

Marcos Vinicius Emanuel Cordeiro da Silva

Mistura não-linear de feixes paraxiais

Brasil

15 de Agosto de 2020

Marcos Vinicius Emanuel Cordeiro da Silva

Mistura não-linear de feixes paraxiais

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Física.

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

Brasil

15 de Agosto de 2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586m Silva, Marcos Vinicius Emanuel Cordeiro da.
Mistura não-linear de feixes paraxiais / Marcos Vinicius Emanuel Cordeiro da Silva. – 2020.
40 f. : il.

Orientadora: Alcenísio José de Jesus Silva.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 39-40.

1. Óptica não-linear. 2. Feixes ópticos. 3. Momentos angulares. I. Título.

CDU: 535:530.182



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

Ata da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do aluno **Marcos Vinicius Emanuel Cordeiro da Silva**, matrícula **15113435**, intitulado **MISTURA NÃO-LINEAR DE FEIXES PARAXIAIS**.

Às **14:00** horas do dia **vinte e quatro de agosto de dois mil e vinte**, foi instalada pela plataforma de Sistema de Webconferência RNP, a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso a qual se submeteu o aluno **Marcos Vinicius Emanuel Cordeiro da Silva** do Curso de Física Bacharelado. A banca foi composta pelos professores **Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva (Orientador do trabalho, IF-UFAL)**, **Prof. Dr. Wagner Ferreira da Silva (IF-UFAL)** e **Prof. Jonathas Matias de Oliveira (IFAL)**. Os membros desta banca avaliaram o referido trabalho e conferiram-lhe a seguinte menção Aprovado, atribuindo ao mesmo, respectivamente, as notas 9,00 (nove); 9,00 (nove); 9,00 (nove), computando assim média 9,00 (nove) e autorizando os trâmites legais. Por oportuno, tendo em vista a melhoria da qualidade do trabalho, a banca sugere a tomada das seguintes providências:

Revisões de concordância gramatical e pontuação.

Estando todos de acordo, lavrou-se a presente Ata.

Maceió, 24 de agosto de 2020.

1º Examinador: Alcenísio José de Jesus Silva

2º Examinador: Wagner Ferreira da Silva

3º Examinador: Jonathas Matias

Visto da Coordenação: Vinicius Emanuel Cordeiro da Silva

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu energia e capacidade para terminar esse trabalho.

Agradeço aos meus pais e a minha família que me incentivaram todos esses anos em que estive na faculdade.

Aos professores que me auxiliaram durante o desenvolvimento de minhas pesquisas.

Aos meus amigos de curso e de faculdade, que comigo estiveram nessa etapa.

Aos meus colegas de laboratório Danilo e Zezo, com os quais eu pude conviver e aprender durante todo o desenvolvimento desse trabalho.

À minha namorada Mayra, que trilhou todo esse caminho comigo e esteve ao meu lado tanto nos momentos difíceis, de incerteza e escolhas, quanto nos momentos de alegria e conquista.

RESUMO

A geração de modos pelo processo da soma-frequência é um fenômeno que ocorre ao considerarmos dois feixes se misturando dentro de um meio com não-linearidade de segunda ordem. Baseado nisso, buscou-se realizar um estudo teórico e experimental dessa mistura, considerando os feixes Ince-Gauss com paridade definida (IG) e os feixes Ince-Gauss Helicoidais (HIG) com momento angular orbital (MAO) como feixes de entrada. Para a base teórica, resolveu-se a equação paraxial a partir do método da função de Green, e com o resultado foi possível simular a geração de modos dentro do meio não-linear. Já experimentalmente, foi montado um aparato experimental utilizando um cristal BBO como meio não linear, e através dele foi possível observar e detectar o feixe resultante dessa mistura. Com essas duas metodologias, foram estudadas todas as combinações possíveis entre dois feixes IG (par-par, par-ímpar, ímpar-ímpar), e também diversas combinações de feixes HIG. Em todos esses casos, observou-se uma ótima concordância entre os resultados teóricos e experimentais, e para os feixes carregando MAO, se constatou a conservação desse momento no feixe resultante. Além disso, através da análise dos dados obtidos, calculou-se pela primeira vez a regra de seleção que controla a geração dos modos, e por fim, se observou a transição entre as diferentes famílias de feixes paraxiais através da variação do parâmetro de excentricidade ϵ . Esses resultados formam uma boa base de estudo para aplicações como a comunicação óptica, micromanipulação e pinças ópticas.

Palavras-chave: Óptica Não-Linear, Feixes Paraxiais, Momento Angular Orbital.

ABSTRACT

The mode generation through sum-frequency processes occurs when we consider two beams mixing inside a medium with a second order nonlinearity. A study based on both a theoretical and an experimental analysis of this process was done, considering, as initial beams, the families of Ince-Gaussian beams (IG) and Helical Ince-Gaussian beams (HIG). As a theoretical basis, the paraxial equation was solved using the Green function method, and the result made possible the development of a numerical simulation for the mode generation inside the medium. Experimentally, the assembled setup used a BBO crystal as the nonlinear medium, and enabled the observation and detection of this mixture. Through these two methodologies, the study considered all the possible parity combinations of two IG beams with defined parity (even-even, even-odd, odd-odd), as well as multiple combinations of HIG beams carrying orbital angular momentum (OAM). In all these cases, a very good agreement between the experimental and the theoretical results was observed, and for the beam carrying OAM, it was possible to verify the conservation of momentum in the resulting beam. Furthermore, analyzing the obtained results, it was possible to find, for the first time, the selection rule that controls the creation of modes inside the medium, and lastly, the transition between the different families of paraxial beams was observed by changing the eccentricity parameter ϵ . These results form a good study basis for applications such as optical communication, micro-manipulation and optical tweezers.

Keywords: Nonlinear Optics, Paraxial Beams, Orbital Angular Momentum.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Alguns modos possíveis para o perfil de um laser, a depender da simetria do sistema escolhido. Da esquerda para a direita tem-se, respectivamente, exemplos de modos Laguerre-Gauss (LG), Hermite-Gauss (HG) e Ince-Gauss (IG).	10
Figura 2 – Distribuições transversais de intensidades dos modos Hermite-Gauss . . .	17
Figura 3 – Distribuições transversais de intensidades dos modos Laguerre-Gauss . . .	19
Figura 4 – Decomposição de um feixe Laguerre em um feixe par e um ímpar. . . .	20
Figura 5 – Sistema de coordenadas elípticas com a) $f \rightarrow 0$, b) $f = 1$, c) $f = 2$ e d) $f \rightarrow \infty$. Nos gráficos, as linhas representam curvas com $\eta = \text{const.}$ ou $\xi = \text{const.}$	21
Figura 6 – Distribuições transversais de intensidades dos modos Ince-Gauss com $\epsilon = 5$	23
Figura 7 – Transição entre modos Laguerre, Ince e Hermite, devido à variação de ϵ . . .	24
Figura 8 – Esquema contendo os feixes de entrada U_1 e U_2 , o feixe resultante da mistura $U_{2\omega}$ e o cristal não-linear BBO.	28
Figura 9 – Aparato experimental utilizado. A caixa quadriculada representa uma visão mais próxima do cristal e dos feixes. Aqui, as siglas utilizadas representam: HWP - Placa de meia onda, PBS - Separador de feixe polarizado, SLM - Modulador espacial de luz, PH - Pinhole, M - Espelho, BBO - Cristal de Beta Borato de Bário. As distâncias focais das lentes são, em ordem, $L1 = 30$ mm, $L2 = 100$ mm, $L3 = L4 = 1000$ mm e $L5 = 300$ mm.	30
Figura 10 – Mistura não-linear de dois feixes IG com paridade par, especificamente a) $U_1 = IG_{2,2}^e$ com $U_2 = IG_{3,1}^e$ e b) $U_1 = IG_{3,1}^e$ com $U_2 = IG_{3,1}^e$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final. . .	32
Figura 11 – Mistura não-linear de dois feixes IG com paridade ímpar, especificamente a) $U_1 = IG_{3,3}^o$ com $U_2 = IG_{2,2}^o$ e b) $U_1 = IG_{3,1}^o$ com $U_2 = IG_{2,2}^o$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final. . .	32
Figura 12 – Mistura não-linear de dois feixes IG com paridades distintas, especificamente a) $U_1 = IG_{3,1}^o$ com $U_2 = IG_{2,2}^e$ e b) $U_1 = IG_{3,1}^o$ com $U_2 = IG_{3,1}^e$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final. . .	33

Figura 13 – Mistura não-linear de dois feixes HIG, especificamente a) $U_1 = \text{HIG}_{1,1}^+$ com $U_2 = \text{HIG}_{3,1}^+$ e $\epsilon = 5$, b) $U_1 = \text{HIG}_{2,2}^+$ com $U_2 = \text{HIG}_{3,1}^+$ e $\epsilon = 5$, c) $U_1 = \text{HIG}_{2,2}^+$ com $U_2 = \text{HIG}_{2,2}^-$ e $\epsilon = 2$, e d) $U_1 = \text{HIG}_{3,1}^-$ com $U_2 = \text{HIG}_{1,1}^+$ e $\epsilon = 7$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final.	34
Figura 14 – Fase calculada numericamente para os feixes resultantes da Figura 13. Os círculos vermelhos representam as singularidades positivas, e os círculos azuis as negativas. Os valores esperados de momento angular para que haja a conservação são a) +2, b) +3, c) 0 e d) 0	36
Figura 15 – Feixe resultante da mistura não-linear de $U_1 = \text{IG}_{3,1}^o$ com $U_2 = \text{IG}_{3,1}^e$, para vários valores de ϵ	37
Figura 16 – Feixe resultante da mistura não-linear de $U_1 = \text{HIG}_{3,1}^-$ e $U_2 = \text{HIG}_{1,1}^+$, para vários valores de ϵ	38

SUMÁRIO

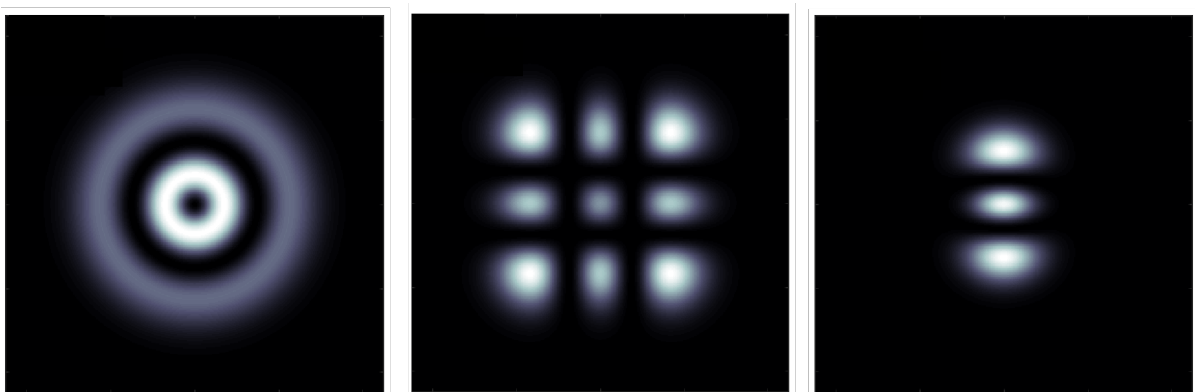
1	INTRODUÇÃO	10
2	TEORIA	12
2.1	Luz Estruturada	12
2.1.1	Modo Fundamental	14
2.1.2	Modos de ordem superior	16
2.1.2.1	Modos Hermite-Gauss	16
2.1.2.2	Modos Laguerre-Gauss	18
2.1.2.3	Modos Ince-Gauss	20
2.2	Feixes em um meio não-linear	24
2.3	Mistura de feixes	27
3	RESULTADOS	30
3.1	Feixes Ince com paridade definida	31
3.2	Feixes Ince com Momento Angular	33
3.3	Transição entre modos	36
4	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

Devido a sua grande utilização nos mais diversos campos de pesquisa, os lasers são dispositivos altamente estudados atualmente. As principais características de um laser, que o diferenciam das demais fontes de luz são sua alta coerência, direcionalidade e quase monocromaticidade. Enquanto que a primeira propriedade está relacionada com o fato de que as ondas de luz que formam o laser estarem em fase, a segunda implica que esse feixe é espacialmente estreito e diverge muito pouco ao longo da propagação, e a terceira significa que ele é formado por fótons com valores de comprimentos de onda confinados a um intervalo muito pequeno (SHIMODA, 1986).

Dentro do estudo dos lasers, uma das áreas de interesse é a análise de seus possíveis modos - ou seja, os possíveis perfis transversais de intensidade que esse laser pode ter durante sua propagação. Matematicamente, esses modos são encontrados através da equação de Helmholtz, e estão diretamente relacionados com a simetria do sistema (SIEGMAN, 1986). Isso pode ser visto na Figura 1, onde estão representados os modos de propagação encontrados para as coordenadas cilíndricas, cartesianas e elípticas cilíndricas, que são denominados Laguerre-Gauss (LG), Hermite-Gauss (HG) e Ince-Gauss (IG), respectivamente.

