

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS A.C SIMÕES
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA LICENCIATURA

DANIELA APRIGIO DO NASCIMENTO

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E UMA FAMÍLIA ASSOCIADA

Maceió-AL, 2025

DANIELA APRIGIO DO NASCIMENTO

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E UMA FAMÍLIA ASSOCIADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática da Universidade Federal
de Alagoas, como requisito parcial à obtenção
do título de Licenciatura em Matemática

Orientador
Prof. Dr. CARLOS GONÇALVES DO REI FILHO

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB4 - 661

- N244s Nascimento, Daniela Aprigio do.
Superfícies mínimas e uma família associada / Daniela Aprigio do Nascimento.
– 2025.
35 f. : il.
- Orientador: Carlos Gonçalves do Rei Filho.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) –
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Curso de Licenciatura
em Matemática. Maceió, 2025.
- Bibliografia: f. 35.
1. Superfície mínima. 2. Família associada. 3. Parametrização isotérmica.
4. Geometria diferencial. I. Título.

CDU: 514

Folha de aprovação

DANIELA APRIGIO DO NASCIMENTO

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E UMA FAMÍLIA ASSOCIADA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à banca examinadora e referendado pela Comissão de TCC do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 21 de janeiro de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **CARLOS GONCALVES DO REI FILHO**
Data: 28/02/2025 11:17:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Carlos Gonçalves do Rei Filho - Orientador - UFAL

Documento assinado digitalmente
 **MARCOS RANIERI DA SILVA**
Data: 28/02/2025 11:53:44-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva - Examinador - UFAL

Documento assinado digitalmente
 **RENAN DANTAS MEDRADO**
Data: 28/02/2025 16:05:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Renan Dantas Medrado - Examinador - UFAL

*O universo não foi feito à medida do ser humano,
mas tampouco lhe é adverso: é-lhe indiferente. (Carl Sagan)*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter conseguido concluir essa etapa na minha vida. Gostaria de expressar minha profunda gratidão, começando pela minha família. Em especial, agradeço à minha irmã, Gabriela Aprigio, cujo apoio foi essencial em todos os momentos dessa jornada, aos meus amigos Gustavo Kayk, Adson Palmeira e Bárbara Amorim, que sempre estiveram ao meu lado, compartilhando desafios, oferecendo conforto e celebrando cada conquista ao longo do caminho e ao meu namorado Luiz Alberto que foi apoio essencial na etapa final de conclusão do presente trabalho.

Meu sincero agradecimento também vai para todos os professores que contribuíram para minha formação, desde os tempos escolares até os anos no Instituto de Matemática da UFAL. Destaco, com carinho, o professor Luciênio, do ensino fundamental, que acreditou em mim, enxergou meu potencial e me incentivou a ir além. À graduação, agradeço especialmente ao professor Luis Guillermo Martinez Maza, um exemplo constante de dedicação e motivação, e ao professor Carlos Gonçalves do Reis Filho, que me acolheu como aluna de PIBIC e foi um pilar fundamental para a concretização desse sonho. Sem o apoio e o incentivo deles, nada disso seria possível.

Não poderia deixar de mencionar a professora Viviane de Oliveira Santos e as amigas que construí no projeto de extensão Sem Mais Nem Menos. Vocês foram um alicerce para minha saúde mental durante a universidade, e cada experiência vivida nesse projeto ficará para sempre comigo.

Por fim, meu agradecimento vai para os colegas da turma de 2017.1 e todos que, de alguma forma, direta ou indireta, contribuíram para minha formação. Cada gesto de apoio foi indispensável para que eu chegasse até aqui.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo explorar a geometria diferencial de superfícies, com foco especial nas superfícies mínimas e sua família associada, através do estudo das propriedades geométricas de uma família associada a superfície mínima via parametrizações isotérmicas. Para o desenvolvimento deste estudo, apresentam-se as definições preliminares onde abordamos as formas quadráticas de uma superfície regular, conhecidas como a primeira e a segunda forma fundamental, os símbolos de Christoffel e as equações de compatibilidade (Gauss e Mainardi-Codazzi). Em seguida, entramos nos objetos principais deste estudo que são as superfícies mínimas. Por fim, mostramos que dada uma superfície mínima S , não localmente plana, existe um fenômeno que revela a existência de uma notável família de superfícies associadas a S com a propriedade de que cada superfície da família é uma superfície mínima, todas elas têm a mesma primeira forma fundamental e elas são duas a duas não congruentes. Por fim, observamos que o catenoide e o helicoides pertencem a uma mesma família.

Palavras-chave: Superfície Mínima; Família Associada; Parametrização Isotérmica.

Abstract

The aim of this monograph is to explore the differential geometry of surfaces, with a special focus on minimal surfaces and their associated family, using a study of the geometric properties of a family associated with a minimal surface via isothermal parametrizations. For the development of this study, preliminary definitions are presented, where we discuss the quadratic forms of a regular surface, known as the first and second fundamental forms, the Christoffel symbols, and the compatibility equations (Gauss and Mainardi-Codazzi). Next, we develop the main objects of this study, which are the minimal surfaces. Finally, we prove that given a minimal surface S , which is not locally planar, there exists a phenomenon revealing the existence of an important family of surfaces associated with S , with the property that each surface in the family is a minimal surface, all of them have the same first fundamental form, and they are pairwise non-congruent. Lastly, we observe that the catenoid and the helicoid belong to the same family.

Keywords: Minimal Surface; Associated Family; Isothermal Parameterizations.

Sumário

Agradecimentos	5
Resumo	6
Abstract	7
Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Espaço Euclidiano	11
1.2 Superfície Regular	12
1.3 A Primeira Forma Fundamental	14
1.4 A Segunda Forma Fundamental	17
1.5 Superfícies Mínimas	21
2 Equações de compatibilidade	22
2.1 Os símbolos de Christoffel	22
2.2 As equações de compatibilidade	24
2.3 Congruência e o Teorema Fundamental (Teorema de Bonnet)	27
3 A Família Associada	29
3.1 A Família Associada	29
3.2 Catenóide e Helicóide	32

Introdução

A geometria diferencial contempla o estudo das propriedades locais e globais das curvas e superfícies. Ela está repleta de descobertas notáveis e grandes avanços no que tange a compreensão da forma e das propriedades das curvas e superfícies. Pode-se dizer que é um campo da matemática que possui vasto conteúdo e aplicações. Neste trabalho destacamos a geometria diferencial de superfícies que é uma parte interessante e representativa da geometria diferencial. Nesse campo, destacamos, em particular, o estudo das superfícies mínimas e sua família associada, as quais serão objetos de estudo do presente trabalho.

As primeiras investigações acerca das superfícies mínimas no espaço tridimensional ocorreram em meados do século XVII e foram feitas pelo matemático Joseph-Louis Lagrange. Essas superfícies aparecem naturalmente em problemas físicos, como na formação de filmes de sabão que se estendem sobre um contorno fechado. Esses filmes de sabão, na prática, são superfícies mínimas, ou seja, superfícies que possuem área mínima entre todas as superfícies que compartilham o mesmo contorno.

No entanto, foi o matemático alemão Carl Friedrich Gauss quem deu os passos necessários para a formalização da geometria diferencial e das superfícies mínimas. Foi ele quem introduziu o conceito de curvatura, um conceito essencial para a compreensão das propriedades geométricas das superfícies regulares. Com o conceito de Curvatura Gaussiana surgiu a Equação de Gauss e, conseqüentemente, as equações de Mainardi-Codazzi, que, embora tenham sido descobertas anteriormente por Karl Mikhailovich Peterson, foram Gaspare Mainardi (1856) e Delfino Codazzi (1868-1869) que nomearam as equações de Mainardi-Codazzi por terem derivado independentemente o resultado. (Boyer, 1991)

A equação de Gauss relaciona as curvaturas principais da superfície com sua métrica, sendo ela a base do teorema Egregium de Gauss. Já as Equações de Mainardi-Codazzi é um conjunto de três equações diferenciais parciais que relacionam derivadas das curvaturas principais de uma superfície. Essas equações são importantes tanto quando se estuda a teoria local das superfícies quanto na compreensão das relações entre as curvaturas intrínsecas e extrínsecas de uma superfície, elas norteiam o estudo feito neste trabalho.

A fim de trazer maior entendimento sobre o que será tratado em todo o trabalho, segue como foi estruturado cada capítulo do mesmo.

