Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Equação de Poisson e uma Desigualdade Sistólica

Lucas Cavalcante Barreto

Maceió - AL
Fevereiro de 2025

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Equação de Poisson e uma Desigualdade Sistólica

por

Lucas Cavalcante Barreto

sob a orientação do

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió - AL
Fevereiro de 2025

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

B273e Barreto, Lucas Cavalcante.
Equação de Poisson e uma desigualdade sistólica / Lucas Cavalcante Barreto. - 2025.
64 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 63-64.

1. Áreas - Estimativas. 2. Conjuntos de nível. 3. Desigualdades sistólicas. 4. Equação de Poisson. 5. Rigidez. I. Título.

CDU: 531.872.5

Equação de Poisson e uma Desigualdade Sistólica

Lucas Cavalcante Barreto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Trabalho aprovado em 28 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA
Data: 12/03/2025 07:06:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
Instituto de Matemática - UFAL
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
ABRAAO MENDES DO REGO GOUVEIA
Data: 17/03/2025 08:25:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia
Instituto de Matemática - UFAL
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
FABIO REIS DOS SANTOS
Data: 14/03/2025 14:25:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fabio Reis dos Santos
Departamento de Matemática - UFPE
(Examinador Externo)

Agradecimentos

Expresso minha mais profunda gratidão a Deus, fonte de toda sabedoria e graça, por me guiar, fortalecer e dar forças ao longo desta jornada. Agradeço a Ele por me proporcionar a oportunidade de realizar este trabalho e por me abençoar com as pessoas certas em meu caminho.

À minha família, minha fonte de inspiração e força, dedico este trabalho. Agradeço imensamente aos meus pais, Juarez Barreto e Maria Luiza, por todo o apoio, paciência e confiança depositada em mim. Ao meu irmão, Leandro Barreto, agradeço pela amizade, pelos diálogos e pelos momentos compartilhados. Sou grato também ao meu primo Alisson Xavier, pelo incentivo inicial que me motivou a estudar matemática. Sei que, muitas vezes, estive ausente, mas o amor e o apoio de vocês sempre me mantiveram motivado. Esta vitória também lhes pertence.

Minha profunda gratidão ao meu orientador, Márcio Batista, que tem sido meu mentor desde a graduação, sempre com paciência, dedicação, excelência e sabedoria. Agradeço pela amizade, disponibilidade e por todos os seus conselhos acadêmicos e pessoais, bem como pelas conversas que sempre me alegraram e inspiraram. Muito obrigado por tudo.

Gostaria de agradecer, ainda, aos professores do Instituto de Matemática da UFAL que contribuíram para a minha formação e por compartilharem seus conhecimentos. Em especial, agradeço ao professor Abraão Mendes, pelo incentivo e pela iniciativa em me apresentar novas perspectivas na matemática. Agradeço por me inspirarem a seguir em frente.

Aos membros da banca examinadora, expresso meu sincero agradecimento por aceitarem avaliar este trabalho e por suas valiosas sugestões. Suas contribuições foram fundamentais para aprimorar esta dissertação.

Agradeço, também, aos amigos e colegas que a pós-graduação me proporcionou: Cícero Calheiros, Gleydson Santos, Josafá Junior, José Marques Neto, Maxmilian Barros, Matheus Barbosa, Rafael Lima, Rodrigo Costa, Talita de Araujo e Vinícius Souza. Sem a companhia de vocês, esta jornada teria sido muito mais difícil.

Sou grato à equipe administrativa do IM-UFAL e a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação. Reconheço a importância de inúmeras outras pessoas, cuja menção individual foi inviável por questões de brevidade. As contribuições de todos foram igualmente valiosas e marcantes.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas - FAPEAL pelo apoio financeiro concedido durante o mestrado.

Cumpre o pequeno dever de cada momento; faz o que deves e está no que fazes.

- São Josemaria Escrivá.

Resumo

Nesta dissertação, investigamos estimativas para as áreas de superfícies imersas em 3-variedades Riemannianas com curvatura escalar positiva. Em particular, exploramos as técnicas apresentadas por D. Stern, ver [Ste22], que faz uso dos conjuntos de nível de uma aplicação harmônica não trivial $u : M \to \mathbb{S}^1$. Essas técnicas são utilizadas para estabelecer um resultado de rigidez relacionado a desigualdades sistólicas. Posteriormente, adaptamos essa abordagem ao contexto de funções $u : M \to \mathbb{R}$ que são soluções de uma equação de Poisson com um potencial não-crescente. Com essa adaptação, deduzimos uma nova desigualdade sistólica que mantém o mesmo espírito da apresentada por Stern.

Palavras-chave: Estimativas de área; Conjuntos de nível; Desigualdades sistólicas; Equação de Poisson; Rigidez.

Abstract

In this dissertation, we investigate estimates for the areas of surfaces immersed in 3-dimensional Riemannian manifolds with positive scalar curvature. In particular, we explore the techniques presented by D. Stern (see [Ste22]), which utilize the level sets of a nontrivial harmonic map $u : M \to \mathbb{S}^1$. These techniques are employed to establish a rigidity result related to a systolic inequality. Subsequently, we adapt this approach to the context of functions $u : M \to \mathbb{R}$ that are solutions of a Poisson equation with a non-increasing potential. Through this adaptation, we derive a new systolic inequality that preserves the same spirit as the one presented by Stern.

Keywords: Area estimates; Level sets; Systolic inequalities; Poisson equation; Rigidity.

Sumário

Introdução

Um resultado clássico em geometria diferencial, devido a Toponogov [Top63] em 1963, afirma que, se Σ é uma superfície fechada com curvatura gaussiana positiva, $K > 0$, então qualquer geodésica simples fechada γ em Σ satisfaz a seguinte estimativa:

$$\text{length}(\gamma)^2 \inf_{\Sigma}(K) \leq 4\pi^2,$$

onde a igualdade ocorre se e somente se Σ é isométrica à esfera $\mathbb{S}^2$. Esse resultado revelou um fenômeno interessante que conecta a positividade da curvatura com a existência de curvas que minimizam o comprimento.

Em 1979, considerando uma 3-variedade Riemanniana M com curvatura escalar positiva, $\text{Scal} > 0$, Schoen e Yau apresentaram um teorema em [SY79] que garante que qualquer superfície Σ que minimiza área em M é homeomorfa a esfera $\mathbb{S}^2$ ou ao plano projetivo $\mathbb{RP}^2$. O caso específico em que Σ é homeomorfa a planos projetivos que minimizam área foi estudado em 2010 por Bray, Brendle, Eichmair e Neves no artigo [BBEN10]. Eles definiram

$$\mathcal{A}(M) := \inf \{\text{Area}(\Sigma) \ ; \ \Sigma \in F\},$$

onde F denota o conjunto de todas as superfícies $\Sigma \subset M$ tais que Σ é homeomorfa a $\mathbb{RP}^2$. Com isso, obtiveram a seguinte estimativa de área:

$$\mathcal{A}(M) \inf_{M}(\text{Scal}) \leq 12\pi,$$

onde igualdade ocorre se e somente se M é isométrica a $\mathbb{RP}^3$.

No mesmo ano, Bray, Brendle, Eichmair e Neves, em [BBN10], investigaram 3-variedades Riemannianas compactas com curvatura escalar positiva, $\text{Scal} > 0$, e com segundo grupo de homotopia não trivial, $\pi_2(M) \neq 0$. Eles definiram

$$\mathcal{A}(M, g) := \inf \left\{\text{Area}(\mathbb{S}^2, f^*g) : f \in F\right\},$$

onde F é o conjunto de todas as aplicações suaves $f : \mathbb{S}^2 \to M$ que representam um elemento não trivial de $\pi_2(M)$. E estabelecem a seguinte estimativa de área:

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_{M}(\text{Scal}) \leq 8\pi,$$

onde, se a igualdade ocorrer, então o recobrimento universal de M é isométrico a um cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Em 2022, no artigo [Ste22], D. Stern empregou uma abordagem baseada nos conjuntos de nível de uma aplicação harmônica $u : M \to \mathbb{S}^1$ para estudar 3-varieades Riemannianas fechadas, orientadas, com segundo grupo de homologia não trivial e curvatura escalar positiva. Definindo a 2-sístole homólogica

$$\operatorname{sys}_2(M) := \inf \{\operatorname{Area}(\Sigma) \mid \Sigma \subset M, [\Sigma] \neq 0 \in H_2(M; \mathbb{Z})\},$$

onde Σ são superfícies em M, ele obteve a seguinte estimativa:

$$\operatorname{sys}_2(M) \min_M(\operatorname{Scal}_M) \leq 8\pi,$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, o recobrimento universal de M for isométrico a um cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Com base nesses resultados, empregando uma abordagem baseada nos conjuntos de nível de funções $u : M \to \mathbb{R}$ que são soluções da equação de Poisson, obtemos o seguinte resultado:

Lema. Seja M uma 3-variedade Riemanniana fechada e orientada. Se $u : M \to I$, com $I \subset \mathbb{R}$ compacto, é uma solução não trivial da equação $\Delta u = -f(u)$, com f não-crescente, então

$$2\pi \int_{t\in I} \chi(\Sigma_t) \geq \frac{1}{2} \int_{t\in I} \int_{\Sigma_t} \Big(|\nabla u|^{-2}(|f(u)| - |\operatorname{Hess} u|)^2 + \operatorname{Scal}_M - f'(u)\Big). \tag{1}$$

Além disso, considerando M com segundo grupo de homologia não trivial e com curvatura escalar limitada inferiormente, obtemos uma nova desigualdade sistólica:

Teorema. Seja M uma 3-variedade fechada, orientada e com segundo grupo de homologia não trivial, $H_2(M; \mathbb{Z}) \neq 0$. Suponha que $u : M \to I$, com $I \subset \mathbb{R}$ compacto, é uma solução não trivial da equação $\Delta u = -f(u)$, com f não-crescente, e que a curvatura escalar de M é tal que $\operatorname{Scal}_M - f' \geq 0$. Então,

$$\Big(\min_M(\operatorname{Scal}_M) - \max_I(f')\Big)\operatorname{sys}_2(M) \leq 8\pi. \tag{2}$$

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo principal deste capítulo é introduzir definições e resultados fundamentais da geometria das variedades Riemannianas, os quais são essenciais para o desenvolvimento da teoria ao longo desta dissertação. Partiremos de um ponto em que se presume conhecimento prévio sobre variedades Riemannianas, métricas, a conexão de Levi-Civita e geodésicas. Para um estudo mais detalhado, recomenda-se consultar: [DC19], [Pet16], [Lee18b], [Cha84] e [Cam14].

1.1 Curvaturas

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o espaço dos campos de vetores suaves em M, ou seja, campos cujas componentes possuem derivadas parciais de todas as ordens, e essas derivadas são contínuas. Usaremos $C^\infty(M)$ para denotar o conjunto das funções suaves.

Definição 1.1 (Tensor de curvatura)**.** O *tensor de curvatura* R de uma variedade Riemanianna M é uma aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definida por:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \;\; Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.1}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M.

Proposição 1.2. Sejam $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. O tensor de curvatura R goza das seguintes propriedades:

a) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;

b) $R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$;

c) $R(fX+gY,Z)W = fR(X,Z)W + gR(Y,Z)W$;

d) $R(X,fY+gZ)W = fR(X,Y)W + gR(X,Z)W$;

e) $R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$.

Demonstração. As demonstrações dos itens $a)$ e $b)$ seguem direto da definição. Vamos demonstrar o item $c)$, usaremos a definição de R para obter:

$$R(fX + gY, Z) = \nabla_{fX+gY}\nabla_Z - \nabla_Z\nabla_{fX+gY} - \nabla_{[fX+gY,Z]}.$$

Desenvolvendo cada termo do lado direito da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{fX+gY}\nabla_Z &= f\nabla_X\nabla_Z + g\nabla_Y\nabla_Z;\\
\nabla_Z\nabla_{fX+gY} &= f\nabla_Z\nabla_X + Z(f)\nabla_X + g\nabla_Z\nabla_Y + Z(g)\nabla_Y + g\nabla_Z\nabla_Y;\\
\nabla_{[fX+gY,Z]} &= f\nabla_{[X,Z]} - Z(f)\nabla_X + g\nabla_{[Y,Z]} - Z(g)\nabla_Y.
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, vem que

$$\begin{aligned}
R(fX + gY, Z) &= f(\nabla_X\nabla_Z - \nabla_Z\nabla_X - \nabla_{[X,Z]}) + g(\nabla_Y\nabla_Z - \nabla_Z\nabla_Y - \nabla_{[Y,Z]})\\
&= fR(X,Z) + gR(Y,Z).
\end{aligned}$$

A demonstração do item $d)$ procede de maneira análoga. Por fim, para demonstrar o item $e)$, observe que

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y(fZ) &= \nabla_X(f\nabla_Y Z + Y(f)Z)\\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + X(Y(f))Z.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) = f(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)Z + (XY - YX)(f)Z,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)fZ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z + ([X,Y](f))Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + ([Y,X](f))Z\\
&= fR(X,Y)Z.
\end{aligned}$$

□

Quando estudamos o tensor de curvatura no contexto de uma métrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em M, nos deparamos com uma série de simetrias e assimetrias. No resultado a seguir, trataremos de duas assimetrias relevantes para o nosso estudo.

Proposição 1.3. Seja M uma variedade Riemanniana munida com um métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dados $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos as seguintes propriedades:

a) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle$;

b) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = -\langle R(X,Y)W,Z\rangle$.

Demonstração. O item *a)* é imediato. Já o item *b)* é equivalente a $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$, o que provaremos a seguir. Inicialmente, temos que

$$\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = \langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle.$$

Perceba que

$$\langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle,$$

$$\langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle$$

e

$$\langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\rangle = \frac{1}{2}\,[X,Y]\,\langle Z,Z\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,Z\rangle &= X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \frac{1}{2}\,[X,Y]\,\langle Z,Z\rangle \\ &= \frac{1}{2}X(Y\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2}Y(X\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2}\,[X,Y]\,\langle Z,Z\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,[X,Y]\,\langle Z,Z\rangle - \frac{1}{2}\,[X,Y]\,\langle Z,Z\rangle = 0.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Para menções futuras, é conveniente expressar o tensor curvatura R em um sistema de coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ em torno de um ponto $p \in M$. Indicando os vetores coordenados $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, temos que

$$R(e_i,e_j)e_k = \sum_l R^l_{ijk} e_l,$$

onde $R^l_{ijk} = \langle R(e_i,e_j)e_k, e_l\rangle$. Perceba que $R^l_{ijk} = -\langle R(e_i,e_j)e_l, e_k\rangle = -\sum_l R^k_{ijl}$. Daí, podemos escrever

$$R(e_i,e_j)e_k = -\sum_l R^k_{ijl} e_l. \qquad (1.2)$$

Intimamente relacionado com o tensor de curvatura de uma variedade Riemanniana está o *tensor de Ricci*, que passamos a definir por:

Definição 1.4 (Tensor de Ricci)**.** Dado um ponto $p \in M$ e os vetores $u,v,w \in T_pM$. O *tensor de Ricci* em p é definida como o traço $\mathrm{tr}(w \to R(w,u)v)$, isto é,

$$\mathrm{Ric}(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,u)v, e_i\rangle,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal para T_pM.

Da linearidade de R e da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos que o tensor de Ricci é uma aplicação multilinear. Além disso, note que

$$\mathrm{Ric}(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, u)v, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(u, e_i)e_i, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} R(u, e_i)e_i, v \rangle.$$

Daí, definimos a aplicação

$$\mathrm{Ric}(u) = \sum_{i=1}^{n} R(u, e_i)e_i,$$

utilizada para analisar a curvatura em uma direção específica na variedade. Esta aplicação será empregada para introduzirmos a seguinte definição:

Definição 1.5 (Curvatura escalar)**.** Dado um ponto $p \in M$, a *curvatura escalar* de M em p é definida como o traço $\mathrm{tr}(u \to \mathrm{Ric}(u))$, ou seja,

$$\mathrm{Scal}(p) = \sum_{j=1}^{n} \langle \mathrm{Ric}(e_j), e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j \rangle,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal para T_pM.

1.2 Imersões isométricas

Denotaremos por Σ e M variedades Riemannianas de dimensões m e n, respectivamente. Uma aplicação suave $\varphi : \Sigma \to M$ é chamada de *imersão* quando a sua diferencial $d\varphi_p : T_p\Sigma \to T_{\varphi(p)}M$ é injetiva para todo $p \in \Sigma$. O número $k = n - m$ é chamado de *codimensão* de φ. Usualmente, nos referimos a $\varphi(\Sigma)$ como uma *subvariedade imersa* de M e denotamos $\Sigma \subset M$.

Definição 1.6 (Imersão isométrica)**.** Uma imersão $\varphi : \Sigma \to M$ entre variedades Riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ é dita ser uma *imersão isométrica* quando

$$\langle u, v \rangle_\Sigma = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_M,$$

para todo $p \in \Sigma$ e $u, v \in T_p\Sigma$.

Perceba que, quando ocorre uma imersão isométrica, a métrica Riemanniana em M induz naturalmente uma métrica Riemanniana em Σ. Essa nova métrica é chamada de *métrica induzida* por φ. Quando não houver perigo de confusão, denotaremos as métricas de Σ e M por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Para cada ponto $p \in \Sigma$, o produto interno do espaço T_pM induz a seguinte decomposição ortogonal:

$$T_pM = T_p\Sigma \oplus (T_p\Sigma)^\perp,$$

onde $(T_p\Sigma)^\perp$ denota o complemento ortogonal de $T_p\Sigma$ em T_pM.

Além disso, a imersão permite estender um campo local de vetores em Σ a um campo local de vetores em M. Em outras palavras, para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, existe $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\overline{X} = d\varphi_p(X)$. Nesse contexto, diremos que $\overline{X}$ é a extensão de X a M via imersão φ.

Para demonstração do resultado a seguir, é útil notar que, dado $f \in C^\infty(\Sigma)$, pela linearidade do diferencial $d\varphi_p$, temos $\overline{fX} = d\varphi_p fX = f d\varphi_p X = f\overline{X}$.

Proposição 1.7. Sejam $\varphi : \Sigma \to M$ uma imersão isómetrica, ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de Σ e M, respectivamente. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top, \tag{1.3}$$

onde $(\cdot)^\top$ é a projeção ortogonal do fibrado $TM_{|\Sigma}$ sobre o fibrado $T\Sigma$.

