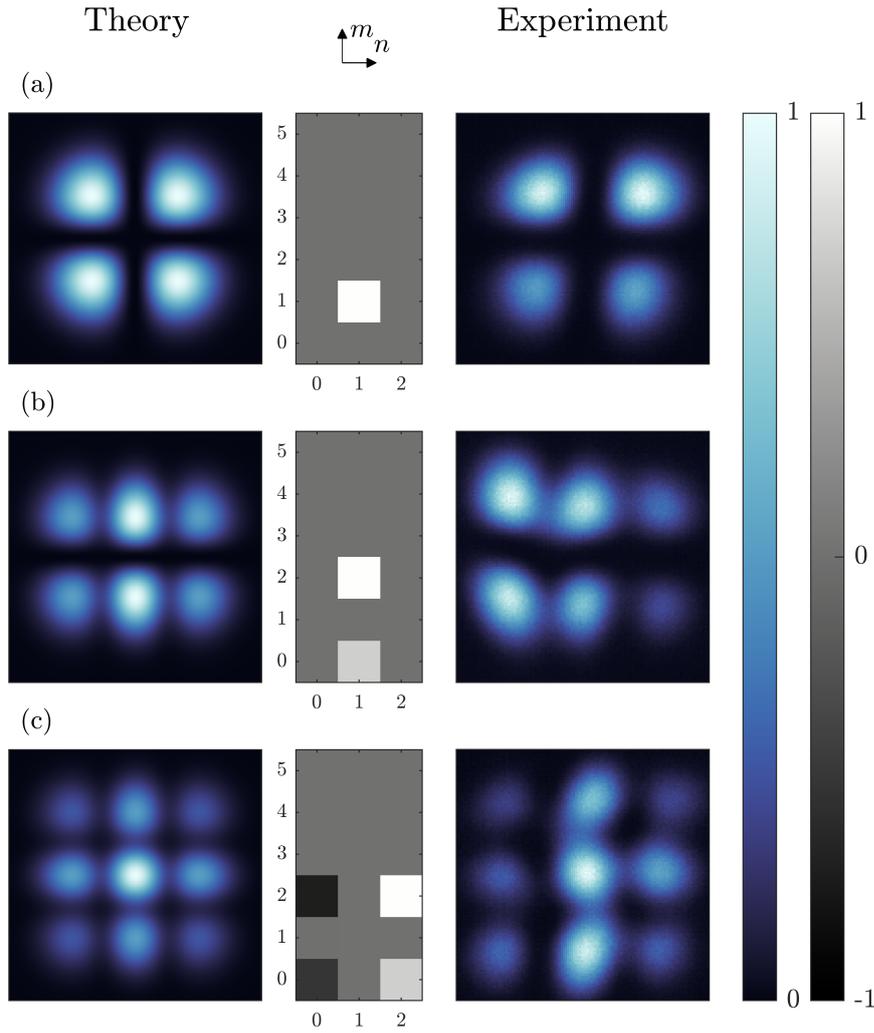


Figura 13 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe $U_{2\omega}$ gerado a partir da mistura por duas ondas de modos Hermite-Gauss. Aqui, os feixes de entrada são (a) $U_1 = \text{HG}_{01}$ e $U_2 = \text{HG}_{10}$, (b) $U_1 = \text{HG}_{10}$ e $U_2 = \text{HG}_{11}$, (c) $U_1 = \text{HG}_{01}$ e $U_2 = \text{HG}_{21}$. A associada superposição de modos gerada é ilustrada nos histogramas da coluna central.

$U_1 = \sum_{\{m'n'\}} \alpha_{m'n'} \text{HG}_{m'n'}$ e $U_2 = \sum_{\{m''n''\}} \alpha_{m''n''} \text{HG}_{m''n''}$ para conjuntos $\{m'n'\}$ e $\{m''n''\}$ especificados, com pesos $\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m''n''}$ associados aos modos dessa superposição. A mistura não linear de duas ondas de uma superposição de modos, como aqui apresentado, pode ser visto como a superposição de uma mistura dos modos individuais, obedecendo à regra de associatividade, por exemplo

$$(a\text{HG}_{m_1n_1} + b\text{HG}_{m_2n_2}) \times c\text{HG}_{m_3n_3} = ac(\text{HG}_{m_1n_1} \times \text{HG}_{m_3n_3}) + bc(\text{HG}_{m_2n_2} \times \text{HG}_{m_3n_3}), \quad (4.4)$$

onde \times denota o processo de mistura não linear de duas ondas. Esta propriedade segue diretamente da distributividade integral de *overlap*,

$$\int u_{\alpha\beta}^{2\omega} (u_{\alpha'\beta'}^1 + u_{\alpha'\beta'}^2)^* (u_{\alpha''\beta''}^3) = \int u_{\alpha\beta}^{2\omega} (u_{\alpha'\beta'}^1)^* (u_{\alpha''\beta''}^3) + \int u_{\alpha\beta}^{2\omega} (u_{\alpha'\beta'}^2)^* (u_{\alpha''\beta''}^3). \quad (4.5)$$

Os modos IG, LG e HG formam bases ortornormais, e a decomposição destes modos nas diferentes bases é possível. Por exemplo, utilizando como base os modos HG, podemos expandir o modo IG_{22}^e em termos de HG_{20} e HG_{02} . A conversão de modos aqui proposta consiste em incidir superposições de modos U_1 e U_2 de tal forma que sua mistura não linear $U_1 \times U_2$ gere um campo $U_{2\omega}$ cuja superposição tenha como modos dominantes a decomposição de um modo IG ou LG na base HG.

4.2.1 Conversão para modos de paridade definida

Utilizando-se da dominância do modo de maior ordem na mistura não linear de modos HG, devemos escolher cuidadosamente a superposição incidente em cada feixe U_1 e U_2 que explora esta propriedade. Por exemplo, o modo IG_{22}^e se decompõe na base HG termos de HG_{20} e HG_{02} . Para que esta superposição seja dominante em $U_{2\omega}$, devemos escolher os campos incidentes como $U_1 = \alpha_{10}\text{HG}_{10} + \alpha_{01}\text{HG}_{01}$ e $U_2 = \beta_{10}\text{HG}_{10} + \beta_{01}\text{HG}_{01}$ com pesos $\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m''n''}$ a serem determinados. Para entendermos como calcular estes pesos, vamos analisar cada paridade separadamente. Primeiro passo é expandirmos o modo desejado na base HG. Usemos aqui IG_{31}^o como exemplo para modos de paridade ímpar. Tal modo é expresso na base HG da forma

$$\text{IG}_{31}^o = A \cdot \text{HG}_{21} + B \cdot \text{HG}_{03}, \quad (4.6)$$

com constantes A e B que dependem do parâmetro de excentricidade ϵ do modo. Com o intuito de gerar esta combinação de modos no campo gerado da mistura, podemos escolher como modos incidentes

$$U_1 = \alpha_{20}\text{HG}_{20} + \alpha_{02}\text{HG}_{02}, \quad (4.7)$$

$$U_2 = \beta_{01}\text{HG}_{01}, \quad (4.8)$$

com constantes α_{20} , α_{02} e β_{01} a serem determinadas. Para determiná-las iremos assumir que a mistura dos modos consiste apenas em um único modo de maior ordem ($m = m' + m''$, $n = n' + n''$). Assim, o campo gerado é dado por

$$U_{2\omega} = \alpha_{20}\beta_{01}\Lambda_{220}^{101}\text{HG}_{21} + \alpha_{02}\beta_{01}\Lambda_{000}^{321}\text{HG}_{03}. \quad (4.9)$$

