UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - *CAMPUS* A.C. SIMÕES
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ROGÉRIO DOS SANTOS JÚNIOR

EXISTÊNCIA DE MEDIDAS INVARIANTES

Maceió - AL
Março de 2025

Rogério dos Santos Júnior

Existência de Medidas Invariantes

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Alagoas, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

Maceió - AL
Março de 2025

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB-4/661

S237e Santos Júnior, Rogério dos.
Existência de medidas invariantes / Rogério dos Santos Júnior. – 2025.
58 f. : il.

. Orientador: Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática. Maceió, 2025

Bibliografia: f. 58.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Medidas invariantes. I. Título.

CDU: 51

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, Rogério e Carmozilda, por toda a paciência e apoio ao longo da minha trajetória acadêmica, mesmo com toda a minha indecisão. Desde os tempos de escola até hoje, sempre me proporcionando as melhores oportunidades para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

Agradeço ao professor Rafael Lucena pela orientação, e aos professores Davi Lima e Wagner Rânter por aceitarem fazer parte da banca e pelas sugestões valiosas para o texto.

Sou grato ao meu irmão, Rodrigo, por fazer silêncio para que eu pudesse estudar. Também expresso minha gratidão à professora Elaine Silva, pelo incentivo e pela alegria genuína ao receber boas notícias sobre minha evolução na matemática, ao professor Diogo Santos, pela amizade, e ao professor Alan Anderson, pelas aulas e pelo suporte durante a pandemia.

Agradeço também aos meus amigos da graduação, Francisco Alan, por me ajudar desde a pandemia e por não deixar que eu reprovasse em todas as disciplinas no terceiro período, Lucas Mateus, pela amizade, Samuel Nascimento pela ajuda no curso de verão que fiz enquanto terminava o TCC, Henrique Caldas, Lucas Nogueira e Lucas Hiroshi, pela amizade, pelos momentos de descontração e pelo apoio constante, e por nunca desistirem de me chamar para jogar sinuca. Agradeço especialmente ao Lucas Hiroshi também pela ajuda para que eu conseguisse entregar o TCC a tempo de me matricular no mestrado (assim espero).

Por fim, agradeço aos meus amigos Keven Ewerton, Catharina Tenório e Flayra Luize, que sempre estiveram dispostos a me ouvir, principalmente nos momentos difíceis da graduação, quando estava sozinho no quarto durante a pandemia.

Resumo

O principal objetivo deste texto é apresentar uma prova clara do teorema de existência de medidas invariantes, além de esclarecer os diferentes caminhos encontrados na literatura para alcançar esse resultado. Consequentemente, busca servir como referência para alunos de iniciação científica, graduação e pós-graduação.

Sumário

Capítulo

1

Introdução

Seja $f : M \to M$ uma aplicação definida em um conjunto qualquer. Dado $x \in M$, podemos iterar f sucessivamente: Aplicando f uma vez, obtemos $f(x)$. Aplicando duas vezes, obtemos $f^2(x) = (f \circ f)(x)$, e de maneira geral, definindo a $n-$ésima iteração de f como

$$f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x),$$

podemos nos perguntar: O que acontece com a sequência de pontos gerada por essa iteração a medida que n cresce? Ou seja, definindo como a **órbita** de x o conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x); n \in \mathbb{N}\},$$

existe algum ”lugar” em M tal que a órbita de x passa infinitas vezes? Existe alguma ”região” desse conjunto em que a órbita de x nunca passa? Esse é um exemplo de um Sistema Dinâmico, que para nós, consiste apenas de um conjunto e uma aplicação definida nesse conjunto, e será nosso objetivo nesse texto responder perguntas semelhantes a essas.

No nosso texto, tentaremos responder essas questões de um ponto de vista probabilístico. Ou seja, procuramos responder perguntas da seguinte natureza: dado $x \in M$, qual a probabilidade de x gozar de alguma propriedade P? Onde P pode ser, por exemplo, visitar um conjunto infinitas vezes.

Com esse intuito, utilizaremos de um conceito muito importante e que desempenha um papel fundamental para estudarmos a dinâmica de uma aplicação. Este conceito é a noção de **medida invariante**, cuja definição damos a seguir:

Definição 1.0.1. *Seja (μ, Σ, X) um espaço de medida e $f : X \to X$ uma transformação mensurável.*

Diremos que a medida μ *é* ***invariante por*** f*, ou que* f ***preserva*** μ*, se* $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ *para todo* E *mensurável.*

Provar a existência desse objeto para certos tipos de sistemas dinâmicos é o tema central desse texto.

Capítulo

2

Preliminares: Teoria da Medida

O propósito dessa parte do texto é definir e reunir as principais ferramentas que serão utilizadas para o desenvolvimento da teoria. O principal teorema é o Teorema da Convergência Dominada, que será utilizado algumas vezes para demonstrar alguns resultados da parte principal do texto. Até chegar lá, definiremos os conceitos de σ-álgebra, funções mensuráveis, medidas e a integral de Lebesgue.

2.1 σ-Álgebras e Funções Mensuráveis

Uma medida, objeto cuja definição será dada mais adiante, é um tipo de função que, fixado um conjunto X, possui como domínio um certo subconjunto de conjuntos de X. Para que esta função esteja bem definida, precisaremos que essa coleção de subconjuntos de X seja bem comportada em relação às operações usuais de conjuntos. O que queremos dizer por bem comportada é expresso na definição de uma $\sigma-$álgebra, que daremos em alguns instantes. Antes disso, definiremos o seguinte:

Definição 2.1.1. *Uma* ***álgebra*** *de subconjuntos de um conjunto X é uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que contém X, o conjunto vazio e é fechado para as operações elementares de conjuntos:*

(i) $X, \varnothing \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$;

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$;

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$;

(v) $A, B \in \mathcal{A} \implies A - B \in \mathcal{A}$.

Definição 2.1.2. *Dado um conjunto X, uma* σ***-álgebra*** *de conjuntos de X é uma álgebra de X que é* *fechada para união enumerável de elementos de X. Isto é, é um subconjunto do conjunto das partes de X, Σ, que satisfaz:*

i) $X, \varnothing \in \Sigma$;

ii) $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$;

iii) se $(A_n)_n$ *é uma sequência de elementos em* Σ*, então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Do fato que $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, e de ii), segue que a interseção de uma quantidade enumerável de elementos $A_1, A_2, ... \in \Sigma$ também pertence à Σ.

Definição 2.1.3. *O par ordenado* (X, Σ)*, que consiste de um conjunto e uma* σ*-álgebra nessse conjunto, é dito ser um* ***espaço mensurável****.*

Exemplo 2.1.4. *Dado um conjunto X, pode-se verificar facilmente que* $\mathcal{A} = \{X, \varnothing\}$ *e* $\mathcal{P}(X) = \{B; B \subseteq X\}$ *são* σ*-álgebras de X.*

Exemplo 2.1.5. *Seja X um conjunto enumerável. Considere* $\mathcal{A}$ *como sendo o conjunto formado pelos subconjuntos enumeráveis de X, ou pelos subconjuntos de X cujo complemento é enumerável.*

$X \in \mathcal{A}$*, pois X é enumerável, e* $\varnothing \in \mathcal{A}$*, pois* $\varnothing = X^c$.

Dado $Y \subset \mathcal{A}$*, se Y é enumerável, tem-se que* Y^c *é tal que seu complemento é enumerável, então* $Y^c \in X$*. Se Y é não enumerável, então* Y^c *é enumerável(por definição de* $\mathcal{A}$*), donde* $Y^c \in X$.

Dado uma quantidade enumerável de conjuntos $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$*, tem-se que a união* $\bigcap A_n \in \mathcal{A}$*, pois é a união enumerável de conjuntos enumeráveis.*

Exemplo 2.1.6. *Seja X um espaço topológico*[1]*. A* σ*-álgebra de Borel de X,* $\mathcal{B}$*, é a* σ*-álgebra gerada pelos abertos da topologia de X. Quando* $X = \mathbb{R}$*, temos que a* σ*-álgebra de Borel é gerada pelos intervalos abertos de* $\mathbb{R}$*. Um elemento* $E \in \mathcal{B}$ *é chamado de boreliano.*

Definição 2.1.7. *Seja A uma coleção não vazia de subconjuntos de X. Denotamos por* $\sigma(A)$ *como sendo a menor* σ*-álgebra de X contendo A. Isto é, se* $\mathcal{A}$ *é uma* σ*-álgebra de X tal que* $A \subset \mathcal{A}$*, então* $\sigma(A) \subseteq \mathcal{A}$*. Chamaremos* $\sigma(A)$ *de* $\sigma-$***álgebra gerada por A****.*

Proposição 2.1.8. $\sigma(A) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$*, onde* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *é a família formada por todas as* σ*-álgebras que contêm A.*

[1] Para mais detalhes, ver [2].

Demonstração. Primeiramente, note que a intersecção arbitrária $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$ de σ-álgebras de X também é uma σ-álgebra, pois dado $A \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$, tem-se $A^c \in \mathcal{A}_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, donde $A^c \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$, e também dada uma quantidade enumerável de conjuntos $A_1, A_2, ... \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$, tem-se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, o que implica em $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$.

Seja $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra contendo A. Como vale $B \cap C \subset B$, para qualquer $C \subseteq X$, segue que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda \subset B$. O que implica na igualdade $\sigma(A) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$. ∎

Definição 2.1.9. *Uma família $\mathcal{C}$ não vazia de subconjuntos de X é dita ser uma **Classe Monótona** se $X \subset \mathcal{C}$ e para toda sequência $(A_n)_n$ crescente $A_1 \subset A_2 \subset ...$ de elementos de $\mathcal{C}$, a união $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a $\mathcal{C}$, e para toda sequência $(B_n)_n$ decrescente $B_1 \supset B_2 \supset ...$ de elementos de $\mathcal{C}$, a interseção $\cap_{n=1}^{\infty} B_n$ pertence a $\mathcal{C}$.*

Teorema 2.1.10. *(Teorema das Classe Monótonas) A menor classe monótona que contém uma álgebra $\mathcal{A}$ coincide com a $\sigma-$álgebra $\sigma(\mathcal{A})$ gerada por $\mathcal{A}$.*

Demonstração. O leitor interessado pode ver a demonstração em [6]. ∎

Apesar de o ambiente principal de trabalho do nosso texto ser um espaço mensurável, a noção de uma álgebra de conjuntos de um conjunto X e o teorema acima não estão no texto atoa. Posteriormente, ambos serão importantes para encontrar medidas invariantes de alguns sistemas dinâmicos.

Definição 2.1.11. *Dados dois espaços mensuráveis quaisquer, (X, Σ_1) e (Y, Σ_2), dizemos que $f : X \to Y$ é Σ_1-**mensurável** se, para todo $E \in \Sigma_2$, $f^{-1}(E) \in \Sigma_1$.*

Se temos um espaço mensurável (X, Σ) e o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, então a função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser Σ-mensurável se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ pertence a Σ.

Exemplo 2.1.12. *Se $X = \mathbb{R}$ e $\Sigma = \mathcal{B}$, então toda função monótona f é mensurável.*

Exemplo 2.1.13. *Considere $X = \mathbb{R}$ e Σ como sendo a $\sigma-$álgebra de Borel, $\mathbf{B}$. Então qualquer função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável. De fato, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty)$ é a pré-imagem de um conjunto aberto. Como f é continua, $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ também é aberto. Consequentemente, pode ser expresso com a união enumerável de intervalos abertos.*

Lema 2.1.14. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então, as funções cf, fg, f^2, f+g e |f| também são mensuráveis.*

Demonstração. [1] ∎

Lema 2.1.15. *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções em $M(X,\Sigma)$. Se definirmos*

$$f(x) = \inf\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\},$$
$$F(x) = \sup\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\},$$
$$f^*(x) = \liminf f_n(x),$$
$$F^*(x) = \limsup f_n(x).$$

Então f, F, f^* e F^* são mensuráveis.