Demonstração. Pela unicidade da conexão de Levi-Civita, basta mostrar que (1.3) é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$.

i) É uma conexão linear. De fato, sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f, g \in C^\infty(\Sigma)$, então valem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\nabla_{fX+gY}Z &= (\overline{\nabla}_{f\overline{X}+g\overline{Y}}\overline{Z})^\top = (f\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} + g\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z})^\top = f(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^\top + g(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{Z})^\top \\ &= f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y+Z) &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y}+\overline{Z}))^\top = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^\top = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^\top \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_X(fY) &= (\overline{\nabla}_{\overline{X}} f\overline{Y})^\top = (f\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top + (\overline{X}(f)\overline{Y})^\top = f(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top + X(f)Y \\ &= f\nabla_X Y + X(f)Y.\end{aligned}$$

ii) É simétrica. Com efeito,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top - (\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^\top = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X})^\top = \left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^\top = [X, Y].$$

iii) É compatível com a métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Sigma$. De fato,

$$
\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle_\Sigma &= \overline{X}\langle \overline{Y},\overline{Z}\rangle_M = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}\rangle_M + \langle \overline{Y},\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\rangle_M \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\perp + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top,\overline{Z}\rangle_M + \langle \overline{Y},(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^\perp + (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^\top\rangle_M \\
&= \langle (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top,\overline{Z}\rangle_M + \langle \overline{Y},(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z})^\top\rangle_M \\
&= \langle \nabla_X Y, Z\rangle_\Sigma + \langle Y,\nabla_X Z\rangle_\Sigma.
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar. □

Sejam $X,Y\in\mathfrak{X}(\Sigma)$. Observe que se $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ são extensões de X a M e $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$ são extensões de Y a M, então

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y}_1 - \overline{\nabla}_{\overline{X}_2}\overline{Y}_1 = \overline{\nabla}_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}\overline{Y}_1 = 0,$$

pois $\overline{X}_1-\overline{X}_2=0$ em Σ. Como também,

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y}_1 - \overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y}_2 = \overline{\nabla}_{\overline{X}_1}(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2) = 0,$$

pois $\overline{Y}_1-\overline{Y}_2=0$ ao longo de uma trajetória de X. Daí segue que

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y}_1 = \overline{\nabla}_{\overline{X}_2}\overline{Y}_2.$$

Portanto, escrevendo $\overline{\nabla}_X Y$ para denotar $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$, onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ denotam extensões quaisquer de X e Y a M, obtemos um campo vetorial bem definido $\overline{\nabla}_X Y\in TM_{|\Sigma}$.

1.2.1 Segunda forma fundamental

Seja $\varphi:\Sigma\to M$ uma imersão isométrica. Para as conexões $\overline{\nabla}$ e ∇, respectivamente, de M e Σ, temos

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp = \nabla_X Y + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp, X,Y\in\mathfrak{X}(\Sigma),$$

onde $(\cdot)^\perp$ é a projeção ortogonal do fibrado tangente $TM_{|\Sigma}$ sobre o fibrado normal $T\Sigma^\perp$. Escrevendo $\alpha(X,Y):=(\overline{\nabla}_X Y)^\perp$, definimos a *segunda forma fundamental* de φ como a aplicação bilinear simétrica $\alpha:\mathfrak{X}(\Sigma)\times\mathfrak{X}(\Sigma)\to\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ dada por

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

A prova de que α é bilinear segue direto das propriedades de uma conexão linear. A prova de que α é simétrica também é direta, uma vez que

$$\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp} - (\overline{\nabla}_Y X)^{\perp} = [X,Y]^{\perp} = 0.$$

Seja $\overline{\nabla}_X \mathcal{N}$ a derivada covariante de um campo normal $\mathcal{N} \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$ na direção de um campo tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Pela decomposição ortogonal, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X \mathcal{N} = (\overline{\nabla}_X \mathcal{N})^{\top} + (\overline{\nabla}_X \mathcal{N})^{\perp}$$

Definindo $A_{\mathcal{N}} X := -(\overline{\nabla}_X \mathcal{N})^{\top}$ e $\nabla^{\perp}_X \mathcal{N} := (\overline{\nabla}_X \mathcal{N})^{\perp}$, obtemos a *equação de Weingarten*:

$$\overline{\nabla}_X \mathcal{N} = -A_{\mathcal{N}} X + \nabla^{\perp}_X \mathcal{N}. \tag{1.4}$$

Definimos ainda o *operador de Weingarten* da imersão φ na direção $\mathcal{N}$, como sendo o operador $A_{\mathcal{N}} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definido por $X \mapsto A_{\mathcal{N}} X$. O operador de Weingarten se relaciona com a segunda forma fundamental a partir do seguinte resultado:

Proposição 1.8. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\mathcal{N} \in \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$, então

$$\langle A_{\mathcal{N}} X, Y \rangle = \langle \alpha(X,Y), \mathcal{N} \rangle. \tag{1.5}$$

Demonstração. Inicialmente observe que $X\langle Y, \mathcal{N} \rangle = 0$, pois $\langle Y, \mathcal{N} \rangle = 0$. Daí,

$$\langle \overline{\nabla}_X Y, \mathcal{N} \rangle + \langle \overline{\nabla}_X \mathcal{N}, Y \rangle = 0$$

e como $\langle (\overline{\nabla}_X Y)^{\top}, \mathcal{N} \rangle = 0$, segue que

$$-\langle \overline{\nabla}_X \mathcal{N}, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - (\overline{\nabla}_X Y)^{\top}, \mathcal{N} \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \mathcal{N} \rangle = \langle \alpha(X,Y), \mathcal{N} \rangle.$$

Por outro lado, temos

$$-\langle \overline{\nabla}_X \mathcal{N}, Y \rangle = -\langle (\overline{\nabla}_X \mathcal{N})^{\top} + (\overline{\nabla}_X \mathcal{N})^{\perp}, Y \rangle = -\langle (\overline{\nabla}_X \mathcal{N})^{\top}, Y \rangle = \langle A_{\mathcal{N}} X, Y \rangle.$$

Logo, $\langle A_{\mathcal{N}} X, Y \rangle = \langle \alpha(X,Y), \mathcal{N} \rangle$, como desejado. □

Segue direto de (1.5) e da simétria da segunda forma fundamental, que o operador de Weingarten é auto-adjunto. De fato,

$$\langle A_{\mathcal{N}} X, Y \rangle = \langle \alpha(X,Y), \mathcal{N} \rangle = \langle \alpha(Y,X), \mathcal{N} \rangle = \langle A_{\mathcal{N}} Y, X \rangle.$$

1.2.2 As equações fundamentais

Para referências posteriores, precisamos discutir algumas relações entre a curvatura intrínseca e extrínseca de uma subvariedade em uma variedade ambiente. Uma ferramenta essencial para tal discussão é a igualdade

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \tag{1.6}$$

conhecida na literatura como *fórmula de Gauss*. Por meio dela, conseguimos relacionar o tensor de curvatura R_M da variedade M com o tensor de curvatura R_Σ da variedade Σ. Com efeito, se $\varphi : \Sigma \to M$ é uma imersão isométrica e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, podemos usar (1.6), para reescrever (1.1) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
R_M(X,Y)Z =& \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z) - \overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z) - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
=& \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \alpha(X,Z)) - (\nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z)) \\
=& \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \alpha(Y,Z) - \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z - \overline{\nabla}_Y \alpha(X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
& - \alpha((\nabla_X Y - \nabla_Y X), Z) \\
=& \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) + \overline{\nabla}_X \alpha(Y,Z) - \nabla_Y \nabla_X Z - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\
& - \overline{\nabla}_Y \alpha(X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z - \alpha(\nabla_X Y, Z) + \alpha(\nabla_Y X, Z)
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}
R_M(X,Y)Z =& R_\Sigma(X,Y)Z + \{\overline{\nabla}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)\} \\
& - \{\overline{\nabla}_Y \alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z)\}.
\end{aligned}$$

Aplicando a equação de Weingarten (1.4), segue que

$$\begin{aligned}
R_M(X,Y)Z =& R_\Sigma(X,Y)Z + \{-A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)\} \\
& - \{-A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^\perp_Y \alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z)\} \\
=& R_\Sigma(X,Y)Z + \{\nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)\} \\
& - \{\nabla^\perp_Y \alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z)\} + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X.
\end{aligned}$$

Definindo o operador $(\nabla^\perp_X \alpha) : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$, pondo

$$(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Obtemos,

$$\begin{aligned} R_M(X,Y)Z =& R_\Sigma(X,Y)Z + (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z) \\ &+ A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A partir de (1.7) obtemos os itens $a)$ e $b)$ a seguir, conhecidos na literatura como *as equações fundamentais de Gauss e Codazzi*.

Proposição 1.9. Se $\varphi : \Sigma \to M$ é uma imersão isométrica, e $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\mathcal{N} \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$, então

a) (Gauss). $\langle R_M(X,Y)Z, W\rangle = \langle R_\Sigma(X,Y)Z, W\rangle + \langle A_{\alpha(X,Z)}Y, W\rangle - \langle A_{\alpha(Y,Z)}X, W\rangle$;

b) (Codazzi). $\langle R_M(X,Y)Z, \mathcal{N}\rangle = \langle (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z), \mathcal{N}\rangle$.

Demonstração. O resultado segue direto da equação (1.7), para obter a equação de Gauss basta tomar o produto com o campo tangente W, para obter a equação de Codazzi, basta tomar o produto com o campo normal $\mathcal{N}$. □

Observe ainda que, utilizando (1.5), podemos reescrever a Equação de Gauss, pondo:

$$\begin{aligned} \langle R_M(X,Y)Z, W\rangle =& \langle R_\Sigma(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(Y,W), \alpha(X,Z)\rangle \\ &- \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle. \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.2.3 Hipersuperfícies

Seja $\Sigma \subset M$ uma subvariedade imersa de M. Quando a codimensão da imersão é igual a 1, dizemos que Σ é uma *hipersuperfície* de M. Além disso, para o que se segue, usaremos o termo *hipersuperfície 2-lados* para nos referirmos a hipersuperfícies que possuem um campo normal unitário contínuo globalmente definido. No caso particular em que Σ é uma hipersuperfície 2-lados, temos que $\dim((T_p\Sigma)^\perp) = 1$. Logo, existe um único campo normal unitário $\mathrm{N} \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$. Neste caso, denotaremos o operador de Weingarten simplesmente por $A := A_{\mathrm{N}}$.

Já que $\alpha(X,Y) \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$, existe uma constante não nula $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(X,Y) = c_0\mathrm{N}$. Perceba que de (1.5) segue que

$$c_0 = \langle \alpha(X,Y), \mathrm{N}\rangle = \langle AX, Y\rangle.$$

Analogamente, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1 = \langle \alpha(Y,W), \mathrm{N}\rangle = \langle AY, W\rangle;$$

$$c_2 = \langle \alpha(X,Z), \mathrm{N}\rangle = \langle AX, Z\rangle.$$

Logo, vale que

$$\langle \alpha(Y,W), \alpha(X,Z)\rangle = \langle c_1\mathrm{N}, c_2\mathrm{N}\rangle = c_1c_2 = \langle AY, W\rangle\langle AX, Z\rangle.$$

Da mesma forma, temos

$$\langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle = \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle.$$

Substituindo estes termos na equação (1.8), obtemos uma nova expressão para a equação de Gauss:

$$\langle R_M(X,Y)Z, W\rangle = \langle R_\Sigma(X,Y)Z, W\rangle + \langle AY, W\rangle\langle AX, Z\rangle - \langle AX, W\rangle\langle AY, Z\rangle.$$

Para o resultado a seguir, definiremos a *curvatura média* de φ em $p \in \Sigma$, como sendo o traço do operador de Weingarten, ou seja,

$$H = \mathrm{tr}(X \to AX) = \sum_{i=1}^{n-1}\langle Ae_i, e_i\rangle,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ é uma base ortonormal para $T_p\Sigma$.

Proposição 1.10. Sejam Σ uma hipersuperfície de M e $u, v \in T_p\Sigma$. Se Σ é uma subvariedade 2-lados, então

$$\mathrm{Ric}_\Sigma(u,v) = \mathrm{Ric}_M(u,v) - \langle R_M(u,\nu)\nu, v\rangle + H\langle Au, v\rangle - \langle Au, Av\rangle, \tag{1.9}$$

onde $\nu \in (T_p\Sigma)^\perp$ é o vetor normal unitário.

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n = \nu\}$ uma base ortonormal para T_pM, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_M(u,v) =& \sum_{i=1}^{n}\langle R_M(u,e_i)e_i, v\rangle \\
=& \langle R_M(u,\nu)\nu, v\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}\langle R_M(u,e_i)e_i, v\rangle \\
=& \langle R_M(u,\nu)\nu, v\rangle + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(\langle R_\Sigma(u,e_i)e_i, v\rangle + \langle Ae_i, v\rangle\langle Au, e_i\rangle \\
& - \langle Au, v\rangle\langle Ae_i, e_i\rangle\Big) \\
=& \langle R_M(u,\nu)\nu, v\rangle + \mathrm{Ric}_\Sigma(u,v) + \langle Au, Av\rangle - \langle Au, v\rangle H.
\end{aligned}$$

Reagrupando os termos obtemos o resultado desejado. □

Com este resultado, conseguimos chegar a uma expressão conhecida como *truque de Schoen-Yau* bastante utilizada no contexto de hipersuperfícies, ela relaciona a curvatura escalar da variedade ambiente com a curvatura escalar da hipersuperfície.

Proposição 1.11 (Truque de Schoen-Yau)**.** Se $\Sigma \subset M$ é uma hipersuperficie 2-lados, então

$$\mathrm{Scal}_{\Sigma} = \mathrm{Scal}_M - 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu, \nu) + H^2 - |A|^2. \tag{1.10}$$

Demonstração. Tomando uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n = \nu\}$ para T_pM, por (1.9) temos que

$$\mathrm{Ric}_{\Sigma}(e_i, e_i) = \mathrm{Ric}_M(e_i, e_i) - \langle R_M(e_i, \nu)\nu, e_i\rangle + H\langle Ae_i, e_i\rangle - \langle Ae_i, Ae_i\rangle.$$

Fazendo o somatório, temos

$$\mathrm{Scal}_{\Sigma} = \mathrm{Scal}_M - 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu, \nu) + H^2 - |A|^2.$$

Como queriamos demonstrar. □

1.3 Operadores diferenciais em variedades

1.3.1 Gradiente; Divergência; Laplaciano; Hessiano

Definição 1.12 (Gradiente)**.** Dada uma função suave $f \in C^\infty(M)$, definimos o *gradiente* de f como sendo o único campo vetorial ∇f que satisfaz

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f), \tag{1.11}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.13. Para funções suaves $f, g \in C^\infty(M)$, valem as seguintes propriedades:

a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Tomando um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\langle \nabla(f + g), X\rangle = X(f + g) = X(f) + X(g) = \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle.$$

Da mesma forma, segue que

$$\langle \nabla(fg), X\rangle = X(fg) = gX(f) + fX(g) = g\langle \nabla f+, X\rangle + f\langle \nabla g, X\rangle = \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle.$$

Logo, pela arbitráriedade de X, fica demostrado a proposição. □

Ao expressar o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ em um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em torno de um ponto $p \in M$, temos $X = \sum_{j=1}^{n} X^j e_j$. Assim,

$$X(f) = \sum_{j=1}^{n} X^j e_j(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle X^j e_j, e_i(f) e_i \rangle = \langle X, \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i \rangle.$$

Dessa forma, pela definição de gradiente, podemos escrever

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Definição 1.14 (Divergência)**.** Dado um campo suave $X \in \mathfrak{X}(M)$. A *divergência* de X no ponto $p \in M$ é a função suave $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$ definida pelo traço $\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}\{Y(p) \to (\nabla_Y X)(p)\}$, isto é,

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em torno de um ponto $p \in M$.

Proposição 1.15. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, a divervgência de um campo vetorial possui as seguintes propriedades:

a) $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;

b) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração. O item *a*) segue direto da definição de divergência e da linearidade da métrica. Para o item *b*), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} f X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i(f) X + f \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i(f) e_i, X \rangle + \sum_{i=1}^{n} f \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i, X \rangle + f \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
&= \langle \nabla f, X \rangle + f \operatorname{div} X.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.16 (Teorema da Divergência)**.** Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientada com bordo. Para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, dV_M = \int_{\partial M} \langle X, \mathrm{N} \rangle dV_{M\tilde{g}},$$

onde N é o campo vetorial normal unitário e $\tilde{g}$ é a métrica Riemanniana induzida em ∂M.