No primeiro capítulo, apresentamos alguns conteúdos preliminares, definimos superfícies regulares utilizando o conceito de parametrização local, mostramos através de um exemplo uma consequência de tal definição com o objetivo de ressaltar conceitos importantes para os resultados que aqui serão apresentados. Neste capítulo, também introduzimos a primeira forma fundamental e a segunda forma fundamental de uma superfícies. Em seguida, entramos no objeto principal de estudo para o desenvolvimento do trabalho, as superfícies mínimas.

Já no segundo capítulo, a partir do conceito de superfície mínima, iniciamos o estudo dos símbolos de Christoffel, a partir deles encontramos a Equação de Gauss e as Equações de Mainardi-Codazzi conhecidas como as equações de compatibilidade. Com isso, enunciamos o Teorema de Bonnet, conhecido como “Teorema Fundamental da teoria local das superfícies”, útil para a demonstração do nosso teorema principal.

Por fim, no último capítulo apresentamos a família associada, a partir do teorema principal que diz que dada uma superfície mínima e uma parametrização isotérmica, existe uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas, todas elas com a mesma métrica (primeira forma fundamental é a mesma para qualquer elemento da família) e elas são duas a duas não congruentes,

isto é, a segunda forma fundamental são todas diferentes.

1 Preliminares

Neste capítulo, revisamos o Espaço Euclidiano e a definição de superfícies regulares do Espaço Euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, utilizando a abordagem baseada em parametrizações. De maneira simplificada, superfícies regulares são subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que localmente se assemelham a gráficos de funções de duas variáveis.

Após definir superfícies, revisamos conceitos geométricos fundamentais, como o plano tangente, a primeira e a segunda forma fundamental, bem como as definições de curvatura gaussiana e curvatura média. Apresentamos essas noções sob uma perspectiva essencialmente algébrica, com o objetivo de estabelecer uma base teórica concisa e evitar o aprofundamento excessivo nos tópicos preliminares.

Os objetos geométricos mencionados são expressos em termos de parametrizações, e discutimos como suas representações podem variar de acordo com a escolha da parametrização. Destacamos, entretanto, que certas propriedades, como a curvatura gaussiana e a condição de curvatura média identicamente nula, são invariantes sob mudanças de parametrização. Para ilustrar essas ideias, analisamos exemplos que evidenciam a dependência das representações em relação às parametrizações adotadas.

Concluimos o capítulo revisando os conceitos de superfícies mínimas e de parametrizações isotérmicas, que desempenham um papel central no desenvolvimento deste trabalho. Essas noções fornecem a base necessária para abordar os tópicos mais avançados discutidos nos capítulos seguintes.

1.1 Espaço Euclidiano

Denotaremos por $\mathbb{R}^3$ o conjunto formado pelas triplas ordenadas de números reais (x, y, z) . Estamos interessados em estudar os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, chamados de superfícies, os quais são, em um certo sentido, bidimensionais. Para se ter uma ideia, o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis é uma superfície.

O conjunto $\mathbb{R}^3$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial real com produto interno, onde os vetores são as triplas ordenadas e as operações de soma, produto por escalar e produto interno são definidas assim: dados dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e um número real $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se que

Soma de vetores: $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

Produto por vetor: $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Produto interno: $\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

O conjunto $\mathbb{R}^3$ com essa estrutura é conhecido como Espaço Euclidiano Tridimensional (ou Espaço Euclidiano). No Espaço Euclidiano também está definido, em termos do produto interno, outras duas funções, essenciais para o estudo das superfícies. A primeira é a norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{\langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A segunda é o produto vetorial, definido a seguir. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, o produto vetorial $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definido por:

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \quad (1)$$

A seguir lembramos algumas propriedades que o produto vetorial satisfaz. Dados $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \mathbb{R}$, vale

- i. (Anti comutatividade) $u \times v = -v \times u$
- ii. (Multiplicação por escalar) $(au + bv) \times v = a(u \times v) + b(v \times v)$. Ou seja, $u \times v$ depende linearmente de u e v .
- iii. $u \times v = 0$ se e somente se u e v são linearmente dependentes.
- iv. $\langle u \times v, u \rangle = 0$ e $\langle u \times v, v \rangle = 0$
- v. Não associatividade $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$

Já podemos definir o que vem a ser uma superfície do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

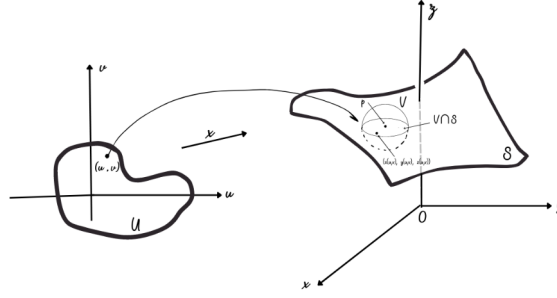
1.2 Superfície Regular

Definição 1. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{X} : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$ tal que :

- i) $\mathbf{X} : U \rightarrow V \cap S, \mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável, ou seja, as funções coordenadas x, y e z têm derivadas parciais contínuas de toda as ordens em U ;
- ii) $\mathbf{X} : U \rightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo, isto é, $\mathbf{X}$ é uma bijeção contínua (isto é, a imagem inversa de abertos são abertos em que os abertos considerados em S são aqueles induzidos pelos abertos de $\mathbb{R}^3$) cuja inversa $\mathbf{X}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ é contínua;
- iii) (condição de regularidade) $d\mathbf{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.

A aplicação $\mathbf{X}$ é chamada parametrização ou sistema de coordenadas em p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada vizinhança coordenada.

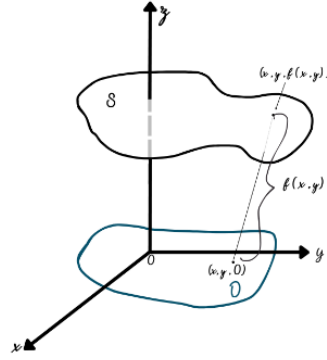
Figura 1: Parametrização



Fonte: Autor (2024)

Exemplo 1. Gráficos de funções diferenciáveis são superfícies regulares. De fato, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida em um aberto U de $\mathbb{R}^2$ então, o seu gráfico, $\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in U \text{ e } z = f(x, y)\}$, é uma superfície regular, pois $\mathbf{X} : U \rightarrow \text{Graf}(f)$, $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ é uma parametrização.

Figura 2: Parametrização de um gráfico



Fonte: Autor (2024)

O plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S , em um ponto $p \in S$, é o espaço vetorial constituído dos vetores velocidades $w = \alpha'(0) \in \mathbb{R}^3$, onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$, uma superfície regular, $w = \alpha'(0) \in T_p S$, um vetor tangente a S em p , e $\mathbf{X}(u, v)$ uma parametrização de S em p , com $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$. É importante observar que existem funções escalares $t \mapsto u(t)$ e $t \mapsto v(t)$ de modo que a curva α pode ser expressa por $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$. Usando a regra da cadeia podemos expressar $\alpha'(0)$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{X}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$, do seguinte modo:

$$\alpha'(0) = u'(0)\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + v'(0)\mathbf{X}_v(u_0, v_0) = u'\mathbf{X}_u + v'\mathbf{X}_v. \quad (2)$$

Acima $\mathbf{X}_u$ e $\mathbf{X}_v$ denotam a derivada parcial de $\mathbf{X}$ em relação à u e v respectivamente.

Para não sobrecarregar o texto, nos cálculos, omitiremos os pontos onde está sendo calculado a derivada das funções. O contexto deixará claro o ponto em que está sendo calculado a derivada, não havendo perigo de confusão.

A equação (2) mostra que para cada $p \in S$, $T_p S$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, de dimensão dois e que $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ é uma base de $T_p S$. Com isso, o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ do $\mathbb{R}^3$ induz em cada plano tangente $T_p S$ um produto interno e isso permite definir a primeira forma fundamental de uma superfície regular.

1.3 A Primeira Forma Fundamental

Definição 2. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $A : V \rightarrow V$, uma aplicação linear auto-adjunta, isto é

$$\langle Av, u \rangle = \langle Au, v \rangle, \forall u, v \in V.$$

A aplicação $B : V \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$B(v) = \langle Av, v \rangle,$$

é chamada forma quadrática associada a aplicação A .

A aplicação $v \mapsto \langle v, v \rangle$ define uma forma quadrática, uma vez que $A = \text{Id} : V \rightarrow V$, a aplicação identidade é auto-adjunta. Assim, temos a seguinte definição

Definição 3. A forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2 \geq 0. \quad (3)$$

é chamada primeira forma fundamental da superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, em $p \in S$.

