



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Cálculo de Áreas com Métricas Riemannianas

Daniel Mendonça Lins

Maceió - AL
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Cálculo de Áreas com Métricas Riemannianas

DANIEL MENDONÇA LINS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio de A. Cavalcante

Maceió - AL
2025

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Cláudio Albuquerque Reis – CRB-4 – 1753

L759c Lins, Daniel Mendonça.
Cálculo de Áreas com Métricas Riemannianas / Daniel Mendonça Lins. – 2024.
24 f. : il.

Orientador: Marcos Petrúcio de A. Cavalcante.

Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia. f. 24.

1. Matemática. 2. Geometria riemanniana. 3. Espaços hiperbólicos. I. Título.

CDU: 514.133

DANIEL MENDONÇA LINS

Cálculo de Áreas com Métricas Riemannianas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática e aprovado em 13/02/2025.

Banca Examinadora :



Documento assinado digitalmente

MARCOS PETRUCIO DE ALMEIDA CAVALCANTE

Data: 17/02/2025 15:14:39-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de A. Cavalcante (Orientador)
Instituto de Matemática - UFAL



Documento assinado digitalmente

MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA

Data: 17/02/2025 15:18:35-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
Instituto de Matemática - UFAL



Documento assinado digitalmente

MARCOS RANIERI DA SILVA

Data: 17/02/2025 18:00:05-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva
Instituto de Matemática - UFAL

*Entrega o teu caminho ao Senhor;
confia nele, e ele tudo fará.*

Salmos 37:5.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas as bênçãos em minha vida e por Seu amor infinito.

Sou imensamente grato aos meus pais, Francisco e Adjane, pela educação, pelos valores transmitidos e por todo o apoio incondicional, que me permitiram me tornar uma pessoa melhor e mais digna.

Aos meus cinco irmãos – Raquel, Isabel, Mizael, Gabriel e Rafael – agradeço pela amizade e união que compartilhamos.

Expresso minha gratidão ao Prof. Dr. Marcos Petrúcio de A. Cavalcante, pela paciência, pelos ensinamentos e pela valiosa orientação ao longo dessa jornada.

Agradeço ao Prof. Dr. Márcio Batista e ao Prof. Dr. Marcos Ranieri pelos conselhos e por aceitarem fazer parte da banca avaliadora deste trabalho.

Aos professores e técnicos do IM, deixo meu sincero agradecimento. Em especial, à Prof.^a Dr.^a Elaine Cristine, que me auxiliou em um momento difícil da graduação, e ao Prof. Dr. Vânio Melo, coordenador da licenciatura, por sua constante disponibilidade para ajudar.

Por fim, sou grato a todos os meus amigos e colegas de curso pela parceria e companheirismo ao longo dessa caminhada.

RESUMO

Este trabalho introduz de forma acessível o conceito de métrica Riemanniana em domínios do espaço Euclidiano, com ênfase em sua aplicação ao cálculo de áreas. Utilizando fundamentos de Álgebra Linear e Cálculo Multivariável, busca-se tornar o tema compreensível para iniciantes, ainda que, em alguns momentos, a formalidade matemática seja suavizada em prol da intuição. O objetivo é apresentar resultados fundamentais com clareza, destacando a elegância dos teoremas e técnicas envolvidos.

O texto aborda o cálculo de áreas utilizando a métrica Riemanniana, partindo do Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais. São exploradas métricas em diferentes contextos, incluindo os espaços Euclidiano e hiperbólico, com aplicações concretas, como o cálculo da área do toro e das esferas $S^2(R)$ e $S^3(R)$. O estudo se estende ao espaço hiperbólico, analisando a medida de áreas em regiões específicas, como retângulos e coroas circulares, fornecendo um arcabouço teórico e prático para investigações mais avançadas em Geometria Riemanniana.

Palavras-chave: Área, Métrica Riemanniana, Espaço Hiperbólico.

ABSTRACT

This work provides an accessible introduction to the concept of a Riemannian metric in domains of Euclidean space, with an emphasis on its application to area calculation. Using fundamentals of Linear Algebra and Multivariable Calculus, the goal is to make the topic comprehensible for beginners, even if, at times, mathematical rigor is softened in favor of intuition. The objective is to present fundamental results clearly, highlighting the elegance of the theorems and techniques involved.

The text discusses the calculation of areas using the Riemannian metric, starting from the Change of Variables Theorem for integrals. Metrics in different contexts are explored, including Euclidean and hyperbolic spaces, with concrete applications such as the computation of the area of the torus and the spheres $S^2(R)$ and $S^3(R)$. The study extends to hyperbolic space, analyzing area measurement in specific regions, such as rectangles and circular annuli, providing a theoretical and practical framework for more advanced investigations in Riemannian Geometry.

Keywords: Area, Riemannian Metric, Hiperbolic Space.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Resultados Preliminares	3
2.1	Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais	3
2.2	Produto Interno em Espaços Vetoriais	6
2.2.1	Produto Interno Expresso por Matrizes	7
2.3	O Espaço Tangente	7
3	Métricas Riemannianas e o cálculo de áreas	9
3.1	Métricas Riemannianas em abertos do plano	9
3.1.1	A métrica do gráfico	11
3.2	Área de uma métrica Riemanniana	12
3.2.1	Dedução da fórmula para a área	13
4	Áreas de gráficos e áreas na métrica hiperbólica	16
4.1	Cálculo de áreas de gráficos	16
4.1.1	A área da esfera $S^2(R)$	17
4.1.2	A área da esfera $S^3(R)$	18
4.2	A área na métrica hiperbólica	20
4.2.1	Área de Retângulos no Espaço Hiperbólico	21
4.2.2	Área de uma Coroa Circular no Espaço Hiperbólico	22

Capítulo 1

Introdução

A Geometria Diferencial é uma área da Matemática que estuda superfícies e suas propriedades intrínsecas, utilizando ferramentas de Álgebra Linear e Cálculo Diferencial. Dentro deste contexto, as métricas Riemannianas surgem como uma extensão natural do conceito de produto interno, permitindo a generalização de noções como comprimento, área e ângulos em variedades mais complexas [3, 4].

