UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORDAGEM GUIADA PELA BNCC

ATÍLIO VIEIRA COSTA

Maceió, 29 de janeiro de 2021

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ATÍLIO VIEIRA COSTA

FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORDAGEM GUIADA PELA BNCC

Maceió – AL
2021

ATÍLIO VIEIRA COSTA

FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORDAGEM GUIADA PELA BNCC

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório M. da Silva Neto

Maceió – AL

2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

C837f Costa, Atílio Vieira.
Função exponencial: uma abordagem guiada pela BNCC / Atílio Vieira Costa. – 2021.
72 f. : il., figs., grafs. e tabs. color.

Orientador: Gregório M. da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 71-72.

1. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). 2. Função exponencial. 3. Atividades lúdicas. I. Título.

CDU: 517.5: 371.3

Folha de Aprovação

ATÍLIO VIEIRA COSTA

FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ABORDAGEM GUIADA PELA BNCC

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) do Instituto de Matemática da Universidade federal de Alagoas e aprovado em 29 de janeiro de 2021.

____

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto – UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

____

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos – UFAL (Examinadora Interna)

____

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB (Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por permitir-me cursar esse mestrado e buscar aprender um pouco mais sobre Matemática.

A minha esposa pelo apoio, compreensão e colaboração durante o curso e na reta final com a dissertação.

A minha família, meus pais, irmãos e irmãs por acreditar em mim.

Aos companheiros de turma que conheci e aprendi bastante com eles.

Aos professores e a professora que tive durante o curso.

Ao meu orientador professor Gregório pelo apoio e incentivo nas muitas horas difíceis na dissertação e nas aulas de resolução de problema.

RESUMO

Partindo inicialmente do estudo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mais especificamente das partes de Matemática, o presente trabalho buscou compreender esse documento normativo e com isso encontramos formas indicadas de trabalhar o conteúdo de função exponencial. Assim, após o estudo da BNCC, foi feita uma pesquisa em livros e em trabalhos acadêmicos acerca do conteúdo de função exponencial que nos forneceu fundamentação teórica para aplicar na resolução de problemas relacionados com algumas habilidades listadas na BNCC. Para concluir, propomos três atividades lúdicas para trabalhar função exponencial com foco em habilidades expressas na BNCC.

Palavras-chave: BNCC. Ensino Médio. Função exponencial. Atividade lúdica.

ABSTRACT

Starting from the study of the National Common Curricular Base (BNCC), more specifically from the parts of Mathematics, the present work sought to understand this normative document and with that we find indicated ways to work the content of exponential function. Thus, after studying the BNCC, a search was made in books and academic papers about the content of exponential function that provided us with a theoretical foundation to apply in solving problems related to some skills listed in the BNCC. To conclude, we propose three playful activities to work exponential function with a focus on skills expressed at BNCC.

Keywords: BNCC. High school. Exponential function. Playful activity

.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FOTOGRAFIAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO:

INTRODUÇÃO:

A presente pesquisa visa desenvolver o tema função exponencial com uma abordagem guiada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). De início, tivemos os seguintes objetivos gerais:

a) Conhecer a BNCC;

b) Apresentar características e propriedades da função exponencial.

A pesquisa está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo tratamos de estudar a BNCC, mais especificamente a área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio. Vimos como esse documento é estruturado e encontramos relações entre competências e habilidades expressas na BNCC que auxiliam no desenvolvimento de determinados conteúdos como, por exemplo, o de função exponencial.

Para o segundo capítulo foi feito uma pesquisa acerca do conteúdo de função exponencial onde apresentamos demonstrações de propriedades, proposições e teoremas que caracterizam a função. Apresentamos também exemplos de aplicações de função exponencial e uma análise de gráficos. Finalizamos com uma demonstração do fato de que a função logarítmica e a função exponencial são funções inversas.

No capítulo três, buscando relacionar os dois capítulos anteriores, apresentamos situações-problema que visam contemplar as habilidades expressas na BNCC relacionadas com o conteúdo de função exponencial.

Por fim, no capítulo 4 propomos três atividades para trabalhar os conteúdos estudados com foco em determinadas habilidades da BNCC estudas nos capítulos anteriores. Na primeira atividade trabalhamos a construção gráfica de um decrescimento quase exponencial utilizando o experimento “eliminando quadrado”. Na segunda atividade, trabalhamos com a análise de duas sequências de fractais identificando as funções exponenciais e os gráficos relacionados a cada sequência. Por fim, na terceira atividade, com o uso de uma folha em branco, tesoura e o preenchimento de duas tabelas, trabalhamos a construção gráfica de um crescimento e de um decrescimento exponencial.

Uma ferramenta muito importante que auxiliou na produção dos exemplos com a construção de gráficos foi o GeoGebra, um aplicativo de matemática gratuito que pode ser usado em todos os níveis de ensino.

1 A BNCC E A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO

1.1 O Que é a BNCC?

Conforme consta na introdução do documento (BRASIL, 2018, p. 07): A Base Nacional Comum curricular (BNCC) é um documento normativo elaborado por especialistas de todas as áreas do conhecimento que define um conjunto orgânico e progressivo das **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da educação básica. Essas aprendizagens devem buscar o mesmo objetivo: assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez **competências gerais**. Essas competências guiam o desenvolvimento escolar das crianças e dos jovens desde a creche até a etapa terminal da Educação Básica buscando garantir os direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

> Na BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 08)

1.2 Competências Gerais da Educação Básica

A BNCC possibilita que redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares tenham uma referência nacional comum na elaboração de seus currículos e propostas pedagógicas. Visando, dessa forma, elevar a qualidade do ensino com equidade sem tirar a autonomia dos entes federativos e preservando as particularidades regionais e locais.

As dez competências gerais mencionadas acima se relacionam entre si ao longo das três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio). Essa relação se mostra na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores.

Antes de vermos as competências, apresentaremos uma lista de palavras-chave que resume cada competência em poucas palavras como encontramos em [05]:

1. Conhecimento.
2. Pensamento.
3. Repertório cultural.
4. Comunicação.
5. Cultura digital.

6. Trabalho e projeto de vida.
7. Argumentação.
8. Autoconhecimento e autocuidado.
9. Empatia e cooperação.
10. Responsabilidade e cidadania.

Finalmente apresentaremos as dez competências gerais da educação básica conforme expressas na BNCC: (BRASIL, 2018, p. 09)

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e

> de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2018, p. 09)

1.3 Marcos Legais da Base Nacional Comum Curricular

A BNCC já vinha sendo prevista na constituição federal de 1988 que, quando versa sobre a educação no seu artigo 210, já preceituava: "Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais." (BRASIL, 2012, p. 191)

Anos depois temos a consolidação da Lei de Diretrizes e Bases da educação nacional (LDB). No capítulo II da LDB, quando trata da educação básica, o seu artigo 26 estabelece que os currículos da educação básica devem seguir uma base nacional comum:

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 2018, p. 19)

Ainda no artigo 35-A da lei, tratando do ensino médio, a LDB nos fornece que a BNCC definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio.

No artigo 36 sobre a composição do currículo do ensino médio, temos:

> O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino (BRASIL, 2018, p. 26)

A BNCC também tem previsão legal no Plano Nacional de Educação (PNE). Previsto na constituição de 1988, o PNE é um documento com vigência de 10 anos sendo o atual com validade até 2024. Esse documento estabelece 20 metas e também estratégias para se alcançar as referidas metas.

Na meta 7 do PNE sobre a melhoria do fluxo escolar e da aprendizagem na educação básica e sobre alcançar metas previstas para o Ideb a cada 2 anos até o ano 2021, temos como primeira estratégia:

> Estabelecer e implantar, mediante pactuação interfederativa, diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos (as) alunos

> (as) para cada ano do ensino fundamental e médio, respeitada a diversidade regional, estadual e local. (BRASIL, 2014, p. 61)

1.4 Fundamentos Pedagógicos da Base Nacional Comum Curricular

A BNCC tem o foco no desenvolvimento de competências. O conceito de competência adotado pela base (definida como a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) pode ser inferido do texto da LDB.

Mais especificamente, no artigo 32, quando trata das finalidades do Ensino Fundamental que em síntese terá por objetivo a formação básica do cidadão, e do Ensino Médio no seu artigo 35:

> O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 2018, p. 24)

Seguindo esse enfoque, a BNCC indica que a orientação das decisões pedagógicas deve visar o desenvolvimento de competências.

Segundo o compromisso com a educação integral, a BNCC indica que

> [...]a Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento [...]. Significa, ainda, assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto – considerando-os como sujeitos de aprendizagem – e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades. (BRASIL, 2018, p.14)

1.5 O Novo Ensino Médio segundo a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio foi aprovada recentemente, apenas em 4 de dezembro de 2018. A educação básica é dividida em três etapas, no entanto aqui concentraremos nossos estudos apenas na etapa do Ensino Médio.

O Ensino Médio apresenta-se organizado em **quatro áreas de conhecimento**, são elas: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Para cada área do conhecimento, são definidas **competências específicas** que se relacionam com outras competências específicas da área no Ensino Fundamental visando consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos estudantes. Isso ocorre por meio do desenvolvimento de **habilidades** (aprendizagens essências garantidas a todos os estudantes pela BNCC) ao longo da etapa do Ensino Médio.

Segundo a BNCC, as áreas de conhecimento devem trabalhar em colaboração visando alcançar o desenvolvimento das competências específicas e das habilidades para o Ensino Médio.

Para auxiliar na prática pedagógica colaborativa, a BNCC apresenta sugestões para possibilitar a articulação entre as áreas de conhecimento. Essas situações de trabalho colaborativo são: **Laboratórios**, **Oficinas**, **Clubes**, **Observatórios**, **Incubadoras**, **Núcleos de estudos e Núcleos de criação artística**.

> [...] a flexibilidade deve ser tomada como princípio obrigatório pelos sistemas e escolas de todo o País, asseguradas as competências e habilidades definidas na BNCC do Ensino Médio, que representam o perfil de saída dos estudantes dessa etapa de ensino. Cabe aos sistemas e às escolas adotar a organização curricular que melhor responda aos seus contextos e suas condições: áreas, interáreas, componentes, projetos, centros de interesse etc. Independentemente da opção feita, é preciso 'romper com a centralidade das disciplinas nos currículos e substituí-las por aspectos mais globalizadores e que abranjam a complexidade das relações existentes entre os ramos da ciência no mundo real' (DCN, 2013, p. 183). (BRASIL, 2018, p. 471).

Na BNCC, as habilidades são identificadas por um interessante código alfanumérico que possui a seguinte composição:

EM*ab*MAT*cde*, sendo *a,b,c,d,e* algarismos.

EM: o primeiro par de letras representa a etapa (**Ensino Médio**);

ab: o primeiro par de número indica a(s) série(s) até onde as habilidades podem ser desenvolvidas, por exemplo, 13 indica a 1ª, 2ª e 3ª série;

MAT: a segunda sequência de letras indica a área ou o componente curricular (Matemática);

c: o primeiro número dos números finais indica a competência específica relacionada à habilidade;

de: os dois últimos números da parte final representa a numeração no conjunto de habilidades relativa à competência específica ***c*** indicada.

Por exemplo, (EM13MAT203) representa a terceira habilidade referente a competência especifica 2 do componente curricular Matemática que pode ser trabalhada nas três séries do Ensino Médio.

Para o Ensino Médio, a BNCC propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Naquela etapa, a Matemática trabalhava para desenvolver habilidades como o pensamento numérico, o pensamento algébrico, construção e ampliação da noção de medidas, o pensamento proporcional, a construção do espaço amostral de eventos equiprováveis, além de habilidades relativas à estatística.

Relacionadas com as competências gerais da educação básica e com as da área de Matemática para o Ensino Fundamental, temos as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

1.6 Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

São cinco as competências especificas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez

> mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

Referente às competências específicas, temos as habilidades abaixo que se relacionam com o conteúdo de função exponencial:

Tabela 1.1 - Habilidades da BNCC relacionadas com função exponencial

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Autor, 2021.

Essa dissertação tem como objetivo auxiliar no desenvolvimento das habilidades listadas acima.

2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

2.1 Potenciação

2.1.1 Potência de expoente natural

Definição 1: Seja a um número real e n um número natural. Definimos potência de base a e expoente n como o número $\boldsymbol{a^n}$ tal que

$$\begin{cases} a^0 = 1, \text{para } a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1} \cdot a, \forall n, n \geq 1. \end{cases}$$

2.1.2 Potência de expoente inteiro

Definição 2: Dados $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, define-se a potência a^{-n} pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Das definições de potência decorrem alguns propriedades que trataremos a seguir.

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS:

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ ou $n \neq 0$, então temos as seguintes propriedades (**P**):

P1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

P2 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

P3 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

P4 $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$;

P5 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

As propriedades listadas acima são facilmente demonstráveis por indução sobre n e, com a definição 2 e os devidos ajustes também são válidas para $m, n \in \mathbb{Z}$. Faremos aqui as demonstrações das propriedades **P2** e **P4**. A demonstração das demais propriedades saem de forma análoga.

Demonstração de **P2**:

Fixe $m \in \mathbb{N}$. Por indução sobre n segue que

(i) para $n = 0$ temos

$$\frac{a^m}{a^0} = \frac{a^m}{1} = a^m = a^{m-0};$$

(ii) suponha verdade que para algum $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\frac{\boldsymbol{a^m}}{a^n} = a^{m-n}, \text{ com } a \neq 0.$$

Queremos mostrar que $\frac{\boldsymbol{a^m}}{a^{n+1}} = a^{m-(n+1)}$. De fato:

$$\frac{a^m}{a^{n+1}} = \frac{a^m}{a^n \cdot a} = \left(\frac{a^m}{a^n}\right)\frac{1}{a^1} = a^{m-n} \cdot a^{-1} = a^{m-n-1} = a^{m-(n+1)}.$$

c.q.d.

Demonstração de **P4**:

Por indução sobre n segue que

(i) para $n = 0$ teremos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}, \, b \neq 0;$$

(ii) suponha que a propriedade seja verdade para algum número natural $n \geq 1$. Queremos mostrar que ela também é válida para $n+1$. De fato:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{a^1}{b^1} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}.$$

c.q.d.