Demonstração. Ver Teorema 16.32 de [Lee12]. □

No caso em que M variedade Riemanniana compacta e orientada sem bordo ($\partial M = 0$), o teorema implica que

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, dV_M = 0.$$

Definição 1.17 (Laplaciano de Beltrami)**.** Dada uma função suave $f \in C^\infty$, definimos o *laplaciano de Beltrami* de f como sendo a função suave Δf, dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{1.12}$$

Ao tomar $X = \nabla f$, com $f \in C^\infty(M)$, segue do Teorema da Divergência que

$$\int_M \Delta f \, dV_M = 0. \tag{1.13}$$

Proposição 1.18. Sejam $f, g \in C^\infty$, vale que

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.$$

Demonstração. De fato, pela Proposição 1.13 e Preposição 1.15, segue que

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= \operatorname{div}(\nabla(fg)) = \operatorname{div}(f\nabla g + g\nabla f)\\
&= \operatorname{div}(f\nabla g) + \operatorname{div}(g\nabla f)\\
&= (f\operatorname{div}(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle) + (g\operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle)\\
&= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.
\end{aligned}$$

□

Um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é dito *geodésico* em $p \in M$ quando $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Fixado $p \in M$ e tomando $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$ de p que é geodésico em p, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n (e_i\langle \nabla f, e_i\rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i\rangle))\\
&= \sum_{i=1}^n e_i\langle \nabla f, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n e_i\langle \sum_{j=1}^n e_j(f)e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)).
\end{aligned}$$

Definição 1.19 (Hessiano)**.** Dada uma função suave $f \in C^\infty(M)$, definimos o *hessiano* de f como sendo o tensor $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$, definido por

$$(\operatorname{Hess} f)(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observe que o hessiano é um tensor símetrico. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Hess} f)(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X\langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \qquad \text{(cf. (1.11))} \\
&= Y(X(f)) + [X, Y](f) - \nabla_Y X(f) \\
&= Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) \\
&= Y\langle \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle \\
&= (\operatorname{Hess} f)(Y, X).
\end{aligned}$$

Outra propriedade interessate do hessiano é que seu traço corresponde ao operador laplaciano. De fato, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal, temos que

$$\operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Hess} f)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f.$$

1.3.2 Desigualdade de Kato e Fórmula de Bochner

Sejam $|\nabla f|$ e $|\operatorname{Hess} f|$ as normas do vetor gradiente e do operador hessiano, respectivamente. Tomando um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, temos que

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^{n} = (e_i(f))^2 \quad e \quad |\operatorname{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle)^2.$$

Para referências futuras neste trabalho, destacamos que

$$|\nabla f|^2 = \sum_i (e_i(f))^2 = \sum_i \langle \nabla f, e_i \rangle^2 = \sum_i (df(e_i))^2 = |df|^2. \tag{1.14}$$

Agora, vamos retomar o foco no tema principal desta subseção:

Proposição 1.20 (Desigualdade de Kato)**.** Dada uma função suave $f \in C^\infty(M)$, vale a seguinte desigualde

$$|\operatorname{Hess} f|^2 - |\nabla |\nabla f||^2 \geq 0. \tag{1.15}$$

Demonstração. Inicialmente, observe que se $\nabla f = 0$ o resultado é trivial, considere então

$\nabla f \neq 0$. Tome um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ com $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e escreva

$$|\nabla|\nabla f||^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i(|\nabla f|))^2 = (e_1(|\nabla f))^2 + \sum_{i=2}^{n} (e_i(|\nabla f|))^2.$$

Perceba que

$$(e_1(|\nabla f|))^2 = \left(e_1(\sqrt{\langle \nabla f, \nabla f \rangle})\right)^2 = \left(\frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla_{e_1} \nabla f, \nabla f \rangle\right)^2 = (\mathrm{Hess}(e_1, e_1))^2.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} (e_i(|\nabla f|))^2 &= \sum_{i=2}^{n} \left(e_i(\sqrt{\langle \nabla f, \nabla f \rangle})\right)^2 = \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f\right)^2 \\ &= \sum_{i=2}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_1 \rangle)^2 = \sum_{i=2}^{n} (\mathrm{Hess}\, f(e_i, e_1))^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$|\nabla|\nabla f||^2 = (\mathrm{Hess}(e_1, e_1))^2 + \sum_{i=2}^{n} (\mathrm{Hess}\, f(e_i, e_1))^2. \tag{1.16}$$

Agora, olhando para $|\mathrm{Hess}\, f|^2$, podemos ver que

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess}\, f|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_1 \rangle)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle)^2 \\ &= (\langle \nabla_{e_1} \nabla f, e_1 \rangle)^2 + \sum_{i=2}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_1 \rangle)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle)^2 \\ &= (\mathrm{Hess}(e_1, e_1))^2 + \sum_{i=2}^{n} (\mathrm{Hess}\, f(e_i, e_1))^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle)^2.\end{aligned}$$

Pela a expressão (1.16), segue que

$$|\mathrm{Hess}\, f|^2 = |\nabla|\nabla f||^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=2}}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle)^2 \geq |\nabla|\nabla f||^2.$$

Daí, cocluimos que $|\mathrm{Hess}\, f|^2 - |\nabla|\nabla f||^2 \geq 0$. □

Observe que da definição $\mathrm{Hess}\, f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$, utilizando um referencial ortonormal, podemos escrever $\nabla_{e_i} \nabla f = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle e_j$, daí vale

$$|\mathrm{Hess}\, f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} \nabla f)^2 = |\nabla \nabla f|^2. \tag{1.17}$$

Proposição 1.21 (Fórmula de Bochner)**.** Se $f \in C^\infty(M)$, então vale

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\mathrm{Hess}\, f|^2. \tag{1.18}$$

Demonstração. Fixe $p \in M$ e tome $(e_1, \ldots, e_n)$ um referencial ortonormal, geodésico em p. Então, temos em p que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}|\nabla f|^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\,\mathrm{Hess}|\nabla f|^2)(e_i, e_i)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n e_i(e_i\langle \nabla f, \nabla f\rangle) = \sum_{i=1}^n e_i\langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + |\nabla\nabla f|^2\\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + |\mathrm{Hess}\, f|^2 \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Agora, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f + \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle. \tag{1.20}$$

Como o referencial é geodésico em p, temos que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, de sorte que

$$\sum_{i=1}^n \langle \nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n (X\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X e_i\rangle) = X(\Delta f) = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle \tag{1.21}$$

em p. Utilizando novamente que o referencial é geodésico em p, juntamente com o fato de $\mathrm{Hess}\, f$ ser um operador símetrico, obtemos sucessivamente, em p,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f + \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle\\
=&\sum_{i=1}^n \Big(e_i\langle \nabla_X\nabla f, e_i\rangle - \langle \nabla_X\nabla f, \nabla_{e_i}e_i\rangle + \langle \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle\Big)\\
=&\sum_{i=1}^n (e_i\langle \nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, [X, e_i]\rangle)\\
=&\sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}X\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_X e_i - \nabla_{e_i}X\rangle)\\
=&\sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.21) e (1.22) em (1.20), segue que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle - \sum_{i=1}^{n} (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle. \tag{1.23}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle &= \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle \\
&= \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, X)\nabla f, e_i\rangle \\
&= \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle + \mathrm{Ric}(X, \nabla f).
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $X = \nabla f$ na última relação acima e substituindo em (1.19) obtemos (1.18). $\square$

Capítulo 2

Formas Diferenciais e Aplicações Harmônicas

Este capítulo foi elaborado com o objetivo principal de apresentar os argumentos utilizados na abordagem das estimativas de área, com aplicações harmônicas $u : M \to \mathbb{S}^1$. Tomamos [Lee12], [Jos08], [Wu13] e [LW08] como referências para o desenvolvimento desse capítulo.

2.1 Formas diferenciais

Seja M uma n-variedade Riemanniana e $(x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de $p \in M$. A base natural do espaço T_pM correspondente a esse sistema é $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. A base dual associada no espaço cotangente $(T_pM)^*$ é o conjunto $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ definido de tal maneira que satisfaça a relação

$$dx^i(e_j) = \delta^i_j,$$

onde δ^j_i é o delta de Kronecker.

Podemos definir o *espaço produto exterior* em p como sendo

$$\Lambda^k(T^*_p(M)) = T^*_p(M) \wedge \ldots \wedge T^*_p(M)$$

e $\Lambda^k(M)$ o *espaço de produto exterior* sobre M com fibrado $T^*_p(M)$ sobre $p \in M$. Denotaremos por $\Omega(M)$ o espaço das seções de $\Lambda^k(M))$, isto é, o espaço cujos elementos ω podem ser escrito como

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

Por simplicidade, definindo $I = \{1 \leq \iota_1 < \cdots < \iota_k \leq n\}$ um conjunto de multi-índices, denotaremos

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I.$$

Os elementos ω são aplicações multilineares e anti-simétricas, e são chamados de *k-formas diferenciais.*

Definição 2.1 (Produto exterior)**.** Dadas as formas $\omega \in \Omega^k$ e $\eta \in \Omega^r(M)$. Definimos o *produto exterior* $\omega \wedge \eta$ como sendo a $(k+r)$-forma dada por

$$\omega \wedge \eta = \sum_{IJ} \omega_I \eta_J dx^I \wedge dx^J.$$

Definição 2.2 (Produto Interior)**.** Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$. Definimos a aplicação $\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$, chamada de *produto interior* em X, pondo

$$\iota_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}),$$

onde $Y_1, \dots, Y_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.3 (Derivada exterior)**.** A derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ é dada por

$$d\omega = d\Big(\sum_I \omega_I dx^I\Big) = \sum_I \sum_j \frac{\partial \omega_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I.$$

Proposição 2.4. Se $\omega \in \Omega^k(M)$, então $d^2\omega = (d \circ d)\omega = 0$.

Demonstração. É suficiente provar o resultado para formas do tipo

$$\omega(p) = f(p) dx^{i_1} \wedge dx^{i_k},$$

em que f é uma função suave. O resultado geral, segue pela linearidade da soma. Neste caso,

$$\begin{aligned}(d \circ d)\omega &= d\Big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^n \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}}\Big)\\ &= \sum_j \sum_i \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^n \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\\ &= 0,\end{aligned}$$

pois

$$\frac{\partial^2 \eta_{i_1,\dots,i_{k-1}}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 \eta_{i_1,\dots,i_{k-1}}}{\partial x^i \partial x^j} \quad e \quad dx^j \wedge dx^n = -dx^i \wedge dx^j.$$

□

Proposição 2.5. Dados $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^r(M)$, valem as seguintes propriedades:

a) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kr}(\eta \wedge \omega)$;

b) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;

c) $\iota_X(\omega \wedge \eta) = \iota_X \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_X \eta$.

Demonstração. Ver Proposição 14.11, Lema 14.13 e Teorema 14.24 de [Lee12]. □

Teorema 2.6 (Teorema de Stokes)**.** Sejam M uma n-variedade Riemanniana orientada com fronteira e ω uma $(n-1)$-forma diferenciável com suporte compacto em M. Então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demonstração. Ver Teorema 16.11 de [Lee12]. □

Em uma variedade Riemanniana M, a métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ fornece uma maneira natural de identificar os espaços $\Omega^1(M)$ e TM por meio do *operador sustenido* $\sharp$, que mapeia uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$ em um vetor $\omega^\sharp \in TM$, definido implicitamente pela relação

$$\langle \omega^\sharp, X \rangle = \omega(X), \tag{2.1}$$

para todo $X \in TM$. Em um sistema de coordenadas, temos

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i \quad e \quad \omega^\sharp = \sum_{i=1}^n \omega^i e_i,$$

onde as componentes ω^i são definidas pela relação $\omega^i = g^{ij}\omega_j$, com g^{ij} sendo as componentes da inversa da métrica g.

Comparando (2.1) com (1.11) na definição de gradiente, podemos ver que o vetor gradiente ∇f está relacionado a forma diferencial df através do operador sustenido, ou seja,

$$df^\sharp = \nabla f. \tag{2.2}$$

2.1.1 O Laplaciano de Hodge

É necessário realizar algumas preparações em álgebra linear. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja $\Lambda^k(V)$ o produto exterior (k vezes) de V. Definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V) \to \mathbb{R}$ por

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle). \tag{2.3}$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base ortonormal de V, então $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, forma uma base ortonormal de $\Lambda^k(V)$.

Uma orientação em V é obtida distinguindo-se uma base de V como positiva. Qualquer outra base obtida a partir dessa por uma mudança de base com determinante positivo também é chamada de positiva, e as bases restantes são chamadas de negativas.

Fixada uma orientação em V e uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, definimos o operador linear *estrela*

$$\star : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V), \quad (0 \leq k \leq n)$$

por

$$\star(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}},$$

onde $j_1, \ldots, j_{n-k}$ são selecionados de tal maneira que $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-k}}$ forma uma base positiva de V. Em particular, se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base ortonormal positiva, então

$$\star\,(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1, \tag{2.4}$$

$$\star\,(1) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \tag{2.5}$$

O operador $\star$ está bem definida, ou seja, não depende da base ortonormal escolhida (ver [Jos08], Seção 3.3).

Lema 2.7. Dados $\omega, \eta \in \Lambda^k(V)$, nós temos

$$\langle \omega, \eta \rangle = \star(\omega \wedge \star\eta).$$

Demonstração. É suficiente demonstrarmos o resultado para elementos de uma base ortonormal de $\Lambda^k(V)$. Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal positiva de V, e escreva $\omega = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $\eta = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$ e $\star\eta = e_{h_1} \wedge \cdots \wedge e_{h_{n-k}}$.

Se $\{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\}$, então $h_l \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ para algum $h_l \in \{h_1, \ldots, h_{n-k}\}$. Assim, $\omega \wedge \eta = 0$, e consequentemente $\langle \omega, \eta \rangle = 0 = \star(\omega \wedge \star\eta)$.

Podemos então supor que $\omega = \eta = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\star(\omega \wedge \star\eta) &= \star(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \wedge \star(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k})) \\
&= \star(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k} \wedge e_{h_1} \wedge \cdots \wedge e_{h_{n-k}}) \\
&= 1 && \text{(cf. (2.4))} \\
&= \det(\langle e_{j_r}, e_{j_s} \rangle) \\
&= \langle \omega, \eta \rangle && \text{(cf. (2.3))}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.8. O operador estrela satisfaz

$$\star\star = (-1)^{k(n-k)} : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(V).$$

Demonstração. Seja $\omega = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, onde $e_1, \ldots, e_n$ é uma base ortonormal de V. Por definição,

$$\star\omega = \star(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}},$$

onde $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-k}}$ é uma base ortonormal positiva de V. Portanto,

$$\star \star \omega = \star(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}) = \epsilon\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = \epsilon\, \omega,$$

onde $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$ dependendo se a base ortonormal $e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-k}}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ é positiva ou negativa, respectivamente. Por outro lado, segue do lema anterior que

$$1 = \langle \star\omega, \star\omega \rangle = \star(\star\omega \wedge \star\omega) = \star(\star\omega \wedge \omega) = \epsilon(-1)^{k(n-k)} \star (\omega \wedge \star\omega) = \epsilon(-1)^{k(n-k)} \langle \omega, \omega \rangle.$$

Portanto, $\epsilon = (-1)^{k(n-k)}$, o que garante $\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$. O caso geral segue por linearidade. □

Lema 2.9. Seja $v_1, \ldots, v_n$ uma base positiva qualquer de V. Então

$$\star(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

Demonstração. Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base ortonormal positiva. Então,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

e o resultado decorre direto de (2.5). □

Seja M uma n-variedade Riemanniana orientada. Fixemos uma orientação em cada um dos espaços tangentes T_pM, assim como nos espaços cotangentes T_p^*M. Como M possui uma estrutura Riemanniana, temos um produto interno em cada T_p^*M, tal que

$$\langle dx^i, dx^j \rangle = g^{ij},$$

onde g^{ij} é a matriz inversa da métrica Riemanniana g_{ij}. Assim, obtemos um operador estrela

$$\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M).$$

Já que a métrica em T_p^*M é dada por $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$, pelo Lema 2.9, segue que em coordenadas locais

$$\star(1) = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Essa expressão é chamada de *forma de volume*. Em particular,

$$\mathrm{Vol}(M) := \int_M \star(1). \quad \text{e} \quad dV_M = \star(1),$$

onde dV_M representa o elemento de volume de M.

Para $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ com suporte compacto. O L^2-produto em $\Omega^k(M)$ é definido como

$$(\omega, \eta) = \int_M \langle \omega, \eta \rangle \star (1),$$

ou ainda, pelo Lema 2.7,

$$(\omega, \eta) = \int_M \omega \wedge \star\eta.$$

Vamos usar o operador estrela para introduzirmos os conceitos de operação adjunta e Laplaciano dentro da teoria de Hodge para k-formas.

Daqui em diante vamos trabalhar com variedades fechadas (compacta e sem bordo).

Definição 2.10 (Operador adjunto)**.** A adjunta da derivada exterior d, em relaçao ao produto interno L^2, é uma aplicação $\delta : \omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ definida de forma que

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta),$$

com $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e $\eta \in \Omega^k(M)$.

Lema 2.11. O operador $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ satisfaz

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star .$$

Demonstração. Sejam $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ e $\eta \in \Omega^k(M)$. Temos

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \star\eta) &= d\omega \wedge \star\eta + (-1)^{k-1}\omega \wedge d \star \beta \\ &= d\omega \wedge \star\eta + (-1)^{k-1}(-1)^{(k-1)(n-k+1)}\omega \wedge \star\star (d \star \eta) \quad \text{(cf. Lema 2.8).} \\ &= d\omega \wedge \star\eta - (-1)^{n(k+1)+1}\omega \wedge \star(\star d \star \eta), \end{aligned}$$

onde acima usamos que $d \star \eta \in \Omega^{n-k+1}(M)$ e $(k-1)(n-k+2) \equiv n(k+1) + 2 \mod 2$. Portanto, segue do Teorema de Stokes que

$$\begin{aligned} (d\omega, \eta) &= \int_M d\omega \wedge \star\eta \\ &= \int_M (-1)^{n(k+1)+1}\omega \wedge \star(\star d \star \eta) \\ &= (\omega, (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star \eta). \end{aligned}$$

Como isto vale para todo $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, segue da definição que $\delta\eta = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star \beta$, como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 2.12 (Laplaciano de Hodge)**.** O Laplaciano de Hodge em $\Omega^k(M)$ é definido por

$$\begin{aligned} \Delta_H &= -(d\delta + \delta d) : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M), \qquad \text{para } 1 \leq k \leq n; \\ \Delta_H &= -(\delta d) : \Omega^0(M) \to \Omega^0(M), \qquad \text{para } k = 0. \end{aligned}$$

Dizemos que uma k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ é harmônica quando $\Delta_H \omega = 0$.

Observe que o operador Δ é formalmente auto-adjunto, pois,

$$\begin{aligned} (\Delta_H \omega, \eta) &= -((d\delta\omega, \eta) + (\delta d\omega, \eta)) = -((\delta\omega, \delta\eta) + (d\omega, d\eta)) = -((\omega, d\delta\eta) + (\omega, \delta d\eta)) \\ &= (\omega, \Delta_H \eta). \end{aligned}$$

Proposição 2.13. Para qualquer $\omega \in \Omega^k(M)$, $\Delta_H \omega = 0$ se, e somente se, $d\omega = \delta\omega = 0$.

Demonstração. Suponha que $\Delta_H \omega = 0$. Observe que

$$(\Delta_H \omega, \omega) = -((d\delta\omega, \omega) + (\delta d\omega, \omega)) = -(\delta\omega, \delta\omega) - (d\omega, d\omega).$$

Ambos os termos do lado direito são não-positivos. Logo $d\omega = \delta\omega = 0$. A recíproca é imediata. □

Proposição 2.14. Para $\omega \in \Omega^1(M)$ temos que

$$\delta\omega = -\mathrm{div}(\omega^\sharp).$$

Demonstração. Tome $f \in C^\infty(M)$. Observe que

$$\begin{aligned} \int_M f\, \delta\omega\, dM = (\delta\omega, f) = (\omega, df) &= \int_M \langle \omega, df \rangle \; dM \\ &= \int_M \sum_i \langle \omega e_i, df e_i \rangle \; dV_M \\ &= \int_M \sum_i \left(\langle \langle \omega^\sharp, e_i \rangle, \langle df^\sharp, e_i \rangle \rangle \right) dV_M \\ &= \int_M \langle \omega^\sharp, df^\sharp \rangle dV_M \\ &= \int_M \langle \omega^\sharp, \nabla f \rangle dV_M. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Preposição 1.15, temos

$$\mathrm{div}(f\omega^\sharp) = \langle \nabla f, \omega^\sharp \rangle + f\, \mathrm{div}(\omega^\sharp).$$

Logo,

$$\int_M \langle \omega^\sharp, \nabla f \rangle dV_M = \int_M \left(\mathrm{div}(f\omega^\sharp) - f \mathrm{div}(\omega^\sharp) \right) dV_M.$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_M \operatorname{div}(f\omega^\sharp)\, dV_M = 0.$$

Portanto,

$$\int_M \langle \omega^\sharp, \nabla f\rangle dM = \int_M -f\operatorname{div}(\omega^\sharp) dM.$$

Assim, concluiomos que

$$\int_M f\,\delta\omega\, dM = \int_M -f\operatorname{div}(\omega^\sharp) dM.$$

O que implica no resultado desejado. $\square$

Em particular, para $f \in C^\infty(M)$

$$\Delta_H f = -(\delta df) = -\delta(df) = \operatorname{div}(df^\sharp) = \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f.$$

Ou seja, o Laplaciano de Hodge é uma generalização do Laplaciano de Beltrami (1.12). Assim, denotaremos o Laplaciano de Hodge por Δ.

