

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ERIC ALBERTO DE SOUZA SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA E TEORIA DE CONTROLE FINITO-DIMENSIONAL

MACEIÓ-AL
Março de 2025

ERIC ALBERTO DE SOUZA SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA E TEORIA DE CONTROLE FINITO-DIMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Matemática-UFAL como parte
dos requisitos necessários para conclusão do
curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Dr. ISNALDO ISAAC BARBOSA

Maceió-AL
Março de 2025

Catlogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S237m

Santos, Eric Alberto de Souza.

Modelagem matemática e teoria de controle finito-dmensional / Eric
Alberto de Souza Santos. - 2025.

45 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura)
– Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 32.

Apêndices: f. 33-45.

1. Modelagem matemática. 2. Controle, Teoria do. 3. Controlabilidade
(Matemática). I. Título.

CDU: 517.977.1

Folha de Aprovação

ERIC ALBERTO DE SOUZA SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA E TEORIA DE CONTROLE FINITO-DMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Matemática da UFAL como
parte dos requisitos necessários à obtenção
do título Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Orientador: Dr. Isnaldo Isaac Barbosa
(Universidade Federal de Alagoas)

Examinadora : Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima
(Universidade Federal de Alagoas)

Examinador: Dr. Márcio Cavalcante de Melo
(Universidade Federal de Alagoas)

...dedico este trabalho à minha esposa e ao meu filho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido tempo bom para percorrer essa trilha na licenciatura e poder desenvolver, nesse TCC, a parte final do curso; aliás, vale destacar que "...tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todas as coisas debaixo do sol." (Sabedoria de Salomão).

Agradeço à minha esposa por todo apoio, e cuidado; agradeço ao professor Isnaldo pela prestatividade quanto às minhas necessidades estudantis. Agradeço a cada professor que me inspirou a ser um profissional mais qualificado - em especial à professora Elisa Sena que a perdemos pelo câncer - e por fim, agradeço aos amigos que fiz na jornada de estudante e que ajudaram a suportar as demandas e o tempo na UFAL.

「 Pouco conhecimento faz com que as
| pessoas se sintam orgulhosas. Muito |
└ conhecimento, que se sintam humildes.” ┘

- Leonardo da Vinci

RESUMO

Este trabalho traz uma abordagem acerca da modelagem matemática que, enquanto ciência aplicada, explora uma riqueza de usos quando a matemática passa a ser vista diretamente relacionada a outros campos da ciência e da realidade, ao passo que os problemas ou curiosidades que nos envolvem são expressos numa linguagem ou modelo matemático a fim de fornecer soluções práticas e coerentes.

No decorrer do texto veremos que uma aplicação bastante desenvolvida da modelagem matemática é em sistemas de controle e que vem perpassando o tempo, há cerca de dois séculos, oferecendo modelos de problemas de modelos físicos e otimização conforme a necessidade da época, assim abrimos o capítulo da história do controle. Por fim, faremos um estudo acerca de um critério integral para determinar se um sistema de controle finito-dimensional é controlável ou não.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, História do Controle; Controlabilidade.

ABSTRACT

This work brings an approach to mathematical modeling that, in the context of as applied science, it explores a wealth of uses when mathematics comes to be seen as directly related to other fields of science and reality, while that the problems or curiosities that surround us are expressed in a language or mathematical model in order to provide practical and coherent solutions.

Throughout the text we will see that a very developed application of mathematical modeling is in control systems and that it has been going through time, there is about two centuries, offering models of physical model problems and optimization according to the need of the time, thus we open the chapter of the history of the Control. Finally, we will make a study about an integral criterion to determine whether A finite-dimensional control system is either controllable or uncontrollable.

Keywords: Mathematical Modeling, Control history, Controllability.

Sumário

1	Modelagem de Problemas	12
1.1	Equações de Diferenças e Variações	13
1.1.1	Equação de 1ª Ordem	14
1.1.2	O Modelo de Orçamento Familiar	15
1.2	Equações Diferenciais de 1ª Ordem	16
1.2.1	O Modelo da Lei de Resfriamento de Newton	17
2	História do Controle: Evolução dos Métodos de Controlabilidade	19
2.1	Os Primeiros Controles: até 1900	19
2.2	O Período Pré-Clássico: De 1900 a 1940	21
2.3	O Período Clássico: De 1935 a 1960	22
2.4	O Controle Moderno: após 1955	23
3	Sistema de Controle Finito-Dimensional	25
3.1	Um Critério Integral para Controlabilidade	27
A	Apêndice	33
A.1	Espaços de Lineares Normados	33
B	Teoria da Medida	39
B.0.1	Espaços de Lebesgue L^p	42

Introdução

Tecer admiração pela matemática, na ótica do professor e do pesquisador, talvez seja a trajeória mais eficaz para uma boa prática de ensino-aprendizagem e também de divulgação ou apresentação. Esse despertar de interesse se desenvolve com mais facilidade quando o indivíduo, enquanto ser pensante, é movido por interesses e estímulos externos à matemática, interesses vindos do "mundo real" a nossa volta. Pensando nisso, é válida a conclusão: a matemática aplicada é o caminho.

Ao contrário do que muitos pensam ser a matemática aplicada uma matemática menos importante – em que os problemas são tratados com modelos simplistas ou métodos computacionais e numéricos que desvalorizam esta ciência – o fato é que, para o desenvolvimento de um novo modelo educacional que esteja mais preparado para lidar com as realidades dos indivíduos e da sociedade, precisamos abraçar os instrumentos e usos da matemáticos interrelacionados a outras áreas do conhecimento humano e explorar a riqueza da aplicação matemática. Também, é nessa perspectiva de estabelecer relações entre os campos de concentração da matemática e os outros, evitando reproduzir meios de pensamentos inférteis e segmentados, que se encontram o futuro da formação de professores e pesquisadores .

De modo mais global, enxergando a matemática como aliada aos contextos da vida cotidiana, a modelagem – que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem – tem se mostrado muito eficaz e consiste primeiro na habilidade humana de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e, em seguida, resolvê-los e interpretar as suas soluções na linguagem compreensível. As vantagens dos estudos da modelagem no âmbito da pesquisa podem ser verificadas nos avanços obtidos em vários campos como a Física, a Química, a Biologia, a Astrofísica e entre outros. A modelagem pressupõe multidisciplinariedade.

Considerando o fato de que o conhecimento científico é, em essência, tanto empírico quanto teórico, a busca pela veracidade dos resultados obtidos precisa ter sua base empírica e, em seu norte, a procura de verdades expressas pela formulação de problemas e ensaios de hipóteses a serem testadas e avaliadas. É notável a quantidade de situações em que a modelagem se conecta aos campos científicos com metodologias e objetivos que seguem em paralelo. Pesquisadores fluentes na linguagem matemática trazem contribuições importantes para suas áreas de pesquisa e transitam com mais facilidade entre os diversos campos do conhecimento científico, como é o exemplo da controlabilidade em sistemas de controle.

De modo simples, um sistema de controle é um sistema dinâmico, no qual se pode atuar usando controles. Existem muitos problemas que aparecem quando se estuda um sistema de controle. Um dos problemas mais comuns é o problema de controlabilidade que, em uma linguagem informal, pode ser tomado como modelo a seguinte situação:

Dado dois estados, um inicial e um outro final, será que é possível mover o sistema de controle do estado inicial para o estado final?

Para contextualizar esse tipo de modelo matemático, pode-se pensar nos seguintes problemas:

- Um trem de massa m se encontra no ponto R de seu percurso retilíneo de P a Q deslocando-se com velocidade v . A sua força motriz máxima é F e sua força máxima de freios é f . Se desejarmos colocar o trem em repouso no ponto Q num tempo mínimo possível, qual é a estratégia a escolher?
- Pretende-se aquecer ou resfriar um quarto com um ar-condicionado a partir de uma temperatura inicial T_0 até uma temperatura adequada T_1 ; ou
- No enchimento e/ou esvaziamento de um reservatório de água até que atinja um nível adequado.

Nesta trabalho, estudaremos a respeito de Modelagem matemática, a história da controlabilidade de sistemas de controle, e o controle finito-dimensional.

Objetivos do trabalho

- No Capítulo 1, fazemos um estudo sobre modelagem;
- No Capítulo 2, faremos um apanhado histórico do controle;
- No Capítulo 3 vamos obter os principais resultados deste trabalho, a saber, as condições de controlabilidade para sistemas de controle finito-dimensionais.