O conceito de métrica Riemanniana foi introduzido por Bernhard Riemann (1826 – 1866) em sua famosa palestra *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* ("Sobre as Hipóteses que Fundamentam a Geometria"), publicada em 1854 no artigo [6]. Esse conceito revolucionou a forma como entendemos a geometria e a noção de medida em espaços curvados. Desde então, a Geometria Riemanniana tem desempenhado um papel fundamental em diversas áreas da Matemática e da Física, incluindo relatividade geral e teoria da otimização [2, 1, 5].

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos introdutórios das métricas Riemannianas, com foco na aplicação no cálculo de áreas de superfícies. Para isso, serão abordados conceitos fundamentais de produto interno, norma e espaços tangentes, culminando na formalização da fórmula para a área de uma superfície parametrizada. Em particular, discutiremos como calcular áreas em diferentes espaços, incluindo o espaço euclidiano e o espaço hiperbólico, destacando aplicações clássicas, como o cálculo da área da esfera S^2 e do espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 [3, 4, 5].

O texto é organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, introduzimos os conceitos preliminares necessários, incluindo o Teorema da Mudança de Variáveis para integrais. No Capítulo 3, formalizamos a noção de métricas Riemannianas e deduzimos a fórmula para o cálculo de áreas. Por fim, no Capítulo 4, aplicamos essa teoria para calcular áreas de superfícies gráficas e domínios no espaço hiperbólico.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

A necessidade de medir distâncias, áreas, volumes, ângulos e outras grandezas impulsionou o desenvolvimento da matemática ao longo da história [2]. Na geometria diferencial, esse interesse se manifesta no estudo das métricas, que fornecem a estrutura fundamental para a análise das formas e propriedades dos espaços mais gerais. Em particular, a métrica Riemanniana desempenha um papel essencial ao definir uma noção de comprimento, ângulo e área, funcionando como uma “régua” para medições locais [4, 5].

Uma das diversas aplicações das métricas Riemannianas é a determinação da área de superfícies. Essa abordagem se baseia no teorema da mudança de variáveis, garantindo uma formulação consistente para o cálculo de integrais em variedades diferenciáveis [3].

Neste capítulo, apresentamos conceitos fundamentais que servirão de base para a compreensão da teoria das superfícies, estabelecendo a relação entre a métrica Riemanniana e a definição de área [3].

2.1 Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais

A fim de desenvolver uma definição rigorosa para a área, nos apoiamos no teorema da mudança de variáveis para integrais. Por simplicidade, focamos no caso de dimensão 2.

Seja $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(D) \subset \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo, com

$$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)).$$

Denotamos por $p = (x, y)$ e, para cada p , definimos o diferencial linear

$$d\varphi_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Em particular, temos

$$d\varphi_p(e_1) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) \right)$$

e

$$d\varphi_p(e_2) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y), \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \right).$$

Seja $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Como $v = a e_1 + b e_2$, temos

$$d\varphi_p(v) = a d\varphi_p(e_1) + b d\varphi_p(e_2) = \left(a \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y), a \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \right).$$

Portanto, a matriz associada à transformação linear $d\varphi_p$ é dada por:

$$[d\varphi_p] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é conhecida como a *matriz Jacobiana* de φ .

Teorema 2.1 (Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais). Seja $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(D) \subset \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo e seja $f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então,

$$\int_{\varphi(D)} f(u, v) du dv = \int_D (f \circ \varphi)(x, y) |\det(d\varphi(x, y))| dx dy. \quad (2.1)$$

Prova. A base para esta prova você encontra em [7]. Nosso objetivo é expressar $du dv$ em termos de dx e dy .

Considere um pequeno retângulo

$$D = [x_0, x_0 + \Delta x] \times [y_0, y_0 + \Delta y]$$

no plano xy . Denotamos por $\varphi(D)$ a imagem de D .

Desejamos estimar a área ΔA de $\varphi(D)$.

Lembramos que

$$\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

onde o vetor tangente à curva $\varphi(x, y_0)$ em $\varphi(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$ é

$$\varphi_x(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{j}.$$

Analogamente, o vetor tangente à curva $\varphi(x_0, y)$ em $\varphi(x_0, y_0) = (u_0, v_0)$ é

$$\varphi_y(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j}.$$

Podemos aproximar a área de $\varphi(D)$ pelo paralelogramo gerado pelos vetores $\Delta x \varphi_x(x_0, y_0)$ e $\Delta y \varphi_y(x_0, y_0)$.

A área desse paralelogramo é dada pelo determinante da matriz Jacobiana. Assim, obtemos:

$$|\Delta x \varphi_x(x_0, y_0) \times \Delta y \varphi_y(x_0, y_0)| = |J(x_0, y_0)| \Delta x \Delta y.$$

A matriz Jacobiana é dada por:

$$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Portanto, a área ΔA de $\varphi(D)$ é aproximadamente:

$$\Delta A \approx |J(x_0, y_0)| \Delta x \Delta y.$$

Note que o Jacobiano é calculado no ponto (x_0, y_0) .