Demonstração. O leitor pode encontrar a demonstração em [1]

■

Definição 2.1.16. *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Diremos que $f : X \to \mathbb{R}$ é o limite da sequência $(f_n)_n$ se, para todo $x \in X$, $\lim f_n(x) = f(x)$.*

Proposição 2.1.17. *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções em $M(X,\Sigma)$. Se $f = \lim f_n$, então $f \in M(X,\Sigma)$.*

Demonstração. Uma sequência de números reais converge se, e somente se, $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$[2]. No nosso caso, como $(f_n)_n$ converge para f, isto é, para cada $x \in X$, a sequência de números reais $(f_n(x))_n$ converge para $f(x)$, temos que $f(x) = \lim f_n(x) = \limsup f_n(x) = F^*(x)$. Como $F^* \in M(X,\Sigma)$, segue o resultado. ■

Definição 2.1.18. *Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita ser **simples** se é da forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

onde $E_1, E_2, ..., E_n \in \Sigma$, $\chi_{E_j}(x) = 1$, se $x \in E_j$, e $\chi_{E_j}(x) = 0$, caso contrário.

*Dizemos que uma representação da forma acima é dita **representação padrão** de φ se $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ e se $E_i \cap E_j = \varnothing$, quando $i \neq j$.*

Proposição 2.1.19. *Seja $f \in M^+(X,\Sigma)$. Então, existe uma sequência de $(s_n)_n$ de funções simples convergindo para f, tal que $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x)$ para todo n e todo x.*

[2]Para mais detalhes, ver [3]

Demonstração. Fixado $n \in \mathbb{N}$, defina, para $k \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\}$, o conjunto $E_{kn} = \{x \in X : \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k}{2^n - 1}\}$, e para k $= n2^n$, $E_{kn} = \{x \in X : f(x) \geqslant n\}$. Então, cada E_{kn} é mensurável, e vale $\bigcup_{k=1}^{n2^n} E_{kn} = X$. Defina então cada s_n pondo $s_n(x) = \frac{k}{2^n}$, se $x \in E_{kn}$. Segue por definição dos conjuntos E_{kn}'s que vale $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x)$ para todo n, e que vale também $s_n(x) \leqslant f(x) < s_{n+1}(x)$. Como a sequência $s_n(x)$ é monótona, e limitada superiormente por n, é convergente. Daí, tem-se

$$\begin{aligned} & s_n(x) \leqslant f(x) < s_{n+1}(x) \\ \implies & \lim_n s_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \lim_n s_{n+1}(x) = \lim_n s_n(x), \\ \implies & f(x) = \lim s_n(x). \end{aligned}$$

■

A partir disso, podemos demonstrar também o seguinte:

Proposição 2.1.20. *Seja $f \in M(X, \Sigma)$. Então, existe uma sequência de funções simples $(s_n)_n$, tal que* $\lim s_n = f$ *e* $|s_n(x)| \leqslant |f(x)|$ *para todo n e todo x.*

Demonstração. Note primeiramente que f pode ser expressa como $f = f^+ - f^-$, onde f^+ e f^-, chamadas de **parte positiva** e **parte negativa** de f, respectivamente, são definidas por

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}, \\ f^-(x) &= \max\{-f(x), 0\}. \end{aligned}$$

Temos também a igualdade $|f| = f^+ + f^-$, donde $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ e $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. Por serem soma de funções mensuráveis, concluímos que $f^-, f^+ \in M^+(X, \Sigma)$. Do que provamos no Lema anterior, sabemos que existem sequências de funções simples $(w_n)_n, (h_n)_n$, tais que $\lim w_n = f^+$, $\lim h_n = f^-$, $w_n(x) \leqslant w_{n+1}(x)$, e $h_n(x) \leqslant h_{n+1}(x)$, para todo x em X e todo n natural. Portanto, chamando

$s_n = w_n - h_n$, temos que $s_n \longrightarrow f$ e

$$\begin{aligned}|s_n(x)| &= |w_n(x) - h_n(x)| \\ &\leqslant |w_n(x)| + |h_n(x)| \\ &\leqslant |f^+(x)| + |f^-(x)| \\ &= f^+(x) + f^-(x) \\ &= |f(x)|.\end{aligned}$$

■

Definiremos agora a noção de medida. De maneira intuitiva, dado um conjunto X, uma medida é uma maneira de atribuir um "peso"a subconjuntos de X, permitindo que alguns conjuntos sejam destacados ou "enxergados"com maior ênfase. Dependendo das propriedades que considerarmos, certos subconjuntos podem receber um peso maior, e, assim, serem mais relevantes para nossa análise. Além disso, uma medida também nos fornece a capacidade de falar sobre "tamanho" de determinados subconjuntos de X. Considerando todas essas interpretações, poderíamos discutir o que caracteriza uma medida "boa" e "ruim. Algumas medidas podem não fornecer uma boa noção de tamanho, atribuindo valores excessivamente grandes ou pequenos a todos os conjuntos. Dependendo da característica que considerarmos, duas medidas distintas podem atribuir valores muito diferentes ao mesmo conjunto, dependendo das características que consideram.

Em alguns momentos, é interessante considerar a medida de um conjunto como sendo infinita, então consideraremos o conjunto dos números **Reais Estendidos**, denotado por $\overline{\mathbb{R}}$, que consiste de

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Ao considerarmos esse novo conjunto, formado por $\mathbb{R}$ e esses dois símbolos(que não são números), faremos a conveção de que $-\infty < x < +\infty$ para todo x real.

Neste novo ambiente, definimos as seguintes operações entre $\pm\infty$ e elementos $x \in \mathbb{R}$:

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty,$$

$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ \mp\infty, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Observe que estamos somando apenas $+\infty$ com $+\infty$ e o mesmo para $-\infty$. Não definiremos $+\infty + (-\infty)$, $-\infty - (+\infty)$ e nem quocientes cujo denominador são $\pm\infty$.

Para mais detalhes sobre $\overline{\mathbb{R}}$, ver [1].

2.2 Medidas

Definição 2.2.1. *Seja X um conjunto e Σ uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X. Uma **medida** é uma função $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo:*

- *$\mu(E) \geqslant 0$, para todo $E \in \Sigma$,*
- *$\mu(\varnothing) = 0$, e*
- *$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, para toda coleção $(E_n)_n$ dois a dois disjunta de elementos de Σ.*

*Note que estamos considerando um tipo de função que pode assumir o "valor" $+\infty$. Se para todo $X \in \Sigma$, $\mu(X) \neq +\infty$, dizemos que μ é finita. Se existe uma sequência $(E_n)_n \in \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, e $\mu(E_n) < +\infty$ para todo n, então dizemos que μ é $\sigma-$finita. Se $\mu(X) = 1$, então μ é dita ser uma **medida de probabilidade**.*

Observações: Em textos de Teoria de Probabilidade, uma Probabilidade é um tipo de função definida da mesma maneira como definimos uma medida acima, exceto pelo fato de que a medida do conjunto todo é igual a 1. Em Probabilidade, os conjuntos mensuráveis são os eventos, e o conjunto X é o que chamamos de espaço amostral. O fato de que $\mu(X) = 1$ se expressa na ideia de que o espaço amostral contém todos os resultados possíveis do nosso experimento, então a probabilidade dele deve ser total.

Exemplo 2.2.2. *Um dos motivos de considerarmos o conjunto dos números reais estendidos é dar significado a um conjunto ter "medida infinita". Como exemplo, se definirmos a medida de um intervalo como* $\lambda([a,b]) = b - a$*, então poderiamos dizer que* $\lambda([a,+\infty)) = +\infty$*, que é o que nos diz a intuição.*

A função λ *definida acima é de fato uma medida, chamada* ***medida de Lebesgue****, definida na* $\sigma-$*álgebra de algum subconjunto de* $\mathbb{R}$*. Ou seja, a noção intuitiva que temos de "tamanho" de um intervalo, como sendo a diferença dos extremos desse intervalo, é de fato uma medida. Na verdade, pode-se mostrar que existe uma única medida* λ *tal que* $\lambda((a,b]) = b - a$*. Uma demonstração desse fato é dada em [1].*

Exemplo 2.2.3. *Seja* $X = \mathbb{N}$ *e* Σ *a* $\sigma-$*álgebra formada por todos os subconjuntos de* $\mathbb{N}$*. Então, dado* $E \in \Sigma$*, se* E *é finito, definimos* $\mu(E)$ *como sendo o número de elementos de* E*. Se* E *é infinito, então pomos* $\mu(E) = +\infty$*.*

Exemplo 2.2.4. *Seja* X *um conjunto qualquer e* $\mathcal{P}$ *a* $\sigma-$*álgebra formada por todos os subconjuntos de* X*. Fixado* $p \in X$*, defina* μ_p *por*

$$\mu_p(E) = 0, p \notin E,$$
$$\mu_p(E) = 1, p \in E.$$

μ_p *é chamada de Medida de Dirac de* p*.*

Lema 2.2.5. *Seja* μ *uma medida definida em uma* $\sigma-$*álgebra* Σ*. Se* $E, F \in \Sigma$*, e* $E \subseteq F$*, então* $\mu(E) \leqslant \mu(F)$*. Se* $\mu(E) < +\infty$*, então* $\mu(F \backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$*.*

Demonstração. Note que F pode ser expresso como $F = E \cup (F\backslash E)$, e que $E \cap (F\backslash E) = \varnothing$. Assim,

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F\backslash E) \geqslant \mu(E),$$

pois $\mu(F\backslash E) \geqslant 0$. Se $\mu(E) < +\infty$, podemos subtrair $\mu(E)$ de ambos os lados, obtendo

$$\mu(F\backslash E) = \mu(F) - \mu(E).$$

■

Lema 2.2.6. *Seja μ uma medida definida em uma $\sigma-$álgebra Σ.*

(a) Se $(E_n)_n$ é uma sequência crescente $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ...$ em $\mathcal{A}$, então

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Demonstração. (a) Para cada n, defina os conjuntos A_n, pondo $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n - E_{n-1}$, para n>1. Temos que $A_n \cap A_m = \emptyset$, se $n \neq m$, e que valem as igualdades:

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Assim,

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n).$$

Note que, por definição de A_n e pelo Lemma 1.1.27, $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$, para n>1. Logo,

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1) + ... + \mu(E_{m-1}) - \mu(E_{m-2}) + \mu(E_m) - \mu(E_{m-1})$$
$$= \mu(E_m).$$

Portanto,

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(E_m)$$

■

Definição 2.2.7. *Um **espaço de medida** é uma tripla (X, Σ, μ), que consiste de um conjunto X, uma $\sigma-$álgebra Σ de subconjuntos de X, e uma medida μ definida em Σ.*

Definição 2.2.8. *Dizemos que uma certa propriedade ou proposição é válida $\mu-$quase todo ponto, ou $\mu - q.t.p$, se existe $N \in \Sigma$ com $\mu(N) = 0$, tal que a propriedade ou proposição vale para todo $x \in N^c$. Dizemos que duas funções f, g são iguais $\mu - q.tp$ se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in N^c$, onde $N \in \Sigma$ e $\mu(N) = 0$.*

Dizemos que uma sequência de funções $(f_n)_n$ definidas em X converge $\mu-$quase todo ponto se existe $N \in \Sigma$, com $\mu(N) = 0$, tal que f(x) $= \lim f_n(x)$, para todo $x \in N^c$. Escreveremos $f =$ lim$f_n, \mu-q.t.p$. Em geral, caso estiver claro qual medida está sendo utilizada, escreveremos "converge quase todo ponto", ou converge "q.t.p", omitindo a medida.

Definição 2.2.9. *Fixado um espaço de medida (X, Σ, μ), denotaremos por $M(X, \Sigma)$ como sendo o conjunto de todas as funções $\Sigma-$mensuráveis de X em $\mathbb{R}$, e por $M^+ = M^+(X, \Sigma)$ como o conjunto de todas as funções $\Sigma-$mensuráveis não negativas.*

Definição 2.2.10. *Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita ser **simples** se é da forma*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j},$$

onde $E_1, E_2, ..., E_n \in \Sigma$, $\chi_{E_j}(x) = 1$, se $x \in E_j$, e $\chi_{E_j}(x) = 0$, caso contrário.