Na demonstração do **P2** observe que caso $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ então teremos $-m, -n \in \mathbb{N}$ e assim

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{(\boldsymbol{a^{-m}})^{-1}}{(\boldsymbol{a^{-n}})^{-1}} \xRightarrow[\text{definição 2}]{} \frac{a^m}{a^n} = \frac{\boldsymbol{a^{-n}}}{\boldsymbol{a^{-m}}} = a^{-n-(-m)} = a^{m-n}.$$

Agora na demonstração do **P4**, se $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ então $-n \in \mathbb{N}$ e daí

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}\right]^{-1} = \left[\frac{a^{-n}}{b^{-n}}\right]^{-1} = \left[a^{-n} . \frac{1}{b^{-n}}\right]^{-1} \xRightarrow[\text{definição 2 e } \mathbf{P3}]{} \left[\frac{a^{-n}}{b^{-n}}\right]^{-1} = (a^{-n})^{-1} \cdot (b^n)^{-1}$$

$$\underset{\mathbf{P5}}{\Rightarrow} (a^{-n})^{-1} \cdot (b^n)^{-1} = a^n \cdot b^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Listaremos algumas proposições que serão utilizadas para demonstrar outras questões posteriormente.

Proposição 2.1: Se $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ e $a > 1$, então $a^m > 1$.

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre m.

(i) Para $m = 1$ não há o que demonstrar.

(ii) Suponha que $a^m > 1$ para algum $m > 1$.

Caso $a > 1$, temos

$$a^{m+1} = a^m \cdot a > a > 1.$$

Logo, também é verdade para $m + 1$.

c.q.d.

Proposição 2.2: Se $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ e $0 < a < 1$, então $a^m < 1$.

Demonstração:

Faremos por indução sobre m.

(i) Para $m = 1$ não há o que provar.

(ii) Suponha que $a^m < 1$ para algum $m > 1$.

Caso $0 < a < 1$, então existe $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$ tal que $a = \frac{1}{b}$. Assim

$$a^{m+1} = a^m \cdot a = \frac{1}{b^m} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b^{m+1}} < 1.$$

Logo, também é verdade para $m + 1$.

c.q.d.

Teorema 2.1: Se $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, temos que $a^m > 1$ se, e somente se, $a > 1$ e $a^m < 1$ se, e somente se, $0 < a < 1$.

Demonstração:

Já demonstramos as implicações "$\Leftarrow$" de ambas as afirmações nas Proposições **2.1** e **2.2**.

- $a^m > 1 \Rightarrow a > 1$:

Suponha, por absurdo, que $a^m > 1$ e $a \leq 1$.

Se $a = 1$, então $a^m = 1$, absurdo. E, se $0 < a < 1$, então $a^m < 1$, absurdo. Logo, $a > 1$.

- $a^m < 1 \Rightarrow 0 < a < 1$:

Suponha, por absurdo, que $a^m < 1$ e $a \geq 1$.

Se $a = 1$, então $a^m = 1$, absurdo. Se $a > 1$, então $a^m > a > 1$, absurdo. Logo, $0 < a < 1$.

c.q.d.

Proposição 2.3: Se $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ então a > 1 se, e somente se, $a^{-m} < 1$.

Demonstração:

De fato, temos que $a^{-m} = \frac{1}{a^m} < 1 \Leftrightarrow a^m > 1 \Leftrightarrow a > 1$.

c.q.d.

Proposição 2.4: Se $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ então $0 < a < 1$ se, e somente se, $a^{-m} > 1$.

Demonstração:

De fato, temos que $a^{-m} = \frac{1}{a^m} > 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

c.q.d.

2.1.3 Raiz enésima aritmética

Definição 3: Dado um número real $a \geq 0$ e um número natural $n \geq 1$, é possível demonstrar que existe sempre um número real $b \geq 0$ tal que $b^n = a$. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [16] (página 82). Chamaremos o número b de **raiz enésima aritmética** de a e o indicaremos por $\sqrt[n]{a}$. O número a é chamado radicando e n é o índice. Em símbolos temos,

$$\sqrt[n]{a} = \mathrm{b} \Leftrightarrow b^n = a \text{ com } \mathrm{b} \geq 0.$$

PROPRIEDADES DA RAÍZ ENÉSIMA

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n, p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, então temos:

(i) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$;

(ii) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ com $b \neq 0$;

(iv) $(\sqrt[n]{a})^{m} = \sqrt[n]{a^m}$;

(v) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$.

Demonstração de (i): $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$.

Seja $x = \sqrt[n]{a^m}$. Então

$$x^{np} = (\sqrt[n]{a^m})^{np} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = (a^m)^p.$$

Assim, pela definição de raiz enésima, temos que

$$x = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \text{ ou seja, } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}.$$

Demonstração de (ii): $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Fazendo $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Então segue que

$$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a}\,)^n \cdot (\sqrt[n]{b}\,)^n = a \cdot b$$

$$\therefore x^n = a \cdot b \Longrightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

Ou seja, $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Demonstração de (iii): $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ com $b \neq 0$.

Seja $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Então segue que

$$x = \sqrt[n]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a} \cdot (\sqrt[n]{b}\,)^{-1}.$$

Daí então, elevando a expressão ao expoente n obtemos

$$x^n = [\sqrt[n]{a} \cdot (\sqrt[n]{b}\,)^{-1}]^n = (\sqrt[n]{a}\,)^n \cdot [(\sqrt[n]{b}\,)^n]^{-1}$$

$$\therefore x^n = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} \text{ com } b = 0.$$

Logo temos que $x^n = \frac{a}{b} \Longrightarrow x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, ou seja, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

<u>Demonstração de (iv)</u>: $(\sqrt[n]{a})^{m} = \sqrt[n]{a^m}$.

Provaremos por indução. Considerando n fixo e $m \geq 0$, faremos a demonstração por indução sobre m.

(i) Para $m = 0$ temos

$$(\sqrt[n]{a})^{0} = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}.$$

(ii) Agora tome como hipótese de indução que para algum $m > 0$ tenhamos

$$(\sqrt[n]{a})^{m} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Queremos mostrar que $(\sqrt[n]{a})^{m+1} = \sqrt[n]{a^{m+1}}$ também é verdade.

De fato:

$$(\sqrt[n]{a})^{m+1} = (\sqrt[n]{a})^{m} \cdot (\sqrt[n]{a})^{1} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^1}.$$

Daí, por (ii) e pela propriedade **P1** temos que

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a^{m+1}} \Longrightarrow (\sqrt[n]{a})^{m+1} = \sqrt[n]{a^{m+1}}.$$

Para o que falta, note que caso tenhamos $m < 0$, então $-m > 0$. Desse modo

$$(\sqrt[n]{a})^{m} = [(\sqrt[n]{a})^{-m}]^{-1} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{-m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(a^m)^{-1}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

<u>Demonstração de (v)</u>: $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$.

Seja $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$. Então segue que

$$x^p = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}})^p = \sqrt[n]{a}.$$

Elevando a expressão ao expoente n obtemos

$$(x^p)^n = (\sqrt[n]{a})^n \Longrightarrow x^{pn} = a \Longrightarrow x = \sqrt[p \cdot n]{a}.$$

Logo temos que $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$.

<u>c.q.d.</u>

2.1.4 Potência de expoente racional

Definição 4: Dados $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Caso $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adotamos a definição especial:

$$0^{\frac{p}{q}} = 0.$$

Além de satisfazer às propriedades **P**, os expoentes racionais satisfazem também as seguintes proposições:

Proposição 2.5: Se $a > 1$, então $a^{\frac{1}{q}} > 1$.

Demonstração:

De fato, fazendo $b = a^{\frac{1}{q}}$, podemos reescrever

$$a = b^q > 1 \Rightarrow b > 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{q}} > 1.$$

c.q.d.

Proposição 2.6: Se $0 < a < 1$, então $a^{\frac{1}{q}} < 1$.

Demonstração:

De fato, $0 < a < 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b}$ com $b > 1$. Assim temos

$$b^{\frac{1}{q}} > 1 \Longrightarrow a^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{q}}} < 1.$$

c.q.d.

Proposição 2.7: Se $r \in \mathbb{Q}_+$, então $a > 1 \Longrightarrow a^r > 1$.

Demonstração:

Seja $r = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$. Então segue que

$$a > 1 \Longrightarrow a^{\frac{1}{q}} > 1 \Longrightarrow (a^{\frac{1}{q}})^p = a^r > 1.$$

c.q.d.

Proposição 2.8: Se $r \in \mathbb{Q}_+$, então $0 < a < 1 \Longrightarrow a^r < 1$.

Demonstração:

Analogamente, tomando $r = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$. Então segue que

$$0 < a < 1 \Longrightarrow a^{\frac{1}{q}} < 1 \Rightarrow a^r = (a^{\frac{1}{q}})^p < 1.$$

c.q.d.

Proposição 2.9: Se r ∈ $\mathbb{Q}_{+,}$ então $a > 1 \Rightarrow a^{-r} < 1$.

Demonstração:

Veja que $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Como $a^r > 1$, pela proposição **2.7** temos que $\frac{1}{a^r} < 1$.

c.q.d.

Proposição 2.10: Se r ∈ $\mathbb{Q}_{+,}$ então $0 < a < 1 \Longrightarrow a^{-r} > 1$.

Demonstração:

Analogamente, temos que $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Como $a^r < 1$, pela proposição **2.8** temos que $\frac{1}{a^r} > 1$.

c.q.d.

Teorema 2.2: Se $a > 1$, então a função f:$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ é crescente.

Demonstração:

Se r, $s \in \mathbb{Q}$ e $r > s$, então $r - s > 0$. Assim, $a^{r-s} > 1$, pois $a > 1$. Logo,

$$a^s \cdot a^{r-s} > a^s \Longrightarrow a^r > a^s$$

$$\therefore f(r) > f(s).$$

Logo f é crescente.

c.q.d.

Teorema 2.3: Se $0 < a < 1$, então f:$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$ é decrescente.

Demonstração:

Se r, $s \in \mathbb{Q}$ e $r > s$, então $r - s > 0$. Assim, $a^{r-s} < 1$, pois $0 < a < 1$. Daí

$$a^s \cdot a^{r-s} < a^s \Longrightarrow a^r < a^s$$

$$\therefore f(r) < f(s).$$

Logo f é decrescente.

c.q.d.

2.1.5 Potência de expoente irracional

Definição 5: uma sequência numérica infinita é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o n-ésimo termo da sequência. Usaremos a notação (a_n) para representar uma sequência "a".

Exemplos:

a) $(a_n) = (1, 3, 5, 7, ...)$,

b) $(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$.

Na primeira sequência dos exemplos, à medida que n aumenta, os valores de (a_n) tendem a ficar cada vez maiores. Denotamos esse fato com a notação: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, e dizemos que a sequência diverge.

No exemplo b), à medida que n aumenta, os valores de (b_n) tendem a 0. Denotamos esse fato com a notação: $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ou $b_n \to 0$, e dizemos que a sequência (b_n) converge para 0.

EXEMPLO 2.1:

Sabemos que $\sqrt{2} \cong 1{,}4142135624\ldots$ é um número irracional. Para calcular $2^{\sqrt{2}}$, podemos aproximar esse valor por falta e por excesso utilizando como expoente os termos das sequências de racionais:

$(r_n) = (1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; ....; r_n; ...)$ e

$(s_n) = (2; 1{,}5; 1{,}42; 1{,}415; 1{,}4143; ...; s_n; ...)$.

Teremos

- $2 = 2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 = 4$
- $2{,}6390 \cong 2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \cong 2{,}8284$
- $2{,}6574 \cong 2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \cong 2{,}6759$
- $2{,}6647 \cong 2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \cong 2{,}6666$
- $2{,}6651 \cong 2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \cong 2{,}6653$

$$\vdots$$

Dos valores obtidos notamos que $\lim_{n\to\infty} 2^{r_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{s_n} = 2^{\sqrt{2}}$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ um número irracional. O número α é caracterizado por ter expansão decimal infinita e não-periódica. Seja

$$\alpha = b_0{,}b_1b_2b_3...b_n... \; (\alpha = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \cdots)$$

a expansão decimal de α, e tomando $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ com

$$r_n = b_0,b_1b_2b_3...b_n \text{ e } s_n = b_0,b_1b_2b_3...b_n+1,$$

ou seja,

$$r_n = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots + \frac{b_n}{10^n}$$

e

$$s_n = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots + \frac{b_n+1}{10^n} = r_n + \frac{1}{10^n}$$

com $b_0,b_1,b_2,b_3,...,b_{n+1}... \in \{0,1,2,...,9\}$. Temos que

$$|\ \alpha - r_n| = \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots$$

Como a soma acima representa uma expansão decimal infinita e não-periódica, segue que

$$\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots < \frac{1}{10^n}\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{10^n}$$

$$\therefore |\ \alpha - r_n| < \frac{1}{10^n}$$

analogamente

$$|\ \alpha - s_n| = |\ \alpha - (r_n + \frac{1}{10^n})| < |\ \alpha - r_n| + |\ \frac{1}{10^n}| = \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^n} < \frac{2}{10^{n+1}}$$

$$\therefore |\ \alpha - s_n| < \frac{2}{10^{n+1}}$$

e

$$r_n < \alpha < s_n.$$

Assim, dado $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, pelo teorema **2.2** (página 24), temos que

$$a^{r_n} < a^{s_n}, \text{caso } a > 1$$

e pelo teorema **2.3** (página 24)

$$a^{r_n} > a^{s_n}, \text{ caso } 0 < a < 1.$$

Além disso, quando n tende a infinito r_n e s_n tendem a α.

<u>Definição 6:</u> Sejam $a \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Seja (x_n) uma sequência que converge para α. Então, como a função exponencial é contínua (ver teorema **2.7**, página 31), temos que

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

Uma abordagem mais detalhada da definição 6 pode ser encontrada em [17] (página 36)

Por fim, temos que as propriedades **P** (página 18) valem para expoentes racionais e irracionais de modo que são válidas para todo expoente real, isto é:

Se a, $b \in \mathbb{R}$ e m, $n \in \mathbb{R}$, então temos

(I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

(II) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $a \neq 0$;

(III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

(IV) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$;

(V) $(a^m)^{\boldsymbol{n}} = a^{m \cdot n}$.