Voltando ao problema inicial, desejamos calcular

$$\int_{\varphi(D)} f(u, v) du dv,$$

usando as variáveis x e y , com $(x, y) \in D$ e $R = \varphi(D)$.

Dividimos D em sub-retângulos D_{ij} e denotamos por $\varphi(D_{ij})$ suas imagens. A área de $\varphi(D_{ij})$ é aproximadamente $|J(x_i, y_j)|\Delta x\Delta y$, onde (x_i, y_j) representa um ponto do sub-retângulo D_{ij} .

Finalmente, por definição de integral,

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(D)} f(u, v) du dv &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(u_i, v_j) \Delta A \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\varphi(x_i, y_j)) |J(x_i, y_j)| \Delta x \Delta y \\ &= \int_D f(\varphi(x, y)) |J(x, y)| dx dy.\end{aligned}$$

■

Exemplo 1. Calculemos a seguinte integral dupla utilizando coordenadas polares:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

A região de integração é um quarto de círculo de raio $r = 1$. Fazemos a mudança de variáveis para coordenadas polares, ou seja, tomamos a função

$$\varphi : (0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$$

definida por

$$\varphi(r, \theta) = (\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta)) = (x, y) \in A,$$

onde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

O Jacobiano da transformação é dado por:

$$[d\varphi] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix},$$

e seu determinante é

$$|\det[d\varphi]| = r.$$

A função $x^2 + y^2$ se torna:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pelo teorema da mudança de variáveis, obtemos:

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 dr d\theta.$$

Resolvendo a integral em r :

$$\int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4},$$

obtemos

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Portanto, o resultado final é:

$$I = \frac{\pi}{8}.$$

2.2 Produto Interno em Espaços Vetoriais

Definição 1. Um **produto interno** em um espaço vetorial V é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

que associa a cada par de vetores $u, v \in V$ um número real $\langle u, v \rangle$ e satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $u, u', v, v' \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. Bilinearidade:

$$\begin{aligned} \langle u + u', v \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle, \\ \langle u, v + v' \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle, \\ \langle \alpha u, v \rangle &= \alpha \langle u, v \rangle, \\ \langle u, \alpha v \rangle &= \alpha \langle u, v \rangle; \end{aligned}$$

2. Simetria:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle;$$

3. Definida positividade:

$$\langle u, u \rangle > 0 \quad \text{para todo } u \neq 0.$$

Exemplo 2. No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , o produto interno canônico para os vetores

$$u = (u_1, \dots, u_n) \quad \text{e} \quad v = (v_1, \dots, v_n)$$

é definido por

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Exemplo 3. Seja $E = C^0([a, b])$ o espaço vetorial cujos elementos são as funções contínuas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Nesse caso, um produto interno natural em E é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

2.2.1 Produto Interno Expresso por Matrizes

Se tomarmos uma base arbitrária $\{v_1, \dots, v_n\}$ e definirmos $\langle v_i, v_j \rangle = g_{ij}$, o produto interno dos vetores

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$$

é dado por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \alpha_i \beta_j.$$

Logo, a matriz $g = (g_{ij}) \in M(n \times n)$ é *simétrica* (isto é, $g_{ij} = g_{ji}$) e, sendo definida positiva, temos que para qualquer lista (x_1, \dots, x_n) de números reais não todos nulos,

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i x_j > 0.$$

Dessa forma, o produto interno, para $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ em V , pode ser expresso por:

$$\langle u, v \rangle = (u_1 \quad \dots \quad u_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

2.3 O Espaço Tangente

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $p \in U$ um ponto fixo.

Definição 2. Dizemos que $v \in \mathbb{R}^n$ é um vetor tangente em $p \in U$ se existe uma curva suave

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

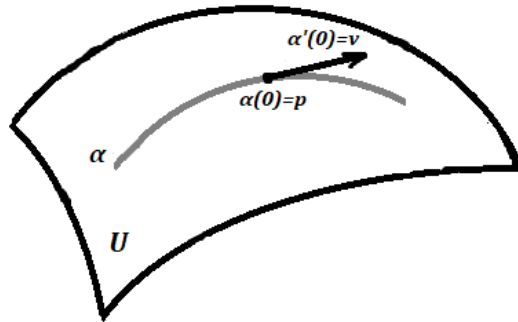


Figura 2.1

O conjunto de todos os vetores tangentes em p é chamado de **espaço tangente** a U em p , denotado por $T_p U$. Assim,

$$T_p U = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ é vetor tangente a } U \text{ em } p\} \subset \mathbb{R}^n.$$

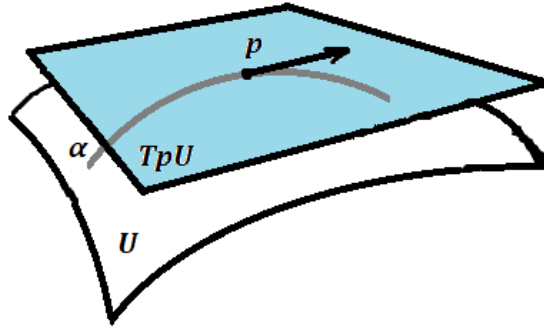


Figura 2.2

Ele pode ser naturalmente identificado com o próprio \mathbb{R}^n por meio de uma translação. Mais precisamente, temos:

Proposição 2.1. Para qualquer $p \in U$, o espaço tangente $T_p U$ coincide com \mathbb{R}^n , ou seja,

$$T_p U = \mathbb{R}^n.$$

Prova. Seja $v \in \mathbb{R}^n$. Consideremos a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por

$$\alpha(t) = p + tv.$$

Como U é um conjunto aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $p + tv \in U$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dessa forma, temos $\alpha(0) = p$ e, diferenciando em $t = 0$,

$$\alpha'(0) = v.$$

Portanto, v é um vetor tangente em p , ou seja, $v \in T_p U$. Como v foi escolhido arbitrariamente em \mathbb{R}^n , segue que $T_p U = \mathbb{R}^n$.