Figura 1 – Alguns modos possíveis para o perfil de um laser, a depender da simetria do sistema escolhido. Da esquerda para a direita tem-se, respectivamente, exemplos de modos Laguerre-Gauss (LG), Hermite-Gauss (HG) e Ince-Gauss (IG).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ter controle sobre a estrutura transversal de um feixe possibilita sua aplicação em variadas áreas, podendo ser citadas a comunicação óptica (WILLNER et al., 2015), a micromanipulação (WOERDEMANN et al., 2013), protocolos quânticos (AOLITA; WALBORN, 2007; D'AMBROSIO et al., 2012) e pinças ópticas (PADGETT; BOWMAN, 2011). Além disso, recentemente têm se considerado o comportamento dessa luz estruturada

fora do espaço livre, mais especificamente em meios não-lineares, onde diversos fenômenos físicos complexos surgem (BOYD, 2008).

No que diz respeito ao estudo da mistura não-linear desses modos, Pereira (2017) desenvolveu uma primeira análise desse processo envolvendo uma fração dos possíveis modos LG (PEREIRA et al., 2017). Expandindo esse trabalho inicial, Pires (2019, 2020) generalizou o estudo para as famílias completas dos modos HG e LG (PIRES et al., 2019; PIRES et al., 2020b; PIRES et al., 2020a).

No entanto, embora os modos IG já sejam conhecidos desde 2004 (BANDRES; GUTIÉRREZ-VEGA, 2004), ainda não existe nenhum trabalho que apresente em detalhes os resultados esperados para uma mistura desse tipo de feixe, e baseado nessa necessidade de aprofundamento foi que resolvemos realizar esse trabalho.

2 TEORIA

No decorrer desse capítulo, serão introduzidos e discutidos os conceitos teóricos utilizados no trabalho. Mais especificamente, o capítulo começa discutindo o que são e como se comportam os feixes paraxiais em diferentes sistemas de coordenadas, e então explica o processo não-linear da mistura desses feixes.

2.1 LUZ ESTRUTURADA

Assim como todos os outros tipos, a luz coerente é formada por campos elétricos (\mathbf{E}) e magnéticos (\mathbf{B}) oscilantes, que podem ser descritos a partir das equações de Maxwell (MAXWELL, 1864). Particularmente, para feixes se propagando no vácuo, tem-se que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.1d)$$

Em sua forma mais geral, não é possível extrair muitas informações físicas a respeito dos campos, principalmente pelo fato de que as duas últimas equações depender tanto de \mathbf{E} quanto de \mathbf{B} . Para obter relações com apenas um deles, primeiro se calcula o rotacional de (2.1c) e (2.1d):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \left[-\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right], \quad (2.2a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right]. \quad (2.2b)$$

Como é possível trocar a ordem dos termos no lado direito, as equações acima são equivalentes à:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)], \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.3b)$$

Com isso, pode-se substituir os rotacionais na direita utilizando as equações (2.1d) e (2.1c), de modo a obter:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.4b)$$

Como agora os dois campos obedecem equações iguais, será utilizada uma única letra para simbolizá-los, nesse caso escolhida como $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Assim, temos agora uma equação que depende apenas de um dos campos. Contudo, antes de começar a estudar as propriedades desses campos a partir dela, é útil realizar uma última operação. Para isso, utiliza-se a seguinte identidade vetorial, válida para qualquer vetor \mathbf{A} :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla [\nabla \cdot \mathbf{A}] - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.6)$$

Substituindo o lado esquerdo da equação (2.5) de acordo com a identidade (2.6):

$$\nabla [\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

A partir das equações (2.1a) e (2.1b), pode-se concluir que o primeiro termo no lado esquerdo da equação acima é nulo - ao menos no vácuo, que é o caso levado em consideração. Assim, a equação (2.7) se torna:

$$\nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

Com isto, nota-se que os campos eletromagnéticos obedecem uma equação que descreve ondas se propagando em um meio com velocidade $c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$, definida como a velocidade da luz no vácuo.

Continuando então a análise do comportamento desses campos, iremos agora representar o operador ∇^2 em coordenadas cartesianas, e assim escrever a equação (2.8) como:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Em seguida, serão supostas algumas propriedades para os campos de modo a simplificar a equação (2.9). Considerando primeiro que o campo estudado é monocromático - ou seja, apresenta uma única frequência -, será possível separar as variáveis do espaço da variável temporal. Nesse caso, o campo \mathbf{v} tem a forma:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x, y, z) e^{-i\omega t}. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) na equação (2.9), obtém-se uma relação conhecida como equação de Helmholtz para \mathbf{U} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{U} = 0. \quad (2.11)$$

Além disso, se o campo considerado estiver se propagando na direção z , é possível escrever, numa forma geral:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\psi}(x, y, z) e^{ikz}, \quad k \equiv \frac{\omega}{c}. \quad (2.12)$$

Acima, o termo exponencial representa a variação do campo devido à propagação em z - como pode-se observar, tal variação tem a forma de uma onda plana -, enquanto que o termo $\boldsymbol{\psi}$ contém o restante das propriedades do feixe, como seu perfil transversal e a curvatura da sua frente de onda.

Substituindo (2.12) na equação (2.11), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial z} = 0. \quad (2.13)$$

Por fim, supondo que a chamada aproximação paraxial $\left(\left| \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial y^2} \right| \right)$, que descreve um feixe cuja variação durante a propagação em z é lenta tanto na escala de λ quanto na escala do feixe no plano transversal, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial z} = 0. \quad (2.14)$$

A equação acima é conhecida como equação paraxial, e suas soluções podem ser utilizadas para encontrar as diversas famílias possíveis de feixes conhecidas como feixes paraxiais.

2.1.1 MODO FUNDAMENTAL

Vamos agora resolver a equação (2.14) e encontrar então as funções $\boldsymbol{\psi}$. Para começar a solução, será tomado o seguinte *ansatz* (KOGELNIK; LI, 1966):

$$\boldsymbol{\psi}_G(x, y, z) = e^{[-i(P(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2))]} \quad (2.15)$$

Devido ao termo $x^2 + y^2$ dentro da exponencial, o feixe encontrado a partir da forma (2.15) é conhecido como modo Gaussiano.

Além disso, como se pode observar, para encontrar a forma completa da equação (2.15), é necessário calcular as funções P e q . Para isso, primeiro define-se dois parâmetros reais, R e ω , relacionados pela seguinte equação:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2}. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.15), e considerando $\rho^2 = x^2 + y^2$, é possível identificar o significado físico dessas duas grandezas:

$$\boldsymbol{\psi}_G(\rho, z) = e^{[-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)}]} e^{[-i(P(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)})]} \quad (2.17)$$

Como R e ω são parâmetros reais, nota-se que em (2.17) R interfere exclusivamente na fase do feixe, enquanto que ω só contribui para a intensidade. Mais especificamente, $R(z)$ representa a curvatura da frente de onda no ponto z , e $\omega(z)$ é a distância entre o centro do feixe e o ponto onde sua intensidade $I(\rho, z) = |\psi(\rho, z)|^2$ cai para um valor e^2 vezes menor, ou seja:

$$I(\omega(z), z) = \frac{I(0, z)}{e^2}. \quad (2.18)$$

Por isso, a quantidade 2ω é conhecida como diâmetro do feixe. Agora, substituindo (2.15) na equação (2.14):

$$\rho^2 \left(-\frac{k^2}{q^2(z)} + \frac{k^2}{q^2(z)} \frac{\partial q(z)}{\partial z} \right) + \rho^0 \left(\frac{2ik}{q(z)} + 2k \frac{\partial P(z)}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Como os dois termos da igualdade acima precisam ser independentemente nulos:

$$\frac{\partial q(z)}{\partial z} = 1, \quad (2.20a)$$

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = \frac{-i}{q(z)}. \quad (2.20b)$$

Agora, para facilitar os cálculos, o ponto $z = 0$ será definido como aquele onde a curvatura da frente de onda é infinita - i.e., quando a frente de onda é plana. Definindo o valor de ω nesse ponto como ω_0 e o q associado a ele como q_0 tem-se, a partir da relação (2.16):

$$q_0 = iL_R, \quad L_R \equiv \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}. \quad (2.21)$$

Acima, o valor L_R é conhecido como comprimento de Rayleigh. Utilizando as equações (2.21) e (2.20a), conclui-se que o valor de q para um ponto z qualquer é:

$$q(z) = q_0 + z = iL_R + z. \quad (2.22)$$

Com (2.22), é possível calcular $R(z)$ e $\omega(z)$ a partir da comparação das partes reais e imaginárias delas com as da equação (2.16):

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{L_R}{z} \right)^2 \right], \quad (2.23a)$$

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{L_R} \right)^2 \right]. \quad (2.23b)$$

E por fim, P é encontrado a partir das equações (2.22) e (2.20b):

$$P(z) = i \ln \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right) - \phi(z), \quad \phi(z) \equiv \arctan \left(\frac{z}{L_R} \right). \quad (2.24)$$

Acima, o termo ϕ é denominado de Fase de Gouy.

Assim, o modo gaussiano pode ser descrito também em função de R e ω :

$$\psi_G(\rho, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{\frac{-\rho^2}{w^2(z)}} e^{-i\left(\frac{k\rho^2}{2R(z)} - \phi(z)\right)}. \quad (2.25)$$

Além disso, como será detalhado a seguir, diversas outras soluções da equação (2.14) podem ser encontradas a partir de (2.15), e por isso ele também recebe o nome de modo fundamental.

2.1.2 MODOS DE ORDEM SUPERIOR

O processo usado para calcular as outras formas de ψ que satisfazem a equação (2.14) envolve escolher um sistema de coordenadas que irá influenciar a simetria do feixe, e então, a partir dele e do modo fundamental, encontrar os modos de maior ordem.

2.1.2.1 MODOS HERMITE-GAUSS

Num sistema com simetria cartesiana, definido pelas coordenadas x , y e z , a tentativa de solução de (2.14) terá a seguinte forma (SALEH; TEICH, 2007):

$$\psi_{HG}(x, y, z) = g\left(\frac{x}{\omega(z)}\right) h\left(\frac{y}{\omega(z)}\right) e^{-i\left(P(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2)\right)}. \quad (2.26)$$

Como pode-se observar, o modo (2.26) é alcançado pela multiplicação do modo fundamental por duas funções g e h , cada uma dependente de uma das coordenadas transversais do sistema, e ambas dependendo de $\omega(z)$.

Substituindo (2.26) na equação (2.14), encontram-se as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial g}{\partial x} + 2n_x g = 0, \quad n_x \in N, \quad (2.27a)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial h}{\partial y} + 2n_y h = 0, \quad n_y \in N, \quad (2.27b)$$

$$\frac{\partial q(z)}{\partial z} = 1, \quad (2.27c)$$

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = \frac{-i}{q(z)}(1 + n_x + n_y). \quad (2.27d)$$

Como a equação (2.27c) é igual à do modo Gaussiano, conclui-se que tanto $q(z)$ quanto os parâmetros definidos por ele - $R(z)$ e $\omega(z)$ - seguem as definições (2.22), (2.23a) e (2.23b), respectivamente.

No entanto, a equação (2.27d) implica que a função P muda de forma, e para esse caso teremos que:

$$P_{HG}(z) = (1 + n_x + n_y) i \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega(z)}\right) - \phi(z), \quad \phi(z) \equiv (1 + n_x + n_y) \arctan\left(\frac{z}{L_R}\right). \quad (2.28)$$

As soluções das equações (2.27a) e (2.27b) são, por definição, os polinômios de Hermite H de ordem n_x e n_y , respectivamente. Dessa maneira, podemos escrever que:

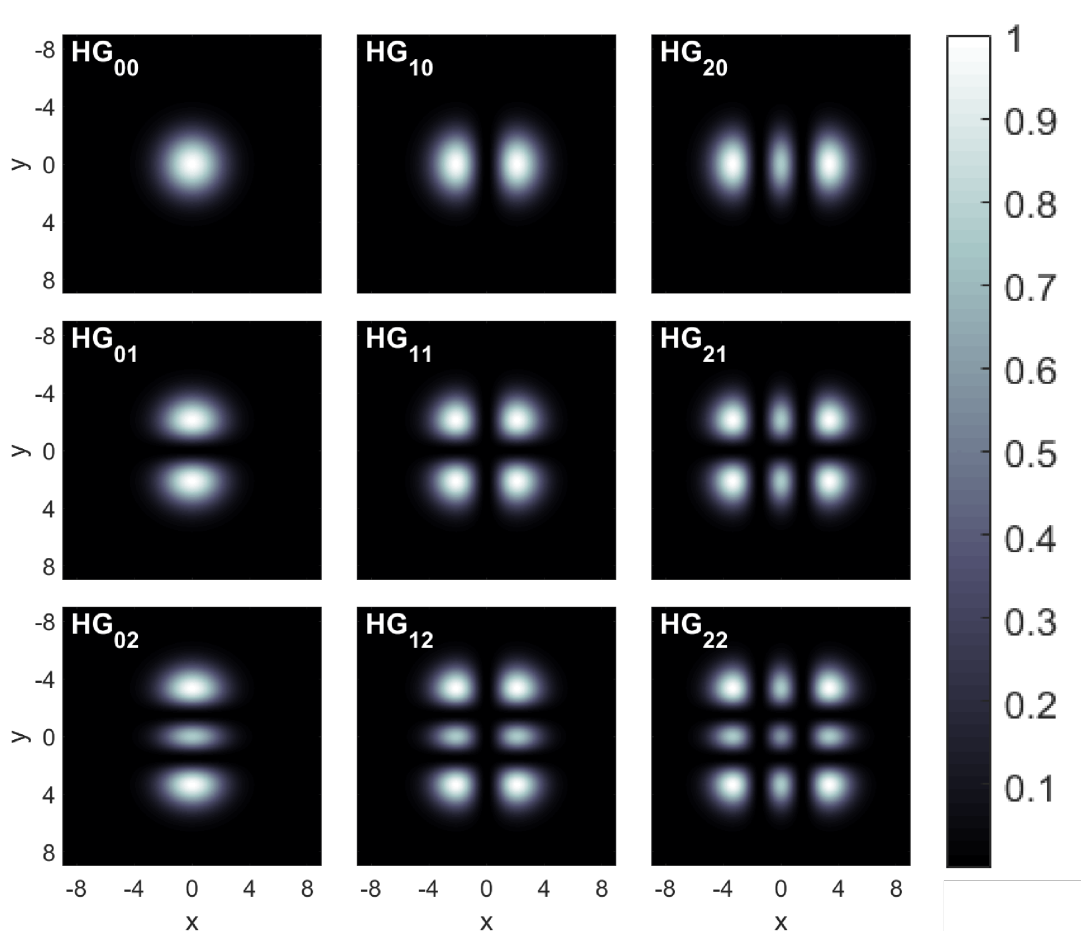
$$g\left(\frac{x}{\omega(z)}\right)h\left(\frac{y}{\omega(z)}\right) = H_{n_x}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right)H_{n_y}\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right). \quad (2.29)$$