2.1.6 Logaritmo

Definição 7: Sendo a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$; e escrevemos

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a.$$

Na sentença $\log_b a = x$, dizemos que

- a é o logaritmando,
- b é a base do logaritmo,
- x é o logaritmo de a na base b.

Definição 8: O número $e \cong 2{,}7182818284...$ é um número irracional que partindo da expressão algébrica $(1 + \frac{1}{n})^n$ e fazendo n crescer ou decrescer indefinidamente, a expressão acima fornecerá o número e, ou seja, $\lim_{n \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Os logaritmos de base e são denominamos logaritmo natural e denotamos por ln. Assim $\ln a$ representa o logaritmo natural de a. Também conhecido como logaritmo neperiano, tal logaritmo recebe essa denominação devido ao seu inventor – o matemático escocês John Napier. O número e é também conhecido como número de Euler ou constante de Euler.

Funções exponenciais de base e são bastante utilizadas para modelar diversos fenômenos naturais, físicos e econômicos. Por ter tamanha importância com tantas aplicações, o logaritmo natural recebe essa notação diferente, denominada especial.

Como consequência da definição 7 e, aplicando as propriedades **P**, temos as propriedades abaixo.

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Para quaisquer a, b e c reais positivos, $b \neq 1$ e x, y em $\mathbb{R}$ temos que:

(i) $\log_b b = 1$;

(ii) $\log_b 1 = 0$;

(iii) $\log_b a^y = y \cdot \log_b a$;

(iv) $\log_b b^x = x$;

(v) $b^{\log_b a} = a$ com $b \neq 0$;

(vi) $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$;

(vii) $\log_b(\frac{a}{c}) = \log_b a – \log_b c$, com $c \neq 0$;

(viii) $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$, $\forall k \in \mathbb{R}_+$ com $k \neq 1$;

Demonstração de (i):

De fato, seja $\log_b b = x$, então por definição, $b^x = b \Rightarrow x = 1$.

Demonstração de (ii):

De fato, se $\log_b 1 = x$ então $b^x = 1 = b^0$. Portanto $x = 0$.

Demonstração de (iii):

De fato, tomando $\log_b a = x$, segue que $b^x = a$.

Daí elevando ao expoente y ambos os membros da última igualdade, obtemos

$$(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{x.y} = a^y.$$

E, pela definição de logaritmo, temos:

$$b^{x.y} = a^y \Leftrightarrow yx = \log_b a^y$$

Como tomamos $x = \log_b a$, então concluímos que

$$y.\log_b a = \log_b a^y.$$

Demonstração de (iv):

De fato, pelo caso (iii) e (i), temos:

$$\log_b b^x = x.\log_b b = x.1 = x.$$

Demonstração de (v):

De fato. Supondo $x = \log_b a$, temos que $b^x = a$. Como x representa $\log_b a$, concluímos então que $b^{\log_b a} = a$.

Demonstração de (vi):

De fato. Seja $log_b a = x$ e $\log_b c = y$. Então pela definição de logaritmo teremos que

(1) $b^x = a$,

(2) $b^y = c$.

Multiplicando membro a membro as equações (1) e (2) obtemos

$$b^x \cdot b^y = a \cdot c \Rightarrow b^{x+y} = ac \Rightarrow ac = b^{x+y}.$$

Assim, pela definição de logaritmo, temos que

$$ac = b^{x+y} \Leftrightarrow \log_b ac = x + y.$$

Portanto temos que

$$\log_b ac = \log_b a + \log_b c.$$

<u>Demonstração de (vii)</u>:

De fato, fazendo

(1) $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$,

(2) $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$,

(3) $\log_b(\frac{a}{c}) = z \Leftrightarrow b^z = (\frac{a}{c})$.

Substituindo (1) e (2) em (3) obtemos que

$$b^z = \frac{b^x}{b^y} \Longrightarrow b^z = b^{x-y} \Rightarrow z = x - y, \text{ ou seja, } \log_b(\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c.$$

<u>Demonstração de (viii)</u>:

De fato. Seja $\log_b a = x$, $\log_k a = y$ e $\log_k b = z$ com $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Então pela definição de logaritmo temos equivalentemente

(1) $b^x = a$, (2) $k^y = a$, e (3) $k^z = b$.

Logo por (1) e (2) obtemos

$$b^x = a = k^y$$

e assim temos que

$$b^x = k^y.$$

Agora, usando o que temos em (3), segue que

$$b^x = k^y \underset{(3)}{\Longrightarrow} (k^z)^x = k^y \Rightarrow k^{zx} = k^y.$$

Assim temos que

$$zx = y \Longrightarrow x = \frac{y}{z}$$

o que equivale dizer que

$$\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$$

<u>c.q.d</u>

2.2 Função Exponencial

Definição 9: dado um número real $a \in \mathbb{R}_{+}\backslash\{0,1\}$, chamamos **função exponencial** de base a a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}\backslash\{0\}$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, em que a é uma constante real positiva e diferente de 1.

Exemplos:

(a) $f(x) = 2^x$;

(b) $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

2.2.1 Propriedades da função exponencial

Considere a função exponencial f como foi definida acima. Valem então as seguintes proposições e teoremas:

Proposição 2.11: O par ordenado (0, 1) pertence ao gráfico da f.

Demonstração:

De fato:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 = 1.$$

Portanto (0,1) pertence ao gráfico da função f.

c.q.d

Teorema 2.4: f é ilimitada superiormente.

Demonstração:

Seja $f(x) = a^x$ com $0 < a \neq 1$.

(i) Caso $a > 1$, fixando $M \in \mathbb{R}$ suficientemente grande e positivo, então pela definição de raiz enésima (definição 3, página 21), existe $n \in \mathbb{N}$ talque

$$\sqrt[n]{M} = a \Leftrightarrow a^n = M.$$

Logo temos $f(n) = M$ e como $a > 1$, f é crescente e implica que

para todo $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i > n$ temos $f(x_i) > M$.

(ii) Caso tenhamos $0 < a < 1$, f é decrescente. Assim, fixando $M \in \mathbb{R}_{+}$ suficiente grande, temos que existe algum número negativo $m \in \mathbb{Z}$, $-m >$ o tal que, pela definição 3 novamente, teremos

$$f(m) = a^m = (\frac{1}{a})^{-m} > 1 \text{ com } a^m = M.$$

Assim temos que para todo $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i < m$ obtemos $f(x_i) > f(m)$, ou seja $f(x_i) > M$. Logo f é ilimitada superiormente.

c.q.d

Teorema 2.5: *f* é injetora.

Demonstração:

De fato, pois dados dois números reais quaisquer x_1 e x_2 com $x_1 \neq x_2$ (suponha $x_1 < x_2$), então teremos que:

(i) caso $a > 1$, então $f(x_1) < f(x_2)$;

(ii) caso $0 < a < 1$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Em ambos os caso temos que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Logo a função *f* é injetora.

c.q.d

Teorema 2.6: *f* é sobrejetora.

Teorema 2.7: *f* é contínua.

As demonstrações para dos teoremas **2.6** e **2.7** podem ser encontradas em [14] (página 156).

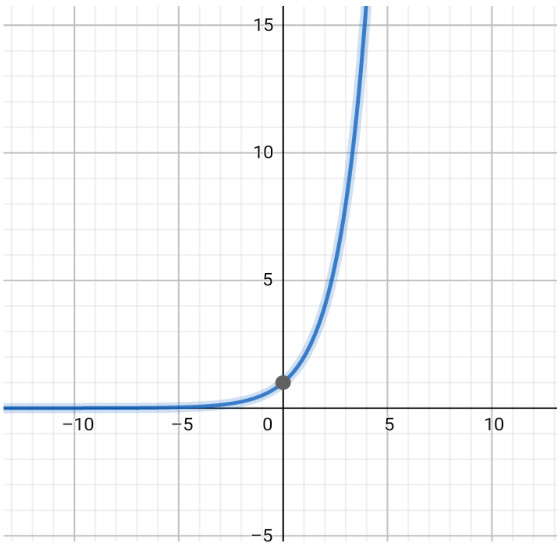
2.2.2 Gráfico da função exponencial

Por Hoffmann (1982, p. 10) temos a definição de gráfico a seguir.

Definição 10: o gráfico da função *f* consiste de todos os pontos para os quais as coordenadas (x, y) satisfazem à equação $y = f(x)$.

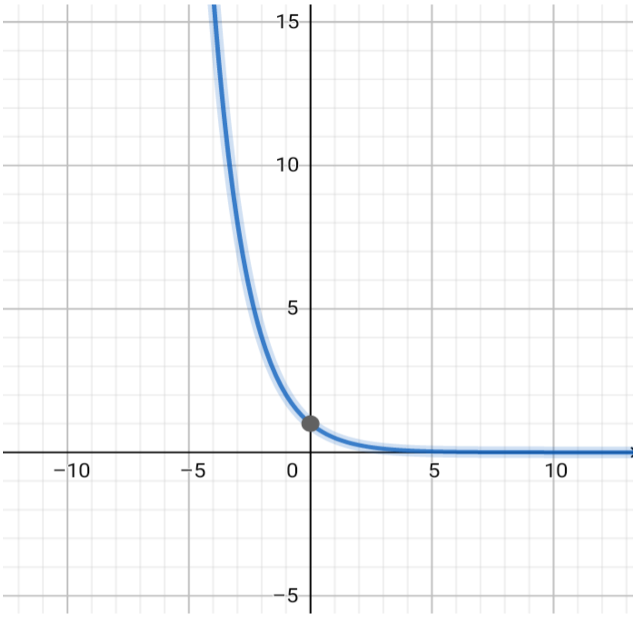
Assim, pela definição de gráfico, pela definição de função exponencial e pelos teoremas vistos, temos que há dois tipos de representação gráfica para a função $y = f(x) = a^x$.

Figura 2.1 - Gráfico da função exponencial de base *a* >1



Fonte: Autor, 2021.

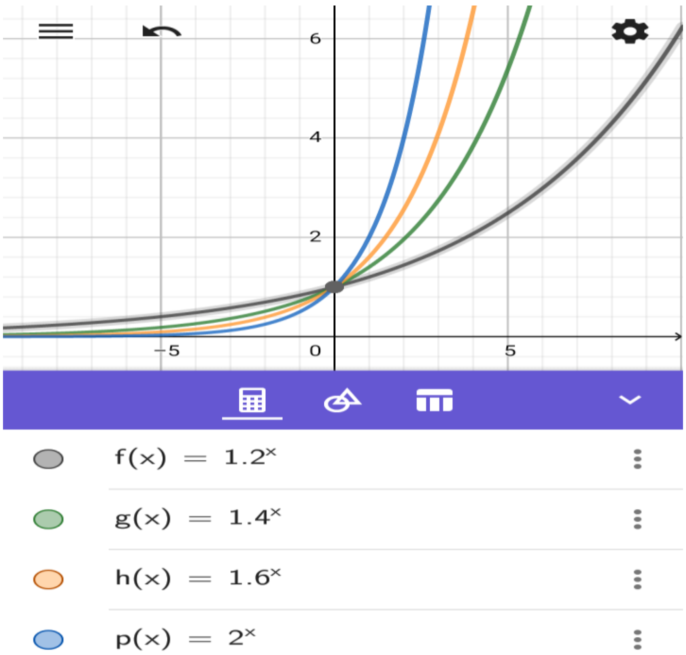
Figura 2.2 - Gráfico da função exponencial de base *a*, com 0 < *a* < 1



Fonte: Autor, 2021.

Para funções exponenciais de base maior que 1, é interessante observar que quanto maior for a base, mais rápido será seu crescimento exponencial para valores positivos de, como vemos na representação gráfica a seguir.

Figura 2.3 - Variação do crescimento exponencial dependendo da base



Fonte: Autor, 2021.

Proposição 2.12: Se $a > b > 0$, então

$$\begin{cases} a^x > b^x, \text{caso } x > 0 \\ a^x < b^x, \text{caso } x < 0 \end{cases}.$$

<u>Prova</u>:

Se $a > b > 0$, então dividindo tudo por $b \neq 0$, obtemos

$$\frac{a}{b} > 1$$

Caso $x > 0$, segue que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x > 1 \Rightarrow \frac{a^x}{b^x} > 1 \Rightarrow a^x > b^x.$$

Caso $x < 0$, então $-x > 0$ e temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} > 1 \Rightarrow \frac{a^{-x}}{b^{-x}} > 1 \Rightarrow \frac{b^x}{a^x} > 1 \Rightarrow b^x > a^x.$$

<u>c.q.d.</u>

Partindo dos gráficos da função da figura 2.2, podemos obter os gráficos de outras funções de mesma base e que possuem outros termos adicionais.

Por exemplo, seja $g(x) = a^x$ com $0 < a < 1$ uma função exponencial. Dado $c > 1$, teremos que o gráfico da função $h(x) = c \cdot g(x)$ é obtido alongando o gráfico de g verticalmente do fator c; o gráfico da função $i(x) = g(x) + c$ é obtido transladando o gráfico da função g de c, paralelo ao eixo das ordenadas; e o gráfico da função $j(x) = g(x + c)$ translada horizontalmente o gráfico da g, no caso da exponencial de base a, isso equivale a uma dilatação de a^c.

Vejamos por exemplo, que caso tenhamos $h(x) = 5g(x)$, então tomando (x, y) pertencente ao gráfico da função g, segue que $g(x) = y$. Daí $h(x) = 5g(x) = 5y$. Assim $(x, 5y)$ pertence ao gráfico da função h. Como $y > 0$, então $|5y| > |y|$. Portanto temos que o gráfico de h é obtido alongando verticalmente para cima o gráfico de g.

