

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma sequência didática para o ensino de curvas de  
Bézier usando *GeoGebra*

Alane da Rocha Alves



Instituto de Matemática

Maceió, Abril de 2021



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL (PROFMAT)

ALANE DA ROCHA ALVES

**Uma sequência didática para o ensino de  
curvas de Bézier usando *GeoGebra***

Maceió  
2021

ALANE DA ROCHA ALVES

**Uma sequência didática para o ensino de curvas de Bézier  
usando *GeoGebra***

*Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Profa. Dra. Adina Rocha dos Santos*

Maceió  
2021

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A474s      Alves, Alane da Rocha.  
              Uma sequência didática para o ensino de curvas de Bézier usando  
              GeoGebra / Alane da Rocha Alves. - 2021.  
              70 f. : il.

Orientadora: Adina Rocha dos Santos.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade  
Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional, 2021.

Bibliografia: f. 61-62.  
Apêndices: f. 63-70.

1. Curvas de Bézier. 2. Curvas parametrizadas. 3. Polinômio de  
Bernstein. 4. Algoritmo Casteljaú. I. Título.

CDU: 514.75

## Folha de Aprovação

ALANE DA ROCHA ALVES

### Uma sequência didática para o ensino de curvas de Bézier usando o GeoGebra

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 15 de abril de 2021.

Documento assinado digitalmente  
 Adina Rocha dos Santos  
Data: 04/05/2021 16:13:21-0300  
CPF: 062.587.814-03

---

Profa. Dra. Adina Rocha dos Santos – IFAL (Orientadora)

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente  
 Gregorio Manoel da Silva Neto  
Data: 05/05/2021 11:37:06-0300  
CPF: 061.689.854-17

---

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto – UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente  
 Allan George de Carvalho Freitas  
Data: 04/05/2021 16:35:23-0300  
CPF: 061.315.944-65

---

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas - UFPB (Examinador Externo)

*A minha tia Maria Gertrudes.  
(in memoriam)*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de me permitir realizar essa conquista e a Nossa Senhora por interceder por mim em cada passo dado nessa jornada.

A minha família, irmãos Alex e Alan, a Katia e, em especial, aos meus pais Claudio e Eliane pelo apoio e por sempre acreditar em mim.

Ao meu esposo Willian pelo amor e todo incentivo ao longo desses anos.

Aos meus colegas de turma pela amizade e pelos dias de estudo e descontração.

Aos meus professores, em especial a minha orientadora Adina por todo suporte, paciência e colaboração na elaboração desse trabalho.

*“Há tempo para todo propósito debaixo do céu.”*

—BÍBLIA, ECLESIASTES, 3:1

# RESUMO

Nesta dissertação iremos apresentar uma sequência didática para o ensino das curvas de Bézier e um passo a passo para construção dessas curvas no *software GeoGebra*. Abordaremos alguns conceitos preliminares, tais como curvas parametrizadas e interpolação e, em seguida, apresentaremos os conceitos necessários para construção das curvas no *GeoGebra*, como o algoritmo de Casteljau e polinômios de Bernstein. Mostraremos também uma aplicação das curvas de Bézier na modelagem de uma saia no *GeoGebra*. Por fim, faremos uma sequência didática e uma sugestão de atividade para que essa possa ser aplicada com os discentes.

**Palavras-chave:** Curvas de Bézier; curvas parametrizadas; polinômios de Bernstein; algoritmo de Casteljau.

# ABSTRACT

In this thesis we will present a didactic sequence for the teaching of Bézier curves and a process to build these curves in the *GeoGebra software*. We will approach some preliminary concepts, such as parameterized curves and interpolation, and then we will present the concepts of location for the construction of curves in *GeoGebra*, such as the Casteljau algorithm and Bernstein polynomials. We will also present an application of Bézier curves in modeling a skirt in *GeoGebra*. Finally, we will make a didactic sequence and an activity suggestion of activity to be applied with the students.

**Keywords:** Bézier curves; parameterized curves; Bernstein polynomials; Casteljau algorithm.

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Projeto de veículo utilizando curvas de Bézier. . . . .	13
1.2	Projeto de veículo utilizando curvas de Bézier. . . . .	14
1.3	Traço da curva. . . . .	15
1.4	Traço da curva. . . . .	15
1.5	Traço da curva. . . . .	15
1.6	Traço da curva. . . . .	16
1.7	Traço da curva. . . . .	16
1.8	Passo 1 da interpolação. . . . .	17
1.9	Curva de Bézier linear. . . . .	18
1.10	Curva de Bézier linear. . . . .	18
1.11	Passo 1 da interpolação. . . . .	19
1.12	Passo 2 da interpolação. . . . .	19
1.13	Curva de Bézier quadrática. . . . .	20
1.14	Curva de Bézier quadrática. . . . .	20
1.15	Passo 1 da interpolação. . . . .	21
1.16	Passo 2 da interpolação. . . . .	21
1.17	Passo 3 da interpolação. . . . .	22
1.18	Curva de Bézier cúbica. . . . .	22
1.19	Curva de Bézier cúbica. . . . .	23
1.20	Polinômios de Bernstein de grau 1. . . . .	25
1.21	Polinômios de Bernstein de grau 2. . . . .	26
1.22	Polinômios de Bernstein de grau 3 . . . . .	27
1.23	Curva de Bézier linear. . . . .	30
1.24	Curva de Bézier quadrática. . . . .	32
1.25	Curva de Bézier cúbica. . . . .	33
1.26	Curva de Bézier quadrática. . . . .	34
1.27	Curva de Bézier quadrática. . . . .	34
1.28	Curva de Bézier quadrática. . . . .	35
2.1	Passo 1. . . . .	40
2.2	Passo 2. . . . .	41
2.3	Passo 3. . . . .	41
2.4	Passo 4. . . . .	42
2.5	Passo 5. . . . .	42
2.6	Passo 6. . . . .	43
2.7	Passo 7. . . . .	43

2.8	Passo 8. . . . .	44
3.1	Curvas francesas. . . . .	45
3.2	Medidas necessárias para molde-base. . . . .	46
3.3	Tabela de tamanhos. . . . .	46
3.4	Passo 1 e 2. . . . .	47
3.5	Passo 3 e 4. . . . .	48
3.6	Passo 5. . . . .	49
3.7	Passo 6. . . . .	50
3.8	Passo 7. . . . .	51
3.9	Passo 8. . . . .	52
3.10	Passo 9. . . . .	53
3.11	Passo 10. . . . .	54
3.12	Molde base para uma saia. . . . .	55
4.1	Curva de Bézier quadrática. . . . .	58
4.2	Curva de Bézier quadrática. . . . .	59
4.3	Curva de Bézier quadrática. . . . .	60
4.4	Passo 1. . . . .	64
4.5	Passo 2. . . . .	65
4.6	Passo 3. . . . .	65
4.7	Passo 4. . . . .	66
4.8	Passo 5. . . . .	66
4.9	Passo 6. . . . .	67
4.10	Reta perpendicular. . . . .	67
4.11	Reta paralela. . . . .	68
4.12	Passo 1. . . . .	69
4.13	Passo 2. . . . .	69

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Curvas de Bézier</b>	<b>13</b>
1.1 Contexto histórico . . . . .	13
1.2 Curvas parametrizadas . . . . .	14
1.3 Algoritmo de Casteljau . . . . .	16
1.3.1 Curva de Bézier de grau 1 . . . . .	17
1.3.2 Curva de Bézier de grau 2 . . . . .	18
1.3.3 Curva de Bézier de grau 3 . . . . .	20
1.4 Polinômio de Bernstein . . . . .	23
1.5 Equação para curva de Bézier de grau $n$ . . . . .	27
1.5.1 Curva de Bézier de grau 1 . . . . .	30
1.5.2 Curva de Bézier de grau 2 . . . . .	31
1.5.3 Curva de Bézier de grau 3 . . . . .	32
1.6 Propriedades das curvas de Bézier . . . . .	33
1.7 Forma matricial das curvas de Bézier . . . . .	35
1.7.1 Forma matricial da curva de Bézier de grau 1 . . . . .	36
1.7.2 Forma matricial da curva de Bézier de grau 2 . . . . .	36
1.7.3 Forma matricial da curva de Bézier de grau 3 . . . . .	37
<b>2 Curvas de Bézier no <i>GeoGebra</i> via algoritmo de Casteljau</b>	<b>38</b>
2.1 Curvas de Bézier quadráticas . . . . .	38
2.2 Curva de Bézier cúbica . . . . .	38
2.3 Curva de Bézier de grau $n$ . . . . .	39
<b>3 Algoritmo para modelagem de saia no <i>GeoGebra</i></b>	<b>45</b>
<b>4 Sequência didática</b>	<b>56</b>
<b>Conclusão</b>	<b>61</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>
<b>Apêndice</b>	<b>64</b>

# INTRODUÇÃO

Essa dissertação abordará as curvas de Bézier e seu comportamento no *GeoGebra*. As mesmas surgiram por volta da década de 60 e foram estudadas por Pierre Bézier e Paul de Casteljaou. O estudo sobre elas foi motivado pela indústria automobilística e nos dias atuais a curva é utilizada em diversas aplicações gráficas como *Illustrator*, *Freehand*, *Fireworks*, *GIMP*, *Photoshop*, *Processing*, *Inkscape* e *CorelDRAW*, e formatos de imagem vetorial como o SVG (*Wikipédia*, 2021).

No primeiro capítulo apresentaremos um contexto histórico e o que de fato fomentou o estudo sobre as curvas e apresentaremos o desenvolvimento da teoria que circunda o tema, como curvas parametrizadas, o algoritmo de Casteljaou, polinômio de Bernstein, propriedades e forma matricial.

No segundo capítulo foi desenvolvido um “passo a passo” para construção das curvas de Bézier no *GeoGebra*, com enfoque nas curvas de grau 1, grau 2 e grau 3.

No terceiro capítulo apresentaremos uma aplicação das curvas de Bézier na modelagem de uma saia, utilizando *GeoGebra*.

No quarto capítulo foi apresentada uma sequência didática que pudesse nortear a aula do docente sobre o tema.

E por fim, no apêndice, sugerimos uma atividade para aplicação juntamente com os discentes no decorrer da explanação do conteúdo.

# 1. CURVAS DE BÉZIER

Neste capítulo, apresentaremos as informações e definições necessárias para que possamos compreender e desenvolver as curvas de Bézier.

## 1.1. Contexto histórico

Uma das curvas mais importantes atualmente em projetos computacionais são as curvas de Bézier. Uma potencial da aplicação dessas curvas na indústria automobilística só foi apresentada em 1962, em um trabalho de Pierre Bézier, engenheiro Francês empregado na montadora Renault (*Wikipédia, 2021*). Nessa época, as montadoras de automóveis estavam interessadas em desenvolver algum *software* para desenhar curvas com maior precisão para obter peças diferentes que pudessem ser montadas corretamente e iniciar produção em massa dos automóveis. Alguns anos antes, em 1958, Paul de Casteljaou, físico e matemático, que trabalhava na Citroën, desenvolveu um algoritmo para os cálculos de uma determinada família de curvas, que eram as mesmas curvas estudadas por Bézier, porém seus trabalhos sobre este tema não foram publicados (*Wikipédia, 2021*). Assim, as curvas só foram, de fato, conhecidas, com a apresentação das mesmas por Bézier, por isso dá-se o nome dele a elas.

**Figura 1.1** Projeto de veículo utilizando curvas de Bézier.

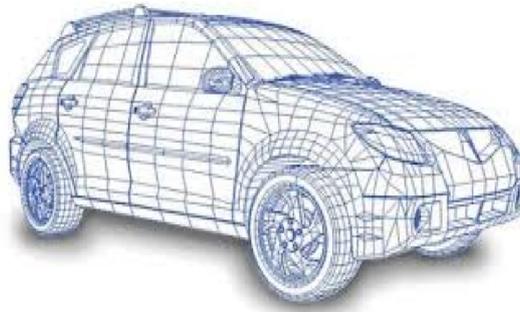


Fonte: Vídeo do *YouTube*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=7la1H5r1Pqg> >. Acesso em: 15 abril. 2021.

**Figura 1.2** Projeto de veículo utilizando curvas de Bézier.



Fonte: Blog da internet<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Disponível em: < <http://blog.brasilacademico.com/2014/10/curvas-bezier-como-o-computador-desenha.html> >. Acesso em: 15 abril. 2021.

A contribuição de Bézier e Casteljau para o design computacional é evidente. A princípio, com intuito de modelagem e aerodinâmica de veículos, e, atualmente, com diversas aplicações em CAD/CAM (computer-aided design/computer-aided manufacturing), matemática aplicada, indústria automobilística, arquitetura e design computacional (DUCAN, 2005; FARIN, 1986; FORREST, 1972; WATT, 2000). A maioria dos *softwares* de computação gráfica utilizam os conceitos de Curvas de Bézier. O resultado geral é, pelo menos em termos de design, um conjunto de ferramentas que permite aos designers descreverem curvas matematicamente, mesmo que tal matemática não seja visível.

## 1.2. Curvas parametrizadas

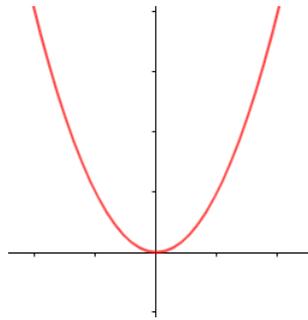
Antes de introduzirmos as curvas de Bézier, faremos nesta seção uma breve apresentação de curvas parametrizadas em  $\mathbb{R}^2$  com sua definição e alguns exemplos, visto que, dentre as representações das curvas de Bézier apresentadas neste trabalho, a mais utilizada será na forma paramétrica.

Vejamos a seguir a definição de curva parametrizada.

**Definição 1.2.1.** *Uma curva parametrizada é uma função  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , onde  $t \in I$  é o parâmetro da curva. A imagem  $\alpha(I) \in \mathbb{R}^2$  é chamado traço da curva  $\alpha$ .*

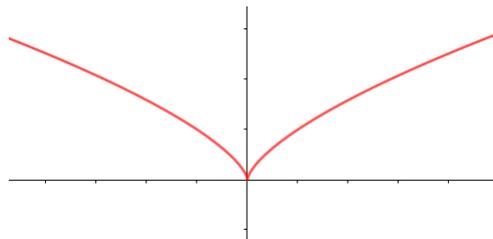
A seguir alguns exemplos de curvas parametrizadas.

**Exemplo 1.2.1.** *A curva parametrizada dada por  $\alpha(t) = (t, t^2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , tem como traço a parábola da figura esboçada a seguir.*

**Figura 1.3** Traço da curva.

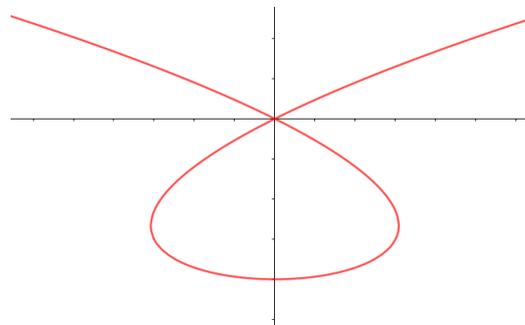
Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.2.2.** A curva parametrizada dada por  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , tem como traço a curva esboçada na figura seguir.

**Figura 1.4** Traço da curva.

Fonte: Autora, 2021.

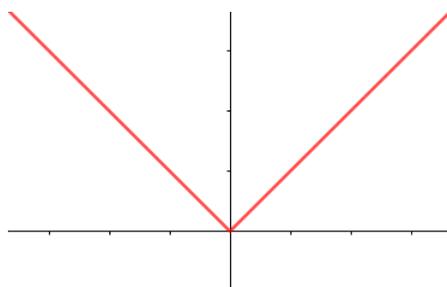
**Exemplo 1.2.3.** A curva parametrizada dada por  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , tem como traço a curva esboçada na figura seguir.

**Figura 1.5** Traço da curva.

Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.2.4.** A curva parametrizada dada por  $\alpha(t) = (t, |t|)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , tem como traço a curva esboçada na figura seguir.

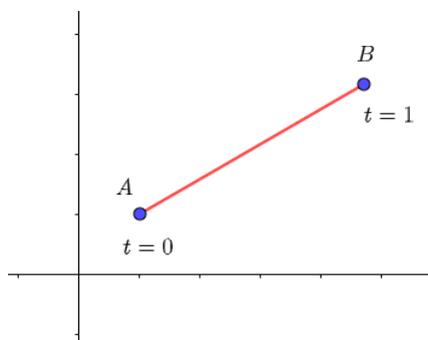
**Figura 1.6** Traço da curva.



Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.2.5.** Dados os pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$ , a curva parametrizada  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\alpha(t) = (1-t)A + tB = (x_a + (x_b - x_a)t, y_a + (y_b - y_a)t)$ , tem como traço o segmento de reta da figura a seguir.

**Figura 1.7** Traço da curva.



Fonte: Autora, 2021.

### 1.3. Algoritmo de Casteljau

O algoritmo de Casteljau é um método que nos permite gerar pontos das curvas de Bézier a partir de uma lista inicial de pontos, a partir daí, gerar essas curvas. O método consiste em aplicar uma sequência de interpolações lineares aos pontos  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$  prefixados, obtendo assim segmentos de retas e pontos sobre esses segmentos. Ao passo que repetimos o processo de construção dessas retas  $n - 1$  vezes obteremos pontos que constroem a curva de Bézier.

Para que possamos compreender melhor o funcionamento das curvas de Bézier daremos a seguir a definição de interpolação linear.

**Definição 1.3.1.** *Dados dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , a interpolação linear entre esses pontos é uma linha que liga esses dois pontos, ou seja, é a reta de equação*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

isto é,

$$y = y_1 + (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A seguir, apresentaremos um exemplo de interpolação linear.

**Exemplo 1.3.1.** *A interpolação linear entre os pontos de coordenadas  $(1, 0)$  e  $(2, 3)$  é a reta  $y = 3x - 3$*

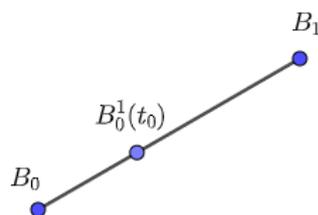
Dito isto, vejamos a seguir como funciona, de fato, o algoritmo de Casteljau, utilizando sucessivas interpolações lineares.

### 1.3.1. Curva de Bézier de grau 1

Sejam  $B_0$  e  $B_1$  pontos e  $t \in [0, 1]$ . O segmento de reta com extremidade nesses pontos tem equação paramétrica igual a,

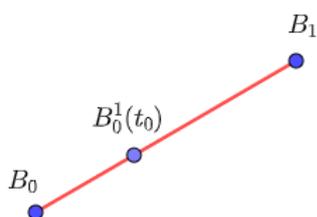
$$B_0^1(t) = (1 - t)B_0 + tB_1.$$

**Figura 1.8** Passo 1 da interpolação.



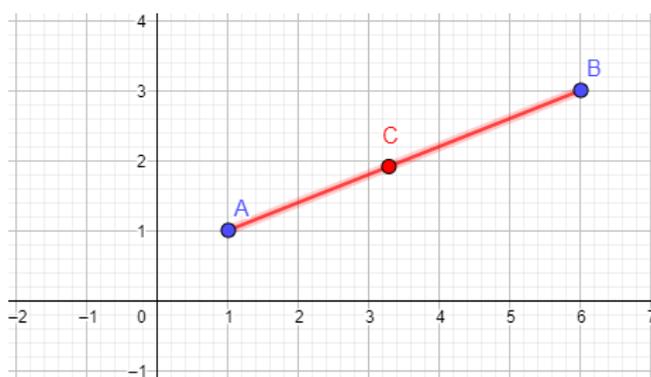
Fonte: Autora, 2021.