Igualando Eq. 4.9 a Eq. 4.6, temos então um sistema linear pros pesos

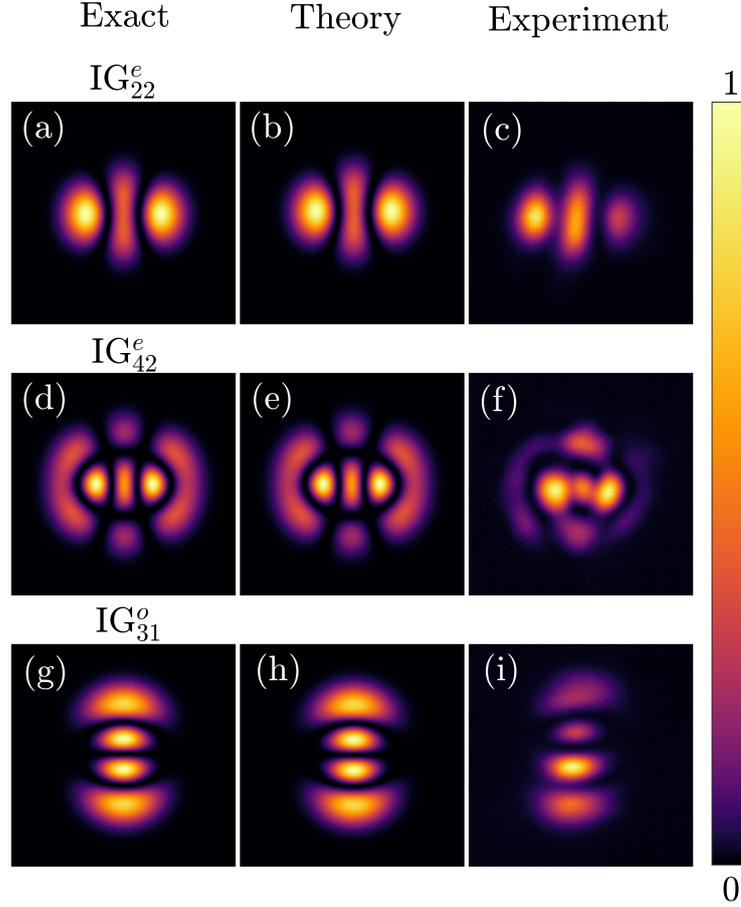
$$\alpha_{20}\beta_{01}\Lambda_{220}^{101} = A, \quad (4.10)$$

$$\alpha_{02}\beta_{01}\Lambda_{000}^{321} = B, \quad (4.11)$$

com uma possível solução sendo

$$\alpha_{20} = \frac{A}{\Lambda_{220}^{101}}, \alpha_{02} = \frac{B}{\Lambda_{000}^{321}}, \beta_{01} = 1. \quad (4.12)$$

Figura 14 – Distribuições de intensidade exatas para os modos IG (a,d,g) comparados com os resultados teóricos (b,e,h) e experimentais (c,f,i) para feixes modos de paridade par e ímpar.



Este procedimento pode ser facilmente generalizado para qualquer modo de paridade ímpar escrito na base HG:

$$IG_{pm}^o = \sum_{\{m'n'\}} \alpha_{m'n'} HG_{m'n'}, \quad (4.13)$$

com feixes de entrada

$$U_1 = \sum_{\{m''n''\}} \alpha_{m''n''} HG_{m''n''}, \quad (4.14)$$

$$U_2 = HG_{01} \text{ ou } U_2 = HG_{10}, \quad (4.15)$$

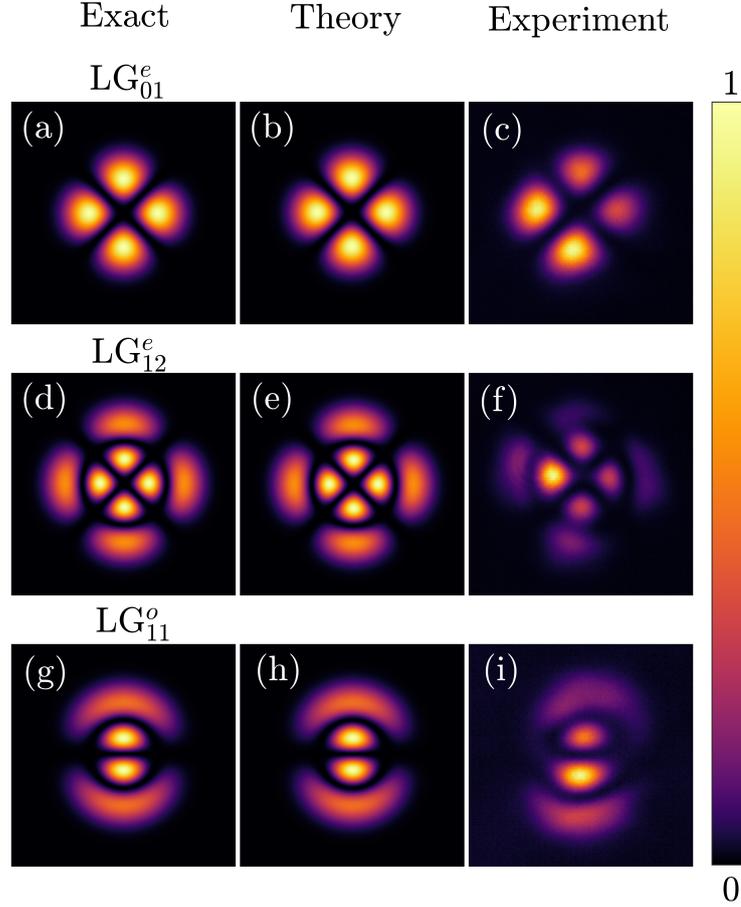
e pesos

$$\beta_{m''n''} = \frac{\alpha_{m'n'}}{\Lambda_{mm'm''}}. \quad (4.16)$$

Para modos com paridade par, usemos IG_{42}^e como exemplo. Tal modo é escrito na base HG da seguinte forma

$$IG_{42}^e = A \cdot HG_{40} + B \cdot HG_{22} + C \cdot HG_{04}, \quad (4.17)$$

Figura 15 – Distribuições de intensidade exatas para os modos LG (a,d,g) comparados com os resultados teóricos (b,e,h) e experimentais (c,f,i) para feixes modos de paridade par e ímpar.



onde A, B e C são constantes reais que dependem do parâmetro de excentricidade ϵ do modo. Nesse caso, para que os modos dominantes da mistura sejam os mesmos da Eq. 4.17, devemos escolher como feixes de entrada

$$U_1 = \alpha_{20}HG_{20} + \alpha_{02}HG_{02} \quad (4.18)$$

$$U_2 = \beta_{20}HG_{20} + \beta_{02}HG_{02}, \quad (4.19)$$

com constantes $\alpha_{20}, \alpha_{02}, \beta_{20}$ e β_{02} a serem determinadas. O campo gerado desta mistura, considerando apenas os modos dominantes, é da forma

$$U_{2\omega} = \alpha_{20}\beta_{20}\Lambda_{422}^{000}HG_{40} + \alpha_{20}\beta_{02}\Lambda_{220}^{202}HG_{22} + \alpha_{02}\beta_{20}\Lambda_{202}^{220}HG_{22} + \alpha_{02}\beta_{02}\Lambda_{000}^{422}HG_{04}. \quad (4.20)$$

Podemos agrupar os dois termos de HG_{22} já que $\Lambda_{220}^{202} = \Lambda_{202}^{220}$, e então temos

$$U_{2\omega} = \alpha_{20}\beta_{20}\Lambda_{422}^{000}HG_{40} + (\alpha_{20}\beta_{02} + \alpha_{02}\beta_{20})\Lambda_{220}^{202}HG_{22} + \alpha_{02}\beta_{02}\Lambda_{000}^{422}HG_{04}. \quad (4.21)$$

Igualando as Eq. 4.21 e 4.17, temos o seguinte sistema linear

$$\alpha_{20}\beta_{20}\Lambda_{422}^{000} = A \quad (4.22)$$

$$(\alpha_{20}\beta_{02} + \alpha_{02}\beta_{20})\Lambda_{202}^{220} = B, \quad (4.23)$$

$$\alpha_{02}\beta_{02}\Lambda_{000}^{422} = C. \quad (4.24)$$

$$(4.25)$$

Uma possível solução é dada por

$$\alpha_{20} = 1, \alpha_{02} = \frac{B/\Lambda_{220}^{202} \pm \sqrt{(B/\Lambda_{220}^{202})^2 - 4AC/\Lambda_{220}^{202}\Lambda_{000}^{422}}}{2A/\Lambda_{422}^{000}}, \quad (4.26)$$

$$\beta_{20} = \frac{A}{\alpha_{20}\Lambda_{422}^{000}}, \beta_{02} = \frac{C}{\alpha_{02}\Lambda_{000}^{422}}. \quad (4.27)$$

Selecionamos dois grupos de três modos diferentes com paridade definida para realizarmos a conversão. Os resultados para as conversões de HG para IG e LG podem ser vistos nas Figuras 14 e 15, respectivamente. A primeira coluna mostra o padrão de intensidade analítico obtido através da expressão do modo, seja IG ou LG (Equações 2.29, 2.30, 2.31 respectivamente). A segunda coluna mostra o resultado teórico que representa o campo distante do feixe gerado $U_{2\omega}$, que é calculado utilizando a integral de overlap e assumindo apenas a existência dos modos dominantes da mistura. A terceira coluna mostra os resultados experimentais. Utilizamos o arranjo experimental da Figura 5 e detalhado na Seção 3.1. Os pesos da mistura incidente foram calculados de acordo com o procedimento detalhado nesta seção e podem ser vistos na tabela 1.