Capítulo 1

Modelagem de Problemas

A modelagem matemática é, essencialmente, a ponte entre a abstração lógico-matemática da mente e o universo palpável que nos engloba. Todas as motivações do pensar racional e matemático no campo das ideias não passam de um processo natural de compreensão e de explicação dos fatos e fenômenos que são observados recorrentemente na realidade.

O desenvolvimento das ideias matemáticas com uma organização e estruturação intelectual se dá a partir de elaborações sobre representações do mundo real. A linguagem como forma de expressão, desde a mais simples até uma mais elaborada e formal, é a forma mais eficaz de compartilhamento social das ideias, e permite que sejam estruturadas como teorias.

A ciência com o conhecimento acumulado, depende de codificações e símbolos associados às representações orais ou visuais de comunicações (ação comum para entender, explicar e manejar a realidade), dando origem à linguagem e à representação gráfica.

A partir das teorias pode-se trabalhar diversos fatos e fenômenos mais complexos propostos pela realidade, elaborando modelos de explicação científica do mundo real. Mais ou menos precisos, esses modelos, devidamente calibrados e convalidados, permitem entender e explicar, com diferentes graus de precisão e detalhamento, esses fatos e fenômenos. A modelagem é, portanto, a matemática por excelência.

O objetivo fundamental do “uso prático” de matemática é de fato o de poder extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la nos moldes de um contexto abstrato em que os pensamentos possam ser absorvidos e a explicação, ao menos em

síntese, possa ser repassada com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância.

A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas.

Os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de matemática utilizada:

- (i) Linear ou Não-Linear;
- (ii) Estatístico;
- (iii) Educacional;
- (iv) Estocástico ou Determinístico.

Os próximos tópicos visam explorar um pouco do leque de ferramentas teóricas disponíveis para se modelar problemas e algumas aplicações.

1.1 Equações de Diferenças e Variações

Há situações em que as equações de diferenças (considerando as equações com variações discretas) são mais adequadas para tecer uma modelagem matemática de um problema; por exemplo, quando o crescimento populacional, entre gerações sucessivas, se dá em fases discretas e não ocorre uma sobreposição de gerações da espécie analisada.

No entanto, nem sempre podemos explicitar analiticamente a solução geral de uma equação de diferenças quando a equação não é linear.

As equações lineares de ordem $(n - m)$ são da forma:

$$y_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_{n-2} y_{n-2} + \dots + \alpha_m y_m,$$

com α_i 's constantes, $m < n$, e $(n - m)$ condições iniciais.

1.1.1 Equação de 1ª Ordem

Seja $\alpha \neq 0$. Consideremos o seguinte sistema linear em que $(n - m) = 1$.

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1}; \\ y_0 \text{ sendo fornecido.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Fazendo recorrência, temos

$$y_1 = \alpha y_0$$

$$y_2 = \alpha y_1 = \alpha^2 y_0$$

$$\vdots$$

$$y_n = \alpha y_{n-1} = \cdots = \alpha^n y_0.$$

Logo,

$$y_n = \alpha^n y_0$$

é solução de 1.1 e satisfaz a condição inicial dada.

Uma forma alternativa para se buscar resolver a equação 1.1 é supondo que a expressão da forma $y_n = k\lambda^n$ seja uma solução geral não trivial (isto é, não seja uma solução identicamente nula), já que a solução trivial com $y_0 = 0$ resolve o sistema.

De fato, pois, se fosse solução trivial, deveríamos ter $\lambda = 0$, já que $k = k\lambda^0 = y_0$. Para verificar, substituímos essa solução no sistema 1.1, e obtemos:

$$k\lambda^n = \alpha k\lambda^{n-1} \iff k\lambda^n - \alpha k\lambda^{n-1} = 0 \iff k\lambda\lambda^{n-1} - \alpha k\lambda^{n-1} = 0 \iff$$

$$\lambda k\lambda^{n-1} - \alpha k\lambda^{n-1} = 0 \iff [\lambda - \alpha]k\lambda^{n-1} = 0 \implies \lambda = \alpha.$$

Portanto,

$$y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } y_0 = 0; \quad (\text{solução trivial}) \\ \alpha^n y_0, & \text{se } y_0 \neq 0; \end{cases} \quad (1.2)$$

Agora, fornecendo y_0 , consideremos a equação linear (caso afim)

$$y_{n+1} = ay_n + b$$

Por recorrência, fica

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a^2y_0 + ab + b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a^2y_1 + ab + b = a^3y_0 + a^2b + ab + b$$

$\vdots$

$$y_n = a^ny_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)b,$$

e no termo entre parênteses usamos a soma dos termos de uma P.G. de razão a , assim

$$y_n = a^ny_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a}b. \quad (1.3)$$

Em particular, se $a = 1$, a expressão acima fica

$$y_n = y_0 + bn$$

1.1.2 O Modelo de Orçamento Familiar

Consideremos uma família cuja renda mensal r_n é proveniente de um salário fixo r_0 , mais o rendimento da caderneta de poupança p_n do mês anterior.

Suponhamos também que o consumo mensal c_n desta família seja proporcional à sua renda mensal.

O modelo que estabelece relações entre as variáveis renda, poupança e consumo dependentes do tempo, tomados em meses, é dado por:

(a) Poupança. $p_{n+1} = (\text{poupança do mês anterior } n) + (\text{sobra do mês } n + 1) \implies$

$$p_{n+1} = p_n + (r_{n+1} - c_{n+1}).$$

(b) Renda: $r_{n+1} = (\text{salário}) + (\text{rendimento da poupança do mês anterior}) \implies$

$$r_{n+1} = r_0 + \alpha p_n.$$

(c) Consumo.

$$c_{n+1} = \beta r_{n+1}, \quad (0 < \beta < 1)$$

Usando as três equações, podemos escrever

$$p_{n+1} = (1 - \beta)r_0 + [(1 - \beta)\alpha + 1]p_n.$$

Considerando que p_0 é dado, e juntando os itens (a), (b), (c) podemos usar a solução 1.3 para dar as soluções da equação acima do tipo

$$p_n = p_0 \alpha^n + b \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = [(1 - \beta)\alpha + 1]^n p_0 + (1 - \beta)r_0 \frac{1 - [(1 - \beta)\alpha + 1]^n}{1 - [(1 - \beta)\alpha + 1]},$$

em que

$$r_n = r_0 + \alpha p_0 \alpha^{n-1} + \alpha b \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha},$$

e

$$c_n = \beta r_0 + \alpha \beta p_0 \alpha^{n-1} + \alpha \beta \frac{1 - \alpha^{n-1}}{1 - \alpha}.$$

1.2 Equações Diferenciais de 1ª Ordem

Modelos Matemáticos, em termos de equações diferenciais são adequados quando as situações modeladas envolvem variáveis contínuas evoluindo em relação a outras variáveis contínuas. As relações entre as variáveis dependentes e independentes são obtidas através de hipóteses formuladas a respeito das taxas de variações instantâneas.

Quando temos apenas uma variável independente, o modelo matemático é dado em termos de equações diferenciais ordinárias (EDO).

Se o modelo matemático é uma equação diferencial, nem sempre podemos obter informações ou projeções da realidade modelada através da solução explícita desta equação. Em geral, a fidelidade de um modelo com relação à realidade retratada é proporcional à complexidade matemática do modelo. O que se procura numa modelagem é estabelecer um ponto de partida com modelos simples, não o comprometedores e que possam ser modificados conforme os objetivos vão sendo ampliados.

A ordem de uma equação diferencial é estabelecida pela maior ordem das derivadas que aparecem em sua formulação. Assim, uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem tem a forma geral dada por

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1.4)$$

Resolver a equação 1.4 consiste em encontrar curvas $y = g(x)$, de modo que a direção da reta tangente em cada ponto de uma destas curvas coincida com o valor pré-estabelecido pela função $f(x, y)$ neste ponto. A família de todas as curvas que

satisfazem esta equação é denominada solução geral. Quando fixamos um ponto do plano $P_0 = (x_0, y_0)$, se existir uma curva que passa por P_0 e satisfaz a equação 1.4 ela é denominada solução particular do problema de Cauchy:

Com algumas condições de continuidade, nos apropriamos da existência e unicidade.

1.2.1 O Modelo da Lei de Resfriamento de Newton

Consideremos inicialmente um corpo que esteja sem aquecimento interno e cuja temperatura, em cada instante, é maior que a temperatura externa do ambiente em que o corpo está inserido.