2.1.2 Identidade de Bochner-Weitzenböck

Definição 2.15. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^1(M)$, definimos uma conexão D em $\Omega^1(M)$ pondo:

$$(D_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y).$$

Proposição 2.16. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$. A conexão D goza das seguintes propriedades:

a) $D_{(fX+gY)}\omega = fD_X\omega + gD_Y\omega$;

b) $D_X(\omega + \eta) = D_X\omega + D_X\eta$;

c) $D_X(f\omega) = fD_X\omega + X(f)\omega$.

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(D_{(fX+gY)}\omega)(Z) &= (fX + gY)(\omega(Z)) - \omega(\nabla_{(fX+gY)}Z) \\
&= fX(\omega(Z)) + gY(\omega(Z)) - \omega(f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z) \\
&= fX(\omega(Z)) - \omega(f\nabla_X Z) + gY(\omega(Z)) - \omega(g\nabla_Y Z) \\
&= f\Big(X(\omega(Z)) - \omega(\nabla_X Z)\Big) + g\Big(Y(\omega(Z)) - \omega(\nabla_X Z)\Big) \\
&= f(D_X\omega)(Z) + g(D_Y\omega)(Z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_X(\omega+\eta))(Y) &= X\Big((\omega+\eta)(Y)\Big) - (\omega+\eta)(\nabla_X Y) \\
&= X(\omega(Y)+\eta(Y)) - \omega(\nabla_X Y) - \eta(\nabla_X Y) \\
&= X(\omega(Y)) + X(\eta(Y)) - \omega(\nabla_X Y) - \eta(\nabla_X Y) \\
&= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) + X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) \\
&= (D_X\omega)(Y) + (D_X\eta)(Y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_X(f\omega))(Y) &= X(f\omega(Y)) - f\omega(\nabla_X Y) \\
&= X(f)\omega(Y) + fX(\omega(Y)) - f\omega(\nabla_X Y) \\
&= f\Big(X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)\Big) + X(f)\omega(Y) \\
&= f(D_X\omega)(Y) + X(f)\omega(Y).
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.17. Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$. Vale a seguinte proprieadade:

$$D_X(\omega \wedge \eta) = D_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge D_X\eta.$$

Demonstração. Ver Proposição 36 de [Pet06]. □

Fixado um ponto $p \in M$, seja exp a aplicação exponencial definida em uma vizinhança aberta de 0 no espaço T_pM. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então o sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ definido por $x^i = v_i \circ \exp^{-1}$ é tal que a base $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ é geodésica em p.

Definição 2.18 (Coordenadas normal)**.** As coordenadas locais definidas pela aplicação $(U, \exp_p^{-1})$ são chamadas de coordenadas normais (Riemannianas) com centro em p.

Lema 2.19. Em um sistema de coordenadas normal, valem as seguintes propriedades:

a) $dx^{k_0}(\nabla_{e_i} Y) = e_i(Y^{k_0})$, onde $1 \leq k_0 \leq n$ é um índice fixado e $Y \in T_p(M)$;

b) $D_{e_i} dx^j = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$;

c) $\iota_{e_j}\Big(D_{e_i}\Big) = D_{e_i}\iota_{e_j}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Demonstração. Fixe $p \in M$ e considere $(x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas normal em p. A base associada ao sistema de coordenadas será denotada por $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\}$, e sua base dual por $\{dx^1, \ldots dx^n\}$, escreva $Y = \sum Y^j e_j$. Considerando que ∇ é a conexão de Levi-Civita em M, temos

$$\nabla_{e_i} Y = \sum_{j,k} \Big(e_i(Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k\Big) e_k,$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita. observe que

$$dx^{k_0}(\nabla_{e_i}Y) = \sum_j \Big(e_i(Y^{k_0}) + Y^j\Gamma_{ij}^{k_0}\Big).$$

Como $(x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenada normal, então $\Gamma_{ij}^{k_0} = 0$, daí segue que

$$dx^{k_0}(\nabla_{e_i}Y) = e_i(Y^{k_0}),$$

em p. O que conclui a demonstração do item a). Para a demonstração do item b) vamos usar a Definição 2.15 para obter

$$D_{e_i}dx^j(Y) = e_i(dx^j(Y)) - dx^j(\nabla_{e_i}Y),$$

Pelo item a), que acabamos de provar, segue que

$$dx^j(\nabla_{e_i}Y) = e_i(Y^j),$$

em p. Por outro lado, perceba que

$$dx^i(Y) = dx^i\Big(\sum_j Y^je_j\Big) = \sum_j Y^jdx^i(e_j) = Y^i.$$

Logo,

$$D_{e_i}dx^j(Y) = e_i(Y^j) - e_i(Y^j) = 0.$$

Por fim, para a demonstração do item c), tome $\omega = \sum \omega_k dx^k$ e perceba que

$$D_{e_i}\omega = \sum_{k=1}^n D_{e_i}(\omega_k dx^k) = \sum_{k=1}^n(\omega_k D_{e_i}dx^k + e_i(\omega_k)dx^k) = \sum_{k=1}^n e_i(\omega_k)dx^k.$$

Daí, como $\iota_{e_j}(dx^k) = \delta_j^i$, segue que

$$\iota_{e_j}(D_{e_i}\omega) = \sum_{k=1}^n e_i(\omega_k)\iota_{e_j}(dx^k) = e_i(\omega_j).$$

Por outro lado,

$$\iota_{e_j}(\omega) = \iota_{e_j}\Bigg(\sum_{k=1}^n \omega_k dx^k\Bigg) = \sum_{k=1}^n \omega_k\iota_{e_j}(dx^k) = \omega_j.$$

Logo,

$$D_{e_k}\iota_{e_j}(\omega) = e_i(\omega_j).$$

Portanto,

$$\iota_{e_j}(D_{e_i}) = e_i(\omega_j) = D_{e_i}\iota_{e_j}.$$

□

Pela discursão feita na subseção anterior, temos que o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \mathbb{R}$, é definido por

$$\langle\omega,\eta\rangle = \sum_{i,j} g^{ij}\,\omega_i\,\eta_j,$$

onde $\omega = \omega_i\,dx^i, \eta = \eta_j\,dx^j$ e g^{ij} são as componentes da matriz inversa da métrica Riemanniana $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Em particular, como em um sistema de coordenadas normal $g_{ij}(p) = \delta_i^j$, temos

$$\langle\omega,\eta\rangle = \sum_i \omega_i\,\eta_i.$$

Lema 2.20. Dados $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$, vale

$$X\langle\omega,\eta\rangle = \langle D_X\omega,\eta\rangle + \langle\omega, D_X\eta\rangle.$$

Demonstração. Inicialmente, escrevendo $\omega = \sum \omega_i dx^i$ e usando item c) da Proposição 2.16 temos a seguinte expressão:

$$D_X\omega = D_X\left(\sum_{i=1}^n \omega_i dx^i\right) = \sum_{i=1}^n \omega_i D_X dx^i + \sum_{i=1}^n X(\omega_i)dx^i.$$

Observe que

$$D_X dx^i(Y) = X(dx^i(Y)) - dx^i(\nabla_X Y) = X(Y^i) - dx^i(\nabla_X Y).$$

Aplicando o item a) do Lema 2.19 no termo $dx^i(\nabla_X Y)$, temos que

$$dx^i(\nabla_X Y) = dx^i\left(\sum_{j=1}^n X^j \nabla_{e_j} Y\right) = \sum_{j=1}^n X^j dx^i(\nabla_{e_j} Y) = \sum_{j=1}^n X^j e_j(Y^i) = X(Y^i).$$

Logo,

$$D_X dx^i = 0.$$

Daí, segue que

$$D_X\omega = \sum_{i=1}^n X(\omega_i)dx^i.$$

Agora vamos demonstrar o resultado desejado, escreva $\eta = \sum_{j=1}^n \eta_j dx^j$. Temos

$$X\langle\omega,\eta\rangle = X\left(\sum_i^n \omega_i\eta_i\right) = \sum_i^n X(\omega_i)\eta_i + \sum_i^n \omega_i X(\eta_i) = \langle D_X\omega,\eta\rangle + \langle\omega, D_X\eta\rangle.$$

□

Definição 2.21. Definimos o *tensor de curvatura em* $\Omega^1(M)$ como sendo a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$, dado por:

$$R(X,Y)\omega = D_X D_Y \omega - D_Y D_X \omega - D_{[X,Y]}\omega,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega 1(M)$.

Fazendo uma analogia com (1.2), em coordenadas escrevemos:

$$R(e_i, e_j)dx^k = -\sum_l R^k_{ijl} dx^l.$$

Proposição 2.22. Seja $\omega \in \Omega^1(M)$ e $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$ o vetor associado a ω. O tensor de Ricci definida em $\omega^\sharp$ é dada por:

$$\operatorname{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) = -\Big\langle \omega, \sum_{i,j=1}^n \Big(dx^i \wedge \iota_{e_j}(R(e_i, e_j)\omega) \Big) \Big\rangle.$$

Demonstração. Inicialmente, já que $R(e_i, e_j)\omega = -\sum_{k,l} R^k_{ijl}\omega_k dx^l$, obtemos

$$\iota_{e_j}(R(e_i, e_j)\omega) = -\sum_{j,k,l} R^k_{ijl}\omega_k \iota_{e_j}(dx^l) = -\sum_{j,k,l} R^k_{ijl}\omega_k dx^l(e_j) = -\sum_k R^k_{ijj}\omega_k.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) &= \sum_j \langle R(\omega^\sharp, e_j)e_j, \omega^\sharp \rangle = -\sum_j \langle R(\omega^\sharp, e_j)\omega^\sharp, e_j \rangle = -\sum_{i,j,k} \langle R((\omega_i e_i), e_j)\omega_k e_k, e_j \rangle \\ &= -\sum_{i,j,k} \langle R(e_i, e_j)e_k, e_j \rangle \omega_i \omega_k = \sum_{i,j,k} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_k \rangle \omega_i \omega_k = \sum_{i,j,k} R^k_{ijj}\omega_i\omega_k. \end{aligned}$$

Portanto, usando as duas expressões obtidas acima, concluimos que

$$\Big\langle \omega, \sum_{i,j=1}^n \Big(dx^i \wedge \iota_{e_j}(R(e_i, e_j)\omega) \Big) \Big\rangle = \Big\langle \omega, -\sum_{i,j,k} R^k_{ijj}\omega_k dx^i \Big\rangle = -\sum_{i,j,k} R^k_{ijj}\omega_i\omega_k = -\operatorname{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp).$$

□

Lema 2.23. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM, e seja $dx^1, \ldots, dx^n$ sua base dual $(dx^j(e_i)) = \delta^j_i$. Então, a derivada exteior satisfaz

$$d = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge D_{e_i}$$

e sua adjunta é dada por

$$\delta = -\sum_{j=1}^n \iota_{e_j}(D_{e_j}).$$

Demonstração. Ver Lema 3.3.4 de [Jos08]. □

Proposição 2.24. Sobre as hipoteses do lema anterior, o Laplaciano de Hodge pode ser escrito por

$$\Delta_H = \sum_i D_{e_i} D_{e_i} + \sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(R(e_i, e_j)). \tag{2.6}$$

Demonstração. Fixado $p \in M$, em um sistema de coordenada normal, observe que

$$\begin{aligned} d\delta &= \sum_i dx^i \wedge D_{e_i}\Big(- \sum_j \iota_{e_j}(D_{e_j})\Big) \\ &= -\sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(D_{e_i} D_{e_j}) && \text{(cf. Lema 2.19)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \delta d &= -\sum_j \iota_{e_j}\Big(D_{e_j}(\sum_i dx^i \wedge D_{e_i})\Big) \\ &= -\sum_{i,j} \iota_{e_j}\Big(D_{e_j}(dx^i \wedge D_{e_i})\Big) \\ &= -\sum_{i,j} \iota_{e_j}\Big(D_{e_j}(dx^i) \wedge D_{e_i} + dx^i \wedge D_{e_j} D_{e_i}\Big) \\ &= -\sum_{i,j} \iota_{e_j}(dx^i \wedge D_{e_j} D_{e_i}) && \text{(cf. Lema 2.19)} \\ &= -\sum_{i,j} \Big(\iota_{e_j}(dx^i) \wedge D_{e_j} D_{e_i} - dx^i \wedge \iota_{e_j}(D_{e_j} D_{e_i})\Big) \\ &= -\sum_{i,j} \Big(dx^i(e_j) \wedge D_{e_j} D_{e_i} - dx^i \wedge \iota_{e_j}(D_{e_j} D_{e_i})\Big) \\ &= -\sum_i D_{e_i} D_{e_i} + \sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(D_{e_j} D_{e_i}). \end{aligned}$$

Unindo as duas expressões segue que

$$\begin{aligned} d\delta + \delta d &= -\sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(D_{e_i} D_{e_j}) - \sum_i D_{e_i} D_{e_i} + \sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(D_{e_j} D_{e_i}) \\ &= -\sum_i D_{e_i} D_{e_i} - \sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(D_{e_i} D_{e_j} - D_{e_j} D_{e_i}) \\ &= -\sum_i D_{e_i} D_{e_i} - \sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(R(e_i, e_j)). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.25 (Identidade de Bochner-Weitzenböck)**.** Seja M uma variedade Riemanniana e $\omega \in \Omega^1(M)$ uma 1-forma sobre M. Se ω é harmônica, então

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |D\omega|^2 + Ric(\omega^\sharp, \omega^\sharp). \tag{2.7}$$

Demonstração. Inicialmente, fixe $p \in M$ e considere um sistema de coordenadas normais em p, para obter uma base $\{e_i\}$ ortonormal e geodésica em p. Agora, como $|\omega|^2 = \langle \omega, \omega \rangle$ é uma função real, temos que

$$\begin{aligned}\Delta|\omega|^2 &= \sum_i D_{e_i} D_{e_i}(\langle \omega, \omega \rangle) = 2 \sum_i D_{e_i}(\langle D_{e_i}\omega, \omega \rangle) \\ &= 2 \sum_i \Big(\langle D_{e_i}\omega, D_{e_i}\omega \rangle + \langle \omega, D_{e_i} D_{e_i}\omega \rangle \Big) \\ &= 2 \sum_i |D_{e_i}|^2 + 2 \sum_i \langle \omega, D_{e_i} D_{e_i}\omega \rangle \\ &= 2|D\omega|^2 + 2\langle \omega, \sum_i D_{e_i} D_{e_i}\omega \rangle.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (2.6) e a hipotese de ω ser harmonica, temos

$$\sum_i D_{e_i} D_{e_i}\omega = -\sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(R(e_i, e_j))\omega.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}\Delta|\omega|^2 &= 2|D\omega|^2 - 2\langle \omega, \sum_{i,j} dx^i \wedge \iota_{e_j}(R(e_i, e_j))\omega \rangle \\ &= 2|D\omega|^2 + 2\,\mathrm{Ric}(\omega^\sharp, \omega^\sharp).\end{aligned}$$

□

Seja $f \in C^\infty(M)$. Fixemos $p \in M$ e consideremos um sistema de coordenadas normais centrado em p. Nesse sistema obtemos uma base $\{e_i\}$ ortonormal e geodésica em p. Nessas condições, temos

$$D_{e_i} df(e_j) = e_i(df(e_j)).$$

Assim,

$$\begin{aligned}|Ddf|^2 &= \sum_{i,j} \Big(e_i(df(e_j)) \Big)^2 = \sum_{i,j} \Big(e_i(\langle \nabla f, e_j \rangle) \Big)^2 \\ &= \sum_{i,j} \Big(\langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle \Big)^2 = |Hess\ f|^2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 Aplicações harmônicas

Aplicações harmônicas são extensões não lineares de funções harmônicas. Uma aplicação não constante é chamada de não trivial.

Seja (M, g) uma n-variedade Riemanniana, dotada de uma métrica Riemanniana g. Denotaremos $g_{\alpha\beta}$ a matriz simétrica $n \times n$ definida positiva. Seja $g^{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^{-1}$ a matriz inversa de $(g_{\alpha\beta})$ e $dv_g = \sqrt{g}\, dx = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}\, dx$ o elemento de volume de (M, g). Seja (N, h) uma l-variedade Riemanniana compacta, sem bordo, dotada de uma métrica Riemanniana

h.

Para qualquer aplicação $u \in C^2(M, N)$, podemos definir a densidade de energia de Dirichlet $e(u)$ pondo:

$$e(u)(x) = |du|^2.$$

O funcional energia de Dirichlet é então definida por:

$$E(u) = \int_M e(u)\, dv_g.$$

Vamos definir uma *variação da aplicação* u tomando $\phi \in C^2(M, \mathbb{R}^l)$ e pondo

$$u_t(x) = u(x) + t\phi(x), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

onde a soma $u(x) + t\phi(x)$ é dada em coordenadas. Assim, um *ponto crítico* do funcional energia de Dirichlet é uma aplicação u tal que

$$\frac{d}{dt}(E(u_t))|_{t=0} = 0,$$

para toda variação de u.

Definição 2.26 (Aplicação harmônica)**.** Uma aplicação $u \in C^2(M, N)$ é chamada de harmônica se for um ponto crítico do funcional energia de Dirichlet.