A esfera de Poincaré na Figura 17 é uma visualização interessante para entendermos conversões de modos e a relação entre diferentes bases de modos paraxiais. Ao variarmos a excentricidade do modo IG, ele percorre esta esfera transitando continuamente entre um modo HG e um modo LG. Aqui, consideramos a conversão de modos HG para o modo IG_{42}^{ϵ} (Eq.4.17) com parâmetro de excentricidade ϵ . Mostramos na equação 4.26 que para esta conversão é possível encontrarmos uma mistura $U_1 \times U_2$ com pesos apropriados que compensem a integral de *overlap*. Dessa forma, realizamos a medida de diversos pontos da esfera de Poincaré deste modo para mostrarmos a transição entre um modo HG e um modo LG, como pode ser visto na Figura 16. A Figura 16 mostra, teoricamente e experimentalmente, a distribuição de intensidade do campo gerado $U_{2\omega}$, na zona de Fraunhofer, para valores discretos de excentricidade entre 0 e 1000.

4.2.2 Conversão para modos contendo MAO

A conversão de modos HG em modos IG ou LG com paridade definida, não carrega MAO. Isto porque modos que carregam MAO, são uma superposição de paridades diferentes (par e ímpar) com uma diferença de fase de $\exp\{(i\pi/2)\}$ entre elas. A Figura 18 mostra

Figura 16 – Distribuição de intensidade do campo distante para valores discretos do parâmetro de excentricidade do modo IG_{42}^e . Aqui mostramos a transição entre os modos HG e LG ao variarmos este parâmetro

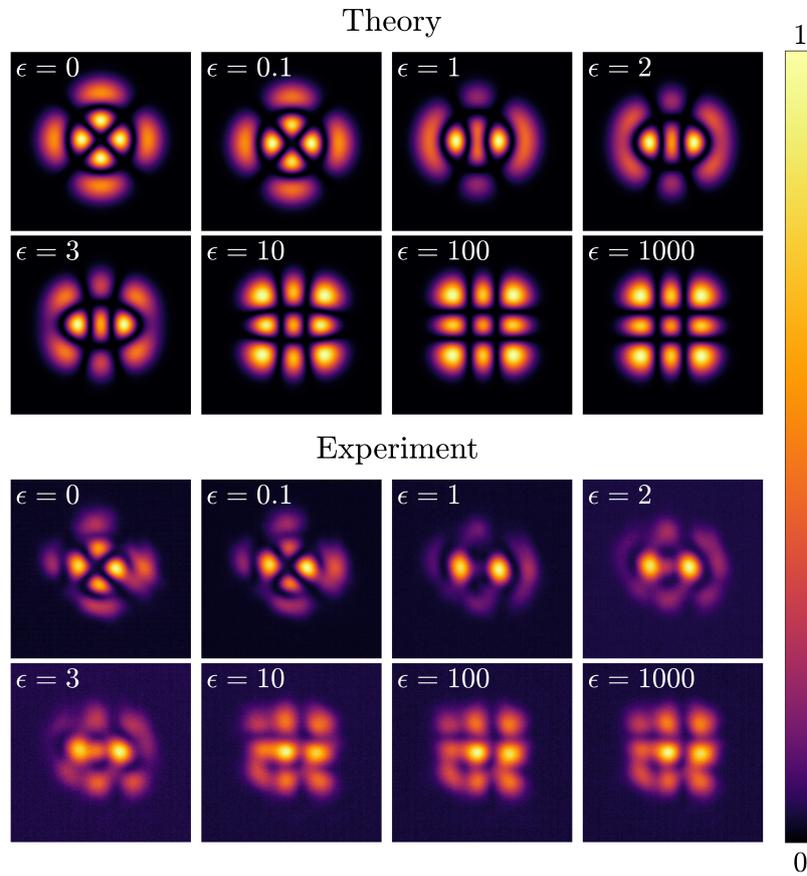
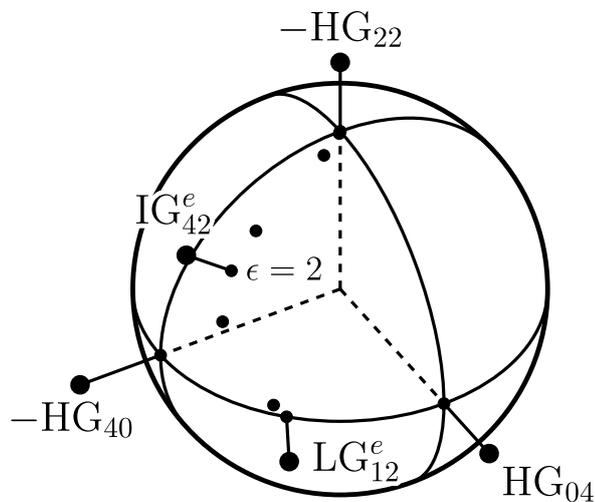
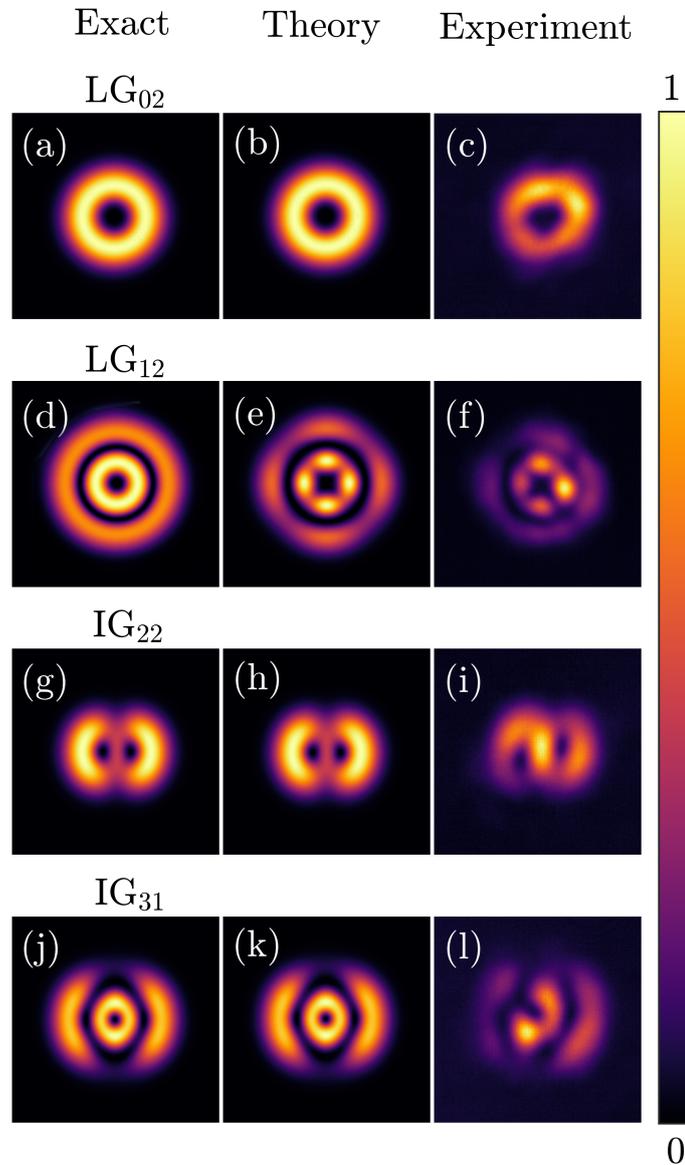


Figura 17 – Esfera de Poicaré para o modo IG_{42}^e na base Hermite-Gauss (HG). Os pontos indicam os diferentes valores de excentricidade da Fig. 16.