Note que, para cada  $t_0$  obteremos pontos  $B_0^1(t_0)$  sobre o segmento de reta  $B_0^1(t)$ . O conjunto formado por esses pontos quando  $t_0$  varia em  $[0, 1]$  formam a curva a qual chamaremos de curva de Bézier linear ou curva de Bézier de grau 1.

**Figura 1.9** Curva de Bézier linear.

Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.3.2.** A curva de Bézier determinada pelos pontos  $A = (1, 1)$  e  $B = (4, 3)$  é representada pela figura a seguir.

**Figura 1.10** Curva de Bézier linear.

Fonte: Autora, 2021.

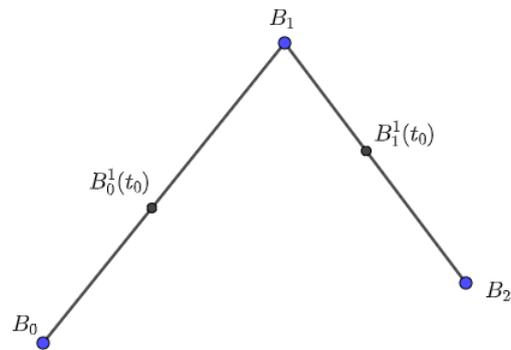
### 1.3.2. Curva de Bézier de grau 2

Sejam  $B_0, B_1$  e  $B_2$  pontos e  $t \in [0, 1]$ . As equações paramétricas dos segmentos de reta com extremidades em  $B_0$  e  $B_1$  e  $B_1$  e  $B_2$  são, respectivamente,

$$B_0^1(t) = (1 - t)B_0 + tB_1,$$

$$B_1^1(t) = (1 - t)B_1 + tB_2.$$

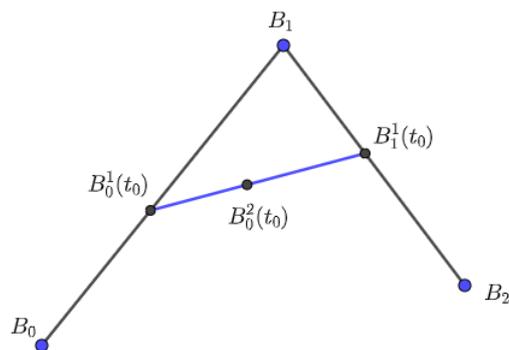
Fixado um  $t = t_0$ , tome os pontos  $B_0^1(t_0)$  e  $B_1^1(t_0)$ , nas retas  $B_0^1(t)$  e  $B_1^1(t)$ , respectivamente.

**Figura 1.11** Passo 1 da interpolação.

Fonte: Autora, 2021.

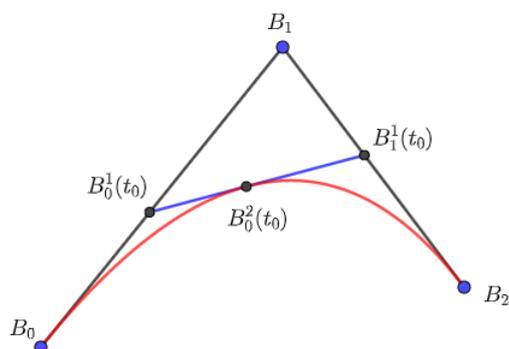
A equação do segmento de reta que passa por  $B_0^1(t_0)$  e  $B_1^1(t_0)$  é

$$B_0^2(t) = (1-t)B_0^1(t_0) + tB_1^1(t_0), t \in [0, 1].$$

**Figura 1.12** Passo 2 da interpolação.

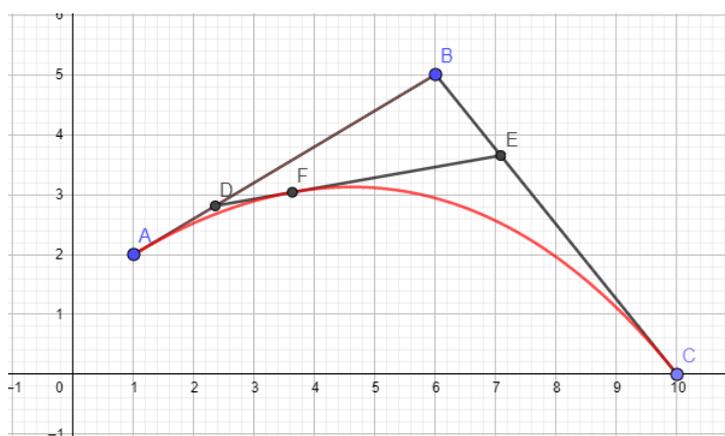
Fonte: Autora, 2021.

Para cada  $t_0 \in [0, 1]$  teremos um ponto  $B_0^2(t_0)$ . O conjunto formado por esses pontos  $B_0^2(t_0)$  determinam uma curva a qual chamaremos de curva de Bézier quadrática ou curva de Bézier de grau 2.

**Figura 1.13** Curva de Bézier quadrática.

Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.3.3.** A curva de Bézier quadrática determinada pelos pontos  $A = (1, 2)$ ,  $B = (6, 5)$  e  $C = (10, 0)$  é representada pela figura a seguir.

**Figura 1.14** Curva de Bézier quadrática.

Fonte: Autora, 2021.

### 1.3.3. Curva de Bézier de grau 3

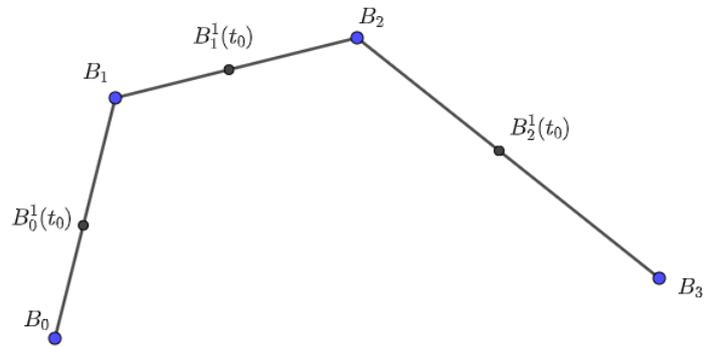
Sejam  $B_0, B_1, B_2$  e  $B_3$  pontos e  $t \in [0, 1]$ . A equação paramétrica dos segmentos de reta com extremidades em  $B_0$  e  $B_1$ ,  $B_1$  e  $B_2$ , e  $B_2$  e  $B_3$  são, respectivamente,

$$B_0^1(t) = (1-t)B_0 + tB_1,$$

$$B_1^1(t) = (1-t)B_1 + tB_2,$$

$$B_2^1(t) = (1-t)B_2 + tB_3.$$

Fixado um  $t = t_0$ , tome os pontos  $B_0^1(t_0), B_1^1(t_0)$  e  $B_2^1(t_0)$  nas retas  $B_0^1(t), B_1^1(t)$  e  $B_2^1(t)$ , respectivamente.

**Figura 1.15** Passo 1 da interpolação.

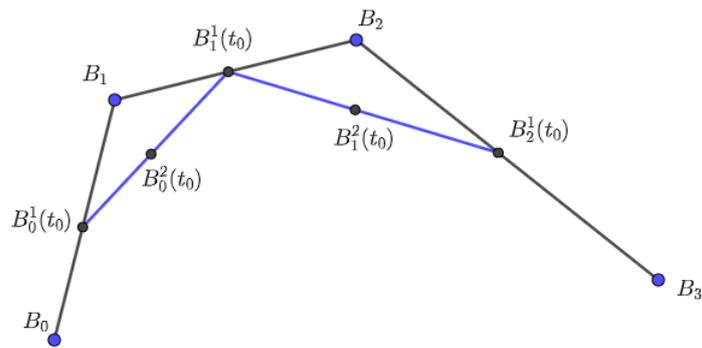
Fonte: Autora, 2021.

A equação dos segmentos de retas que passa pelos pontos  $B_0^1(t_0), B_1^1(t_0)$  e  $B_2^1(t_0)$  são,

$$B_0^2(t) = (1-t)B_0^1(t_0) + tB_1^1(t_0), t \in [0, 1],$$

$$B_1^2(t) = (1-t)B_1^1(t_0) + tB_2^1(t_0), t \in [0, 1].$$

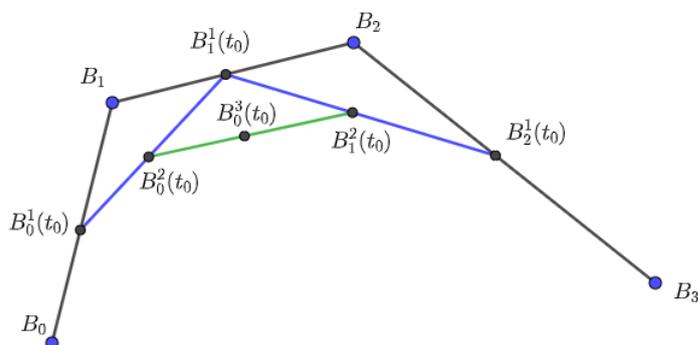
Com o mesmo  $t_0$  fixado, tome os pontos  $B_0^2(t_0)$  e  $B_1^2(t_0)$  pertencentes as retas  $B_0^2(t)$  e  $B_1^2(t)$ .

**Figura 1.16** Passo 2 da interpolação.

Fonte: Autora, 2021.

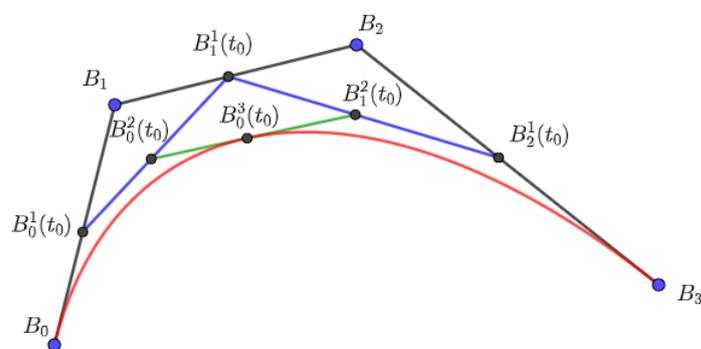
A equação do segmento de reta que passa pelos pontos  $B_0^2(t_0)$  e  $B_1^2(t_0)$  é

$$B_0^3(t) = (1-t)B_0^2(t_0) + tB_1^2(t_0), t \in [0, 1].$$

**Figura 1.17** Passo 3 da interpolação.

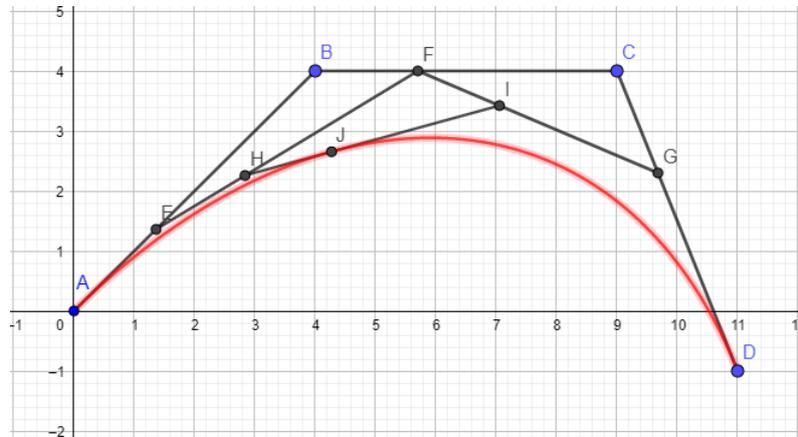
Fonte: Autora, 2021.

Para cada  $t_0 \in [0, 1]$  teremos um ponto  $B_0^3(t_0)$ . O conjunto formado por esses pontos  $B_0^3(t_0)$  determinam uma curva a qual chamaremos de curva de Bézier cúbica ou curva de Bézier de grau 3.

**Figura 1.18** Curva de Bézier cúbica.

Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.3.4.** A curva de Bézier cúbica determinada pelos pontos  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 4)$ ,  $C = (9, 4)$  e  $D = (11, -1)$  é representada pela figura a seguir.

**Figura 1.19** Curva de Bézier cúbica.

Fonte: Autora, 2021.

Podemos generalizar o algoritmo de Casteljau e assim definir as curvas de Bézier de grau arbitrário  $n$ . Segue a definição.

**Definição 1.3.2.** *Sejam dados  $B_0, B_1, \dots, B_n$  pontos do plano. Considere a recursão*

$$\begin{cases} B_i^r(t) = (1-t)B_i^{r-1}(t) + tB_{i+1}^{r-1}(t) \\ B_i^0 = B_i, \end{cases}$$

com  $r = 1, \dots, n$ ,  $i = 0, \dots, n-r$ .  $B_0^n(t)$  é um ponto da curva de Bézier e o conjunto dos pontos  $B_0^n(t)$  com  $t \in [0, 1]$  formam uma curva que é chamada curva de Bézier de grau  $n$ .

O polígono  $P$  cujos vértices são  $B_0, B_1, \dots, B_n$  é chamado de *polígono de Bézier* ou *polígono de controle* da curva  $B^n$  e os vértices  $B_0, B_1, \dots, B_n$  são chamados de *pontos de controle*.

Logo, definimos as curvas de Bézier como sendo o conjunto dos pontos  $B_0^n(t)$  determinados para cada  $t$ , com  $t \in [0, 1]$  e  $n$  determina o grau da curva.

## 1.4. Polinômio de Bernstein

Note que o algoritmo de Casteljau é um algoritmo recursivo que nos dá pontos sobre as curvas de Bézier e, nesta dissertação, usaremos o mesmo mais para fins geométricos. Entretanto seria interessante obtermos uma expressão que nos daria explicitamente as equações dessas curvas. Para isto, definiremos os polinômios de Bernstein e com o auxílio dele conseguiremos explicitar essas equações.

**Definição 1.4.1.** *Os polinômios de Bernstein são definidos por,*

$$P_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

onde,

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, i \in 0, 1, 2, \dots, n.$$

Vejamos nas proposições a seguir algumas das propriedades dos polinômios de Bernstein.

**Proposição 1.4.1.** *Os polinômios de Bernstein satisfazem a recursão,*

$$P_i^n(t) = (1-t)P_i^{n-1}(t) + tP_{i-1}^{n-1}(t),$$

com  $P_0^0(t) = 1$  e  $P_i^n(t) = 0$  para  $i \notin \{0, 1, \dots, n\}$ .

*Demonstração.* De fato, usando a relação de Stiffel,

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p},$$

com  $n, p \in \mathbb{N}$  e  $n \geq p$ , e fazendo algumas manipulações obteremos,

$$\begin{aligned} P_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \left[ \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} \right] ((1-t)(1-t)^{-1}) + \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} t (1-t)^{n-1-i+1} \\ &= \left[ \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} \right] ((1-t)^{-1} - t(1-t)^{-1}) + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-1-i+1} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} - t \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-1-i+1} \\ &= P_i^{n-1}(t) - tP_i^{n-1}(t) + tP_{i-1}^{n-1}(t) \\ &= (1-t)P_i^{n-1}(t) + tP_{i-1}^{n-1}(t). \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.4.2.** *Os polinômios de Bernstein formam uma partição da unidade, ou seja,*

$$\sum_{i=0}^n P_i^n(t) = 1.$$

*Demonstração.* De fato, usando a fórmula binomial, obtemos,

$$\begin{aligned} 1 &= [t + (1-t)]^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n P_i^n(t). \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.4.3.** Os polinômios de Bernstein são positivos em  $[0, 1]$ .

*Demonstração.* De fato, visto que  $t \in [0, 1]$ , temos  $t^i(1-t)^{n-i} \geq 0$ , portanto da definição temos,

$$P_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \geq 0, \forall n, i \in \mathbb{N}, i \leq n.$$

□

Podemos perceber, graficamente, que os polinômios de Bernstein de grau 1, 2 e 3 são positivos. Vejamos isso nos exemplos a seguir.

**Exemplo 1.4.1.** (Polinômios de Bernstein de grau 1) Sabemos, utilizando a definição de polinômio de Bernstein, que os polinômios de grau 1 são,

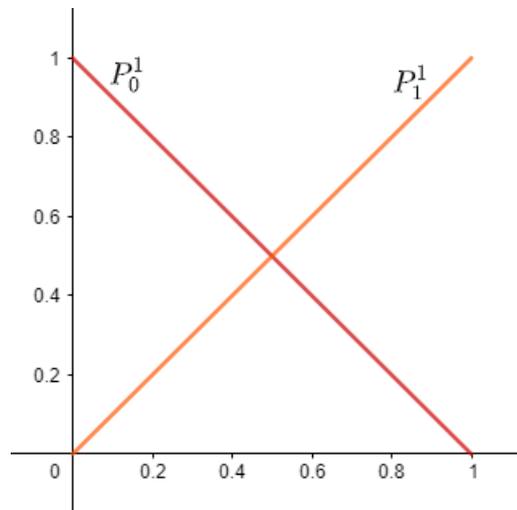
$$P_0^1(t) = \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = 1-t,$$

e

$$P_1^1(t) = \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = t,$$

com  $t \in [0, 1]$ . Então, graficamente temos,

**Figura 1.20** Polinômios de Bernstein de grau 1.



Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.4.2.** (Polinômios de Bernstein de grau 2) Sabemos, utilizando a definição de polinômio de Bernstein, que os polinômios de grau 2 são,

$$P_0^2(t) = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = (1-t)^2,$$

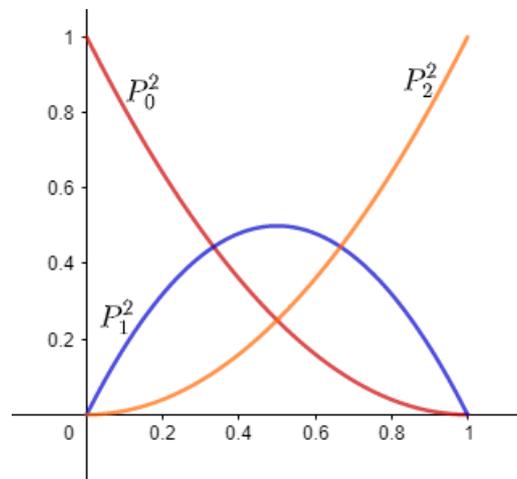
$$P_1^2(t) = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t(1-t),$$

e

$$P_2^2(t) = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2,$$

com  $t \in [0, 1]$ . Então, graficamente temos,

**Figura 1.21** Polinômios de Bernstein de grau 2.



Fonte: Autora, 2021.