Pelo teorema de imersão isométrica de Nash [Nas56], podemos assumir que (N, h) está isometricamente imersa em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^L$ para algum $L \geq 1$. Assim, temos:

$$C^2(M, N) = \left\{ u = (u^1, \cdots, u^L) \in C^2(M, \mathbb{R}^L) \mid u(M) \subseteq N \right\}.$$

Como $N \subset \mathbb{R}^L$ é uma subvariedade compacta, existe um $\delta = \delta(N) > 0$ tal que a projeção de vizinhança $\Pi_N : N_\delta \to N$ é suave, onde:

$$N_\delta = \{y \in \mathbb{R}^L \mid d(y, N) := \inf_{z \in N} |y - z| < \delta\},$$

e $\Pi_N(y) \in N$ é tal que $|y - \Pi_N(y)| = d(y, N)$ para $y \in N_\delta$.

Observe que $P(y) = d(\Pi_N(y)) : \mathbb{R}^L \to T_yN$, $y \in N$, é uma projeção ortogonal, e

$$A(y) = \nabla P(y) : T_yN \otimes T_yN \to (T_yN)^\perp,\ y \in N,$$

é a segunda forma fundamental de $N \subset \mathbb{R}^L$.

Agora temos a seguinte proposição:

Proposição 2.27. Uma aplicação $u \in C^2(M,N)$ é um mapa harmônico se, e somente se, u satisfaz:

$$\Delta_g u \perp T_u N,$$

onde Δ_g é o Laplaciano de Beltrami em M.

Demonstração. Para $\phi \in C^0(M,\mathbb{R}^L)$, vamos definir a variação $u_t(x) = \Pi(u(x)+t\phi(x))$. Assim, para $(x,t) \in M \times (-\epsilon,\epsilon)$, temos:

$$E(u_t) = \int_M |d(\Pi(u+t\phi))|^2 dv_g = \int_M |P(u+t\phi)|^2 dv_g.$$

Perceba que

$$\frac{d}{dt}|P(u+t\phi)|^2 = \frac{d}{dt}\langle P(u+t\phi), P(u+t\phi)\rangle = 2\langle d(P(u+t\phi))(\phi), P(u+t\phi)\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M |P(u+t\phi)|^2 dv_g \\
&= 2\int_M \langle d(P(u))(\phi), P(u)\rangle dv_g \\
&= 2\int_M \langle d(P(u))(\phi), d(\Pi(u))\rangle dv_g \\
&= 2\int_M \langle d(P(u))(\phi), du\rangle dv_g.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_M \langle d(P(u)(\phi)), du\rangle \, dv_g &= \int_M \sum_i \langle d(P(u)(\phi))(e_i), du(e_i)\rangle \, dv_g \\
&= \int_M \sum_{i,j} d(P(u)(\phi))^j(e_i), du^j(e_i) \, dv_g \\
&= \int_M \sum_{i,j} \langle \nabla(P(u)(\varphi))^j, e_i\rangle \, \langle \nabla u^j, e_i\rangle \, dv_g \\
&= \int_M \sum_i \langle \nabla(P(u)(\varphi))^i, \nabla u^i\rangle \, dv_g.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência, segue que

$$\int_M \langle \nabla(P(u)(\varphi))^i, \nabla u^i\rangle \, dv_g = -\int_M (P(u)(\varphi))^i \Delta_g u^i \, dv_g.$$

Logo,

$$\int_M \langle d(P(u)(\phi)), du\rangle \, dv_g = -\int_M \sum_i (P(u)(\varphi))^i \Delta_g u^i \, dv_g = -\int_M \langle P(u)(\phi), \Delta_g u\rangle.$$

Contudo,

$$0 = 2\int_M \langle d(P(u))(\phi), du\rangle dv_g = -2\int_M \langle P(u)(\phi), \Delta_g u\rangle = -2\int_M \langle \phi, P(u)(\Delta_g u)\rangle.$$

Isso implica que a projeção de $\Delta_g u$ é nula em $T_u M$, ou seja, $\Delta_g u \perp T_u N$. $\square$

No caso em que $\Delta_g u \perp T_u N$, podemos escrever

$$\Delta_g u = \sum_{i=l+1}^{L} a_i(x) v_i(x),$$

onde $\{v_{l+1}, \ldots, v_L\}$ é uma base ortonormal de $(T_u N)^{\perp}$. Além disso, como

$$\Delta_g u = \sum_{j=1}^{L} \Delta_g u^j e_j,$$

com $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, temos

$$a_i = \langle \Delta_g u, v_i\rangle = \sum_{j=1}^{L} \Delta_g u^j \langle v_i, e_j\rangle.$$

Por simplicidade, escreveremos apenas

$$a_i = \Delta_g u^j \langle v_i, e_j\rangle.$$

Usando a Preposição 1.15, temos

$$a_i = \Delta_g u\langle v_i, e_j\rangle = \operatorname{div}(\langle v_i, e_j\rangle \nabla u^j) - \langle \nabla u^j, \nabla\langle v_i, e_j\rangle\rangle. \tag{2.9}$$

Por outro lado, já que

$$du(w) = (du^1(w), \ldots, du^L(w)).$$

Podemos escrever $du^j(w) = \langle du(w), e_j\rangle$. Daí,

$$\nabla u^j = du^j(e_k)e_k,$$

para e_k base ortonormal de TM. Portanto, em relação ao primeiro termo do lado direito da última igualdade de (2.9), temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\langle v_i, e_j\rangle \nabla u^j) &= \operatorname{div}(\langle v_i, e_j\rangle du^j(e_k)e_k) = \operatorname{div}(\langle v_i, e_j\rangle \langle du(e_k), e_j\rangle e_k) = \operatorname{div}(\langle v_i, du(e_k)\rangle e_k)\\ &= \operatorname{div}(0 \cdot e_k) = 0.\end{aligned}$$

Em relação ao segundo termo do lado direito de (2.9), temos:

$$\nabla u^j = du^j(e_k)e_k, \quad \text{e} \quad \nabla\langle v_i, e_j\rangle = e_k(\langle v_i, e_j\rangle)e_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u^j, \nabla\langle v_i, e_j\rangle\rangle &= \langle du^j(e_k)e_k, e_k(\langle v_i, e_j\rangle)e_k\rangle = du^j(e_k)e_k(\langle v_i, e_j\rangle) \\
&= du^j(e_k)(\langle \nabla^{\mathbb{R}^L}_{e_k} v_i, e_j\rangle) = du^j(e_k)(\langle \nabla^{\mathbb{R}^L}_{e_k} v_i(u), e_j\rangle) \\
&= du^j(e_k)\langle \overline{\nabla}_{du(e_k)} v_i, e_j\rangle = \langle du(e_k), e_j\rangle\langle \overline{\nabla}_{du(e_k)} v_i, e_j\rangle \\
&= \langle du(e_k), \overline{\nabla}_{du(e_k)} v_i\rangle = A_{v_i}(du(e_k), du(e_k)) \\
&:= A_i(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta_g u = \sum_{i=l+1}^{L} -A_i(\nabla u, \nabla u)v_i = -A^N_{u(x)}(\nabla u, \nabla u). \tag{2.10}$$

Corolário 2.28. Seja $u : M \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Então, u é harmônica se, e somente se,

$$\Delta_g u = -|\nabla u|^2 u.$$

Demonstração. Temos que

$$A^{\mathbb{S}^n}_{u(x)}(\cdot,\cdot) = A(\cdot,\cdot)u(x) = \langle\cdot,\cdot\rangle u(x).$$

Afinal, em $\mathbb{S}^n$, a segunda forma fundamental A tem autovalor 1 e $v \in (T_{u(x)}\mathbb{S}^n)^\perp$ é o vetor posição $u(x)$. Desta forma,

$$A^{\mathbb{S}^n}_{u(x)}(\nabla u, \nabla u) = |\nabla u|^2 u(x).$$

Pelo que foi discutido acima, concluimos a demonstração. □

2.2.1 Aplicações harmônicas para o círculo unitário

Definição 2.29 (Pullback)**.** Sejam M, N variedades Riemannianas de dimenções arbitrarias, e seja $u : M \to N$ uma aplicação suave. Dada uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(N)$, definimos o pullback de ω como uma aplicação $u^* : \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$ dada por

$$u^*(\omega)_p(X) = \omega_{u(p)}(du_p(X)),$$

para todo $p \in M$ e $X \in T_pM$.

No caso particular em que $\theta \in C^\infty(N)$, temos

$$d(\theta \circ u)_p(X) = d\theta_{u(p)}(du_p(X)),$$

com $X \in T_pN$. Por outro lado, como $d\theta \in \Omega^1(N)$ é uma 1-forma diferencial, podemos usar a definição de pullback para obter

$$u^*(d\theta_{u(p)})(X) = d\theta_{u(p)}(du_p(X)).$$

Comparando as expressões acima, concluímos que

$$u^*(d\theta_{u(p)})(X) = d(\theta \circ u)_p(X).$$

Assim, denotaremos

$$u^*(d\theta) = d(\theta \circ u).$$

Observe ainda que, pela Proposição 2.4, temos

$$d(u^*(d\theta)) = d(d(\theta \circ u)) = 0$$

Lema 2.30. A aplicação $u : M \to \mathbb{S}^1$ é harmônica se e somente se a 1-forma $h := u^*(d\theta)$ é harmônica.

Demonstração. Vamos relembrar a aplicação de recobrimento,definida por

$$\exp(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Essa aplicação associa a cada ponto $\theta \in \mathbb{R}$ um ponto no círculo unitário $\mathbb{S}^1$, identificando θ com $\theta + 2\pi k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Inicialmente, observe que $d\theta$ está bem definida em $\mathbb{S}^1$. Com efeito, sejam x_1 e $x_2 \in \mathbb{S}^1$, com $x_1 \neq x_2$. Consideremos duas parametrizações locais:

$$\begin{aligned} \theta_1 &: \mathbb{S}^1 - \{x_1\} \to [0, 2\pi), \\ \theta_2 &: \mathbb{S}^1 - \{x_2\} \to [t_0, t_0 + 2\pi), \end{aligned}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Essa função fornece coordenadas angulares locais em $\mathbb{S}^1$, diferenciando-se por um multiplo inteiro de 2π nas suas regiões de sobreposição. No conjunto $\mathbb{S}^1 - \{x_1, x_2\}$, onde ambas as parametrizações são validas, temos

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = 2\pi k, \qquad \text{para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Diferenciando ambos os lados obtemos

$$0 = d(\theta_1(x) - \theta_2(x)) = d(\theta_1(x)) - d(\theta_2(x)).$$

Logo, $d\theta_1(x) = d\theta_2(x)$. O que implica dizer que $d\theta$ não depende da escolha da parametrização local, e portanto está bem definida em $\mathbb{S}^1$.

Agora, defina $\tilde{u} = \theta \circ u : M \to \mathbb{R}$. Como $d\theta$ está bem definido, podemos considerar $d\tilde{u}$ e $\nabla\tilde{u}$. Note que

$$\begin{aligned} &d\tilde{u} = d(\theta \circ u) = u^*(d\theta) = h \qquad \text{e} \\ &h(X) = \langle h^\sharp, X\rangle = \langle (d\tilde{u})^\sharp, X\rangle = \langle \nabla\tilde{u}, X\rangle \Rightarrow h^\sharp = \nabla\tilde{u}. \end{aligned}$$

Alem disso, pela Corolário 2.14, temos

$$\Delta\tilde{u} = \operatorname{div}(\nabla\tilde{u}) = \operatorname{div}(h^\sharp) = -\delta h.$$

Assim, pela Proposição 2.13, $\tilde{u}$ é harmônica se, e somente se h é 1-forma harmônica.

Por outro lado, pela Preposição 2.28, temos que u é harmônica se e somente se $\Delta u = -|\nabla u|^2 u$. Escreva $u = (u_1, u_2)$, para $\tilde{u} = (\theta \circ u)$ temos

$$u_1 = \cos(\tilde{u}) \qquad \text{e} \qquad u_2 = \sin(\tilde{u}).$$

Daí, u é harmônica se e somente se

$$\Delta u_1 = -|\nabla u|^2 u_1 \qquad \text{e} \qquad \Delta u_2 = -|\nabla u|^2 u_2$$

Usando a Preposição 1.15 para calcular o Laplaciano de u_1 e u_2, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\cos(\tilde{u}) &= \operatorname{div}(\nabla\cos(\tilde{u})) = \operatorname{div}(-\sin(\tilde{u})\nabla\tilde{u}) \\ &= -\sin(\tilde{u})\operatorname{div}(\nabla\tilde{u}) + \langle\nabla\tilde{u}, -\nabla\sin(\tilde{u})\rangle \\ &= -\sin(\tilde{u})\Delta\tilde{u} - \langle\nabla\tilde{u}, \cos(\tilde{u})\nabla\tilde{u}\rangle \\ &= -\sin(\tilde{u})\Delta\tilde{u} - \cos(\tilde{u})|\nabla\tilde{u}|^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta\sin(\tilde{u}) &= \operatorname{div}(\nabla\sin(\tilde{u})) = \operatorname{div}(\cos(\tilde{u})\nabla\tilde{u}) \\ &= \cos(\tilde{u})\operatorname{div}(\nabla\tilde{u}) + \langle\nabla\tilde{u}, \nabla\cos(\tilde{u})\rangle \\ &= \cos(\tilde{u})\Delta\tilde{u} - \langle\nabla\tilde{u}, -\sin(\tilde{u})\nabla\tilde{u}\rangle \\ &= \cos(\tilde{u})\Delta\tilde{u} - \sin(\tilde{u})|\nabla\tilde{u}|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\sin(\tilde{u})\Delta\tilde{u} - \cos(\tilde{u})|\nabla\tilde{u}|^2 &= -|\nabla u|^2\cos(\tilde{u}); \\ \cos(\tilde{u})\Delta\tilde{u} - \sin(\tilde{u})|\nabla\tilde{u}|^2 &= -|\nabla u|^2\sin(\tilde{u}). \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} \sin^2(\tilde{u})\Delta\tilde{u} + \sin(\tilde{u})\cos(\tilde{u})|\nabla\tilde{u}|^2 &= |\nabla u|^2\cos(\tilde{u})\sin(\tilde{u}); \\ \cos^2(\tilde{u})\Delta\tilde{u} - \cos(\tilde{u})\sin(\tilde{u})|\nabla\tilde{u}|^2 &= -|\nabla u|^2\sin(\tilde{u})\cos(\tilde{u}). \end{aligned}$$

Somando as igualdades, temos que $\Delta\tilde{u} = 0$ e portanto $\tilde{u}$ é harmônica. □

Antes de encerrar a discussão neste capítulo, é interessante observar que

$$\begin{aligned} h &= u^*(d\theta) = d(\theta \circ u); \\ Dh &= D(u^*(d\theta)) = D(d(\theta \circ u)) = D(d\tilde{u}) = \mathrm{Hess}(\tilde{u}) = \mathrm{Hess}(\theta \circ u). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Resultados Auxiliares

Neste capítulo, apresentamos um argumento desenvolvido por Cheeger e Gromoll em [JD71] para a demonstração do Teorema de Decomposição, aplicável a variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci não-negativa. Em seguida, exploramos o conceito de recobrimento universal. Além disso, introduziremos de forma sucinta os conceitos de homologia singular e da característica de Euler-Poincaré em 2-variedades. Por fim, enunciaremos dois teoremas clássicos da análise geométrica, os quais desempenham um papel fundamental na demonstração dos principais resultados desta dissertação.

3.1 Argumento de Cheeger-Gromoll

Sejam M uma variedade Riemanniana e $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável. Um campo V ao longo de uma curva α é dito *paralelo* se

$$\frac{DV}{dt} = 0,$$

onde $\frac{D}{dt}$ denota a *derivada covariante*. Dizemos que α é uma *geodésica* em $t \in I$ se

$$\frac{D}{dt}\alpha'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = 0.$$

Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, vamos denotar por γ_v a única geodésica de M que passa por p com velocidade v. Também definiremos o seguinte conjuto:

$$\Upsilon_p =: \{v \in T_pM \mid \gamma_v \text{ está definida em um intervalo contendo } [0,1]\}.$$

Quando $v \in \Upsilon$, estamos considerando que $\gamma_p(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Definição 3.1 (Aplicação exponencial)**.** A aplicação $\exp_p : \Upsilon_p \to M$, definida por

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1),$$

é denominada aplicação exponencial.

A aplicação exponencial é um difeomorfismo local tal que $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver pag. 73 de [DC19]).

Definição 3.2 (Fluxo)**.** Seja M uma variedade Riemanniana, e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial suave em M. O fluxo associado ao campo X é uma aplicação $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$, que satisfaz as seguintes condições:

a) Para cada ponto $p \in M$, a aplicação $t \mapsto \Phi_t(p) := \Phi(t, p)$ é tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(p) = X(\Phi_t(p)).$$

b) Para cada $p \in M$, quando $t = 0$, temos $\Phi(0, p) = p$.

De acordo com o Teorema de Peano (ver Teorema 12.10 de [Lee03]), existe pelo menos uma solução para a equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(p) = X(\Phi_t(p)); \\ \Phi(0, p) = p. \end{cases}$$

Seja M uma n-variedade Riemanniana e $\Sigma \subset M$ uma hipersuperfície de M. Considere a variedade produto $\mathbb{R} \times \Sigma$. Seu espaço tangente $T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times \Sigma)$ no ponto $(t, p) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ pode ser identificado pela soma direta $T_t\mathbb{R} \oplus T_p\Sigma$ (ver Proposição 3.13 de [Lee12]). Dessa forma, dado $\overline{v} \in T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times \Sigma)$, localmente, podemos escrever

$$\overline{v} = \lambda\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\frac{\partial}{\partial x^i} = \lambda\frac{\partial}{\partial t} + v, \quad v \in T_p\Sigma,$$

onde $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ são, respectivamente, elementos da base natural de $T_t\mathbb{R}$ e de $T_p\Sigma$.

Dessa forma, se considerarmos uma aplicaçao diferenciável $\Phi : \mathbb{R} \times \Sigma \to M$ e sua diferencial $d\Phi : T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times \Sigma) \to T_pM$, temos que

$$d\Phi_{(t,p)}(\overline{v}) = \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, p) + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}(t, p).$$

Proposição 3.3 (Argumento de Cheeger-Gromoll)**.** Sejam M uma variedade Riemanniana, $u : M \to \mathbb{R}$ uma função suave e $u^{-1}(\theta) = \Sigma \subset M$ uma subvariedade de M. Se $\operatorname{Hess} u = 0$ e o vetor gradiente é tal que $|\nabla u|= 1$, então o fluxo gradiente $\Phi : \mathbb{R} \times \Sigma \to M$, definido por

$$\Phi(t, p) = \exp_p\Big(t\ \nabla u(p)\Big), \tag{3.1}$$

é uma isómetria.