A primeira forma fundamental é um conceito que depende somente da superfície e do produto interno do Espaço Euclidiano, ou seja, é meramente a expressão de como a superfície S herda o produto interno do Espaço Euclidiano. Apesar de não ser nosso objetivo, é importante ressaltar que a primeira forma fundamental permite calcular sobre S o comprimento de curvas, o ângulo entre vetores e também a área de regiões. Vejamos agora como fica a primeira forma fundamental quando se tem uma parametrização.

A primeira forma fundamental de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$, é expressa, em uma base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ de $T_p S$, associada a uma parametrização $\mathbf{X} : U \rightarrow S$, por

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &\stackrel{\text{Definição 3}}{=} \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle \\ &\stackrel{\text{equação 2}}{=} (u')^2 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + 2u'v' \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + (v')^2 \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \\ &= (u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G, \end{aligned}$$

onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$. Os coeficientes

$$\begin{aligned} E &= E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_u(u_0, v_0) \rangle \\ F &= F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle \\ G &= G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{X}_v(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle \end{aligned}$$

são chamados coeficientes da primeira forma fundamental da superfície S no ponto p , na parametrização $\mathbf{X}$. Com as notações acima podemos definir as funções $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada ponto de U faz corresponder os coeficientes da primeira forma fundamental, isto é,

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle \\ F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle \\ G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle, \end{aligned}$$

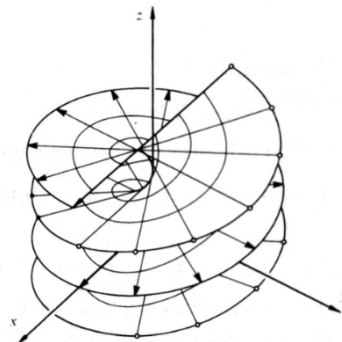
são diferenciáveis, uma vez que as derivadas parciais de $\mathbf{X}$ e do produto interno são funções diferenciáveis.

Esses coeficientes dependem da parametrização, como podemos ver no exemplo abaixo. Mas, antes do exemplo precisamos do seguinte

Lema 1 (Reparametrização). *Sejam S uma superfície regular, $p \in S$ um ponto e $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S tal que $p \in \mathbf{X}(U)$. Seja $h : U' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo. A aplicação $\mathbf{X}' : U' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, definida por $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \circ h$, é uma parametrização de S , com $\mathbf{X}'(U') = \mathbf{X}(U)$. $\mathbf{X}'$ é chamada reparametrização de $\mathbf{X}$.*

Exemplo 2. Considere a hélice circular que é parametrizada por $\phi(u) = (\cos u, \sin u, au)$, em que a é um número real não nulo arbitrário. Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano xy e que intersecta o eixo Oz . A superfície gerada por essas retas é chamada helicóide.

Figura 3: Helicoide



Fonte: Do Carmo (2010)

Vamos calcular os coeficientes E , F e G do helicóide. Uma parametrização do helicóide é dada por:

$$\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

Note que os vetores $\mathbf{X}_u$ e $\mathbf{X}_v$ são dados por $\mathbf{X}_u = (-v \sin u, v \cos u, a)$ e $\mathbf{X}_v = (\cos u, \sin u, 0)$. Com isso, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle \\ &= v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u + a^2 \\ &= v^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle \\ &= v \cos u \sin u - v \cos u \sin u \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \\ &= \cos^2 u + \sin^2 u \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, nessa parametrização os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E(u, v) = v^2 + a^2, \quad F(u, v) = 0 \text{ e } G(u, v) = 1.$$

Agora, considere o difeomorfismo $h : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, definido por $h(t, s) = (t, a \sinh(s))$. Primeiro, iremos mostrar que h é um difeomorfismo, isto é, h é injetiva e h^{-1} é diferenciável. Suponha que

$$\begin{aligned} h(t_1, s_1) &= h(t_2, s_2) \\ (t_1, a \sinh s_1) &= (t_2, a \sinh s_2). \end{aligned}$$

Então, segue-se que $t_1 = t_2$ e, por outro lado, $a \sinh s_1 = a \sinh s_2$. Sabendo que seno hiperbólico é uma função injetora então temos que $s_1 = s_2$. Dessa forma, $(t_1, s_1) = (t_2, s_2)$ e h é injetora. Agora, iremos mostrar que a inversa h^{-1} é diferenciável. A inversa de h é dada por

$$h^{-1}(t, s) = (t, \sinh^{-1}(s/a)) = \left(t, \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a} \right).$$

Esta função é diferenciável, visto que as funções coordenadas são diferenciáveis. Portanto, h é um difeomorfismo.

Pelo Lema 1, $\mathbf{X}'(t, s) = \mathbf{X}(h(t, s)) = (a \sinh s \cos t, a \sinh s \sin t, at)$ é uma parametrização do helicóide. Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental da parametrização $\mathbf{X}'$. Temos que os vetores $\mathbf{X}'_s$ e $\mathbf{X}'_t$ são dados por,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_s &= (a \cosh s \cos t, a \cosh s \sin t, 0) \\ \mathbf{X}'_t &= (-a \sinh s \sin t, a \sinh s \cos t, a). \end{aligned}$$

A partir daí, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E'(t, s) &= \langle \mathbf{X}'_t, \mathbf{X}'_t \rangle \\ &= a^2 \sinh^2 s \sin^2 t + a^2 \sinh^2 s \cos^2 t + a^2 \\ &= a^2 (\sinh^2 s + 1) = a^2 (\cosh^2 s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(t, s) &= \langle \mathbf{X}'_s, \mathbf{X}'_t \rangle \\ &= -a^2 \cosh s \sinh s \cos t \sin t + a^2 \cosh s \sinh s \cos t \sin t \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'(t, s) &= \langle \mathbf{X}'_s, \mathbf{X}'_s \rangle \\ &= a^2 \cosh^2 s \cos^2 t + a^2 \cosh^2 s \sin^2 t \\ &= a^2 \cosh^2 s (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= a^2 (\cosh^2 s). \end{aligned}$$

Logo, nessa parametrização os seguintes coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E'(s, t) = a^2 \cosh^2(s), \quad F'(s, t) = 0 \text{ e } G'(s, t) = a^2 \cosh^2(s).$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental nas parametrizações $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ são distintos, confirmando que a reparametrização altera os coeficientes.

1.4 A Segunda Forma Fundamental

A partir desta subseção nós precisaremos nos restringir as superfícies orientáveis. Uma superfície S é orientável quando existe um campo de vetores globalmente definido $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ que é diferenciável. N é chamada aplicação normal de Gauss. Quando a superfície S é conexa, existem apenas duas aplicações normal de Gauss, a saber, N e $-N$. A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{S}^2$, para cada $p \in S$, pode ser vista como um operador linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, uma vez que $T_p \mathbb{S}^2$ e $T_p S$ são o mesmo espaço vetorial. O operador linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, é auto-adjunto e, a partir dele, definimos o que vem a ser a segunda forma fundamental.

Definição 4. A forma quadrática $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

A segunda forma fundamental é um conceito que só depende da orientação da superfície, isto é, da diferencial do campo normal unitário. Os conceitos que dependem da segunda forma fundamental talvez dependam da orientação escolhida. Vejamos como fica a segunda forma fundamental quando se tem uma parametrização.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$, uma superfície regular, $w = \alpha'(0) \in T_p S$, um vetor tangente a S em p , e $(u, v) \mapsto \mathbf{X}(u, v)$ uma parametrização de S em p , e suponha (u_0, v_0) de modo que $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$. A curva α pode ser expressa por $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ para alguma função $t \mapsto (u(t), v(t))$. Usando a regra da cadeia podemos expressar $dN_p(\alpha'(0))$ por

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &\stackrel{\text{equação 2}}{=} dN_p(u'(0)\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + v'(0)\mathbf{X}_v(u_0, v_0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= u'N_u + v'N_v. \end{aligned}$$

Isso permite expressar a segunda forma fundamental de uma superfície S na base $(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)$, associada a uma parametrização $\mathbf{X}$, por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2. \end{aligned}$$

Os coeficientes

$$\begin{aligned} e &= e(u_0, v_0) = -\langle N_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_u(u_0, v_0) \rangle = \langle N(u_0, v_0), \mathbf{X}_{uu}(u_0, v_0) \rangle \\ f &= f(u_0, v_0) = -\langle N_v(u_0, v_0), \mathbf{X}_u(u_0, v_0) \rangle = \langle N(u_0, v_0), \mathbf{X}_{uv}(u_0, v_0) \rangle \\ g &= g(u_0, v_0) = -\langle N_v(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle = \langle N(u_0, v_0), \mathbf{X}_{vv}(u_0, v_0) \rangle \end{aligned}$$

são os coeficientes da segunda forma fundamental de S , em p , na parametrização $\mathbf{X}$. As funções $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada ponto de U faz corresponder os coeficientes da segunda forma fundamental, isto é,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle = \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle \end{aligned}$$

são diferenciáveis, uma vez que as derivadas parciais de $N, \mathbf{X}$ e do produto interno são funções diferenciáveis.