Assim, segundo a lei de Newton de resfriamento,

“a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo $T(t)$ e a temperatura do meio ambiente T_a , em cada instante t ”.

Esta definição se estabelece por meio da expressão

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_a), \quad (1.5)$$

em que a constante k de resfriamento, ou de aquecimento, é característica específica do corpo considerado.

Se adotarmos $k > 0$, então o resfriamento ocorre quando $T(t) > T_a$, pois

$$T(t) > T_a \implies T(t) - T_a > 0 \implies -k(T(t) - T_a) = \frac{dT(t)}{dt} < 0,$$

enquanto que o aquecimento ocorre quando $T(t) < T_a$, pois

$$T(t) < T_a \implies T(t) - T_a < 0 \implies -k(T(t) - T_a) = \frac{dT(t)}{dt} > 0.$$

Podemos observar que o foco principal deste modelo matemático está no fato que a tendência da temperatura do corpo é a de atingir a temperatura ambiente quando, então, a temperatura do corpo não sofre mais variação, isto é,

$$T(t) = T_a \iff \frac{dT(t)}{dt} = 0.$$

A temperatura T_a é a temperatura de equilíbrio ou temperatura estacionária.

Agora, observe que a função constante $y(t) = T_a$ é uma solução de 1.5, também denominada solução estacionária ou de equilíbrio.

Se considerarmos $T(t) \neq T_a$, podemos estudar a equação diferencial, dada em 1.5, na forma diferencial:

$$\frac{dT}{T - T_a} = -k dt.$$

Integrando e considerando que $T(0) = T^0$, fica

$$\int_{T^0}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_a} = -k \int_0^t 1 dt,$$

$$\ln \left| \frac{T(t) - T_a}{T(0) - T_a} \right| = -kt \iff \frac{T(t) - T_a}{T^0 - T_a} = e^{-kt}.$$

Logo,

$$T(t) - T_a = (T^0 - T_a)e^{-kt} \implies T(t) = T_a + (T^0 - T_a)e^{-kt}.$$

O fato de $T(t)$ tender a T_a somente quando $t \longrightarrow \infty$ pode dar a impressão a equação com solução assintótica não presta para modelar situações reais de estabilidade. Entretanto, em termos de modelagem matemática, $t \longrightarrow \infty$ deve ser interpretado por: “ t assume valores grandes, relativamente à evolução das variáveis analisadas”.

Uma equação de evolução é um bom exemplo de modelagem matemática de um problema, outro caso que pode ser estudado é analisar como um sistema de controle e buscar critérios de controlabilidade para o mesmo.

Capítulo 2

História do Controle: Evolução dos Métodos de Controlabilidade

O controle moderno, ou espaço de estados aproximados para controlar, foi derivado do trabalho de Poincaré e Lyapunov no final do século XIX.

A história do controle se divide convenientemente entre quatro períodos:

- **Os Primeiros Controles:** até 1900;
- **O Período Pré-Clássico:** De 1900 a 1940;
- **O Período Clássico:** De 1935 a 1960;
- **O Controle Moderno:** após 1955.

2.1 Os Primeiros Controles: até 1900

O conhecimento de sistema de controle tem sido preservado dentro da cultura islâmica sendo redescoberto no oriente com o fim do renascimento. Novas invenções e aplicações de velhos princípios emergiram durante o século XVIII. Réamur (1683-1757) propôs vários dispositivos automáticos para controle de temperatura de incubadoras baseadas nas invenções de Drebbel (1572-1663). A temperatura era medida pela expansão de um líquido mantido num recipiente conectado a um tubo em formato de U que continha mercúrio. Um flutuador no mercúrio operou com um braço que controlava o esquema para a fornalha e, portanto, a taxa de combustão. Bonnemain

(aproximadamente 1743-1828) melhorou o dispositivo de sistema de controle de temperatura e baseou seu sensor na expansão diferencial de metais. Durante o século XIX diversos dispositivos foram inventados, fabricados e vendidos.

Poncelet (1788-1867) e Airy (1801-1892) usaram equações diferenciais para descrever a dinâmica de movimento, mas ambos encontraram dificuldades em encontrar as condições para o comportamento estável. Airy afirmou as condições, porém seu relato é tão conciso que não se pode determinar como ele chegou nessas condições. Maxwell (1831-1879), em seu famoso paper intitulado 'On governors' (1868), descreveu como derivar uma equação diferencial linear para vários mecanismos de governo. A partir desse momento, matemáticos e físicos souberam que a estabilidade de um sistema dinâmico era determinada pela localização das raízes da equação característica e que o sistema fica instável quando a parte real de uma raiz complexa fica positiva. Maxwell mostrou para sistemas de 2ª, 3ª e 4ª ordem que é possível determinar a localização da parte real da raiz complexa sem encontrar a raiz da equação; já para 5ª ordem, ele usou a mesma ideia, mas foi preciso adicionar duas condições necessárias. O paper foi pouco notado durante o tempo até ser notado como conhecimento de engenharia. O problema foi retomado por Routh (1831-1907) cujo primeiro resultado foi publicado em 1874. Em 1877 ele produziu um tratado estendido sobre a estabilidade do movimento, o qual ele expôs o que agora se conhece por critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. Em 1895 o matemático suíço Hurwitz (1859-1919) deduziu o critério independentemente. Ele foi solicitado a ajudar com o problema matemático ao seu colega Stodola (1859-1942), com quem foi trabalhar em um problema de controle de turbina.

A maioria das aplicações do século XIX estavam preocupadas com controle de temperatura, pressão, nível de líquidos e velocidade de rotação maquinária: o objetivo foi alcançar regulação e estabilidade. No entanto, o crescimento do tamanho dos navios e de armas navais resultou no uso de energia a vapor, hidráulica e pneumática para o sistema de controle de posição.

O advento da eletricidade trouxe mais novas exigências para o sistema de controle, além de fornecer ferramentas adicionais de medição, transmissão e manipulação de sinais e de atuação.

2.2 O Período Pré-Clássico: De 1900 a 1940

Em meados do século XX, houve um rápido e amplo retorno ao uso de controle para voltagem, corrente e regulação de frequência; controle de caldeira para vaporização; direção de navios e aeronaves e estabilização automatizada; e temperatura, pressão e controle de fluidos em processos industriais. Esse foi um momento em que cresceram rapidamente as vendas particulares de dispositivos de medida, indicação e registro. Alguns sistemas eram complexos e utilizavam técnicas de controle PDI. Em 1920, com o abastecimento elétrico das companhias, as preocupações com uma operação mais econômica das caldeiras geradoras de vapor começaram a introduzir sistema de controle automático na caldeiras.

Com o uso intenso e diversificado de métodos, surgiram dois problemas aparentes:

- i) Um leque de conhecimento técnico e uma linguagem não tão comum;
- ii) Uma análise facilmente aplicada com métodos de designer.

A ferramenta analítica utilizada foi a equação diferencial e o teste de estabilidade de Routh-Hurwitz. Nesse ponto, engenheiros ficavam confusos: Se os modelos de controles funcionavam bem com uma aplicação, ou para um conjunto de condições, é insatisfatório quando aplicado para diferentes sistemas ou diferentes condições.

Em 1922, Minorsky deu uma análise clara do sistema de controle de posição e formulou a lei de controle, conhecida por lei dos três termos ou controle PDI, pela observação do caminho no qual um timoneiro derigiu um navio. Válvulas deslizantes e carretéis desenvolvidos em meados do século começaram a fornecer solução para sistema hidromecânicos. Apesar de ter o desafio em superar os problemas decorrentes de sobreposição e atrito, não havia impasse em relação a amplificadores para sistemas eletrônicos e pneumáticos.

Por volta de 1920, o problema de amplificação foi um sério obstáculo para o desenvolvimento de linhas telefônicas mais longas. Melhorias no designer dos cabos estenderam a transmissão de sinais, mas o serviço transcontinental ainda dependia de amplificadores. Ao introduzir repetidores telefônicos eletrônicos na rede, notou-se muita interferência, o que limitou o seu uso em série. Em seu trabalho, intitulado "teoria das regenerações", Black (1898- 1983) forneceu um dispositivo prático - amplificação

de retorno negativo - e conduziu a um profundo entendimento dos benefícios do retorno negativo em sistemas. Isso também, eventualmente, conduziu a um método de análise e designer de sistema de controle que não requeria manipulação de equações diferenciais e para os quais usavam dados experimentais que podiam ser combinados com dados calculados.