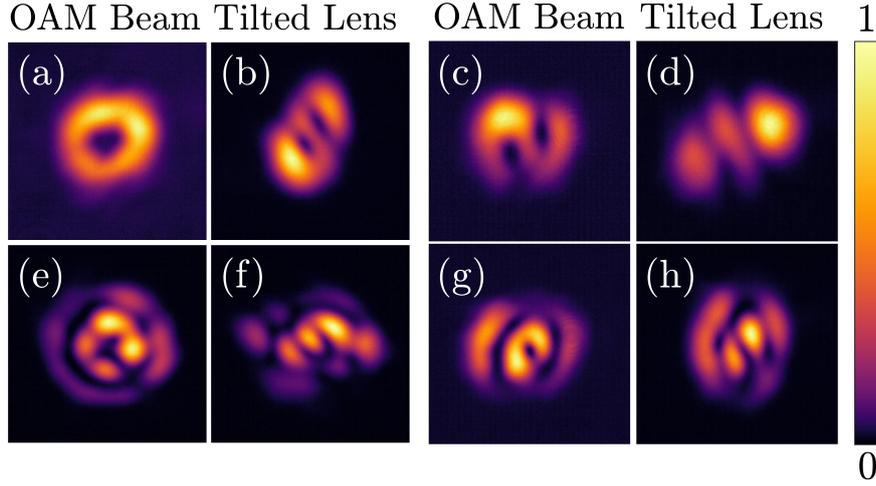
um conjunto de feixes IG e LG contendo MAO, que resultam de uma mistura não linear de modos HG. Os feixes incidentes levam em conta a diferença de fase necessária para

Figura 18 – Distribuições de intensidade exatas para os modos LG (a,d) e IG (g,j) comparados com os resultados teóricos (b,e,h,k) e experimentais (c,f,i,l) para feixes carregando MAO.



as combinar diferentes paridades em um feixe que contém MAO. Os pesos desta mistura podem ser consultados nas últimas quatro linhas da tabela 1. Note que os resultados experimentais e teóricos para o modo LG_{12} da Figura 18 não concordam com o mesmo grau de fidelidade que o restante. Isto deve-se ao fato de que o sistema linear para os pesos da mistura não possui solução (consultar Seção 4.3). No entanto, mesmo não sendo possível obter precisamente o modo desejado, o campo gerado $U_{2\omega}$ ainda possui certo grau de similaridade com o modo desejado e carrega MAO. Para provar esta afirmação, medimos a carga topológica dos feixes no segundo harmônico através do método de lente inclinada (VAITY; BANERJI; SINGH, 2013). Na Figura 19 mostramos as distribuições de intensidade para os feixes da Figura 18, que carregam MAO, onde a carga topológica é

Figura 19 – Distribuição de intensidade na zona de Fraunhofer para feixes carregando MAO referente aos modos (a) LG_{02} , (c) $*LG_{12}$, (e) IG_{22} e (g) $*IG_{31}$, junto da medida da carga topológica através do método da lente inclinada (b), (d), (f) e (h), respectivamente. Modos marcados com * denotam aqueles no qual não é possível encontrar uma solução para o sistema linear dos pesos ($\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m''n''}$) que compensa a integral de *overlap* inerente à mistura não linear de duas ondas



igual ao número de máximos dos lóbulos centrais menos um.

Tabela 1 – Tabela com os modos de entrada U_1 e U_2 utilizados no processo de mistura não linear por duas ondas para realização conversão de modos ópticos. Modos indicados com * são aqueles que não podemos encontrar um conjunto de pesos apropriados que compensem a integral de *overlap* (Consultar Seção 4.3).

Mode	U_1	U_2
IG_{22}^e	$HG_{10} + 0.486HG_{01}$	$3.892HG_{10} - 1.892HG_{01}$
IG_{42}^e	$HG_{20} - 0.155HG_{02}$	$-12.000HG_{20} - 25.843HG_{02}$
IG_{31}^o	$2.072HG_{20} + 4.460HG_{02}$	HG_{01}
LG_{01}^e	$HG_{10} + HG_{01}$	$HG_{10} - HG_{01}$
LG_{12}^e	$HG_{20} + HG_{02}$	$HG_{20} - HG_{02}$
LG_{11}^o	$HG_{20} + HG_{02}$	HG_{01}
LG_{02}	$HG_{10} - 1.017iHG_{01}$	$-2.828HG_{10} + 2.779iHG_{01}$
$*LG_{12}$	$HG_{20} + HG_{02}$	$HG_{20} - HG_{02} - iHG_{02}$
IG_{22}	$HG_{10} - 1.267iHG_{01}$	$-3.892HG_{10} + 0.726iHG_{01}$
$*IG_{31}$	$2.859HG_{20} + 0.983HG_{02}$	$1.577iHG_{10} + 2.405HG_{01}$

4.3 Limitações do método

Aqui iremos discutir as limitações do método apresentado nas Seções 4.2.1. Estamos interessados em saber para quais casos de misturas U_1 e U_2 não é possível encontrarmos expressões para os pesos além do caso trivial. Diferentemente da mistura que gera modos ímpares, nem sempre podemos encontrar uma combinação U_1 e U_2 cujo campo gerado

$U_{2\omega}$ possui os modos dominantes desejados. Tomemos IG_{62}^e como exemplo. Tal modo se decompõe na base Hermite-Gauss da seguinte forma

$$IG_{62}^e = A \cdot HG_{60} + B \cdot HG_{42} + C \cdot HG_{24} + D \cdot HG_{06}, \quad (4.28)$$

em que A, B, C e D são constantes reais que dependem do parâmetro de excentricidade ϵ do modo. Podemos escolher os feixes de entrada como sendo

$$U_1 = \alpha_{40}HG_{40} + \alpha_{04}HG_{04}, \quad (4.29)$$

$$U_1 = \beta_{20}HG_{20} + \beta_{02}HG_{02}. \quad (4.30)$$

O sistema linear para os pesos $\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m''n''}$ tem a forma

$$\alpha_{40}\beta_{20}\Lambda_{642}^{000} = A, \quad (4.31)$$

$$\alpha_{40}\beta_{02}\Lambda_{440}^{202} = B, \quad (4.32)$$

$$\alpha_{04}\beta_{20}\Lambda_{202}^{440} = C, \quad (4.33)$$

$$\alpha_{04}\beta_{02}\Lambda_{000}^{642} = D, \quad (4.34)$$

que é inconsistente e não possui solução.

Um comportamento similar ocorre com feixes que carregam OAM, como é o caso do LG_{12} da Figura 18 (d,c). Este modo se decompõe na base HG da forma

$$LG_{12} = LG_{12}^e + iLG_{12}^o = HG_{40} - HG_{04} + i(HG_{31} + HG_{13}) \quad (4.35)$$

onde vemos que temos uma decomposição similar a Eq. 4.28, em que as constantes multiplicativas A, B, C e D são todas diferentes. Isto significa que iremos obter um sistema linear pros pesos igualmente inconsistente. Mesmo que não possamos encontrar os pesos apropriados que compensem a integral de *overlap*, é possível encontrar uma combinação dos feixes de entrada que geraria LG_{12} exatamente se $\Lambda_{mm'n''}^{nn'n''}$ fossem todos iguais. Os campos incidentes teriam a forma

$$U_1 = HG_{20} + HG_{02} - iHG_{11}, \quad (4.36)$$

$$U_2 = HG_{20} + HG_{02}. \quad (4.37)$$

O campo gerado $U_{2\omega}$ seria dado por

$$U_{2\omega} = \Lambda_{422}^{000}HG_{40} + \Lambda_{220}^{202}HG_{22} - \Lambda_{202}^{220}HG_{22} - \Lambda_{000}^{422}HG_{04} - i\Lambda_{312}^{110}HG_{31} - i\Lambda_{110}^{312}HG_{13}. \quad (4.38)$$

Como $\Lambda_{mm'n''}^{nn'n''}$ não são todos iguais, isto significa que a mistura não linear impõe pesos diferentes aos modos que gerariam exatamente LG_{12} . Mesmo não sendo possível gerá-lo exatamente, o campo $U_{2\omega}$ possui similaridade com o modo desejado e carrega carga topológica, como pode ser visto na Figura 19.

Por outro lado, mesmo não sendo possível encontrar pesos adequados que compensem a integral de *overlap*, é possível otimizá-los numericamente utilizando diversos métodos de minimização de funções de várias variáveis (LAGARIAS et al., 1998; BROYDEN, 1970). No nosso caso, estamos tentando encontrar os pesos $\alpha_{m'n'}$ e $\beta_{m'n'}$ para que o campo resultante $U_{2\omega}$ se aproxime do modo IG_{pm}^σ desejado com um valor para excentricidade ϵ e paridade σ . Isso é obtido ao minimizar a quantidade $\sum_{ij} |U_{2\omega} - \text{IG}_{pm}^\sigma|$, onde os índices i, j variam sobre todos os pontos do campo discretizado.

5 Mistura não-linear de feixes Ince-Gauss

Possivelmente devido a complexidade de se tratar analiticamente com polínômios de Ince, os modos Ince-Gauss nunca foram considerados no contexto da mistura não linear por duas ondas. Neste capítulo, partindo de uma abordagem numérica, apresentaremos os resultados da mistura não linear por duas ondas de feixes Ince-Gauss (IG), determinando pela primeira vez sua regra de seleção. Através de resultados teóricos e experimentais, apresentamos na seção 5.1 a mistura não linear de modos IG de paridade definida, junto da análise do parâmetro da excentricidade do modo. Na seção 5.2, apresentamos os resultados para a mistura de modos IG helicoidais (HIG), ou seja, modos IG que carregam MAO. Dessa forma, completamos a análise das três famílias fundamentais de feixes paraxiais (LG, HG e IG) no contexto da mistura não linear por duas ondas.