Para ficar mais claro, apresentaremos exemplos gráficos das situações mencionadas acima. Para tanto usaremos as funções:

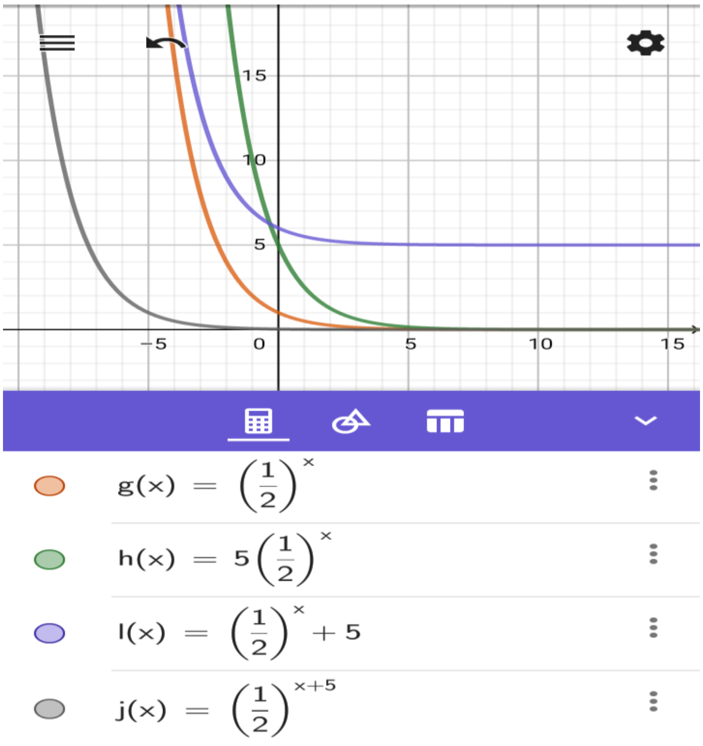
$g(x) = (\frac{1}{2})^x$,

$h(x) = 5 \cdot g(x)$,

$i(x) = g(x) + 5$ e

$j(x) = g(x+5)$.

Figura 2.4 - Gráficos de outras funções exponenciais



Fonte: Autor, 2021.

Das bases de número reais positivos e diferentes de 1 que aparecem nas funções exponenciais, uma em especial merece maior atenção por suas inúmeras aplicações: a de base *e*. Existem muitas aplicações de função exponencial de base *e* em diversas áreas.

> [...] em Demografia, para calcular o tamanho da população; em Finanças, para calcular o valor de investimentos; em Arqueologia, para calcular a idade de antiguidades; em Psicologia, para estudar problemas de aprendizagem; em Saúde Pública, para analisar a expansão de epidemias; na Indústria, para estimar a confiabilidade de certos produtos. (HOFFMANN 1982, p. 140)

Uma pergunta que surge é por que em todos esses casos se utiliza a base *e*? Segundo Lima (2012, p. 174), a resposta seria que a utilização dessa base é inevitável porque o número *e* aparece de maneira natural e insubstituível em várias situação básicas.

<u>EXEMPLO 2.2</u>: Considere um capital de C reais investido a uma taxa de juros anual i e os juros sendo compostos.

Se a taxa de juros for de i por cento ao ano e os juros forem compostos k vezes, o ano será dividido em k períodos iguais e cada período terá $\frac{i}{k}$ como taxa de juros. Assim, pela fórmula de juros compostos, no final do primeiro período teremos o montante

$$M_1 = C\cdot(1 + \frac{i}{k});$$

no segundo período teremos

$$M_2 = C\cdot(1 + \frac{i}{k})\ (1 + \frac{i}{k}) = C\cdot(1 + \frac{i}{k})^2;$$

para o terceiro período teremos

$$M_3 = C\cdot(1 + \frac{i}{k})^3;$$

$$\vdots$$

e assim sucessivamente, de modo que, ao final de um ano (k períodos) teremos

$$M_{(1)} = C\cdot(1 + \frac{i}{k})^k, \text{ note que } M_{(1)} > C\cdot(1 + i).$$

Logo, ao final de t anos (*kt* períodos) teremos o montante

$$M_{(t)} = C\cdot(1 + \frac{i}{k})^{kt}.$$

Fazendo

$$n = \frac{k}{i} \Longrightarrow k = ni \text{ e } \frac{i}{k} = \frac{1}{n},$$

teremos

$$M_{(t)} = C\cdot(1 + \frac{i}{k})^{kt} = C\cdot(1 + \frac{1}{n})^{nit} = C\cdot [(1 + \frac{1}{n})^n]^{it}.$$

Dessa forma, tomando os períodos com o mínimo de tempo possível, teremos um número quase infinito de períodos em um ano. Ou seja, quando dividirmos os períodos em intervalos de tempo cada vez menores ($n \rightarrow \infty$), consequentemente $k \rightarrow \infty$, então segue que

$$\lim_{n \to \infty} M_{(t)} = \lim_{n\to\infty} C \cdot [(1 + \frac{1}{n})n]^{it} = C\cdot [\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n]^{it}$$

como

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

então, às vezes, é conveniente aproximar essa função discreta por uma função contínua

$$M_{(t)} = C\cdot [\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n]^{it} = C\cdot e^{it}$$

$$\therefore M_{(t)} = C\cdot e^{it}.$$

Uma das vantagens de se tomar uma abordagem continuamente para os juros compostos é que seu rendimento é maior que com um abordagem discreta.

O Exemplo 2.2 nos fornece como resultado um modelo para função exponencial de base *e* bastante utilizado e aplicado nas Ciências Sociais, na Economia e na Biologia, segundo Hoffmann (1982, p. 148).

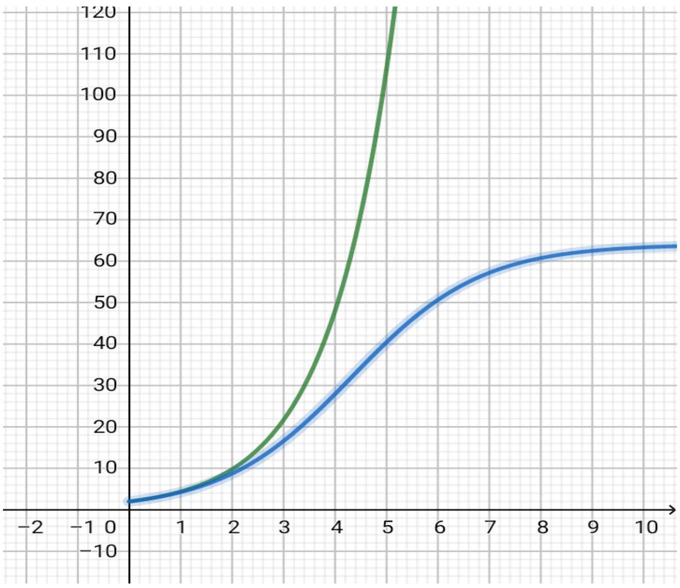
Crescimento exponencial: Por Boyce (2010, p. 60), se p_0 é o valor atual da população de uma determinada espécie, essa população varia em função do tempo *t*. A hipótese mais simples é que a taxa de variação da população é proporcional ao seu valor atual. Sob condições ideais essa população cresce exponencialmente, pelo menos por períodos de tempo, segundo a função $\boldsymbol{p(t) = p_0 \cdot e^{rt}}$, $r > 0$.

Decrescimento exponencial: segundo o mesmo autor, no caso da função anterior quando a constante *r* é negativa temos um declínio ou decrescimento exponencial. Dessa forma teremos uma quantidade *y(t)* que decresce seguindo a função $\boldsymbol{y(t) = y_0 \cdot e^{-rt}}$ onde y_0 e *r* são constantes positivas, *t* representa o tempo. Como exemplo temos o caso das substâncias radioativas, certos medicamentos no organismo e a venda de certos produtos cuja propaganda foi interrompida.

Curvas de logística: Agora sobre o crescimento exponencial de uma população, como indica Stewart (2013, p. 549), Se $p(t)$ indica o tamanho da população no instante t, em determinado momento essa população se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte *M* devido aos recursos limitados. Temos que a taxa de crescimento diminui quando a população *p* aumenta e torna-se negativa quando ultrapassa sua capacidade de suporte. Assim as curvas de logísticas são indicadas por funções do tipo $\boldsymbol{p(t) = \frac{M}{1+A\cdot e^{-kt}}}$ onde *A, M* e *k* são constantes positivas.

Um exemplo gráfico de crescimento populacional e curva de logística é dado com as funções $p(x) = 2e^{0,7944x}$ e $l(x) = \frac{64}{1+31\cdot e^{-0,7944x}}$ pelo autor:

Figura 2.5 - Gráfico de crescimento populacional e curva de logística



Fonte: Autor, 2021**.**

Curvas de aprendizagem: Segundo Hoffmann (1982, p. 150), foi constatado por psicólogos que funções da forma $\boldsymbol{Q(t) = B - Ae^{-kt}}$ (onde A, B e k são constantes positivas) frequentemente descrevem a relação entre a eficiência com a qual um indivíduo executa certo trabalho e a quantidade de treinamento ou experiência possuída pelo indivíduo.

Acontece algo interessante nos gráficos de funções desse tipo. O que ocorre é que quando t cresce indefinidamente, a função tende a um valor constante (B), denotando que após o indivíduo atingir sua eficiência máxima, qualquer outro treinamento adicional terá sempre um resultado quase insignificante.

EXEMPLO 2.3: Se a produção diária de um operário que trabalha a t semanas é dada pela função $Q(t) = 40 - Ae^{-kt}$. Considerando que inicialmente o operário produzia 20 unidades por dia e, após uma semana, ele produz 30 unidades por dia.

(a) Identifique quantas unidades por dia o operário produzirá, após 3 semanas.

(b) Construa o gráfico da função $Q(t)$.

Solução:

(a) Como $Q(0) = 20$, então $40 - Ae^{0} = 20 \Rightarrow A = 20$;

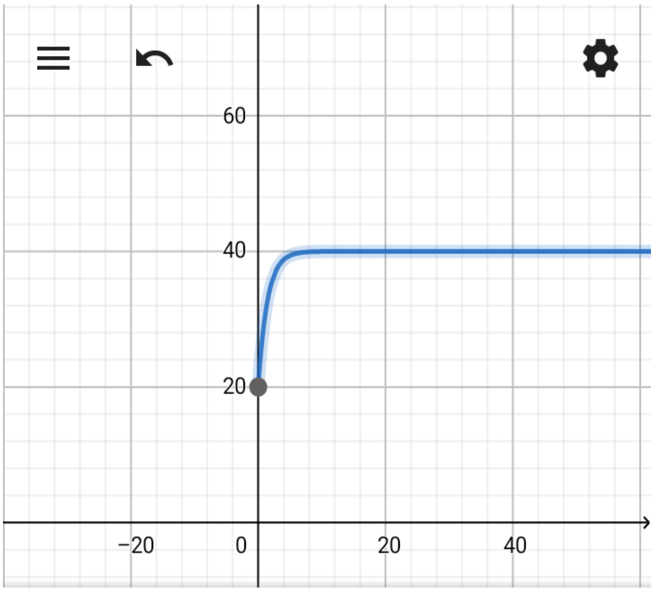
Agora $Q(1) = 30 \Rightarrow 40 - 20e^{-k} = 30 \Rightarrow e^{k} = 2 \Rightarrow k = \ln 2 \cong 0{,}7$.

Assim temos $Q(t) = 40 - 20e^{-0{,}7t}$. Portanto

$$Q(3) = 40 - 20e^{-0{,}7 \cdot 3}$$
$$\Rightarrow Q(3) \cong 37.$$

(b) Com o auxílio do aplicativo GeoGebra obtemos:

Figura 2.6 - Gráfico de curva de aprendizagem



Fonte: Autor, 2021.

2.3 Função Logarítmica

Definição 9: chama-se função logarítmica toda função f: $\mathbb{R}_+\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, em que b é um número real positivo e diferente de 1.

2.3.1 Propriedade da função logarítmica

Teorema 2.8: A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é

(i) crescente se, e somente se, $b > 1$,

(ii) decrescente se, e somente se, $0 < b < 1$.

Demonstração (i): $f(x) = \log_b x$ é crescente $\Leftrightarrow b > 1$.

($\Leftarrow$) Considere a função f: $\mathbb{R}_+\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_b x$ e com $b > 1$. Tome

$$\{p, q\} \subset \mathbb{R}_+\backslash\{0\} \text{ com } p < q.$$

Pela propriedade (v) dos logaritmos (página 28), obtemos

$$b^{\log_b p} < b^{\log_b q}.$$

Agora fazendo

$$\log_b p = y \Longrightarrow b^y = p,$$

$$\log_b q = z \Longrightarrow b^z = q.$$

Teremos que

$$p < q \Longrightarrow b^y < b^z.$$

Como $b > 1$, então pelo teorema **2.5** (página 31), temos que

$$y < z \Longrightarrow \log_b p < \log_b q.$$

Logo a função f é crescente.

($\Longrightarrow$) Suponha f crescente. Seja $\{p, q\} \subset \mathbb{R}_+ \backslash\{0\}$, $p < q$ com

$$\log_b p = y \Longrightarrow b^y = p,$$

$$\log_b q = z \Longrightarrow b^z = q.$$

Temos então que

$$\log_b p < \log_b p \Longrightarrow y < z \text{ e}$$

$$p < q \Longrightarrow b^y < b^z.$$

Assim obtemos que

$$y < z \Longrightarrow b^y < b^z.$$

Logo, pelo teorema **2.5** (página 31), temos que $b > 1$.

<u>Demonstração (ii)</u>: $f(x) = \log_b x$ é decrescente $\Leftrightarrow 0 < b < 1$.

($\Longleftarrow$) Suponha $0 < b < 1$. Tome $\{p, q\} \subset \mathbb{R}_+ \backslash\{0\}$ com $p < q$. Queremos mostrar que a função f é decrescente. Para isso mostraremos que $\log_b p > \log_b q$.