**Exemplo 1.4.3.** (Polinômios de Bernstein de grau 3) Sabemos, utilizando a definição de polinômio de Bernstein, que os polinômios de grau 3 são,

$$P_0^3(t) = \binom{3}{0} t^0 (1-t)^{3-0} = (1-t)^3,$$

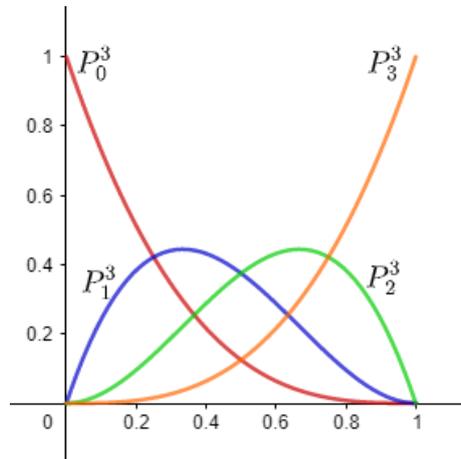
$$P_1^3(t) = \binom{3}{1} t^1 (1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2,$$

$$P_2^3(t) = \binom{3}{2} t^2 (1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t),$$

e

$$P_3^3(t) = \binom{3}{3} t^3 (1-t)^{3-3} = t^3,$$

com  $t \in [0, 1]$ . Então, graficamente temos,

**Figura 1.22** Polinômios de Bernstein de grau 3

Fonte: Autora, 2021.

## 1.5. Equação para curva de Bézier de grau $n$

Podemos expressar a equação das curvas de Bézier a partir do Polinômio de Bernstein, é o que veremos no teorema a seguir.

**Teorema 1.5.1.** *Sejam  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$  os pontos de controle. Então a curva de Bézier de grau  $n$  produzida pelo algoritmo de Casteljau é dada por,*

$$B^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t),$$

onde  $P_i^n(t)$  são os polinômios de Bernstein,  $n$  é o grau da curva e  $t \in [0, 1]$  é um parâmetro real.

*Demonstração.* Sejam  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$  pontos de controle e  $P_i^n(t)$  polinômios de Bernstein.

Utilizando a proposição 1.4.1, a definição 1.3.2. e fazendo algumas manipulações, obtemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t) &= B_0 P_0^n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} B_i P_i^n(t) + B_n P_n^n \\
&= B_0(1-t)P_0^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} (B_i(1-t)P_i^{n-1}(t) + tB_i P_{i-1}^{n-1}(t)) + B_n t P_{n-1}^{n-1}(t) \\
&= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} B_i P_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=1}^n B_i P_{i-1}^{n-1}(t) \\
&= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} B_i P_i^{n-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-1} B_{i+1} P_i^{n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t)B_i + tB_{i+1}] P_i^{n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} B_i^1(t) P_i^{n-1}(t).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} B_i^1(t) P_i^{n-1}(t) &= B_0^1(t) P_0^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-2} B_i^1(t) P_i^{n-1}(t) + B_{n-1}^1(t) P_{n-1}^{n-1} \\
&= B_0^1(t)(1-t)P_0^{n-2}(t) + \sum_{i=0}^{n-2} (B_i^1(t)(1-t)P_i^{n-2}(t) + tB_i^1(t)P_{i-1}^{n-2}(t)) \\
&\quad + B_{n-1}^1(t)tP_{n-2}^{n-2}(t) \\
&= (1-t) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^1(t) P_i^{n-2}(t) + t \sum_{i=1}^{n-1} B_i^1(t) P_{i-1}^{n-2}(t) \\
&= (1-t) \sum_{i=0}^{n-2} B_i^1(t) P_i^{n-2}(t) + t \sum_{i=0}^{n-2} B_{i+1}^1(t) P_i^{n-2}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} [(1-t)B_i^1(t) + tB_{i+1}^1(t)] P_i^{n-2}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} B_i^2(t) P_i^{n-2}(t).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n B_i(t) P_i^n(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} B_i^1(t) P_i^{n-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} B_i^2(t) P_i^{n-2}(t).
\end{aligned}$$

Afirmamos que,

$$\sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n-j} B_i^j(t) P_i^{n-j}(t).$$

Para demonstração iremos utilizar indução finita sobre  $j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ . Sendo assim, para  $j = 0$ , temos,

$$\sum_{i=0}^{n-0} B_i^0(t) P_i^{n-0}(t) = \sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t).$$

Suponhamos a afirmação válida para  $j = k$  e demonstraremos que a mesma é válida para  $j = k + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t) &= \sum_{i=0}^{n-k} B_i^k(t) P_i^{n-k}(t) \\ &= B_0^k(t) P_0^{n-k}(t) + \sum_{i=1}^{n-k-1} B_i^k(t) P_i^{n-k}(t) + B_{n-k}^k(t) P_{n-k}^{n-k}(t) \\ &= B_0^k(t) (1-t) P_0^{n-k-1}(t) + \sum_{i=1}^{n-k-1} (B_i^k(t) (1-t) P_i^{n-k-1}(t) + t B_i^k(t) P_{i-1}^{n-k-1}(t)) \\ &\quad + B_{n-k}^k(t) t P_{n-k-1}^{n-k-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-k-1} B_i^k(t) P_i^{n-k-1}(t) + t \sum_{i=1}^{n-k} B_i^k(t) P_{i-1}^{n-k-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-k-1} B_i^k(t) P_i^{n-k-1}(t) + t \sum_{i=0}^{n-k-1} B_{i+1}^k(t) P_i^{n-k-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k-1} [(1-t) B_i^k(t) + t B_{i+1}^k(t)] P_i^{n-k-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k-1} B_i^{k+1}(t) P_i^{n-k-1}(t). \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação é válida. Assim, basta tomar  $j = n$ . Então teremos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t) &= \sum_{i=0}^{n-n} B_i^n(t) P_i^{n-n}(t) \\ &= B_0^n(t) P_0^0(t) \\ &= B_0^n(t) \\ &= B^n(t). \end{aligned}$$

□

Escreveremos a seguir as equações explícitas das curvas de Bézier linear, quadrática e cúbica utilizando o polinômio de Bernstein.

### 1.5.1. Curva de Bézier de grau 1

Como a curva de Bézier é linear então  $n = 1$  e  $i \in \{0, 1\}$ , assim, pelo teorema 1.5.1, segue que,

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^n B_i \binom{1}{i} t^i (1-t)^{1-i} \\ &= B_0 \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} + B_1 \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} \\ &= (1-t)B_0 + tB_1. \end{aligned}$$

Note que, utilizando a recorrência dada pelo algoritmo de Casteljau, obtemos exatamente a mesma equação.

De fato, sejam  $B_0$  e  $B_1$  pontos de controle e  $t \in [0, 1]$ . Pelo algoritmo de Casteljau podemos escrever,

$$B_0^1(t) = (1-t)B_0^0 + tB_1^0,$$

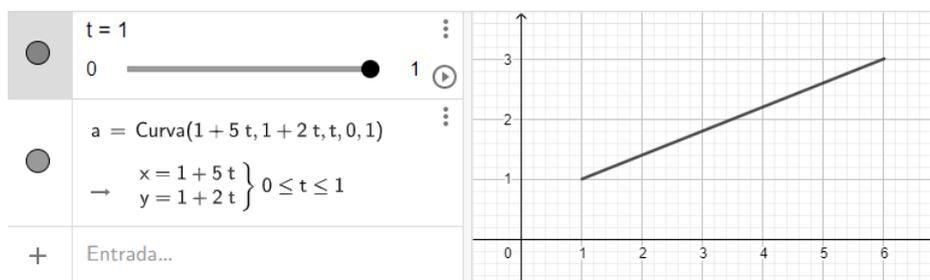
ou seja,

$$B_0^1(t) = (1-t)B_0 + tB_1.$$

**Exemplo 1.5.1.** Expressão paramétrica da curva de Bézier linear cujos pontos de controle são  $B_0 = (1, 1)$  e  $B_1 = (6, 3)$ .

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)(1, 1) + t(6, 3) \\ &= (1 + 5t, 1 + 2t). \end{aligned}$$

**Figura 1.23** Curva de Bézier linear.



Fonte: Autora, 2021.

### 1.5.2. Curva de Bézier de grau 2

Como a curva de Bézier é quadrática então  $n = 2$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , assim, pelo teorema 1.5.1, segue que,

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^2 B_i \binom{2}{i} t^i (2-t)^{2-i} \\ &= B_0 \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} + B_1 \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} + B_2 \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} \\ &= (1-t)^2 B_0 + 2t(1-t)B_1 + t^2 B_2. \end{aligned}$$

Note que, utilizando a recorrência dada pelo algoritmo de Casteljau, obteremos exatamente a mesma equação.

De fato, sejam  $B_0, B_1$  e  $B_2$  pontos de controle e  $t \in [0, 1]$ . Pelo algoritmo de Casteljau podemos escrever,

$$B_0^2(t) = (1-t)B_0^1(t) + tB_1^1(t),$$

onde  $B_0^1(t) = (1-t)B_0 + tB_1$ , como visto na curva linear e também pelo algoritmo de Casteljau, temos,

$$B_1^1(t) = (1-t)B_1^0(t) + tB_2^0(t),$$

ou seja,

$$B_1^1(t) = (1-t)B_1 + tB_2.$$

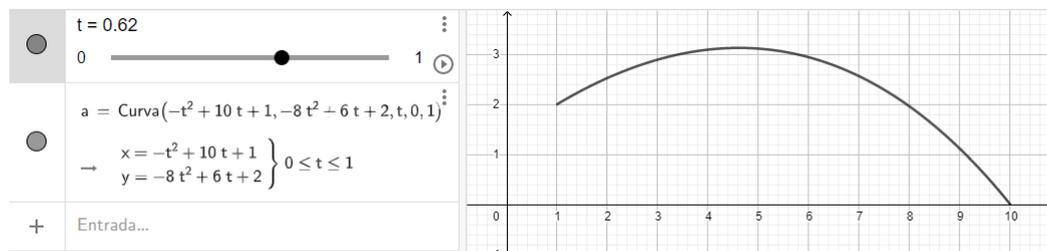
Logo,

$$\begin{aligned} B_0^2(t) &= (1-t)B_0^1(t) + tB_1^1(t) \\ &= (1-t)[(1-t)B_0 + tB_1] + t[(1-t)B_1 + tB_2] \\ &= (1-t)^2 B_0 + t(1-t)B_1 + t(1-t)B_1 + t^2 B_2 \\ &= (1-t)^2 B_0 + 2t(1-t)B_1 + t^2 B_2. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.5.2.** Expressão paramétrica da curva de Bézier quadrática cujos pontos de controle são  $B_0 = (1, 2)$ ,  $B_1 = (6, 5)$  e  $B_2 = (10, 0)$ .

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)^2(1, 2) + 2t(1-t)(6, 5) + t^2(10, 0) \\ &= (-t^2 + 10t + 1, -8t^2 + 6t + 2). \end{aligned}$$

**Figura 1.24** Curva de Bézier quadrática.



Fonte: Autora, 2021.

### 1.5.3. Curva de Bézier de grau 3

Como a curva de Bézier é cúbica então  $n = 3$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , assim, pelo teorema 1.5.1, segue que,

$$\begin{aligned}
 B(t) &= \sum_{i=0}^3 B_i \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \\
 &= B_0 \binom{3}{0} t^0 (1-t)^{3-0} + B_1 \binom{3}{1} t^1 (1-t)^{3-1} + B_2 \binom{3}{2} t^2 (1-t)^{3-2} \\
 &\quad + B_3 \binom{3}{3} t^3 (1-t)^{3-3} \\
 &= (1-t)^3 B_0 + 3t(1-t)^2 B_1 + 3t^2(1-t) B_2 + t^3 B_3.
 \end{aligned}$$

Note que, utilizando a recorrência dada pelo algoritmo de Casteljau, obteremos exatamente a mesma equação.

Sejam  $B_0, B_1, B_2$  e  $B_3$  pontos de controle e  $t \in [0, 1]$ . Pelo algoritmo de Casteljau podemos escrever,

$$B_0^3(t) = (1-t)B_0^2(t) + tB_1^2(t),$$

onde,

$$B_0^2(t) = (1-t)^2 B_0 + 2t(1-t)B_1 + t^2 B_2.$$

Como vimos na curva de Bézier de grau 2 e utilizando o algoritmo de Casteljau temos,

$$\begin{aligned}
 B_1^2(t) &= (1-t)B_1^1(t) + tB_2^1(t) \\
 &= (1-t)[(1-t)B_1 + tB_2] + t[1-t)B_2 + tB_3] \\
 &= (1-t)^2 B_1 + t(1-t)B_2 + t(1-t)B_2 + t^2 B_3 \\
 &= (1-t)^2 B_1 + 2t(1-t)B_2 + t^2 B_3,
 \end{aligned}$$

visto que  $B_1^1(t) = (1-t)B_1 + tB_2$ , como vimos na curva de Bézier de grau 2.

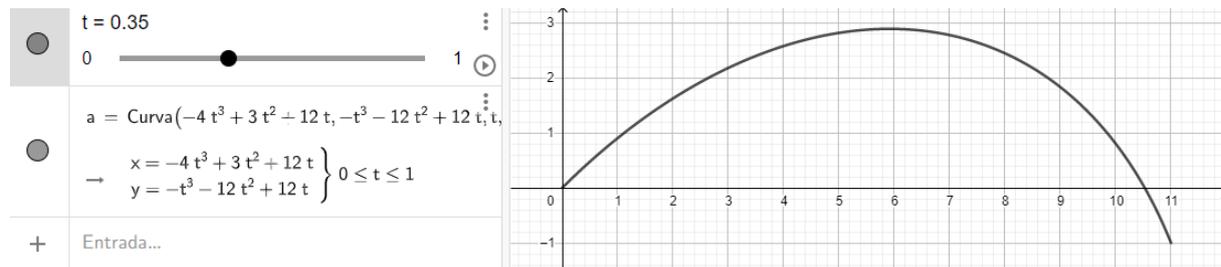
Logo,

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)B_0^2(t) + tB_1^2(t) \\ &= (1-t)[(1-t)^2B_0 + 2t(1-t)B_1 + t^2B_2] + t[(1-t)^2B_1 + 2t(1-t)B_2 + t^2B_3] \\ &= (1-t)^3B_0 + 2t(1-t)^2B_1 + t^2(1-t)B_2 + t(1-t)^2B_1 + 2t^2(1-t)B_2 + t^3B_3 \\ &= (1-t)^3B_0 + 3t(1-t)^2B_1 + 3t^2(1-t)B_2 + t^3B_3. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.5.3.** Exemplo da expressão paramétrica da curva de Bézier cúbica cujos pontos de controle são  $B_0 = (0,0)$ ,  $B_1 = (4,4)$ ,  $B_2(9,4)$  e  $B_3 = (11,-1)$ .

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)^3(0,0) + 3t(1-t)^2(4,4) + 3t^2(1-t)(9,4) + t^3(11,-1) \\ &= (-4t^3 + 3t^2 + 12t, -t^3 - 12t^2 + 12t). \end{aligned}$$

**Figura 1.25** Curva de Bézier cúbica.



Fonte: Autora, 2021.

## 1.6. Propriedades das curvas de Bézier

Vejamos a seguir algumas propriedades das curvas de Bézier. Neste trabalho não daremos muita ênfase a essas propriedades, mas a demonstrações dessas e de outras propriedades interessantes podem ser encontradas no livro de Geraldo Farin, ver na referência.

- 1) *Interpolação dos pontos finais*: a curva de Bézier passa pelos pontos de controle  $B_0$  e  $B_n$ . De fato,

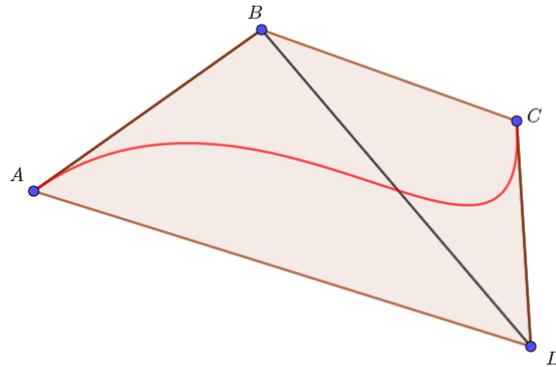
$$B^n(0) = \sum_{i=0}^n B_i \binom{n}{i} 0^i (1-0)^{n-i} = B_0,$$

e

$$B^n(1) = \sum_{i=0}^n B_i \binom{n}{i} 1^i (1-1)^{n-i} = B_n.$$

- 2) *Propriedade de casco convexo*: A curva de Bézier estará contida no maior polígono convexo formado pelos seus pontos de controle;

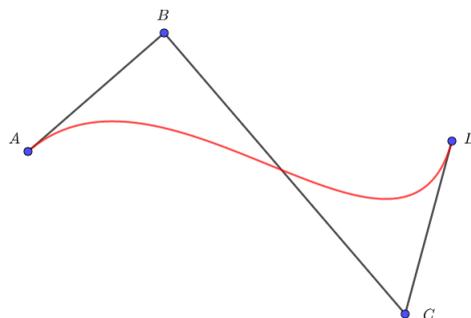
**Figura 1.26** Curva de Bézier quadrática.



Fonte: Autora, 2021.

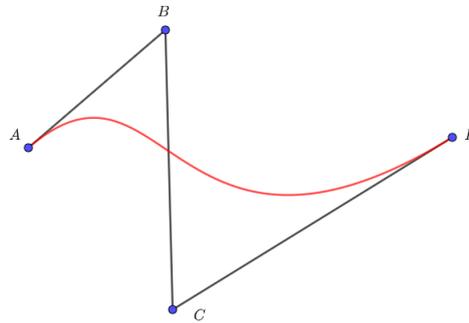
- 3) *Precisão linear*: Se os pontos de controle estiverem distribuídos em linha reta, então a curva de Bézier será uma reta;
- 4) *Controle pseudolocal*: Se movermos apenas um ponto de controle a curva mudará seu formato;

**Figura 1.27** Curva de Bézier quadrática.



Fonte: Autora, 2021.

**Figura 1.28** Curva de Bézier quadrática.



Fonte: Autora, 2021.

## 1.7. Forma matricial das curvas de Bézier

Obtivemos, através dos polinômios de Bernstein, equações explícitas para curvas de Bézier de grau 1, 2 e 3. Iremos desenvolver agora a forma matricial para cada uma dessas equações. A forma matricial é uma outra maneira de expressar as curvas de Bézier.

Sabemos que as equações das curvas de Bézier obtidas pelo polinômio de Bernstein se escrevem da forma

$$B^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i P_i^n(t).$$

Podemos escrever a equação acima como o produto,

$$B^n(t) = ( B_0 \quad \dots \quad B_n ) \cdot \begin{pmatrix} P_0^n(t) \\ \vdots \\ P_n^n(t) \end{pmatrix},$$

onde,

$$\begin{pmatrix} P_0^n(t) \\ \vdots \\ P_n^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix},$$

e a matriz  $M = \{m_{ij}\}$  é a *matriz de coeficientes da base Bézier*. Escreveremos a seguir a forma matricial das curvas de Bézier de grau 1, 2 e 3.

### 1.7.1. Forma matricial da curva de Bézier de grau 1

Escrevendo a forma matricial da equação das curvas de Bézier de grau 1 obtidas através dos polinômios de Bernstein obtemos,

$$\begin{aligned} B_0^1 &= (1-t)B_0 + tB_1 \\ &= (B_0 \ B_1) \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \\ &= (B_0 \ B_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.7.1.** Utilizando a forma matricial das curvas de Bézier, encontramos a equação da curva linear cujos pontos de controle são  $B_0 = (1, 1)$  e  $B_1 = (6, 3)$ .

$$\begin{aligned} B_0^1 &= ((1, 1) \ (6, 3)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \\ &= ((1, 1) \ (5, 2)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \\ &= (1, 1) + (5, 2)t \\ &= (1 + 5t, 1 + 2t). \end{aligned}$$

Note que estamos considerando cada ponto como uma entrada na matriz, assim a multiplicação entre as matrizes não se dá na forma usual.