Os amplificadores de retorno negativo eletrônicos e pneumáticos foram os resultados de trabalhos em problemas industriais. Durante o mesmo período, no MIT, trabalhos extensivos foram feitos em máquinas de calcular análogas Vanevar Bush. Isso levou a um alto desempenho de mecanismo de controle autônomo de retorno negativo com "sensor de erro" desenvolvido por Hazen (1901-1980) e seus estudantes. Seus artigos, publicados em 1934, forneceram o ponto de partida para a próxima geração de especialistas em sistema de controle.

2.3 O Período Clássico: De 1935 a 1960

O período de 1935-1940 foi marcado por diversos avanços no entendimento, na análise e no projeto de sistemas de controle, e foram feitos, independentemente, por vários grupos em diferentes países. Os mais influentes e com trabalhos mais relevantes foram três grupos que surgiram nos EUA. O grupo AT & T Company continuou esse trabalho em sistemas telefônicos e procurou entender a largura de banda de sistema de comunicação bons resultados de frequência característica em canais de comunicação de voz.

Engenheiros mecânicos e físicos que trabalham nas indústrias de processo iniciaram um estudo teórico sistemático dos sistemas de controle utilizados, buscando estabelecer uma terminologia de abordagem comum e tentou desenvolver outros métodos de design de controle. Vários membros deste agrupamento estavam cientes dos desenvolvimentos na Alemanha e na Inglaterra. Durante este período, a fabricação controladores pneumáticos continuaram a melhorar e desenvolver seus instrumentos. Já em 1940 em campo ajustável em instrumentos com controle PID estavam disponíveis.

O terceiro grupo localizado no Departamento de Engenharia Elétrica do MIT foi liderado por Hazen e Brown. Eles usaram métodos de domínio do tempo baseados

em técnicas de operadores, introduziram diagramas de blocos e usaram o analisador diferencial para simular sistemas de controle.

A Segunda Guerra Mundial concentrou o trabalho de controle em alguns problemas específicos. Um importante trabalho entre eles foi o de desenvolver canhões antiaéreos. Este foi um problema complexo que envolve detecção da posição do avião, cálculo da sua posição futura e controle preciso de uma arma pesada.

2.4 O Controle Moderno: após 1955

Alguns trabalhos do pós-guerra foram movidos pelos insights e novos entendimentos obtidos durante a guerra, mas o caminho tomado foi desencadeado por dois fatores:

- (i) os governos consideravam importante o lançamento, a orientação de manobras, e o rastreamento de mísseis aéreos e veículos espaciais;
- (ii) o advento de computadores digitais.

O primeiro problema se resumiu a controle de objetos balístico e, portanto, modelos físicos detalhados poderiam ser construídos em termos de equações diferenciais lineares e não lineares; além disso, instrumentos de medição e outros componentes de precisão foram desenvolvidos e usados. Engenheiros que trabalharam nas indústrias aeroespaciais voltaram-se para a formulação geral de equações diferenciais em termos de um conjunto de equações de primeira ordem, daí a abordagem 'espaço de estados' aproximados.

Bellman estudou o problema de alocação de alvo de mísseis de modo a atingir um nível máximo de dano possível. Fato que levou à formulação do 'princípio da otimização' e à Programação Dinâmica. a pesquisa foi apoiada pela Força Aérea, mas o então Secretário de Defesa tinha versão à palavra pesquisa e presumia-se que teria uma aversão ainda maior à pesquisa matemática, afinal, "dinâmico" era uma palavra com conotações positivas e "programação" foi considerada mais aceitável do que "planejamento". Bellman passou a estudar a teoria do controle ótimo, usando o cálculo de variações e, mais tarde, por causa do problema de valor de contorno inerente à pesquisa, procurou formular problemas de otimização determinística de modo que pudes-

sem ser resolvidos usando a programação dinâmica. Formulado assim, o problema podia ser tratado como um processo de decisão em vários estágios. Com Dreyfus, ele desenvolveu programas de computador para encontrar soluções numéricas para uma série de problemas e uma dificuldade com a programação dinâmica é o problema da dimensionalidade pois, até então, com o poder de computação disponível muito além de qualquer ferramenta, para Bellman ainda precisaria usar aproximações para lidar com sistemas complexos.

Problemas dinâmicos relacionados com problema de máximo e mínimo tem ligação direta com problemas variacionais da teoria clássica de teoria mecânica analítica de Lagrange e Hamilton. A generalização da abordagem de Hamilton à óptica geométrica desenvolvida por Pontryagin (1956) na forma de seu princípio máximo lançou as bases da teoria do controle ótimo.

Em 1956 houve uma conferência internacional sobre controle automático. Já a conferência de Moscou, iniciando um marco da guerra fria na década seguinte, foi um símbolo importante e altamente visível da mudança de direção que vinha se desenvolvendo lentamente durante a década de 1950. É notório que na conferência, Kalman tenha se destacado ao apresentar um artigo, 'Sobre a teoria geral dos sistemas de controle' (Kalman, 1960) no qual mostrou claramente que existia uma dualidade profunda e exata entre os problemas de controle de retorno com multivariável e grau de liberdade de multivariáveis filtrada e, portanto, inaugurou um novo tratamento dos problemas de controle ótimo de tempo.

Capítulo 3

Sistema de Controle Finito-Dimensional

Fenômenos físicos macroscópicos são comumente descritos em termos da relação entre "causa e efeito". Essa ideia desenvolvida é tão antiga quanto a mecânica Newtoniana. O movimento de um sistema de partículas é totalmente determinado em todo tempo futuro pela posição atual e momentos das partículas e pelas forças presentes e futuras que atuam no sistema.

Em uma terminologia moderna, dizemos que o número que especifica a posição instantânea e futura de cada partícula ou processo representa o estado do sistema. O estado é considerado sempre como uma quantidade abstrata. Intuitivamente falando, o estado é a mínima quantidade de informação sobre a história passada, a qual é suficiente para prever os efeitos do passado sobre o futuro. Além disso, dizemos que as forças atuando sobre as partículas são as entradas do sistema. Qualquer variável no sistema que pode ser diretamente observada é dita uma entrada.

Vamos começar introduzindo as notações a seguir, a fim de familiarizar o leitor com uma abordagem mais formal de controle. Para $k, l \in \mathbb{N} - \{0\}$, denote por $\mathbb{R}^k$ o conjunto k -dimensional de vetores-coluna da forma

$$x = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{bmatrix},$$

com $a_{i1} \in \mathbb{R}$ e denote por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ o conjunto de todos os mapas lineares de $\mathbb{R}^k$ sobre $\mathbb{R}^l$. Usualmente, identificamos via isomorfismo o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ com o conjunto $\mathbb{M}_{k,l}$ de todas as matrizes $k \times l$ com coeficientes reais. Se os coeficientes forem números complexos, denotamos por $\mathbb{M}_{k,l}(\mathbb{C})$.

Ao longo do texto, escreveremos os números reais T_0, T_1 tais que $0 < T_0 < T_1$ para indicar o tempo decorrido, enquanto que $A : (T_0, T_1) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ denota um elemento do conjunto $L^\infty((T_0, T_1); \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ e $B : (T_0, T_1) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ denota um elemento de $L^\infty((T_0, T_1); \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$.

Consideramos o seguinte sistema de controle linear variando no tempo

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, t \in [T_0, T_1], \quad (3.1)$$

No sistema acima, a matriz real A possui ordem $n \times n$, esta determina a dinâmica (linear) do sistema. A segunda matriz real B possui ordem $n \times m$, esta modela a forma como m controles estão atuando sobre o sistema. Finalmente, no tempo t , o estado é a função $x : t \longrightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ e o controle é a função $u : t \longrightarrow u(t) \in \mathbb{R}^m$. Ambas as funções vetoriais de n e m componentes, respectivamente, dependem exclusivamente da variável tempo t . Na prática, teremos sempre $m \leq n$.

O objetivo desejado será controlar o sistema por intermédio de um número mínimo m de controles.