De fato. Se $p < q$ então, pela propriedade (v) dos logaritmos (página 28), temos que

$$b^{\log_b p} < b^{\log_b q}$$

e como por hipótese $0 < b < 1$, então pelo teorema **2.5** (página 31), temos que, temos que

$$\log_b p > \log_b q.$$

($\Longrightarrow$) Por outro lado se a função $f(x) = \log_b x$ é decrescente, então para $p < q$ com p e q em $\mathbb{R}_+ \backslash\{0\}$ temos que

$$p < q \Rightarrow \log_b p > \log_b q.$$

Daí, tomando

$$\log_b p = y \text{ e } \log_b q = z$$

teremos que

$$b^y = p \text{ e } b^z = q.$$

Assim,

$$b^y < b^z \text{ com } y > z.$$

Com isso, pelo teorema **2.5** (página 31), temos a garantia de que a função exponencial é decrescente e portanto temos $0 < b < 1$.

c.q.d.

Teorema 2.9: Se $0 < b \neq 1$, então a função $f\colon \mathbb{R}_+\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_b x$ e a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ definida por $g(x) = b^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração:

Suponha que f e g são funções inversas entre si. Caso isso ocorra então teremos que

$$f(g(x)) = x, \text{ para todo } x \text{ em } \mathbb{R} \text{ e}$$

$$g(f(x)) = x, \text{ para todo } x > 0, x \text{ em } \mathbb{R}.$$

Assim, para o que queremos provar, basta mostrar que a sentença acima é verdadeira.

De fato, veja que:

(i) para todo $x \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, temos que

$$f(g(x)) = \log_b b^x = x \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\};$$

(ii) qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos que

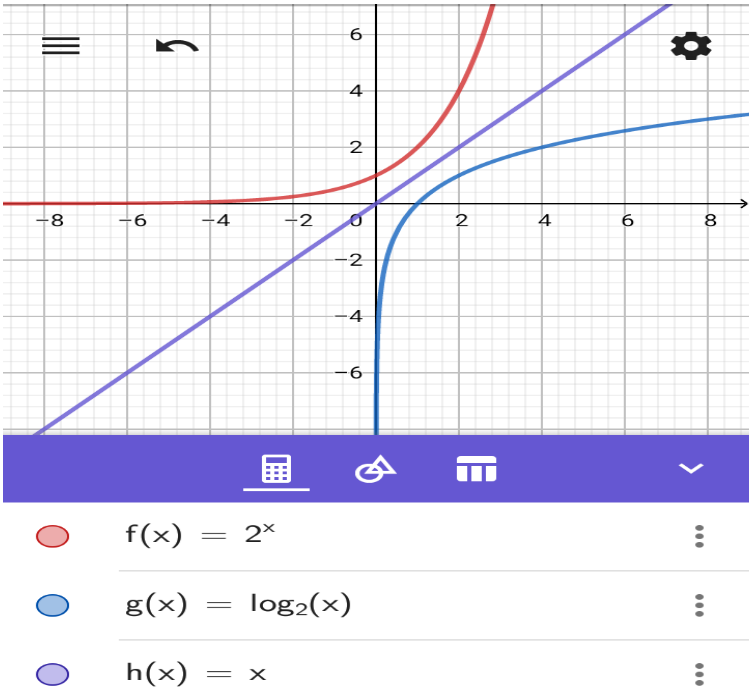
$$g(f(x)) = b^{\log_b x} = x \in \mathbb{R}.$$

Logo, por (i) e (ii) está provado que as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra.

c.q.d.

Vejamos o esboço gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$ e de sua inversa, a função logarítmica $g(x) = \log_2 x$:

Figura 2.7 - Gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$ e de sua inversa $g(x) = \log_2 x$



Fonte: Autor, 2021.

Uma propriedade interessante das funções inversas é que seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano. Assim, na figura 2.7, como f e g são funções inversas, seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Proposição 2.13: O gráfico da função exponencial é simétrico ao gráfico da função logarítmica.

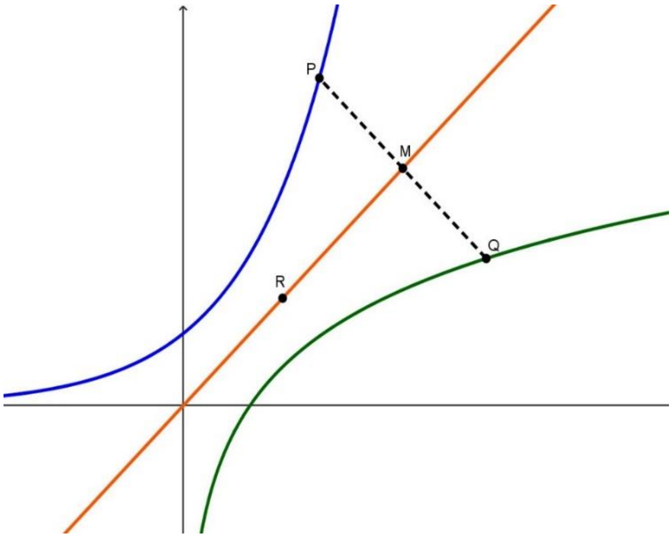
Prova: considere as funções $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$ com $b > 1$ (o caso $0 < b < 1$ é análogo), como no exemplo da figura 2.7. Considere um ponto genérico P no gráfico de f. Então $P(c, b^c)$ pertence ao gráfico da f se, e somente se, $Q(b^c, c)$ pertence ao gráfico da g.

Para provar que os pontos $P(c, b^c)$ e $Q(b^c, c)$ são simétricos em relação à reta r de equação $y = x$, verificaremos que:

(i) as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais;

(ii) a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r.

Figura 2.8 - Gráficos da função exponencial, logaritimica (de bases *a* > 1) e da reta bissetriz dos quadrantes ímpares



Fonte: Autor, 2021.

Para provar (i), veja que o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$ será dado por

$$M\left(\frac{c+b^c}{2}, \frac{c+b^c}{2}\right).$$

E portanto M pertence à reta *r*.

Para provar (ii), considere um ponto R(*m*,*m*) na reta *r*, distinto de M. Mostraremos que o triângulo PMR é retângulo em M.

De fato. Calculando a medida dos lados do triângulo PMR com P(c, b^c), M$\left(\frac{c+b^c}{2}, \frac{c+b^c}{2}\right)$ e R(*m*,*m*), segue que

$$\overline{PM}^2 = \left(\frac{c+b^c}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{c+b^c}{2} - b^c\right)^2$$

$$= \left(\frac{b^c-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-b^c}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot[(b^c-c)^2 + (c-b^c)^2] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot[2b^{2c} - 4cb^c + 2c^2] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[(b^c)^2 - 2cb^c + c^2] =$$

$$\therefore \overline{PM}^2 = \frac{(c-b^c)^2}{2}.$$

Quanto à medida do lado $\overline{MR}$ temos que

$$\overline{MR}^2 = \left(\frac{c+b^c}{2} - m\right)^2 + \left(\frac{c+b^c}{2} - m\right)^2$$

$$\therefore \overline{MR}^2 = 2\cdot\left(\frac{c+b^c}{2} - m\right)^2.$$

E finalmente para o lado $\overline{PR}$ temos

$$\overline{PR}^2 = (m - c)^2 + (m - b^c)^2.$$

Agora observe que

$$\overline{PM}^2 + \overline{MR}^2 = \frac{(c - b^c)^2}{2} + 2 \cdot (\frac{c + b^c}{2} - m)^2 =$$

$$= \frac{c^2 - 2cb^c + b^{2c}}{2} + \frac{(c + b^c - 2m)^2}{2} =$$

$$= \frac{2c^2 + 2b^{2c} - 4mc - 4mb^c + 4m^2}{2} =$$

$$= c^2 + b^{2c} - 2mc - 2mb^c + 2m^2 =$$

$$= m^2 - 2mc + c^2 + m^2 - 2mb^c + (b^c)^2 =$$

$$= (m - c)^2 + (m - b^c)^2 =$$

$$= \overline{PR}^2.$$

Portanto temos que $\overline{PM}^2 + \overline{MR}^2 = \overline{PR}^2$, ou seja, o triângulo PMR é retângulo em M, garantindo que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r.

c.q.d.

Concluímos aqui a parte teórica sobre função exponencial. No próximo capítulo trataremos das aplicações desta função na resolução de problemas relacionando as situações problema com as habilidades listadas no capítulo 1.

3 APLICAÇÕES PARA A FUNÇÃO EXPONENCIAL GUIADAS PELA BNCC

Neste capítulo trataremos da resolução de problemas escolhidos seguindo a referência das habilidades da BNCC que envolvem conhecimentos de função exponencial.

A situação do problema **3.1** é relativa à habilidade EM13MAT203 conforme vem expressa na BNCC:

> Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. (BRASIL, 2018, p. 534)

Problema 3.1 ([09], Adaptado) João pode comprar, hoje, um terreno no valor de R$ 18 000,00. Devido à construção de um shopping nas proximidades, ele sabe que em 6 anos o terreno valerá R$ 30 000,00. Ele também tem a opção de aplicar seu dinheiro a juros compostos com taxa de 10% ao ano. Utilizando o cálculo de juros compostos com uma calculadora, preencha a tabela abaixo para descobrir qual a melhor opção para João investir seu dinheiro.

Tabela 3.1 - Montantes a juros compostos

t (anos)	**$M(t) = c\cdot(1+i)^t$**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Fonte: Autor, 2021.

Solução: Investindo R$ 18 000,00 a juros compostos com taxa de 10% ao ano, teremos os seguintes valores:

Tabela 3.2 - Valores dos montantes a juros compostos

***t* (anos)**	**$M(t) = c\cdot(1+i)^t$**
1	19 800,00
2	21 780,00
3	23 958,00
4	26 353,80
5	28 989,18
6	31 888,09

Fonte: Autor, 2021.

Como M(6) = R$ 31 888,09 > R$ 30 000,00, então a melhor opção é aplicar o dinheiro a juros compostos.

O problema **3.2** trabalha a habilidade EM13MAT303:

> Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. (BRASIL, 2018, p. 536)

Problema 3.2 ([11], adaptado) Sabendo que em juros simples a taxa de juro aplicada em todo período leva em consideração apenas o valor inicial, e nos juros compostos a taxa é aplicada em cima de valores já corrigidos, analise a tabela abaixo que representa o aumento de um capital aplicado a certo regime de juros.

Tabela 3.3 - Aumento de um capital aplicado a certo regime de juros

***t* (anos)**	**Capital (reais)**
0	2 000,00
1	2 120,00
2	2 247,20
3	2 382,03
4	2 524,95

Fonte: Autor, 2021.

(a) Qual o regime de juros dessa aplicação?

Solução: Analisando os crescimentos teremos

(i) Do ano 0 ao ano 1:

2 120,00 – 2 000,00 = 120,00*;*

(ii) Do ano 1 ao ano 2:

2 247,20 – 2 120,00 = 127,20.

Como os aumentos não são constantes, não são juros simples. Logo, o regime é de juros compostos.

(b) Qual a taxa anual de juros?

Solução: Analisando o 1º ano temos

$$M(1) = 2\,000\cdot(1+i)^1 = 2\,120$$

$$(1+i) = \frac{2\,120}{2\,000} = 1{,}06 = 1 + 0{,}06$$

$$\therefore\ i = 0{,}06 = 6\%.$$

Logo a taxa é de 6% ao ano.

(c) Qual seria o montante obtido após 7 anos?

Solução: Após 7 anos teríamos

$$M(7) = 2\,000 \cdot (1{,}06)^7 \cong 2\,000 \cdot 1{,}5036$$

$$\therefore M(7) \cong 3\,007{,}26.$$

Logo, após 7 anos o montante seria de aproximadamente R$ 3 007,26.

Para o problema **3.3** trabalhamos a habilidade EM13MAT304 que como expressa na BNCC busca

> Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 536)

Problema 3.3 ([10], adaptado) Constatou-se que a população de uma determinada cidade vem crescendo a uma taxa de 1,8% ao ano. Se hoje a cidade tem 26 000 habitantes, responda:

(a) qual a função que representa esse crescimento populacional em função do tempo?

Solução: Temos uma função f definida em $[0, +\infty)$ tal que

$f(0) = 26\,000$;

$f(1) = 26\,000 \cdot (1{,}018)^1$;

$f(2) = f(1) \cdot (1{,}018) = 26\,000 \cdot (1{,}018)^2$;

$f(3) = f(2) \cdot (1{,}018) = 26\,000 \cdot (1{,}018)^3$;

$\vdots$

De modo que para o ano x teremos

$$f(x) = 26\,000 \cdot (1{,}018)^x.$$

Logo a função que representa o crescimento é $f(x) = 26\,000 \cdot (1{,}018)^x$.

(b) quantos anos levará para que essa população dobre de tamanho?

Solução: Queremos encontrar um x tal que $f(x) = 2f(0)$. Resolvendo a equação, segue que

$$26\,000 \cdot (1{,}018)^x = 2 \cdot 26\,000 \Rightarrow 1{,}018^x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{1{,}018} 2 = x \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1{,}018} \cong 38{,}85 \cong 39.$$

Portanto esta população dobrará de tamanho em aproximadamente 39 anos.

As duas questão a seguir estão relacionadas com a habilidade EM13MAT403, que traz o seguinte texto:

> Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BRASIL, 2018, p. 539)

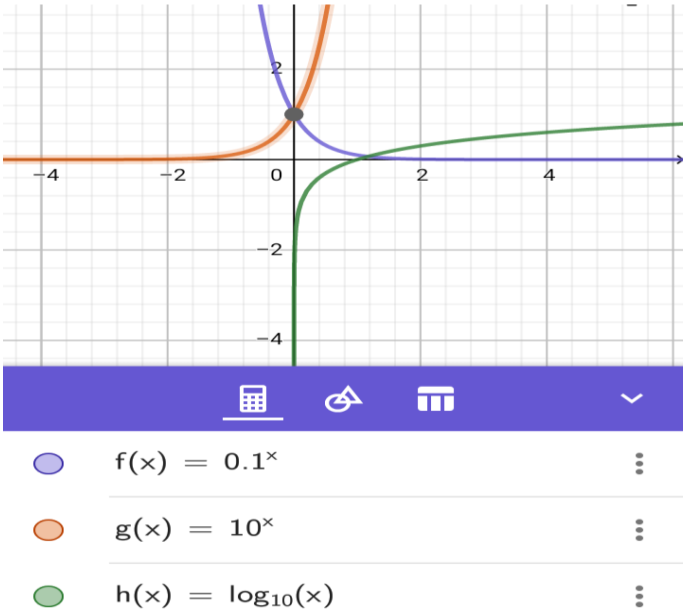
Problema 3.4 Dadas as representações das funções exponenciais *f*, *g* e da função logarítmica *h*, identifique para cada função quem é o domínio, o conjunto imagem e o intervalo onde a função é crescente ou decrescente.