### 1.7.2. Forma matricial da curva de Bézier de grau 2

Escrevendo a forma matricial da equação das curvas de Bézier de grau 2 obtidas através dos polinômios de Bernstein obtemos,

$$\begin{aligned} B_0^2 &= (1-t)^2 B_0 + 2t(1-t)B_1 + t^2 B_2 \\ &= (B_0 \ B_1 \ B_2) \cdot \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{pmatrix} \\ &= (B_0 \ B_1 \ B_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.7.2.** Utilizando a forma matricial das curvas de Bézier, encontramos a equação da

curva quadrática cujos pontos de controle são  $B_0 = (1, 2)$ ,  $B_1 = (6, 5)$  e  $B_2 = (10, 0)$ .

$$\begin{aligned}
 B^2 &= \left( (1, 2) \quad (6, 5) \quad (10, 0) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \\
 &= \left( (1, 2) \quad (10, 14) \quad (-1, -8) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \\
 &= (1, 2) + (10, 14)t + (-1, -8)t^2 \\
 &= (1 + 10t - t^2, 2 + 14t - 8t^2).
 \end{aligned}$$

### 1.7.3. Forma matricial da curva de Bézier de grau 3

Escrevendo a forma matricial da equação das curvas de Bézier de grau 2 obtidas através dos polinômios de Bernstein obtemos,

$$\begin{aligned}
 B_0^3 &= (1-t)^3 B_0 + 3t(1-t)^2 B_1 + 3t^2(1-t) B_2 + t^3 B_3 \\
 &= \left( B_0 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{pmatrix} \\
 &= \left( B_0 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 1.7.3.** Utilizando a forma matricial das curvas de Bézier, encontramos a equação da curva cúbica cujos pontos de controle são  $B_0 = (0, 0)$ ,  $B_1 = (4, 4)$ ,  $B_2 = (9, 4)$  e  $B_3 = (11, -1)$ .

$$\begin{aligned}
 B^3 &= \left( (0, 0) \quad (4, 4) \quad (9, 4) \quad (11, -1) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \\
 &= \left( (0, 0) \quad (12, 12) \quad (3, -12) \quad (-4, -1) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \\
 &= (0, 0) + (12, 12)t + (3, -12)t^2 + (-4, -1)t^3 \\
 &= (12t + 3t^2 - 4t^3, 12t - 12t^2 - t^3).
 \end{aligned}$$

## 2. CURVAS DE BÉZIER NO *GeoGebra* VIA ALGORITMO DE CASTELJAU

O *GeoGebra* é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de usar e *GeoGebra* possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (*GeoGebra*, 2021). O mesmo pode ser utilizado de forma *online* ou pode ser feito o seu *download* tanto em dispositivos móveis quanto em computadores e *notebooks*. Descreveremos agora um passo a passo de como construir as curvas de Bézier seguindo o processo feito por Casteljaou no aplicativo online "*GeoGebra Classic*".

### 2.1. Curvas de Bézier quadráticas

- Marque os pontos de controle  $B_1, B_2$  e  $B_3$  e trace os segmentos de retas  $\overline{B_1B_2}$  e  $\overline{B_2B_3}$ ;
- Com a ferramenta "controle deslizante" defina um parâmetro  $t$ , com intervalo mínimo igual a 0 e máximo 1, incremento igual a 0.01;
- Insira a equação dos segmentos de retas  $\overline{B_1B_2}$  e  $\overline{B_2B_3}$ . Essas equações serão definidas em função do parâmetro  $t$  que definimos anteriormente. Note que, quando fizermos o parâmetro  $t$  variar estaremos com pontos em cima de cada um desses 2 segmentos de retas. Chamaremos esses pontos de  $B_1^1, B_2^1$ ;
- Trace o segmento de reta  $\overline{B_1^1B_2^1}$ ;
- Observe que, quando variamos  $t$  obteremos pontos no segmento de reta  $\overline{B_1^1B_2^1}$ . Com a ferramenta "lugar geométrico" clique nesse ponto e a curva de Bézier será traçada; outro modo é clicar com o botão direito nesse ponto, ativar a opção "exibir rastro" e clicar para iniciar o processo de  $t$  variar. O caminho traçado por esse ponto irá formar a curva de Bézier.

### 2.2. Curva de Bézier cúbica

- Marque os pontos de controle  $B_1, B_2, B_3$  e  $B_4$  e trace os segmentos de retas  $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}$  e  $\overline{B_3B_4}$ ;
- Com a ferramenta "controle deslizante" defina um parâmetro  $t$ , com intervalo mínimo igual a 0 e máximo 1, incremento igual a 0.01;

- Insira a equação dos segmentos de retas  $\overline{B_1B_2}$ ,  $\overline{B_2B_3}$  e  $\overline{B_3B_4}$ . Essas equações serão definidas em função do parâmetro  $t$  que definimos anteriormente. Note que, quando fizermos o parâmetro  $t$  variar estaremos com pontos em cima de cada um desses 3 segmentos de retas. Chamaremos esses pontos de  $B_1^1$ ,  $B_2^1$ , e  $B_3^1$ ;
- Trace os segmentos de retas  $\overline{B_1^1B_2^1}$  e  $\overline{B_2^1B_3^1}$ ;
- Insira a equação dos segmentos de retas  $\overline{B_1^1B_2^1}$  e  $\overline{B_2^1B_3^1}$ . Essas equações serão definidas em função do parâmetro  $t$  que definimos anteriormente. Note que, quando fizermos o parâmetro  $t$  variar estaremos com pontos em cima de cada um desses 2 segmentos de retas. Chamaremos esses pontos de  $B_1^2$  e  $B_2^2$ ;
- Trace o segmento de reta  $\overline{B_1^2B_2^2}$ ;
- Observe que, quando variamos  $t$  obteremos pontos no segmento de reta  $\overline{B_1^2B_2^2}$ . Com a ferramenta “lugar geométrico” clique nesse ponto e a curva de Bézier será traçada; outro modo é clicar com o botão direito nesse ponto, ativar a opção “exibir rastro” e clicar para iniciar o processo de  $t$  variar. O caminho traçado por esse ponto irá formar a curva de Bézier.

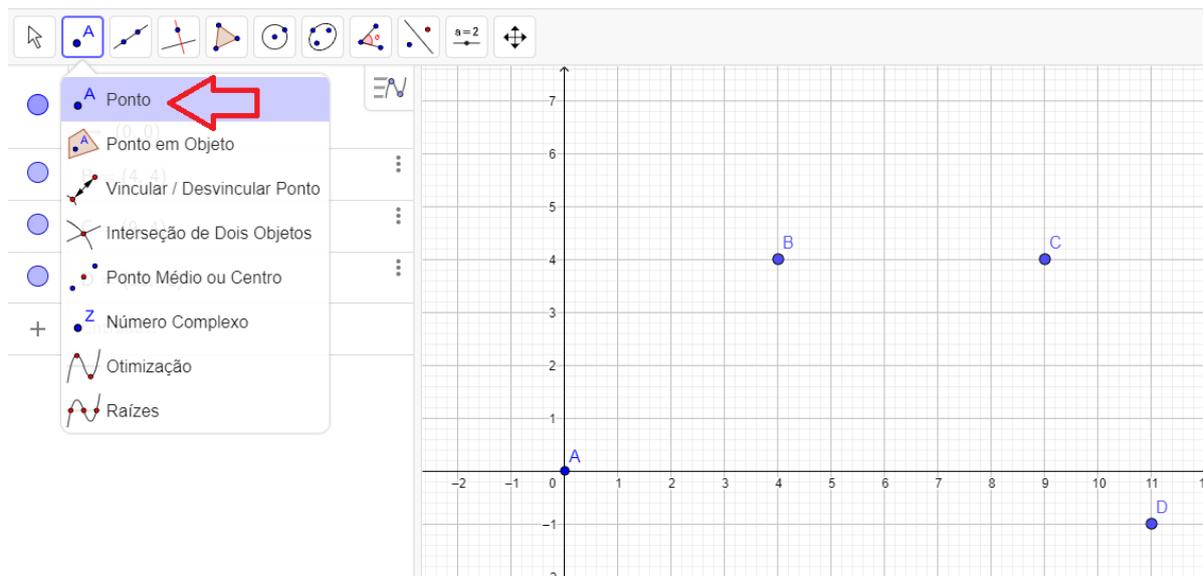
### 2.3. Curva de Bézier de grau $n$

- Marque os pontos de controle  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ;
- Trace os segmentos de retas  $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, \dots, \overline{B_{n-1}B_n}$ ;
- Com a ferramenta “controle deslizante” defina um parâmetro  $t$ , com intervalo mínimo igual a 0 e máximo 1, incremento igual a 0.01;
- Insira a equação dos segmentos de retas  $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, \dots, \overline{B_{n-1}B_n}$ . Essas equações serão definidas em função do parâmetro  $t$  que definimos anteriormente. Note que, quando fizermos o parâmetro  $t$  variar estaremos com pontos em cima de cada um desses  $n - 1$  segmentos de retas. Chamaremos esses pontos de  $B_1^1, B_2^1, \dots, B_{n-1}^1$ ;
- Trace os segmentos de retas  $\overline{B_1^1B_2^1}, \overline{B_2^1B_3^1}, \dots, \overline{B_{n-2}^1B_{n-1}^1}$ ;
- Insira a equação dos segmentos de retas  $\overline{B_1^1B_2^1}, \overline{B_2^1B_3^1}, \dots, \overline{B_{n-2}^1B_{n-1}^1}$ . Essas equações serão definidas em função do parâmetro  $t$  que definimos anteriormente. Note que, quando fizermos o parâmetro  $t$  variar estaremos com pontos em cima de cada um desses  $n - 2$  segmentos de retas. Chamaremos esses pontos de  $B_1^2, B_2^2, \dots, B_{n-2}^2$ ;
- Repita o processo de construção de segmentos de retas  $n - 1$  vezes;
- Observe que, quando variamos  $t$  obteremos pontos no último segmento de reta. Com a ferramenta “lugar geométrico” clique nesse ponto e a curva de Bézier será traçada; outro

modo é clicar com o botão direito nesse ponto, ativar a opção “exibir rastro” e clicar para iniciar o processo de  $t$  variar. O caminho traçado por esse ponto irá formar a curva de Bézier.

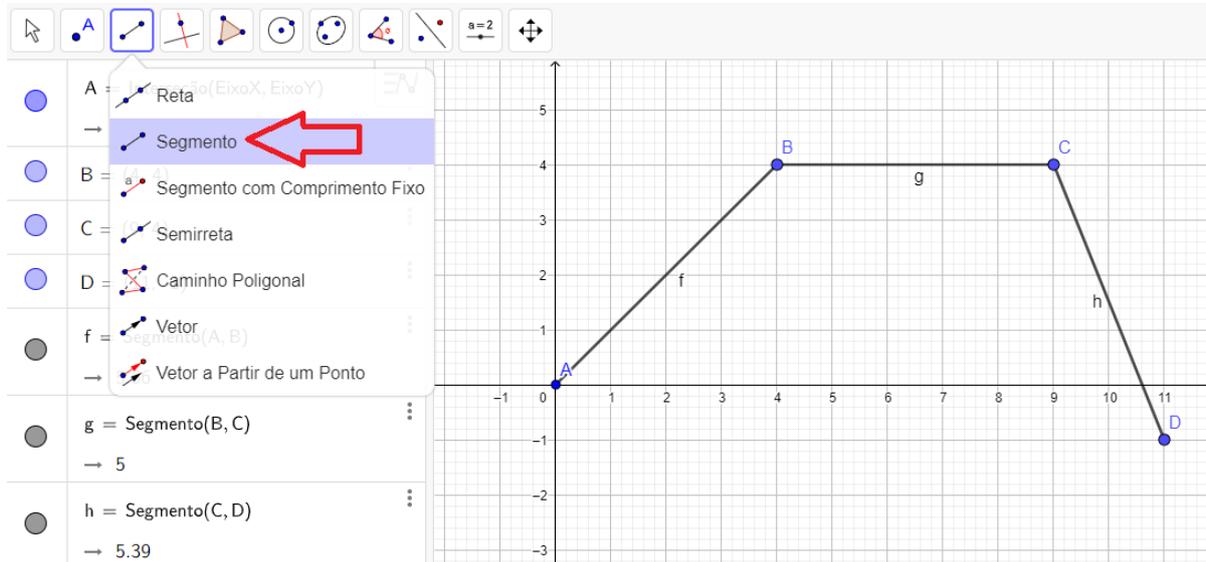
**Exemplo 2.3.1.** *Vejam os passos a seguir no GeoGebra para a construção da curva de Bézier cúbica cujos pontos de controle são  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 4)$ ,  $C = (9, 4)$  e  $D = (11, -1)$ , do exemplo 1.3.4.*

**Figura 2.1** Passo 1.



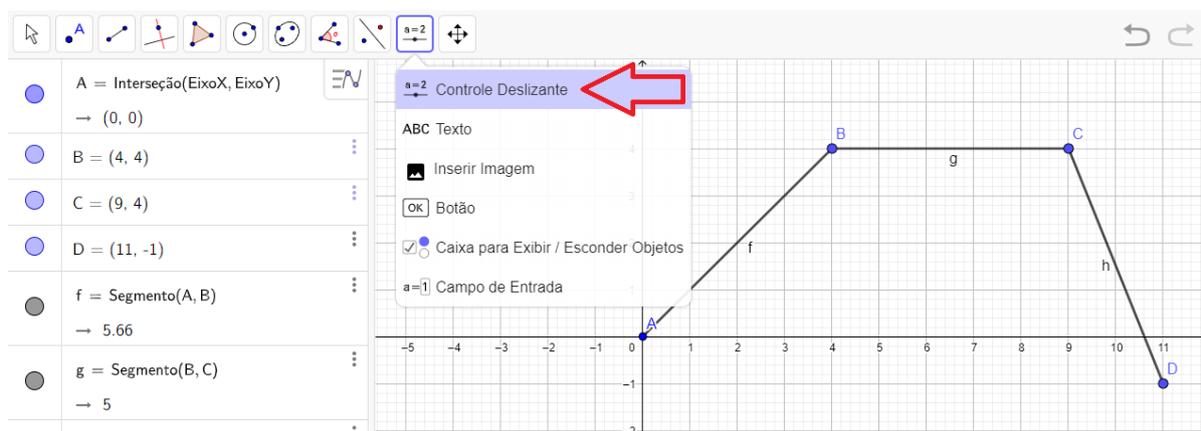
Fonte: Autora, 2021.

Figura 2.2 Passo 2.



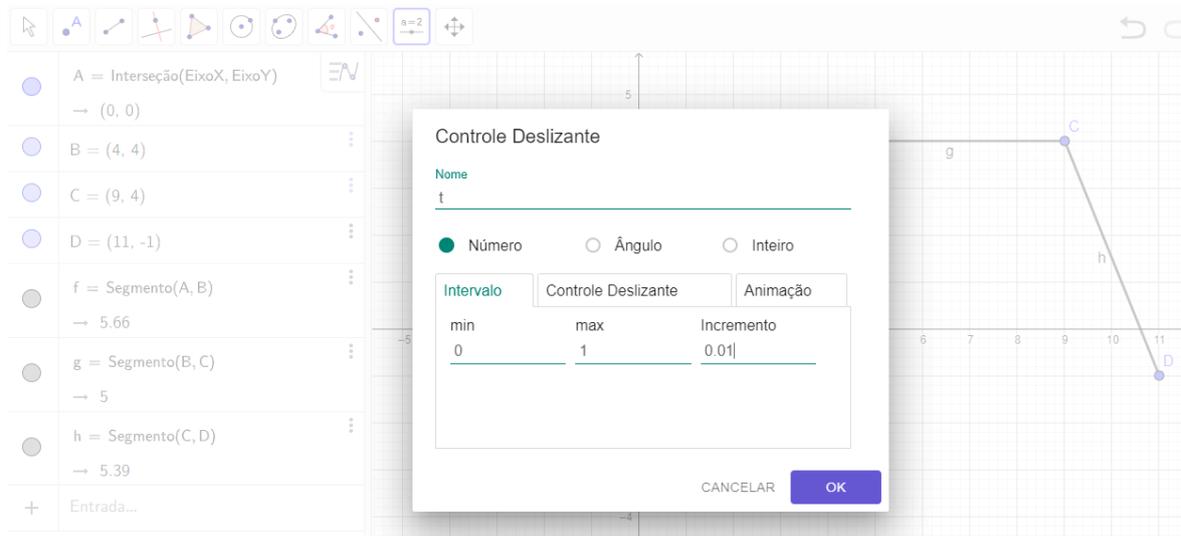
Fonte: Autora, 2021.

Figura 2.3 Passo 3.



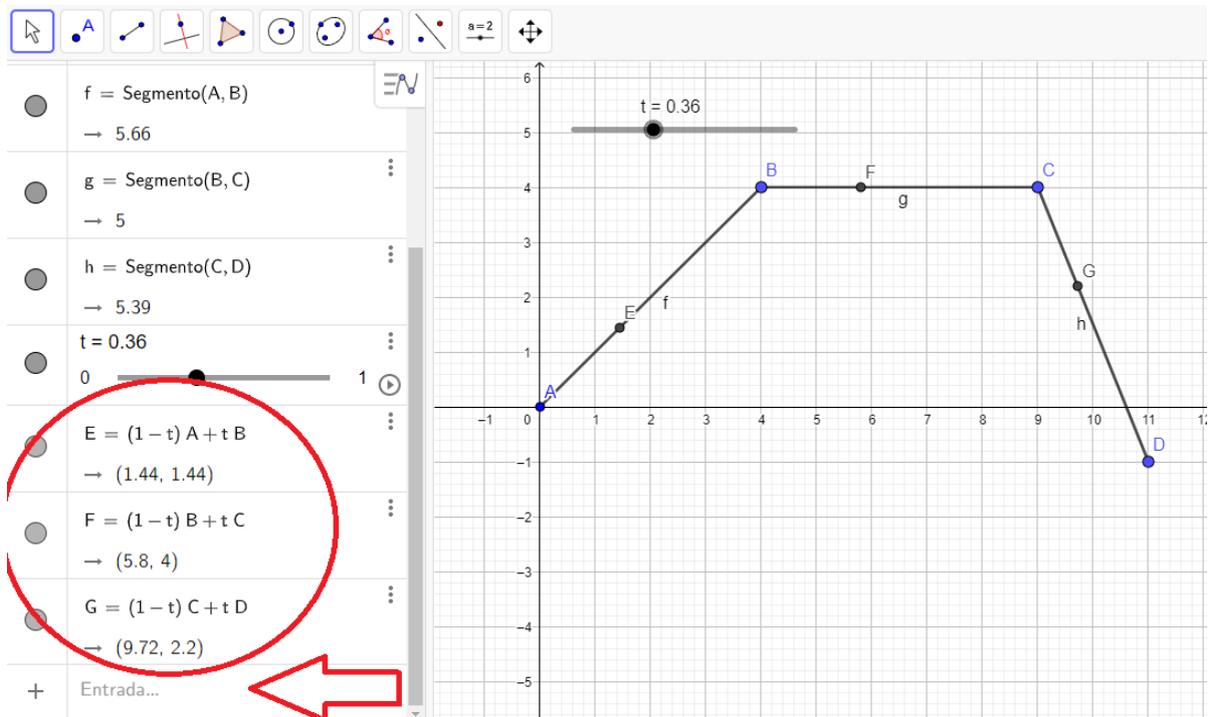
Fonte: Autora, 2021.