Capítulo 3

Métricas Riemannianas e o cálculo de áreas

Em 1854, o matemático alemão Bernhard Riemann (1826–1866) apresentou sua famosa palestra intitulada *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* ("Sobre as hipóteses que fundamentam a geometria") [6]. Nessa palestra, ele introduziu o conceito de uma métrica riemanniana, que generaliza a noção de distância em superfícies e espaços curvos (veja [2], Capítulo 24)].

Uma métrica riemanniana é uma função que atribui a cada ponto de uma variedade diferenciável um produto interno no espaço tangente, variando suavemente de ponto a ponto. Essa variedade é um espaço topológico que permite o cálculo de derivadas de funções reais. Esse conceito possibilita a generalização de medidas como comprimentos, ângulos, áreas e volumes, estendendo a noção de distância para espaços mais complexos do que o plano euclidiano.

Neste trabalho, focaremos no cálculo de áreas de domínios munidos com métricas riemannianas, com ênfase em abertos do espaço euclidiano e do espaço hiperbólico.

3.1 Métricas Riemannianas em abertos do plano

Em Geometria Diferencial, uma métrica Riemanniana é a ferramenta fundamental para medir comprimentos e ângulos em variedades diferenciáveis. No caso de um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, uma métrica Riemanniana define um produto interno em cada espaço tangente $T_x U$, permitindo-nos introduzir conceitos como comprimento de curvas, áreas e volumes de subvariedades, e curvatura.

Definição 3. Uma **métrica Riemanniana** em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma família $g = (g_{ij})$ de produtos internos, onde cada $g(x)$ é um produto interno definido positivo no espaço tangente $T_x U$, variando suavemente com $x \in U$. Em coordenadas locais, $g(x)$ é representado por uma matriz simétrica positiva definida:

$$g(x) = (g_{ij}(x)), \quad x \in U, \quad (3.1)$$

onde as funções $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis em U .

A escolha de uma métrica Riemanniana em U determina a estrutura geométrica do espaço e pode variar conforme o contexto. A seguir, apresentamos exemplos clássicos de métricas em diferentes modelos geométricos.

Exemplo 4. A métrica Euclidiana padrão em \mathbb{R}^n é dada por:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Em notação matricial, temos:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta é a **métrica Euclidiana canônica** de \mathbb{R}^n , que preserva ângulos e distâncias no sentido clássico.

Exemplo 5. No modelo do semi-espço superior

$$U = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\},$$

a métrica hiperbólica é dada por:

$$h_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2} \delta_{ij}.$$

Em notação matricial, temos:

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_n^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_n^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Esta é a **métrica hiperbólica no modelo do semi-espço**, a qual confere ao espaço uma estrutura geométrica diferente da Euclidiana, em que a distância entre pontos cresce rapidamente à medida que se aproximam do eixo $x_n = 0$.

Exemplo 6. No modelo da bola unitária $U = B_1$, a métrica hiperbólica é dada por:

$$H_{ij}(x) = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \delta_{ij}.$$

Em notação matricial, temos:

$$H = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta é a **métrica hiperbólica no modelo da bola**, frequentemente usada em Teoria das Funções e Geometria Hiperbólica.

3.1.1 A métrica do gráfico

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . O gráfico de f é o subconjunto do espaço \mathbb{R}^{n+1} definido por:

$$\text{Gr}(f) = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Podemos parametrizá-lo por meio da aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Gr}(f)$, dada por:

$$X(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)).$$

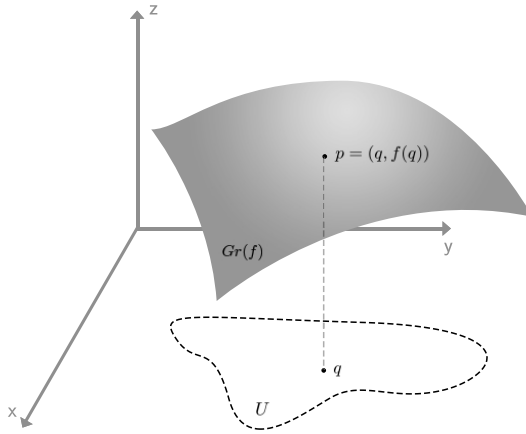


Figura 3.1

As derivadas parciais desta parametrização são:

$$X_{x_i} = (e_i, f_{x_i}) = (0, \dots, 1, \dots, 0, f_{x_i}), \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n .