Tabela 3.4 - valores para as funções exponenciais e logarítmicas

X	***f*(*x*)**	***g*(*x*)**	***h*(*x*)**
-2	100	0,01	∄
-1	10	0,1	∄
0	1	1	∄
1	0,1	10	0
2	0,01	100	≅ 0,30

Fonte: Autor, 2021.

Figura 3.1 - Gráficos das funções exponenciais 10^x; $0{,}1^x$ e log *x*



Fonte: Autor, 2021.

<u>Solução:</u> Graficamente observamos nas funções exponenciais que seu domínio é o conjunto dos números reais. O conjunto imagem é o conjunto dos números reais positivos e diferente de zero. A função g é crescente em todo seu domínio e a função f é decrescente.

Em símbolos D(g) = D(f) = ℝ, Im(g) = Im(f) = {x ∈ ℝ; x > 0} com g crescente e f decrescente.

Quanto a função logarítmica, como não existe $\log_{10} 0$, pois ∄ $y \in \mathbb{R}$ tal que $10^y = 0$, temos que seu domínio é o conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$. Por outro lado, o gráfico mostra que seu conjunto imagem é ℝ. Temos também que, para x_1, x_2 reais positivos, $x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$, ou seja, a função é crescente em todo seu domínio.

Problema 3.5 ([10], adaptado) A função seguinte permite estimar a depreciação de um equipamento industrial cuja propaganda foi interrompida:

$$v(t) = 5\,000 \cdot 4^{-0{,}02t}$$

em que $v(t)$ é o valor (em reais) do equipamento t anos após sua aquisição. Conhecidas essas informações, responda os itens abaixo:

(a) por qual valor esse equipamento foi adquirido?

Solução: O equipamento foi adquirido pelo valor $v(t)$ quando $t = 0$, isto é,

$$v(0) = 5\,000 \cdot 4^{-0{,}02.0}$$

$$v(0) = 5\,000.$$

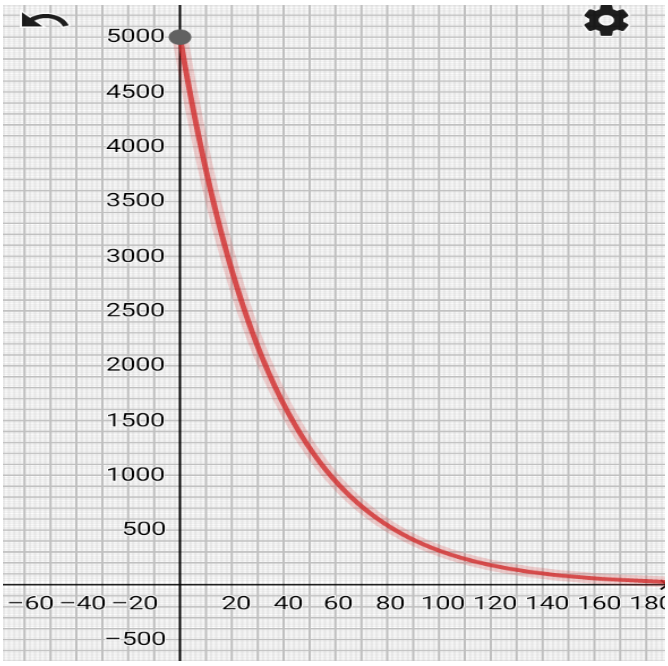
(b) qual o conjunto domínio e qual o conjunto imagem da função v?

Solução: Como o tempo é contado a partir do momento da aquisição do equipamento, então o conjunto domínio é $[0,\infty)$. Por outro lado, os valores da função decrescem de 5 mil até valores bem próximo de zero, assim temos como imagem o conjunto $(0, 5\,000]$

(c) construa o gráfico da função v.

Solução: Com a utilização do aplicativo GeoGebra chegamos à representação abaixo:

Figura 3.2 - Gráfico da função $v(t) = 5\,000 \cdot 4^{-0{,}02t}$



Fonte: Autor, 2021.

Por fim, O problema **3.6** está relacionada com a última habilidade listada no capítulo 1, a habilidade EM13MAT508:

> Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p. 541)

Problema 3.6 ([11], adaptado) O valor de R$ 600,00 é aplicado em dois regimes de juros diferentes. Os montantes obtidos a cada ano estão dispostos nas tabelas abaixo.

Tabela 3.5 - Montantes no regime 1

***t* (em anos)**	**M(*t*)**
1	660
2	720
3	780
4	840
5	900

Fonte: Autor, 2021.

Tabela 3.6 - Montantes no regime 2

***t* (em anos)**	**M (*t*)**
1	660
2	726
3	798,60
4	878,46
5	966,31

Fonte: Autor, 2021.

(a) Em qual tabela os termos da sequência formam uma progressão aritmética (P.A.) e em qual formam uma progressão geométrica (P.G.)?

Solução: Como na tabela 3.5 a diferença entre dois termos consecutivos é sempre constante, temos uma P.A.

Já na tabela 3.6, para $2 \leq t \leq 5$ temos

$$M(t) = M(t-1) \cdot (1,1) \Rightarrow \frac{M(t)}{M(t-1)} = 1,1.$$

Logo seus termos formam uma P.G.

(b) Observe a relação entre os montantes referentes aos anos 1, 3 e 5 em cada tabela. Use a mesma ideia para calcular o montante no ano 9 utilizando os anos 1 e 5 nas duas tabelas.

Solução: Na tabela 3.5 temos que $\frac{660+900}{2}$ =780. Assim devemos ter

$$\frac{660+M_{(9)}}{2} = 900 \Rightarrow M_{(9)} = 1\ 140,00.$$

Na tabela 3.6 temos $798,60^2 \cong 660 \cdot 966,31$. Aplicando a mesma ideia obtemos

$$966{,}31^2 \cong 660 \cdot M_{(9)} \Rightarrow M_{(9)} \cong 1\,414{,}78.$$

Concluímos aqui esse capítulo das questões relacionadas com as habilidades.

4 ATIVIDADES LÚDICAS PARA TRABALHAR FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para o capítulo final, buscou-se montar três sequências didáticas com questões dispostas de forma ordenada, estruturada e articulada com o objetivo de possibilitar para o aluno a construção do conhecimento acerca dos conteúdos.

As duas primeiras sequências didáticas tem como foco a habilidade EM13MAT304 (Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros). Quanto à terceira atividade, além da habilidade EM13MAT304 também contempla a habilidade EM13MAT508 (Identificar e associar progressões geométricas a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas).

4.1 Uso do Experimento: Eliminando Quadrado

Objetivo:

- Construção gráfica de um decrescimento exponencial.

Descrição do experimento:

Sobre uma mesa lançamos quadradinhos de papel cujas faces possuem cores distintas (em nosso experimento usamos faces branca e verde). Em seguida, eliminamos os quadradinhos de face branca para cima. Repetimos o processo até restar um ou nenhum quadradinho.

Material necessário para o experimento:

- papel cartão dupla face (cores distinta nas faces);
- tesoura;
- régua (de 30cm);
- lápis; Borracha;
- folha do Aluno;
- calculadora.

Tempo estimando: 2 aulas.

Etapa 1: Preparação

O professor pode pedir para os alunos, em dupla, trazerem de casa 240 quadradinhos de papel cartão. É necessário que os quadradinhos tenham cores distintas das faces opostas e a mesma medida dos lados (usamos 2cm em nosso experimento).

Fotografia 4.1 - Material do experimento

Fonte: Autor, 2021.

Etapa 2: organização na sala de aula

O professor organiza a turma em duplas para que cada componente conte os quadradinhos de uma das cores quando forem lançados sobre a mesa.

Etapa 3: Jogar e separar

Lançamos 240 quadradinhos aleatoriamente sobre uma mesa e retiramos todos os que ficaram com a face de uma cor escolhida para cima (retiramos os de face branca em nosso experimento). Verificamos quantos restarão depois do primeiro lance e repetimos o procedimento. O processo se repete até que reste um ou nenhum quadradinho.

Cada dupla receberá uma Folha do Aluno com uma tabela para preencher com os dados do experimento. Esses dados servirão para auxiliar na representação gráfica do experimento e para responder mais algumas questões.

Tabela 4.1 - Número de quadrados restantes após cada lançamento

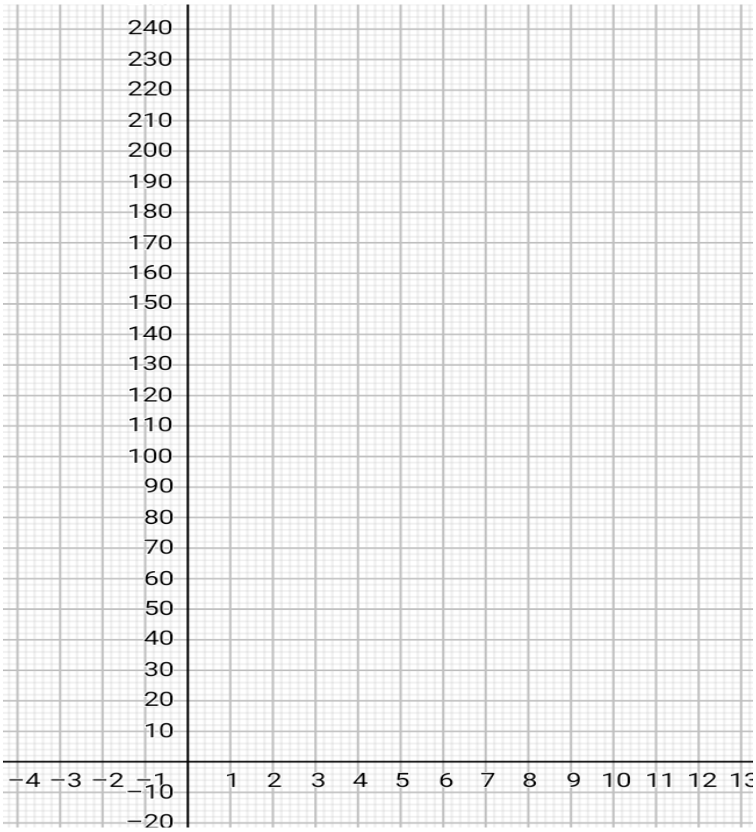
Lançamentos(i)	Quadradinhos restantes (Q_i)
0	240
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
⋮	

Fonte: Autor, 2021.

Etapa 4: Construção do gráfico

Com os dados da tabela 4.1, os alunos deverão representar os pontos em um plano de eixos coordenados como o abaixo:

Figura 4.1 - Eixos coordenados para representação gráfica



Fonte: Autor, 2021.

Etapa 5: Análise do quociente

Agora, denotando por Q_{i-1} a quantidade inicial e por Q_i a quantidade final em cada lançamento, as duplas deverão encontrar o quociente da divisão entre as quantidades finais e iniciais para cada lançamento. Nesta etapa utilizaremos a tabela 4.2. Para os cálculos é indicado o uso da calculadora.

Tabela 4.2 - Quociente das quantidades inicias e finais

Lançamentos (i)	Quadradinhos restantes (Q_i)	Quociente (Q_i/Q_{i-1})
0	240	_
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
⋮		

Fonte: Autor, 2021.

Após as análises dos quocientes, o professor deve direcionar os alunos a questão que quando em algum modelo matemático encontramos $Q_i/Q_{i-1} = b$ (constante), podemos escrever que $Q_i = b \times Q_{i-1}$, para todo i. O experimento se aproxima de um decrescimento exponencial, uma vez que não é certo de se encontrar um valor constante no cálculo dos quocientes. O que se tem na verdade é um valor aproximado de um valor constante.

Etapa 6: Fechamento

Após a análise dos quocientes os alunos serão guiados pelo professor para obter uma função exponencial, caso os valores dos quocientes fossem uma constante b, com $0 < b < 1$. Outra questão seria encontrar os valores dos quocientes Q_i.

Para auxiliar nos cálculos o professor forneceria as relações e igualdades abaixo:

$$Q_0 = 240$$

$$Q_1 = 240 \cdot b^1$$

$$Q_2 = 240 \cdot Q_1 = 240 \cdot b^2.$$

O fechamento da aula seria com a construção do gráfico da função exponencial

$$Q_n = f(n) = 240 \cdot b^n.$$

Apresentaremos aqui uma simulação do experimento na prática.[1]

Fotografia 4.2 - Separação dos quadradinhos pela primeira vez

Fonte: Autor, 2021.

A partir da "Etapa 3: Jogar e separar", tivemos a seguinte disposição da tabela 4.1:

Tabela 4.3 - Número de quadrados restantes após cada lançamento no experimento

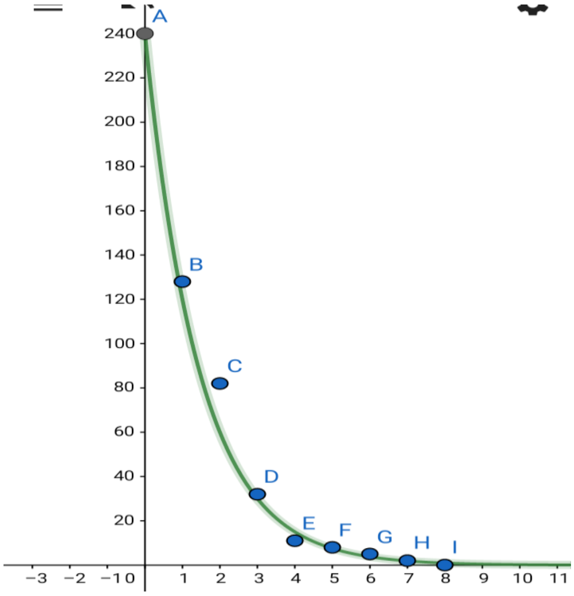
Lançamentos(i)	Quadradinhos restantes (Q_i)
0	240
1	128
2	82
3	32
4	11
5	8
6	5
7	2
8	0

Fonte: Autor, 2021.