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que $d\Phi_{(t,p)}(\frac{\partial}{\partial t}) = \nabla u(\gamma_{\nabla u}(t))$. Com efeito, considere a geodésica

$$\gamma_{\nabla u}(t) = \exp_p(t\nabla u(p)) = \Phi(t,p),$$

com $\gamma_{\nabla u}(0) = p$ e $\gamma'_{\nabla u}(0) = \nabla u(p)$. Pela definição de fluxo, temos que

$$\gamma'_{\nabla u}(t) = \nabla u(\gamma_{\nabla u}(t)).$$

Por outro lado,

$$\gamma'_{\nabla u}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\gamma_{\nabla u}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,p) = d\Phi_(t,p)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big).$$

Daí, como desejado,

$$d\Phi_{(t,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \nabla u(\gamma_{\nabla u}(t)).$$

Agora, vamos mostrar que Φ é uma isómetria. Para os vetores em $T_t\mathbb{R}$, perceba que

$$\Big\langle d\Phi_{(t,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big), d\Phi_{(t,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big\rangle = \Big\langle \nabla u, \nabla u\Big\rangle = 1 = \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\Big\rangle.$$

Para os vetores $v, w \in T_p\Sigma$, defina

$$f(t) := \langle d\Phi_{(t,p)}(v), d\Phi_{(t,p)}(w)\rangle.$$

Considere uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Defina $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R} \to M$, pondo $\Psi(t,s) = \Phi(t, \alpha(s))$. Pelo Lema de Simetria (Ver Lema 3.4 de [DC19]), obtemos

$$\nabla_{\frac{\partial \Psi}{\partial t}} \frac{\partial \Psi}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial \Psi}{\partial s}} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Porém, em $(0,t)$, temos $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(0,t) = \nabla u(\Phi(t,p))$ e $\frac{\partial \Psi}{\partial s}(0,t) = d\Phi_{(t,p)}(v)$. Logo,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \Big\langle \nabla_{\nabla u(\Phi(t,p))} d\Phi_{(t,p)}(v), d\Phi_{(t,p)}(w)\Big\rangle + \Big\langle d\Phi_{(t,p)}(v), \nabla_{\nabla u(\Phi(t,p))} d\Phi_{(t,p)}(w)\Big\rangle \\ &= \Big\langle \nabla_{d\Phi_{(t,p)}} \nabla u(\Phi(t,p)), d\Phi_{(t,p)}(w)\Big\rangle + \Big\langle d\Phi_{(t,p)}(v), \nabla_{d\Phi_{(t,p)}} \nabla u(\Phi(t,p))\Big\rangle. \end{aligned}$$

E como $\operatorname{Hess} u = 0$, temos que ∇u é paralelo, portanto $f'(t) = 0$. O que implica que f é constante. Logo,

$$\Big\langle d\Phi_{(t,p)}(v), d\Phi_{(t,p)}(w)\Big\rangle = \Big\langle d\Phi_{(0,p)}(v), d\Phi_{(0,p)}(w)\Big\rangle = \langle v, w\rangle,$$

pois $d\Phi_{(0,p)}(v) = \frac{d}{ds}\Phi(0, \alpha(s)) = \alpha'(0) = v$.

De maneira analoga, para os vetores $\frac{\partial}{\partial t} \in T_t(\mathbb{R})$ e $v \in T_p\Sigma$, conseguimos mostrar que

$$\Big\langle d\Phi_{(t,p)}(v), d\Phi_{(t,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big\rangle = \Big\langle d\Phi_{(0,p)}(v), d\Phi_{(0,p)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big\rangle.$$

Já que $d\Phi_{(0,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \gamma'_{\nabla u}(0) = \nabla u$, concluimos que

$$\left\langle d\Phi_{(t,p)}(v), d\Phi_{(t,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\rangle = \langle v, \nabla u\rangle = 0,$$

pois ∇u é normal a $T_P\Sigma$.

Contudo, dados $\overline{v}, \overline{w} \in T_{(t,p)}(\mathbb{R}\times\Sigma)$, isto é, $\overline{v} = \lambda\frac{\partial}{\partial t} + v$ e $\overline{w} = \xi\frac{\partial}{\partial t} + w$. Temos que

$$\left\langle d\Phi_{(t,p)}(\overline{v}), d\Phi_{(t,p)}(\overline{w})\right\rangle = \left\langle \lambda\frac{\partial}{\partial t}, \xi\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle + \langle v, w\rangle = \langle \overline{v}, \overline{w}\rangle.$$

Logo, Φ é uma isometria. □

3.2 Recobrimento universal

Uma aplicação contínua e sobrejetiva $\varphi : M \to N$ é chamada de *recobrimento* quando, para cada ponto $p \in N$, existe uma vizinhança aberta $V \subset N$ de p tal que

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$$

é uma união de conjuntos abertos U_α disjuntos dois a dois, de modo que, para cada α, a restrição $\varphi|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to V$ é um homeomorfismo. Nessa situação, M é chamado de *recobrimento de* N.

Definição 3.4 (Recobrimento universal)**.** Seja $\varphi : M \to N$ um recobrimento. Quando M é uma variedade simplesmente conexa, dizemos que φ é um *recobrimento universal* e que M é o *recobrimento universal de* N.

Uma variedade Riemanniana M é dita *completa* se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, as geodésicas γ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Hopf-Rinow (ver Teorema 6.13 em [Lee18b]), se M é uma variedade compacta, então M é completa.

Lema 3.5. Seja M uma variedade Riemanniana Completa e seja $\varphi : M \to N$ um difeomorfismo local sobre uma variedade Riemanniana N que possui a seguinte propriedade: para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$, tem-se $|d\varphi_p(v)| \geq |v|$. Então, φ é um recobrimento.

Demonstração. Ver Lema 3.3 do Capítulo 7 do livro [DC19]. □

Considere que Σ é uma superfície compacta e possui curvatura escalar constante. Assumindo que Σ é conexa (caso não seja basta tomar uma componentes conexa), segue do Teorema da Classificação dos Espaços de Curvatura Constante (Ver Corolário 5.6.14 de [Pet16]) que existe uma isómetria $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$.

Dessa forma, tomando $\Phi : \mathbb{R} \times \Sigma \to M$ (definida por (3.1)) e $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$, defina

$$F(t, q) := \Phi(t, \varphi(q)). \tag{3.2}$$

Pelo argumento de Cheeger-Gromoll, temos que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to M$ é uma isómetria local.

Agora, pelo Lema 3.5, concluímos que a isometria $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to M$, definida por (3.2), é um recobrimento. Além disso, como o cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ é simplesmente conexo, segue que $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to M$ é um recobrimento universal.

3.3 Homologia singular

Seja M uma variedade Riemanniana. Usando cadeias singulares, abordaremos brevemente a definição dos grupos de homologia singulares $H_i(M, \mathbb{Z})$ com coeficientes inteiros, para um estudo mais detalhado, consulte [Bre93] e [Tre16].

Considerando $\mathbb{R}^n$ como o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ composto pelos vetores cujo $(n+1)$-ésimo coordenado é igual a 0, podemos considerar a união $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}^n$. Para $n \geq 1$, seja e_n o vetor cuja n-ésima coordenada é 1 e as demais coordenadas são 0, e seja e_0 o vetor cujas coordenadas são todas 0. Para $r \geq 0$, o *simplexo* Δ_r de dimensão r é dado pelo conjunto

$$\Delta_r = \left\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i e_i;\ \lambda_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Um *r-simplexo singular* na variedade M é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_r \to M$. As *r-cadeias singulares* $C_r(M)$ em M são as combinações lineares finitas, com coeficientes inteiros, dos r-simplexos singulares. Elas formam um grupo abeliano.

Para $r \geq 1$ e $k = 0, \ldots, r$, definimos a *k-ésima face* de um simplexo Δ_r como a aplicação $\partial_r^k : \Delta_{r-1} \to \Delta_r$ dada por

$$\partial_r^k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e_i + \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_{i-1} e_i, \qquad k = 1, \ldots, i-1,$$

com

$$\partial_r^i \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i e_i, \qquad k = i$$

e

$$\partial_r^0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=k+1}^{r} \lambda_{i-1} e_i, \qquad k = 0.$$

O *operador bordo* $\partial : C_r(M) \to C_{r-1}(M)$ é definido como a soma alternada

$$\partial s = \sum_{i=0}^{r} (-1)^k s \circ \partial_r^k, \qquad s \in C_r(M).$$

Tal operador satisfaz $\partial\partial = 0$, de modo que a sequência

$$\cdots \to C_{r+1}(M) \xrightarrow{\partial} C_r(M) \xrightarrow{\partial} C_{r-1}(M) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(M)$$

é um complexo de cadeias, chamado o *complexo singular* da variedade M e definimos os *grupos de homologia singular* como o anel:

$$H_r(M,\mathbb{Z}) = \frac{\ker(\partial : C_r(M) \to C_{r-1}(M))}{\operatorname{Im}(\partial C_{r+1}(M))}. \tag{3.3}$$

Seus elementos são as *classes de homologia*

$$[z] = z + \partial C_{r+1} = \{z + \partial s;\ s \in C_{r+1}\},$$

onde $z \in \ker(\partial : C_r \to C_{r-1}(M))$. Dizemos que $z, z' \in \ker(\partial : C_r \to C_{r-1}(M))$ são homólogos quando $z - z' = \partial s$. Quando z, z' são homólogos, então $[z] = [z']$.

O Teorema de Thom garante que em toda n-variedade Riemanniana M orientada e fechada, as classes de homologia em $H_{n-1}(M;\mathbb{Z})$ podem ser representadas por uma classe fundamental de uma subvariedade. De fato,

Teorema 3.6 (Thom)**.** Se M é uma n-variedade Riemanniana fechada e orientada, então qualquer classe de homologia em $(H_{n-1}(M;\mathbb{Z}))$ é representada por uma classe de subvariedade Riemanniana. Isto é, dado $[z] \in H_{n-1}(M;\mathbb{Z})$, exite uma subvariedade $\Sigma \subset M$ tal que

$$[z] = [\Sigma].$$

Demonstração. Ver Teorema 11.16 do Capítulo VI do livro [Bre93]. □

Em particular, sobre as hipoteses do teorema, se $\Sigma \subset M$ não é um bordo, isto é, não existe uma n-subvariedade $W \subset M$ com $\partial W = \Sigma$, então Σ define um elemento não trivial de $H_{n-1}(M;\mathbb{Z})$, o qual denotamos por $[\Sigma] \neq 0$. Quando o grupo de homologia possui pelo menos um elemento não trivial, dizemos que ele é um grupo não trivial e denotamos $H_{n-1}(M;\mathbb{Z}) \neq 0$.

3.4 Característica de Euler-Poincaré

Seja Σ uma 2-variedade. Se Σ for compacta, conexa e orientada, então ela é homeomorfa a esfera $\mathbb{S}^2$ ou a soma conexa de g toros $\mathbb{T}^2$ (essa classificação topológica é garantida pelo Teorema 6.12 de [Lee10]), o número g é chamado de *gênero de* Σ. Nessas condições a característica de Euler-Poincaré em Σ é expressa como

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g. \tag{3.4}$$

Se, por outro lado, Σ for compacta e orientada, mas não necessariamente conexa, ela pode ser decomposta como a união disjunta de um número finito de componentes conexas $\{S_i\}$, isto é,

$$\Sigma = \bigsqcup_{i=1}^{N} S_i,$$

onde N denota o número de componentes conexas de Σ, e cada $S_i \subset \Sigma$ é uma subvariedade compacta, conexa e orientada. Para cada S_i, sua característica de Euler-Poincaré é dada por

$$\chi(S_i) = 2 - 2g_i,$$

onde g_i denota o gênero de S_i. Assim, a característica de Euler-Poincaré de Σ é

$$\begin{aligned}\chi(\Sigma) &= \chi\Big(\bigsqcup_{i=1}^{N} S_i\Big)\\ &= (2-2g_1) + (2-2g_2) + \cdots + (2-2g_N)\\ &= 2N - 2(g_1 + g_2 + \cdots + g_N).\end{aligned}$$

Consequentemente, para qualquer 2-variedade Σ compacta e orienteada, temos que

$$\chi(\Sigma) \leq 2N, \tag{3.5}$$

onde N denota o número de componentes conexas de Σ.

A seguir, apresentamos o Teorema de Gauss-Bonnet, um resultado que estabelece uma relação entre a curvatura escalar de Σ e sua característica de Euler-Poincaré.

Teorema 3.7 (Gauss-Bonnet)**.** Seja Σ uma 2-variedade Riemanniana compacta e orientada, então

$$\int_\Sigma \mathrm{Scal}\ dV_\Sigma = 4\pi\chi(\Sigma). \tag{3.6}$$

Demonstração. Ver Teorema 9.7 de ([Lee18a]). □

3.5 Fórmula da Co-área e Teorema de Sard

Enunciaremos a seguir dois teoremas clássicos, seguidos de adaptações e interpretações que os tornam diretamente aplicáveis às nossas necessidades.

Teorema 3.8 (Fórmula da co-área)**.** Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função suave em uma variedade Riemanniana M, e $g : M \to [0,\infty)$ uma função mensurável. Então

$$\int_M g|\nabla f|\, dV_M = \int_0^\infty \left(\int_{f^{-1}(t)} g\, dV_{f^{-1}(t)}\right) dt.$$

Demonstração. Ver Teorema 0.4.5 de [Wan06]. □

Em particular, seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável, tal que $f^{-1}(A) \subset M$, tomando g como a função característica de $f^{-1}(A)$, definida por

$$g(p) = \begin{cases} 1, & p \in f^{-1}(A) \\ 0, & p \notin f^{-1}(A), \end{cases}$$

obtemos

$$\int_{f^{-1}(A)} |\nabla f| \, dV_{f^{-1}(A)} = \int_A \left(\int_{f^{-1}(t)} dV_{f^{-1}(t)} \right) dt. \tag{3.7}$$

Teorema 3.9 (Sard)**.** Sejam M e N variedades Riemannianas e $f : M \to N$ uma aplicação suave. Então, o conjuto dos valores críticos de f tem médida nula em N.

Demonstração. Ver Capítulo 6 de [Lee12]. □

Sejam A e B conjuntos quaisquer. Denotamos por $|A|$ e $|B|$ as medidas de A e B, respectivamente. Usamos a notação $|A| \to |B|$ para indicar que a medida do conjunto A tende à medida do conjunto $|B|$. Em particluar, quando $|A| \to 0$, dizemos que A tende a ter medida nula.

Se A tem medida nula, então para qualquer aplicação F diferenciável em A, temos que

$$\int_A F = 0.$$

Capítulo 4

Estimativas de Área

Neste capítulo, estabelecemos uma desigualdade geométrica que relaciona a característica de Euler-Poincaré de uma superfície de nível, obtida por meio de uma aplicação harmônica. Com base nessa desigualdade, exploramos novos resultados sobre desigualdades sistólicas, incluindo uma estimativa para superfícies de área minimizante. Essa abordagem constitui a base de alguns dos resultados apresentados em [Ste22], de D. Stern, que serviu como principal referência para o desenvolvimento desta dissertação.

Seguindo a técnica desenvolvida no artigo citado, e estendendo-a ao contexto das soluções de equações de Poisson, conseguimos obter um novo resultado relacionado a uma desigualdade sistólica. Esse resultado estabelece uma relação entre a curvatura escalar da variedade ambiente, a função potencial envolvida na equação de Poisson e as propriedades geométricas das superfícies associadas. A abordagem explorada permite identificar novos vínculos entre a geometria global da variedade e sístole, contribuindo para uma compreensão mais profunda das interações entre curvatura e topologia.

4.1 Uma abordagem com aplicações harmônicas

Apresentaremos, a seguir, algumas ideias empregadas em [Ste22].

Teorema 4.1 (D. Stern)**.** Seja M uma 3-variedade Riemanniana fechada e orientada, e seja $u : M \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação harmônica não trivial. Então, para $\Sigma_\theta := u^{-1}(\theta)$, temos:

$$2\pi \int_{\theta\in\mathbb{S}^1} \chi(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2}\int_{\theta\in\mathbb{S}^1}\int_{\Sigma_\theta}(|du|^{-2}|\operatorname{Hess} u|^2 + \operatorname{Scal}_M). \tag{4.1}$$

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração, estabelecemos as seguintes notações:

$$h := u^*(d\theta), \quad |du| = |h| = |d(\theta\circ u)| \quad \text{e} \quad |\operatorname{Hess} u| = |Dh| = |\operatorname{Hess}(\theta\circ u)|,$$

onde $u^*(d\theta) \in \Omega^1(M)$ é o pullback de $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ por u.

Prosseguindo com a demonstração, como u é uma aplicação harmônica, segue do Lema 2.30 que a 1-forma $h = u^*(d\theta)$ é uma forma harmônica. Assim, pela Identidade de Bochner-Weitzenböck, temos que

$$\frac{1}{2}\Delta|h|^2 = |\mathrm{Hess}\, u|^2 + \mathrm{Ric}(h^\sharp, h^\sharp). \tag{4.2}$$

Por outro lado, tomando $\delta > 0$ e definindo a função $\varphi_\delta = (|h|^2+\delta)^{\frac{1}{2}}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_\delta &= \mathrm{div}(\nabla\varphi_\delta) = \mathrm{div}\left(\frac{1}{2\varphi_\delta}\nabla|h|^2\right)\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\mathrm{div}(\nabla|h|^2) + \left\langle \nabla\Big(\frac{1}{2\varphi_\delta}\Big), \nabla|h|^2\right\rangle \qquad \text{(cf. Proposição 1.15)}\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\Delta|h|^2 - \frac{1}{2\varphi_\delta^2}\langle\nabla\varphi_\delta, \nabla|h|^2\rangle\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\Delta|h|^2 - \frac{1}{4\varphi_\delta^3}|\nabla|h|^2|^2\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\Delta|h|^2 - \frac{1}{4\varphi_\delta^3}|2|h|\nabla|h||^2\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\Delta|h|^2 - \frac{|h|^2}{\varphi_\delta^3}|\nabla|h||^2\\
&= \frac{1}{\varphi_\delta}\Big(\frac{1}{2}\Delta|h|^2 - \frac{|h|^2}{\varphi_\delta^2}|\nabla|h||^2\Big).
\end{aligned}$$

Substituindo (4.2) na igualdade acima, chegamos a:

$$\Delta\varphi_\delta = \frac{1}{\varphi_\delta}\Big(|\mathrm{Hess}\, u|^2 + \mathrm{Ric}(h^\sharp, h^\sharp) - \frac{|h|^2}{\varphi_\delta^2}|\nabla|h||^2\Big).$$

Perceba que, $|h|^2 = \varphi_\delta^2 - \delta < \varphi_\delta^2$ implica que $\frac{|h|^2}{\varphi_\delta^2} < 1$. Logo, alcançamos a seguinte desigualdade:

$$\Delta\varphi_\delta \geq \frac{1}{\varphi_\delta}\Big(|\mathrm{Hess}\, u|^2 - |\nabla|h||^2 + \mathrm{Ric}(h^\sharp, h^\sharp)\Big). \tag{4.3}$$

Agora, utilizando a hipótese de que u é não trivial e aplicando o Teorema de Sard, conclui-se que, para quase todo $\theta \in \mathbb{S}^1$, o nível $\Sigma_\theta := u^{-1}(\theta)$ é uma hipersuperfície suave.