Tais coeficientes dependem da parametrização como podemos ver no exemplo a seguir. Mas, antes convém notar que

$$\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|^2 + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle^2 = \|\mathbf{X}_u\|^2 \|\mathbf{X}_v\|^2,$$

ou seja,

$$\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|^2 = EG - F^2.$$

Como $\mathbf{X}$ é uma parametrização, os vetores $\mathbf{X}_u$ e $\mathbf{X}_v$ são linearmente independentes e a última igualdade permite concluir que em qualquer ponto $EG - F^2 \neq 0$.

Assim, podemos definir

$$\frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|}$$

o qual é unitário e normal a S , ao longo da parametrização

Exemplo 3. Utilizando as parametrizações $\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$ e $\mathbf{X}'(t, s) = \mathbf{X}(\mathbf{h}(t, s)) = (a \sinh s \cos t, a \sinh s \sin t, at)$ do Helicóide. Vamos calcular os coeficientes da parametrização do catenoide.

Para iniciarmos, iremos encontrar o vetor normal unitário das parametrizações $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$, denotaremos, respectivamente, por $\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}'$. O primeiro deles é

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{\|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\|} \\ &= \frac{(a \sin u, a \cos u, v)}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + v^2}} \\ &= \frac{(a \sin u, a \cos u, v)}{\sqrt{a^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes da segunda forma fundamental da parametrização $\mathbf{X}$, precisamos encontrar os vetores $\mathbf{X}_{uu}$, $\mathbf{X}_{uv} = \mathbf{X}_{vu}$ e $\mathbf{X}_{vv}$.

Que são dados por

$$\mathbf{X}_{uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0)$$

$$\mathbf{X}_{uv} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\mathbf{X}_{vv} = (0, 0, 0)$$

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathbf{X}$ são

$$\begin{aligned} e &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{uu} \rangle = \frac{-2av \cos u \sin u}{\sqrt{a^2 + v^2}} \\ f &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{uv} \rangle = \frac{a(\cos^2 u - \sin^2 u)}{\sqrt{a^2 + v^2}} \\ g &= \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}_{vv} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, o vetor normal unitário da parametrização $\mathbf{X}'$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= \frac{\mathbf{X}'_t \times \mathbf{X}'_s}{|\mathbf{X}'_t \times \mathbf{X}'_s|} \\ &= \frac{1}{\cosh s} (\sin t, \cos t, \sinh s) \end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes da segunda forma fundamental da parametrização $\mathbf{X}'$, precisamos encontrar os vetores $\mathbf{X}'_{tt}$, $\mathbf{X}'_{ts} = \mathbf{X}'_{st}$ e $\mathbf{X}'_{ss}$.

Que são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_{tt} &= (-a \sinh s \cos t, -a \sinh s \sin t, 0) \\ \mathbf{X}'_{ts} &= (-a \cosh s \sin t, a \cosh s \cos t, 0) \\ \mathbf{X}'_{ss} &= (a \sinh s \cos t, a \sinh s \sin t, 0) \end{aligned}$$

Desse modo, os coeficientes da segunda forma fundamental da parametrização $\mathbf{X}'$ são

$$\begin{aligned} e' &= \langle \mathbf{N}', \mathbf{X}'_{tt} \rangle = -\frac{2a \sinh s \cos t \sin t}{\cosh s} \\ f' &= \langle \mathbf{N}', \mathbf{X}'_{ts} \rangle = a(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ g' &= \langle \mathbf{N}', \mathbf{X}'_{ss} \rangle = \frac{2a \sinh s \cos t \sin t}{\cosh s} \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da segunda forma fundamental nas parametrizações $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ são distintos, confirmando que a reparametrização altera os coeficientes como esperado.

Como o operador dN_p é uma transformação linear, podemos determinar sua matriz em relação a base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$. De fato, uma vez que $dN_p(\mathbf{X}_u) = \mathbf{N}_u$ e $dN_p(\mathbf{X}_v) = \mathbf{N}_v$, segue que $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \in T_p S$ e portanto, existem números reais $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2\}$, tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v \\ \mathbf{N}_v &= a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v \end{aligned} \tag{4}$$

e, portanto, dado $(u', v') = u'\mathbf{X}_u + v'\mathbf{X}_v \in T_p S$ temos

$$dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Podemos usar as equações em (4) para expressar os coeficientes da segunda forma fundamental em termos dos coeficientes da matriz (a_{ij}) e dos coeficientes da primeira forma fundamental, assim

$$\begin{aligned} -f &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{X}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -e &= \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{X}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -g &= \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

que podem ser expressos matricialmente como

$$-\begin{pmatrix} \epsilon & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

de onde extraímos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} \epsilon & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Daí, decorrem as expressões abaixo para os coeficientes (a_{ij}) da matriz de dN_p na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - \epsilon G}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{\epsilon F - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Agora, já podemos apresentar dois conceitos fundamentais, do ponto de vista da geometria diferencial, para o estudo das superfícies. Da forma como iremos apresentar inicialmente, é um conceito puramente algébrico (depende apenas de matrizes e transformações lineares), mas tem significados geométricos importantíssimos. Parte deles serão apresentados no decorrer do texto.

Definição 5. *Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é a curvatura Gaussiana K de S em p , isto é, $K(p) = \det dN_p$. O negativo da metade do traço de dN_p é a curvatura média H de S em p , isto é, $H(p) = -\frac{1}{2} \text{traço de } dN_p$.*

Vamos ver como esses objetos se expressam em uma parametrização. Como o determinante de uma aplicação bilinear é o determinante da matriz da referida transformação linear em qualquer base segue que, na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$, a curvatura Gaussiana tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} K(p) &= \det(a_{ij}) \\ &= \frac{\epsilon g - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \det(a_{ij}) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{fF - \epsilon G}{EG - F^2} \cdot \frac{fF - gE}{EG - F^2} - \frac{gF - fG}{EG - F^2} \cdot \frac{\epsilon F - fE}{EG - F^2} \\ &= \frac{(EG - F^2)(\epsilon g - f^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{\epsilon g - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Também, como o traço de uma aplicação linear é o traço da matriz da referida transformação linear em qualquer base segue que, na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$, a curvatura média tem a seguinte expressão:

$$H(p) = \frac{-a_{11} - a_{22}}{2} \stackrel{(6)}{=} \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Assim,

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (8)$$

1.5 Superfícies Mínimas

Um subconjunto de superfícies de bastante interesse e importância para a geometria diferencial são as superfícies mínimas, elas são o objeto de interesse nesse trabalho.

Definição 6. *Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita ser mínima, quando sua curvatura média é igual a zero em todos os pontos.*

A propriedade de uma superfícies ser mínima é independente da parametrização, isto é, independentemente da parametrização, a pesar dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental mudarem, a curvatura média é igual a zero. Assim, para atingir nosso propósito, com mais clareza e objetividade, vamos realizar os cálculos em uma parametrização muito particular. Tal parametrização sempre existe, em qualquer superfície, mínima ou não. A garantia da existência dessas parametrizações é algo que foge ao escopo desse trabalho. Uma demonstração da existência no caso geral pode ser encontrada Chern (1955), já uma demonstração para o caso de superfícies mínimas pode vista em Osserman (1986).

Definição 7. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, uma parametrização e E, F e G os coeficientes da métrica de S na parametrização $\mathbf{X}$. Dizemos que $\mathbf{X}$ é uma parametrização isotérmica quando*

$$E = G \quad e \quad F = 0.$$

Lema 2. *A curvatura média de uma superfície S , em uma parametrização isotérmica $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, é expressa por*

$$H(p) = \frac{e + g}{2E}. \quad (9)$$

Demonstração. Em uma parametrização isotérmica, os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem $E = G$ e $F = 0$. Agora, basta substituir essas informações em (8) para concluir. $\square$

2 Equações de compatibilidade

Neste capítulo introduzimos novos coeficientes, associados a uma parametrização, conhecidos como símbolos de Christoffel, e determinamos algumas relações entre esses coeficientes e os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. Observamos que os símbolos de Christoffel dependem somente dos coeficientes da métrica da superfície e, portanto, eles são invariantes por isometrias. Deduzimos as equações de compatibilidade, conhecidas como as equações de Gauss e Mainardi-Codazzi. Reduzimos essas equações no caso de superfícies mínimas com parametrização isotérmica. Finalmente, apresentamos o teorema de Bonnet, que diz, essencialmente, que essas equações determinam completamente a superfície e que duas superfícies que tem os mesmos coeficientes são congruentes.