A métrica induzida pelo gráfico é obtida no domínio U considerando os produtos internos em \mathbb{R}^{n+1} entre os vetores tangentes X_{x_i} , resultando em:

$$g_{ij} = \langle X_{x_i}, X_{x_j} \rangle = \delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j}.$$

Em notação matricial, a métrica do gráfico (também chamada de primeira forma fundamental) é representada pela matriz:

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1} f_{x_2} & \cdots & f_{x_1} f_{x_n} \\ f_{x_2} f_{x_1} & 1 + f_{x_2}^2 & \cdots & f_{x_2} f_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n} f_{x_1} & f_{x_n} f_{x_2} & \cdots & 1 + f_{x_n}^2 \end{pmatrix}.$$

Geometricamente, essa métrica mede as distâncias sobre a superfície do gráfico, levando em conta a inclinação da função f . Em particular, ela indica como a estrutura euclidiana do domínio U é distorcida pela presença da altura $f(x)$. Note que, para $f \equiv 0$, obtemos a métrica euclidiana usual de \mathbb{R}^n , ou seja, g reduz-se à matriz identidade.

Lema 1. O fator de **elemento de volume** associado à métrica induzida é dado por:

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

onde $|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2$ representa o quadrado do módulo do gradiente de f .

Prova. Para demonstrar a identidade $\sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$, começamos calculando o determinante da matriz métrica g .

A matriz g é da forma:

$$g = I_n + vv^T,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n e v é o vetor coluna dado por:

$$v = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}.$$

Utilizamos a seguinte propriedade dos determinantes para uma matriz da forma $I + A$, onde $A = vv^T$ é uma matriz de posto um. O determinante de tal matriz pode ser calculado usando a fórmula:

$$\det(I_n + vv^T) = 1 + \text{tr}(vv^T).$$

Como vv^T é uma matriz simétrica de posto um, seu único autovalor não nulo é $v^T v$, e sua matriz tem traço igual a:

$$\text{tr}(vv^T) = v^T v = \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 = |\nabla f|^2.$$

Portanto,

$$\det(g) = 1 + |\nabla f|^2.$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os lados, obtemos:

$$\sqrt{\det(g)} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}.$$

Isso conclui a prova. ■

Estaremos trabalhando com alguns casos particulares da métrica do gráfico no Capítulo 4.

3.2 Área de uma métrica Riemanniana

Nesta seção, utilizamos as métricas Riemannianas para definir a noção de área de superfícies no plano, baseando-nos no Teorema da Mudança de Variáveis para integrais e em propriedades da Álgebra Linear. Para maior simplicidade, consideramos o caso bidimensional, isto é, um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ munido de uma métrica Riemanniana $g = (g_{ij})$.

Definição 4. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto munido de uma métrica Riemanniana representada por uma matriz simétrica definida positiva $g = (g_{ij})$. A **área** de D com respeito a essa métrica é definida por:

$$\text{Area}_g(D) = \int_D \sqrt{\det[g_{ij}]} \, dx \, dy.$$

A expressão acima generaliza a noção usual de área na métrica Euclidiana, onde $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $\sqrt{\det[g_{ij}]} = 1$, recuperando a fórmula clássica da integração em coordenadas cartesianas.

3.2.1 Dedução da fórmula para a área

Para um ponto $p \in D$, a métrica em coordenadas locais é representada pela matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} g_{11}(p) & g_{12}(p) \\ g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix}.$$

Dado um par de vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ em \mathbb{R}^2 , o produto interno induzido por g pode ser escrito como:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(p) u_i v_j.$$

Particularmente, se tomarmos os vetores da base canônica $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, obtemos:

$$\langle e_1, e_1 \rangle = g_{11}, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = g_{12} = g_{21}, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = g_{22}.$$

Isso significa que, em geral, os vetores da base canônica não são ortonormais com respeito à métrica g . No caso da métrica Euclidiana, temos $g_{ij} = \delta_{ij}$, garantindo a ortonormalidade.

Agora, construiremos o argumento para o cálculo da área utilizando a métrica Riemanniana. Seja $X : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2, g)$ uma parametrização, definida por:

$$X(x, y) = (x, y).$$

O diferencial de X é dado por:

$$dX_p(u, v) = (u, v),$$

e, portanto,

$$dX_p(1, 0) = (1, 0), \quad dX_p(0, 1) = (0, 1).$$

Como mencionado anteriormente, esses vetores não são necessariamente ortonormais com respeito à métrica g . Seja então $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ uma base ortonormal em $T_p D$ com respeito à métrica g , de modo que podemos expressar:

$$dX_p(e_1) = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2, \quad dX_p(e_2) = c\varepsilon_1 + d\varepsilon_2.$$

Da definição da métrica, segue que:

$$g_{11} = a^2 + b^2, \quad g_{12} = ac + bd, \quad g_{22} = c^2 + d^2.$$

Em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que o determinante de uma matriz da forma $A^T A$ é dado por:

$$\det(A^T A) = (\det A)^2.$$

Portanto, aplicando essa propriedade à matriz da métrica g , obtemos:

$$\det[g_{ij}] = (\det A)^2.$$

Tomando a raiz quadrada, segue que:

$$\det[dX_p] = \sqrt{\det[g_{ij}]}.$$

Isso justifica a definição da área apresentada anteriormente. Em outras palavras, o fator $\sqrt{\det[g_{ij}]}$ fornece o elemento de área induzido pela métrica, análogo ao fator de escala em uma mudança de coordenadas.

Exemplo 7. O toro no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 pode ser parametrizado por:

$$X(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

para $u, v \in [0, 2\pi]$, onde R é o raio do círculo maior e r é o raio do círculo menor.