Primeiramente, vamos fixar um elemento inicial como ponto de partida e definir a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad \forall t \in [T_0, T_1]; \\ x(T_0) = x^0, \end{cases} \quad (3.2)$$

em que são dados $u \in L^1((T_0, T_1), \mathbb{R}^m)$ e $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Definição 3.1. *Seja $b \in L^1((T_0, T_1); \mathbb{R}^n)$. Dizemos que um mapa $x : [T_0, T_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $t \in [T_0, T_1]$ se $x \in C^0((T_0, T_1); \mathbb{R}^n)$ e satisfaz*

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (A(t)x + b(t))dt, \quad \forall (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2.$$

Em particular, para $x^0 \in \mathbb{R}^n$, a solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + b(t), \quad \forall t \in [T_0, T_1]; \\ x(T_0) = x^0, \end{cases} \quad (3.3)$$

é uma função $x \in C^0((T_0, T_1); \mathbb{R}^n)$ tal que

$$x(\tau) = x^0 + \int_{T_0}^{\tau} (A(t)x + b(t))dt, \quad \forall \tau \in [T_0, T_1].$$

É bem conhecido que, para todo $b \in L^1((T_0, T_1); \mathbb{R}^n)$ e para todo $x^0 \in \mathbb{R}^n$, o problema de Cauchy 3.3 tem uma única solução.

3.1 Um Critério Integral para Controlabilidade

Vamos agora dar uma condição necessária e suficiente para a controlabilidade do sistema 3.1 em termos do resolvente do sistema linear $\dot{x} = A(t)x$.

Primeiramente, vamos colocar a definição de resolvente.

Definição 3.2. O resolvente R do sistema linear $\dot{x} = A(t)x$ é o mapa

$$\begin{aligned} R : [T_1, T_2]^2 &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \\ (t_1, t_2) &\longmapsto R(t_1, t_2) \end{aligned}$$

tal que, para todo $t_2 \in [T_1, T_2]$, o mapa $R : [T_1, T_2]^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $t_1 \longmapsto R(t_1, t_2)$ é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{M} = A(t)M, \\ M(T_2) = id_n, \end{cases} \quad (3.4)$$

em que id_n denota o mapa identidade de $\mathbb{R}^n$.

O resolvente apresenta as seguintes propriedades:

Proposição 3.1. O resolvente R satisfaz

- i. $R \in C^0([T_1, T_2]^2; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$
- ii. $R(t_1, t_1) = id_n, \forall t_1 \in [T_1, T_2]$,
- iii. $R(t_1, t_2)R(t_2, t_3) = R(t_1, t_3), \forall (t_1, t_2, t_3) \in [T_1, T_2]^3$.

Em particular, $R(t_1, t_2)R(t_2, t_1) = Id_n, \forall (t_1, t_2) \in [T_1, T_2]^2$.

Além disso, se $A \in C^0([T_1, T_2]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$, então $R \in C^1([T_1, T_2]^2; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n))$ e vale

$$\frac{\partial R}{\partial t_1}(t, \tau) = A(t, \tau)R(t, \tau), \quad \forall (t_1, \tau) \in [T_1, T_2]^2; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t_2}(t, \tau) = -R(t, \tau)A(t, \tau), \quad \forall (t_1, \tau) \in [T_1, T_2]^2. \quad (3.6)$$

Prosseguindo, temos o principal resultado no qual o resolvente fornece a solução do problema de Cauchy 3.3.

Proposição 3.2. (PRINCÍPIO DE DUHAMEL) *A solução do problema de Cauchy 3.3, em termos do resolvente, satisfaz*

$$x(t_1) = R(t_1, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} R(t_1, \tau)b(\tau)d\tau, \quad \forall (t_0, t_1) \in [T_0, T_1]^2. \quad (3.7)$$

Em particular,

$$x(t) = R(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t R(t, \tau)b(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [T_0, T_1]. \quad (3.8)$$

Agora vamos definir a controlabilidade Gramian do sistema de controle 3.1.

Proposição 3.3. (CONTROLE GRAMIAN) *A controlabilidade Gramian do sistema de controle*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

é a matriz $n \times n$ simétrica

$$\mathcal{C} := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}d\tau.$$

Para uma primeira condição de controlabilidade do sistema $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *O sistema de controle linear variando no tempo $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ é controlável se, e somente se, sua controlabilidade Gramian é invertível.*

OBSERVAÇÃO: Note que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$x^{tr}\mathcal{C}x = \int_{T_0}^{T_1} |B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}x|^2d\tau.$$

Portanto, além de ser simétrica, a controlabilidade Gramian é uma matriz não-negativa. Em particular, $\mathcal{C}$ é invertível se, e somente se, existir $c > 0$ tal que

$$x^{tr}\mathcal{C}x \geq c|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Primeiro, vamos assumir que $\mathcal{C}$ é invertível e provar que $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ é controlável. Sejam $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{u} \in L^\infty((T_0, T_1); \mathbb{R}^m)$ definido por

$$\bar{u}(\tau) = B(\tau)^{tr} R(T_1, \tau) \mathcal{C}^{-1}(x^1 - R(T_1, T_0)x^0), \quad \tau \in (T_0, T_1). \quad (3.9)$$

Seja $\bar{x} \in C^0([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ a solução do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + B(t)\bar{u}(t), \quad \forall t \in [T_0, T_1]; \\ \bar{x}(T_0) = x^0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Então, pelo princípio de Duhamel 3.7, com $\tau \in [T_0, T_1]$, temos

$$\begin{aligned} \bar{x}(T_1) &= R(T_1, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau \\ &= R(T_1, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}\mathcal{C}^{-1}(x^1 - R(T_1, T_0)x^0)d\tau \\ &= R(T_1, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{T_1} (x^1 - R(T_1, T_0)x^0)d\tau \\ &= x^1 \end{aligned}$$

Portanto, $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ é controlável.

Agora, vamos assumir que $\mathcal{C}$ é não invertível. Então, existe $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $\mathcal{C}y = 0$, ou ainda $y^{tr}\mathcal{C}y = 0$, ficando

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{T_1} y^{tr} R(T_1, \tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}y d\tau &= 0 \\ \int_{T_0}^{T_1} [B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}y]^{tr}B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}y d\tau &= 0 \\ \int_{T_0}^{T_1} |B(\tau)^{tr}R(T_1, \tau)^{tr}y|^2 d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Da igualdade acima resulta que, para cada $\tau \in (T_0, T_1)$,

$$y^{tr}R(T_1, \tau)B(\tau) = 0. \quad (3.12)$$

Então, dado $u \in L^1((T_0, T_1); \mathbb{R}^m)$, seja $x \in C^0([T_0, T_1]; \mathbb{R}^n)$ a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad t \in [T_0, T_1]; \\ x(T_0) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Segue do princípio de Duhamel 3.7 que

$$x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Multiplicando ambos os lados da equação integral acima por y^{tr} e usando 3.12, obtemos

$$y^{tr} x(T_1) = 0. \quad (3.14)$$

Segue do princípio de Duhamel 3.7 que

$$x(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Multiplicando ambos os lados da equação integral acima por y^{tr} e usando 3.12, obtemos

$$y^{tr} x(T_1) = 0. \quad (3.15)$$

Desde que $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tal que $y^{tr} x_1 \neq 0$ (basta tomar $x_1 = y$). Isto segue de 3.15 que qualquer controle u , tem-se $x(T_1) \neq x_1$. O que conclui a prova do Teorema. $\square$

Chamemos atenção para o fato de que o controle definido pela expressão em 3.9 tem uma propriedade muito interessante dada na proposição a seguir.

Proposição 3.4. *Seja $(x^0, x^1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e seja $u \in L^2((T_0, T_1); \mathbb{R}^m)$ o controle tal que a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & \forall t \in [T_0, T_1]; \\ x(T_0) = x^0, \end{cases} \quad (3.16)$$

satisfaz

$$x(T_1) = x^1.$$

Então, para $\bar{u}$ dado em 3.9, temos

$$\int_{T_0}^{T_1} |\bar{u}(t)|^2 dt \leq \int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2 dt,$$

com igualdade se, e somente se, $u(t) = \bar{u}(t)$ $t \in (T_0; T_1)$.