Ou seja, para cada combinação de dois inteiros positivos n_x e n_y existe um modo em coordenadas cartesianas que resolve a equação (2.14), e essa família de soluções recebe o nome de modos Hermite-Gauss(HG):

$$\text{HG}_{n_x n_y} \equiv \psi_{\text{HG}}(x, y, z) = H_{n_x}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right)H_{n_y}\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right)e\left[-i\left(P_{\text{HG}}(z) + \frac{k(x^2+y^2)}{2q(z)}\right)\right]. \quad (2.30)$$

A seguir, na Figura 2, pode-se observar a distribuição transversal de intensidade de diversos modos HG. Através delas, é fácil notar que os índices n_x e n_y indicam o número de mínimos que ocorrem nos eixos x e y, respectivamente.

Figura 2 – Distribuições transversais de intensidades dos modos Hermite-Gauss



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.2.2 MODOS LAGUERRE-GAUSS

Outros modos possíveis podem ser obtidos se considerarmos agora um sistema com simetria cilíndrica. Para isso, são definidas as três coordenadas abaixo:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho \in [0, \infty), \quad (2.31a)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad (2.31b)$$

$$z = z, \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (2.31c)$$

Nesse caso, a tentativa de solução para a equação é dada por (KOGELNIK; LI, 1966):

$$\psi_{\text{LG}}(\rho, \theta, z) = g\left(\frac{\rho}{\omega(z)}\right) e^{-il\theta} e^{-i\left(P(z) + \frac{k\rho^2}{2q(z)}\right)}. \quad (2.32)$$

Substituindo na equação (2.14), é possível encontrar as equações que descrevem g , P e q :

$$\rho \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} - (l + 1 - \rho) \frac{\partial g}{\partial \rho} + np g = 0, \quad (n, l) \in \mathbb{N}^2, \quad (2.33a)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 1, \quad (2.33b)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{-i}{q}(1 + 2n + l). \quad (2.33c)$$

Assim como no caso cartesiano, o fato de (2.33b) ser igual ao do modo fundamental implica que q , R e $\omega(z)$ seguem as definições (2.22), (2.23a) e (2.23b), respectivamente.

A equação (2.33c) permite o cálculo de P nesse sistema de coordenadas:

$$P_{\text{LG}}(z) = (1 + 2n + l) i \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega(z)}\right) - \phi(z), \quad \phi(z) \equiv (1 + 2n + l) \arctan\left(\frac{z}{L_R}\right). \quad (2.34)$$

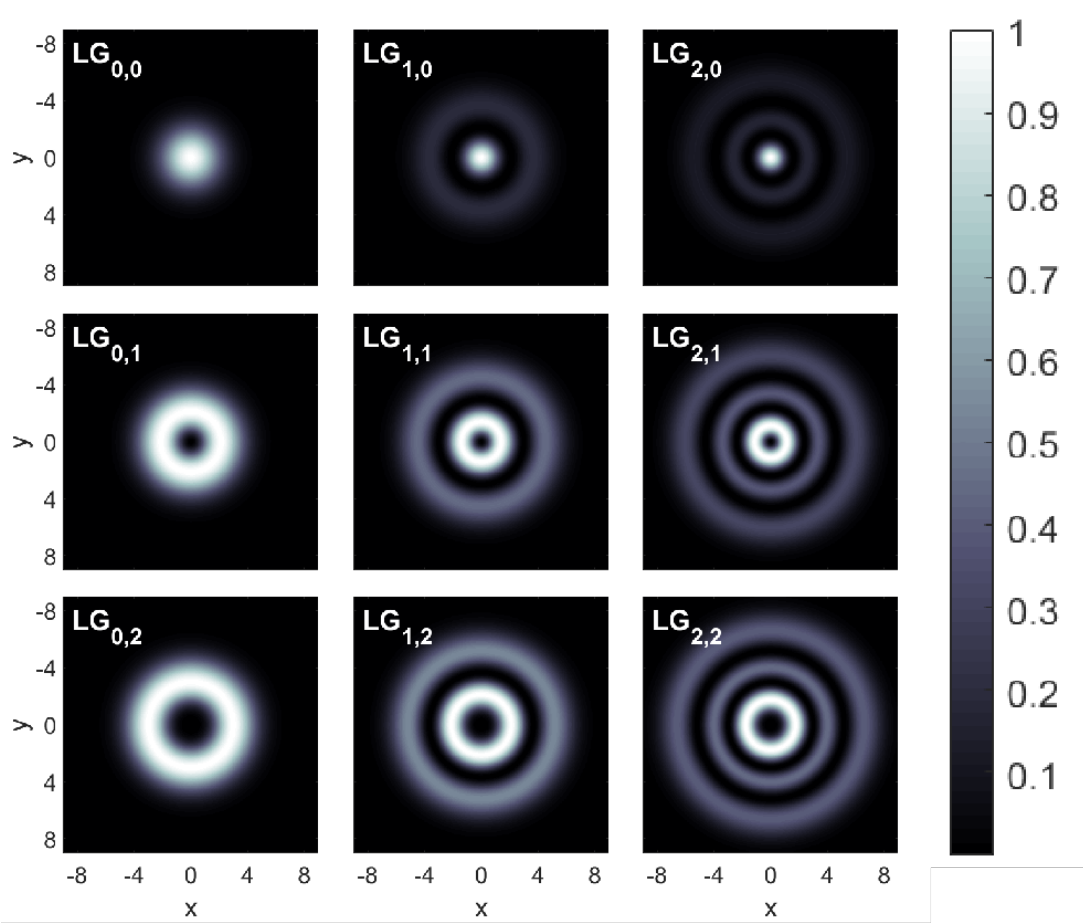
Por fim, a equação (2.33a) admite, por definição, uma família de soluções conhecidas como polinômios de Laguerre generalizados $L_p^{(l)}$:

$$g\left(\frac{\rho}{\omega(z)}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega(z)}\right)^l L_n^{(l)}\left(\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)}\right). \quad (2.35)$$

Os números n e l são as ordens radial e angular de L , respectivamente. Substituindo (2.35) na equação (2.32), é possível escrever os modos Laguerre-Gauss(LG):

$$\text{LG}_{n,l} \equiv \psi_{\text{LG}}(\rho, \theta, z) = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega(z)}\right)^l L_n^{(l)}\left(\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)}\right) e^{-il\theta} e^{-i\left(P_{\text{LG}}(z) + \frac{k\rho^2}{2q(z)}\right)}. \quad (2.36)$$

Na Figura 3, pode-se observar a distribuição transversal de intensidade de diversos modos LG.

Figura 3 – Distribuições transversais de intensidades dos modos Laguerre-Gauss

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma propriedade interessante dessa família de feixes é o fato de que a fase varia ao longo da coordenada θ com o termo $il\theta$. Isso implica no fato de que, ao longo da propagação, a frente de onda rotaciona ao redor do centro do feixe. Essa rotação pode ser relacionada com um momento angular orbital, e o parâmetro associado a ela é o l , que define a quantidade de momento que o feixe carrega. (ALLEN et al., 1992)

Por fim, é útil para a sequência desse trabalho que se introduza uma paridade no modo LG. Isso pode ser realizado utilizando-se a fórmula de Euler no termo $e^{-il\theta} = \cos(l\theta) - i\text{sen}(l\theta)$, de forma que:

$$\text{LG}_{n,l} = \text{LG}_{n,l}^e + i \text{LG}_{n,l}^o, \quad (2.37)$$

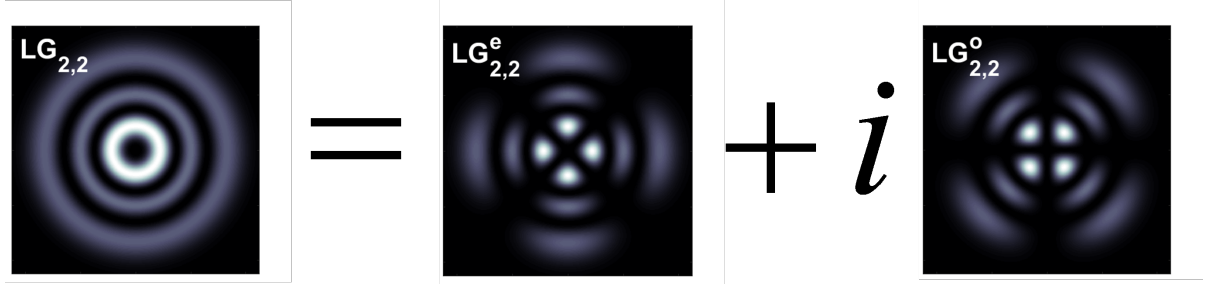
com:

$$\text{LG}_{n,l}^e = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega(z)} \right)^l L_n^{(l)} \left(\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \cos(l\theta) e^{-i \left(P_{\text{LG}}(z) + \frac{k\rho^2}{2q(z)} \right)}. \quad (2.38a)$$

$$\text{LG}_{n,l}^o = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega(z)} \right)^l L_n^{(l)} \left(\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \text{sen}(l\theta) e^{-i \left(P_{\text{LG}}(z) + \frac{k\rho^2}{2q(z)} \right)}. \quad (2.38b)$$

Visualmente, a equação (2.37) pode ser representada como o esquema presente na Figura 4, onde um feixe LG que carrega momento angular é decomposto em dois termos distintos com paridade, um par devido ao cosseno e outro ímpar devido ao seno:

Figura 4 – Decomposição de um feixe Laguerre em um feixe par e um ímpar.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1.2.3 MODOS INCE-GAUSS

Um terceiro sistema de coordenadas que pode ser usado para resolver a equação (2.14) é o sistema elíptico cilíndrico (BANDRES; GUTIÉRREZ-VEGA, 2004), que se comporta como um caso intermediário entre as coordenadas cartesianas e as cilíndricas. Os três valores que definem um ponto nesse sistema são $\xi \in [0, \infty)$, $\eta \in [0, 2\pi)$ e $z \in (-\infty, \infty)$, definidos pelas relações:

$$x = f \cosh(\xi) \cos(\eta), \quad (2.39a)$$

$$y = f \sinh(\xi) \sin(\eta), \quad (2.39b)$$

$$z = z. \quad (2.39c)$$

O parâmetro f que aparece nas equações (2.39a) e (2.39b) define a excentricidade do sistema de coordenadas. Seu efeito no sistema pode ser observado na Figura 5, onde fica clara a maneira como o valor de f transforma o sistema elíptico em cartesiano ou cilíndrico. Nesse sistema, as curvas com valores constantes de $\xi(\eta)$ são elipses (parábolas) confocais.