5.1 Mistura não linear de modos Ince-Gauss de paridade definida

Os modos Ince-Gauss, introduzidos na seção 5.2, que servem como uma generalização que contém os modos Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss como casos particulares, são dados pelas equações 2.30 e 2.31.

$$\text{IG}_{pm}^e(\mathbf{r}, \epsilon) = \frac{Cw_0}{w(z)} C_p^m(i\xi, \epsilon) C_p^m(\eta, \epsilon) \exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \exp i\left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \psi_{IG}(z)\right], \quad (2.30)$$

$$\text{IG}_{pm}^o(\mathbf{r}, \epsilon) = \frac{Sw_0}{w(z)} S_p^m(i\xi, \epsilon) S_p^m(\eta, \epsilon) \exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \exp i\left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \psi_{IG}(z)\right], \quad (2.31)$$

onde C, S são constantes de normalização, e, o representam as paridades par e ímpar, respectivamente. O termo $\psi_{IG}(z) = (p+1) \arctan(z/z_R)$ é a fase de Gouy. Os modos IG são ortnormais em relação aos índices e paridades, ou seja

$$\int \text{IG}_{pm}^\sigma \overline{\text{IG}}_{p'm'}^{\sigma'} dS = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{p, p'} \delta_{m, m'}, \quad (5.1)$$

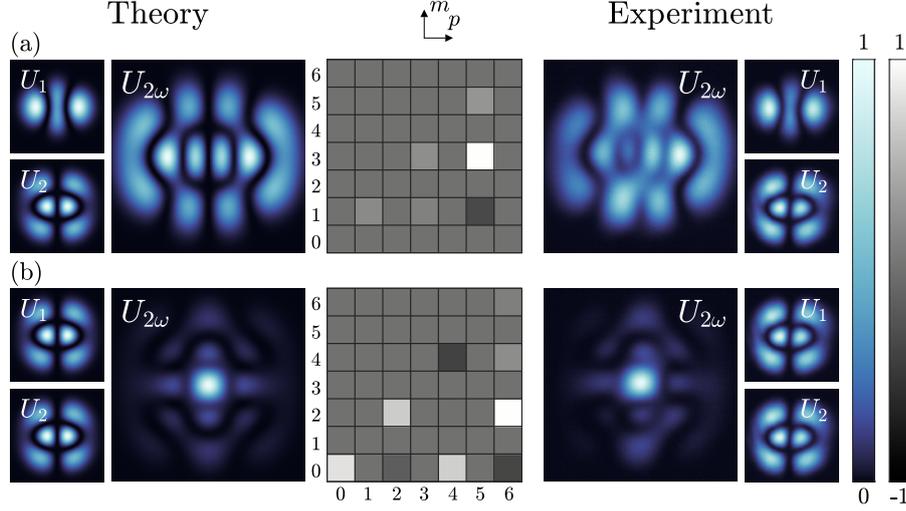
onde a barra indica a operação de complexo conjugado, $\sigma = \{e, o\}$ é a paridade do modo (par ou ímpar, respectivamente), δ é o delta de Kronecker e dS o elemento diferencial de superfície.

Para estudarmos os feixes Ince-Gauss teoricamente no contexto da mistura não linear por duas ondas, calculamos numericamente a integral de *overlap* normalizada $\Lambda_{pp'p''}^{mm'm''}$

$$R_{pp'p''}^{mm'm''} = \int \text{IG}_{pm}^\sigma \overline{\text{IG}}_{p'm'}^{\sigma'} \overline{\text{IG}}_{p''m''}^{\sigma''} dS \quad (5.2)$$

$$\Lambda_{pp'p''}^{mm'm''} = \frac{R_{pp'p''}^{mm'm''}}{R_{000}^{000}}. \quad (5.3)$$

Figura 20 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe gerado $U_{2\omega}$ através da mistura não linear por duas ondas de modos Ince-Gauss com paridade definida junto dos feixes de entrada para cada caso. Aqui, (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^e$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^e$. A superposição de modos que compõem $U_{2\omega}$ é mostrada no histograma da coluna central.



A mistura não linear de dois feixes IG de paridade definida, cada um com índices (p', m') e (p'', m'') , paridades σ' e σ'' , respectivamente, obedece a relação

$$\text{IG}_{p'm'}^{\sigma'} \times \text{IG}_{p''m''}^{\sigma''} = \sum_{m=m_0}^p \sum_{p=p_0}^{p'+p''} \Lambda_{pp'p''}^{mm'm''} \text{IG}_{pm}^{\sigma}, \quad (5.4)$$

onde \times denota o processo de mistura não linear por duas ondas, $m_0 = p_0 = \text{mod}(p'+p'', 2)$ e $\sigma = e$, caso $\sigma' = \sigma''$, ou $\sigma = o$, caso $\sigma' \neq \sigma''$. Os somatório em p corre por índices pares ou ímpares seguindo a paridade da operação $\text{mod}(p'+p'', 2)$. Como consequência, o somatório em m deve seguir a paridade de p devido a restrição nos índices (p, m) de um modo Ince-Gauss.

Dentro desse processo não linear, o cristal age como um seletor de modos e associa à cada modo um certo peso. Para os resultados teóricos, realizamos a mistura de dois modos IG seguindo a Eq. 5.4 e propagamos a superposição resultante até a zona de Fraunhofer. Para os resultados experimentais, utilizamos o mesmo arranjo experimental da figura 5 e detalhado na seção 3.1.

Aqui consideramos a mistura de todas possíveis combinações de paridades de modos IG. Na Figura 20 consideramos misturas par-par, onde os modos de entrada são (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^e$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^e$. Misturas par-ímpar são apresentadas na Figura 21, onde utilizamos (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^o$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^o$. Por fim, na Figura 22, para misturas ímpar-ímpar, utilizamos em (a) $U_1 = \text{IG}_{33}^o, U_2 = \text{IG}_{22}^o$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^o, U_2 = \text{IG}_{22}^o$. Em todas Figuras 20, 21 e 22 mostramos na coluna central o histograma da superposição de modos gerada pela mistura $U_1 \times U_2$, numa escala simétrica normalizada, indicando quais modos têm peso $\Lambda_{pp'p''}^{mm'm''}$ positivo (branco) ou negativo (preto).

Figura 21 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe gerado $U_{2\omega}$ através da mistura não linear por duas ondas de modos Ince-Gauss com paridade definida junto dos feixes de entrada para cada caso. Aqui, (a) $U_1 = \text{IG}_{22}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^o$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^e, U_2 = \text{IG}_{31}^o$. A superposição de modos que compõem $U_{2\omega}$ é mostrada no histograma da coluna central.