*Dizemos que uma representação da forma acima é dita **representação padrão** de φ se $E_i \cap E_j = \varnothing$, quando $i \neq j$ e se $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$.*

2.3 Integral

Definiremos agora a Integral de Lebesgue para funções simples. Mostraremos que vale a linearidade da integral, e posteriormente, definiremos a integral também para funções mensuráveis não negativas, e por fim, para funções mensuráveis quaisquer.

Definição 2.3.1. *Definimos a **Integral** de uma função simples $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ com respeito à medida μ como sendo o seguinte número:*

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Lema 2.3.2. *Seja μ medida em Σ. Dado $M \in \Sigma$, se definirmos $\mu^* : \Sigma \to \mathbb{R}$ por $\mu^*(E) = \mu(M \cap E)$, então μ^* também é uma medida.*

Demonstração. Assumiremos $M \neq \varnothing$, pois caso o fosse, μ^* seria identicamente nula. Seja $E \in \Sigma$. Como $E, M \in \Sigma, M \cap E = X \in \Sigma$. Então,

$$\mu^*(E) = \mu(M \cap E) = \mu(X) \geqslant 0, \text{e}$$
$$\mu^*(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0.$$

Se $(E_n)_n$ é coleção dois a dois disjunta de elementos de Σ, então a coleção $(M \cap E_n)_n$ também é dois a dois disjunta, e

$$\begin{aligned}\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \mu(M \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)\\ &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(M \cap E_n))\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M \cap E_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.3. *Sejam $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ medidas definidas em Σ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0, +\infty)$. Então, se definirmos $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ por $\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(E)$, temos que μ também é uma medida.*

Demonstração.

Seja $E \in \Sigma$.

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(E) \geqslant 0, \text{ e}$$
$$\mu(\varnothing) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(\varnothing) = 0.$$

Se $(E_k)_k$ é coleção dois a dois disjunta de elementos de Σ, então

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \mu_i(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1 \mu_1(E_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_2 \mu_2(E_k) + ... + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_1 \mu_1(E_k) + \alpha_2 \mu_2(E_k) + ... + \alpha_n \mu_n(E_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).
\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.4. *Sejam φ, ψ funções simples $c \geqslant 0$. Então, vale*

$$(i) c \int \varphi \, d\mu = \int c\varphi \, d\mu,$$
$$(ii) \int (\varphi + \psi) \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu.$$

Além disso, dada φ simples se definirmos $\lambda : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ por

$$\lambda(E) = \int \varphi \chi_E \, d\mu,$$

então λ é uma medida em Σ.

Demonstração. Seja $c > 0$. Se $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$ é a representação padrão de φ, então

$$c \int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) = \int c\varphi \, d\mu.$$

onde a função $c\varphi$ tem representação padrão $c\varphi = \sum_{j=1}^{n} c a_j \chi E_j$.

(ii) Seja $\psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{F_k}$ a representação padrão de ψ e considere φ também com sua representação padrão. Então,

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(x) &= (\sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k})(x)\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j\chi_{E_j}(x) + \sum_{k=1}^{m} b_k\chi_{F_k}(x)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_j)\chi_{E_j\cap F_k}(x).\end{aligned}$$

Note que a representação acima é de fato válida. Isso pode ser visto tomando $x \in E_i \cap F_l$, para $(i,l) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,m\}$. Temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\chi_{E_j\cap F_k}(x) &= \sum_{j=1}^{n}(a_j+b_1)\chi_{E_j\cap F_1}(x) + ... + \sum_{j=1}^{n}(a_j+b_m)\chi_{E_j\cap F_m}(x)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(a_j+b_l)\chi_{E_j\cap F_l}(x)\\ &= (a_1+b_l)\chi_{E_1\cap F_l}(x) + (a_2+b_l)\chi_{E_2\cap F_l}(x) + ... + (a_n+b_l)\chi_{E_n\cap F_l}(x)\\ &= (a_1+b_l)\chi_{E_1\cap F_l}(x)\\ &= a_i + b_l.\end{aligned}$$

Entretanto, observe que a representação dada acima não necessariamente é a representação padrão de $\varphi+\psi$, pois não sabemos se $E_j \cap F_k = \varnothing$ e se os números $a_j + b_k$ são todos distintos para todo $(i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,m\}$. Para contornar esse problema, chame de $c_h, h \in \{1,2,...,p\}$(p é no máximo nm) os valores distintos do conjunto $\{a_j+b_k; (j,k) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,m\}$, e G_h a união dos $E_j \cap F_k \neq \varnothing$ tais que $a_j + b_k = c_h$. Então,

$$\mu(G_h) = \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k),$$

onde $(h) = \{(j,k) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,m\}; a_j + b_k = c_h\}$.

Assim,

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h\chi_{G_h}.$$

é a representação padrão de $\varphi + \psi$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi)\, d\mu &= \sum_{h=1}^{p} c_h \chi_{G_h} \\
&= \sum_{h=1}^{p} c_h \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{h=1}^{p} (a_j + b_k) \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_k) \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^{n} + b_k \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k).
\end{aligned}$$

Desde que $X = \bigcup_{j=1}^{n} E_j = \bigcup_{k=1}^{m} F_k$,

$$\begin{aligned}
\mu(E_j) &= \mu(E_j \cap (\cup F_k)) \\
\mu(F_k) &= \mu(F_k \cap (\cup E_j)), \ \text{ donde} \\
\mu(E_j) &= \sum_{k=1}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \\
\text{e} \quad \mu(F_k) &= \sum_{j=1}^{n} \mu(F_k \cap E_j).
\end{aligned}$$

.

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(F_k) \\
&= \int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu.
\end{aligned}$$

Para mostrar que λ é de fato uma medida, note primeiramente que

$$\varphi \chi_E = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}.$$

De fato, se $x \in E_j \cap X$, então

$$\begin{aligned}(\varphi\chi_E)(x) &= \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)\chi_E(x) \\ &= a_j \chi(E_k)(x)\chi_E(x) \\ &= a_j.\end{aligned}$$

se $x \in E$ mas $x \notin E_j$, para todo j, ou $x \in E_k$, para algum k, mas $x \notin E$, então $\varphi\chi_E(x) = 0$. Como essa é precisamente a definição de $\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E}$, vale a igualdade.

Usando o fato provado acima e indução em n, pode-se mostrar que a integral da soma de n funções é a soma em n das integrais dessas funções. Logo,

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \int \varphi\chi_E \, d\mu \\ &= \int \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j \cap E} \, d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{E_j \cap E} \, d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j \cap E).\end{aligned}$$

■

Denotemos por $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X, \mathbb{R})$ como sendo o conjunto das funções simples de X em $\mathbb{R}$.

Definição 2.3.5. *Dada $f \in M^+(X, \Sigma)$, definimos a integral de f com respeito à medida μ como*

$$\int f \, d\mu = \sup\{\int \varphi \, d\mu; \varphi \in \mathcal{H}, 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x), \forall x \in X\}.$$

Por fins de simplicidade, escreveremos apenas

$$\int f \, d\mu = \sup \int \varphi \, d\mu.$$

Se $f \in M^+(X, \Sigma)$ E $E \in \Sigma$, então a função $f\chi_E$ também é mensurável, e podemos definir a *integral de f sobre E, com respeito à medida μ, pondo*

$$\int_E f\,d\mu = \int f\chi_E\,d\mu.$$

Lema 2.3.6. *(a) Sejam $f, g \in M^+(X,\Sigma)$ tais que $f \leqslant g$. Então,*

$$\int f\,d\mu \leqslant \int g\,d\mu.$$

(b) Se $h \in M^+(X,\Sigma)$, $E, F \in \Sigma$, com $E \subseteq F$, então

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \int_F f\,d\mu.$$

Demonstração. (a) Se $\varphi \in \mathcal{H} \cap M^+$, e $\varphi \leqslant f$, então $\varphi \leqslant g$. Daí, tem-se a continência

$$\{\int \varphi\,d\mu; \varphi \in \mathcal{H}, 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x), \forall x \in X\} \subseteq \{\int \varphi\,d\mu; \varphi \in \mathcal{H}, 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x), \forall x \in X\}.$$

Por definição de supremo de um conjunto, conclui-se a desigualdade.

(b) Basta observar que, como $E \subseteq F$, vale a desigualdade $h\chi_E \leqslant h\chi_F$, e aplicar o item (a). ■

Teorema 2.3.7. *(Teorema da Convergência Monótona)*

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções crescentes em $M^+(X,\Sigma)$, convergindo para f. Então,

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Demonstração.

De acordo com a proposição 1.12, $f \in M^+(X,\Sigma)$. Como vale $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, temos que

$$\int f_n\,d\mu \leqslant \int f_{n+1}\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu.$$

Assim, tomando o limite em n,

$$\lim_n \int f_n\,d\mu \leqslant \int f\,d\mu.$$

Para provar a outra desigualdade, defina, para $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, e para $\varphi \in \mathcal{H} \cap M^+(X,\Sigma)$ com

$0 \leqslant \varphi \leqslant f$ fixados, o seguinte conjunto:

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)\}.$$

$A_n \subseteq A_{n+1}$, pois se $x \in A_n$, então $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) \geqslant \alpha\varphi(x)$, e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pois dado $x \in X$, caso fosse $f_n(x) < \alpha\varphi(x)$, para todo n, teríamos, tomando o limite em ambos os lados, $f(x) \leqslant \alpha\varphi(x) < \varphi(x)$.

Provamos no Lema 1.1.20 que, quando φ é função simples, $\lambda(E) = \int \varphi\chi_E \, d\mu = \int_E \varphi \, d\mu$ é uma medida em Σ. Utilizando desse fato, do fato que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, e do Lema 1.15, temos

$$\begin{aligned}\lambda(X) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}) &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \varphi \, d\mu \\ &= \int \varphi \, d\mu \\ &= \lim_n \int_{A_n} \varphi \, d\mu.\end{aligned}$$

Como $\alpha\varphi \leqslant f_n$ e $A_n \subseteq X$, temos que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu \leqslant \int_{A_n} \varphi \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu,$$

donde

$$\lim_n \int_{A_n} \alpha\varphi \, d\mu = \int \alpha\varphi \, d\mu \leqslant \lim_n \int_{A_n} f_n \, d\mu.$$

Como isso vale para todo $0 < \alpha < 1$, podemos tomar, para todo $k > 1$, $\alpha = 1 - 1/k$. Assim,

$$\int \varphi \, d\mu = \lim_k (1 - 1/k) \int \varphi \, d\mu \leqslant \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Como tomamos φ simples arbitraria satisfazendo $0 \leqslant \varphi \leqslant f$, obtemos uma cota superior para o conjunto $\{\int \varphi \, d\mu; \varphi \in \mathcal{H}, 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x), \forall x \in X\}$. Logo, por definicao de sup, concluímos que

$$\int f\,d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi\,d\mu \leqslant \lim_{n} \int f_n\,d\mu,$$

donde

$$\int f\,d\mu = \lim_{n} \int f_n\,d\mu.$$

■

Proposição 2.3.8. *Sejam $\varphi, \psi \in M^+(X, \Sigma)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então, $\varphi + \psi \in M^+(X, \Sigma)$, $c\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ e vale*

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu, \\ c \int \varphi d\mu &= \int c\varphi d\mu. \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $(s_n)_n, (h_n)_n$ sequências de funções simples convergindo para φ e ψ, respectivamente. Então, a sequência de funções simples $(s_n + h_n)_n$, definidas por $(s_n + h_n)(x) = s_n(x) + h_n(x)$ converge para $\varphi + \psi$. Portanto, pelo fato de que vale a linearidade da integral para funções simples, e pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \int \lim_{n} (s_n + h_n) d\mu \\ &= \lim_{n} \int (s_n + h_n) d\mu \\ &= \lim_{n} \left(\int s_n d\mu + \int h_n d\mu \right) \\ &= \lim_{n} \int s_n d\mu + \lim_{n} \int h_n d\mu \\ &= \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu. \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos que se $(s_n)_n$ é sequência de funções simples convergindo para φ, então

$(cs_n)_n$ converge para $c\varphi$, donde

$$\begin{aligned} c\int \varphi d\mu &= c\int \lim s_n d\mu \\ &= \lim_n \int cs_n d\mu \\ &= \int c \lim_n s_n d\mu \\ &= \int c\varphi d\mu. \end{aligned}$$

■

Observe o que acabamos de fazer acima. Utilizamos um fato já conhecido para a integral de funções simples, e o estendemos para funções mensuráveis não negativas, utilizando que toda função em $M^+(X,\Sigma)$ pode ser aproximada pontualmente por funções simples, e o Teorema da Convergência Monótona.