No caso do estudo dos feixes paraxiais, é útil definir f como uma função de z , variando da mesma maneira que o diâmetro de um feixe gaussiano, ou seja:

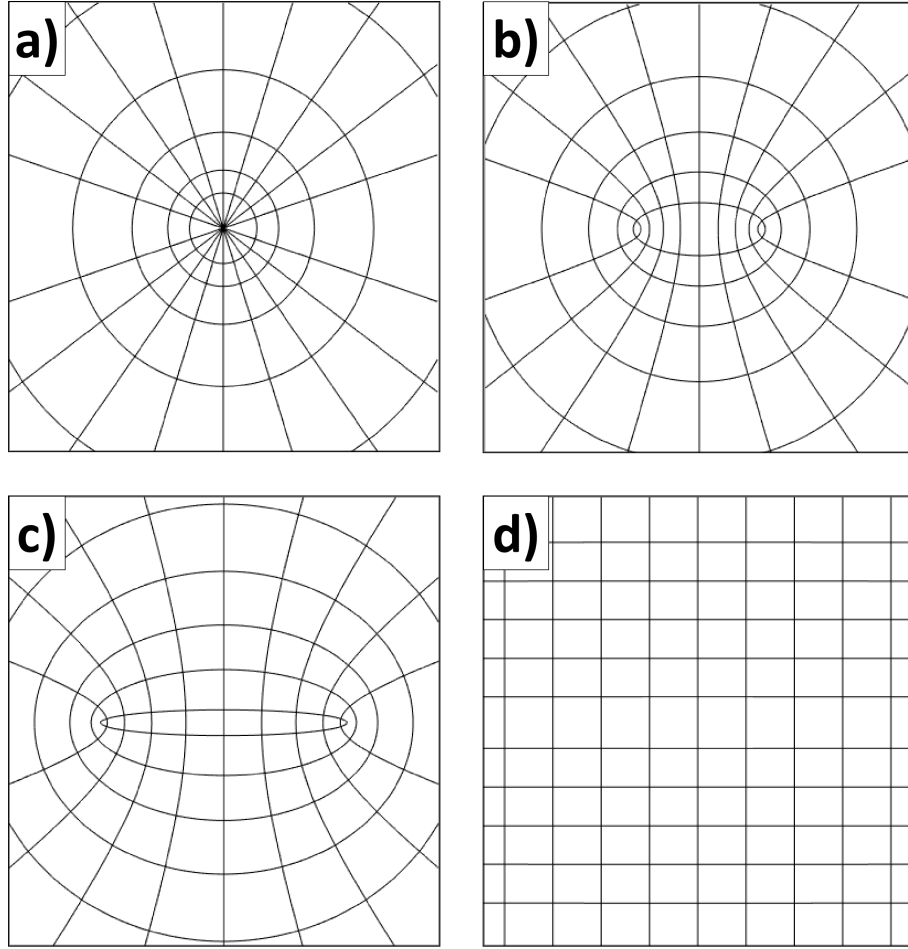
$$f(z) = f_0 \frac{\omega(z)}{\omega_0}. \quad (2.40)$$

Onde, a constante f_0 é a excentricidade no plano $z = 0$.

Tendo realizado todas as definições necessárias do sistema de coordenadas, o próximo passo é escolher uma função tentativa, que nesse caso será:

$$\psi_{IG}(\eta, \xi, z) = g(\eta)h(\xi)e^{-i(P(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2))}. \quad (2.41)$$

Figura 5 – Sistema de coordenadas elípticas com a) $f \rightarrow 0$, b) $f = 1$, c) $f = 2$ e d) $f \rightarrow \infty$. Nos gráficos, as linhas representam curvas com $\eta = \text{const.}$ ou $\xi = \text{const.}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Substituindo em (2.14), têm-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} - \epsilon \sinh(2\xi) \frac{\partial g}{\partial \xi} - (a - p \epsilon \cosh(2\xi))g = 0, \quad (2.42a)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \epsilon \sin(2\eta) \frac{\partial h}{\partial \eta} + (a - p \epsilon \cos(2\eta))g = 0, \quad (2.42b)$$

$$\frac{\partial q(z)}{\partial z} = 1, \quad (2.42c)$$

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = \frac{-i}{q(z)}(1 + p). \quad (2.42d)$$

Em (2.42a) e (2.42b), foi definido o valor $\epsilon = \frac{2f_0^2}{\omega_0^2}$

Assim como nos outros dois casos, a equação (2.42c) indica que os parâmetros q , R e ω são definidos pelas equações (2.22), (2.23a) e (2.23b). Com (2.34), calcula-se $P(z)$:

$$P_{IG}(z) = (1 + p) i \ln \left(\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right) - \phi(z), \quad \phi(z) \equiv (1 + p) \arctan \left(\frac{z}{L_R} \right). \quad (2.43)$$

A equação (2.42b) tem uma família de soluções conhecidas como polinômios de Ince de ordem p e grau m . Esses polinômios podem ser pares ou ímpares, sendo representados por $C_p^m(\eta, \epsilon)$ e $S_p^m(\eta, \epsilon)$, respectivamente.

Independente da paridade do polinômio, os índices p e m têm a mesma paridade - i.e. $(-1)^{p-m} = 1$. No entanto, no caso de $C_p^m(\eta, \epsilon)$ os índices respeitam a relação $0 \geq m \geq p$, e para $S_p^m(\eta, \epsilon)$ tem-se $1 \geq m \geq p$.

Sabendo então a solução da equação (2.42a), é possível resolver a equação (2.42b) realizando a substituição $\eta \rightarrow i\xi$. Com isso:

$$g(\eta)h(\xi) = C_p^m(\eta, \epsilon)C_p^m(i\xi, \epsilon) \text{ ou } S_p^m(\eta, \epsilon)S_p^m(i\xi, \epsilon). \quad (2.44)$$

Em (2.44), não foram escolhidos os produtos de polinômios com diferentes paridades pelo fato de esses casos não serem contínuos em todo o espaço.

Assim, os modos Ince-Gauss(IG) têm a seguinte forma, onde os índices "e" e "o" representam a paridade (par ou ímpar, respectivamente):

$$\text{IG}_{p,m}^e \equiv \psi_{IG}^e(\xi, \eta, z, \epsilon) = C_p^m(i\xi, \epsilon)C_p^m(\eta, \epsilon)e^{-i\left(P_{IG}(z) + \frac{k(x^2+y^2)}{2q(z)}\right)}, \quad (2.45a)$$

$$\text{IG}_{p,m}^o \equiv \psi_{IG}^o(\xi, \eta, z, \epsilon) = S_p^m(i\xi, \epsilon)S_p^m(\eta, \epsilon)e^{-i\left(P_{IG}(z) + \frac{k(x^2+y^2)}{2q(z)}\right)}. \quad (2.45b)$$

A seguir, na Figura 6, pode-se observar a distribuição transversal de intensidade de diversos modos IG pares e ímpares:

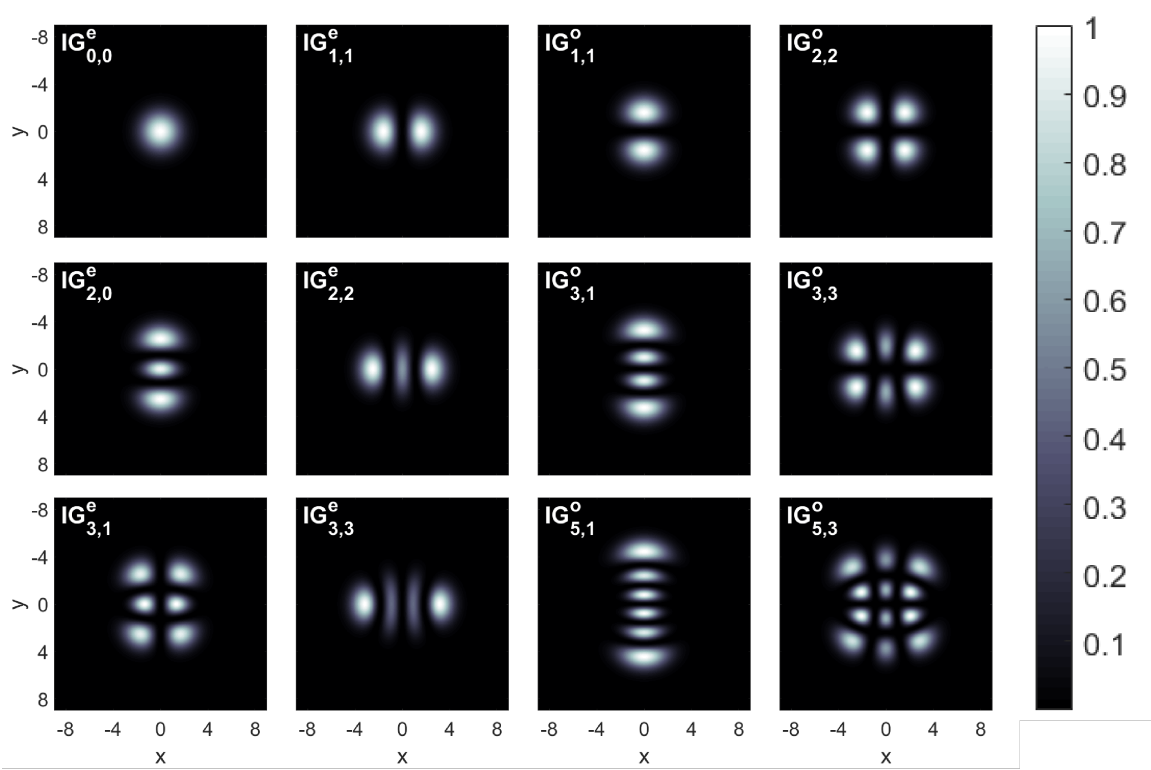
Uma outra propriedade interessante dos modos IG é o fato de que, assim como as coordenadas elípticas que os definem se transformam nas cartesianas ou nas cilíndricas a depender do parâmetro f , esses modos mostram um comportamento similar em relação ao parâmetro ϵ .

Como pode-se observar na Figura 7, variando ϵ é possível transformar um feixe IG em HG ou LG, de maneira que os modos Ince-Gauss podem ser considerados como uma generalização dos feixes paraxiais, com os Hermite-Gauss e os Laguerre-Gauss sendo casos particulares desse.

As regras gerais da transformação dos índices do feixe $\text{IG}_{p,m}^{\sigma_0}$ para os índices dos feixes $\text{LG}_{n,l}^{\sigma_1}$ e HG_{n_x,n_y} podem ser observadas na tabela abaixo:

$\text{IG}_{p,m}^{\sigma_0} \rightarrow \text{LG}_{n,l}^{\sigma_1}$	$\text{IG}_{p,m}^e \rightarrow \text{HG}_{n_x,n_y}$	$\text{IG}_{p,m}^o \rightarrow \text{HG}_{n_x,n_y}$
$\sigma_1 = \sigma_0$	$n_x = m$	$n_x = m - 1$
$l = m$	$n_y = p - m$	$n_y = p - m + 1$
$n = \frac{p-m}{2}$		

No caso específico da Figura 7, tem-se na coluna central modos IG com $p = 3$ e $m = 1$, então espera-se que os modos LG obtidos deles tenham - além da mesma paridade

Figura 6 – Distribuições transversais de intensidades dos modos Ince-Gauss com $\epsilon = 5$


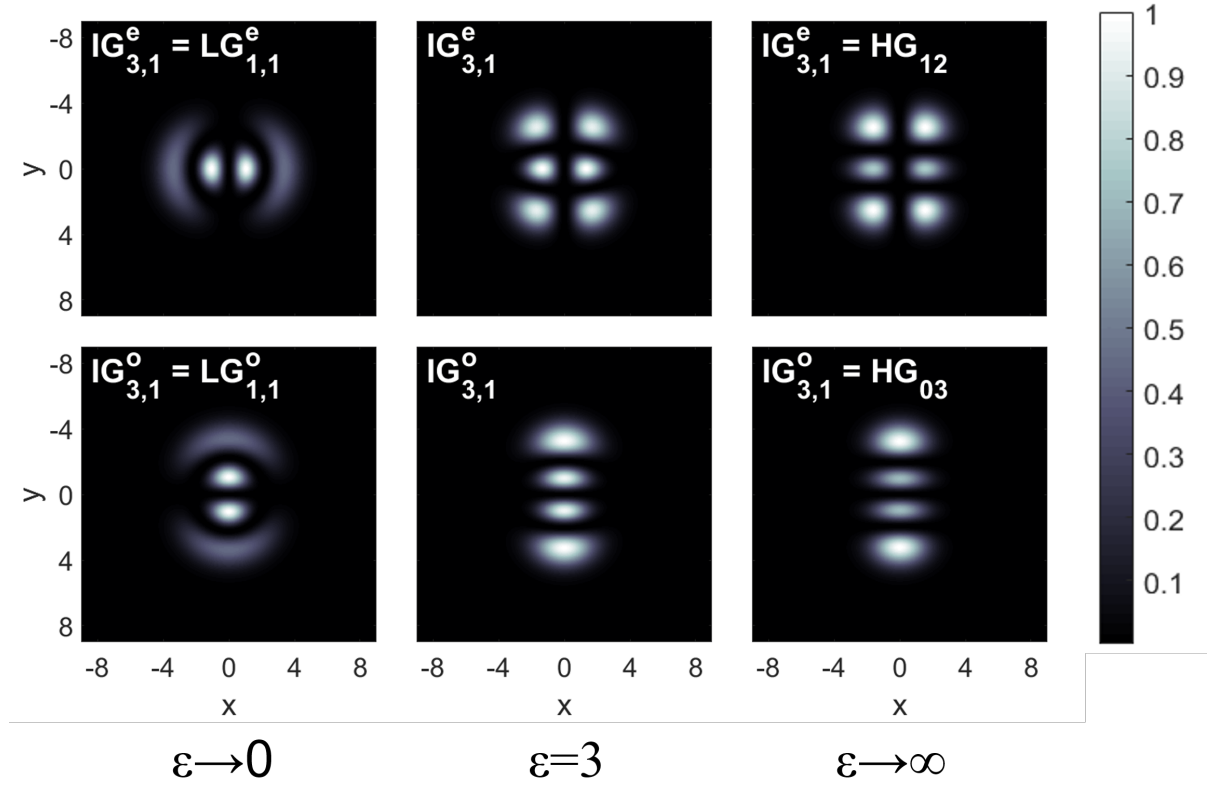
Fonte: Elaborado pelo autor.