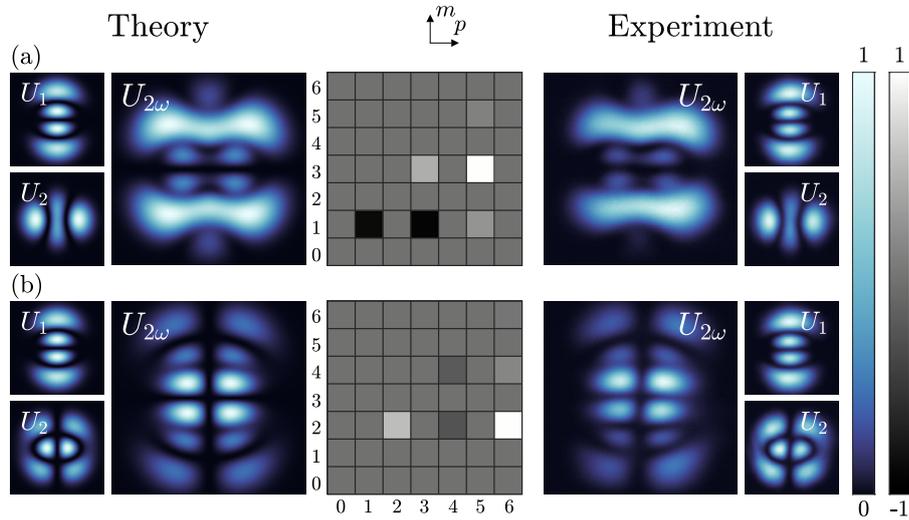
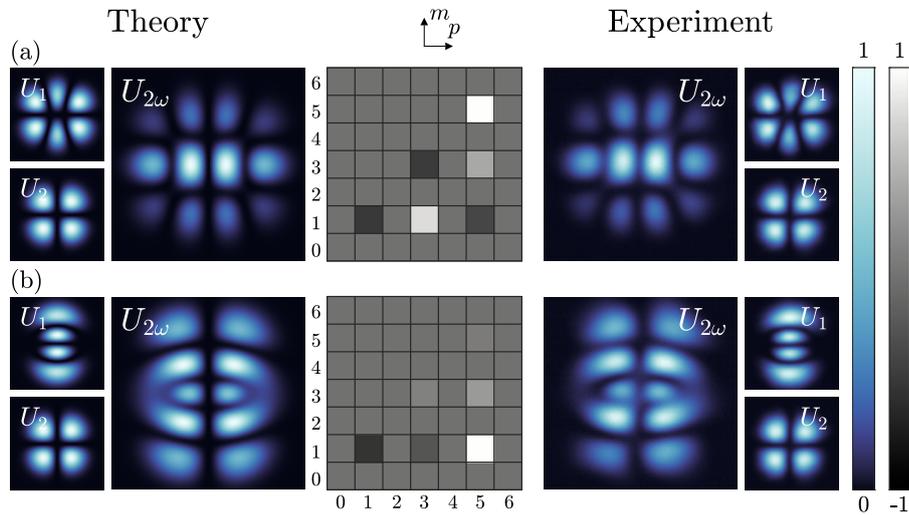
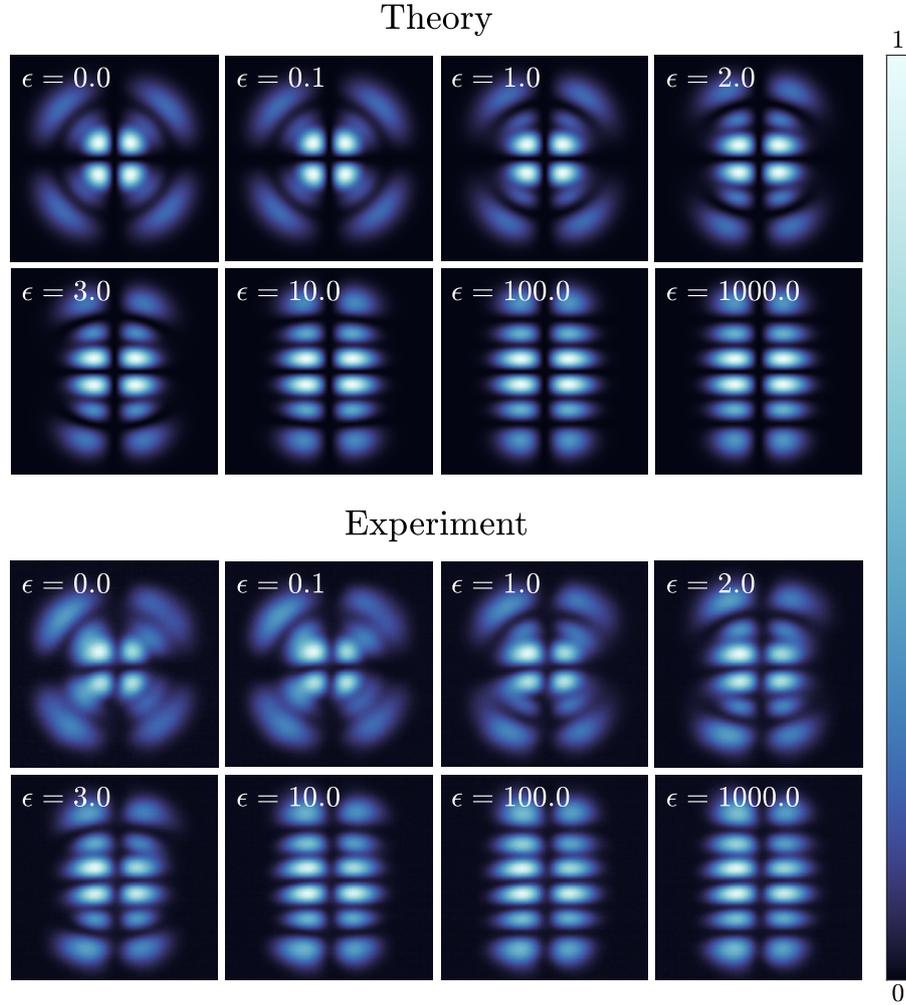


Figura 22 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para o feixe gerado $U_{2\omega}$ através da mistura não linear por duas ondas de modos Ince-Gauss com paridade definida junto dos feixes de entrada para cada caso. Aqui, (a) $U_1 = \text{IG}_{33}^o, U_2 = \text{IG}_{22}^o$ e (b) $U_1 = \text{IG}_{31}^o, U_2 = \text{IG}_{22}^o$. A superposição de modos que compõem $U_{2\omega}$ é mostrada no histograma da coluna central.



É notável a concordância entre os resultados teóricos e experimentais. Com o intuito de mostrar a transição entre os modos LG e HG ao variarmos o parâmetro de excentricidade ϵ do modo IG, apresentamos na Figura 23 resultados teóricos e experimentais para 8 valores discretos ϵ entre 0 e 1000.

Figura 23 – Distribuição de intensidade teórica e experimental para diferentes valores de excentricidade dos modos IG de entrada $U_1 = \text{IG}_{31}^e$ e $U_2 = \text{IG}_{31}^o$. Aqui mostramos a transição entre modos LG e HG variando este parâmetro de 0 até 1000.



5.2 Mistura não linear de modos Ince-Gauss Helicoidais

Modos LG que carregam MAO são caracterizados pela singularidade de fase denotada pelo fator $\exp\{\pm il\phi\}$ em sua expressão, no qual rotaciona circularmente ao redor de um ponto no eixo de propagação. Podemos escrever tais feixes como uma superposição defasada de modos LG com paridade definida, tal como $\text{LG}_{nl} = \text{LG}_{nl}^e(\mathbf{r}) \pm i\text{LG}_{nl}^o(\mathbf{r})$. De forma análoga, podemos definir modos Ince-Gauss Helicoidais (HIG) como (BANDRES; GUTIÉRREZ-VEGA, 2004)

$$\text{HIG}_{pm}^{\pm}(\mathbf{r}, \epsilon) = \text{IG}_{pm}^e(\mathbf{r}, \epsilon) \pm i\text{IG}_{pm}^o(\mathbf{r}, \epsilon), \quad (5.5)$$

que agora rotaciona elipticamente ao redor de uma linha que passa pelo centro, e no sentido definido pelo sinal \pm na Equação 5.5. Aqui, o número de anéis externos é expresso pela relação $1 + (p - m)/2$ e a carga topológica é igual a m .

Tabela 2 – Regras de seleção para feixes paraxiais no processo de mistura não linear por duas ondas. Aqui, $P = \min(|l'|, |l''|)$.

Base	Ordem	Regra de Seleção
$HG_{n_x n_y}$	$N = n_x + n_y$	$n_x \leq n'_x + n''_x \pmod{2}$ $n_y \leq n'_y + n''_y \pmod{2}$
LG_{nl}	$N = 2n + l $	$l = l' + l''$ $n \leq n' + n'' \ (l' \cdot l'' > 0)$ $n \leq P + n' + n'' \ (l' \cdot l'' \leq 0)$
LG_{nl}^σ	$N = 2n + l $	$l = \{ l' - l'' , l' + l'' \}$ $n \leq ((N' + N'') - l)/2$
IG_{pm}^σ	$N = p$	$p \leq p' + p''$ $\text{mod}(p' + p'', 2) \leq m \leq p \pmod{2}$
HIG_{pm}^\pm	$N = p$	$p \leq p' + p''$ $\text{mod}(p' + p'', 2) \leq m \leq p \pmod{2}$ $m_{\text{Net}} = m' + m''$

Distribuições transversais de intensidade referentes à mistura não linear de modos HIG obtidas teoricamente e experimentalmente são mostradas na Figura 24. Para misturas de modos HIG que co-rotacionam, utilizamos os modos de entrada (a) $U_1 = HIG_{11}^+$, $U_2 = HIG_{31}^+$ e (b) $U_1 = HIG_{22}^+$, $U_2 = HIG_{31}^+$. Referente às misturas de modos HIG que contra-rotacionam, utilizamos como modos de entrada (c) $U_1 = HIG_{22}^+$, $U_2 = HIG_{22}^-$ e (d) $U_1 = HIG_{31}^-$, $U_2 = HIG_{11}^+$. Na coluna central mostramos os respectivos histogramas da superposição de modos de $U_{2\omega}$ numa escala simétrica normalizada indicando quais modos possuem peso positivo (branco) ou negativo (preto). Ainda referente aos histogramas centrais, separamos a contribuição dos modos com singularidades que rotacionam no sentidos antihorário(positivo) e horário(negativo), como indicado pela Eq. 5.5.