Este é um tipo de construção que será frequente tanto nesta parte introdutória sobre teoria da medida, quanto na parte em que de fato falaremos de teoria ergódica.. Quando queremos provar alguma proposição para funções mensuráveis quaisquer, começamos por funções simples, e daí utilizamos duas ferramentas muito poderosas: o fato de que toda função mensurável é o limite de funções simples, e o Teorema da Convergência Dominada.

Prosseguiremos agora para provar outro teorema que será extremamente útil para demonstrar proposições atráves de um argumento análogo ao que acabamos de usar, isto é, provar primeiro a proposição para uma classe menor de funções, e utilizando do fato que as nossas funções podem ser aproximadas pontualmente por essa classe menor de funções, e do fato que é suficiente a convergência pontual para que o limite entre dentro da integral de Lebesgue, para provar para o caso maior. Antes disso, provaremos alguns lemas que nos serão úteis, e definiremos a integral para uma função mensurável qualquer.

Teorema 2.3.9. *(Lema de Fatou) Se $(f_n)_n$ é uma sequência em $M^+(X,\Sigma)$, então*

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$.

Como

$$\{f_m, f_{m+1}, ...\} \supset \{f_{m+1}, f_{m+2}, ...\},$$

vale que

$$g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\} \leqslant g_{m+1} = \inf\{f_{m+1}, f_{m+2}, ...\}.$$

Ou seja, $(g_m)_m$ é uma sequência monótona, e limitada. Portanto, converge. Chame

$$g = \lim_m g_m = \lim_m \inf f_m.$$

Como $g_m \leqslant f_n$, sempre que $m \leqslant n$, temos que

$$\int g_m \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu.$$

.

Repetindo o processo acima e definindo

$$s_n = \inf\{\int f_n \, d\mu, \int f_{n+1} \, d\mu, ...\} = \inf K,$$

temos que $\int g_m \, d\mu$ é cota inferior de K, e, portanto, deve ser menor que a maior cota inferior de K. Ou seja,

$$\int g_m \, d\mu \leqslant s_n.$$

Como isso vale para todo $m \leqslant n$, segue que

$$\int g_m \, d\mu \leqslant \lim_n s_n = \lim_n \inf \int f_n \, d\mu,$$

para todo $m \leqslant n$.

Do fato que (g_m) é crescente e que $\lim g_m = \lim \inf f_m$, segue pelo Teorema Da Convergência

Monótona que

$$\int \liminf f_m \, d\mu = \lim \int g_m \, d\mu \leqslant \liminf \int f_n \, d\mu.$$

■

Lema 2.3.10. *Seja $f \in M^+(X, \Sigma)$. Se definirmos λ por*

$$\lambda : \Sigma \to \mathbb{R}$$
$$\lambda(E) = \int_E f d\mu,$$

então λ é uma medida em Σ.

Demonstração. Se $E \neq \varnothing$, então $\chi_E \neq 0$. Como $f \geqslant 0$, $f\chi_E \geqslant 0$. Segue, pela monotonicidade da integral, que

$$\int f\chi_E \, d\mu = \int_E f \, d\mu \geqslant 0.$$

Se $E = \varnothing$, então $f\chi_E$ é a função identicamente nula, o que implica em $\int_E f \, d\mu = 0$.

Para provar a aditividade de λ, considere $(E_n)_n$ uma sequência de conjuntos em Σ, dois a dois disjuntos, tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Defina a sequência de funções $(f_n)_n$ pondo

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}.$$

Note que para todo $x \in E$, vale $\lim f_n(x) = f(x)\chi_E$. De fato, $x \in E_i$, para algum $i \in \mathbb{N}$ e $i \notin E_k$, para todo $k \neq i$. Logo, para $n \geqslant i$, vale

$$|f_n(x) - f(x)\chi_E(x)| = |\sum_{k=1}^{n} f(x)\chi_{E_k}(x) - f(x)| = |f(x)\chi_{E_i}(x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\begin{aligned}
\lambda(E) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \int f\chi_E \, d\mu \\
&= \lim_n \int f_n \, d\mu \\
&= \lim_n \int \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k} \, d\mu \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int f\chi_{E_k} \, d\mu \\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).
\end{aligned}$$

∎

Definição 2.3.11. *Seja $f \in M(X, \Sigma)$. Lembre que f pode ser escrita como $f = f^+ - f^-$. Se $f^+, f^- \in M^+(X, \Sigma)$, e tanto f^+ quanto f^- possuem integrais finitas com respeito à medida μ, então dizemos que f é integrável, e definimos a integral de f com respeito à μ por*

$$\int f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Proposição 2.3.12. *Seja f função mensurável. Então, f é integravel com respeito à μ se, e somente se, $|f|$ o é, e vale*

$$|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu.$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
|f|^+ &= \max\{|f|, 0\} = |f| = f + f^-, \\
|f|^- &= \max\{-|f|, 0\} = 0.
\end{aligned}$$

Se f é integrável, então

$$\begin{aligned}\int |f| d\mu &= \int |f|^+ d\mu + \int |f|^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int f^- d\mu < \infty.\end{aligned}$$

Suponha agora $|f|$ integrável. Desde que $f^+ \leqslant |f|$ e $f^- \leqslant |f|$, e que ambas f^+ e f^- pertencem a $M^+(X, \Sigma)$, temos

$$\int f^+ d\mu \leqslant \int |f| d\mu$$

e

$$\int f^- d\mu \leqslant \int |f| d\mu,$$

donde

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu < \infty.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| &\leqslant |\int f^+ d\mu| + |\int f^- d\mu| \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \\ &= \int |f| d\mu.\end{aligned}$$

■

Proposição 2.3.13. *Se f é mensurável, g é integrável e $|f| \leqslant |g|$, então f é integrável,*

$$\int |f| d\mu \leqslant \int |g| d\mu$$

e f é integrável.

Demonstração. Como $|f|, |g| \in M^+(X, \Sigma)$, segue a primeira parte, e a segunda segue do que acabamos de provar na proposição anterior. ■

Teorema 2.3.14. *Sejam φ, ψ funções integráveis com respeito à medida μ. Então, $\alpha\varphi$ e $\varphi + \psi$ são integráveis, e vale*

$$\alpha \int \varphi d\mu = \int \alpha\varphi d\mu,$$
$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

Demonstração. Se $\alpha \geqslant 0$, então $(\alpha f)^+(x) = \max\{\alpha f(x), 0\} = \alpha f(x)$, se $f(x) > 0$ e $(\alpha f)^+(x) = 0$, caso contrário, donde $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$. De maneira análoga, mostra-se que $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha \int \varphi d\mu &= \alpha(\int \varphi^+ d\mu - \int \varphi^- d\mu) \\
&= (\int \alpha\varphi^+ d\mu - \int \alpha\varphi^- d\mu) \\
&= (\int (\alpha\varphi)^+ - \int (\alpha\varphi^-) d\mu) \\
&= \int \alpha\varphi d\mu.
\end{aligned}$$

O caso $\alpha < 0$ é similar.

Se φ e ψ são integráveis, então $|\varphi|$ e $|\psi|$ também o são. Como $|\varphi + \psi| \leqslant |\varphi| + |\psi|$, segue que $|\varphi + \psi|$ também é integrável, o que implica em $\varphi + \psi$ integrável.

Por fim, como

$$\begin{aligned}
(\varphi + \psi) &= (\varphi^+ - \varphi^-) + (\psi^+ - \psi^-) \\
&= (\varphi^+ + \psi^+) - (\varphi^- - \psi^-),
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\int(\varphi+\psi)d\mu &= \int(\varphi^{+}+\psi^{+})d\mu - \int(\varphi^{-}+\psi^{-})d\mu \\ &= \int\varphi^{+}d\mu + \int\psi^{+}d\mu - \int\varphi^{-}d\mu - \int\psi^{-}d\mu \\ &= (\int\varphi^{+}d\mu - \int\varphi^{-}d\mu) + (\int\psi^{+}d\mu - \int\psi^{-}d\mu) \\ &= \int\varphi d\mu + \int\psi d\mu.\end{aligned}$$

(Utilizamos do fato que a linearidade da integral vale para funções mensuráveis não negativas). ∎

Teorema 2.3.15. *(Teorema da Convergência Dominada) Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções integráveis que convergem q.t.p para uma $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável. Se existe g integrável tal que $|f_n| \leqslant |g|$ para qualquer n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Antes de demonstrarmos o Teorema, provaremos um fato que será utilizado na demonstração.

Lema 2.3.16. *Seja A um subconjunto limitado e não vazio de $\mathbb{R}$. Se definirmos o conjunto -A por*

$$-A := \{-x : x \in A\},$$

então

$$\inf(-A) = -\sup A,$$
$$\sup(-A) = -\inf A.$$

Demonstração.

Se $x \in A$, então $x \leqslant \sup A \implies -x \geqslant -\sup A$. Ou seja, $-\sup A$ é cota inferior de -A. Mostraremos agora que $-\sup A$ é a maior cota inferior desse conjunto. Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x > \sup A - \varepsilon$, donde $-x < -\sup A + \varepsilon$. Segue então a igualdade. A ideia para provar a outra igualdade é análoga. ∎

Demonstração. (Teorema) Começemos redefinindo f e cada f_n em algum conjunto E tal que $\mu(E) = 0$. Assim, podemos assumir que a convergência de $(f_n)_n$ se dá em todo X. Como $|f| = \lim |f_n| \leqslant g$, segue que $|f|$ é integrável, o que implica em f integrável. Além disso, $g \geqslant |f_n| \geqslant -f_n \implies g + f_n \geqslant 0$. Como g e f_n são ambas mensuráveis, podemos aplicar o Lema de Fatou:

$$\begin{aligned}
\int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g+f) d\mu \\
&= \int \lim (g + f_n) d\mu \\
&= \int \liminf (g + f_n) d\mu \\
&\leqslant \liminf \int (g + f_n) d\mu \\
&= \liminf (\int g d\mu + \int f_n d\mu) \\
&= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu
\end{aligned}$$

Subtraindo $\int g d\mu$ em ambos os lados, obtemos

$$\int f d\mu \leqslant \liminf \int f_n d\mu.$$

Por outro lado, como também vale $g - f_n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g-f) d\mu \\
&= \int \lim (g - f_n) d\mu \\
&= \int \liminf (g - f_n) d\mu \\
&\leqslant \liminf \int (f - g_n) d\mu \\
&= \liminf (\int g d\mu - \int f_n d\mu) \\
&= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu,
\end{aligned}$$

implicando em

$$\limsup \int f_n d\mu \leqslant \int f d\mu \leqslant \liminf \int f_n d\mu.$$

■

Proposição 2.3.17. *Sejam $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ medidas definidas em Σ, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ e f função mensurável definida em X. Então,*

$$\int f\, d(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f\, d\mu_i$$

Demonstração. Se $f = \chi_E$, para algum $E \in \Sigma$, então

$$\int f\, d(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i) = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i)(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i(E) = \sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i f\, d\mu_i.$$

Se f é simples, segue o resultado pela linearidade da integral. Se f é uma função mensurável qualquer, então considere $(s_n)_n$ sequência de funções simples não negativas, tal que $|s_n(x)| \leqslant |f(x)|$ e $\lim s_n(x) = f(x)$. Segue, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$\int \varphi\, d(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i) = \lim_k \int s_k\, d(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i) = \lim_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int s_k\, d\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \varphi\, d\mu_i.$$

■

Capítulo

3

Medidas Invariantes

Começamos relembrando a definição de Medida Invariante dada na introdução do texto.