Figura 2.4 Passo 4.



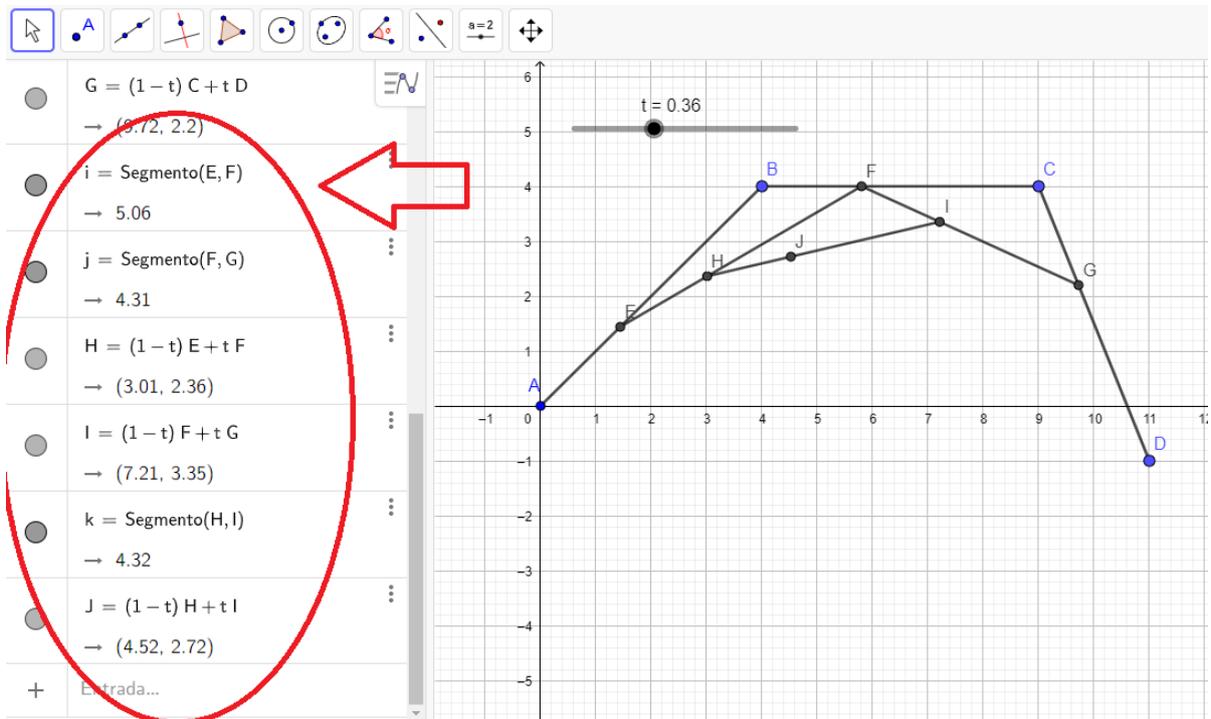
Fonte: Autora, 2021.

Figura 2.5 Passo 5.



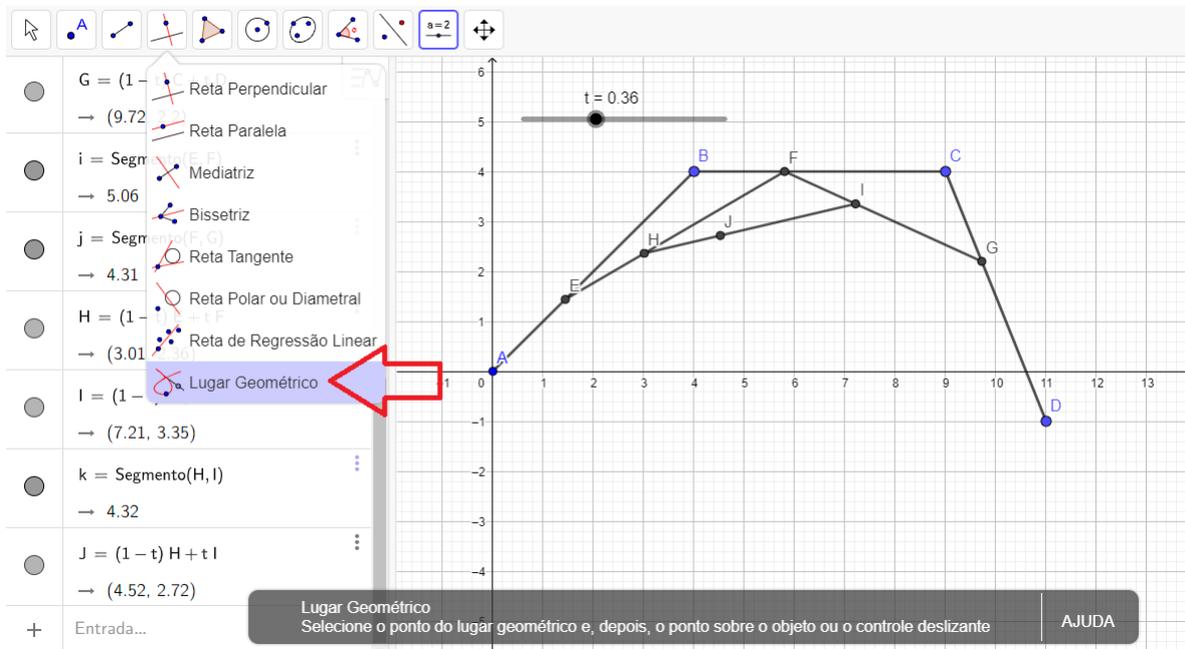
Fonte: Autora, 2021.

Figura 2.6 Passo 6.



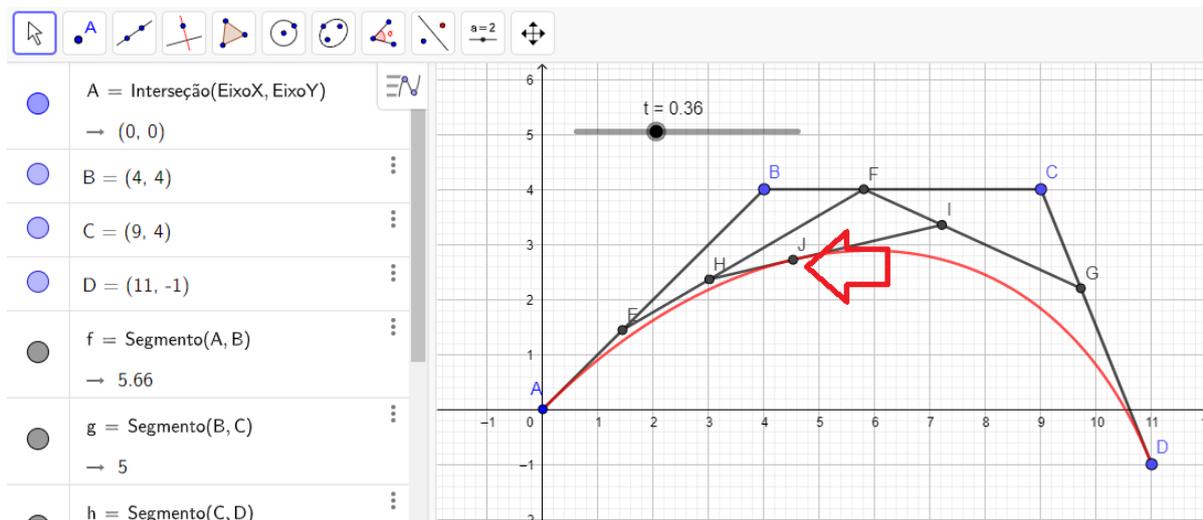
Fonte: Autora, 2021.

Figura 2.7 Passo 7.



Fonte: Autora, 2021.

**Figura 2.8** Passo 8.



Fonte: Autora, 2021.

### 3. ALGORITMO PARA MODELAGEM DE SAIA NO *GeoGebra*

Como vimos, as curvas de Bézier tem importante papel na construção de desenho livre, tendo ela grande potencial para ser utilizada em aplicações gráficas. Tendo em vista isso, desenvolvemos um algoritmo no *software GeoGebra* para molde-base de uma saia. A ideia inicial surgiu ao observamos que, para que os alfaiates e costureiras possam desenvolver um molde para suas roupas, eles utilizam alguns materiais tais como fita métrica, papel *kraft*, lápis, borracha, esquadro e régua, para desenvolver esse molde eles despendem um certo tempo e acabam por perder alguma matéria-prima na hora do corte pela falta de precisão, já que isso tudo é feito a mão. Sendo assim, ao observarmos o molde de algumas peças de roupas, percebemos que as curvas que lá estavam se assemelhavam bastante as curvas de Bézier, e o que facilitava a construção dessas curvas no papel é um molde chamado curva francesa, geralmente feito de madeira, metal ou plástico, que contém uma variedade de curvas.

**Figura 3.1** Curvas francesas.



Fonte: Wikipédia, 2019.

Nos dias atuais já existem alguns *softwares* de modelagem que são capazes de criar moldes-bases com agilidade, porém, para um alfaiate e/ou uma costureira, adquirir esses *softwares* se torna inviável, visto que os preços dos mesmos giram em torno de R\$10.000,00 e a produção feita por eles é em pequena escala. Como as curvas de Bézier são facilmente manipuladas através de seus pontos de controle, para desenvolver essas curvas do molde-base, para uma saia, por exemplo, o processo de construção acaba ficando mais eficiente e mais preciso do que quando utilizamos a curva francesa. Portanto, apresentaremos um “passo a passo” para construção desse molde-base de saia no *software GeoGebra* e, para isso, serão necessários algumas medidas que irão variar de pessoa para pessoa. As medidas são da cintura, quadril e altura do quadril, conforme figura.

**Figura 3.2** Medidas necessárias para molde-base.

Fonte: Paulo Savala, 2013.

Para essas medidas iremos considerar como medidas-padrão para tamanho a seguinte tabela,

**Figura 3.3** Tabela de tamanhos.

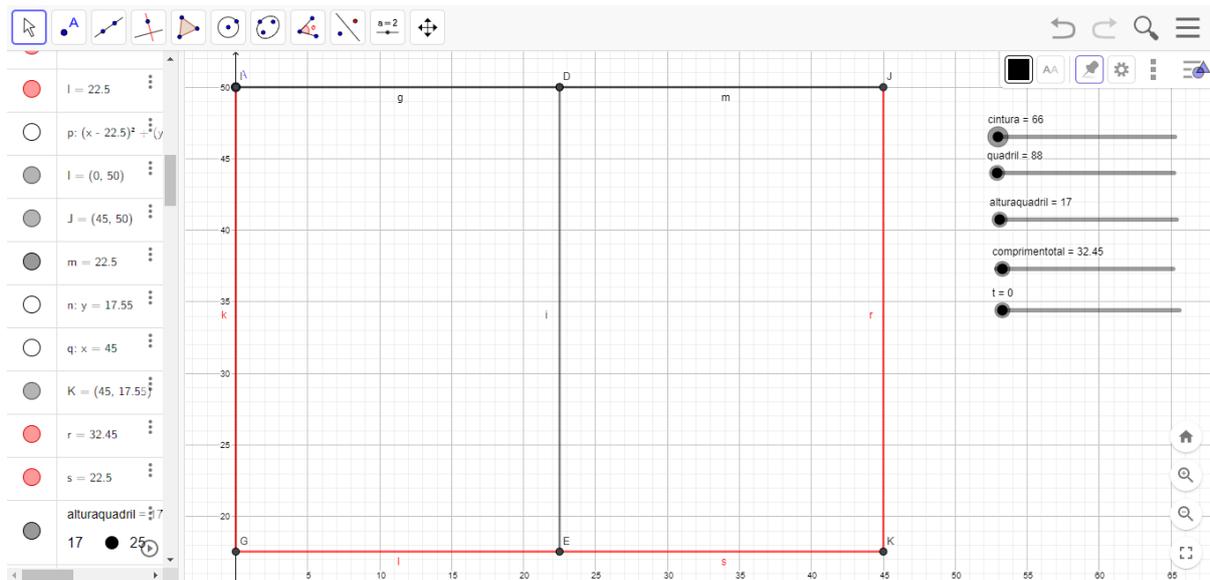
TAMANHOS	PP	P		M		G		GG		EG
<b>NUMERAÇÃO</b>	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54
Cintura	66	70	74	78	82	86	90	94	100	106
Quadril	88	92	96	100	104	108	112	118	124	130
Altura do quadril	17	18	19	20	21	22	23	24	25	25

Fonte: Pinterest, 2020.

Vejamos a seguir o “passo a passo” para construção do molde-base para saia no *GeoGebra*.

- 1) Inicialmente, defina utilizando a função “controles deslizantes” 3 controles, “cintura”, “quadril” e “alturaquadril” com intervalos respectivos aos da tabela de medidas adotados. Defina também um controle deslizante “comprimentotal” para ser o comprimento da sua saia, cujo intervalo adotado foi de 30 a 100;
- 2) Construa dois retângulos lado a lado cujas medidas das bases superiores e inferiores tem medidas iguais a  $\frac{1}{4}quadril + 0.5$  e as laterais tem medidas iguais a “comprimentotal”. Cada retângulo equivale a  $\frac{1}{4}$  da nossa saia;

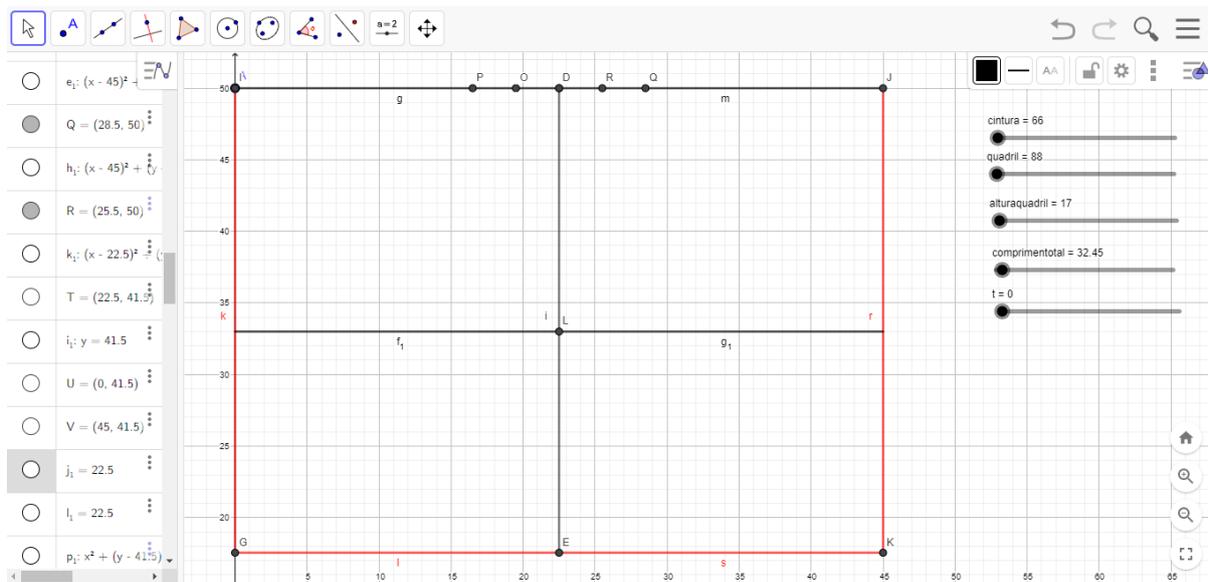
**Figura 3.4** Passo 1 e 2.



Fonte: Autora, 2021.

- 3) Trace o segmento paralelo as bases, cuja distância dele a base superior será igual a "alturaquadril" e marque o ponto  $L$  de interseção desse segmento com o segmento que une os dois retângulos;
- 4) Nas bases superiores, marque um ponto  $P$  cuja distância ao canto esquerdo é igual a  $\frac{1}{4}$  cintura e marque o ponto  $O$  cuja distância, também ao canto esquerdo, é igual a  $\frac{1}{4}$  cintura + 3. Fazer análogo agora iniciando do canto direito do retângulo, marcando assim os pontos  $Q$  e  $R$ ;

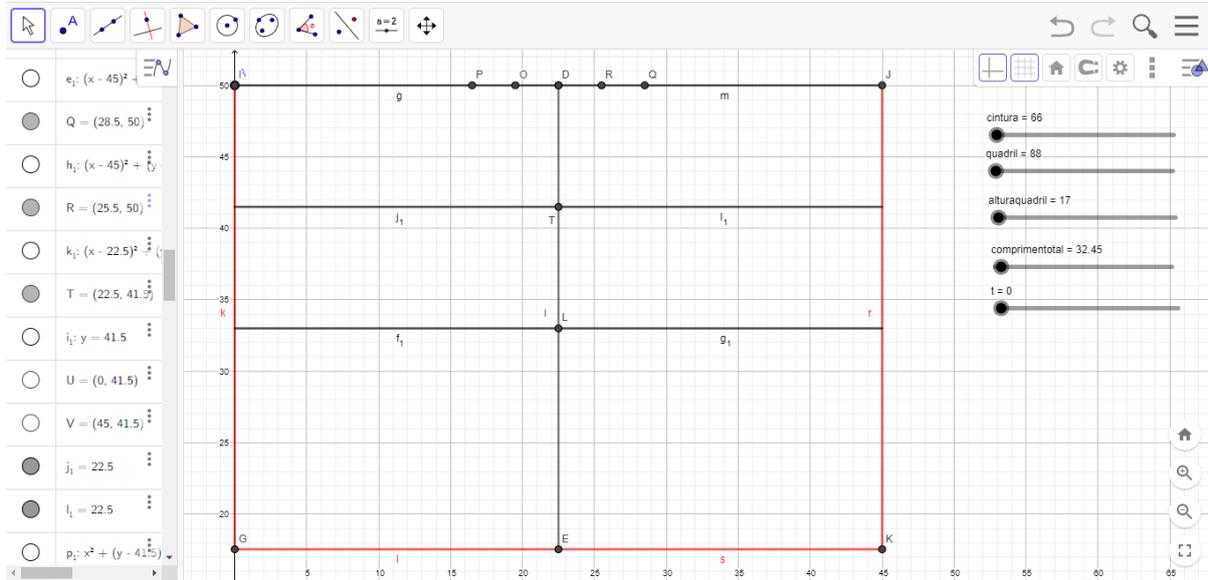
**Figura 3.5** Passo 3 e 4.



Fonte: Autora, 2021.

- 5) Trace agora o segmento cuja distância ao topo superior é igual a metade da “alturaquadril” e marque o ponto  $T$  de interseção desse segmento com o segmento que une os dois retângulos.