Demonstração. Escrevendo $v = u - \bar{u}$, então sendo $\bar{x}$ a solução do problema de Cauchy 3.10 e x a solução do problema de Cauchy 3.16, temos

$$\int_{T_0}^{T_1} R(T_1, t) B(t) v(t) dt = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, t) B(t) u(t) dt - \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, t) B(t) \bar{u}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= (x(T_1) - R(T_1, T_0)x(T_0)) - (\bar{x}(T_1) - R(T_1, T_0)\bar{x}(T_0)) \\
&= (x^1 - R(T_1, T_0)x^0) - (x^1 - R(T_1, T_0)x^0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $L^2((T_0, T_1); \mathbb{R}^m)$ é um espaço vetorial munido com produto interno, então podemos desenvolver as identidades

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T_1} |u(\tau)|^2 d\tau &= \int_{T_0}^{T_1} |\bar{u}(\tau) + v(\tau)|^2 d\tau \\
&= \int_{T_0}^{T_1} |\bar{u}(\tau)|^2 d\tau + \int_{T_0}^{T_1} |v(\tau)|^2 d\tau + 2 \int_{T_0}^{T_1} \bar{u}^{tr}(\tau)v(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Do modo como $\bar{u}$ foi definida em 3.9, e sendo $\mathcal{C}$ simétrica ($\mathcal{C}^{tr} = \mathcal{C}$), a última integral acima fica

$$\int_{T_0}^{T_1} \bar{u}^{tr}(\tau)v(\tau) d\tau = (x^1 - R(T_1, T_0)x^0)^{tr} \mathcal{C}^{-1} \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, \tau)B(\tau)v(\tau) d\tau,$$

o que prova a proposição, pois resulta em

$$\int_{T_0}^{T_1} \bar{u}^{tr}(\tau)v(\tau) d\tau = 0.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Bassanzi, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**, volume 1. Universidade de Campinas, São Paulo, 2002.
- [2] EVANS, L. C. **Partial differential equations**, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [3] FOLLAND, G. B. **Real Analysis, Modern Techniques and their Applications**. Jhon Wiley Sons, Inc, 1999.
- [4] JEAN, M. C. **Control and Nonlinearity**. American Mathematical Society, 2007
- [5] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis**, volume 17. Wiley Classics Library, 1991.
- [6] LIMA, E. L. **Espaços métricos**, volume 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.
- [7] STUART, B. **History of Automatic Control to 1960: an overview**, volume 13 thienial world congress. American Mathematical Society, 1996.

Apêndice A

Apêndice

Os espaços lineares normados são espaços vetoriais que generalizam os espaços euclidianos e não se restringem a uma dimensão finita. Também têm uma estrutura de espaço métrico completo, em que toda seqüência de Cauchy é convergente e converge para algum ponto do espaço. Vamos começar pressupondo que já é conhecida a noção usual de espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$, de subespaço vetorial de X , bem como suas propriedades.

A.1 Espaços de Lineares Normados

A definição a seguir mostra que existem espaços vetoriais munidos com um produto definido entre seus elementos.

Definição A.1. (PRODUTO INTERNO) *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$. Dizemos que um produto interno em X é uma aplicação $(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$i.) \quad (u, v) = \overline{(v, u)}, \forall u, v \in X;$$

$$ii.) \quad \text{A aplicação } u \longmapsto (u, v) \text{ é linear para cada } u \in X;$$

$$iii.) \quad (u, u) \geq 0, \forall u \in X;$$

$$iv.) \quad (u, u) = 0 \iff u = 0.$$

Definição A.2. (NORMA) *Seja X um espaço vetorial. Uma função $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ é dita uma norma sobre um corpo $\mathbb{K}$, real ou complexo, se satisfaz*

$$i) \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$ii) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in X \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

$$iii) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X. \text{ (desigualdade triangular)}$$

Ao par $(X, \|\cdot\|)$ chamamos *espaço vetorial normado*.

Afirmção A.1. Se X é um espaço vetorial munido com produto interno $(\cdot, \cdot)$, a norma pode ser induzida por esse produto interno já definido em X , basta fazer $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$.

Com efeito. Verificamos facilmente os itens da Definição A.2 da seguinte maneira.

- *i)* Se $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = 0$, então $(x, x) = 0$. Pelo item *(iv)* da Definição (A.1), implica que $x = 0$. Se, porém, for $x = 0$ então pelo item *(iv)* da Definição A.1 temos que $0 = (x, x) = \|x\|^2 \implies \|x\| = 0$.
- *ii)* Dados $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários e X sendo espaço vetorial, asseguramos que $\lambda x \in X$, então aplicando a norma neste vetor e considerando que $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$, resulta $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \overline{(\lambda x, \lambda x)}} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda (x, x)}} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} (x, x)} = |\lambda| \|x\|$.
- *iii)* Dados $x, y \in X$, então $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. A prova segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. $\left[(x, y) \leq \|x\|\|y\| \right]$.

Se X é um espaço com produto interno, vale a identidade do paralelogramo.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Definição A.3. (SEQUÊNCIA) Seja X um espaço vetorial normado X . Dizemos que uma sequência em X é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. O valor que a sequência assume no número $n \in \mathbb{N}$, denotado por x_n , é chamado de *n-ésimo termo da sequência*.

O conjunto de todos os valores da sequência é descrito por

$$x(\mathbb{N}) := \{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Definição A.4. (SUBSEQUÊNCIA) Dizemos que uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $N' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} \subset \mathbb{N}$. Denotamos uma subsequência por $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou ainda por $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

Definição A.5. (CONVERGÊNCIA) *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge para certo $x \in X$, e escrevemos $x_k \rightarrow x$, quando*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Podemos reescrever a convergência na linguagem de sequência do seguinte modo:

$$x_k \rightarrow x \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \implies \|x_n - x\| < \epsilon. \end{cases}$$

Quando não existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ em X , dizemos que a sequência é divergente.

Observação A.1. (UNICIDADE DO LIMITE) *O limite obtido na convergência para $x \in X$ é único, pois se $x_1, x_2 \in X$ e a sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ são tais que $x_k \rightarrow x_1$, e também $x_k \rightarrow x_2$, então para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_k - x_2 + x_k\| \leq \|x_k - x_1\| + \|x_k - x_2\| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Isto implica que $\|x_1 - x_2\| = 0$, e pelo item (i) da Definição A.2, resulta que

$$\|x_1 - x_2\| = 0 \implies x_1 = x_2. \text{ (unicidade)}$$

Proposição A.1. (LIMITE DE SUBSEQUÊNCIAS DE SEQUÊNCIA CONVERGENTE) *Seja X um espaço vetorial normado. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in X,$$

então toda subsequência de (x_n) converge para a .

Demonstração. Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies \|x_n - a\| < \epsilon$. Seja $N' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_{k_0} > n_0$. Logo,

$$k > k_0 \implies n_k > n_{k_0} \implies \|x_{n_k} - a\| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. □

Um ponto $a \in X$ é chamado de ponto de aderência de uma sequência (x_n) quando a é limite de alguma subsequência de (x_n) .

Definição A.6. (COMPLETUDE) *A fim de assegurar que toda sequência convergente em X possa convergir para pontos de X , definiremos a completude do espaço vetorial X .*

i) (SEQUÊNCIA DE CAUCHY) Uma sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ é dita sequência de Cauchy quando, para cada $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\|x_k - x_l\| < \epsilon, \quad \forall k, l \geq N.$$

ii) (ESPAÇO COMPLETO) O espaço vetorial X é completo quando cada sequência de Cauchy de vetores de X converge em X , ou seja,

$$\text{se } \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X \text{ é de Cauchy, então } \exists a \in X \text{ tal que } x_k \longrightarrow a. \quad (\text{A.1})$$

iii) (ESPAÇO DE BANACH) Um espaço X é de Banach quando é um espaço vetorial, normado e completo.

Definição A.7. (ESPAÇO DE HILBERT) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, real ou complexo, munido com um produto interno $(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert se for completo com respeito à norma induzida pelo produto interno.*

Vamos agora definir operadores entre espaços Hilbert.

Definição A.8. (OPERADOR LINEAR) *Sejam X e Y dois espaços de Hilbert. Uma aplicação $A : X \longrightarrow Y$ é uma regra que a cada $u \in X$, associa um único elemento $y = A(u) \in Y$. Dizemos que a aplicação A é um operador linear se, para todos $u, v \in X$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vale*

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av. \quad (\text{A.2})$$

Se a aplicação $A : X \longrightarrow Y$ for linear então destacam-se os seguintes fatos.

(i) Denotamos o domínio do operador A por $D(A)$. (Nesse caso temos que $D(A) = X$, mas haverá casos em que $D(A) \subsetneq X$ é um subespaço denso em X .)

(ii) Denotamos a imagem do operador A por $\mathcal{I}m(A) = AX := \{Ax, \forall x \in D(A)\}$.

Definição A.9. (OPERADOR LIMITADO) *Seja $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ um operador linear entre dois espaços vetoriais normados X e Y . Então A é limitado se existe $C > 0$ tal que*

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in D(A).$$

Vale destacar que todo operador finito-dimensional é limitado e, portanto, contínuo.