3.1 Definição de Medida Invariante e ferramentas para provar existência

Definição 3.1.1. *Seja (μ, Σ, X) um espaço de medida e $f : X \to X$ uma transformação mensurável. Diremos que a medida μ é **invariante por** f, ou que f **preserva** μ, se $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo E mensurável.*

Proposição 3.1.2. *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita em M. Suponha que existe alguma álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos mensuráveis de M tal que $\mathcal{A}$ gera a $\sigma-$álgebra de Borel de M e $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Então, μ é invariante por f.*

Demonstração. Começaremos mostrando que a coleção $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \mu(f^{-1}(E))\}$ é uma classe monótona(2.1.9). Dada uma sequência crescente $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ de elementos de $\mathcal{B}$, temos, pelo Lema 2.2.6, que

$$\mu(E) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i),$$
$$\mu(f^{-1}(E)) = \lim_{i\to\infty} \mu(f^{-1}(E_i)).$$

Como cada E_i pertence a $\mathcal{C}$, segue que

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \lim_{i\to\infty} \mu(E_i) \\ &= \lim_{i\to\infty} \mu(f^{-1}(E_i)) \\ &= \mu(f^{-1}(E)).\end{aligned}$$

De maneira análoga, mostra-se que a interseção de uma sequência decrescente de elementos de $\mathcal{C}$ também pertence a $\mathcal{C}$, e $\mathcal{C}$ é uma classe monótona. Como $\mathcal{C}$ contém $\mathcal{A}$, contém também, pelo Teorema 2.1.10, a $\sigma-$álgebra gerada pela álgebra $\mathcal{A}$, que é justamente a $\sigma-$álgebra de borel de M. ∎

Proposição 3.1.3. *Seja (M, d) um espaço métrico, $x_0 \in M$ e $f : M \to M$ mensurável com relação à $\sigma-$álgebra de Borel. Então, δ_{x_0} é uma medida invariante por f se, e somente se, $f(x_0) = x_0$, onde a medida δ_{x_0} é a Medida de Dirac de x_0 (ver Exemplo 2.2.4).*

Demonstração. Suponha δ_{x_0} invariante por f. Caso $f(x_0) \neq x_0$, então $x_0 \notin f^{-1}(x_0)$, donde $\{x_0\} \cap f^{-1}(x_0) = \varnothing$. Assim,

$$\begin{aligned}\delta_{x_0}(\{x_0\}) &= 1 \\ &= \delta_{x_0}(f^{-1}(x_0)) \\ &= 0,\end{aligned}$$

absurdo. Logo, $f(x_0) = x_0$.

Reciprocamente, suponha $f(x_0) = x_0$. Dado A mensurável, podemos ter $x_0 \in A$ ou $x_0 \notin A$. Caso $x_0 \in A$, então $x_0 \in f^{-1}(A)$, pois $f(x_0) = x_0$. Daí,

$$\delta_{x_0}(A) = 1 \tag{3.1}$$
$$= \delta_{x_0}(f^{-1}(A)). \tag{3.2}$$

Caso $x_0 \notin A$, então $f^{-1}(x_0) \notin A$, pois $f^{-1}(x_0) = \{x_0\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\delta_{x_0}(A) &= 0 \\ &= \delta_{x_0}(f^{-1}(A)).\end{aligned}$$

Como tomamos A mensurável qualquer, δ_{x_0} é invariante por f. ∎

Proposição 3.1.4. *Sejam $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida em Σ. Então f preserva μ se, e somente se,*

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi \circ f \, d\mu,$$

para toda $\varphi : M \to \mathbb{R}$ $\mu-$integrável.

Demonstração. Para provar a ida, provaremos inicialmente para funções características e funções simples, e depois utilizaremos o fato de que toda função mensurável é o limite de uma sequência de funções simples.

Se $B \in \Sigma$, então

$$\int \chi_B \, d\mu = \mu(B),$$

por definição. Note que $(\chi_B \circ f)(x) = 0$, se $f(x) \notin B$, e $(\chi_B \circ f)(x) = 1$, caso contrário. Ou seja

$$\chi_B \circ f = \chi_{f^{-1}(B)}.$$

Assim, como f preserva μ,

$$\int \chi_B \, d\mu = \mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \int \chi_B \circ f \, d\mu.$$

Se φ é uma função simples, então vale o resultado por linearidade da integral.

Se $\varphi : M \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável qualquer, considere uma sequência $(s_n)_n$ de funções simples, tal que $s_n \to \varphi$, e $|s_n(x)| \leqslant |\varphi(x)|$, para todo n e x em M. Pelo Teorema da Convergência Dominada (2.3.15),

$$\int \varphi \, d\mu = \lim_n \int s_n \, d\mu = \lim_n \int (s_n \circ f) \, d\mu = \int \varphi \circ f \, d\mu.$$

Para demonstrar a volta, basta considerar, para cada $B \in \Sigma$, a função característica de B, χ_B. Por hipótese, vale

$$\int \varphi \, d\mu = \int \varphi \circ f \, d\mu$$

para toda $\varphi : M \to \mathbb{R}$, $\mu - integrvel$. Em particular, para χ_B,

$$\mu(B) = \int \chi_B \, d\mu = \int \chi_B \circ f \, d\mu = \int \chi_{f^{-1}(B)} \, d\mu = \mu(f^{-1}(B)),$$

e o resultado está provado. ∎

3.2 Exemplos

Exemplo 3.2.1. *Considere o espaço mensurável* $(f, \mathcal{B})$*, onde* $\mathcal{B}$ *é a* $\sigma-$*álgebra de Borel de* $[0,1]$ *e* $f : [0,1] \to [0,1]$ *é dada por* $f(x) = x^2$.

Igualando $f(x) = x$*, concluímos que seus únicos pontos fixos são* $x = 0$ *e* $x = 1$*. Pela proposição 3.1.3, temos que* f *possui pelo menos duas medidas invariantes, a saber: as medidas de Dirac* δ_0 *e* δ_1.

Exemplo 3.2.2. *(Mapa Tenda) Considere agora o espaço mensurável* $(T, \mathcal{B})$*, onde* $\mathcal{B}$ *é a* $\sigma-$*álgebra de Borel de* $[0,1]$ *e* $T : [0,1] \to [0,1]$ *é o mapa*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

cujo nome é justificado pelo seu gráfico, que tem o formato de uma tenda:

Note que para todo intervalo $I = [a, b] \subseteq [0,1]$*, sua pré imagem é a união dos intervalos* $[\frac{a}{2}.\frac{b}{2}]$*,* $[\frac{1-b}{2}, \frac{1-a}{2}]$*. Como cada um desses intervalos tem medida de Lebesgue* λ*(2.2.2) igual a* $\frac{1}{2}(b-a)$*, vale a igualdade*

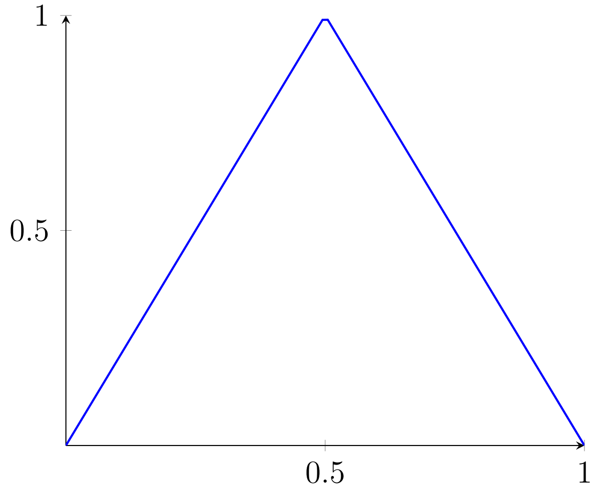

Figura 3.1: Gráfico do Mapa Tenda. Fonte: Autor.

$$\begin{aligned}\lambda(I) &= b - a \\ &= \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}(b-a) \\ &= \lambda([\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]) + \lambda([\frac{1-b}{2}, \frac{1-a}{2}]) \\ &= \lambda([\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] \cup [\frac{1-b}{2}, \frac{1-a}{2}]) \\ &= \lambda(T^{-1}(I)).\end{aligned}$$

Por consequência do que mostramos acima, vale também que $\lambda(T^{-1}(\cup I_n)) = \lambda(\cup I_n)$*, para qualquer coleção finita de intervalos contidos em* $[0,1]$*. Agora, perceba que a família formada pelas uniões finitas de intervalos de* $[0,1]$ *é uma álgebra que gera a* $\sigma-$*álgebra de borel de* $[0,1]$ *(veja [1]). Pela proposição 3.1.2, segue que* λ *é invariante por* T*.*

Exemplo 3.2.3. *(Expansão decimal) Seja* $(f, \mathcal{B})$ *um espaço mensurável, onde* $\mathcal{B}$ *é a* $\sigma-$*álgebra de Borel de [0,1],* $f : [0,1] \to [0,1]$ *é a função definida por*

$$f(x) = 10x - [10x]$$

e [y] = o maior inteiro menor ou igual a y. Note que f *leva* x *na parte decimal de* x*. Afirmamos que medida a de Lebesgue* λ *é invariante por* f*. De fato, da imagem acima, podemos ver que dado um*

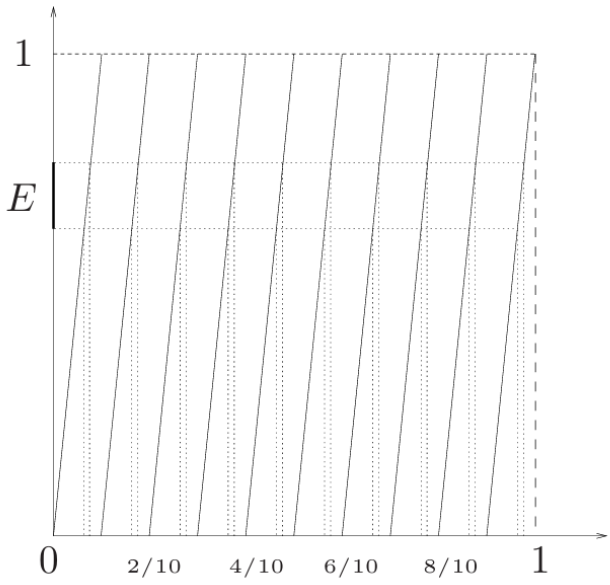

Figura 3.2: Gráfico de f. Fonte: [4].

intervalo $I \subset \mathcal{B}$, a pré imagem de I é composta por 10 intervalos com comprimento 10 vezes menor que I. Assim, $\lambda(I) = \lambda(f^{-1}(I))$. Por consequência disso, vale a invariância também para uma união finita de elementos de $\mathcal{B}$. Analogamente ao exemplo anterior, segue pela Proposição 3.1.2 que λ é invariante por f.

Surge então a dúvida: qual a vantagem de ter uma medida invariante por f? Por que motivo estudar Sistemas Dinâmicos com medidas invariantes? Uma possível aplicação e motivação para o estudo da existência de uma medida invariante é o seguinte teorema:

Teorema 3.2.4. *(Recorrência de Poincaré) Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita invariante por f. Seja $E \subset M$ um conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então, para μ-quase todo ponto $x \in E$, existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x) \in E$.*

Demonstração. Começemos definindo o conjunto

$$E_0 = \{x \in E : f^n(x) \notin E \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

O primeiro passo é mostrar que $\mu(E_0) = 0$. Para isso, provaremos que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, os conjuntos da forma $f^{-n}(E_0)$ $f^{-m}(E_0)$ tem interseção vazia. De fato, suponha existente $x \in f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0)$. Assumindo $m > n$ sem perda de generalidade, temos $y = f^n(x)$, donde $y \in E_0$ e $f^{m-n}(y) =$

$f^m(x) \in E_0$. Do fato que E_0 está contido em E, concluímos que $y \in E$, o que entra em contradição com a definição de E_0. Isso nos mostra que a coleção de conjuntos $\{f^{-n}(E_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de fato dois a dois disjunta.