Com o uso do aplicativo GeoGebra construímos a representação gráfica dos pontos da tabela 4.3:

[1] Nessa parte, o preenchimento das tabelas e a construção de gráfico foram de autoria do próprio autor.

Figura 4.2 - Representação gráfica do experimento



Fonte: Autor, 2021.

No gráfico acima, os pontos de cor azul representam os números de quadradinhos restantes após cada um dos 8 lançamentos e a linha verde, representa o gráfico da função exponencial $f(x) = 240(0{,}5)^x$. Vemos graficamente que a função f serviria para modelar o fenômeno do experimento em questão. Uma justificativa para o uso da função f é que ao jogar os cartões sobre a mesa, eles teriam 50% de chance de cair com a face verde para cima e 50% de chance de cair com a face branca para cima. Dessa forma, no primeiro lançamento, deveria cair metade dos cartões com a face branca para cima e a outra metade com a face verde para cima assim como nos demais lançamentos.

Com essa distribuição dos dados teremos os seguintes valores para a tabela 4.2:

Tabela 4.4 - Quociente das quantidades inicias e finais no experimento

Lançamentos(i)	Quadradinhos restantes (Q_i)	Quociente (Q_i/Q_{i-1})	Quadradinhos restantes caso $Q_i/Q_{i-1} = 0{,}5$
0	240	-	240
1	128	0,53	120
2	82	0,64	60
3	32	0,40	30
4	11	0,34	15
5	8	0,73	7
6	5	0,63	4
7	2	0,40	2
8	0	-	1

Fonte: Autor, 2021.

Fazendo a média aritmética com os valores dos quocientes das linhas de 1 a 7 obtemos 0,52, um valor bastante próximo do valor 0,5 esperado. É importante observar que a modelagem de um fenômeno por uma função não vai nos trazer os valores exatos, mas tem a vantagem de prever o que vai acontecer com uma margem de erro aceitável.

4.2 Composição de Fractais por Meio de Sequência de Figuras

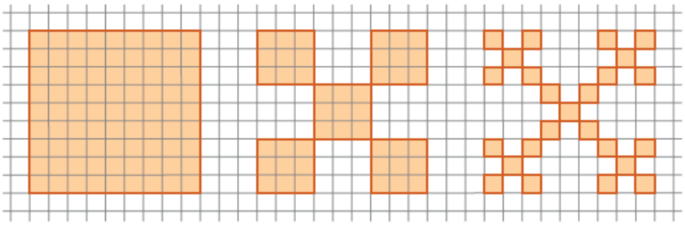
Descrição da atividade:

Da sequência de figuras dadas, analisar a quantidade de triângulos e quadrados em cada nível da sequência e relacionar com uma função exponencial crescente.

Figura 4.3 - Triângulo de Sierpinski

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski, 2021.

Figura 4.4 - Formação de um fractal com quadrado



Fonte: https://www.indagacao.com.br/2017/11/unesp-2017-questao-87.html, 2021.

Objetivos:

a) Conhecer o conceito de triângulo de Sierpinski;
b) Construir um triangulo de Sierpinski;
c) Construir conjecturas a partir de uma sequência de figuras;
d) Interpretar uma função exponencial por meio de uma sequência de figuras;
e) Encontrar as funções que relacionam o número de triângulos nas figuras e o nível da sequência, analogamente para os quadrados.

Conteúdos:

a) Função exponencial;
b) Gráfico de função exponencial em plano cartesiano;
c) Fractal;
d) Triângulo de Sierpinski;

e) Potência de um número inteiro.

Tempo estimado: 4 aulas.

Material necessário:

a) Malha quadriculada;
b) Lápis, borracha, caneta e caderno;
c) Régua, tesoura, cola e lápis de cor.

Etapa 1: Apresentação de fractal e do triângulo de Sierpinski

Um fractal é uma figura geométrica com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita, sendo cada uma das partes semelhante à figura original. A geometria fractal é o ramo da Matemática que estuda as propriedades e o comportamento dos fractais.

Um exemplo elementar de fractal é o triângulo de Sierpinski – uma figura geométrica obtida por recorrência. Esse triângulo foi descrito pela primeira vez pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 - 1969).

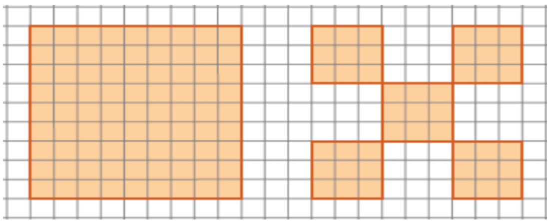
Etapa 2: Construção dos fractais

Para este momento, seguindo as orientações do professor, os alunos devem desenhar na malha quadriculada a quarta figura da sequência.

Para o fractal dos quadrados note-se que seguimos s seguintes passos:

a) Desenhamos um quadrado.
b) Reduzimos esse quadrado em cinco quadrados menores.

Figura 4.5 - Os dois primeiros quadrados da sequência



Fonte: https://www.indagacao.com.br/2017/11/unesp-2017-questao-87.html, 2021.

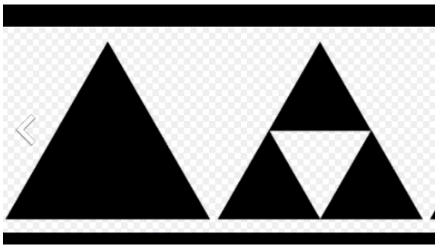
c) Repetimos o passo 2 para cada quadrado da figura, e assim sucessivamente.

Uma das formas de se construir um triângulo de Sierpinski é a seguinte:

1. Construa um triângulo qualquer em um plano (geralmente se usa um triângulo equilátero).

2. Ligue os pontos médios dos lados do triângulo inicial, obteremos o segundo triângulo como na figura abaixo.

Figura 4.6 - Os dois primeiros triângulos da sequência



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski, 2021.

3. Repita o passo 2 para cada triângulo escuro obtido, indefinidamente.

Etapa 3: relação figura existente e nível de sequência

Para este momento, o professor direcionaria os alunos para analisar as sequências de figuras **4.3** e **4.4** e verificar a existência de relação entre o número de quadrados/triângulos sombreados e o nível da sequência de figuras.

Para tanto, os estudantes trabalhariam com o preenchimento das tabelas a seguir que deveriam apresentar os dados como abaixo[2].

Tabela 4.5 - Número de quadrados em cada nível da sequência

Número de quadrados	**1**	**5**	**25**	**125**
Nível da sequência	0	1	2	3

Fonte: Autor, 2021.

[2] Nessa parte, o preenchimento das tabelas foi de autoria do próprio autor.

Tabela 4.6 - Número de triângulos em cada nível da sequência

Número de triângulos sombreados	**1**	**3**	**9**	**27**
Nível da sequência	0	1	2	3

Fonte: Autor, 2021.

Para conjecturar a próxima figura da sequência o aluno precisa identificar expressões exponenciais canônicas de base maior que um. Para tanto, o estudante deve utilizar conhecimentos anteriores de potenciação e suas propriedades. O professor deve orientar os estudantes a preencher as tabelas acima com o número de quadrados e o número de triângulos sombreados na forma exponencial.

Teremos o seguinte preenchimento das tabelas[3]:

Tabela 4.7 - Representação exponencial do número de quadrados em cada nível da sequência

Número de quadrados	5^0	5^1	5^2	5^3
Nível da sequência	0	1	2	3

Fonte: Autor, 2021.

Tabela 4.8 - Representação exponencial do número de triângulos em cada nível da sequência

Número triângulos sombreados	3^0	3^1	3^2	3^3
Nível de sequência	0	1	2	3

Fonte: Autor, 2021.

Etapa 4: Identificação de cada função exponencial que modela as sequências de figuras

O aluno deve tentar descobrir a função que fornece o número de quadrados na primeira tabela e a função que fornece o número de triângulo sombreado na segunda tabela, em qualquer nível. Observando o que foi construído nas etapas anteriores, o aluno deve constatar que o

[3] Nessa parte, o preenchimento das tabelas foi de autoria do próprio autor.

número de quadrados é dado pela função $f(x) = 5^x$ e o número de triângulos sombreados pela função $g(x) = 3^x$ sendo x um número natural maior ou igual a zero.

Etapa 5: Gráfico das funções exponenciais

Obtidas as funções f e g o professor pode abrir discussão sobre o crescimento ou decrescimento das mesmas e abordar as principais características da função exponencial. Em contrapartida, o aluno deve construir no plano cartesiano uma representação gráfica para as funções verificando graficamente que ambas são funções crescentes.

Avaliação:

O professor pode fazer a avaliação dos itens abaixo:

a) a construção do fractal de quadrado de nível 4 com o uso de papel, tesoura e cola;
b) a construção do triângulo de Sierpinski de nível 4;
c) a construção dos gráficos das funções.

4.3 Dividindo Até não Poder Mais

Objetivos:

a) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais;
b) Compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas
c) Identificar e associar progressões geométricas a funções exponenciais de domínios discretos.

Atividade Motivadora

O professor organiza os alunos em duplas ou em trio, com uma folha em branco de papel ofício e uma tesoura, os alunos irão dividir a folha em partes iguais. Com as partes divididas, divide-se novamente cada uma em duas partes iguais e assim sucessivamente até não ser mais possível fazer a divisão das partes com a tesoura.

A cada etapa da divisão, os alunos irão preenchendo duas tabelas. A primeira tabela com o valor da área de cada parte dividida e a segunda com o total de partes divididas. Com os dados das tabelas os alunos seriam direcionados a fazer a representação gráfica e encontrar as funções que relacionam os dados em cada uma delas.

Conteúdos:

a) Habilidades (EM13MAT508) e (EM13MAT304) da BNCC;
b) Área de figuras planas;
c) Progressões geométricas;
d) Função exponencial;
e) Gráfico da função exponencial.

Tempo estimado: 2 aulas

Material necessário:

a) folhas de papel ofício;
b) tesouras sem ponta;
c) lápis;
d) borracha;
e) folha do aluno com as 2 tabelas;
f) calculadora.

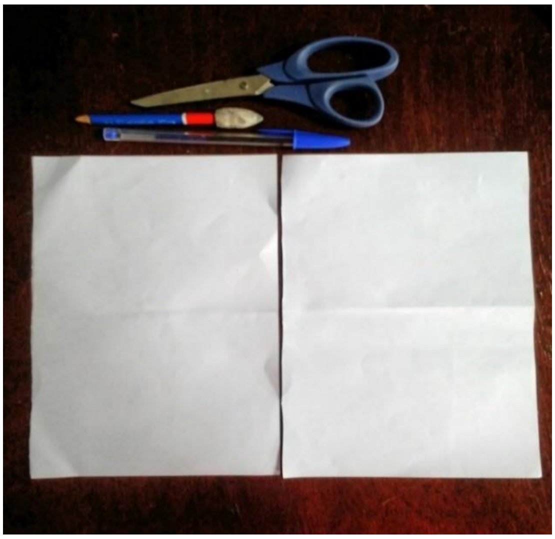
Etapa 1: Preparação

Nesse primeiro momento, o professor explica para os alunos como será a dinâmica da aula e quais são os objetivos principais. Em seguida divide a turma em duplas ou em trios e entrega a cada grupo uma tesoura sem ponta, uma folha de papel ofício e outra folha impressa com as tabelas para se preencher e algumas questões para responder.

Etapa 2: dividir e preencher

Iniciando o trabalho os alunos serão guiados a encontrar a medida da área da folha de papel ofício A4 que tem 21cmx29,7cm de dimensão constatando ser de 623,7cm^2 a área. Em seguida, com o uso de calculadora para facilitar as contas, os alunos vão dividindo a folha em partes iguais (de mesma área) e registram a quantidade de partes e a medida de área de cada uma delas nas tabelas indicadas.

Fotografia 4.3 - Primeira divisão da folha e o material utilizado



Fonte: Autor, 2021.

Tabela 4.9 - Número de partes em cada etapa

Etapa	Número de parte
0	1
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	

Fonte: Autor, 2021.

Tabela 4.10 - Área das partes em cada etapa

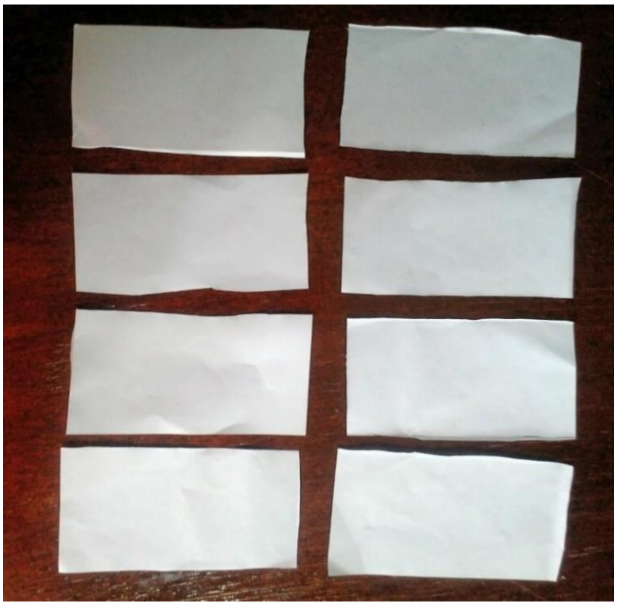
Etapa	Área de cada parte (em cm^2)
0	623,7
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
12	
13	
14	

Fonte: Autor, 2021.

Casso os alunos apresentem dificuldade na contagem das partes, é aconselhável que a partir de uma determinada etapa, os alunos fação a divisão com a tesoura em apenas uma das partes e subentendendo ter feito em todas elas, multiplicaria o total de partes naquela etapa por 2 obtendo o próximo número de partes. Essa estratégia eles usariam em todas as etapas seguintes.