Consequentemente, o vetor normal é dado por $\nu = \frac{h^\sharp}{|h^\sharp|}$. Aplicando o Truque de Schoen-Yau para $\Sigma_\theta \subset M$, obtemos

$$\mathrm{Ric}(\nu, \nu) = \frac{1}{2}(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta} + H^2_{\Sigma_\theta} - |A_{\Sigma_\theta}|^2). \tag{4.4}$$

Vamos explorar os termos $|A_{\Sigma_\theta}|^2$ e $H^2_{\Sigma_\theta}$ presentes na igualdade acima.

Tomando $X \in \mathfrak{X}(\Sigma_\theta)$ arbitrário, o operador de Weingarten A_{Σ_θ} é definido por

$$A_{\Sigma_\theta}X = -(\nabla_X \nu)^\top = -\left(\nabla_X \frac{h^\sharp}{|h^\sharp|}\right)^\top = -\left(X\Big(\frac{1}{|h^\sharp|}\Big)h^\sharp + \frac{1}{|h^\sharp|}\nabla_X h^\sharp\right)^\top = -\frac{1}{|h^\sharp|}\nabla_X h^\sharp.$$

Daí, obtemos a seguinte expressão:

$$\nabla_X h^\sharp = -|h^\sharp| A_{\Sigma_\theta} X. \tag{4.5}$$

Vamos escrever $\langle \nabla_X h^\sharp, Y\rangle = (\operatorname{Hess} u)(X,Y)$, assim

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Hess} u|^2 = |\nabla h^\sharp|^2 &= \sum_{i=1}^{3}(\nabla_{e_i} h^\sharp)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, e_j\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu h^\sharp, \nu\rangle^2 + \sum_{j=1}^{2}\langle \nabla_\nu h^\sharp, e_j\rangle^2 + \sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu h^\sharp, \nu\rangle^2 + \sum_{j=1}^{2}\langle \nabla_{e_j} h^\sharp, \nu\rangle^2 + \sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu h^\sharp, \nu\rangle^2 + 2\sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 \\
&= |h^\sharp|^2\sum_{i,j=1}^{2}\langle A_{\Sigma_\theta} e_i, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu h^\sharp, \nu\rangle^2 + 2\sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 \quad (\text{cf. } (4.5)) \\
&= |h^\sharp|^2 |A_{\Sigma_\theta}|^2 + (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu) + 2\sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2.
\end{aligned}$$

Perceba ainda que

$$|\nabla |h||^2 = \sum_{i=1}^{3}\Big(e_i(|h|)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2|h|}e_i(|h|^2)\right)^2 = \frac{1}{4|h|^2}\sum_{i=1}^{3}\Big(e_i(|h|^2)\Big)^2,$$

e como $|h|^2 = |h^\sharp|^2$ (ver (1.14)), segue que

$$\begin{aligned}
|\nabla |h||^2 &= \frac{1}{4|h^\sharp|^2}\sum_{i=1}^{3}(e_i(|h^\sharp|^2))^2 = \frac{1}{4|h^\sharp|^2}\sum_{i=1}^{3}(2\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, h^\sharp\rangle)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{3}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 = \sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 + \langle \nabla_\nu h^\sharp, \nu\rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 + (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i} h^\sharp, \nu\rangle^2 = |\nabla |h||^2 - (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu).$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess}\, u|^2 &= |h^\sharp|^2|A_{\Sigma_\theta}|^2+(\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu) + 2|\nabla|h||^2-2(\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu)\\ &= |h^\sharp|^2|A_{\Sigma_\theta}|^2+2|\nabla|h||^2-(\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu).\end{aligned}$$

Portanto,

$$|h^\sharp|^2|A_{\Sigma_\theta}|^2= |\nabla h^\sharp|^2-2|\nabla|h||^2+(\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu). \tag{4.6}$$

A curvatura média H_{Σ_θ}, satisfaz:

$$\begin{aligned}|h^\sharp|H_{\Sigma_\theta} &= \sum_{i=1}^{2}\langle|h^\sharp|A_{\Sigma_\theta}(e_i), e_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{2}\langle-\nabla_{e_i}h^\sharp, e_i\rangle \quad (\text{cf. } (4.5))\\ &= -\sum_{i=1}^{2}(\mathrm{Hess}\, u)(e_i,e_i)\\ &= -\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{Hess}\, u)(e_i,e_i) + (\mathrm{Hess}\, u)(\nu,\nu)\\ &= -\Delta u + (\mathrm{Hess}\, u)(\nu,\nu).\end{aligned}$$

Já que u é harmônica, temos que $\Delta u = 0$. Dessa forma, podemos concluir que

$$|h^\sharp|^2H_{\Sigma_\theta}^2 = (\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu). \tag{4.7}$$

Utilizando (4.6) e (4.7), obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}|h^\sharp|^2(H_{\Sigma_\theta}^2 - |A_{\Sigma_\theta}|^2) &= (|h^\sharp|H_{\Sigma_\theta})^2 - (|h^\sharp||A_{\Sigma_\theta}|)^2\\ &= (\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu) - |\mathrm{Hess}\, u|^2+2|\nabla|h||^2-(\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu)\\ &= 2|\nabla|h||^2-|\mathrm{Hess}\, u|^2. \end{aligned}\tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) em (4.4), podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(h^\sharp,h^\sharp) &= |h^\sharp|^2\mathrm{Ric}(\nu,\nu)\\ &= \frac{1}{2}|h^\sharp|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta} + H_{\Sigma_\theta}^2 - |A_{\Sigma_\theta}|^2)\\ &= \frac{1}{2}|h^\sharp|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta}) + \frac{1}{2}|h^\sharp|^2(H_{\Sigma_\theta}^2 - |A_{\Sigma_\theta}|^2)\\ &= \frac{1}{2}|h^\sharp|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta}) + \frac{1}{2}(2|\nabla|h||^2-|\mathrm{Hess}\, u|^2)\end{aligned}$$

Novamente usando $|h|^2 = |h^\sharp|^2$, chegamos em

$$\mathrm{Ric}(h^\sharp, h^\sharp) = \frac{1}{2}|h|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta}) + \frac{1}{2}(2|\nabla|h||^2 - |\mathrm{Hess}\, u|^2). \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) em (4.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_\delta &\geq \frac{1}{\varphi_\delta}\left(|\mathrm{Hess}\, u|^2 - |\nabla|h||^2 + \frac{1}{2}|h|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta}) + \frac{1}{2}(2|\nabla|h||^2 - |\mathrm{Hess}\, u|^2)\right)\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\left(2|\mathrm{Hess}\, u|^2 - 2|\nabla|h||^2 + |h|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta}) + 2|\nabla|h||^2 - |\mathrm{Hess}\, u|^2\right)\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\left(|\mathrm{Hess}\, u|^2 + |h|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta})\right)\\
&= \frac{1}{2\varphi_\delta}\left(|\mathrm{Hess}\, u|^2 + |du|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta})\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, seja $A \subset \mathbb{S}^1$ um conjunto aberto que contém o conjunto $\mathcal{C} := \mathrm{Crit}(u)$ dos valores críticos de u, e seja $B = \mathbb{S}^1 \setminus A$ o subconjunto complementar fechado dos valores regulares de u, de modo que $B \subset \mathrm{Reg}(u)$. Integrando (4.10) sobre $u^{-1}(B)$, vem que

$$\int_{u^{-1}(B)} \frac{1}{2\varphi_\delta}\left(|\mathrm{Hess}\, u|^2 + |du|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta})\right) \leq \int_{u^{-1}(B)} \Delta\varphi_\delta.$$

Pelo Teorema da Divergência sabemos que $\int_M \Delta\varphi_\delta = 0$. Consequentemente

$$\int_{u^{-1}(B)} \Delta\varphi_\delta = -\int_{u^{-1}(A)} \Delta\varphi_\delta.$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Kato, obtemos $|\mathrm{Hess}\, u|^2 - |\nabla|h||^2 \geq 0$. Assim, por (4.3), temos que

$$\Delta\varphi_\delta \geq \frac{1}{\varphi_\delta}\mathrm{Ric}(h^\sharp, h^\sharp).$$

Por sua vez, como o Ric é uma forma bilinear e M^3 é uma variedade fechada, tomando $C_M = \max_M|\mathrm{Ric}|$, temos que $|\mathrm{Ric}(h^\sharp, h^\sharp)| \leq C_M|h|^2$. Logo,

$$\Delta\varphi_\delta \geq \frac{-C_M|h|^2}{\varphi_\delta} = -C_M|h| \cdot \frac{|h|}{\varphi_\delta} \geq -C_M|h|.$$

Daí,

$$\int_{u^{-1}(B)} \Delta\varphi_\delta = -\int_{u^{-1}(A)} \Delta\varphi_\delta \leq C_M \int_{u^{-1}(A)} |h|.$$

Pela Fórmula da co-área, vem que

$$C_M \int_{u^{-1}(A)} |h| = C_M \int_A \left(\int_{u^{-1}(\theta)} d\Sigma_\theta \right) d\theta = C_M \int_A \mathrm{Area}(\Sigma_\theta)\ d\theta.$$

Logo,

$$\int_{u^{-1}(B)} \frac{1}{2\varphi_\delta} \left(|\mathrm{Hess}\, u|^2 + |du|^2 (\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta}) \right) \leq C_M \int_A \mathrm{Area}(\Sigma_\theta)\ d\theta. \tag{4.11}$$

Sendo M^3 uma variedade fechada, temos que $|du|$ é limitado em M, e fazendo $\delta \to 0$, vem que $\varphi_\delta \to |du|$. Logo,

$$\frac{1}{2} \int_{u^{-1}(B)} |du| \left(\frac{|\mathrm{Hess}\, u|^2}{|du|^2} + \mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta} \right) \leq C_M \int_A \mathrm{Area}(\Sigma_\theta)\ d\theta.$$

No entanto, aplicando a Fórmula da co-área e o Teorema de Gauss-Bonnet, perceba que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{u^{-1}(B)} |du| \left(\frac{|\mathrm{Hess}\, u|^2}{|du|^2} + \mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta} \right) &= \frac{1}{2} \int_B \left(\int_{\Sigma_\theta} \left(\frac{|\mathrm{Hess}\, u|^2}{|du|^2} + \mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta} \right) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_B \left(\int_{\Sigma_\theta} \left(\frac{|\mathrm{Hess}\, u|^2}{|du|^2} + \mathrm{Scal}_M \right) \right) d\theta \\ &\quad - 2\pi \int_B \mathcal{X}(\Sigma_\theta)\ d\theta. \end{aligned}$$

Desse modo, a estimativa (4.11) se torna:

$$\frac{1}{2} \int_B \left(\int_{\Sigma_\theta} \left(\frac{|\mathrm{Hess}\, u|^2}{|du|^2} + \mathrm{Scal}_M \right) \right) d\theta \leq 2\pi \int_B \mathcal{X}(\Sigma_\theta)\ d\theta + C_M \int_A \mathrm{Area}(\Sigma_\theta)\ d\theta. \tag{4.12}$$

Finalmente, pelo Teorema de Sard, o cojunto $\mathcal{C}$ tem médida nula em $\mathbb{S}^1$; Tomando a médida de A arbitrariamente pequena de modo que $|A| \to |\mathcal{C}|$, concluimos de (4.12) que

$$\frac{1}{2} \int_{\theta \in \mathbb{S}^1} \left(\int_{\Sigma_\theta} \left(\frac{|\mathrm{Hess}\, u|^2}{|du|^2} + \mathrm{Scal}_M \right) \right) d\theta \leq 2\pi \int_{\theta \in \mathbb{S}^1} \mathcal{X}(\Sigma_\theta)\ d\theta.$$

□

Corolário 4.2 (D. Stern)**.** Seja M uma 3-variedade Riemanniana fechada e orientada, e $u : M \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação harmônica não trivial. Se M possui curvatura escalar positiva $\mathrm{Scal}_M > 0$, então

$$2\pi \int_{\theta \in \mathbb{S}^1} \chi(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2} \min_M (\mathrm{Scal}_M) \int_{\theta \in \mathbb{S}^1} \mathrm{Area}(\Sigma_\theta), \tag{4.13}$$

onde a igualdade ocorre apenas se o recobrimento universal de M for o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo Teorema de D. Stern

$$2\pi \int_\theta \chi(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2} \int_\theta \int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2}|\mathrm{Hess}\, u|^2 + \mathrm{Scal}_M).$$

Tomando o $\min_M(\mathrm{Scal}_M)$ e usando o fato de $|du|^2|\mathrm{Hess}\, u|^2 \geq 0$, temos que

$$2\pi \int_\theta \chi(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2} \int_\theta \int_{\Sigma_\theta} \mathrm{Scal}_M \geq \frac{1}{2} \min_M(\mathrm{Scal}_M) \int_\theta \mathrm{Area}(\Sigma_\theta).$$

Vamos analisar o caso da igualdade. Por Guass-Bonnet e pelo Teorema de D. Stern, obtemos

$$\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{S}^1} \int_{\Sigma_\theta} \mathrm{Scal}_{\Sigma_\theta} \right) d\theta = 2\pi \int_{\mathbb{S}^1} \chi(\Sigma_\theta) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\Sigma_\theta} (|du|^{-2}|\mathrm{Hess}\, u|^2 + \mathrm{Scal}_M)\; d\theta.$$

Onde, a igualdade ocorre se e somente se $\mathrm{Scal}_M = \text{const.}$ e $\mathrm{Hess}\, u = 0$. Neste caso, tomando $\nabla u = \frac{h^\sharp}{|h^\sharp|}$, pela Preposição 3.3, o fluxo gradiente

$$\Phi : \mathbb{R} \times S_{i_0} \to M,$$

onde S_{i_θ} é uma componente conexa fixada de Σ_θ, fornece uma isometria local (em particular, um recobrimento) entre M e $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$. O que conclui a demonstração. □

O Teorema de D. Stern também pode ser utilizado nas demonstrações de alguns teoremas de rigidez relacionados à superfícies minimizantes de área. No contexto em que M é uma 3-variedade fechada e orientada, define-se a 2-sístole homológica por:

$$\mathrm{sys}_2(M) := \inf \{\mathrm{Area}(\Sigma) \mid \Sigma \subset M, [\Sigma] \neq 0 \in H_2(M; \mathbb{Z})\}$$

como sendo a menor área entre superfícies que não são bordos em M.

Teorema 4.3 (D. Stern)**.** Seja M uma 3-variedade Riemanniana fechada e orientada. Se M possui curvatura escalar positiva, $\mathrm{Scal}_M > 0$, e segundo grupo de homologia não trivial, $H_2(M; \mathbb{Z}) \neq 0$, então

$$\min_M(\mathrm{Scal}_M)\mathrm{sys}_2(M) \leq 8\pi, \tag{4.14}$$

onde a igualdade ocorre apenas se o recobrimento universal de M for o cilindro $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $N(\theta)$ o número de componentes conexas $\{S_i\}$ de Σ_θ. Por (3.5), temos $\chi(\Sigma_\theta) \leq 2N(\theta)$. Além disso,

$$\mathrm{Area}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{N(\theta)} \mathrm{Area}(S_i) \geq N(\theta)\mathrm{sys}_2(M).$$

Assim, aplicando o Corolário anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\min_M(\mathrm{Scal}_M)\mathrm{sys}_2(M)\int_{\mathbb{S}^1} N(\theta)\, d\theta &\leq \min_M(\mathrm{Scal}_M)\int_{\mathbb{S}^1}\mathrm{Area}(\Sigma_\theta)d\theta\\ &\leq 4\pi\int_{\mathbb{S}^1}\chi(\Sigma_\theta)d\theta\\ &\leq 8\pi\int_{\mathbb{S}^1} N(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\min_M(\mathrm{Scal}_M)\mathrm{sys}_2(M)\leq 8\pi,$$

ocorrendo a igualdade apenas se M for recoberta por um cilindro $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$. $\square$

4.2 Uma abordagem para a equação de Poisson

Seja M uma n-variedade Riemanniana, e seja $u: M\to I\subset\mathbb{R}$ uma função suave definida em M. Consideremos a equação de Poisson definida por:

$$\Delta u = -f(u), \tag{4.15}$$

onde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função suave, chamada de *função potencial*.

Lema 4.4. Seja M uma 3-variedade Riemanniana fechada e orientada. Se $u: M\to I$, com $I\subset\mathbb{R}$ compacto, é uma solução não trivival da equação $\Delta u = -f(u)$, com f não-crescente, então

$$2\pi\int_{t\in I}\chi(\Sigma_t)\geq\frac{1}{2}\int_{t\in I}\int_{\Sigma_t}\Big(|\nabla u|^{-2}(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\, u|)^2+\mathrm{Scal}_M - f'(u)\Big). \tag{4.16}$$

Demonstração. Já que u é solução da equação de Poisson, conclui-se que u é suave. Assim, aplicando a Fórmula de Bochner, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 &= \mathrm{Ric}(\nabla u,\nabla u)+\langle\nabla u,\nabla(\Delta u)\rangle+|\mathrm{Hess}\, u|^2\\ &= \mathrm{Ric}(\nabla u,\nabla u)-\langle\nabla u,\nabla f(u)\rangle+|\mathrm{Hess}\, u|^2\\ &= \mathrm{Ric}(\nabla u,\nabla u)-f'(u)\langle\nabla u,\nabla u\rangle+|\mathrm{Hess}\, u|^2\\ &= \mathrm{Ric}(\nabla u,\nabla u)-f'(u)|\nabla u|^2+|\mathrm{Hess}\, u|^2.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Por outro lado, tomando $\delta>0$ e definindo a função $\varphi_\delta := (|\nabla u|^2+\delta)^{\frac{1}{2}}$, temos a seguinte expressão

$$\Delta\varphi_\delta = \frac{1}{\varphi_\delta}\Big(\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2-\frac{|\nabla u|^2}{\varphi_\delta^2}|\nabla|\nabla u||^2\Big) \tag{4.18}$$

Substituindo (4.17) em (4.18), vem que

$$\Delta\varphi_\delta = \frac{1}{\varphi_\delta}\left(|\mathrm{Hess}\, u|^2 - f'(u)|\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) - \frac{|\nabla u|^2}{\varphi_\delta^2}|\nabla|\nabla u||^2\right).$$

Perceba que $|\nabla u|^2 = \varphi_\delta^2 - \delta < \varphi_\delta^2$ implica em $\frac{|\nabla u|^2}{\varphi_\delta^2} < 1$. Logo,

$$\Delta\varphi_\delta \geq \frac{1}{\varphi_\delta}\left(|\mathrm{Hess}\, u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2 - f'(u)|\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)\right). \tag{4.19}$$

Agora, utilizando a hipótese de que u é não trivial e aplicando o Teorema de Sard, conclui-se que, para quase todo $t \in I$, o nível $\Sigma_t := u^{-1}(t)$ é uma hipersuperfície suave.