2.1 Os símbolos de Christoffel

Seja $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização compatível com a orientação de S e $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}\}$ o triedro associado a $\mathbf{X}$. As derivadas dos campos de vetores $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ e $\mathbf{N}$ são expressos na base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}\}$, por

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + L_1 \mathbf{N}; \\ \mathbf{X}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + L_2 \mathbf{N}; \\ \mathbf{X}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{X}_v + \bar{L}_2 \mathbf{N}; \\ \mathbf{X}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_v + L_3 \mathbf{N}; \\ \mathbf{N}_u &= a_{11} \mathbf{X}_u + a_{21} \mathbf{X}_v; \\ \mathbf{N}_v &= a_{12} \mathbf{X}_u + a_{22} \mathbf{X}_v;\end{aligned}\tag{10}$$

onde Γ_{jk}^i ($i, j, k = 1, 2$) são chamados símbolos de Christoffel de S na parametrização $\mathbf{X}$. Como $\mathbf{X}_{vu} = \mathbf{X}_{uv}$, segue que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Além disso, tomando o produto interno das quatro primeiras equações de (10) com $\mathbf{N}$, obtemos que

$$L_1 = e, \quad L_2 = \bar{L}_2 = f \quad \text{e} \quad L_3 = g.\tag{11}$$

Proposição 1. *Os símbolos de Christoffel de uma superfície S , em uma parametrização $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, dependem somente dos coeficientes da primeira forma fundamental e são dados por*

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}\tag{12}$$

Demonstração. Tomando o produto interno da primeira, segunda e quarta equações de (10) (a terceira equação é igual a segunda), com $\mathbf{X}_u$ e $\mathbf{X}_v$, obtemos

$$A = \begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases} \quad (13)$$

$$B = \begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \quad (14)$$

$$C = \begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases} \quad (15)$$

De fato, para a primeira igualdade do sistema A, note que $E_u = (\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle)_u = 2\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle$. Assim,

$$\frac{1}{2} E_u = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F.$$

Para a segunda equação de A, note que

$$F_u = (\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle)_u = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \frac{1}{2} E_v,$$

concluindo que $\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v$. Assim, usando (10) temos

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G.$$

As equações do sistema B e C seguem de modo completamente análogo.

Para isolar os símbolos de Christoffel, note que os sistemas A, B e C, são sistemas lineares com respeito aos símbolos de Christoffel. Como o determinante principal dos sistemas são todos iguais a $EG - F^2 > 0$, eles tem solução única, pela regra de Cramer. Aplicando a regra de Cramer no sistema A, obtemos.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & G \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \frac{G(\frac{1}{2} E_u) - F(F_u - \frac{1}{2} E_v)}{EG - F^2} = \frac{E_u G - 2F_u F + E_v F}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} E & \frac{1}{2} E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

Obtemos todos os outros símbolos de Christoffel, de modo análogo. □

Corolário 1. Os símbolos de Christoffel de uma superfície S em uma parametrização isotérmica $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v}{2E}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{E_u}{2E}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{E_v}{2E}\end{aligned}\tag{16}$$

Demonstração. Em uma parametrização isotérmica, os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem $E = G$ e $F = 0$. Agora, basta substituir essas informações em (12) para concluir. $\square$

2.2 As equações de compatibilidade

A proposição a seguir apresenta as equações de estrutura de uma superfície.

Proposição 2 (Equações de compatibilidade). *Sejam S uma superfície e $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S . Com as notações já introduzidas, valem as seguintes equações:*

Equação de Gauss:

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2.\tag{17}$$

Equações de Mainardi-Codazzi:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_v - \mathbf{f}_u &= \mathbf{e} \Gamma_{12}^1 + \mathbf{f} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - \mathbf{g} \Gamma_{11}^2, \\ \mathbf{f}_v - \mathbf{g}_u &= \mathbf{e} \Gamma_{22}^1 + \mathbf{f} (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - \mathbf{g} \Gamma_{12}^2.\end{aligned}\tag{18}$$

Demonstração. Como as superfícies consideradas são diferenciáveis, valem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}_{uu})_v - (\mathbf{X}_{uv})_u &= 0 \\ (\mathbf{X}_{vu})_v - (\mathbf{X}_{vv})_u &= 0 \\ \mathbf{N}_{uv} - \mathbf{N}_{vu} &= 0.\end{aligned}\tag{19}$$

Usando as equações em (10), obtemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}_{uu})_v &= (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{X}_v + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_{vv} + (L_1)_v \mathbf{N} + L_1 \mathbf{N}_v \\ &= (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^1 [\Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + L_2 \mathbf{N}] + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{X}_v + \Gamma_{11}^2 [\Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_v + L_3 \mathbf{N}] \\ &\quad + (L_1)_v \mathbf{N} + L_1 [\mathbf{a}_{12} \mathbf{X}_u + \mathbf{a}_{22} \mathbf{X}_v] \\ &= [(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L_1 \mathbf{a}_{12}] \mathbf{X}_u + [(\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L_1 \mathbf{a}_{22}] \mathbf{X}_v \\ &\quad + [(L_1)_v + \Gamma_{11}^1 L_2 + \Gamma_{11}^2 L_3] \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}_{uv})_u &= (\Gamma_{12}^1)_u \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{X}_v + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_{vu} + (L_2)_u \mathbf{N} + L_2 \mathbf{N}_u \\
&= (\Gamma_{12}^1)_u \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^1 [\Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + L_1 \mathbf{N}] + (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{X}_v + \Gamma_{12}^2 [\Gamma_{21}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{X}_v + \bar{L}_2 \mathbf{N}] \\
&\quad + (L_2)_u \mathbf{N} + [\mathbf{a}_{11} \mathbf{X}_u + \mathbf{a}_{21} \mathbf{X}_v] L_2 \\
&= [(\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + L_2 \mathbf{a}_{11}] \mathbf{X}_u + [(\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + L_2 \mathbf{a}_{21}] \mathbf{X}_v \\
&\quad + [\Gamma_{12}^1 L_1 + \Gamma_{12}^2 L_2 + (L_2)_u] \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Assim, a igualdade $(\mathbf{X}_{uu})_v - (\mathbf{X}_{uv})_u = 0$ tem a forma

$$A_1 \mathbf{X}_u + B_1 \mathbf{X}_v + C_1 \mathbf{N} = 0,$$

em que

$$\begin{aligned}
A_1 &= (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L_1 \mathbf{a}_{12} - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - L_2 \mathbf{a}_{11} \\
B_1 &= (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L_1 \mathbf{a}_{22} - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - L_2 \mathbf{a}_{21} \\
C_1 &= (L_1)_v + \Gamma_{11}^1 L_2 + \Gamma_{11}^2 L_3 - \Gamma_{12}^1 L_2 - \Gamma_{12}^2 L_2 - (L_2)_u.
\end{aligned}$$

Como $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}\}$ é um conjunto linearmente independente, obtemos que $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ e $C_1 = 0$. Sendo $B_1 = 0$ temos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 &= L_1 \mathbf{a}_{22} - L_2 \mathbf{a}_{21} \\
&\stackrel{(11) \text{ e } (6)}{=} -E \frac{\mathbf{eg} - \mathbf{f}^2}{EG - F^2} \\
&\stackrel{(7)}{=} -EK,
\end{aligned}$$

Donde encontramos a equação de Gauss.