-, índices $l = m = 1$, e $n = \frac{p-m}{2} = 2$, que é exatamente o que se observa na primeira coluna. No caso da transição entre IG e HG, há uma diferença entre a transição de um IG par e um IG ímpar para HG: No caso onde o modo IG é par, fazer a excentricidade tender para o infinito deve resultar num HG_{n_x, n_y} com $n_x = m = 1$ e $n_y = p - m = 2$; e no caso onde o modo IG é ímpar, espera-se que essa transição leve a um HG_{n_x, n_y} com $n_x = m - 1 = 0$ e $n_y = p - m + 1 = 3$. E novamente, é isso que se observa na terceira coluna.

Além disso, assim como foi definida a fórmula (2.37) para o caso dos feixes LG, é possível fazer algo similar para os IG, onde o somatório de um feixe par e um ímpar de mesmos índices p e m resultam num feixe que carrega momento angular, denominado feixe Ince-Gauss Helicoidal (HIG):

$$\text{HIG}_{p,m}^{\pm} = \text{IG}_{p,m}^e \pm i \text{IG}_{p,m}^o. \quad (2.46)$$

Assim como os feixes LG, a frente de onda desses feixes também rotaciona ao longo da propagação. Nesse caso, o parâmetro m é o que está associado ao momento angular orbital.

Figura 7 – Transição entre modos Laguerre, Ince e Hermite, devido à variação de ϵ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2 FEIXES EM UM MEIO NÃO-LINEAR

Como foi visto anteriormente, quando os feixes de luz se propagam no ar é possível aproximar esse meio como um vácuo. Ao se fazer isso, a resolução das equações de Maxwell fica mais simples, e dá origem à equação (2.9). No entanto, é interessante considerar também a propagação de feixes em meios onde a interação com a matéria não é desprezível, pois neles surgem fenômenos e relações mais complexos. Ao tratarmos desse tipo de material, é necessário utilizar a seguinte forma das equações de Maxwell, com a adição do deslocamento elétrico $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ e do campo magnético auxiliar $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho, \quad (2.47a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.47b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.47c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.47d)$$

Como pode-se observar, o caso acima é similar ao caso do vácuo se for considerado que não existem cargas elétricas - $\rho = 0$ -, e que não há efeitos de polarização presentes.

No entanto, para a continuação dessa análise, será considerado que:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.48a)$$

$$\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{B}. \quad (2.48b)$$

Onde a polarização \mathbf{P} vai depender não-linearmente do campo \mathbf{E} , e é a partir dela que surgirão novos efeitos e interações na propagação dos feixes.

Assim como foi feito no primeiro capítulo, é possível calcular equações que dependem de apenas um dos campos eletromagnéticos. Para o campo elétrico, toma-se primeiro o rotacional da equação (2.47c):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.49)$$

Levando em conta as definições de \mathbf{H} e \mathbf{D} do sistema, a equação (2.47d) pode ser escrita como:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.50)$$

Então, substituindo esse rotacional na equação (2.49) e considerando a propriedade (2.6):

$$\nabla [\nabla \cdot \mathbf{E}] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.51)$$

Tomando então um sistema sem cargas livres, que implica em $\rho = 0$, obtem-se:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.52)$$

Comparando com a equação (2.8), nota-se que a diferença está no surgimento de um termo de fonte dependente diretamente da resposta da polarização \mathbf{P} .

Além disso, pode-se realizar a mesma aproximação paraxial utilizada para obter a equação (2.14), que nesse caso resultará em:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{i}{2k} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{ik}{2\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad (2.53)$$

Na equação acima, o termo ψ se relaciona com \mathbf{E} através de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \psi((x, y))e^{ikz}e^{-i\omega t}$

Se for considerando então que o sistema é isento de qualquer dispersão ou perda, e que a polarização depende do valor instantâneo da amplitude de \mathbf{E} , é possível simplificar a análise das quantidades e tratar tanto a polarização quanto o campo elétrico como

quantidades escalares ao invés de vetores (BOYD, 2008). Tendo isso em mente, o próximo passo é expandir \mathbf{P} como uma série de potências do campo elétrico, ou seja:

$$P(t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots \right). \quad (2.54)$$

Como pode-se observar, cada uma das potências do campo elétrico tem uma quantidade χ - denominada susceptibilidade óptica - associada a ela. Nesse trabalho se estudará um efeito relacionado com a susceptibilidade de segunda ordem $\chi^{(2)}$, e por isso será realizada a seguir uma análise mais profunda da influência desse termo no comportamento do feixe.

Para tal, será considerado que o termo $\chi^{(2)}$ é o dominante na resposta da polarização, de modo que ela pode ser escrita como:

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2(t). \quad (2.55)$$

Toma-se então uma superposição de dois campos elétricos, cada um com uma frequência diferente:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) + \text{c.c.} \quad (2.56)$$

Na equação acima, o termo c.c. representa o conjugado complexo do resto da equação. De acordo com o que já foi definido anteriormente, pode-se escrever os termos do lado direito da equação (2.56) da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_1(x, y, z) e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{U}_2(x, y, z) e^{-i\omega_2 t} + \text{c.c.} \quad (2.57)$$

Substituindo em (2.55):

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(2)} \left[\mathbf{U}_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + \mathbf{U}_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + 2\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \right] +, \\ \epsilon_0 \chi^{(2)} \left(|\mathbf{U}_1|^2 + |\mathbf{U}_2|^2 \right) + \text{c.c.} \quad (2.58)$$

Considerando que essa polarização age como um termo de fonte na equação de onda, conclui-se que durante a propagação da superposição de \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 no material não-linear, serão gerados outros campos com frequências diferentes, cada um deles corresponde a um processo não-linear:

Os dois primeiros termos, com frequências $2\omega_1$ e $2\omega_2$ estão relacionados com o processo da geração de segundo harmônico, onde são gerados feixes com estruturas iguais aos de entrada, mas com o dobro da frequência. Os termos com frequências $(\omega_1 + \omega_2)$ e

Frequência	Processo
$2\omega_1, 2\omega_2$	Geração de Segundo Harmônico
$\omega_1 + \omega_2$	Geração de Soma-Frequência
$\omega_1 - \omega_2$	Geração de Diferença de Frequência
0	Retificação Óptica

$(\omega_1 - \omega_2)$ representam, respectivamente, os fenômenos da geração de modos por soma-frequência e diferença de frequência. Por fim, o termo sem frequência é associado com o processo da retificação óptica, onde o campo elétrico produz uma polarização constante dentro do meio não-linear em questão.

No caso desse estudo será considerado que os dois feixes de entrada possuem a mesma frequência, de modo que tanto os termos do segundo harmônico quanto o termo da soma-frequência terão o mesmo valor de frequência, enquanto que o termo da diferença de frequência não terá dependência temporal, e ficará incorporado na retificação óptica. Assim, na seção a seguir será detalhado o processo da geração de modos por soma-frequência, que é o foco principal desse trabalho.

2.3 MISTURA DE FEIXES

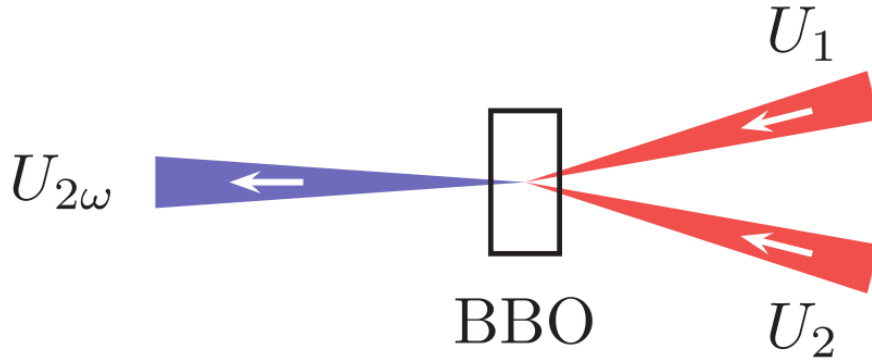
Como foi citado no final da seção anterior, o processo escolhido para ser estudado nesse trabalho é o de geração de soma-frequência, e a seguir, será apresentada sua base teórica.

Primeiro, como foi especificado na equação (2.57), o campo inicial \mathbf{E}_0 é uma superposição de \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 . Para realizar isso, será considerado que esses dois campos incidem e se cruzam num cristal fino - que é o material com propriedades não-lineares -, e então a mistura é observada saindo do cristal na face oposta. Um esquema desse sistema pode ser observado na Figura 8:

Além disso, o comportamento dessa mistura pode ser estudado através da equação diferencial (2.53). Para resolvê-la, pode-se utilizar o método da função de Green (LANNING et al., 2017; BARTON; BARTON, 1989), e obter:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = \int r' dr' d\phi' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{r}')|_{z=z'} + \int_{z_i}^{z_f} dz' \int r' dr' d\phi' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{ik}{2\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}'). \quad (2.59)$$

Figura 8 – Esquema contendo os feixes de entrada U_1 e U_2 , o feixe resultante da mistura $U_{2\omega}$ e o cristal não-linear BBO.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na equação (2.59), a função K é o propagador e a função G é a função de Grenn. Em suas definições a seguir, aparece a função de Heaveside, que está representada por $\Theta(z - z')$:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{p,m} u_{p,m}^*(\mathbf{r}') u_{p,m}(\mathbf{r}), \quad (2.60a)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Theta(z - z') K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.60b)$$

Acima, os termos $u_{p,m}$ são uma base ortonormal qualquer, que pode ser uma das famílias de feixes descritas na seção 2.1.2.

Com isso, o próximo passo é expandir a polarização nessa mesma base ortonormal, de modo a obter:

$$\frac{ik}{2\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_{p,m} c_{p,m}(z) u_{p,m}(\mathbf{r}). \quad (2.61)$$

O valor $c_{p,m}$, que indica o peso de cada um dos termos da base, é conhecido como integral de *overlap*, e tem a forma:

$$c_{p,m}(z) = \frac{ik}{2\epsilon_0} \int d\mathbf{r} u_{p,m}^*(\mathbf{r}) \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (2.62)$$

Finalmente, com a substituição das equações (2.60a), (2.60b) e (2.61) em (2.59), encontra-se:

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\psi}_0 + \sum_{p,m} u_{p,m}(\mathbf{r}) \int_{z_i}^{z_f} dz' c_{p,m}(z'). \quad (2.63)$$

Enquanto que o primeiro termo do lado direito de (2.63) representa a geração de segundo harmônico dos feixes incidentes, o segundo termo indica a criação de novos modos

dentro do cristal pela soma-frequência, e é através da análise dele que se pode prever qual será a mistura resultante.

Como se pode observar, o segundo termo depende tanto da base ortonormal $u_{p,m}$ escolhida para se expandir os termos do sistema quanto da polarização dentro do cristal. Além disso, diferentes feixes de entrada criam diferentes modos na saída do cristal. A regra que rege essa criação é conhecida como regra de seleção, e a partir dela é possível prever quais modos estarão ou não presentes no feixe resultante.

3 RESULTADOS

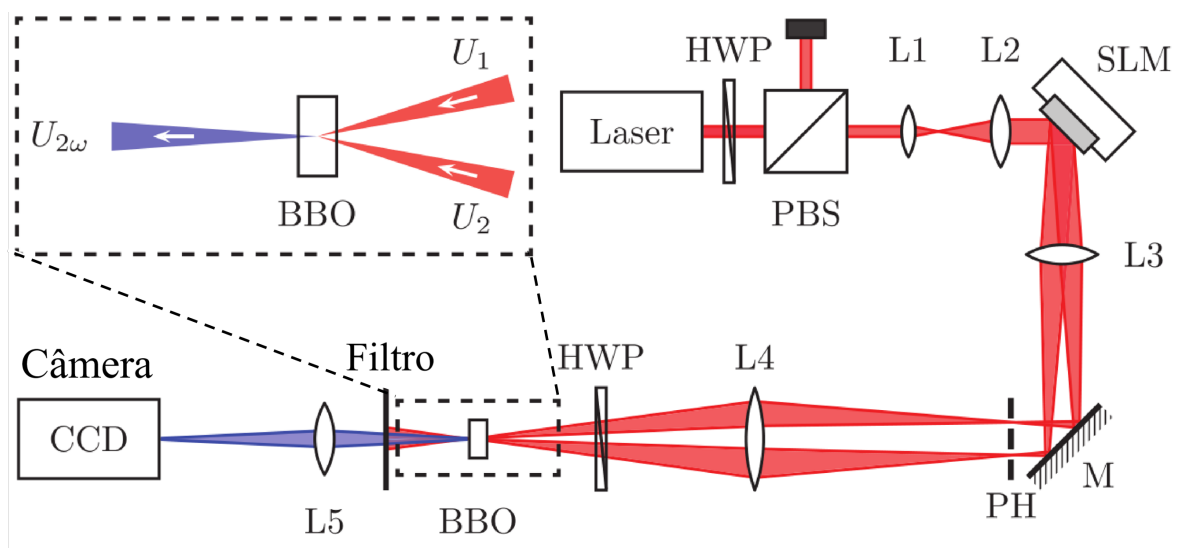
No estudo teórico da mistura de duas ondas, foi tomada uma base arbitrária $u_{p,m}$ qualquer nos cálculos, e viu-se que a escolha dessa base interfere diretamente nos resultados da mistura.