Consequentemente, o vetor normal é dado por $\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Aplicando o Truque de Schoen-Yau a $\Sigma_t \subset M$, obtemos

$$\mathrm{Ric}(\nu,\nu) = \frac{1}{2}(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t} + H_{\Sigma_t}^2 - |A_{\Sigma_t}|^2). \tag{4.20}$$

Vamos explorar os termos $|A_{\Sigma_t}|^2$ e $H_{\Sigma_t}^2$.

Tomando $X \in \mathfrak{X}(\Sigma_t)$ arbitrário, o operador de Weingarten A_{Σ_t} é definido por

$$A_{\Sigma_t}X = -(\nabla_X \nu)^\top = -\left(X\Big(\frac{1}{|\nabla u|}\Big)\nabla u + \frac{1}{|\nabla u|}\nabla_X \nabla u\right)^\top = -\frac{1}{|\nabla u|}\nabla_X\nabla u.$$

Daí, obtemos a seguinte expressão:

$$\nabla_X \nabla u = -|\nabla u| A_{\Sigma_t} X. \tag{4.21}$$

Usando (4.21), temos que

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Hess}\, u|^2 &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, e_j\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu \nabla u, \nu\rangle^2 + \sum_{j=1}^{2}\langle \nabla_\nu\nabla u, e_j\rangle^2 + \sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, \nu\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu \nabla u, \nu\rangle^2 + \sum_{j=1}^{2}\langle \nabla_{e_j}\nabla u, \nu\rangle^2 + \sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, \nu\rangle^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu \nabla u, \nu\rangle^2 + 2\sum_{j=1}^{2}\langle \nabla_{e_j}\nabla u, \nu\rangle^2 \\
&= |\nabla u|^2 \sum_{i,j=1}^{2}\langle A_{\Sigma_\theta} e_i, e_j\rangle^2 + \langle \nabla_\nu \nabla u, \nu\rangle^2 + 2\sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, \nu\rangle^2 \\
&= |\nabla u|^2 |A_{\Sigma_\theta}|^2 + (\mathrm{Hess}\, u)^2(\nu,\nu) + 2\sum_{i=1}^{2}\langle \nabla_{e_i}\nabla u, \nu\rangle^2.
\end{aligned}$$

Perceba ainda que

$$
\begin{aligned}
|\nabla|\nabla u||^2 &= \sum_{i=1}^{3}\Big(e_i(|\nabla u|)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2|\nabla u|}e_i(|\nabla u|^2)\right)^2 = \frac{1}{4|\nabla u|^2}\sum_{i=1}^{3}\Big(e_i(|\nabla u|^2)\Big)^2\\
&= \frac{1}{4|\nabla u|^2}\sum_{i=1}^{3}(e_i(\langle\nabla u,\nabla u\rangle))^2 = \frac{1}{4|\nabla u|^2}\sum_{i=1}^{3}(2\langle\nabla_{e_i}\nabla u,\nabla u\rangle)^2 = \sum_{i=1}^{3}\langle\nabla_{e_i}\nabla u,\nu\rangle^2\\
&= \sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_{e_i}\nabla u,\nu\rangle^2 + \langle\nabla_{\nu}\nabla u,\nu\rangle^2 = \sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_{e_i}\nabla u,\nu\rangle^2 + (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_{e_i}\nabla u,\nu\rangle^2 = |\nabla|\nabla u||^2 - (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu).$$

Daí, temos que

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Hess} u|^2 &= |\nabla u|^2|A_{\Sigma_\theta}|^2 + (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu) + 2|\nabla|\nabla u||^2 - 2(\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu)\\
&= |\nabla u|^2|A_{\Sigma_\theta}|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2 - (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$|\nabla u|^2|A_{\Sigma_\theta}|^2 = |\operatorname{Hess} u|^2 - 2|\nabla|\nabla u||^2 + (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu). \tag{4.22}$$

A curvatura média H_{Σ_t}, juntamente com (4.21), nos fornece a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
|\nabla u|H_{\Sigma_t} &= \sum_{i=1}^{2}\langle|\nabla u|A_{\Sigma_\theta}(e_i),e_i\rangle = \sum_{i=1}^{2}\langle-\nabla_{e_i}\nabla u,e_i\rangle = -\sum_{i=1}^{2}(\operatorname{Hess} u)(e_i,e_i)\\
&= -\sum_{i=1}^{3}(\operatorname{Hess} u)(e_i,e_i) + (\operatorname{Hess} u)(\nu,\nu) = -\Delta u + (\operatorname{Hess} u)(\nu,\nu)\\
&= f(u) + (\operatorname{Hess} u)(\nu,\nu)
\end{aligned}
$$

Daí, segue que

$$|\nabla u|^2 H^2_{\Sigma_\theta} = f^2(u) + 2f(u)\operatorname{Hess} u(\nu,\nu) + (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu). \tag{4.23}$$

Utilizando (4.22) e (4.23), obtemos a seguinte relação

$$
\begin{aligned}
|\nabla u|^2(H^2_{\Sigma_\theta} - |A_{\Sigma_\theta}|^2) =& f^2(u) + 2f(u)\operatorname{Hess} u(\nu,\nu) + (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu)\\
&- |\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2 - (\operatorname{Hess} u)^2(\nu,\nu)\\
=& f^2(u) + 2f(u)\operatorname{Hess} u(\nu,\nu) - |\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2.
\end{aligned}\tag{4.24}
$$

Diante das expressões obtidas calculando a curvatura média e o operador de Weigarten, substituindo (4.24) em (4.20), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u) =& |\nabla u|^2 \operatorname{Ric}(\nu,\nu)\\
=& \frac{1}{2}|\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t} + H^2_{\Sigma_t} - |A_{\Sigma_t}|^2)\\
=& \frac{1}{2}|\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t}) + \frac{1}{2}|\nabla u|^2(H^2_{\Sigma_t} - |A_{\Sigma_t}|^2)\\
=& \frac{1}{2}|\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t})\\
&+ \frac{1}{2}(f^2(u) + 2f(u)\operatorname{Hess} u(\nu,\nu) - |\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2).
\end{aligned}
$$

No entanto, denotando $\square = f^2(u) + 2f(u)\operatorname{Hess} u(\nu,\nu) - |\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2$, perceba que

$$
\begin{aligned}
\square &\geq |f(u)|^2 - 2|f(u)||\operatorname{Hess} u(\nu,\nu)| - |\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2\\
&= \Big(|f(u)| - |\operatorname{Hess} u|\Big)^2 - 2|\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(\nabla u, \nabla u) \geq& \frac{1}{2}|\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t})\\
&+ \frac{1}{2}\left(\Big(|f(u)| - |\operatorname{Hess} u|\Big)^2 - 2|\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2\right).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Agora, substituindo (4.25) em (4.19), obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi_\delta \geq& \frac{1}{\varphi_\delta}\Bigg[|\operatorname{Hess} u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2 - f'(u)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t})\\
&+ \frac{1}{2}\left(\Big(|f(u)| - |\operatorname{Hess} u|\Big)^2 - 2|\operatorname{Hess} u|^2 + 2|\nabla|\nabla u||^2\right)\Bigg]\\
=& \frac{1}{\varphi_\delta}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t}) + \frac{1}{2}\Big(|f(u)| - |\operatorname{Hess} u|\Big)^2 - f'(u)|\nabla u|^2\right]\\
=& \frac{1}{2\varphi_\delta}\left[\Big(|f(u)| - |\operatorname{Hess} u|\Big)^2 + |\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t}) - f'(u)|\nabla u|^2\right].
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Seja $A \subset I$ um conjunto aberto que contém o conjunto $\mathcal{C} := \operatorname{Crit}(u)$, e seja $B = I \setminus A$ o subconjunto complementar fechado dos valores regulares de u. Integrando (4.26) sobre $u^{-1}(B)$, vem que

$$
\int_{u^{-1}(B)} \frac{1}{2\varphi_\delta}\left(\Big(|f(u)| - |\operatorname{Hess} u|\Big)^2 + |\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t}) - f'(u)|\nabla u|^2\right) \leq \int_{u^{-1}(B)} \Delta\varphi_\delta.
$$

Pelo Teorema da Divergência sabemos que $\int_M \Delta\varphi_\delta = 0$. Consequentemente

$$\int_{u^{-1}(B)} \Delta\varphi_\delta = -\int_{u^{-1}(A)} \Delta\varphi_\delta.$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Kato, obtemos $|\mathrm{Hess}\, u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2 \geq 0$. Assim, por (4.19), temos que

$$\Delta\varphi_\delta \geq \frac{1}{\varphi_\delta}\Big(\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) - f'(u)|\nabla u|^2\Big).$$

Por sua vez, como o Ric é uma forma bilinear e M^3 é uma variedade fechada, tomando $C_M = \max_M |\mathrm{Ric}|$, temos que $|\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)| \leq C_M |\nabla u|^2$. Logo,

$$\Delta\varphi_\delta \geq \frac{-C_M|\nabla u|^2 - f'(u)|\nabla u|^2}{\varphi_\delta} = -|\nabla u|(C_M - f'(u))\frac{|\nabla u|}{\varphi_\delta} \geq -|\nabla u|(C_M - f'(u)).$$

Por sua vez, como f é não-crescente, existe $C_I = \max_I(f')$. Então

$$\Delta\varphi_\delta \geq -|\nabla u|(C_M - C_I).$$

Daí,

$$\int_{u^{-1}(B)} \Delta\varphi_\delta = -\int_{u^{-1}(A)} \Delta\varphi_\delta \leq (C_M - C_I)\int_{u^{-1}(A)} |\nabla u|.$$

Pela Fórmula da co-área, vem que

$$(C_M - C_I)\int_{u^{-1}(A)} |\nabla u| = (C_M - C_I)\int_A \left(\int_{u^{-1}(t)} d\Sigma_t\right) dt = (C_M - C_I)\int_A \mathrm{Area}(\Sigma_t)\, dt.$$

Logo,

$$\int_{u^{-1}(B)} \frac{1}{2\varphi_\delta}\left(\Big(|f(u)| - |\mathrm{Hess}\, u|\Big)^2 + |\nabla u|^2(\mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t}) - f'(u)|\nabla u|^2\right)$$
$$\leq (C_M - C_I)\int_A \mathrm{Area}(\Sigma_t)\, dt. \qquad (4.27)$$

Sendo M^3 uma variedade fechada, temos que $|\nabla u|$ é limitado em M, e fazendo $\delta \to 0$, vem que $\varphi_\delta \to |\nabla u|$. Logo,

$$\frac{1}{2}\int_{u^{-1}(B)} |\nabla u|\left(\frac{\Big(|f(u)| - |\mathrm{Hess}\, u|\Big)^2}{|\nabla u|^2} + \mathrm{Scal}_M - \mathrm{Scal}_{\Sigma_t} - f'(u)\right)$$
$$\leq (C_M - C_I)\int_A \mathrm{Area}(\Sigma_t)\, dt.$$

Perceba ainda que, ao aplicar a Fórmula da co-área e o Teorema de Gauss-Bonnet, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{u^{-1}(B)}|\nabla u|\left(\frac{\Big(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\,u|\Big)^2}{|\nabla u|^2}+\mathrm{Scal}_M-\mathrm{Scal}_{\Sigma_t}-f'(u)\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_B\left[\int_{\Sigma_t}\left(\frac{\Big(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\,u|\Big)^2}{|\nabla u|^2}+\mathrm{Scal}_M-\mathrm{Scal}_{\Sigma_t}-f'(u)\right)\right]dt\\
&=\frac{1}{2}\int_B\left[\int_{\Sigma_t}\left(\frac{\Big(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\,u|\Big)^2}{|\nabla u|^2}+\mathrm{Scal}_M-f'(u)\right)\right]dt-2\pi\int_B\chi(\Sigma_\theta)\;dt.
\end{aligned}$$

Assim, a estimativa (4.27) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_B\left[\int_{\Sigma_t}\left(\frac{\Big(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\,u|\Big)^2}{|\nabla u|^2}+\mathrm{Scal}_M-f'(u)\right)\right]dt \leq\, &2\pi\int_B\chi(\Sigma_t)\;dt\\
&+(C_M-C_I)\int_A\mathrm{Area}(\Sigma_t)\;dt.
\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Teorema de Sard, o cojunto $\mathcal{C}$ tem médida nula em I, tomando a médida de A arbitrariamente pequena de modo que $|A|\to|\mathcal{C}|$, concluímos que

$$\frac{1}{2}\int_{t\in I}\left[\int_{\Sigma_t}\left(\frac{\Big(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\,u|\Big)^2}{|\nabla u|^2}+\mathrm{Scal}_M-f'(u)\right)\right]dt\leq 2\pi\int_{t\in I}\chi(\Sigma_t)\;dt.$$

□

Por fim, vamos usar a desigualdade obtida acima para obter uma estimativa sistólica.

Teorema 4.5. Seja M uma 3-variedade fechada, orientada e com segundo grupo de homologia não trivial, $H_2(M;\mathbb{Z})\neq 0$. Suponha que $u: M\to I$, com $I\subset\mathbb{R}$ compacto, é uma solução não trivial da equação $\Delta u=-f(u)$, com f não-crescente, e que a curvatura escalar de M é tal que $\mathrm{Scal}_M-f'\geq 0$. Então,

$$\Big(\min_M(\mathrm{Scal}_M)-\max_I(f')\Big)\mathrm{sys}_2(M)\leq 8\pi. \tag{4.28}$$

Demonstração. Do Lema anterior, temos que

$$2\pi\int_I\chi(\Sigma_t)\;dt\geq\frac{1}{2}\int_I\left(\int_{\Sigma_t}\Big(|\nabla u|^{-2}(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\,u|)^2+\mathrm{Scal}_M-f'(u)\Big)\right)dt.$$

Já que $|\nabla u|^{-2}(|f(u)|-|\mathrm{Hess}\,u|)^2\geq 0$, podemos escrever:

$$2\pi\int_I\chi(\Sigma_t)\;dt\geq\frac{1}{2}\int_I\left(\int_{\Sigma_t}\mathrm{Scal}_M-f'(u)\right)dt.$$

Agora, perceba que $\mathrm{Scal}_M\geq\min_M(\mathrm{Scal}_M)$ e $-f'\geq-\max_I(f')$. Assim, usando a hipótese de que $\mathrm{Scal}_M - f' \geq 0$, vem que $\mathrm{Scal}_M - f' \geq \min_M(\mathrm{Scal}_M) - \max_I(f')$. Daí,

$$2\pi \int_I \chi(\Sigma_t)\, dt \geq \frac{1}{2}\left(\min_M(\mathrm{Scal}_M) - \max_I(f')\right)\int_I \mathrm{Area}(\Sigma_t)\, dt.$$

Por fim, usando o fato de que $2N(t) \geq \chi(\Sigma_t)$ e $\mathrm{Area}(\Sigma_t) \geq N(t)\mathrm{sys}_2(M)$, obtemos

$$8\pi \int_I N(t)\, dt \geq \big(\min_M(\mathrm{Scal}_M) - \max_I(f')\big)\mathrm{sys}_2(M)\int_I N(t)\, dt.$$

O que conclui a demonstração. $\square$

Bibliografia

[BBEN10] Hubert Bray, Simon Brendle, Michael Eichmair, and André Neves. Area-minimizing projective planes in 3-manifolds. *Communications on pure and applied mathematics*, 63(9):1237–1247, 2010.

[BBN10] Hubert Bray, Simon Brendle, and Andre Neves. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. *Commun. Anal. Geom.*, 18(4):821–830, 2010.

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[Cam14] Antônio Caminha. *Tópicos de Geometria Diferencial*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2014.

[Cha84] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry. With a chapter by Burton Randol. With an appendix by Jozef Dodziuk*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics (Academic Press)*. Academic Press, New York, NY, 1984.

[DC19] Manfredo Perdigao Do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 6th edition, 2019.

[JD71] Cheeger J. and Gromoll D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 6:119–128, 1971.

[Jos08] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Universitext. Springer, 6th edition, 2008.

[Lee03] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2003.

[Lee10] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2nd edition, 2010.

[Lee12] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2012.

[Lee18a] John M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2nd edition, 2018.

[Lee18b] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2nd edition, 2018.

[LW08] Fanghua Lin and Changyou Wang. *The Analysis of Harmonic Maps and Their Heat Flows*. World Scientific, Singapore, 2008.

[Nas56] J. Nash. The imbedding problem for riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 63:20–63, 1956.

[Pet06] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.

[Pet16] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 3rd edition, 2016.

[Ste22] Daniel L. Stern. Scalar curvature and harmonic maps to S^1. *J. Differ. Geom.*, 122(2):259–269, 2022.

[SY79] Richard Schoen and Shing-Tung Yau. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. *Annals of Mathematics*, 110(1):127–142, 1979.

[Top63] V. A. Toponogov. Estimation of the length of a convex curve on a two-dimensional surface. *Sibirsk. Mat. Zh.l 4*, 1963.

[Tre16] Paula B. Tretkoff. *Complex Ball Quotients and Line Arrangements in the Projective Plane*, volume 51 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016.

[Wan06] Feng-Yu Wang. *Functional Inequalities, Markov Semigroups and Spectral Theory*, volume 18 of *Mathematical Monographs Series*. Science Press, Beijing/New York, 2006.

[Wu13] Hung-Hsi Wu. *The Bochner Technique in Differential Geometry*, volume 174. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.