A primeira equação de Mainard-Codazzi, segue de $C_1 = 0$. De fato,

$$0 = (L_1)_v + \Gamma_{11}^1 L_2 + \Gamma_{11}^2 L_3 - \Gamma_{12}^1 L_2 - \Gamma_{12}^2 L_2 - (L_2)_u \stackrel{(11)}{=} \mathbf{e}_v - \mathbf{f}_u - \mathbf{e} \Gamma_{12}^1 - \mathbf{f} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) + \mathbf{g} \Gamma_{11}^2.$$

Ainda, utilizando as equações em (10), obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}_{vu})_v &= (\Gamma_{21}^1)_v \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^1 \mathbf{X}_{vu} + (\Gamma_{21}^2)_v \mathbf{X}_v + \Gamma_{21}^2 \mathbf{X}_{vv} + (\bar{L}_2)_v \mathbf{N} + \bar{L}_2 \mathbf{N}_v \\
&= (\Gamma_{21}^1)_v \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^1 [\Gamma_{21}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{X}_v + \bar{L}_2 \mathbf{N}] + (\Gamma_{21}^2)_v \mathbf{X}_v + \Gamma_{21}^2 [\Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_v + L_3 \mathbf{N}] \\
&\quad + (\bar{L}_2)_v \mathbf{N} + \bar{L}_2 [\mathbf{a}_{12} \mathbf{X}_u + \mathbf{a}_{22} \mathbf{X}_v] \\
&= [(\Gamma_{21}^1)_v + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + L_2 \mathbf{a}_{12}] \mathbf{X}_u + [(\Gamma_{21}^2)_v + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 + L_2 \mathbf{a}_{22}] \mathbf{X}_v \\
&\quad + [\Gamma_{21}^2 L_3 + \Gamma_{21}^1 L_2 + (L_2)_v] \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}_{vv})_u &= (\Gamma_{22}^1)_u \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_{uu} + (\Gamma_{22}^2)_u \mathbf{X}_v + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_{vu} + (L_3)_u \mathbf{N} + L_3 \mathbf{N}_u \\
&= (\Gamma_{22}^1)_u \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^1 [\Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + L_1 \mathbf{N}] + (\Gamma_{22}^2)_u \mathbf{X}_v + \Gamma_{22}^2 [\Gamma_{21}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{X}_v + \bar{L}_2 \mathbf{N}] \\
&\quad + (L_3)_u \mathbf{N} + L_3 [\mathbf{a}_{11} \mathbf{X}_u + \mathbf{a}_{21} \mathbf{X}_v] \\
&= [(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + L_3 \mathbf{a}_{11}] \mathbf{X}_u + [(\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 + L_3 \mathbf{a}_{21}] \mathbf{X}_v \\
&\quad + [\Gamma_{22}^1 L_1 + \Gamma_{22}^2 L_2 + (L_3)_u] \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Desse modo, $(\mathbf{X}_{vu})_v - (\mathbf{X}_{vv})_u = 0$ tem a forma

$$A_2 \mathbf{X}_u + B_2 \mathbf{X}_v + C_2 \mathbf{N},$$

em que

$$\begin{aligned}
A_2 &= [(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + L_3 \mathbf{a}_{11} - (\Gamma_{21}^1)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - L_2 \mathbf{a}_{12}] \\
B_2 &= [(\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 + L_3 \mathbf{a}_{21} - (\Gamma_{21}^2)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 - L_2 \mathbf{a}_{22}] \\
C_2 &= [\Gamma_{22}^1 L_1 + \Gamma_{22}^2 L_2 + (L_3)_u - \Gamma_{21}^2 L_3 - \Gamma_{21}^1 L_2 - (L_2)_v].
\end{aligned}$$

Como $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{N}\}$ é um conjunto linearmente independente, obtemos que $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ e $C_2 = 0$. A segunda equação de Mainard-Codazzi, segue de $C_2 = 0$. De fato,

$$0 = (L_3)_u + \Gamma_{22}^1 L_1 + \Gamma_{22}^2 L_2 - \Gamma_{21}^2 L_3 - \Gamma_{21}^1 L_2 - (L_2)_v \stackrel{(11)}{=} \mathfrak{f}_v - \mathfrak{g}_u - \mathfrak{g} \Gamma_{21}^2 - \mathfrak{f} (\Gamma_{21}^1 - \Gamma_{22}^2) + \mathfrak{e} \Gamma_{22}^1.$$

□

Corolário 2. *Sejam S uma superfície e $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização isotérmica de S . Valem as seguintes equações:*

Equação de Gauss:

$$\left(\frac{E_u}{2E}\right)_u + \left(\frac{E_v}{2E}\right)_v = \frac{\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{e}\mathfrak{g}}{E}. \quad (20)$$

Equações de Mainardi-Codazzi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_v - \mathfrak{f}_u &= \frac{E_v}{2E} (\mathfrak{e} + \mathfrak{g}), \\
\mathfrak{f}_v - \mathfrak{g}_u &= \frac{-E_u}{2E} (\mathfrak{e} + \mathfrak{g}).
\end{aligned} \quad (21)$$

Demonstração. Em uma parametrização isotérmica, os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem $E = G$ e $F = 0$. Agora, basta usar essas informações e o Corolário 1 em (17) e em (18) para concluir. De fato, para a equação de Gauss temos que, por um lado

$$-EK = \frac{\mathfrak{f}^2 - \mathfrak{e}\mathfrak{g}}{E}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \\
&= \left(\frac{E_u}{2E} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2E} \right)_v - \left(\frac{E_v}{2E} \right)^2 + \left(\frac{E_u}{2E} \right)^2 + \left(\frac{E_v}{2E} \right)^2 - \left(\frac{E_u}{2E} \right)^2 \\
&= \left(\frac{E_u}{2E} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2E} \right)_v
\end{aligned}$$

Dai,

$$\left(\frac{E_u}{2E} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2E} \right)_v = \frac{f^2 - \epsilon g}{E}.$$

Para a primeira equação de Mainard-Codazzi, veja que

$$\epsilon_v - f_u = \epsilon \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2 = \epsilon \left(\frac{E_v}{2E} \right) + f \left(\frac{E_u}{2E} - \frac{E_u}{2E} \right) - g \left(-\frac{E_v}{2E} \right) = \frac{E_v}{2E} (\epsilon + g).$$

Finalmente, para a segunda equação de Mainard-Codazzi,

$$f_v - g_u = \epsilon \Gamma_{22}^1 + f (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2 = \epsilon \left(-\frac{E_u}{2E} \right) + f \left(\frac{E_v}{2E} - \frac{E_v}{2E} \right) - g \left(\frac{E_u}{2E} \right) = \frac{-E_u}{2E} (\epsilon + g).$$

□

Corolário 3. Sejam S uma superfície mínima e $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização isotérmica de S . Então, $g = -\epsilon$

Equação de Gauss:

$$\left(\frac{E_u}{2E} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2E} \right)_v = \frac{f^2 + \epsilon^2}{E}. \quad (22)$$

Equações de Mainardi-Codazzi:

$$\epsilon_v - f_u = 0 \quad e \quad f_v - g_u = 0. \quad (23)$$

Demonstração. Como a superfície é mínima, sua curvatura média é identicamente nula, isto é $H = 0$. Assim, $\epsilon + g = 0$, por (9). Agora, o resultado segue do Corolário 2. □

2.3 Congruência e o Teorema Fundamental (Teorema de Bonnet)

Nessa seção vamos apresentar algumas definições e resultados que são usados no próximo capítulo.

Duas superfícies são congruentes quando é possível transformá-las uma na outra por meio de um movimento rígido no Espaço Euclidiano. Isso significa que as duas superfícies têm a mesma forma e tamanho, mas podem estar posicionadas ou orientadas de maneira diferente. Formalmente,

Definição 8. Um movimento rígido no Espaço Euclidiano é uma função $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma $T\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$, onde A é uma matriz ortogonal e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor.

Uma matriz A é ortogonal quando ela é inversível e $A^{-1} = A^T$, onde A^T é a matriz transposta de A .

Definição 9. Duas superfícies $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ são ditas congruentes quando existe um movimento rígido $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(S_1) = S_2$.

Em Lima (1998) e Axler (2014) encontram-se as ferramentas necessárias para demonstrar que translações, rotações e reflexões são os únicos movimentos rígidos do Espaço Euclidiano, a menos de composições deles.

Proposição 3 (Teorema de Bonnet). *Sejam E, F, G, e, f, g funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0, G > 0$. Suponha que as funções dadas satisfazem formalmente as equações de Gauss (17) e Mainardi-Codazzi (18) e que $EG - F^2 > 0$, com K definida como em (7). Então existe um difeomorfismo $x: U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que a superfície regular $x(U) \subset \mathbb{R}^3$ tem E, F, G e e, f, g como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além, disto se U é conexo e se*

$$\tilde{x} = U \rightarrow \tilde{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$$

é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe um movimento rígido, isto é, uma translação T e uma transformação ortogonal própria ρ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{x} = T \circ \rho \circ x$.

Uma demonstração do Teorema de Bonnet pode ser encontrada em do Carmo (2005), no apêndice ao Capítulo 4. A segunda parte do teorema de Bonnet implica no seguinte proposição.