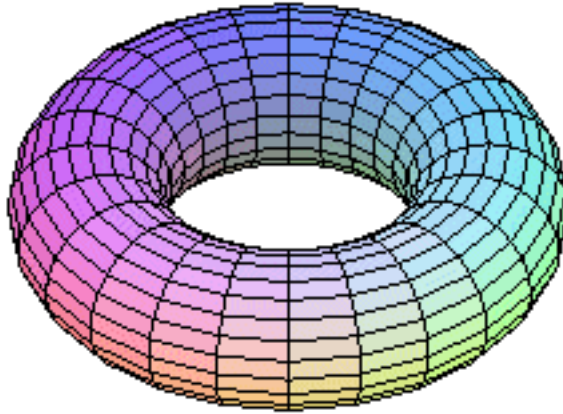


Figura 3.2: Representação do toro em \mathbb{R}^3 .

As derivadas parciais da parametrização são:

$$X_u = (-(R + r \cos v) \sin u, (R + r \cos v) \cos u, 0),$$

$$X_v = (-r \sin v \cos u, -r \sin v \sin u, r \cos v).$$

A métrica Riemanniana g_{ij} do toro, ou primeira forma fundamental, é dada pelos produtos internos dos vetores tangentes:

$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle = (R + r \cos v)^2,$$

$$g_{12} = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle = r^2.$$

A matriz da métrica pode ser expressa como:

$$g = \begin{pmatrix} (R + r \cos v)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

O determinante da matriz métrica é:

$$\det[g_{ij}] = (R + r \cos v)^2 r^2.$$

A área da superfície do toro é obtida pela fórmula:

$$\text{Area}(T) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\det[g_{ij}]} \, dv \, du.$$

Substituindo o determinante:

$$\text{Area}(T) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) r \, dv \, du.$$

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned} \text{Area}(T) &= \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} (R + r \cos v) r \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} r R \, du \int_0^{2\pi} dv + \int_0^{2\pi} r^2 \, du \int_0^{2\pi} \cos v \, dv. \end{aligned}$$

A segunda integral desaparece, pois:

$$\int_0^{2\pi} \cos v \, dv = 0.$$

Portanto, temos:

$$\text{Area}(T) = \int_0^{2\pi} r R \, du \cdot 2\pi = (2\pi R)(2\pi r) = 4\pi^2 Rr.$$

Concluimos que a área do toro é:

$$\text{Area}(T) = 4\pi^2 Rr.$$

Capítulo 4

Áreas de gráficos e áreas na métrica hiperbólica

Neste capítulo, exploramos o cálculo de áreas de gráficos e domínios no espaço hiperbólico, utilizando conceitos da Geometria Riemanniana. Começamos aplicando a definição de área em domínios munidos de uma métrica Riemanniana, abordando casos específicos da métrica do gráfico discutida anteriormente [4, 5]. Em particular, analisamos a expressão do elemento de área e sua aplicação no cálculo da área de gráficos quando $n = 2$ e $n = 3$, incluindo exemplos concretos, como as esferas S^2 e S^3 [3, 1].

Posteriormente, discutimos o cálculo de áreas no espaço hiperbólico, levando em consideração a métrica própria desse ambiente [6]. Para isso, determinamos áreas de regiões específicas, como retângulos e coroas circulares no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , ilustrando como a geometria hiperbólica influencia as medidas de área [2].

Ao longo deste capítulo, buscamos consolidar o entendimento sobre os métodos de cálculo de área em diferentes contextos geométricos, fornecendo um arcabouço teórico e prático para investigações futuras na área.

4.1 Cálculo de áreas de gráficos

Aqui vamos aplicar o conceito de área para domínios com uma métrica Riemanniana, para alguns casos particulares da métrica do gráfico, vista na Seção 3.1.1.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Como vimos, a métrica induzida pelo gráfico é obtida no domínio U considerando os produtos internos entre os vetores tangentes X_{x_i} , resultando em:

$$g_{ij} = \langle X_{x_i}, X_{x_j} \rangle = \delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

E pelo Lema 1, o fator do *elemento de volume* associado à métrica induzida é dado por:

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

onde $|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2$ representa o quadrado do módulo do gradiente de f .

Assim, a área do gráfico de f sobre D é dada por:

$$\text{Area}(\text{Gr}(f)) = \int_D \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx_1 \dots dx_n.$$

4.1.1 A área da esfera $S^2(R)$

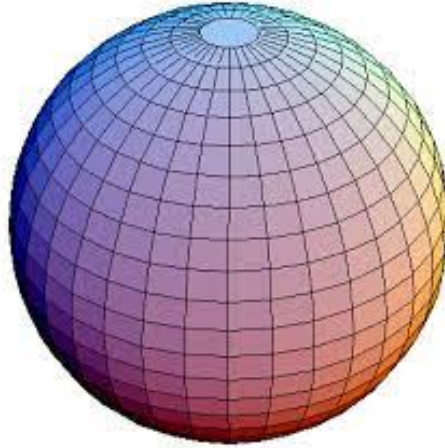


Figura 4.1: Representação da esfera em \mathbb{R}^3 .

Nosso objetivo é calcular a área da esfera $S^2(R)$. Para isso, consideramos inicialmente a área da semiesfera superior $S_+^2(R)$, que pode ser descrita como o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

definida sobre o disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Ao final, basta multiplicar o resultado da área de $S_+^2(R)$ por 2 para obter a área total da esfera.

O gráfico da função f é dado por:

$$\text{Gr}(f) = \{(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \mid (x, y) \in D\}.$$

As derivadas parciais de f são:

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Note que f_x e f_y não estão bem definidas na borda do disco, ou seja, quando $x^2 + y^2 = R^2$. Para contornar esse problema, consideramos inicialmente a área da semiesfera $S_+^2(\rho)$ para $0 \leq \rho < R$ e, ao final, tomamos o limite $\rho \rightarrow R$.