Do fato que μ é invariante, temos que $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)$ para todo $n \geqslant 1$. Então,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0).$$

Do lado esquerdo da igualdade, temos uma expressão com valor finito, pois μ é uma medida finita, por hipótese. Do lado direito, estamos somando infinitamente o mesmo valor. A única maneira possível para que o lado direito seja finito é que $\mu(E_0) = 0$.

Seja agora F o conjunto dos elementos de E que retornam para E apenas uma quantidade finita de vezes.

Por definição, pode-se ver que para todo ponto $x \in F$, existe algum j tal que $f^j(x) \in E_0$. Ou seja,

$$F \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E_0).$$

Pelo fato de que $\mu(E_0) = 0$ e μ é invariante, segue que

$$\begin{aligned}\mu(F) &\leqslant \mu(\bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E_0)) \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \mu(f^{-j}(E_0)) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

E $\mu(F) = 0$, como queríamos demonstrar. ■

Esse teorema é muito interessante para responder o tipo de pergunta que nos fizemos na introdução do texto. Se considerarmos o subconjunto mensurável $E \subset M$ como o "lugar" que estávamos falando no começo, então concluímos que, a partir da perspectiva da medida invariante por f considerada, temos a informação de que quase todo ponto cuja trajetória é determinada pelo sistema dinâmico f passa infinitas vezes por esse lugar. Isso nos dá uma informação muito útil sobre a dinâmica de f.

Tal resultado evidencia a importância de uma medida invariante para uma transformação f, quando se tem por interesse estudar a dinâmica dessa transformação. Surge então um novo questionamento: Dada uma transformação mensurável $f : M \to M$, quando podemos garantir a existência de uma medida μ que é preservada por f?

Responder essa pergunta é o objetivo principal desse texto. E ela é respondida pelo seguinte teorema:

Teorema 3.2.5. *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. Então, existe uma medida de probabilidade μ invariante por f.*

Capítulo

4

Existência de Medidas Invariantes

A ideia para a demonstração desse teorema é definir uma certa topologia no conjunto das probabilidades em M, e, a partir daí, elaborar uma "máquina de construção" de medidas invariantes, através da definição de sequências que admitem subsequências convergentes nessa topologia, de modo que todo limite dessas subsequências (todo ponto de acumulação da sequência principal) é uma medida f invariante. Comecemos, então, definindo essa topologia.

A partir de agora, fixaremos alguns parâmetros adotados no texto daqui para frente. Seja M um espaço métrico compacto e Σ sua $\sigma-$álgebra de Borel (ver exemplo 2.1.13). Denotaremos por $\mathcal{M}_1(M)$ como sendo o conjunto formado por todas as medidas de probabilidade definidas em M.

4.0.1 A Topologia fraca*

Definiremos agora uma topologia em $\mathcal{M}_1(M)$, chamada topologia **fraca***. Dado $\varepsilon > 0$, $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ e $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ um conjunto finito formado por funções $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ contínuas, definimos o seguinte conjunto:

$$V(\varepsilon, \mu, \Phi) := \{\nu \in \mathcal{M}_1(M) : |\int \varphi_i \, d\nu - \int \varphi_i \, d\mu \, | < \varepsilon, \text{ para todo i}\}.$$

Proposição 4.0.2. *Seja $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ a família formada por todos os conjuntos da forma (4.0.1). Então, $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ pela satisfaz:*

- *Para toda medida $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$, existe algum $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mu \in V_\lambda$.*

- *Se $\mu \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$, então existe $V_{\lambda_3} \in (V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que*

$$\mu \in V_{\lambda_3} \subset V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}. \tag{4.1}$$

Demonstração.

Note que para toda $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$, $\mu \in V(\varepsilon, \mu, \Phi)$, onde $\varepsilon > 0$ e Φ é conjunto qualquer como definido acima. Além disso, se $\nu \in V(\varepsilon_1, \mu_1, \Phi) \cap V(\varepsilon_2, \mu_2, \Psi)$, onde $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ e $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\}$ então denotando por Ω o conjunto $\Omega = \Phi \cup \Psi$, por k_i e w_j, com i e j variando de 1 até n e de 1 até m, respectivamente, os valores da forma

$$k_i = \varepsilon_1 - |\int \varphi_i d\mu_1 - \int \varphi_i d\nu|$$

$$w_i = \varepsilon_2 - |\int \psi_i d\mu_2 - \int \varphi_i d\nu|$$

e tomando $\varepsilon = \min\{k_1, k_2, ..., k_n, w_1, w_2, ..., w_m\}$, vale que para toda medida $\mu \in V(\varepsilon, \nu, \Omega)$,

$$\begin{aligned} |\int \varphi_i d\mu - \int \varphi_i d\mu_1| &= |\int \varphi_i d\mu - \int \varphi_i d\nu + \int \varphi_i d\nu - \int \varphi_i d\mu_1| \\ &\leqslant |\int \varphi_i d\mu - \int \varphi_i d\nu| + |\int \varphi_i d\nu - \int \varphi_i d\mu_1| \\ &< \varepsilon_1 - |\int \varphi_i d\nu - \int \varphi_i d\mu_1| + |\int \varphi_i d\nu - \int \varphi_i d\mu_1| \\ &= \varepsilon_1, \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Ou seja, μ pertence a $V(\varepsilon_1, \mu_1, \Phi)$, e de maneira análoga, mostra-se que $\mu \in V(\varepsilon, \mu, \Omega)$. Portanto, $V(\varepsilon, \nu, \Omega) \subset V(\varepsilon_1, \mu_1, \Phi) \cap V(\varepsilon_2, \mu_2, \Psi)$.

■

Isso justifica a seguinte definição: [1]

Definição 4.0.3. *A topologia **fraca*** é a topologia que se obtém considerando os conjuntos da forma $V(\varepsilon, \mu, \Phi)$ como base de abertos.*

Com o intuito de fazer o que dissemos no início desta seção, devemos definir também o que

[1] Mostramos que os conjuntos da forma $V(\mu, \varepsilon, \Phi)$ satisfazem as condições suficientes para que possam ser tomados como base de uma topologia. Para mais detalhes, ver [2].

significa uma sequência de medidas convergir nesta topologia.

Definição 4.0.4. *Seja $(\mu_n)_n$ uma sequência de elementos de $\mathcal{M}_1(M)$. Diremos que essa sequência converge para $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ na topologia **fraca***, e escreveremos $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto finito $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ de funções contínuas $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies \mu_n \in V(\varepsilon, \mu, \Phi)$.*

Observação 4.0.5. *A definição que demos acima é mesma definição que se dá ao falar de convergência de sequências em espaços topológicos quaisquer, a única diferença é que se considera os abertos do espaço em questão, ao invés dos abertos da forma $V(\varepsilon, \mu, \Phi)$. O leitor interessado pode consultar [2].*

Lema 4.0.6. *Uma sequência $(\mu_n)_n$ converge para μ em $\mathcal{M}_1(M)$ na topologia **fraca*** se, e somente se,*

$$\int \varphi \, d\mu_n \longrightarrow \int \varphi \, d\mu, \tag{4.2}$$

para toda $\varphi : M \to M$ contínua.

Demonstração. Seja $(\mu_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{M}_1(M)$ e $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$. Por definição, para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto finito $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ de funções contínuas, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies \mu_n \in V(\varepsilon, \mu, \Phi)$. Isto é,

$$|\int \varphi_i \, d\mu_n - \int \varphi_i \, d\mu| < \varepsilon,$$

para todo i de 1 até n. Assim, dada $\varphi : M \to \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, considere o conjunto unitário $\Phi = \{\varphi\}$, e $V(\varepsilon, \mu, \Phi)$. Existe então $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$

$$\implies |\int \varphi \, d\mu_n - \int \varphi \, d\mu| < \varepsilon.$$

Em outros termos, $(\int \varphi \, d\mu_n)_n$ converge para $\int \varphi \, d\mu$. Reciprocamente, dados $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$ e $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n > n' \implies \mu_n \in V(\varepsilon, \mu, \Phi)$. Por hipótese, temos que para cada i de 1 até m, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_i$ implica

$$|\int \varphi_i \, d\mu_n - \int \varphi_i \, d\mu| < \varepsilon.$$

Portanto, tomando $n' = \max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$, tem-se para $n > n'$ que

$$|\int \varphi_i \, d\mu_n - \int \varphi_i \, d\mu| < \varepsilon,$$

para todo i. Isto é, $\varphi_n \in V(\varepsilon, \mu, \Phi)$. ∎

TEOREMA 4.0.7. *Toda sequência $(\mu_n)_n \subset \mathcal{M}_1(M)$ admite uma subsequência que converge na topologia **fraca***. Ou seja, $\mathcal{M}_1(M)$, munido da topologia **fraca*** é sequencialmente compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $C^0(M)$ o espaço de todas as funções contínuas de M em $\mathbb{R}$, e D um subconjunto enumerável e denso da bola unitária em $C^0(M)$([4], Teo A.3.13, página 419). Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|\int \varphi_n \, d\mu_k| \leqslant \int |\varphi_n| \, d\mu_k \leqslant \int 1 \, d\mu_k = 1.$$

Assim, para cada n natural, a sequência $(\int \varphi_n \, d\mu_k)_k$ é limitada. Como se trata de uma sequência de números reais, temos, por Bolzano-Weierstrass, que existe, para cada n, uma subsequência $(\int \varphi_n \, d\mu_{k_j^n})_j$ que converge para algum número real, que denotaremos por Φ_n.

Efetuado o processo acima para n = 1, obtemos a sequência de índices $(k_j^1)_j = (k_1^1, k_2^1, k_3^1, ...)$ tal que $\int \varphi_1 d\mu_{k_j^1}$converge para Φ_1. Caso a subsequência $(\int \varphi_2 \, d\mu_{k_j^1})_j$ de $(\int \varphi_2 \, d\mu_k)_k$ não seja convergente, podemos, pelo mesmo argumento anterior, extrair uma outra subsequência, obtendo assim uma nova sequência de índices, que denotaremos por $(k_j^2)_j = (k_1^2, k_2^2, k_3^2, ...)$, tal que a subsequência $(\int \varphi_2 \, d\mu_{k_j^2})_j$ é convergente.

Indutivamente, supondo que a sequência de índices (k_j^{n-1}) é tal que $(\int \varphi_{n-1} \, d\mu_{k_j^{n-1}})_j$ converge para Φ_{n-1}, podemos extrair uma subsequência (k_j^n) de (k_j^{n-1}) de modo que $(\int \varphi_{n-1} \, d\mu_{k_j^{n-1}})_j$ converge para Φ_n.

Em outras palavras, extraindo uma subsequência convergente para n = 1, podemos obter, a partir dessa, uma subsequência convergente de $(\int \varphi_n \, d\mu_k)_k$, tal que, para cada n, a sequência $(k_j^n)_j$ está contida em $(k_j^{n-1})_j$.

Defina então a sequência de índices $(l_j)_j$ pondo $l_j = k_j^j$. Observe que $(l_j)_j$ está contida inteiramente em $(k_j^1)_j$, por construção de $(k_j^n)_j$, e que está contida em $(k_j^n)_j$, exceto possivelmente por um número finito de termos $l_1, l_2, ..., l_{n-1}$.

Assim, $(\int \varphi_n \, d\mu_{l_j})_j$ está contida em $(\int \varphi_n \, d\mu_{k_j^n})_j$, a menos de uma quantidade finita de termos.

Segue então, por ser uma subsequência de uma sequência convergente, que $\int \varphi_n \, d\mu_{l_j} \to \Phi_n$.