Definição A.10. *O conjunto dos operadores limitados com domínio em X e imagem em Y é denotado por*

$$\mathcal{L}(X, Y) := \{A : D(A) \subset X \longrightarrow Y \mid A \text{ é limitado}\}.$$

Proposição A.2. *O conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração. Com efeito. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in D(A) \subset X$ temos que

$$(\alpha A + \beta B)(x) = (\alpha A)(x) + (\beta B)(x) = \alpha.A(x) + \beta.B(x). \quad (\text{A.3})$$

Além disso, como $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, então para todo $x \in D(A) \subset X$ existem $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$\|Ax\|_Y \leq C_1\|x\|_X \quad \text{e} \quad \|Bx\|_Y \leq C_2\|x\|_X.$$

Logo, $\forall x \in D(A) \subset X$ vale

$$\|(\alpha A + \beta B)(x)\| = \|\alpha.A(x) + \beta.B(x)\| \leq \|\alpha.A(x)\| + \|\beta.B(x)\| = |\alpha|\|A(x)\| + |\beta|\|B(x)\|,$$

donde $\|(\alpha A + \beta B)(x)\| \leq |\alpha|C_1\|x\|_X + |\beta|C_2\|x\|_X = (|\alpha|C_1 + |\beta|C_2)\|x\|_X$.

Fazendo $C = |\alpha|C_1 + |\beta|C_2$, temos que $\|(\alpha A + \beta B)(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in D(A) \subset X$. Portanto, $\alpha A + \beta B \in \mathcal{L}(X, Y)$ e provamos a Proposição. $\square$

Definição A.11. (NORMA DE OPERADOR) *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. A norma de A é definida por*

$$\|A\| := \sup_{\|u\| \leq 1} \{\|Au\|\} < \infty. \quad (\text{A.4})$$

Dizemos que o par $(\mathcal{L}(X, Y); \|\cdot\|)$ formado pelo espaço vetorial $\mathcal{L}(X, Y)$ munido com a norma (A.4) é um espaço vetorial normado. Se $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$.

Teorema A.1. *Sejam X, Y dois espaços normados. Um operador linear $A : X \longrightarrow Y$ é contínuo se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Suponha que o operador linear $A : X \longrightarrow Y$ seja limitado. Então, dado $u_0 \in X$, existe $C > 0$ tal que

$$\|Au - Au_0\|_Y = \|A(u - u_0)\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u - u_0\|_X \leq C \|u - u_0\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Para todo $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ e $u \in X$ com $\|u - u_0\|_X < \delta$, que obtemos

$$\|Au - Au_0\|_Y \leq C \|u - u_0\|_X < \epsilon.$$

Visto que $u_0 \in X$ foi escolhido inicialmente arbitrário, segue que o operador A é contínuo.

Agora, suponha que A é contínuo. Como $A(0) = A(u - u) = Au - Au = 0$, fazendo $u_0 = 0$ e $\epsilon = 1$, pela continuidade do operador A existe $\delta > 0$ tal que

$$\|A(u)\|_Y < 1, \quad \text{sempre que } \|u\|_X < \delta.$$

Então dado $u \in X$ arbitrário, seja $z = \frac{\delta u}{2\|u\|_X}$. Logo, $\|z\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta$. Portanto,

$$\|A(z)\|_Y = \frac{\delta}{2\|u\|_X} \|A(u)\|_Y < 1.$$

Daí, para todo $u \in X$ temos que $\|A(u)\|_Y < \frac{2}{\delta} \|u\|_X$, e provamos que o operador A é limitado. $\square$

Definição A.12. *Consideramos aqui operadores lineares limitados com contradomínio $\mathbb{R}$.*

- *i) (FUNCIONAL LINEAR) Um operador linear limitado $u^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito um funcional linear limitado em X .*
- *ii) (ESPAÇO DUAL) A coleção de todos os funcionais lineares em X é o espaço dual de X , e denotamos por X^* .*

Definição A.13. (ADJUNTO) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear limitado, então o adjunto de A é um operador $A^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ que satisfaz*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Apêndice B

Teoria da Medida

Nesta seção, vamos apresentar algumas definições e resultados clássicos em Teoria da Medida. O leitor interessado nas demonstrações pode consultar [5].

Definição B.1. (σ -ÁLGEBRA) Dizemos que uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ é uma σ -álgebra se

- i) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$;
- ii) Se $A \in \mathcal{M}$, então $(\mathbb{R}^n - A) \in \mathcal{M}$;
- iii) Se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, então $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathcal{M}$ e $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathcal{M}$.

Teorema B.1. (MEDIDA DE LEBESGUE) Existe uma σ -álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e uma função

$$|\cdot| : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$$

com as seguintes propriedades.

- i) Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e então todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$, pertence a $\mathcal{M}$;
- ii) Se B é uma bola qualquer em $\mathbb{R}^n$, então $|B|$ é o volume n -dimensional de B ;
- iii) Se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ é uma sequência de subconjuntos mutuamente disjuntos, então

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|;$$

- iv) Se $A \subset B$ onde $B \in \mathcal{M}$ e $|B| = 0$, então $A \in \mathcal{M}$ e $|A| = 0$.

Os conjuntos em $\mathcal{M}$ são chamados conjuntos de Lebesgue mensuráveis e $\mu := |\cdot|$ é a medida de Lebesgue n -dimensional. A terna $(X; \mathcal{M}; \mu)$ é chamado de espaço de medida.

Observação B.1. *Do item (i) no Teorema B.1, deduzimos que*

- $|\emptyset| = 0$;
- $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$, para toda coleção $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ de subconjuntos mensuráveis.

Se alguma propriedade é válida em todo ponto de $\mathbb{R}^n$, exceto para um conjunto de Lebesgue de medida nula, dizemos que a propriedade é válida em quase todo ponto, e abreviamos com "q.t.p."

Definição B.2. (FUNÇÃO MENSURÁVEL) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é mensurável, ou $\mathcal{M}$ -mensurável, quando*

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{M},$$

para cada subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Os seguintes fatos são bem conhecidos a respeito de funções mensuráveis:

Agora, vamos abordar integrais de Lebesgue e os principais resultados de integração.

Definição B.3. (FUNÇÃO CARACTERÍSTICA) *Seja $E \subset X$, a função característica $\mathcal{X}_E$ de E é definida por*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Definição B.4. (FUNÇÃO SIMPLES) *Dizemos que uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples se tiver um número finito de valores. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k$ os valores distintos de uma função simples φ e $E_j = \{x \in X \mid \varphi(x) = a_j\}$. Então os conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_k$ são disjuntos, $X = \bigcup_{j=1}^k E_j$ e φ se escreve como*

$$\varphi = \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{X}_{E_j}. \quad (\text{B.1})$$

Agora, definimos o seguinte conjunto de funções que tomam valores não-negativos a fim de usá-lo na integração de Lebesgue.

$M^+(X; \mathcal{M}) :=$ O espaço de todas as funções mensuráveis de X em $[0, +\infty]$.

Definição B.5. *Seja $f \in M^+(X, \mathcal{M})$. A integral de f em relação à medida μ é definida como o número real estendido*

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \varphi d\mu, \quad (\text{B.2})$$

em que o supremo é tomado sobre as funções simples que satisfazem

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \quad \forall x \in X.$$

Se $X \in \mathcal{M}$, é fácil ver que $f\chi_E \in M^+(X, \mathcal{M})$. Podemos definir a integral de f sobre o conjunto E em relação à medida μ como

$$\int_E f d\mu = \int_X f \cdot \chi_E d\mu. \quad (\text{B.3})$$

Definição B.6. (ESPAÇO DE LEBESGUE) *Denotamos por $L = L(X, \mathcal{M}, \mu)$ o espaço de Lebesgue que consiste em todas as funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem*

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \quad \text{e} \quad \int_X f^- d\mu < \infty, \quad (\text{B.4})$$

em que, para $f \in M(X, \mathcal{M})$, temos que f^+ e f^- são, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa de f definidas por

$$f^+(x) = \max(0, f(x)) \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max(0, -f(x)).$$

Além disso, mostra-se que f^+ , e f^- pertencem a $M^+(X, \mathcal{M})$. Também temos os seguintes resultados que justificam essa definição.

- $f = f^+ - f^-$.
- $|f| = f^+ + f^-$.

O Teorema a seguir mostra algumas propriedades que decorrem da integrabilidade de funções em espaços de Lebesgue.