Aqui, a base escolhida foram os feixes Ince-Gauss (IG) descritos na seção 2.1.2.3, devido ao fato de a regra de seleção para eles ainda não ter sido demonstrada na literatura, e desse modo haver uma necessidade de observá-la e descrevê-la. Além disso, tentou-se observar a transição entre uma mistura de modos IG e uma mistura de modos HG (LG), a partir da variação da excentricidade.

O estudo dessa mistura foi realizado tanto experimentalmente quanto através de simulações, de modo que os resultados de ambos puderam ser comparados para se comprovar a validade do modelo teórico apresentado na seção 2.3.

Como o cristal utilizado era relativamente fino em relação às outras medidas do sistema, a integral na equação (2.63) pôde ser desconsiderada, de modo que as simulações consistiram em calcular numericamente o valor de $c_{p,m}$ para diversos valores de $u_{p,m}$, e então fazer a combinação linear dos modos IG a partir desses pesos. Depois disso, a superposição final de feixes foi propagada no ar até a zona do campo distante.

Figura 9 – Aparato experimental utilizado. A caixa quadriculada representa uma visão mais próxima do cristal e dos feixes. Aqui, as siglas utilizadas representam: HWP - Placa de meia onda, PBS - Separador de feixe polarizado, SLM - Modulador espacial de luz, PH - Pinhole, M - Espelho, BBO - Cristal de Beta Borato de Bário. As distâncias focais das lentes são, em ordem, $L1 = 30$ mm, $L2 = 100$ mm, $L3 = L4 = 1000$ mm e $L5 = 300$ mm.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Experimentalmente, como se pode observar na Figura 9 a montagem utilizada foi um laser pulsado de Ti:Safira emitindo em 780 nm, que iluminava um modulador espacial de luz (SLM), onde eram criados os campos de entrada U_1 e U_2 dispostos numa superposição com uma diferença de fase linear entre eles, de forma que ao longo da sua propagação eles se separavam espacialmente (HSUEH; SAWCHUK, 1978; MENDOZA-YERO; MINGUEZ-VEGA; LANCIS, 2014). Em seguida, o feixe com os dois campos passavam por uma placa de meia onda de modo a otimizar a mistura não-linear dentro de um cristal Beta Borato de Bário tipo 1 de dimensões 10 x 10 x 3 mm e ângulo phase-matching de 33,5°. Depois do cristal foi posicionado um filtro espectral centralizado em 335 nm, que separava a mistura de interesse do restante da faixa do vermelho, e então uma câmera CCD capturava sua intensidade no campo distante.

O cristal escolhido para esse estudo, o Beta Borato de Bário tipo 1, é altamente utilizado em aplicações não-lineares devido a sua versatilidade. Entre suas propriedades mais importantes, pode-se citar um intervalo de transparência largo, um coeficiente não-linear alto e uma baixa distorsão da frente de onda.

Nas figuras utilizadas para comparar os resultados experimentais e teóricos, estão expostos os feixes U_1 , U_2 e $U_{2\omega}$ em cada caso. Além disso, o peso $c_{p,m}$ de cada um dos modos na superposição final para o caso teórico é indicado na coluna central das imagens por um histograma $p \times m$, onde todos os pesos foram multiplicados por um fator positivo de modo que o maior deles em módulo fosse igual a 1.

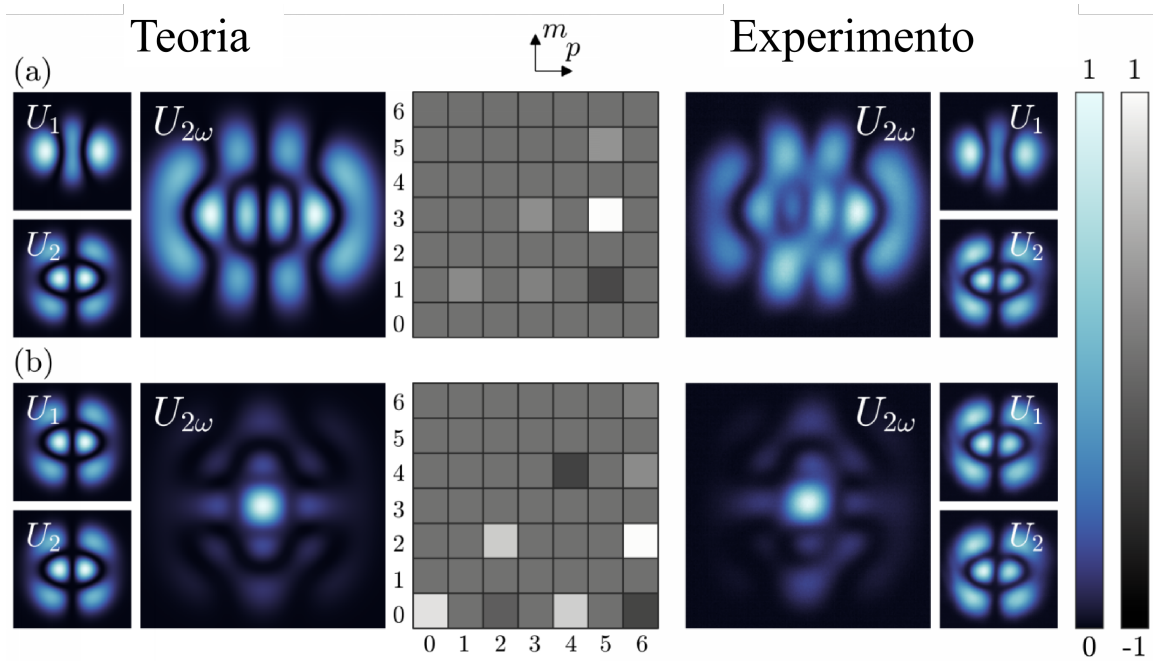
3.1 FEIXES INCE COM PARIDADE DEFINIDA

Em todos os resultados dessa subseção, a excentricidade escolhida para os feixes de entrada foi $\epsilon = 2$. Com isso em mente, primeiramente foram consideradas misturas de dois feixes com a mesma paridade. Na Figura 10, pode-se observar os resultados quando a paridade de ambos é par.

De maneira similar, para a Figura 11 foram considerados os dois feixes iniciais com paridade ímpar, e por fim, a Figura 12 mostra os resultados quando os feixes de entrada têm paridades diferentes. Em todos os casos considerados, os resultados teóricos e experimentais tiveram grande similaridade. Assim, se pode dizer que a criação dos modos esperados realmente aconteceu dentro do cristal.

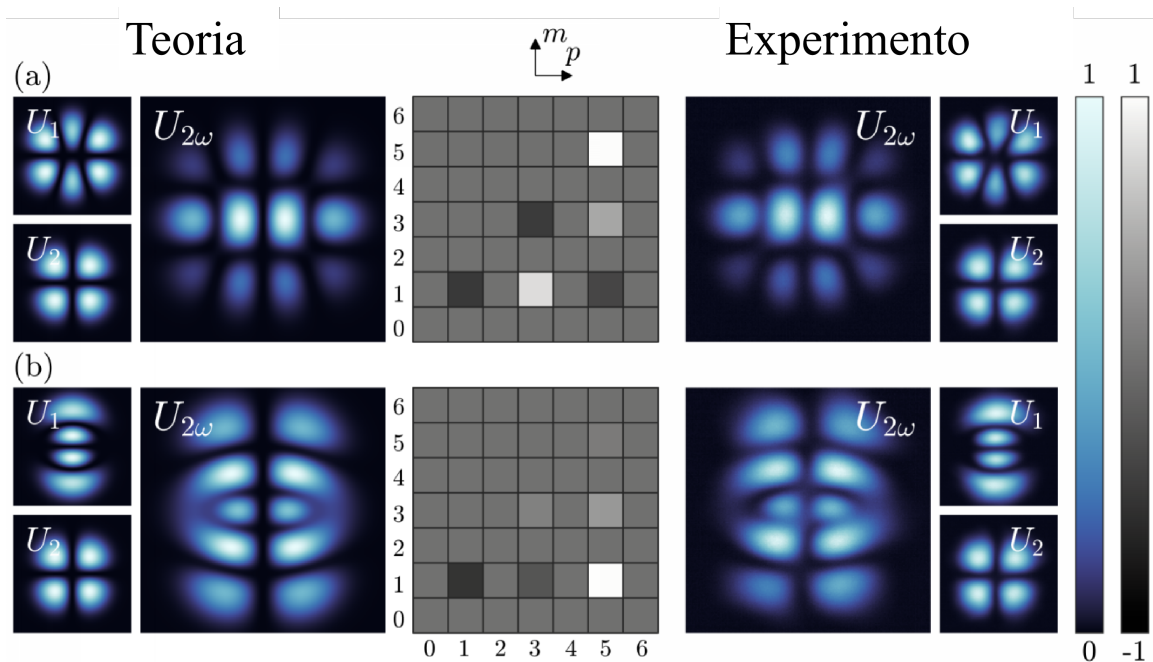
Além disso, em relação à regra de seleção citada no último parágrafo da seção 2.3 é possível concluir que: Considerando a mistura de $U_1 = \text{IG}_{p_1, m_1}^{\sigma_1}$ com $U_2 = \text{IG}_{p_2, m_2}^{\sigma_2}$, os modos $\text{IG}_{p, m}$ presentes em $U_{2\omega}$ serão pares (ímpares) quando as paridades dos feixes de entrada forem iguais (diferentes). Além disso, serão criados - ou seja, terão peso diferente de zero - apenas os modos $\text{IG}_{p, m}$ com índices p que obedecem $p \leq p_1 + p_2$ e $\text{mod}(p + p_1 + p_2, 2) = 0$, e com índices m que obedecem $m \leq p$ e $\text{mod}(m + p, 2) = 0$.

Figura 10 – Mistura não-linear de dois feixes IG com paridade par, especificamente a) $U_1 = \text{IG}_{2,2}^e$ com $U_2 = \text{IG}_{3,1}^e$ e b) $U_1 = \text{IG}_{3,1}^e$ com $U_2 = \text{IG}_{3,1}^e$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final.



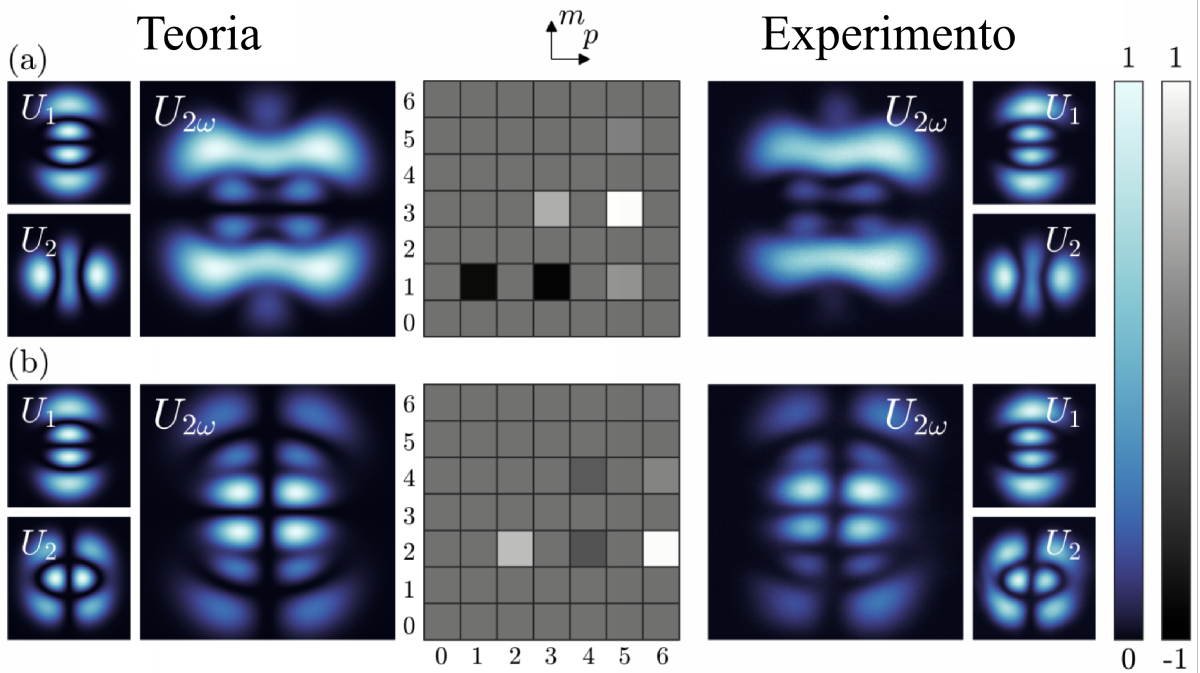
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – Mistura não-linear de dois feixes IG com paridade ímpar, especificamente a) $U_1 = \text{IG}_{3,3}^o$ com $U_2 = \text{IG}_{2,2}^o$ e b) $U_1 = \text{IG}_{3,1}^o$ com $U_2 = \text{IG}_{2,2}^o$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Mistura não-linear de dois feixes IG com paridades distintas, especificamente a) $U_1 = IG_{3,1}^o$ com $U_2 = IG_{2,2}^e$ e b) $U_1 = IG_{3,1}^o$ com $U_2 = IG_{3,1}^e$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final.