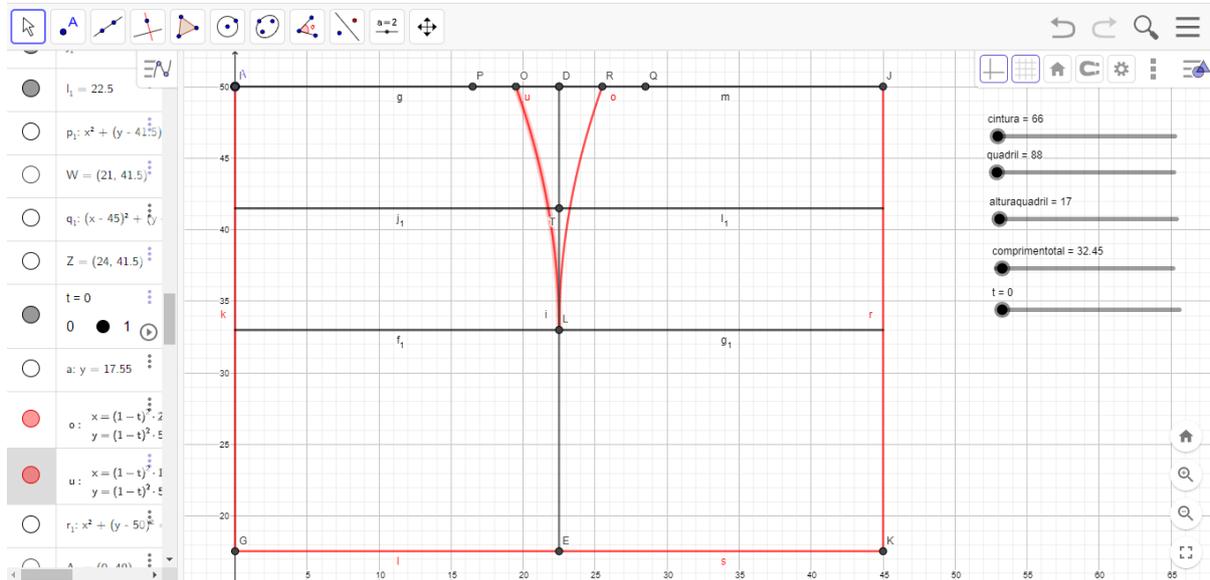
Figura 3.6 Passo 5.



Fonte: Autora, 2021.

- 6) Trace agora a curva de Bézier cujos pontos de controle são  $O, T$  e  $L$  e trace a curva de Bézier cujos pontos de controle são  $R, T$  e  $L$ ;

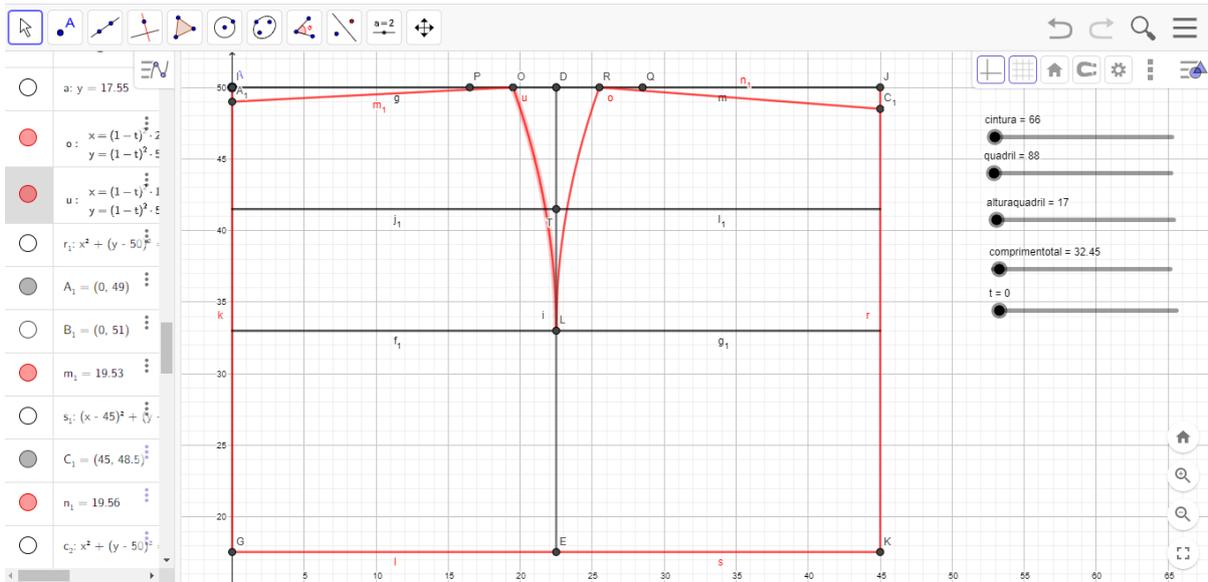
**Figura 3.7** Passo 6.



Fonte: Autora, 2021.

7) No segmento da lateral esquerda marque o ponto  $A_1$  cuja distância ao vértice superior esquerdo vale 1 e trace o segmento que passa por  $A_1$  e por  $O$ . No segmento da lateral direita marque o ponto  $C_1$  cuja distância ao vértice superior esquerdo vale 1,5 e trace o segmento que passa por  $C_1$  e por  $R$ .

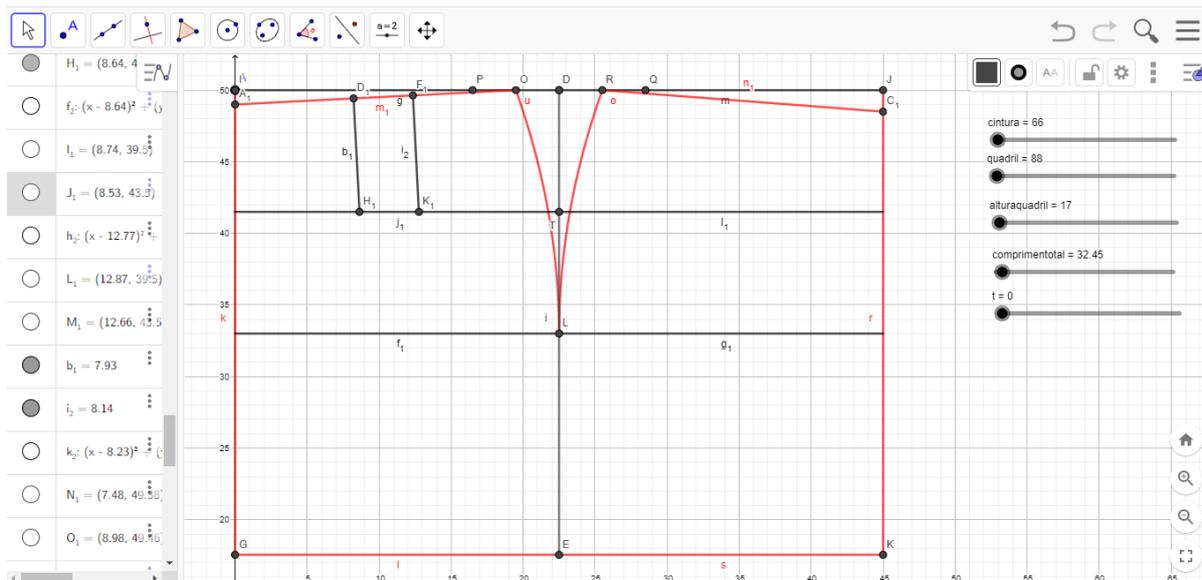
Figura 3.8 Passo 7.



Fonte: Autora, 2021.

- 8) Marque no segmento  $\overline{A_1O}$  o ponto  $D_1$  cuja distância a  $A_1$  é  $\frac{\frac{1}{4}cintura}{2}$  e a partir de  $D_1$  marque o ponto  $F_1$  cuja distância é  $\frac{\frac{1}{4}cintura}{2}$ . Trace o segmento perpendicular a  $\overline{A_1O}$  passando por  $D_1$  e trace o segmento perpendicular a  $\overline{A_1O}$  passando por  $F_1$ . Marque os pontos de interseção desses segmentos perpendiculares com o segmento cuja distância a base superior é metade da "alturaquadril", o qual chamaremos de  $H_1$  e  $K_1$ .

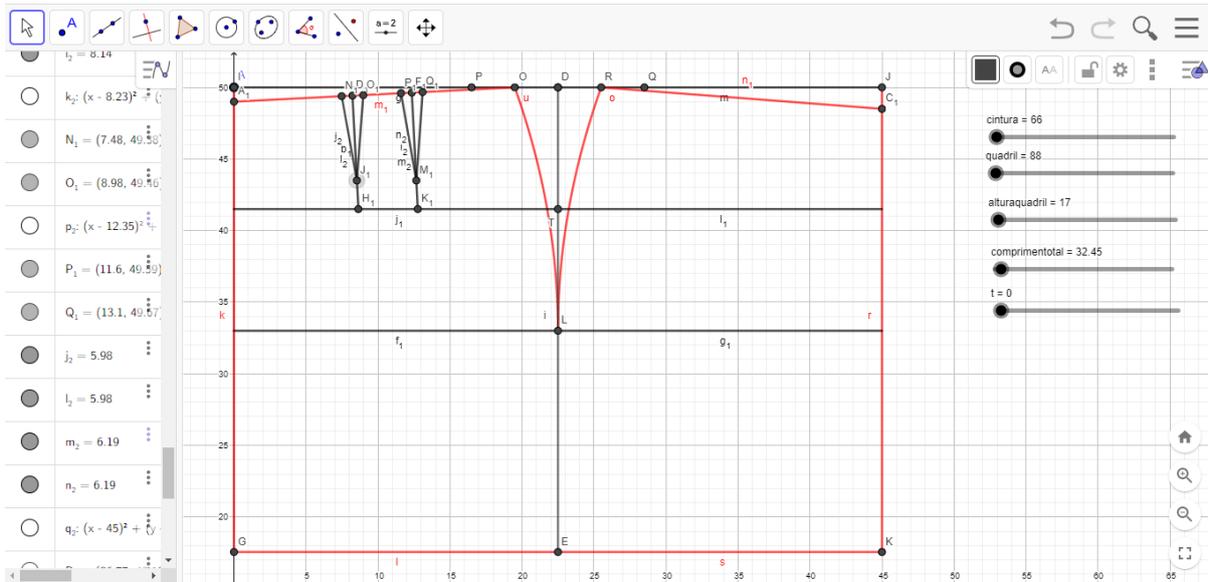
Figura 3.9 Passo 8.



Fonte: Autora, 2021.

- 9) Marque  $J_1$  no segmento  $\overline{D_1H_1}$  cuja distância a  $H_1$  vale 2 e marque  $M_1$  no segmento  $\overline{F_1K_1}$  cuja distância a  $K_1$  vale 2. Marque os pontos  $N_1$  e  $O_1$  no segmento  $\overline{A_1\overline{O}}$  cujas distâncias a  $D_1$  vale 0.75. Analogamente, marque os pontos  $P_1$  e  $Q_1$  no segmento  $\overline{A_1\overline{O}}$  cujas distâncias a  $F_1$  vale 0.75. Trace os segmentos os segmentos  $\overline{N_1J_1}$ ,  $\overline{O_1J_1}$ ,  $\overline{P_1M_1}$  e  $\overline{Q_1M_1}$ .

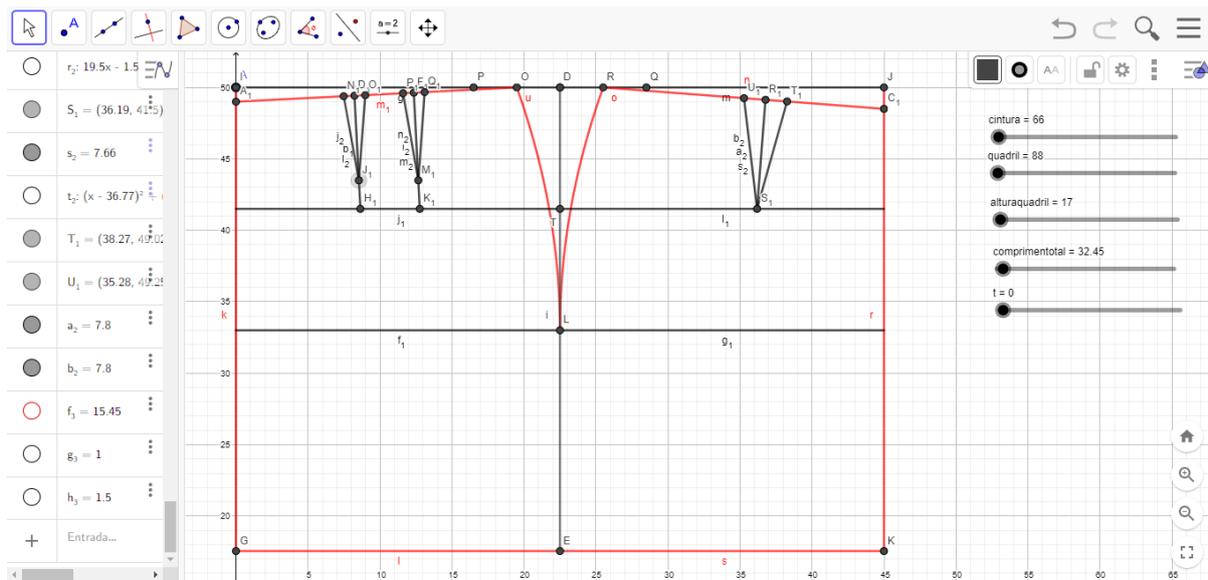
Figura 3.10 Passo 9.



Fonte: Autora, 2021.

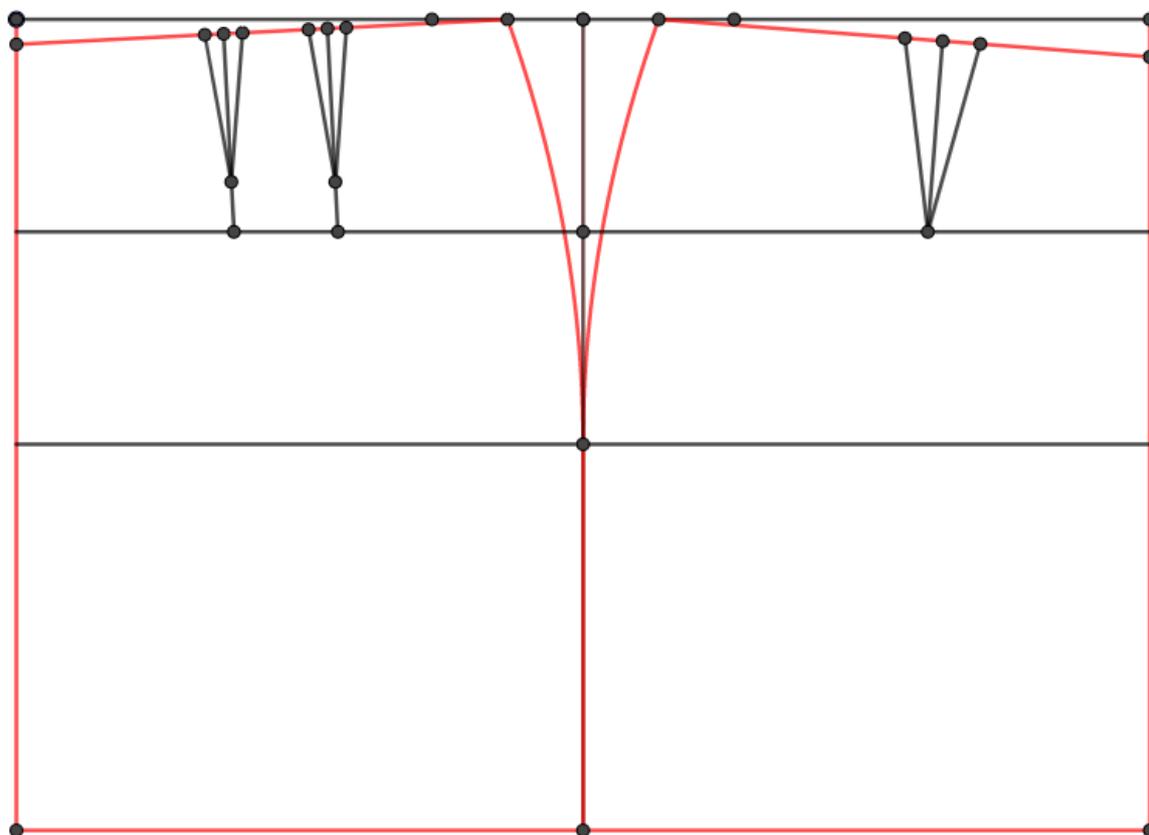
- 10) Marque no segmento  $\overline{C_1R}$  o ponto  $R_1$  cuja distância a  $C_1$  vale  $\frac{1}{4} \frac{\text{cintura}}{2}$ . Trace o segmento perpendicular a  $\overline{C_1R}$  passando por  $R_1$  e marque o ponto de interseção desse segmento com o segmento cuja distância a base superior é metade da "alturaquadril", o qual chamaremos de  $S_1$ . No segmento  $\overline{C_1R}$  marque os pontos  $U_1$  e  $T_1$  cuja distância a  $R_1$  é igual a 1,5. Trace os segmentos  $\overline{U_1S_1}$  e  $\overline{T_1S_1}$ .

Figura 3.11 Passo 10.



Fonte: Autora, 2021.

**Figura 3.12** Molde base para uma saia.



Fonte: Autora, 2021.

Com isso, finalizamos a construção para saia e, ao final de todo processo teremos o molde-base para saia a seguir,

Observe que o algoritmo construído no *GeoGebra* nos permite gerar moldes-base para qualquer tamanho de saia, visto que, com a ferramenta “controle deslizante”, podemos definir o tamanho da cintura, do quadril e da altura do quadril.

## 4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo iremos descrever uma sequência didática para o ensino das curvas de Bézier com enfoque no 3º ano do ensino médio. As aulas foram pensadas para serem aplicadas em dois dias, sendo cada dia com duas aulas de 50 minutos cada, com duração total da atividade de 200 minutos. Será necessário para aplicação dessas aulas um laboratório de informática.

O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno conheça o *GeoGebra* e as possibilidades de construção que ele apresenta, com isso, o aluno irá rever a noção de alguns elementos da geometria plana e analítica, tais como ponto, segmento de reta, a noção geométrica de reta tangente a curva, e rever algumas definições de matrizes, função polinomial, etc.

No decorrer da aula o aluno deverá utilizar o *GeoGebra* com o intuito de construir a curva desejada dados os pontos de controle pelo algoritmo de Casteljau e, também, utilizar o polinômio de Bernstein para encontrar a equação paramétrica da curva. Ao final, o discente deverá inserir a equação encontrada e daí verificar que, de fato, as curvas obtidas pelos dois métodos são as mesmas.

Para que o aluno consiga efetuar a atividade será necessário que o professor explique anteriormente alguns conceitos, o contexto histórico e a motivação para a época que impulsionaram os estudos dessas curvas, a partir daí, poderá defini-las através do algoritmo de Casteljau e escrevê-las em função do polinômio de Bernstein e, então, mostrar algumas propriedades das curvas.

Veamos a seguir a sequência didática sugerida.

- 1) **Tema:** Curvas de Bézier.
- 2) **Objetivo:** O objetivo dessa atividade é fazer com que o discente conheça as curvas de Bézier, com isso irá rever alguns conceitos de geometria analítica, análise combinatória, funções polinomiais, matrizes, etc.
- 3) **Conteúdos:** Curvas parametrizadas, algoritmo de Casteljau e polinômios de Bernstein.
- 4) **Habilidades BNCC:** EM13MAT301, EM13MAT302, EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT406, EM13MAT501 e EM13MAT502.
- 5) **Tempo de duração:** 4 aulas, sendo cada aula 50min.
- 6) **Material necessário:** Computadores, lápis, régua, papel.
- 7) **Detalhamento das aulas:**

### **Dia 1: duas aulas**

- **Organização da turma:** A turma será organizada em duplas por computador.
- **Introdução:** No início da aula será apresentado o tema bem como o que motivou o início do estudo sobre o mesmo.