Baseado no princípio da conservação do MAO, é esperado que a carga topológica seja conservada dentro do processo de mistura não linear por duas ondas, i.e. $m_{\text{Total}} = m' + m''$. No entanto, o campo gerado $U_{2\omega}$ e uma superposição de modos, métodos convencionais para medir a carga topológica não se aplicam aqui, como difração por uma abertura [REFs] ou lente inclinada [REFs], por exemplo. Estudamos a conservação da carga topológica contando as singularidades da distribuição de fase associada a cada campo gerado $U_{2\omega}$ da Figura 24 na zona de Fraunhofer. A Figura 25 mostra tais distribuições de fase, onde as cargas positivas foram marcadas com círculos sólidos vermelhos e cargas negativas com círculos tracejados azuis. Somando todas as cargas considerando seus respectivos sinais, nota-se válida a conservação do MAO, $m_{\text{Total}} = m' + m''$.

Neste momento, resumido na Tabela 2, podemos afirmar que obtivemos a regra de seleção para todas famílias de feixes paraxiais no processo de mistura não linear por duas ondas.

Figura 24 – Padrões de intensidade teórico e experimental para o campo gerado através da mistura por duas ondas de modos IG helicoidais, juntamente com os campos iniciais utilizados em cada caso. Aqui, os modos iniciais foram (a) $U_1 = \text{HIG}_{11}^+ e U_2 = \text{HIG}_{31}^+$, (b) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{31}^+$, (c) $U_1 = \text{HIG}_{22}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{22}^-$ e (d) $U_1 = \text{HIG}_{31}^+$ e $U_2 = \text{HIG}_{11}^-$. A superposição de modos gerados é mostrado através dos histogramas para vórtices com sentido positivo (HIG_{pm}^+) e negativo (HIG_{pm}^-) situados na coluna central.

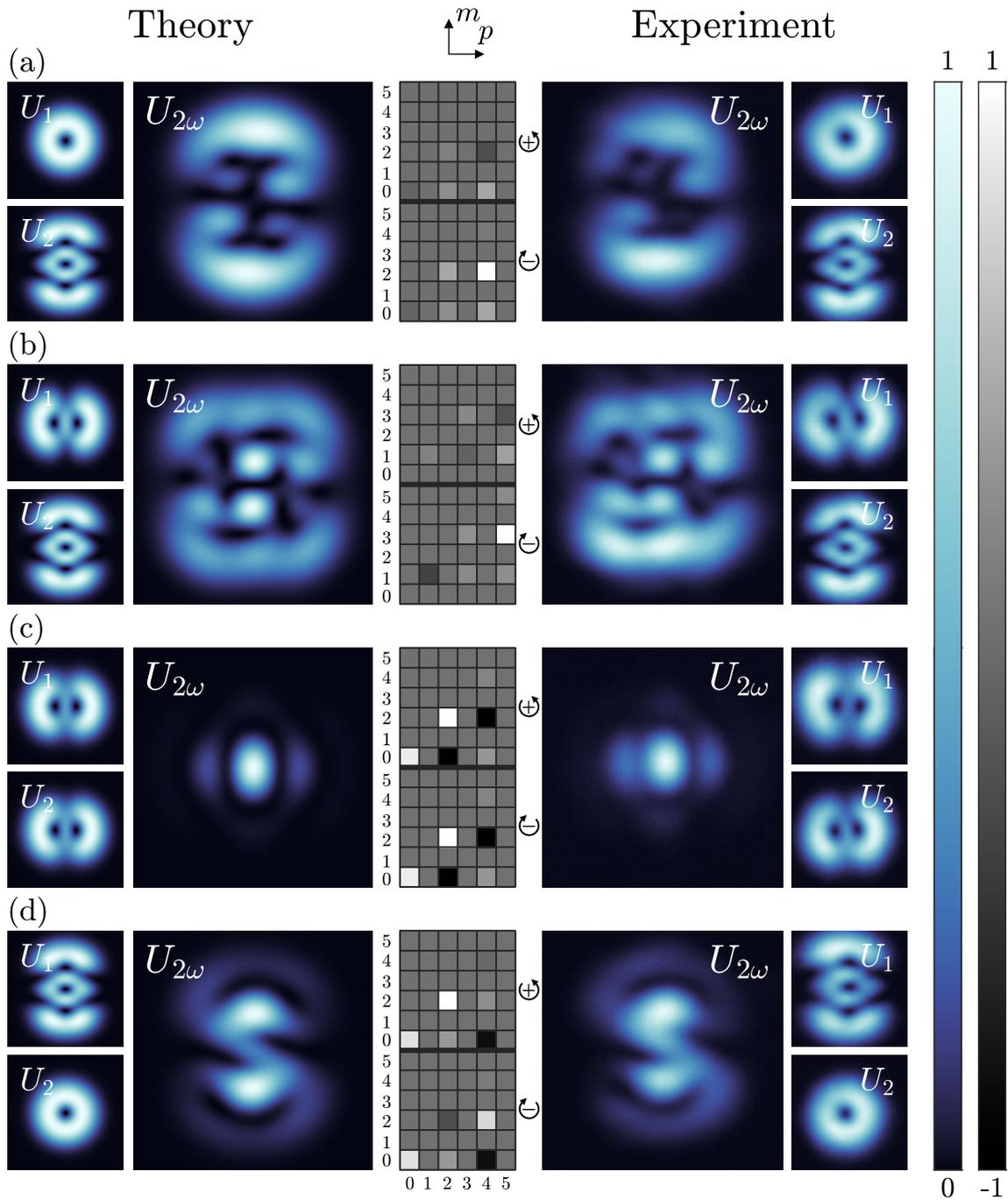
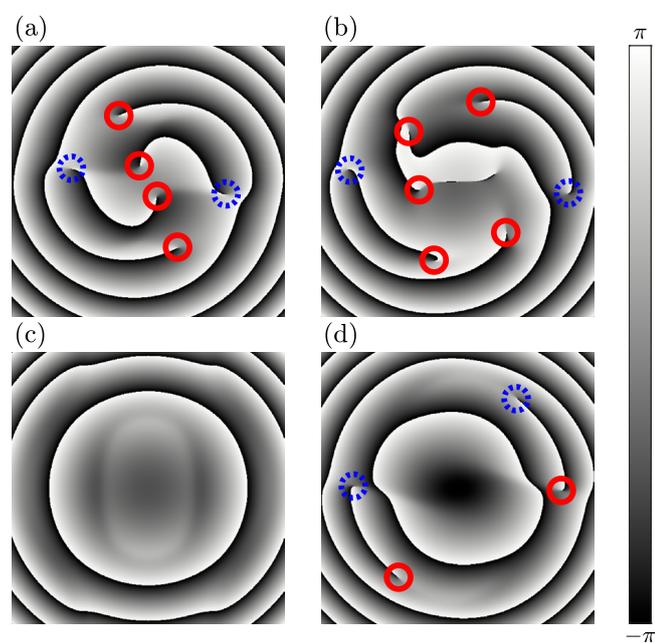


Figura 25 – Distribuições de fase calculadas numericamente para feixes HIG referentes à Figura 24. Aqui, os círculos sólidos vermelhos indicam singularidades de carga positiva, enquanto os círculos tracejados azuis indicam singularidades de carga negativa.



6 Conclusão

Nessa dissertação de Mestrado estudamos a interação da luz estruturada com a matéria e apresentamos resultados referentes à mistura não linear por duas ondas de feixes paraxiais.

Inicialmente, no Capítulo 2, apresentamos uma base teórica definindo o tipo de luz estruturada aqui utilizado, mais especificamente os modos paraxiais da luz, que vimos como sendo solução da equação paraxial da onda em diferentes sistemas de coordenadas. Junto a isso, introduzimos ao leitor os diferentes fenômenos físicos que surgem ao consideramos respostas da polarização de um material com ordens da amplitude do campo aplicado e discorremos sobre motivação de nosso trabalho.

Em seguida, no Capítulo 3, por meio de uma análise teórica e experimental, apresentamos o primeiro conjunto de resultados dessa dissertação. Extendemos a mistura de modos LG ao consideramos modos incidentes de ordens radiais não nulas, levando a uma discussão mais profunda acerca do papel das cargas topológicas l', l'' e das ordens radiais p', p'' dos campos incidentes na distribuição de intensidade do feixe gerado na zona de Fraunhofer. Observou-se que a análise dos modos radiais na zona de Fraunhofer contando apenas os anéis da distribuição de intensidade é efetiva apenas no caso em que $p' = p'' = 0$. Ao considerarmos $p', p'' \neq 0$, temos que a distribuição de intensidade da mistura muda fazendo a troca $p' \leftrightarrow p''$ com $|l'| \neq |l''|$. Ambas misturas possuem os mesmos modos gerados, porém com pesos diferentes. Isto significa que uma contagem dos anéis na distribuição de intensidade pode levar à conclusão errada acerca da composição dos modos do feixe gerado. Ainda neste capítulo, abordamos o feixes incidentes LG com l', l'' fracionários e analisamos o surgimento do vórtice e de ordens radiais no campo gerado. Ao variarmos gradualmente a carga topológica de um dos feixes iniciais, podemos observar na distribuição de intensidade do campo distante tanto o nascimento de um vórtice quando a formação de anéis adicionais. Onde foi observado que os vórtices surgem em passos inteiros de $l = l' + l''$.