Assim, a área da semiesfera é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Area}(S_+^2(\rho)) &= \int_{B^2(\rho)} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_{B^2(\rho)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

e lembrando que o elemento de área é dado por:

$$dx dy = r dr d\theta,$$

a integral pode ser reescrita como:

$$\text{Area}(S_+^2(\rho)) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} d\theta dr.$$

Resolvendo a integral em θ :

$$2\pi R \int_0^\rho \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr.$$

Usando a substituição $k = R^2 - r^2$, com $dk = -2r dr$, temos:

$$2\pi R \int_{R^2 - \rho^2}^{R^2} \frac{1}{2\sqrt{k}} dk.$$

Resolvendo a integral:

$$\text{Area}(S_+^2(\rho)) = 2\pi R \left[\sqrt{k} \right]_{R^2 - \rho^2}^{R^2} = 2\pi R \left(R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \right).$$

Tomando o limite $\rho \rightarrow R$, obtemos:

$$\text{Area}(S_+^2(R)) = 2\pi R^2.$$

Finalmente, multiplicamos por 2 para obter a área total da esfera:

$$\text{Area}(S^2(R)) = 2 \cdot 2\pi R^2 = 4\pi R^2.$$

4.1.2 A área da esfera $S^3(R)$

Nesta seção, calculamos a área da esfera tridimensional $S^3(R)$ em \mathbb{R}^4 , seguindo a abordagem utilizada para $S^2(R)$. Consideramos o hemisfério superior da esfera como o gráfico de uma função definida em um domínio adequado.

Queremos determinar a área da esfera tridimensional de raio R , denotada por $S^3(R)$. Para isso, representamos o hemisfério superior como o gráfico da função

$$f(x, y, z) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2},$$

definida sobre a bola de raio R :

$$B^3(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

A área do gráfico é dada pela integral:

$$\text{Area}(S_+^3(R)) = \int_{B^3(R)} \sqrt{1 + |\nabla f(x, y, z)|^2} dx dy dz.$$

Calculamos as derivadas parciais da função f :

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad f_z = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Note que, f_x , f_y e f_z não estão bem definidos quando $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Para resolvermos este problema, vamos calcular a área de $S_+^3(\rho)$ com $0 \leq \rho < R$, por fim, faremos o limite $\rho \rightarrow R$.

Logo, o módulo do gradiente é:

$$|\nabla f|^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Assim, o fator do elemento de área se simplifica para:

$$\sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Portanto, a área do gráfico do hemisfério superior é dada por:

$$\text{Area}(S_+^3(\rho)) = \int_{B^3(\rho)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}} dx dy dz.$$

Para resolver essa integral, utilizamos coordenadas esféricas:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi,$$

onde $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, com $r \in [0, \rho]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$. O elemento de volume nessas coordenadas é dado por:

$$dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

Substituindo na integral, obtemos:

$$\text{Area}(S_+^3(\rho)) = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr.$$

Fatorando as integrais em θ e φ :

$$\text{Area}(S_+^3(\rho)) = R \int_0^\rho \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right).$$

Resolvendo as integrais:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \quad \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2.$$

Portanto:

$$\text{Area}(S_+^3(\rho)) = 4\pi R \int_0^\rho \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr.$$

Para resolver a integral, aplicamos a substituição trigonométrica $r = R \sin t$, com $dr = R \cos t dt$. Assim:

$$\sqrt{R^2 - r^2} = R \cos t, \quad r^2 = R^2 \sin^2 t.$$

Reescrevendo a integral:

$$\int_0^\rho \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \int_0^{\arcsin(\frac{\rho}{R})} \frac{R^2 \sin^2 t}{R \cos t} R \cos t dt.$$

Simplificando:

$$R^2 \int_0^{\arcsin(\frac{\rho}{R})} \sin^2 t \, dt.$$

Usamos a identidade $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$:

$$\int_0^{\arcsin(\frac{\rho}{R})} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\arcsin(\frac{\rho}{R})} (1 - \cos 2t) \, dt.$$

Integrando:

$$\frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\arcsin(\frac{\rho}{R})} = \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\sin(2 \arcsin(\frac{\rho}{R}))}{2} \right].$$

Portanto:

$$\int_0^{\arcsin(\frac{\rho}{R})} \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \, dr = R^2 \cdot \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\sin(2 \arcsin(\frac{\rho}{R}))}{2} \right].$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \text{Area}(S_+^3(\rho)) &= 4\pi R \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2} \left[\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\sin(2 \arcsin(\frac{\rho}{R}))}{2} \right] \\ &= 2\pi R^3 \left[\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) - \frac{\sin(2 \arcsin(\frac{\rho}{R}))}{2} \right]. \end{aligned}$$

Quando $\rho \rightarrow R$ temos que

$$\arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

e

$$\frac{\sin(2 \arcsin(\frac{\rho}{R}))}{2} \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\text{Area}(S_+^3(R)) = 2\pi R^3 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2 R^3.$$

Finalmente, multiplicamos por 2 para obter a área total da esfera:

$$\text{Area}(S^3(R)) = 2\pi^2 R^3.$$

4.2 A área na métrica hiperbólica

Consideremos o semiplano superior $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ munido da métrica hiperbólica:

$$g_{ij} = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}.$$

Nesse caso, a matriz da métrica é dada por:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Calculamos o determinante:

$$\det g = \frac{1}{y^4}.$$

Tomando a raiz quadrada, obtemos o fator de área:

$$\sqrt{\det g} = \frac{1}{y^2}.$$

Portanto, a área de uma região D com respeito à métrica hiperbólica é dada por:

$$\text{Area}_g(D) = \int_D \frac{dx dy}{y^2}.$$

Essa fórmula é fundamental na Geometria Hiperbólica, pois destaca como as medidas de área diferem drasticamente das euclidianas. A seguir, aplicamos esse conceito para calcular a área de regiões específicas no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , como retângulos e coroas circulares.