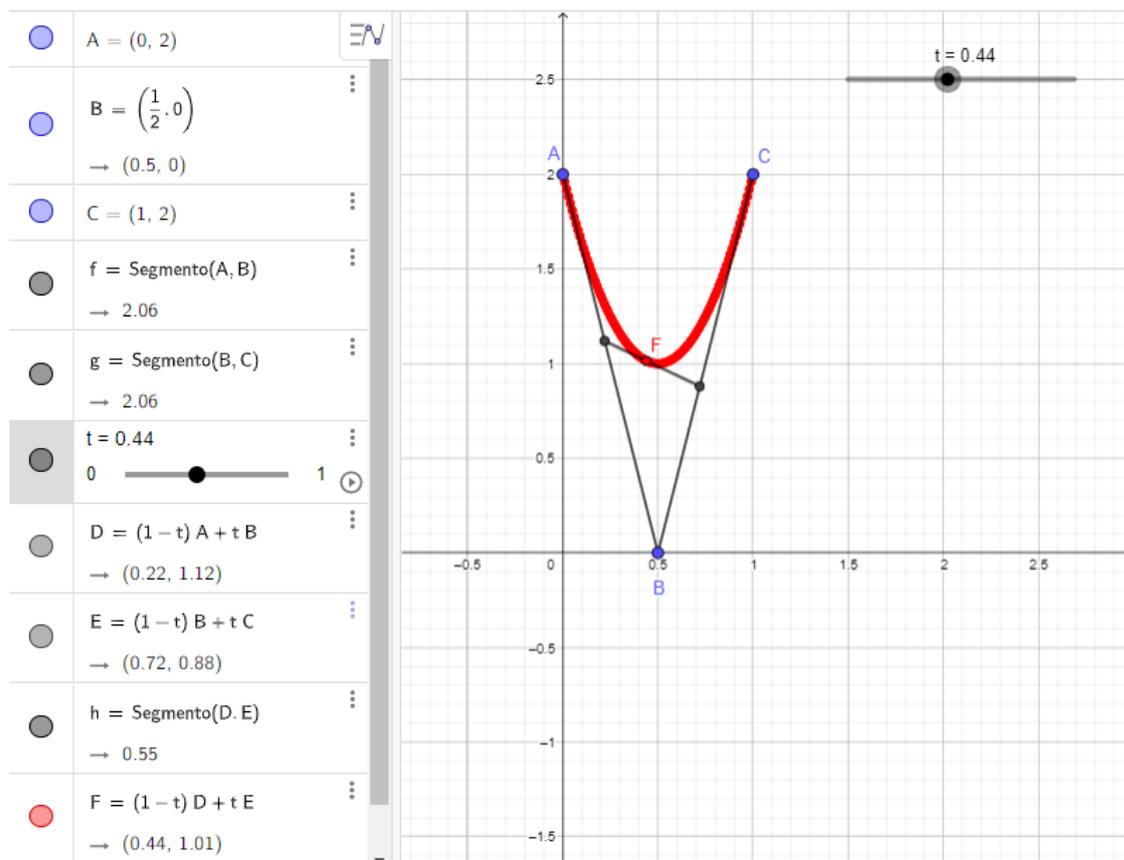
- **Desenvolvimento:** O professor deve definir as curvas de grau 1, 2 e 3 através do algoritmo de Casteljau, dar alguns exemplos e fazer a construção das curvas com o auxílio do *GeoGebra*. Logo após o professor pode mostrar a recorência definida a partir do algoritmo e que essa construção pode ser generalizada.
- **Conclusão:** Será passado aos discentes um exercício a fim deles praticarem os conceitos vistos em aula.
- **Avaliação:** A avaliação se dará através da iteração dos alunos ao longo da aula.

### *Exercícios*

- 1) Dados os pontos de controle  $A = (0, 2)$ ,  $B = (\frac{1}{2}, 0)$  e  $C = (1, 2)$ , seguindo os passos a seguir, construa a curva de Bézier no *GeoGebra*. Note que, como temos três pontos de controle, a curva procurada é uma curva de Bézier quadrática.
  - Marque os pontos de controle  $A = (0, 2)$ ,  $B(\frac{1}{2}, 0)$  e  $C(1, 2)$ ;
  - Construa o segmento de reta que os une utilizando a ferramenta disponibilizada no *GeoGebra*;
  - Com a ferramenta “controle deslizante”, defina um parâmetro  $t$  e o faça variar de 0 a 1;
  - Insira a equação dos segmentos de retas  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  em função do parâmetro  $t$  definido anteriormente;
  - Deslize  $t$  e pare em um determinado valor, fazendo assim gerar dois pontos nesses segmentos de retas e, nesses pontos, trace um segmento de reta;
  - Insira a equação desse último segmento de reta em função do parâmetro  $t$ , gerando assim, um ponto sobre esse segmento;
  - Clique nesse ponto com o botão direito e ative a função “exibir rastro”;
  - Clique em iniciar para  $t$  percorrer o intervalo de 0 a 1; o rastro deixado pelo ponto será a curva de Bézier.

#### *Solução:*

A curva obtida utilizando o método de Casteljau no *GeoGebra* é:

**Figura 4.1** Curva de Bézier quadrática.

Fonte: Autora, 2021.

## Dia 2: duas aulas

- **Organização da turma:** A turma será organizada em duplas por computador.
- **Introdução:** No início dessa aula o professor pode falar que as curvas podem ser representadas por uma expressão polinomial e por uma forma matricial.
- **Desenvolvimento:** O professor deve definir os polinômios de Bernstein, logo após expressar as curvas de Bézier de grau 1, 2 e 3 através desse polinômio e fazer alguns exemplos. Em seguida mostrar a forma matricial.
- **Conclusão:** Será passado aos discentes três exercícios a fim deles praticarem os conceitos vistos em aula.
- **Avaliação:** A avaliação se dará através da interação dos alunos ao longo da aula.

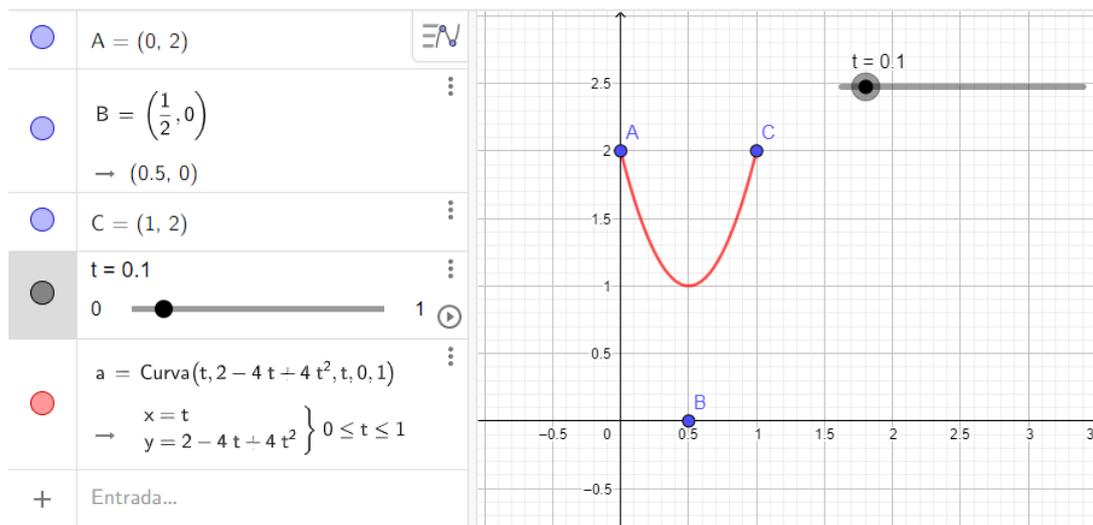
## Exercícios

- 2) Utilizando a definição das curvas de Bézier dada pelo polinômio de Bernstein, determine a equação paramétrica da curva cujos pontos de controle são  $A = (0, 2)$ ,  $B(\frac{1}{2}, 0)$  e  $C(1, 2)$ , e, em seguida, insira a equação no *GeoGebra*.

*Solução:*

A equação paramétrica obtida utilizando a definição de Bézier pelo polinômio de Bernstein é  $B(t) = (t, 2 - 4t + 4t^2)$ . Inserindo essa equação no *GeoGebra* obteremos:

**Figura 4.2** Curva de Bézier quadrática.



Fonte: Autora, 2021.

- 3) Escreva a forma matricial da curva de Bézier cujos pontos de controle são  $A = (0, 2)$ ,  $B(\frac{1}{2}, 0)$  e  $C(1, 2)$  e em seguida determine sua equação.

*Solução:*

A forma matricial da curva de Bézier é:

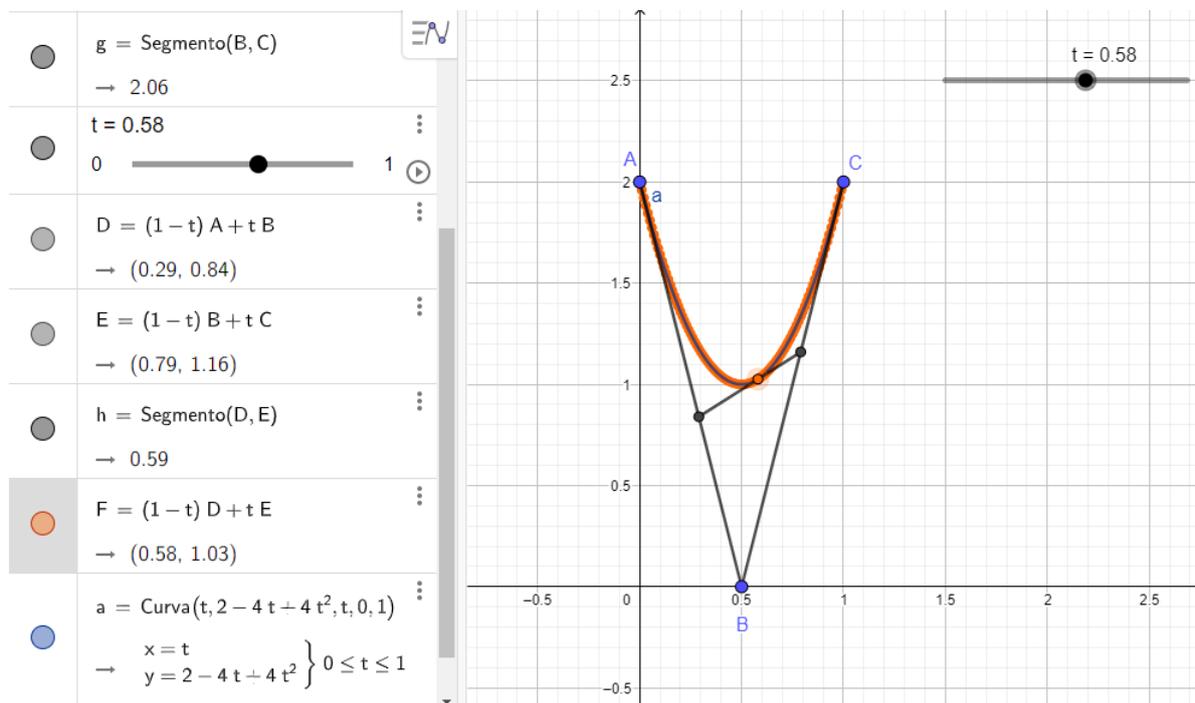
$$B_0^2 = \begin{pmatrix} (0, 2) & (\frac{1}{2}, 0) & (1, 2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

- 4) Verique, com o auxílio do *GeoGebra*, que as curvas obtidas pelos métodos de Casteljau e pelo polinômio de Bernstein são, de fato, as mesmas curvas.

*Solução:*

A seguir as curvas, as curvas sobrepostas:

**Figura 4.3** Curva de Bézier quadrática.



Fonte: Autora, 2021.

Pode-se enfatizar ao final do processo de construção que, de fato, as últimas retas obtidas são retas tangentes a curva de Bézier obtida. Uma sugestão é encontrar a equação de duas dessas retas e fazer a interseção com a curva e, assim, verificar que de fato elas são tangentes;

## CONCLUSÃO

O intuito desse trabalho é apresentar as curvas de Bézier de um modo analítico e também geométrico, através do *software GeoGebra*. Com isso, o aluno poderá aprender e revisar alguns conceitos como de curvas paramétricas, funções polinomiais, matrizes, etc.

Conforme a BNCC, o ensino de matemática no ensino médio visa a construção de uma matemática voltada para a realidade. Tendo em vista isso, uma possibilidade para estudo e desenvolvimento posterior desse tema é, através da construção das curvas no *GeoGebra*, gerar moldes de outras peças de roupas, molde de camisas, por exemplo, com o intuito de minimizar o tempo gasto pelas costureiras, seguindo a aplicação feita no capítulo 3. Vale ressaltar que esse estudo e aplicação ainda não foi feito, tendo possibilidade de ser desenvolvido posteriormente com alunos que tenham alguma aptidão em programação. A habilidade adquirida pelo discente neste quisito é a EM13MAT406, voltada para conceitos básicos de linguagem de programação.

Além disso, com o estudo das curvas de Bézier o discente desenvolve, através das interações entre os demais colegas e o professor, o raciocínio. Um exemplo disso se dá na identificação dos padrões, da conjectura e da generalização do algoritmo de Casteljau e construção através dos polinômios de Bernstein, por meio da elaboração da argumentação do raciocínio utilizado.

Com o ensino dos polinômios de Bernstein, a competência específica 3 de “Matemática e suas tecnologias” é desenvolvida, cujas habilidades adquiridas pelos discentes são EM13MAT401, EM13MAT402, EM13MAT501 e EM13MAT502, visto que eles conseguirão converter as representações algébricas dadas pelos polinômios no plano cartesiano com o auxílio do *GeoGebra* e conseguirão relacionar as coordenadas dos pontos de controle com o plano cartesiano.

É notório também, que são desenvolvidos no discente ao longo do processo de aprendizagem do tema algumas outras competências estabelecidas na BNCC, tais como comunicação e argumentação, para que além de expressar matematicamente ele consiga expressar através de palavras o seu raciocínio.

Enfim, fica claro a importância de ser estimulado nos discentes o estudo sobre o tema já que eles irão desenvolver e ampliar as suas habilidades e articular os conhecimentos matemáticos de modo a favorecer o desenvolvimento do raciocínio.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FARIN, Gerald. **Curves and surfaces for CAGD: a practical guide**. 5ª edition, Arizona, Morgan Kaufman Publishers, 2002.
- [2] AGGIO MOLINARI, José Robyson. DE SOUZA RETSLAFF, Franciéle Maria. **Curvas de Bézier no software geogebra e suas aplicações**, Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, São Paulo, volume 8, p. 26-43, 2019. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p026-043> >. Acesso em: 15, abril. 2021.
- [3] **Introdução as Curvas de Bézier - Dia 1**, 2020. 1 vídeo (53min). Publicado pelo canal Semana da Licenciatura em Matemática. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=xO7RO4t38UM> >. Acesso em: 15, abril. 2021.
- [4] **Introdução as Curvas de Bézier - Dia 2**, 2020. 1 vídeo (55min). Publicado pelo canal Semana da Licenciatura em Matemática. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=7la1H5r1Pqg> >. Acesso em: 15, abril. 2021.
- [5] SIMINI, Roberto. **Teoria local das curvas**. TCC (Licenciatura em Matemática) - Centro de ciências físicas e matemática, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 86. 2005.
- [6] DO CARMO, Manfredo. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, 2ª edição, Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [7] **Curvas de Bézier: Como o computador desenha curvas**. Blog Brasil acadêmico, 2014. Disponível em: < <http://blog.brasilacademico.com/2014/10/curvas-bezier-como-o-computador-desenha.html>. > Acesso em: 15, abril. 2021
- [8] **Bézier cuártica en Geogebra**, 2010. 1 vídeo (7min). Publicado pelo canal Rafael Miranda Molina. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=KOXYVLXRRuk>>. Acesso em: 15, abril. 2021.
- [9] BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>. >
- [10] **Sequência didática: guia para elaboração e execução**, E-Docente, 2019. Disponível em: < <https://www.edocente.com.br/sequencia-didatica-para-educacao-basica/>. > Acesso em: 15, abril. 2021.
- [11] MEIRELLES, Elisa. **Como organizar sequências didáticas**, Nova Escola, 2014. Disponível em: < <https://novaescola.org.br/conteudo/1493/como-organizar-sequencias-didaticas>. > Acesso em: 15, abril. 2021.
- [12] GeoGebra. Disponível em: < <https://www.geogebra.org/> > Acesso em: 15, abril. 2021.

- [13] Wikipédia. Disponível em: < [https://pt.wikipedia.org/wiki/Curva\\_de\\_Bézier](https://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Bézier) > Acesso em: 15, abril. 2021.
- [14] Wikipédia. Disponível em: < [https://en.wikipedia.org/wiki/Bézier\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Bézier_curve) > Acesso em: 15, abril. 2021.
- [15] Jacílio Saraiva, **Medidas econômicas: Novos programas ajudam confecções a acelerar o desenho de roupas, economizam matéria-prima e garantem maior competitividade no mercado.** Revista PEGN - Globo, Pequenas Empresas Grandes Negócios, 2009. Disponível em : < <http://revistapegn.globo.com/Empresasenegocios/0,19125,ERA547308-2804,00.html> > Acesso em: 15, abril. 2021.
- [16] São Paulo, Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência e Tecnologia. **Via Rápida Emprego: Programa de Qualificação Arco Ocupacional Profissional, vestuário, modelista**, v.2. São Paulo: SDECT, 2013.

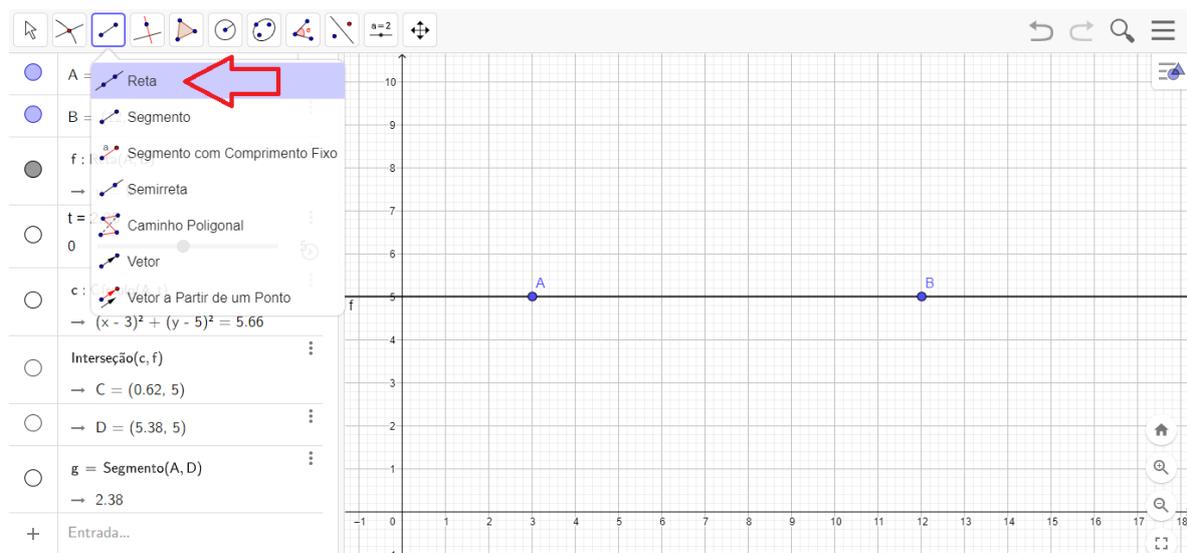
# APÊNDICE

## Algumas construções no *GeoGebra*

1) Construção de um segmento que varia em um intervalo;

Com a função “Reta” trace uma reta marcando assim os pontos *A* e *B*.