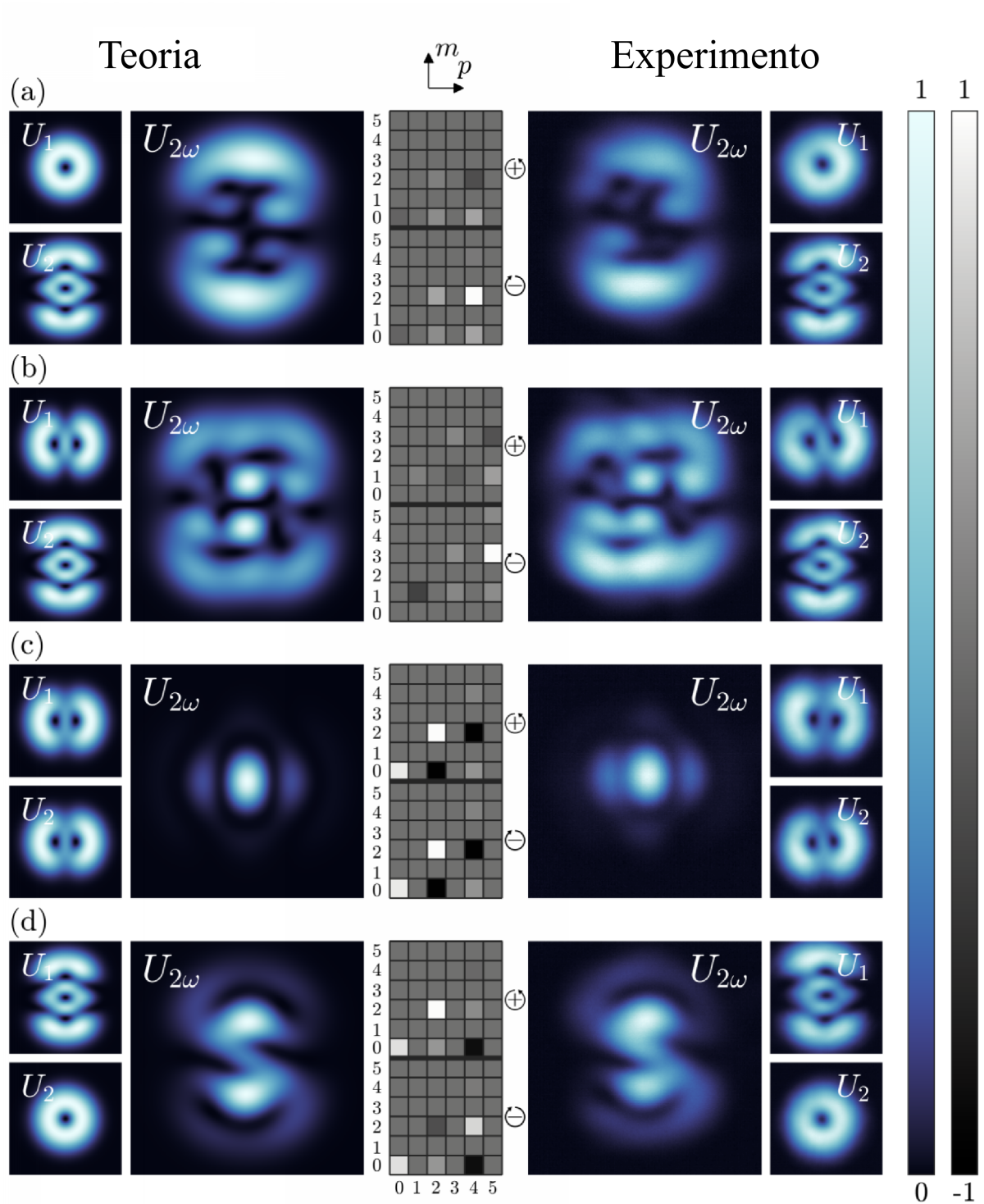
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomando a situação a) da Figura 10 como um exemplo específico, onde $U_1 = IG_{2,2}^e$ e $U_2 = IG_{3,1}^e$, tem-se que $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$. Primeiramente, como as paridades dos modos de entrada são iguais, a regra de seleção afirma que os modos na saída serão todos pares. Além disso, em relação ao índice p , os únicos modos que poderão ter peso diferente de zero na saída serão aqueles $IG_{p,m}$ cujo p obedece $p \leq 5$ e $\text{mod}(p+5, 2) = 0$. Devido à primeira relação, p só poderá ter valores entre 0 e 5, e devido à segunda, ele precisa ter a mesma paridade que a soma de p_1 com p_2 , que nesse caso é ímpar. Unindo essas duas condições, os únicos valores de p válidos na saída são 1, 3 e 5. Como a regra de seleção para o índice m implica que ele deve ser menor ou a igual a p , e os dois precisam ter a mesma paridade ($\text{mod}(m+p, 2) = 0$), a conclusão que se chega é que os únicos modos que estarão presentes na saída são: $IG_{1,1}^e, IG_{3,1}^e, IG_{3,3}^e, IG_{5,1}^e, IG_{5,3}^e, IG_{5,5}^e$, que é exatamente o que se observa no histograma desse caso.

3.2 FEIXES INCE COM MOMENTO ANGULAR

Levando em conta a mistura de dois feixes Ince Gauss helicoidais (HIG), a Figura 13 representa os resultados para feixes iniciais com sinais iguais e para feixes iniciais com sinais diferentes. Nesse caso, existem dois histogramas por mistura, um para cada sentido de giro do feixe - i.e. um para cada forma possível da equação (2.46).

Figura 13 – Mistura não-linear de dois feixes HIG, especificamente a) $U_1 = \text{HIG}_{1,1}^+$ com $U_2 = \text{HIG}_{3,1}^+$ e $\epsilon = 5$, b) $U_1 = \text{HIG}_{2,2}^+$ com $U_2 = \text{HIG}_{3,1}^+$ e $\epsilon = 5$, c) $U_1 = \text{HIG}_{2,2}^+$ com $U_2 = \text{HIG}_{2,2}^-$ e $\epsilon = 2$, e d) $U_1 = \text{HIG}_{3,1}^-$ com $U_2 = \text{HIG}_{1,1}^+$ e $\epsilon = 7$. A coluna central representa os pesos de cada um dos modos na mistura final.



Fonte: Elaborado pelo autor.

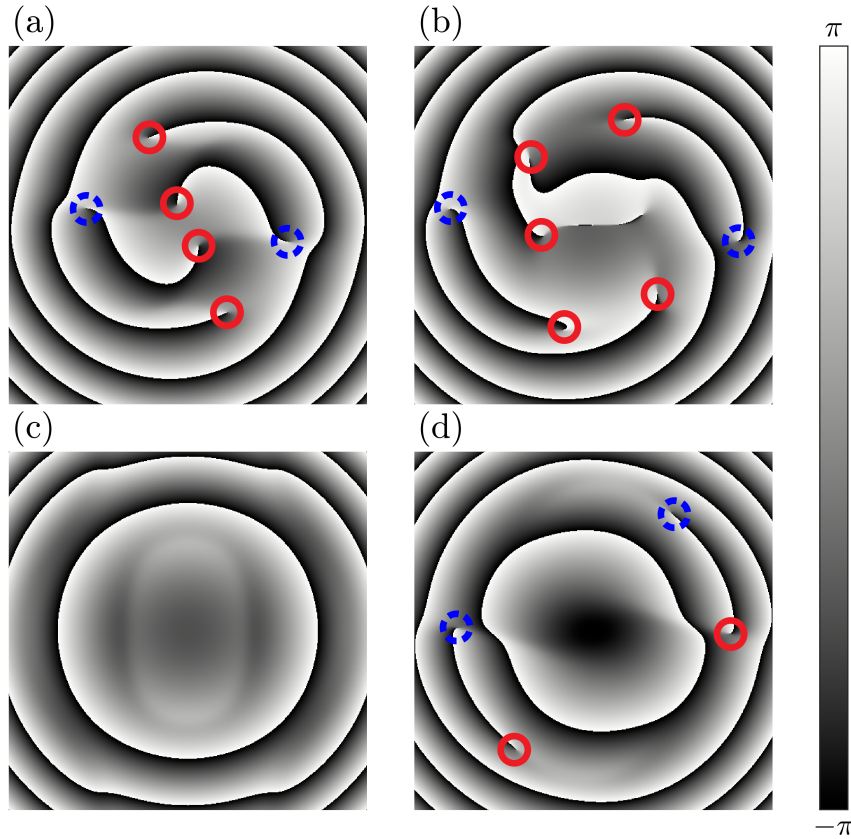
Novamente, houve uma alta concordância entre os resultados esperados e obtidos, assim como no caso dos feixes com paridade definida.

Quanto à regra de seleção, as mesmas relações obtidas para os feixes com paridade definida também são válidas aqui, e nesse caso sempre são gerados modos HIG^+ e HIG^- na mistura final, independente do sinal dos feixes de entrada.

Além disso, é de se esperar que haja uma conservação de momento angular durante a mistura, ou seja, que o momento final do feixe seja igual à soma dos momentos dos feixes iniciais ($m_{2\omega} = m_1 + m_2$). Nesse caso, como a mistura resultante é uma superposição de diversos modos com momentos angulares diferentes, uma simples observação do perfil de intensidade não é suficiente para definir o momento angular do feixe de saída, e é necessário aplicar algum método para realizar a medida de $m_{2\omega}$.

Em relação ao resultado numérico, a medição do momento angular pode ser feita através da observação do padrão de fase do feixe resultante: Ao se contar o número de vórtices ópticos, também conhecidos como singularidades, positivos e negativos - aqui, o sinal do vórtice depende da direção que os valores de fase variam ao seu redor -, e depois calcular sua diferença, de modo que o resultado será o valor de $m_{2\omega}$ (SHEN et al., 2019). As fases numéricas dos feixes resultantes estão apresentadas na Figura 14.

Figura 14 – Fase calculada numericamente para os feixes resultantes da Figura 13. Os círculos vermelhos representam as singularidades positivas, e os círculos azuis as negativas. Os valores esperados de momento angular para que haja a conservação são a) +2, b) +3, c) 0 e d) 0



Fonte: Elaborado pelo autor.

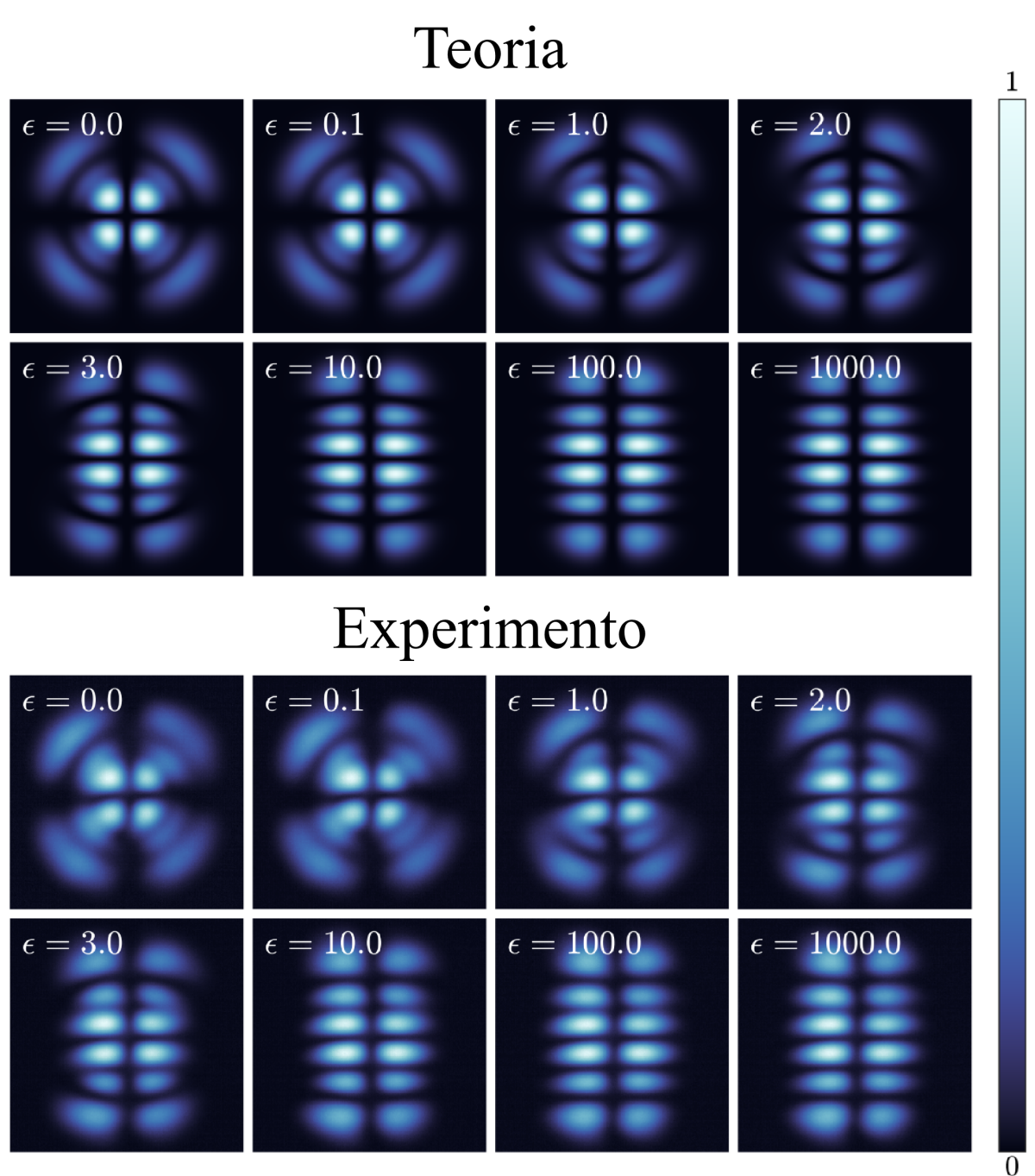
Como se pode observar na Figura 14, o momento resultante em cada um dos casos é realmente igual à soma dos momentos dos feixes iniciais.