Proposição 4. *Sejam $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies. Suponha que existem duas parametrizações $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ $X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$ de sorte que os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de S_1 e S_2 coincidem, em todos os pontos, então S_1 e S_2 são localmente congruentes, isto é, dado $p \in U$ existe $U' \subset U$, com $p \in U'$, e um movimento rígido $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(X_1(U')) = X_2(U')$.*

3 A Família Associada

Neste capítulo, finalmente vamos enunciar e provar o resultado principal, ver Teorema 1 [A família associada]. A ideia para construir a família é a seguinte: começamos com uma superfície mínima $S \subset \mathbb{R}^3$ e consideramos a matriz dos coeficientes da segunda forma fundamental da superfície em uma parametrização isotérmica, dada por

$$\begin{pmatrix} \epsilon & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Em seguida, multiplicamos essa matriz pela matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Finalmente, usamos o Teorema de Bonnet e os resultados dos capítulos anteriores para mostrar que os coeficientes da matriz resultante, juntamente com os coeficientes da primeira forma fundamental de S , determina, para cada θ , uma superfície mínima e que essa família satisfaz algumas propriedades específicas.

3.1 A Família Associada

Sejam S uma superfície mínima e $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização isotérmica, na qual E, G e F são os coeficientes da primeira forma fundamental e ϵ, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental. Considere as funções $e^\theta, f^\theta, g^\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$\begin{pmatrix} e^\theta & f^\theta \\ f^\theta & g^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} e^\theta &= \epsilon \cos \theta - f \sin \theta \\ f^\theta &= \epsilon \sin \theta + f \cos \theta = f \cos \theta - g \sin \theta \\ g^\theta &= f \sin \theta + g \cos \theta \end{aligned} \tag{24}$$

A função f^θ está bem definida, pois $g = -\epsilon$, pelo Corolário 3.

Proposição 5. *As funções E, F, G e $e^\theta, f^\theta, g^\theta$ satisfazem formalmente as equações de Gauss (17) e Mainardi-Codazzi (18).*

Demonstração. Por hipótese, como $\mathbf{X}$ é uma parametrização isotérmica e S é mínima, E, F, G e ϵ, f, g satisfazem as equações de Gauss (22) e Mainardi-Codazzi (23).

Afirmção 1: As funções E, F, G e $e^\theta, f^\theta, g^\theta$ satisfazem a equação de Gauss (17) com

$$K^\theta = \frac{e^\theta g^\theta - (f^\theta)^2}{EG - F^2}. \tag{25}$$

De fato, como $g = -\epsilon$, pelo Corolário 3, obtemos que

$$\begin{aligned} e^\theta g^\theta - (f^\theta)^2 &\stackrel{(24)}{=} (\epsilon \cos \theta - f \sin \theta)(f \sin \theta + g \cos \theta) - (\epsilon \sin \theta + f \cos \theta)^2 \\ &= (\epsilon g - f^2) \cos^2 \theta + (-\epsilon^2 - f^2) \sin^2 \theta + (-\epsilon f - fg) \cos \theta \sin \theta \\ &\stackrel{g=-\epsilon}{=} \epsilon g - f^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$-EK^\theta = -EK \stackrel{(17)}{=} (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2$$

e a afirmação segue.

Afirmção 2: As funções E, F, G e $e^\theta, f^\theta, g^\theta$ satisfazem as equações de Mainardi-Codazzi (18).

De fato, para a primeira equação de Mainardi-Codazzi note que

$$\begin{aligned} (e^\theta)_v - (f^\theta)_u &\stackrel{(24)}{=} (\epsilon \cos \theta - f \sin \theta)_v - (f \cos \theta - g \sin \theta)_u \\ &= \epsilon_v \cos \theta - f_v \sin \theta - f_u \cos \theta + g_u \sin \theta \\ &= \cos \theta (\epsilon_v - f_u) - \sin \theta (f_v - g_u) \\ &\stackrel{(23)}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^\theta \Gamma_{12}^1 + f^\theta (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g^\theta \Gamma_{11}^2 &\stackrel{(16)}{=} \frac{E_v}{2E} (e^\theta + g^\theta) \\ &\stackrel{(24)}{=} \frac{E_v}{2E} (\epsilon + g) \cos \theta \\ &\stackrel{g=-\epsilon}{=} 0. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $(e^\theta)_v - (f^\theta)_u = e^\theta \Gamma_{12}^1 + f^\theta (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g^\theta \Gamma_{11}^2 = 0$. Portanto, a equação 1 de Mainardi-Codazzi é satisfeita.

A segunda equação é verificada de modo completamente análogo, pois

$$\begin{aligned} (f^\theta)_v - (g^\theta)_u &\stackrel{(24)}{=} (\epsilon \sin \theta + f \cos \theta)_v - (f \sin \theta + g \cos \theta)_u \\ &= \cos \theta (f_v - g_u) + \sin \theta (\epsilon_v - f_u) \\ &\stackrel{(23)}{=} 0 \end{aligned}$$

$$e^\theta \Gamma_{22}^1 + f^\theta (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g^\theta \Gamma_{12}^2 \stackrel{(16)}{=} -\frac{E_u}{2E} (e^\theta + g^\theta) = 0.$$

Isso conclui a prova da proposição. □

O exemplo a seguir mostra que a família associada a um plano é degenerada.

Exemplo 4. Seja Π o plano $xy \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de Π dada por $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, 0)$. Vamos calcular os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de $\mathbf{X}$.

Para isso, note que $\mathbf{X}_u = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{X}_v = (0, 1, 0)$. Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental de $\mathbf{X}$ são

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = 1 \\ F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0 \\ G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = 1. \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar o vetor normal a $\mathbf{X}$ para determinar os coeficientes da segunda forma fundamental.

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = (0, 0, 1).$$

Com isso, temos que os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathbf{X}$ são dados por:

$$\mathfrak{e} = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{X}_u \rangle = 0$$

$$\mathfrak{f} = -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{X}_u \rangle = 0$$

$$\mathfrak{g} = -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{X}_v \rangle = 0.$$

Assim, pela equação (24) tem-se que $(e^\theta, f^\theta, g^\theta) = (0, 0, 0)$ e pela segunda parte do teorema de Bonnet, a superfície gerada, para cada θ , é um pedaço do plano.

Teorema 1 (A família associada). *Sejam S uma superfície mínima, não localmente plana, e $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização isotérmica de S , com $\mathcal{U}$ simplesmente conexo. Para cada $\theta \in [0, 2\pi)$ existe um difeomorfismo $\mathbf{X}_\theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{X}_\theta(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$, com as seguintes propriedades:*

- a) $\mathbf{X}_\theta(\mathcal{U})$ é uma superfície mínima, para cada $\theta \in [0, 2\pi)$;
- b) $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0$;
- c) $\mathbf{X}_\theta$ e $\mathbf{X}_\alpha$, são congruentes se, e somente se, $\theta = \alpha$;

Demonstração. Dado $\theta \in [0, 2\pi)$ segue da Proposição 5 que as funções definidas em (24) satisfazem formalmente as equações de Gauss e Mainard-Codazzi. Assim, podemos concluir, usando o teorema de Bonnet, Proposição 3, que existe uma superfície $\mathbf{X}_\theta : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que E, F, G e $e^\theta, f^\theta, g^\theta$ são os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de $\mathbf{X}_\theta$.

- a) Pelo Lema 2 a curvatura média da superfície $\mathbf{X}_\theta$ é

$$H_\theta = \frac{e^\theta + g^\theta}{2E} \stackrel{(24)}{=} \frac{(\mathfrak{e} + \mathfrak{g}) \cos \theta}{2E} = H \cos \theta = 0.$$

- b) Seja $\theta = 0$ teremos que $e^\theta, f^\theta, g^\theta$ serão dados por:

$$e^0 = \mathfrak{e} \cos(0) - \mathfrak{f} \sin(0) = \mathfrak{e}$$

$$f^0 = \mathfrak{e} \sin(0) + \mathfrak{f} \cos(0) = \mathfrak{f} \cos(0) - \mathfrak{g} \sin(0) = \mathfrak{f}$$

$$g^0 = \mathfrak{f} \sin(0) + \mathfrak{g} \cos(0) = \mathfrak{g}$$

Com isso, temos que os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de $\mathbf{X}_0$ são iguais aos de $\mathbf{X}$. Portanto, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}_0$ são congruentes, pela Proposição 4.