Defina agora o operador Φ, por

$$\begin{aligned} \Phi : C^0(M) &\to \mathbb{R}, \\ \varphi &\longmapsto \lim \int \varphi d\mu_{l_j}. \end{aligned}$$

Mostraremos que de fato Φ está bem definido. A ideia é mostrar que $(\int \varphi \, d\mu_{l_j})_j$ é de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo[2], a sequência deve convergir. Dados $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in B(0,1)$, existe uma sequência $(\varphi_k)_k$ de elementos de D tal que $\|\varphi_n - \varphi\|_0 < \varepsilon/3$, para todo $n > n_0$, onde $\|\varphi_n - \varphi\|_0 = \sup_{x \in M} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|$. Como $(\int \varphi \, d\mu_{l_j})_j$ é convergente para elementos de D, é uma sequência de Cauchy. Assim, fixado $n \in \mathbb{N}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i, j > k_0$ implica em $|\int \varphi_n \, d\mu_{l_j} - \int \varphi_n \, d\mu_{l_i}| < \varepsilon/3$.

Então, para $n > n_0$ e $i, k > k_0$, temos

$$\begin{aligned} |\int \varphi \, d\mu_{l_j} - \int \varphi \, d\mu_{l_i}| &= |\int \varphi \, d\mu_{l_j} - \int \varphi_n \, d\mu_{l_j} + \int \varphi_n \, d\mu_{l_j} - \int \varphi_n \, d\mu_{l_i} + \int \varphi_n \, d\mu_{l_i} - \int \varphi \, d\mu_{l_i}| \\ &\leqslant |\int \varphi_n \, d\mu_{l_j} - \int \varphi_n \, d\mu_{l_i}| + |\int \varphi_n \, d\mu_{l_i} - \int \varphi \, d\mu_{l_i}| + |\int \varphi_n \, d\mu_{l_j} - \int \varphi \, d\mu_{l_j}| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $\varphi \notin B(0,1)$, e $\varphi \neq 0$, considere $\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \in B(0,1)$.

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\varphi}) &= \lim \int \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \, d\mu_{l_j} \\ &= \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \lim \int \varphi \, d\mu_{l_j} \\ \Longrightarrow \lim \int \varphi \, d\mu_{l_j} &= \Phi(\varphi) = \|\varphi\| \Phi(\bar{\varphi}). \end{aligned}$$

[2] O conjunto dos números Reais é um espaço métrico completo. Ou seja, toda sequência de Cauchy é convergente.

Por fim, observe que

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) &= \lim \int (\varphi_1 + \alpha\varphi_2)\, d\mu_{l_j} \\ &= \lim \int \varphi_1\, d\mu_{l_j} + \alpha \lim \int \varphi_2\, d\mu_{l_j} \\ &= \Phi(\varphi_1) + \alpha\Phi(\varphi_2),\end{aligned}$$

$\Phi(\varphi) \geqslant 0$, para qualquer $\varphi \geqslant 0$ e que se $\varphi \equiv 1$, então $\Phi(\varphi) = 1$. Pelo Teorema de Riesz-Markov([4], Teo A.3.11, página 467), existe uma medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ tal que

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi) &= \lim \int \varphi\, d\mu_{l_j} \\ &= \int \varphi\, d\mu.\end{aligned}$$

Em outras palavras, $\mu_{l_j} \xrightarrow{*} \mu$. Portanto, $\mathcal{M}_1(M)$ é sequencialmente compacto. ■

Observação 4.0.8. *Uma outra opção seria ter mostrado que $\mathcal{M}_1(M)$ é **compacto** na topologia **fraca***. Ou seja, toda cobertura de $\mathcal{M}_1(M)$ por meio de abertos admite uma subcobertura finita. De fato, há essa possibilidade pois a topologia **fraca*** é metrizável. Isto é, existe uma métrica em $\mathcal{M}_1(M)$ tal que a topologia gerada pelas bolas abertas dessa métrica coincide com a topologia gerada pelos conjuntos da forma $V(\varepsilon, \mu, \Phi)$. Como consequência disso, obtem-se a equivalência de compacidade e compacidade sequencial. Para mais detalhes sobre a metrizabilidade de $(\mathcal{M}_1(M),$ **fraca***$)$, ver [4]. Para mais detalhes sobre compacidade e compacidade sequencial, ver [2].*

Seja $f : M \to M$. Dada η medida em $\mathcal{M}_1(M)$, defina o mapa

$$\begin{aligned} f_* :&\mathcal{M}_1(M) \to \mathcal{M}_1(M), \\ &\eta \longmapsto f_*\eta, \text{pondo} \\ &f_*\eta(B) = \eta(f^{-1}(B)).\end{aligned}$$

Note que $f_*(\eta) = \eta \iff \eta(B) = \eta(f^{-1}(B))$, para todo $B \in \Sigma$. Isto é, f é invariante por η se, e somente se, η é ponto fixo de f_*. A ideia para demonstrar o Teorema 3.2.5 está centrada em construir uma sequência de medidas que tem a propriedade de que todo ponto de acumulação é ponto fixo de f_*.

Lema 4.0.9. *Sejam η medida e φ uma função mensurável. Então,*

$$\int \varphi \, df_*\eta = \int \varphi \circ f \, d\eta.$$

Demonstração. A ideia é análoga à proposição anterior.

Suponha que $\varphi = \chi_B$, $B \in \Sigma$.

$$\int \chi_B \, df_*\eta = f_*\eta(B) = \eta(f^{-1}(B)) = \int \chi_{f^{-1}(B)} \, d\mu = \int \chi_B \circ f \, d\eta.$$

Se φ é função simples, o resultado segue da linearidade da integral. Se φ é função mensurável qualquer, considere uma sequência $(s_n)_n$ de funções simples tal que $|s_n(x)| \leqslant |\varphi(x)|$, para todo n e todo x. Logo,

$$\int \varphi \, df_*\eta = \lim_n \int s_n \, df_*\eta = \lim_n \int (s_n \circ f) \, d\eta = \int \varphi \circ f \, d\eta.$$

∎

Proposição 4.0.10. *(Continuidade de f^*) Seja $(\mu_n)_n$ uma sequência de medidas em $\mathcal{M}_1(M)$ convergente na topologia* **fraca***. *Então, existe* $\lim f_*(\mu_n)$ *e vale*

$$\lim f_*(\mu_n) = f_*(\lim \mu_n).$$

*Onde o limite significa que a sequência $f_*(\mu_n)$ converge para $f_*(\mu)$ na topologia **fraca*.***

Demonstração. *Seja $\mu = \lim \mu_n$.*

$$\lim f_*(\mu_n) = f_*(\lim \mu_n) \iff$$

para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$ conjunto formado por funções contínuas $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies \mu_n \in V(\mu, \Phi, \varepsilon)$.

Ou seja,

$$|\int \varphi_i \, df_*(\mu_n) - \int \varphi_i \, df_*\mu| = |\int \varphi_i \circ f \, d\mu - \int \varphi_i \circ f \, d\mu| < \varepsilon,$$

para todo i. Pelo lema 2.1.1,

$$\mu_n \to \mu \iff \int \varphi \, d\mu_n \to \int \varphi \, d\mu,$$

para qualquer $\varphi : M \to \mathbb{R}$ *contínua.*

Assim, dados $\varepsilon > 0$ *e* Φ *conjunto como acima, temos que desde que* f *é contínua, cada* $\varphi_i \circ f$ *também o é. Logo, para cada i, deve existir* $n_i \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_i \implies |\int \varphi_i \circ f \, d\mu_n - \int \varphi_i \circ f \, d\mu| < \varepsilon$$

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2, ..., n_m\}$*. Então,* $n > n_0$ *implica*

$$|\int \varphi_i \circ f \, d\mu_n - \int \varphi_i \circ f \, d\mu| < \varepsilon,$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$*, e o resultado está provado.* ■

4.0.11 Demonstração do Teorema de Existência

Temos o necessário para provar o resultado principal. Provamos anteriormente que o conjunto das medidas de probabilidade em M é sequencialmente compacto na topologia fraca*. Dada uma probabilidade ν qualquer, construíremos uma sequência de medidas, e usaremos desse fato para mostrar que qualquer subsequência convergente dessa sequência que construímos a partir de ν deve ser uma medida invariante por f. Com efeito, dada $\nu \in \mathcal{M}_1(M)$, defina a seguinte sequência de probabilidades:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \nu.$$

TEOREMA 4.0.12. *Todo ponto de acumulação de uma sequência do tipo acima é uma probabilidade invariante por f.*

DEMONSTRAÇÃO.

Devemos mostrar que, se (μ_{n_k}) é uma subsequência convergente de (μ_n), convergindo na topologia

fraca* para $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$, então $f_*(\mu) = \mu$. Note que

$$\begin{aligned} f_*(\mu) = f^*(\lim_k \mu_{n_k}) &= f_*(\lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu) \\ &= \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^{j+1} \nu \\ &= \lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} f_*^j \nu \\ &= \lim_k \frac{1}{n_k} (\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu + f_*^{n_k} \nu - \nu) \\ &= \lim_k (\mu_{n_k} + \frac{1}{n_k} f_*^{n_k} \nu - \nu). \end{aligned}$$

A tarefa agora será mostrar que de fato $\mu_{n_k} + \frac{1}{n_k} f_*^{n_k} \nu - \nu \to \mu$. Isso ocorre se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, e para toda $\varphi : M \to M$ contínua, existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_{k_0}$ implica em

$$\begin{aligned} |\int \varphi \, d(\mu_{n_k} + \frac{1}{n_k}(f_*^{n_k} \nu - \nu)) - \int \varphi \, d\mu| &= |\int \varphi d\mu_{n_k} - \frac{1}{n_k} \int \varphi d f_*^{n_k} \nu - \frac{1}{n_k} \int \varphi d\nu - \int \varphi d\mu| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ora, do fato que $\mu_{n_k} \to \mu$, sabemos que existe $n_{k_1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_{k1} \implies |\int \varphi d\mu_{n_k} - \int \varphi d\mu| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olhemos então para a parte restante.

$$
\begin{aligned}
|\frac{1}{n_k}\int \varphi d f_*^{n_k}\nu - \frac{1}{n_k}\int \varphi d\nu| &= |\frac{1}{n_k}\int \varphi\circ f_*^{n_k} d\nu - \frac{1}{n_k}\int \varphi d\nu| \\
&= \frac{1}{n_k}|\int \varphi\circ f_*^{n_k} - \varphi d\nu| \\
&\leqslant \frac{1}{n_k}\int |\varphi\circ f_*^{n_k} - \varphi| d\nu \\
&\leqslant \frac{1}{n_k}\int |\varphi\circ f_*^{n_k}| + |\varphi| d\nu \\
&\leqslant \frac{1}{n_k}\int \sup|\varphi\circ f_*^{n_k}| + \sup|\varphi| d\nu \\
&\leqslant \frac{1}{n_k}\int 2\sup|\varphi| d\nu \\
&= \frac{1}{n_k} 2\sup|\varphi|.
\end{aligned}
$$

Tomando então $n_{k_2} \in \mathbb{N}$ tal que

$$
n_k > n_{k_2} \implies \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{4\sup|\varphi|},
$$

teremos, tomando $n_{k_0} = \max\{n_{k_1}, n_{k_2}\}$, que para todo $n_k > n_{k_0}$, vale

$$
\begin{aligned}
|\int \varphi\, d(\mu_{n_k} + \frac{1}{n_k}(f_*^{n_k}\nu - \nu)) - \int \varphi\, d\mu| &= |\int \varphi d\mu_{n_k} - \frac{1}{n_k}\int \varphi d f_*^{n_k}\nu - \frac{1}{n_k}\int \varphi d\nu - \int \varphi d\mu| \\
&\leqslant |\int \varphi d\mu_{n_k} - \int \varphi d\mu| + \frac{1}{\mu_{n_k}}|\int \varphi d f_*^{n_k}\nu - \int \varphi d\nu| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4\sup|\varphi|} 2\sup|\varphi| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

■

4.0.13 Para quase todo número cuja expansão decimal começa com 19, 19 aparece infinitas vezes em sua expansão decimal

Para finalizar, daremos uma breve aplicação do Teorema de Recorrência de Poincaré.