Quando se leva em conta o resultado experimental, devido à separação das singularidades ópticas, a medição do momento $m_{2\omega}$ não pode ser feita através de métodos comumente utilizados como o da difração por uma abertura (HICKMANN et al., 2010; MELO et al., 2018) ou o da lente inclinada (VAITY; BANERJI; SINGH, 2013). Com isso, a demonstração da conservação do MAO só foi possível teoricamente.

3.3 TRANSIÇÃO ENTRE MODOS

Como foi demonstrado teoricamente na seção 2.1.2.3, os feixes IG são modos intermediários entre os HG e IG, com a transição dependente do parâmetro de excentricidade ϵ . Tendo isso em mente, a Figura 15 mostra o campo resultante da mistura não-linear de dois feixes com paridade definida para vários valores de excentricidade desses feixes iniciais.

Figura 15 – Feixe resultante da mistura não-linear de $U_1 = IG_{3,1}^o$ com $U_1 = IG_{3,1}^e$, para vários valores de ϵ .

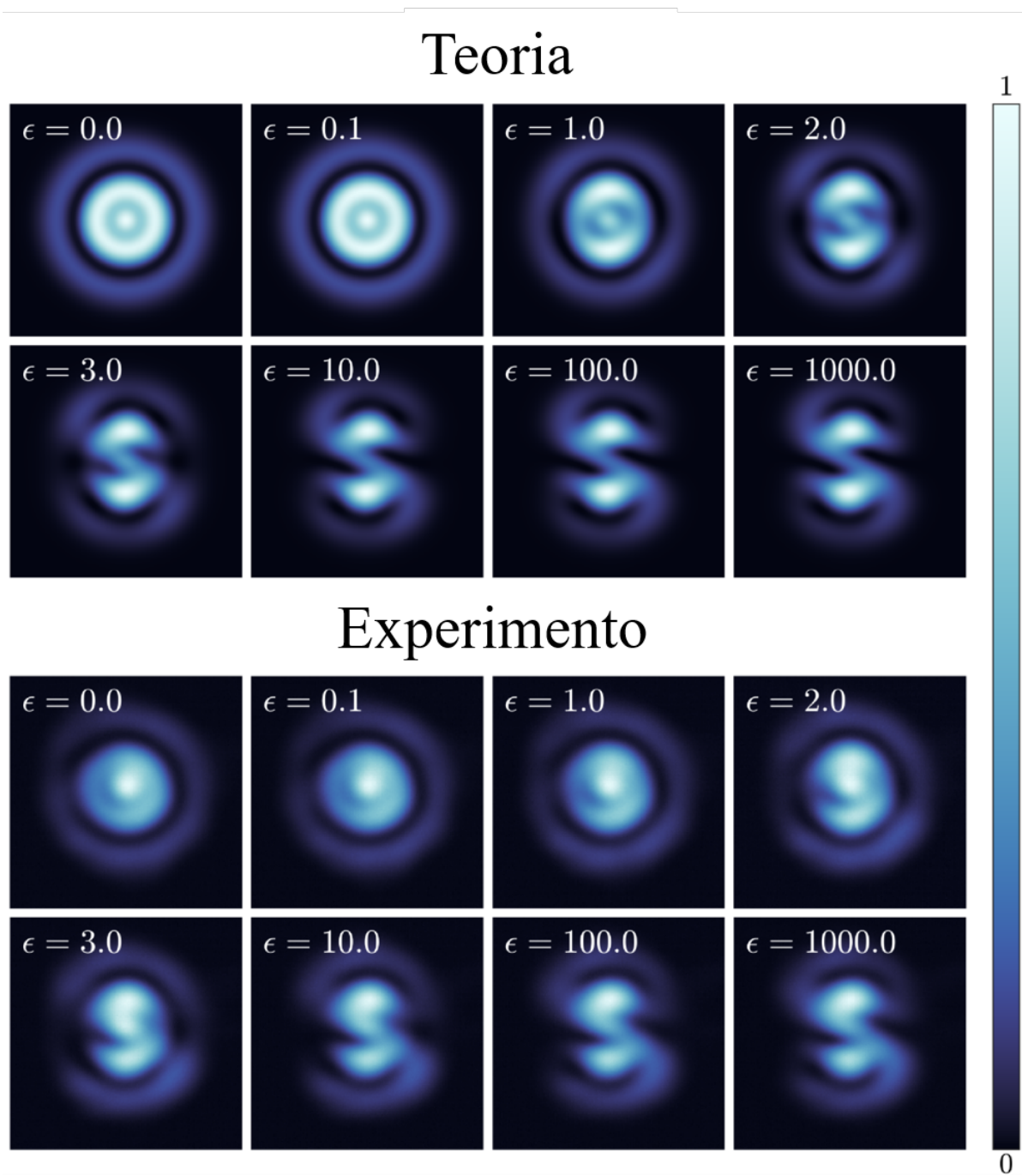


Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso da mistura de feixes com momento angular, sua resposta à mudança da excentricidade pode ser observada na Figura 16, onde se escolheu U_1 e U_2 de modo que o momento angular do feixe resultante fosse nulo.

Como se observa nas Figuras 15 e 16, tanto na parte teórica quanto na experimental, a simetria dos feixes resultantes muda de cilíndrica, no caso de excentricidade nula, passando por elíptica e finalmente chegando em retangular quando ϵ se aproxima de 1000.

Figura 16 – Feixe resultante da mistura não-linear de $U_1 = \text{HIG}_{3,1}^-$ e $U_2 = \text{HIG}_{1,1}^+$, para vários valores de ϵ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 CONCLUSÃO

Esse trabalho analisou a mistura de feixes Ince-Gauss (IG) dentro de um meio não-linear, onde a partir de dois feixes Ince-Gauss de entrada é gerada uma combinação de diferentes modos IG. Ao longo do desenvolvimento da pesquisa, foi estudada tanto a parte teórica desse fenômeno quanto a parte experimental, e procurou-se encontrar concordância entre as duas.

Experimentalmente, o sistema óptico utilizado permitiu que se observasse e registrasse com sucesso a geração de modos que ocorria a partir de dois feixes IG de entrada. Já na parte teórica, utilizou-se o método da função de Green para resolver o sistema de equações que descrevem o sistema, e a partir do resultado obtido foi possível simular quais modos seriam gerados dentro do meio não-linear.

Tendo essas duas maneiras de analisar a mistura, foram escolhidas diversas combinações de feixes IG iniciais e registrou-se a mistura final para cada uma delas. Em todos os casos estudados, houve uma ótima concordância entre os resultados teóricos e experimentais.

Além disso, essa mesma metodologia foi aplicada para analisar a mistura de dois modos HIG, que são modos com momento angular construídos a partir de feixes IG. Nesse caso, além da concordância entre os resultados experimentais e teóricos, em todas as misturas escolhidas se observou também que o momento angular total dos modos iniciais era conservado no modo final, algo que era de se esperar nesse tipo de mistura.

Nesses dois casos citados acima, uma observação dos dados tornou possível encontrar a relação que, a partir das informações dos feixes iniciais, permite prever quais modos serão ou não criados dentro do meio não-linear. Essa relação é denominada regra de seleção, e como ela controla diretamente os modos presentes no feixe resultante, ter conhecimento da sua forma é de extrema importância na análise de uma mistura não-linear.

Por fim, a partir da variação da excentricidade dos feixes de entrada, foi demonstrado como ocorre a transição entre modos Hermite-Gauss (HG), Ince-Gauss (IG) e Laguerre-Gauss com paridade definida (LG) em uma mistura não-linear. Essa transição foi considerada tanto para modos com paridade definida, quanto para modos carregando momento angular orbital, e em ambos os casos os resultados experimentais e teóricos apresentaram grande semelhança.

Todos esses resultados representam um ótimo estudo de base do fenômeno da geração de modos através da soma-frequência num meio não-linear, e as conclusões obtidas aqui - principalmente a da regra de seleção, que ainda não havia sido determinada na

literatura -, criam uma boa base de estudo para aplicações em comunicação óptica, micromanipulação e pinças ópticas.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, APS, v. 45, n. 11, p. 8185, 1992. Citado na página 19.
- AOLITA, L.; WALBORN, S. Quantum communication without alignment using multiple-qubit single-photon states. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 10, p. 100501, 2007. Citado na página 10.
- BANDRES, M. A.; GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. Ince-gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. *JOSA A*, Optical Society of America, v. 21, n. 5, p. 873–880, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- BARTON, G.; BARTON, G. *Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves*. [S.l.]: Oxford University Press, 1989. Citado na página 27.
- BOYD, R. W. *Nonlinear Optics, Third Edition*. 3rd. ed. USA: Academic Press, Inc., 2008. ISBN 0123694701. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 26.
- D'AMBROSIO, V. et al. Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication. *Nature Communications*, v. 3, n. 1, p. 961, Jul 2012. ISSN 2041-1723. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/ncomms1951>>. Citado na página 10.
- HICKMANN, J. et al. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 5, p. 053904, 2010. Citado na página 36.
- HSUEH, C.; SAWCHUK, A. Computer-generated double-phase holograms. *Applied optics*, Optical Society of America, v. 17, n. 24, p. 3874–3883, 1978. Citado na página 31.
- KOGELNIK, H.; LI, T. Laser beams and resonators. *Appl. Opt.*, OSA, v. 5, n. 10, p. 1550–1567, Oct 1966. Disponível em: <<http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-5-10-1550>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.
- LANNING, R. N. et al. Gaussian-beam-propagation theory for nonlinear optics involving an analytical treatment of orbital-angular-momentum transfer. *Physical Review A*, APS, v. 96, n. 1, p. 013830, 2017. Citado na página 27.
- MAXWELL, J. C. *A dynamical theory of the electromagnetic field*. [S.l.]: The Society, 1864. Citado na página 12.
- MELO, L. A. et al. Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–8, 2018. Citado na página 36.
- MENDOZA-YERO, O.; MÍNGUEZ-VEGA, G.; LANCIS, J. Encoding complex fields by using a phase-only optical element. *Opt. Lett.*, OSA, v. 39, n. 7, p. 1740–1743, Apr 2014. Disponível em: <<http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-39-7-1740>>. Citado na página 31.

- PADGETT, M.; BOWMAN, R. Tweezers with a twist. *Nature photonics*, Nature Publishing Group, v. 5, n. 6, p. 343, 2011. Citado na página 10.
- PEREIRA, L. J. et al. Orbital-angular-momentum mixing in type-ii second-harmonic generation. *Physical Review A*, APS, v. 96, n. 5, p. 053856, 2017. Citado na página 11.
- PIRES, D. et al. Optical mode conversion through nonlinear two-wave mixing. *Physical Review A*, v. 100, 10 2019. Citado na página 11.
- PIRES, D. et al. Higher radial orders of laguerre-gaussian beams in two-wave mixing processes. *Journal of the Optical Society of America B*, v. 37, 03 2020. Citado na página 11.
- PIRES, D. G. et al. Suitable state bases for nonlinear optical mode conversion protocols. *Opt. Lett.*, OSA, v. 45, n. 14, p. 4064–4067, Jul 2020. Disponível em: <<http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-45-14-4064>>. Citado na página 11.
- SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. *Fundamentals of photonics; 2nd ed.* New York, NY: Wiley, 2007. (Wiley series in pure and applied optics). Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/1084451>>. Citado na página 16.
- SHEN, Y. et al. Optical vortices 30 years on: Oam manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light: Science & Applications*, v. 8, n. 1, p. 90, Oct 2019. ISSN 2047-7538. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41377-019-0194-2>>. Citado na página 35.
- SHIMODA, K. *Introduction to Laser Physics*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986. (Springer Series in Optical Sciences 44). ISBN 978-3-540-16713-6,978-3-540-38954-5. Citado na página 10.
- SIEGMAN, A. E. *Lasers (Revised)*. Hardcover. [S.l.]: University Science Books, 1986. ISBN 0935702113,9780935702118. Citado na página 10.
- VAITY, P.; BANERJI, J.; SINGH, R. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens. *Physics letters a*, Elsevier, v. 377, n. 15, p. 1154–1156, 2013. Citado na página 36.
- WILLNER, A. E. et al. Optical communications using orbital angular momentum beams. *Adv. Opt. Photon.*, OSA, v. 7, n. 1, p. 66–106, Mar 2015. Disponível em: <<http://aop.osa.org/abstract.cfm?URI=aop-7-1-66>>. Citado na página 10.
- WOERDEMANN, M. et al. Advanced optical trapping by complex beam shaping. *Laser & Photonics Reviews*, v. 7, n. 6, p. 839–854, 2013. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/lpor.201200058>>. Citado na página 10.