- c) Sendo $\mathbf{X}_\theta$ e $\mathbf{X}_\alpha$ congruentes, segue da Proposição 4 que os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são iguais. Em particular, segue de (24) que valem as igualdades

$$\mathfrak{e} \cos \theta - \mathfrak{f} \sin \theta = \mathfrak{e} \cos \alpha - \mathfrak{f} \sin \alpha \quad (26)$$

$$\mathfrak{e} \sin \theta + \mathfrak{f} \cos \theta = \mathfrak{e} \sin \alpha + \mathfrak{f} \cos \alpha \quad (27)$$

$$f \sin \theta + g \cos \theta = f \sin \alpha + g \cos \alpha. \quad (28)$$

Usando as equações (26), (27) e considerando $L = \cos \theta - \cos \alpha$ e $Z = \sin \theta - \sin \alpha$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \epsilon L = fZ \\ fL = -\epsilon Z. \end{cases} \quad (29)$$

Logo,

$$\begin{cases} \epsilon f L = f^2 Z \\ \epsilon f L = -\epsilon^2 Z. \end{cases} \quad (30)$$

Daí,

$$(\epsilon^2 + f^2)Z = 0.$$

Como $(\epsilon, f) \neq (0, 0)$ segue-se que $(\epsilon^2 + f^2) \neq 0$. Com isso, temos que $Z = 0$. Ou seja,

$$\sin \theta - \sin \alpha = 0$$

Portanto, $\sin \theta = \sin \alpha$.

Por outro lado, sendo $Z = 0$, temos que $(\epsilon L) = 0$. Como $\epsilon \neq 0$, então,

$$\cos \theta - \cos \alpha = 0$$

Logo, $\cos \theta = \cos \alpha$.

Assim, concluímos que as equações (26), (27) e (28) implicam em $\sin \theta = \sin \alpha$ e $\cos \theta = \cos \alpha$, o que implica em $\theta = \alpha$.

Reciprocamente, se $\theta = \alpha$ então $\sin \theta = \sin \alpha$ e $\cos \theta = \cos \alpha$. Daí, segue das equações em (24) que $\mathbf{X}_\theta$ e $\mathbf{X}_\alpha$ tem os mesmos coeficientes da primeira e segunda forma fundamental. Aplicando a Proposição 4 concluímos que $\mathbf{X}_\theta$ e $\mathbf{X}_\alpha$ são congruentes. Isso finaliza a demonstração do teorema.

□

3.2 Catenóide e Helicóide

Agora, vamos verificar que a família associada ao catenóide contém o helicóide como um caso particular. Sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas por

$$\mathbf{X}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \sinh v \sin u, av)$$

e

$$\mathbf{Y}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au),$$

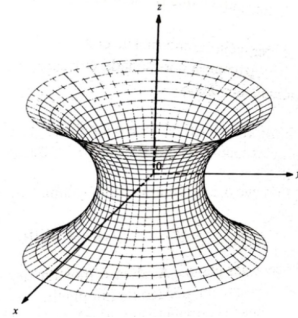
onde $a \in \mathbb{R}^*$. A superfície $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$ é o Catenóide e $\mathbf{Y}(\mathbb{R}^2)$ o Helicóide. Os coeficientes dessa parametrização do helicóide já foram calculados nos Exemplos (2) e (3), são eles

$$E_Y = G_Y = a^2 \cosh^2 v \quad e \quad F_Y = 0$$

$$\begin{aligned}
e_y &= \frac{2a \sinh v \cos u \sin u}{\cosh v} \\
f_y &= a \sin^2 u - a \cos^2 u \\
g_y &= \frac{-2a \sinh v \cos u \sin u}{\cosh v}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Iremos encontrar os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de $\mathbf{X}$ e comparar com as de $\mathbf{Y}$.

Figura 4: Catenoide



Fonte: Carmo (2010)

Note que $\mathbf{X}_u = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0)$ e $\mathbf{X}_v = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a)$, donde

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} \\
&= \frac{a^2 \cosh v (\cos u, -\sin u, \sinh v)}{a^2 \cosh^2 v} \\
&= \frac{1}{\cosh v} (\cos u, -\sin u, \sinh v).
\end{aligned}$$

As derivadas parciais de segunda ordem de $\mathbf{X}$ são dadas por

$$\mathbf{X}_{uu} = (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0),$$

$$\mathbf{X}_{uv} = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, 0)$$

e

$$\mathbf{X}_{vv} = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0).$$

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathbf{X}$ são dados por

$$e_x = \langle N_x, \mathbf{X}_{uu} \rangle = \frac{-a \cosh v \cos^2 u + a \cosh v \sin^2 u}{\cosh v} = -a \cos^2 u + a \sin^2 u$$

$$f_x = \langle N_x, \mathbf{X}_{uv} \rangle = \frac{-a \sinh v \cos u \sin u - a \sinh v \cos u \sin u}{\cosh v} = \frac{-2a \sinh v \cos u \sin u}{\cosh v}$$

$$g_x = \langle N_x, \mathbf{X}_{vv} \rangle = \frac{a \cosh v \cos^2 u - a \cosh v \sin^2 u}{\cosh v} = a \cos^2 u - a \sin^2 u.$$

Portanto, os coeficientes da segunda forma fundamental de $\mathbf{X}$ são dados por

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -a \cos^2 u + a \sin^2 u \\ f_x &= -\frac{2a \sinh v \cos u \sin u}{\cosh v} \\ g_x &= a \cos^2 u - a \sin^2 u. \end{aligned} \tag{32}$$

Agora, iremos verificar que a equação 24 é satisfeita para algum θ , mais especificamente para $\theta = \frac{\pi}{2}$. Segue, por comparação das equações em (31) e (32), que

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= -f_x = \epsilon_x \cos \frac{\pi}{2} - f_x \sin \frac{\pi}{2} \\ f_y &= \epsilon_x = \epsilon_x \sin \frac{\pi}{2} + f_x \cos \frac{\pi}{2} = f_x \cos \frac{\pi}{2} - g_x \sin \frac{\pi}{2} \\ g_y &= f_x = f_x \sin \frac{\pi}{2} + g_x \cos \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De uma outra forma, temos que quando $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_y & f_y \\ f_y & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & f_x \\ f_x & g_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

Com isso, mostramos que a família associada ao Catenóide contém o Helicóide que é obtido quando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Não é conhecido na literatura outras famílias associadas. Não se sabe, em geral, quando duas superfícies mínimas conhecidas estão na mesma família. Em Lawson (1970), Osserman (1986) e em Daniel (2021) há uma discussão sobre esse problema incluindo uma demonstração da família associada usando representação de Weierstrass. A desvantagem dessa abordagem é que o leitor precisa de muito mais pré-requisitos para entender. Uma vantagem é que a formulação e solução do problema é mais natural. Além disso, usando representação de Weierstrass, é possível apresentar uma parametrização para cada elemento da família associada: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima e $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização isotérmica de S . Seja (g, ω) os dados de Weierstrass de S , isto é, g uma função meromorfa em S e ω uma 1-forma holomorfa em S de modo que a métrica de S se escreve assim

$$ds^2 = \frac{1}{4}(1 + |g|^2)|\omega|^2.$$

Então, a menos de congruência, os dados de Weierstrass da família associada é dado por $(g, e^{-i\theta}\omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \operatorname{Re} \int \left(\frac{1}{2}(1 - g^2), \frac{i}{2}(1 + g^2), g \right) \omega \\ \mathbf{X}_\theta &= \operatorname{Re} \int \left(\frac{1}{2}(1 - g^2), \frac{i}{2}(1 + g^2), g \right) e^{-i\theta} \omega, \end{aligned}$$

onde “Re” significa a parte real.

Referências

- [1] AXLER, Sheldon. *Álgebra linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- [2] BOYER, C. B. A History of Mathematics. Revised by Uta C. Merzbach. John Wiley e Sons, 1991.
- [3] CHERN, S. S. *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 6, n. 5, p. 771–782, 1955. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032346>.
- [4] CODAZZI, D. Sulla condizione dei superficie di curvatura costante. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1868-1869.
- [5] DANIEL, B. *A Survey on Minimal Isometric Immersions into $\mathbb{R}^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . In: Hoffmann, T., Kilian, M., Leschke, K., Martin, F. (eds), *Minimal Surfaces: Integrable Systems and Visualisation*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 349. Springer, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68541-6_4.
- [6] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [7] DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. SBM, 2005.
- [8] GAUSS, C. F. *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*. Göttingen: Typis Dietrichianis, 1828.
- [9] LAGRANGE, J. L. *Essai d’une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*. Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 6, 335-382, 1762.
- [10] LIMA, E. L. *Geometria Euclidiana plana e espacial*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.
- [1970] Lawson, H. B. Jr. *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. of Math. (2) 92 1970 335-374. MR0270280
- [12] MAINARDI, G. *Sull’integrazione delle equazioni differenziali generali dell’equilibrio dei corpi solidi de’ Corpi Elasticiti*. Atti dell’Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1856.
- [13] OSSERMAN, R. *A survey of minimal surfaces*. 2. ed. New York: Dover Publications, 1986.
- [14] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Blucher, 2008.