Por exemplo, na etapa 3 temos 8 partes iguais. Dividindo uma parte, obtemos 2 iguais. Como essa divisão deveria ser feita em todas as 8 partes, teremos um total de $2 \cdot 8 = 16$ partes na etapa 4. Repetindo a estratégia, dividindo um das 16 partes na etapa 4, implica que teremos $2 \cdot 16 = 32$ partes iguais na próxima etapa e assim sucessivamente para as próximas etapas. Essa abordagem facilitará a compreensão da questão exponencial do problema por parte dos alunos.

Fotografia 4.4 - Etapa 3, divisão com 8 partes iguais



Fonte: Autor, 2021.

Etapa 3: análise dos dados nas tabelas

De posse dos dados nas tabelas **4.9** e **4.10** preenchidas, os alunos buscariam responder algumas questões propostas:

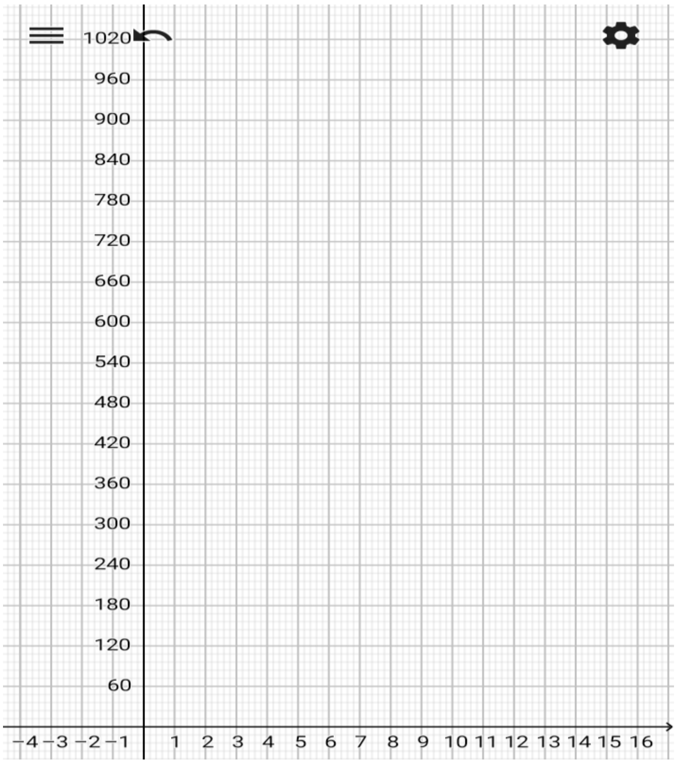
(01) Quanto à tabela 4.9:

(a) Qual é o tipo de sequência formada pela coluna “número de partes”? e qual a razão da sequência?

(b) Qual o tipo e qual é a função que relaciona o número de partes com a ordem da etapa correspondente na tabela 4.9?

(c) Represente no plano abaixo os dados da tabela 4.9 até a etapa 10.

Figura 4.7 - Plano para representar o número de partes até a etapa 10



Fonte: Autor, 2021.

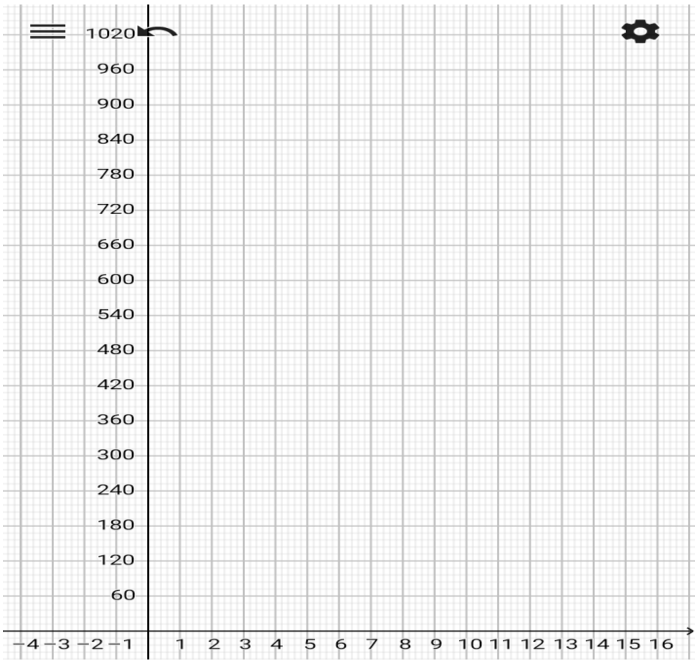
(02) Quanto a tabela 4.10:

(a) Qual é o tipo de sequência formado pela coluna "área de cada parte"? e qual a razão da sequência?

(b) Qual o tipo e qual é a função que relaciona o número de partes com a ordem da etapa correspondente na tabela 4.10?

(c) Represente no plano abaixo os dados da tabela 4.10.

Figura 4.8 - Plano para representar a érea de cada parte até a etapa 10



Fonte: Autor, 2021.

Avaliação:

A avaliação pode se dar pelo grau de participação das duplas, o preenchimento correto das tabelas, a representação gráfica e as respostas das questões referentes aos dados das tabelas.

Apresentaremos aqui uma simulação de como poderia se dar na prática esta atividade.[4]

Na prática, só foi possível dividir as partes com a tesoura até a etapa 13. Com isso tivemos um total de 8 192 partes de aproximadamente 0,076cm^2 de área cada.

Fotografia 4.5 - Últimas divisões possíveis feitas com a tesoura

Fonte: Autor, 2021.

[4] Nessa parte, o preenchimento das tabelas e a construção dos gráficos foram de autoria do próprio autor.

Dessa forma, as tabelas tiveram os seguintes preenchimentos:

Tabela 4.11 - Número de partes obtidas em cada etapa

Etapa	Número de parte
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024
11	2 048
12	4 096
13	8 192
14	

Fonte: Autor, 2021.

Tabela 4.12 - Área das partes obtidas em cada etapa

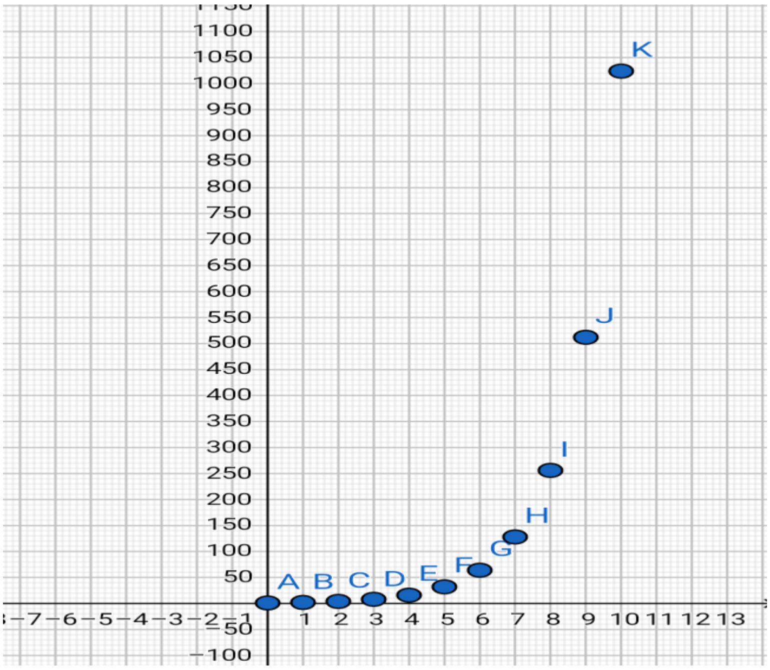
Etapa	Área de cada parte (em cm^2)
0	623,7
1	311,85
2	155,925
3	77,963
4	38,9881
5	19,491
6	9,745
7	4,873
8	2,436
9	1,218
10	0,609
11	0,305
12	0,152
13	0,076

Fonte: Autor, 2021.

Na tabela 4.11 temos uma sequência do tipo P.G., crescente e de razão 2 e primeiro termo 1. Assim a função que relaciona os termos na tabela, é a função exponencial $f(n) = 2^n$. Já na tabela 2 temos outra P.G., decrescente de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 623,7. Logo a função que relacionam os termos da tabela, é a função $g(n) = 623{,}7 \cdot 2^{-n}$.

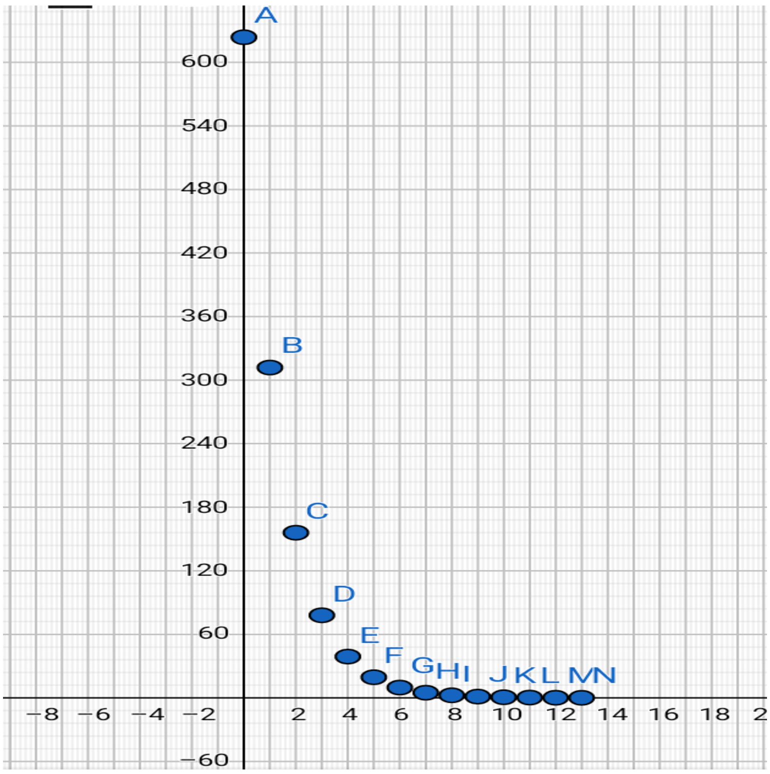
Assim, com os dados das tabelas teremos as seguintes representações no plano:

Figura 4.9 - Representação gráfica dos dados da tabela 4.11



Fonte: Autor, 2021.

Figura 4.10 - Representação gráfica dos dados da tabela 4.12



Fonte: Autor, 2021.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois de ter feito um estudo da Matemática na BNCC e da função exponencial com suas propriedades e aplicações, identificamos alternativas para desenvolver o conteúdo se baseando em cinco habilidades expressas no texto da BNCC.

Com isso encontramos possibilidades de trabalhar o conteúdo com diversas abordagens se guiando sempre por alguma(as) habilidade(es) da BNCC como referência. Dessa forma, montamos uma atividade lúdica e uma sequência didática para serem trabalhadas em turmas da 1ª série do Ensino Médio com foco na habilidade EM13MAT304.

A primeira atividade trabalhou com a construção do gráfico de um decrescimento exponencial por meio do experimento eliminando quadrado. Na segunda atividade, utilizando duas sequências de fractais, trabalhamos com duas funções exponenciais de domínio discreto inclusive com seus gráficos.

Montamos também outra atividade lúdica para turmas da 2ª série do Ensino Médio com foco nas habilidades EM13MAT508 e EM13MAT304 onde relacionamos função exponencial de domínio discreto com progressão geométrica (P.G.).

Apesar de termos apresentado situações-problema comtemplando cada uma das habilidades estudadas, não montamos sequências didáticas para trabalhar com todas elas. Fica como sugestão para o leitor, o estudo e aplicação mais detalhada das habilidades EM13MAT203, EM13MAT303 e EM13MAT403.

Devido à situação de pandemia que implicou na suspensão das aulas presenciais, não foi possível aplicar as atividade para se ter uma análise dos resultados nas escolas.

6 REFERÊNCIAS:

[01] BRASIL. Ministério da Educação. Governo Federal. **Base Nacional Curricular Comum: BNCC**. Disponível em: < basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 06 ago. 2020.

[02] BRASIL. **Plano Nacional de Educação 2014 – 2024**. – Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2014.

[03] BRASIL. **Constituição Federal do Brasil**. - São Paulo: Escala Ltda, 2012.

[4] BOYCE, William E.; DIPRIPA Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. – Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[05] **Entenda as 10 competências gerais da BNCC**. Disponível em: < https://revistaeducacao.com.br/2018/10/05/bncc-competenciasgerais/ >. Acesso em: 03 jan. 2021.

[06] GIOIA, Caroline Cunha Silva. **Função exponencial e logarítmica: um estudo interdisciplinar por meio da resolução de problemas**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de janeiro, 2019.

[07] HOFFMANN, Laurence D**. Cálculo: um curso moderno e suas aplicações / Laurence D. Hoffmann**; tradução de Regina Szwarcfiter. – Rio de Janeiro: LTC, 1982.

[08] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos**. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[09] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 11: Matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva**. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

[10] IEZZI, Gelson; et al**. Matemática: ciência e aplicações, volume 1: ensino médio.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013

[11] IEZZI, Gelson; et al**. Matemática: ciência e aplicações, volume 3: ensino médio.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013

[12] **LDB: Lei de diretrizes e bases da educação nacional**. - 2.ed. – Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2018.

[13] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos.** - 2.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 1991. Disponível em: < https://kupdf.net/download/elon-lages-lima-logaritmos-sociedade-brasileira-de-matem-aacute-tica-1996_5904009fdc0d60dc7d959eac_pdf >. Acesso em 25 nov. 2020.

[14] LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013

[15] LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. **–** 6. Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Fundamentos de cálculo**. Rio de janeiro: SBM, 2015

[17] NETO, Augusto Frederico burle. **Potência de Expoente Irracional: Uma aula para os alunos da 3ª série do Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Dissertação apresentada ao PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

[18] STEWART, James**. Cálculo, volume 2/ James Stewart**. – 7. Ed. – São Paulo: Cengage Learning, 2013.