Posteriormente, no Capítulo 4, realizamos o processo inverso. Consideramos a mistura de feixes Hermite-Gauss e, especificando o feixe gerado como sendo um modo de outra base paraxial, buscamos a superposição incidente que gerasse tal feixe. Determinamos que a base Hermite-Gauss é a mais apropriada entre as bases paraxiais para realização de protocolos de conversão de modos, pois sua mistura não linear resulta sempre em um modo dominante cujo índice é a soma dos índices dos modos incidentes. Aqui consideramos pela primeira vez nessa dissertação a superposição de modos nos feixes incidentes. Explorando a dominância do modo de maior ordem da mistura de modos HG, determinamos expressões

para os pesos dessa superposição de tal forma que o campo gerado fosse o modo desejado.

Por fim, no Capítulo 5, analisamos pela primeira vez a mistura de feixes paraxiais elípticos no contexto não linear aqui estudado. Consideramos modos Ince-Gauss (IG) com paridade definida e modos IG helicoidais (HIG), que carregam MAO. Partindo de uma abordagem numérica, determinamos a regra de seleção desse tipo de mistura e examinamos a transição entre a mistura de feixes com simetria cilíndrica (Laguerre-Gauss) e feixes com simetria cartesiana (Hermite-Gauss) ao alterarmos o parâmetro de excentricidade destes modos elípticos.

6.1 Artigos publicados ou submetidos relacionados à dissertação

- D. G. Pires, **J. C. A. Rocha**, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Optical mode conversion through nonlinear two-wave mixing*. Physical Review A, 100(4), 043819. (2019). DOI: [10.1103/PhysRevA.100.043819](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.043819) Referente ao Capítulo 4.
- D. G. Pires, **J. C. A. Rocha**, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Interaction of fractional orbital angular momentum in two-wave mixing processes*. J. Opt. 22, 035502. (2020) DOI: [10.1088/2040-8986/ab6ae6](https://doi.org/10.1088/2040-8986/ab6ae6) . Referente ao Capítulo 3.
- D. G. Pires, **J. C. A. Rocha**, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Higher radial orders of Laguerre-Gaussian beams in two-wave mixing processes* (2020). Referente ao Capítulo 3. DOI: [10.1364/JOSAB.384112](https://doi.org/10.1364/JOSAB.384112)
- D. G. Pires, **J. C. A. Rocha**, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Suitable state basis for nonlinear optical mode conversion protocols*(2020). Referente ao Capítulo 4. DOI: [10.1364/OL.394640](https://doi.org/10.1364/OL.394640)
- D. G. Pires, **J. C. A. Rocha**, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Nonlinear wave-mixing of Ince-Gaussian beams* (2020). Referente ao Capítulo 5. DOI: [10.1364/JOSAB.401001](https://doi.org/10.1364/JOSAB.401001)

6.2 Outros artigos do autor

- D. G. Pires, **J. C. A. Rocha** and P. A. Brandão. *Ergoregion in metamaterials mimicking a Kerr spacetime*. Journal of Optics, 20(2), 025101 (2018).
- **J. C. A. Rocha**, J. P. Amaral, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Study of the conservation of the topological charge strength in diffraction by apertures*. JOSA B, 36(8), pp.2114-2117.

-
- J. P. Amaral, **J. C. A. Rocha**, A. J. Jesus-Silva and E. J. S. Fonseca. *Method to define non-diffracting optical beams mimicking the shape of simple plane curves* Appl. Opt. 58, 3659-3663 (2019).

Referências

- AKHMANOV, S. A.; SUKHORUKOV, A. P.; KHOKHLOV, R. Self-focusing and diffraction of light in a nonlinear medium. *Soviet physics USPEKHI*, IOP Publishing, v. 10, n. 5, p. 609, 1968. Citado na página 12.
- ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, APS, v. 45, n. 11, p. 8185, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- ALVES, G. et al. Conditions for optical parametric oscillation with a structured light pump. *Physical Review A*, APS, v. 98, n. 6, p. 063825, 2018. Citado na página 36.
- AOLITA, L.; WALBORN, S. Quantum communication without alignment using multiple-qubit single-photon states. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 10, p. 100501, 2007. Citado na página 18.
- ARRIZÓN, V.; LLAVE, D. S. de-la. Double-phase holograms implemented with phase-only spatial light modulators: performance evaluation and improvement. *Appl. Opt.*, OSA, v. 41, n. 17, p. 3436–3447, Jun 2002. Disponível em: <<http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-41-17-3436>>. Citado na página 25.
- BANDRES, M. A.; GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. Ince-gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 21, n. 5, p. 873–880, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 50.
- BERRY, M. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, IOP Publishing, v. 6, n. 2, p. 259, 2004. Citado na página 29.
- BOYD, R. W. Nonlinear optics. In: . [S.l.: s.n.], 1992. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- BROYDEN, C. G. The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 1. general considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Oxford University Press, v. 6, n. 1, p. 76–90, 1970. Citado na página 46.
- D'AMBROSIO, V. et al. Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication. *Nature communications*, Nature Publishing Group, v. 3, p. 961, 2012. Citado na página 18.
- FORBES, A.; DUDLEY, A.; MCLAREN, M. Creation and detection of optical modes with spatial light modulators. *Advances in Optics and Photonics*, Optical Society of America, v. 8, n. 2, p. 200–227, 2016. Citado na página 25.
- GIBSON, G. et al. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Optics express*, Optical Society of America, v. 12, n. 22, p. 5448–5456, 2004. Citado na página 18.
- GOODMAN, J. W. *Introduction to Fourier optics*. [S.l.]: Roberts and Company Publishers, 2005. Citado na página 15.

- HE, H. et al. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity. *Physical review letters*, APS, v. 75, n. 5, p. 826, 1995. Citado na página 18.
- HSUEH, C.; SAWCHUK, A. Computer-generated double-phase holograms. *Applied optics*, Optical Society of America, v. 17, n. 24, p. 3874–3883, 1978. Citado 3 vezes nas páginas 7, 25 e 26.
- IMOTO, N.; HAUS, H.; YAMAMOTO, Y. Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical kerr effect. *Physical Review A*, APS, v. 32, n. 4, p. 2287, 1985. Citado na página 12.
- JESUS-SILVA, A. J.; FONSECA, E. J.; HICKMANN, J. M. Study of the birth of a vortex at fraunhofer zone. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 37, n. 21, p. 4552–4554, 2012. Citado na página 32.
- LAGARIAS, J. C. et al. Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, SIAM, v. 9, n. 1, p. 112–147, 1998. Citado na página 46.
- MAXWELL, J. C. *A dynamical theory of the electromagnetic field*. [S.l.]: The Society, 1864. Citado na página 13.
- MIDWINTER, J.; WARNER, J. The effects of phase matching method and of uniaxial crystal symmetry on the polar distribution of second-order non-linear optical polarization. *British Journal of Applied Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 8, p. 1135, 1965. Citado na página 12.
- PADGETT, M.; BOWMAN, R. Tweezers with a twist. *Nature photonics*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 6, p. 343, 2011. Citado na página 18.
- PEREIRA, L. J. et al. Orbital-angular-momentum mixing in type-ii second-harmonic generation. *Physical Review A*, APS, v. 96, n. 5, p. 053856, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 12, 21, 24 e 28.
- ROGER, T. et al. Non-collinear interaction of photons with orbital angular momentum. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 3, p. 3491, 2013. Citado na página 26.
- SIMPSON, S. H.; HANNA, S. Rotation of absorbing spheres in laguerre-gaussian beams. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 26, n. 1, p. 173–183, 2009. Citado na página 18.
- SONG, H. et al. Optimal synthesis of double-phase computer generated holograms using a phase-only spatial light modulator with grating filter. *Opt. Express*, OSA, v. 20, n. 28, p. 29844–29853, Dec 2012. Disponível em: <<http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-28-29844>>. Citado na página 25.
- TAMBURINI, F. et al. Encoding many channels on the same frequency through radio vorticity: first experimental test. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 14, n. 3, p. 033001, 2012. Citado na página 18.
- VAITY, P.; BANERJI, J.; SINGH, R. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens. *Physics letters a*, Elsevier, v. 377, n. 15, p. 1154–1156, 2013. Citado na página 43.