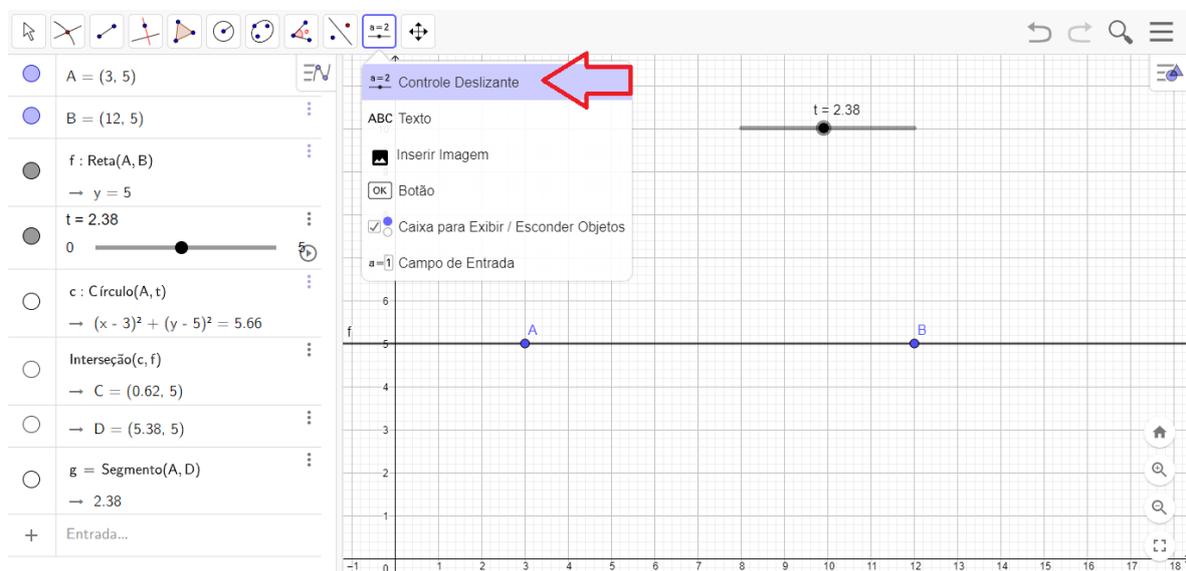
**Figura 4.4** Passo 1.



Fonte: Autora, 2021.

Com a função “Controle deslizante” defina um parâmetro  $t$  em que o tamanho do seu segmento deve variar.

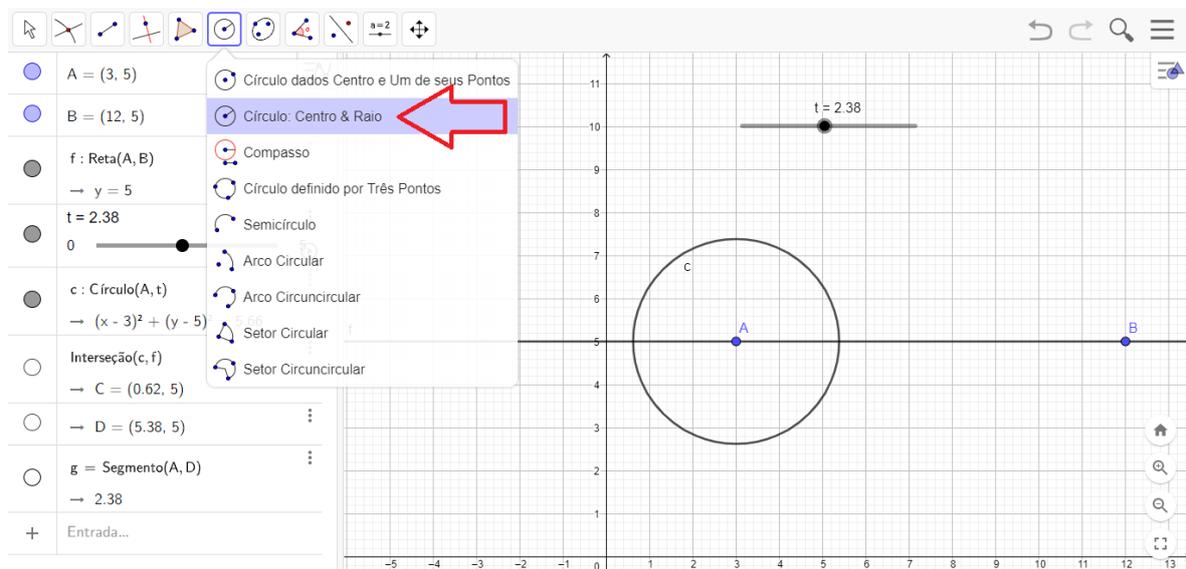
**Figura 4.5** Passo 2.



Fonte: Autora, 2021.

Com a função “Círculo: centro e raio” trace o círculo de centro em A e raio  $t$ .

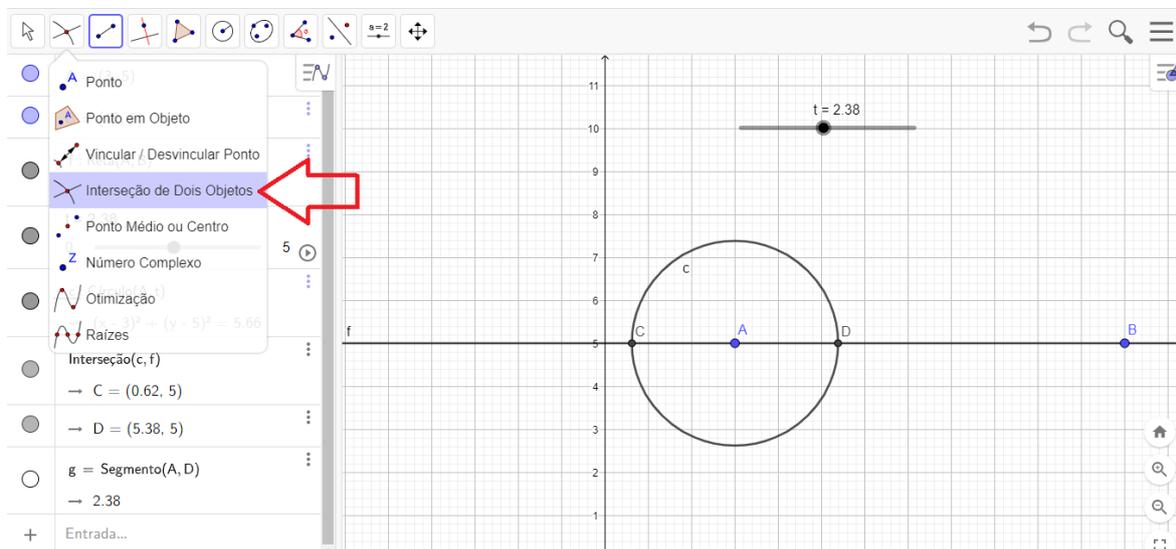
**Figura 4.6** Passo 3.



Fonte: Autora, 2021.

Com a função “Interseção de dois objetos” marque a interseção entre a reta e o círculo.

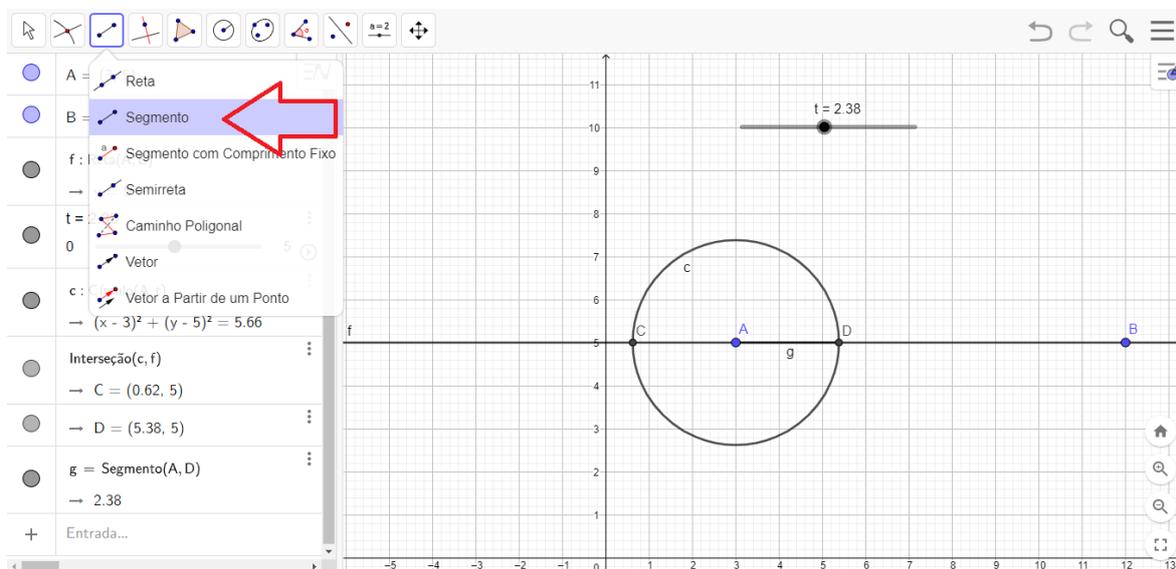
**Figura 4.7** Passo 4.



Fonte: Autora, 2021.

Com a função “Segmento” trace o segmento com pontos de extremidades A e em um dos pontos de interseção encontrados no passo anterior.

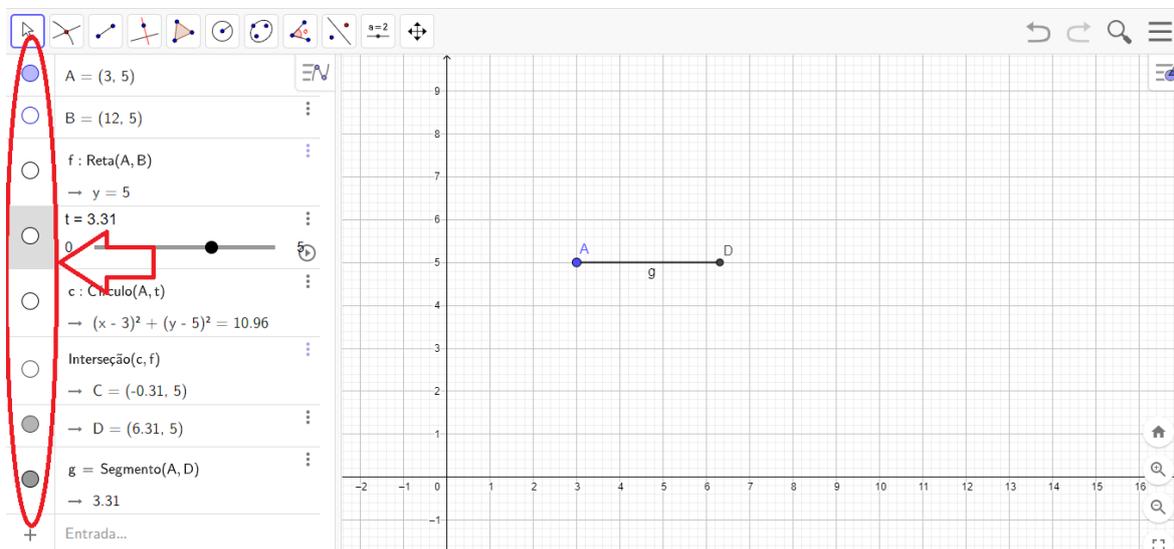
**Figura 4.8** Passo 5.



Fonte: Autora, 2021.

Por fim, desative o que você não deseja que apareça na figura.

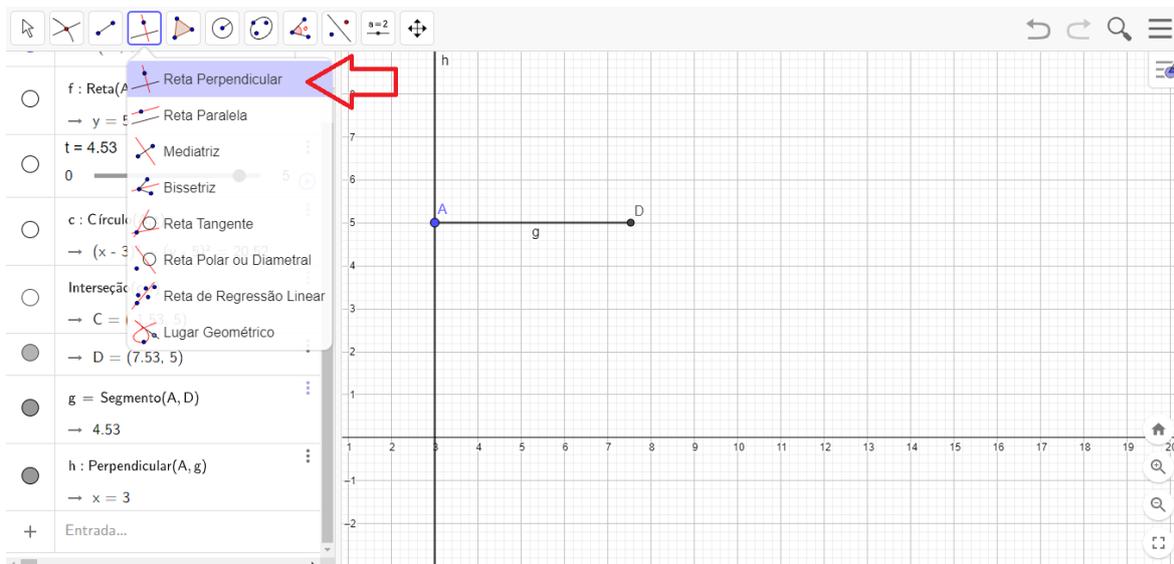
**Figura 4.9** Passo 6.



Fonte: Autora, 2021.

- 2) Construção de uma reta perpendicular a um segmento dado;  
Com a função “Reta perpendicular” clique no segmento dado.

**Figura 4.10** Reta perpendicular.

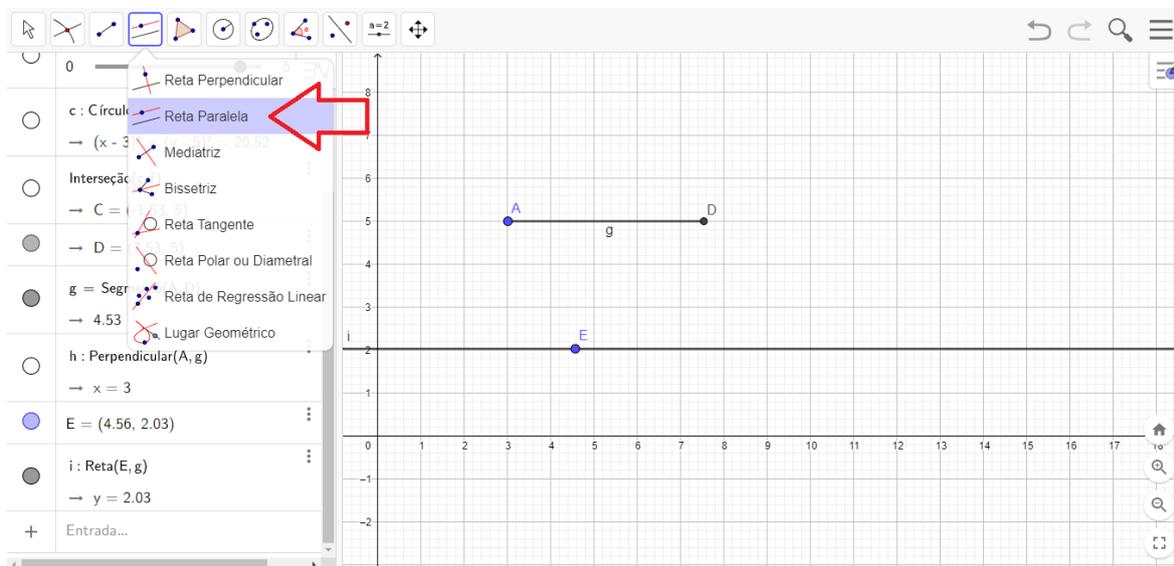


Fonte: Autora, 2021.

## 3) Construção de uma reta paralela a uma reta dado;

Com a função “Reta paralela” clique no segmento dado e mova a reta para onde desejar.

**Figura 4.11** Reta paralela.



Fonte: Autora, 2021.

## 4) Construção de uma curva através de sua equação paramétrica;

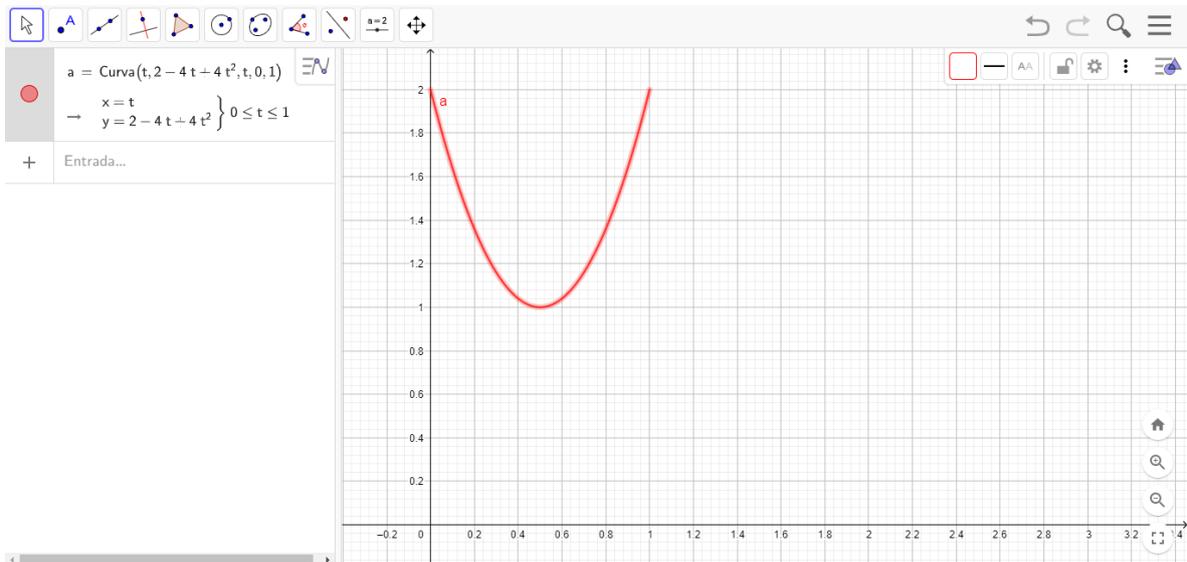
Em “Entrada” digite “curva” e selecione a opção para curva com imagem em  $\mathbb{R}^2$ . Em seguida em “Expressão” digite a primeira e a segunda coordenada da sua função paramétrica; em “variável” escreva a variável da sua função (neste exemplo usamos a variável  $t$ ); em “valor inicial” e “valor final” digite o intervalo em que a sua variável irá pertencer (neste exemplo a variável irá pertencer ao intervalo  $[0, 1]$ ).

Figura 4.12 Passo 1.



Fonte: Autora, 2021.

Figura 4.13 Passo 2.



Fonte: Autora, 2021.

## Lista das habilidades da BNCC adquiridas

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo  $y = ax^2$ .