Considere novamente o mapa da Expansão Decimal (3.2.3). Dado $x \in (0, 1)$, x é da forma

$x = 0, a_1a_2a_3...$, onde $a_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$, para todo i. Aplicando f em x, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1, a_2a_3... - a_1 \\ &= 0, a_2a_3... \end{aligned}$$

E no geral, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(x) = 0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}...$$

Considere agora o subintervalo $[\frac{19}{100}, \frac{20}{100})$ de $[0, 1]$. Note que para todo $x = 0, a_1a_2a_3... \in [\frac{19}{100}, \frac{20}{100})$, vale que $a_1 = 1$ e $a_2 = 9$. De fato, se

$$0, 19 \leqslant 0, a_1a_2a_3... < 0, 2,$$

então a_1 não pode ser maior que 1, pois seria igual ou maior que $0, 2$ e não pode ser menor que 1, pois seria menor que $0, 19$. Pelo mesmo motivo, a_2 deve ser igual a 9. Assim, encontramos um subconjunto de $[0, 1]$ satisfazendo uma propriedade interessante, cuja medida de Lebesgue é não nula, a saber:

$$[\frac{19}{100}, \frac{20}{100}) = \{0, a_1a_2a_3... \in [0, 1] : a_i \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{0, 1, ..., 9\}, a_1 = 1, a_2 = 9\}.$$

Note que no exemplo 3.2.3 provamos que a medida de Lebesgue λ é invariante por f. Dessa forma, conclui-se pelo Teorema da Recorrência de Poincaré que para $\lambda-$quase todo ponto[3] $x \in [\frac{19}{100}, \frac{20}{100})$, existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x) \in [\frac{19}{100}, \frac{20}{100})$. Isto é, para quase todo número cuja expansão decimal começa com o número 19, o número 19 aparece infinitas vezes em sua expansão decimal.

A escolha do número 19 foi inteiramente pessoal. Na verdade, pode-se provar que para todo $k \geqslant 1$ e todo bloco de números com k dígitos, para quase todo número cuja sua expansão decimal começa com esse bloco, tal bloco aparecerá infinitas vezes em sua expansão decimal. Para mostrar isso, se o

[3]Ou seja, para todo ponto $x \in [\frac{19}{100}, \frac{20}{100})$, a menos de um conjunto N, onde $\lambda(N) = 0$.

bloco é da forma $a_1a_2...a_k$, basta considerar o intervalo

$$[\frac{a_1a_2...a_k}{10^{k+1}}, \frac{a_1a_2...(a_k+1)}{10^{k+1}}],$$

e repetir o processo feito acima.

Capítulo 5

Considerações Finais

No nosso texto, exploramos apenas um de vários caminhos disponíveis para se provar a existência de medidas invariantes. Para concluir, teceremos alguns breves comentários acerca de outros possíveis caminhos para se provar o teorema de existência.

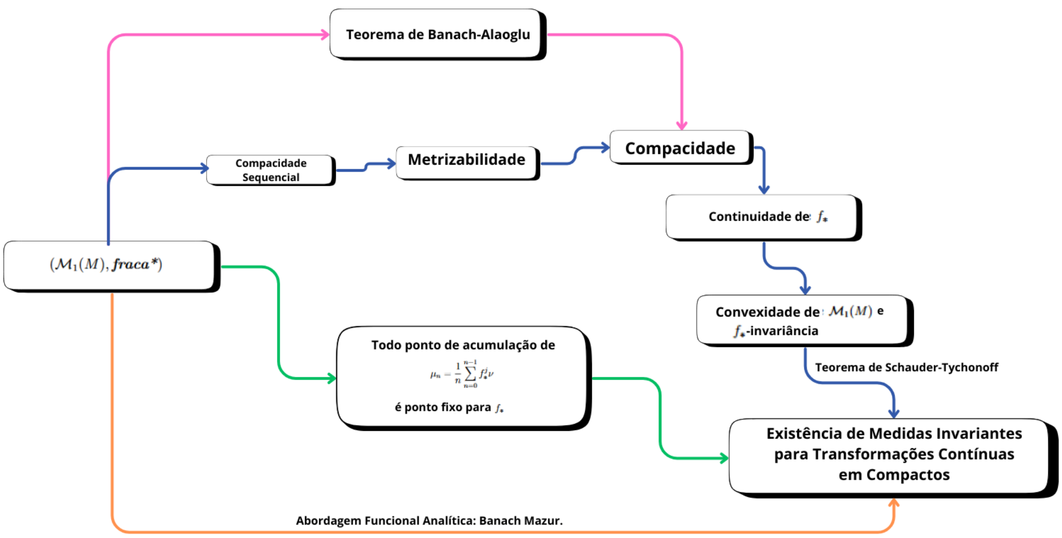

Figura 5.1: Fonte: Autor.

Caminho Rosa: Ao definir a Topologia Fraca*, poderíamos diretamente mostrar que ela é compacta, utilizando o Teorema de Banach Alaoglu.

Seja E um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial munido de uma norma que faz de E um espaço métrico completo com a métrica induzida por essa norma. O espaço dual de E é o espaço E* de todos os funcionais lineares contínuos definidos em E. E^* também é um espaço de Banach, com a norma

$$\|g\| = \sup\{\frac{|g(v)|}{\|v\|} : v \in E \backslash \{0\}\}.$$

A **topologia fraca*** em E é a topologia obtida ao se considerar a seguinte base de vizinhanças:

$$V(v, \{g_1, ..., g_N\}, \varepsilon) = \{w \in E : |g_1(v) - g_i(w)| < \varepsilon \, \forall i\},$$

onde $g_1, ..., g_N \in E^*$.

A **topologia fraca*** no espaço dual E^* é a topologia definida pela seguinte base de vizinhanças:

$$V^*(g, \{v_1, ..., v_N\}, \varepsilon) = \{h \in E^* : |g(v_i) - h(v_i)| < \varepsilon \},$$

onde $v_1, ..., v_N \in E$.

Teorema 5.0.1. *(Banach-Alaoglu) A bola fechada unitária de E^* é compacta na topologia **fraca*.***

No nosso texto, o espaço vetorial considerado é $E = C^0(M)$, o conjunto das funções contínuas definidas em um espaço métrico compacto M, e $E^* = \mathcal{M}(M)$, o conjunto de todas as medidas complexas definidas em M. Isso foi possível pois através do Teorema de Riesz-Markov, associamos cada medida $\mu \in \mathcal{M}(M)$ com o funcional linear

$$I_\mu(\varphi) = \int \varphi d\mu.$$

Como o conjunto $\mathcal{M}_1(M)$ de todas as medidas de probabilidade está contida na bola unitária de $\mathcal{M}_1(M)$, e é fechado para a topologia **fraca***, obtem-se a compacidade de $(\mathcal{M}_1(M), \textit{fraca*})$.

Caminho Laranja:

Considerados uma tranformação contínua em um espaço métrico compacto $f : M \to M$ e seu respectivo operador $f_* : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$, $\mu \longmapsto f_*\mu$, defina também o operador

$$\begin{aligned} U_f : & C^0(M) \to C^0(M) \\ & \varphi \longmapsto \varphi \circ f. \end{aligned}$$

U_f é chamado **operador de Koopman** de f.

Pelo Lema(4.0.9), vale que

$$\int U_f(\varphi)d\mu = \int(\varphi \circ f)d\mu = \int \varphi d(f_*\mu).$$

Por essa relação, o operador dual

$$U_f^* : C^0(M)^* \to C^0(M)^*$$

pode ser identificado com $f_* : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(M)$.

Além disso, U_f é um operador linear positivo, pois $U_f(\varphi) \geqslant 0$ em $\mu-$quase todo ponto sempre que $\varphi \geqslant 0$ em $\mu-$quase todo ponto.

Seja E um espaço de Banach. Um subconjunto fechado e convexo C é chamado um **cone** de E se satisfaz $\lambda C \subset C$ para todo $\lambda \geqslant 0$ e $C \cap (-C) = \{0\}$.

Diremos que o cone C é **normal** se

$$\inf\{\|x+y\| : x, y \in C : \|x\| = \|y\| = 1\} > 0.$$

Fixe um cone C de E. Dado um operador linear contínuo $T : E \to E$, diremos que T é **positivo sobre** C se a imagem $T(C)$ está contida em C. Dado um funcional linear $\varphi : E \to \mathbb{R}$, diremos que φ é positivo sobre C se $\varphi(v) \geqslant 0$ para todo $v \in C$.

Defina também o **raio espectral** do operador linear contínuo T por:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Vale que $r(T) = r(T^*)$, onde $T^* : E^* \to E^*$ representa o operador linear dual de T.

A partir do Teorema de Banach Mazur([5], página 19), pode-se concluir o seguinte resultado:

Teorema 5.0.2. *Seja C um cone normal de um espaço de Banach E e $T : E \to E$ um operador linear positivo sobre C. Então, $r(T^*)$ é um autovalor do operador dual $T^* : E^* \to E^*$ e admite algum autovalor $v^* \in C^*$.*

Considere o cone $C = C_+^0(M) = \{\varphi \in \mathbb{C}^0(M) : \varphi \geqslant 0\}$, de $E = C^0(M)$. O cone dual de C_+^0 é naturalmente identificado com o espaço de medidas finitas positivas em M, pelo Teorema de Riesz-

Markov. O operador $T = U_f$ é positivo sobre C e além disso, como $\sup |T(\varphi)| \leqslant \sup |\varphi|$ para toda $\varphi \in C^0(M)$ e $T(1) = 1$, segue que seu raio espectral é igual a 1. Pelo Teorema acima, existe alguma medida finita positiva μ em M tal que μ é autovalor do operador dual $T^* = f_*$ associado com o autovalor 1. Ou seja, μ é invariante. A menos de uma multiplicação por uma constante adequada, podemos assumir que μ é uma probabilidade.

Caminho Azul:

Um **espaço vetorial topológico** é um espaço vetorial V munido de uma topologia pra qual ambas as operações de V (soma e multiplicação por escalar) são contínuas. Um conjunto $K \subset V$ é dito ser **convexo** se $(1-t)x + ty \in K$ para todo $x, y \in K$ e todo $t \in [0, 1]$.

Teorema 5.0.3. *(Schauder-Tychonoff). Seja $F : V \to V$ uma transformação contínua definida em um espaço vetorial topológico V. Suponha que existe um conjunto convexo e compacto $K \subset V$ tal que $F(K) \subset K$. Então, $F(v) = v$ para algum $v \in K$.*

Se considerarmos $V = \mathcal{M}(M)$ o conjunto de todas as medidas complexas em M, $K = \mathcal{M}_1(M)$ o espaço de todas as probabilidades em M e $F = f_*$, então nos deparamos justamente com o objetos de com os quais trabalhamos em nosso texto. Entretanto, no nosso caso, além de todas as hipóteses do Teorema de Schauder-Tychonoff, temos também a informação extra de que f_* é linear. Isso fez uma enorme diferença: não só foi possível uma demonstração direta e construtiva desse resultado, como também pudemos exibir quem são os pontos fixos de F. Ou seja, não só provamos a existência de algum v que é ponto fixo de F, como também o explicitamos.

Caminho Verde: Esse foi o caminho tomado em nosso texto.

Para mais detalhes acerca dessas maneiras alternativas para a demonstração da existência de medidas invariantes, ver a referência principal desse texto, [4].

Referências Bibliográficas

[1] Robert G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, 1995. 2.1, 2.1, 2.1, 2.2.2, 3.2.2

[2] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000. 1, 1, 4.0.5, 4.0.8

[3] Elon Lages Lima, *Curso de Análise, Volume 1*, Projeto Euclides, IMPA, 2009. 2

[4] Marcelo Viana e Krerley Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, IMPA, 2016. 3.2, 4.0.1, 4.0.8, 5

[5] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, 2006. 5

[6] Donald L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, 2013. 2.1