Teorema B.2. *Seja $f, g \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades acerca de integração à Lebesgue.*

$$i) \int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu.$$

$$ii) \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

iii) *Sejam $E = E_1 \cup E_2$, onde E_1 e E_2 são conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$. Então*

$$\int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu.$$

$$iv) \text{ Se } f \leq g, \text{ q.t.p., então } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

$$v) \text{ Se } f \in M^+(X, \mathcal{M}), \text{ então } f = 0 \text{ q.t.p.} \iff \int_X f d\mu = 0.$$

O próximo Teorema busca caracterizar o espaço de funções de Lebesgue apresentado na Definição B.4 como o espaço L^1 das funções f tais que $|f|$ é integrável.

Teorema B.3. *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável.*

Neste caso temos

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Demonstração. Supondo que f seja integrável, então $\int_X f^+ d\mu < \infty$ e $\int_X f^- d\mu < \infty$.

Como $|f| = f^+ + f^-$, então $\int |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < \infty \implies |f|$ é integrável.

Por outro lado, se $|f|$ é integrável, devemos ter necessariamente f^+ e f^- integráveis.

Além disso, usando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ + f^- d\mu \right| \leq \left| \int_X f^+ \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right| \\ &\leq \int_X |f^+| d\mu + \int_X |f^-| d\mu = \int_X (f^+ + f^-) d\mu = \int_X |f| d\mu. \end{aligned}$$

□

B.0.1 Espaços de Lebesgue L^p

De forma semelhante ao espaço L^1 , vamos definir um espaço para o conjunto de funções f tais que $|f|^p$ tem integral finita. Vamos começar definindo conjunto de funções que possuem mesmo valor em quase todo ponto (q.t.p.), inclusive na integração de Lebesgue, para evitar ambiguidade na representação.

Definição B.7. (CLASSE DE EQUIVALÊNCIA) *Duas funções são equivalentes quando são iguais q.t.p.. A classe de funções de f , denotada por $[f]$, é o conjunto de todas as funções equivalentes a f .*

Note que, em uma classe de equivalência $[f]$, qualquer função equivalente a f pode ser representante da classe. Temos então as seguintes propriedades.

(i) (Reflexiva) $[f] = [f]$.

(ii) (Simétrica) Se $[f] = [g]$, então $[g] = [f]$.

(iii) (Transitiva) Se $[f] = [g]$ e $[g] = [h]$, então $[f] = [h]$.

O caso (i) é trivial. O caso (ii) segue direto de $f = g$, q.t.p. Já no caso (iii), se $f = g$, q.t.p. e $g = h$, q.t.p., então $f = h$, q.t.p.

Definição B.8. (ESPAÇOS L^p) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. $L^p(U) = L^p(U, \mathcal{M}, \mu)$, com $1 \leq p < \infty$, é o conjunto de todas as classes de equivalência de funções mensuráveis f de valor real, onde $|f|^p$ tem integral finita com respeito à medida μ sobre U .*

$$L^p(U) := \left\{ u : U \longrightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ é mensurável e } \int_U |u(x)|^p dx < \infty \right\}. \quad (\text{B.5})$$

Quando são já conhecidas a σ -álgebra $\mathcal{M}$ e a medida μ , escrevemos $L^p = L^p(U)$.

O seguinte fato faz com que o espaço de funções L^p seja um espaço vetorial.

Afirmção B.1. *Para todas $f, g \in L^p$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos que*

$$\alpha f + \beta g \in L^p, \quad (\text{Desigualdade de Minkowski})$$

ou seja, a combinação linear de funções em L^p é mensurável e tem integral no sentido de Lebesgue finita.

A linearidade de L^p segue diretamente do seguinte Teorema.

Teorema B.4. *Os espaços L^p são espaços vetoriais normados, munidos com a norma*

$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u(x)|^p dx < \infty \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{B.6})$$

Demonstração. Seja $f, g \in L^p$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como αf e $f + g$ são mensuráveis, basta provar que têm integrais à Lebesgue finitas.

- $\int |\alpha f|^p dx = |\alpha|^p \int |f|^p dx < \infty$.
- Como $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \cdot \max\{|f|, |g|\})^p = 2^p \cdot (\max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$,

$$\int |f + g|^p dx \leq 2^p \int (|f|^p + |g|^p) dx < \infty.$$

Portanto, de $\alpha f \in L^p$ e de $f + g \in L^p$, decorre disso que L^p é um espaço vetorial.

Porém, que a expressão B.6 é uma norma, decorre da desigualdade de Minkowski e pode ser encontrada em

Em particular, $L^2(U)$ é um espaço de Hilbert complexo com produto escalar dado por

$$(u, v)_{L^2(U)} = \int_U u(x) \overline{v}(x) dx, \forall u, v \in L^2(U). \quad (\text{B.7})$$

O próximo resultado se trata de mostrar que os espaços L^p são espaços de Banach.

Teorema B.5. (COMPLETUDE DE L^p) *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço L^p é um espaço completo sobre a norma $\|\cdot\|_p$.*

Demonstração. Seja (f_m) uma sequência de Cauchy sobre a norma $\|\cdot\|_p$. Para que L^p seja completo, é necessário que a sequência (f_m) seja convergente.

Para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) > 0$ tal que

$$m, l \geq N(\epsilon) \implies \|f_m - f_l\|_p^p = \int |f_m - f_l|^p dx < \epsilon^p. \quad (\text{B.8})$$

Para cada $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, seja $\epsilon = \frac{1}{2^i}$. Então existe $N(i) > 0$ de modo que

$$m, l \geq N\left(\frac{1}{2^i}\right) = N(i) \implies \|f_m - f_l\|_p < \frac{1}{2^i}. \quad (\text{B.9})$$

Considere $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência definida da seguinte forma.

$$m_1 = \inf\{m \in \mathbb{N}; m \geq N(1)\},$$

$$\text{se } i > 1, \quad m_i = \inf\{m \in \mathbb{N}; m > \max(m_{i-1}, N(i))\}.$$

Os termos m_i , escolhidos com o máximo, faz com que a sequência $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ seja crescente e, além disso, satisfaz

$$\|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p < \frac{1}{2^i}. \quad (\text{B.10})$$

Defina a sequência $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ de modo que os seus termos são tais que $g_k = \sum_{i=1}^k |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}|$, então o seu limite é dado por

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}|.$$

Sendo L^p um espaço vetorial, temos que $g_k \leq g_{k+1}$, pois

$$g_k = \sum_{i=1}^k |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| \leq \sum_{i=1}^k |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| + |f_{m_{k+2}} - f_{m_{k+1}}| = \sum_{i=1}^{k+1} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| = g_{k+1}.$$

Logo, (g_k) é uma sequência monótona crescente de funções em L^p .

Note que $g_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Também por (B.8) temos $g_k^p \in L^1$. Então (g_k^p) é uma sequência monótona de funções em $M^+(X, \sigma)$. Pelo Teorema da convergência monótona e usando a desigualdade (B.10) temos

$$\begin{aligned} \int |g|^p d\mu &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k|^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int |g_k|^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k \|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p \right)^p < \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \right)^p = 1. \end{aligned}$$

Isso mostra que $g \in L^p$, ou seja, a série telescópica $\sum_{i=1}^{\infty} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i})$ é absolutamente convergente em L^p . Daí, podemos definir uma função f em L^p por

$$f := f_{m_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i}),$$

em que as somas parciais da série são $f_{m_k} := f_{m_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i})$. Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k} = f$.

Observe o seguinte, como o limite existe, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k} = f \implies \liminf_{k \rightarrow \infty} f_{m_k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_{m_k} = f.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, e pela linearidade de L^p como um espaço vetorial, temos que $\{|f_m - f_{m_k}|\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções em L^p .

Logo, a sequência $\{|f_m - f_{m_k}|^p\}_{k=1}^{\infty}$ está em L^1 e, além disso, está em $M^+(X, \sigma)$.

Aplicando o Lema de Fatou, juntamente com a condição (B.8) sobre uma sequência de Cauchy, para $m > N(\epsilon)$ vale

$$\int |f_m - f|^p d\mu = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_m - f_{m_k}|^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |f_m - f_{m_k}|^p < \epsilon^p.$$

Logo, $\|f - f_m\|_p < \epsilon$, sempre que $m > N(\epsilon)$. Portanto, concluímos que $f_m \rightarrow f$ em L^p e provamos que L^p é um espaço completo. $\square$