4.2.1 Área de Retângulos no Espaço Hiperbólico

Seja o retângulo $R = [0, a] \times [b, c] \subset \mathbb{H}^2$ no modelo do semiplano superior.

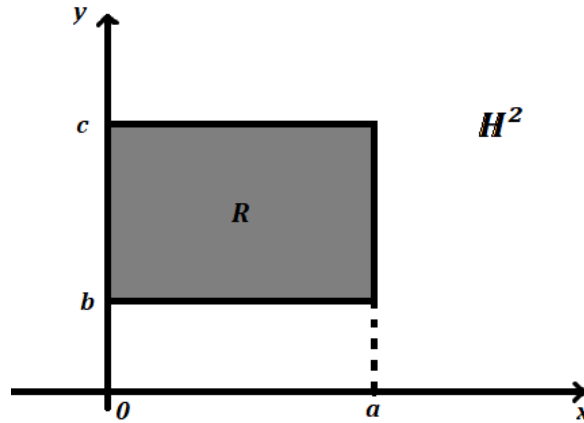


Figura 4.2

Onde a métrica é dada por:

$$g = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O fator do elemento de área é:

$$\sqrt{\det(g_{ij})} = \frac{1}{y^2}.$$

Assim, a área do retângulo R é dada por:

$$\text{Area}(R) = \int_b^c \int_0^a \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Integrando primeiro em x :

$$\int_0^a dx = a.$$

Agora, resolvendo a integral em y :

$$\int_b^c \frac{1}{y^2} dy = \left[-\frac{1}{y} \right]_b^c = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}.$$

Portanto, a área do retângulo na métrica hiperbólica é:

$$\text{Area}(R) = a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right).$$

Note que a $\text{Area}(R)$ muda conforme a posição do retângulo em \mathbb{H}^2 , um fato que difere totalmente do que ocorre no espaço euclidiano.

4.2.2 Área de uma Coroa Circular no Espaço Hiperbólico

Sejam $0 < r_1 < r_2$ e $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$. Consideramos a coroa circular no modelo do semiplano superior do espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 , definida em coordenadas polares por:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}.$$

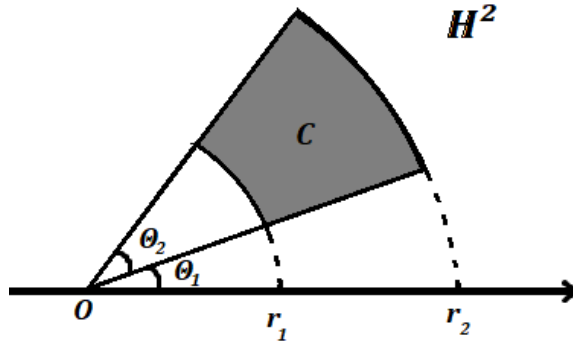


Figura 4.3: Representação da coroa circular no modelo do semiplano superior.

A métrica hiperbólica no modelo do semiplano superior \mathbb{H}^2 é dada por:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Assim, a área de C é dada pela integral:

$$\text{Area}(C) = \int_C \frac{dx dy}{y^2}.$$

Para calcular essa integral, utilizamos a parametrização:

$$X(r, \theta) = (x, y),$$

onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, com $r \in [r_1, r_2]$ e $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Os vetores tangentes são:

$$X_r = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$X_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta).$$

A matriz diferencial dX é:

$$(dX) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

O determinante dessa matriz é:

$$|\det(dX)| = r.$$

Como $y = r \sin \theta$ e temos $dx dy = |\det(dX)| dr d\theta = r dr d\theta$. Pelo Teorema da Mudança de Variáveis para integrais, temos:

$$\text{Area}(C) = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r}{r^2 \sin^2 \theta} d\theta dr = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r \sin^2 \theta} d\theta dr.$$

Resolvemos primeiro a integral em θ :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \csc^2 \theta d\theta = \cot \theta_1 - \cot \theta_2.$$

Agora, resolvemos a integral em r :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \ln r_2 - \ln r_1 = \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Multiplicando os resultados, obtemos a área da coroa circular:

$$\text{Area}(C) = \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) (\cot \theta_1 - \cot \theta_2).$$

Os resultados obtidos mostram como a métrica hiperbólica afeta as medidas de área em \mathbb{H}^2 , resultando em expressões distintas das do espaço euclidiano.

Bibliografia

- [1] Berger, M. *Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century*. University Lectures Series, American Mathematical Society, vol. 17, 2002.
- [2] Boyer, C. B.; Merzbach, U. C. *História da Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. (Tradução da edição original em inglês *A History of Mathematics*).
- [3] do Carmo, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [4] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. 5ª ed. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [5] Petersen, P. *Riemannian Geometry*. Springer, Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, 2016.
- [6] Riemann, B. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Habilitationsschrift, Göttingen, 1854. Publicado postumamente em *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 13, 1868.
- [7] Valle, M. E. *Mudança de Variável em Integrais Múltiplas – Aula 16*. Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2014. Disponível em <https://www.ime.unicamp.br/valle/Teaching/MA211/Aula16.pdf>