



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE AMORIM

**INTRODUÇÃO À TEORIA DE ENLAÇAMENTOS DE INTERVALOS
GENERALIZADOS NO DISCO: UM ESTUDO DE TEORIA DE TRANÇAS
ISOTÓPICAS E TRANÇAS HOMOTÓPICAS**

MACEIÓ
2024

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE AMORIM

Introdução à Teoria de Enlaçamentos de Intervalos Generalizados no Disco: um estudo de teoria de tranças isotópicas e tranças homotópicas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciando em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Maceió

2024

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB-4/661

A524i Amorim, Pedro Henrique Ferreira.

Introdução à teoria de enlaçamentos de intervalos generalizados no disco : um estudo de teoria de tranças isotópicas e tranças homotópicas / Pedro Henrique Ferreira de Amorim. – 2024.

57 f. : il.

. Orientadora: Juliana Roberta Theodoro de Lima.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 57.

1. Teoria das tranças. 2. Enlaçamentos de intervalos. 3. Tranças isotópicas. 4. Tranças homotópicas. I. Título.

CDU: 515.14



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.matl@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Informamos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Licenciatura que o Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE AMORIM**, matrícula nº 19110447, intitulado “Introdução à teoria de enlaçamentos de intervalos generalizados no disco: um estudo de teoria de tranças isotópicas e tranças homotópicas”, foi avaliado e recebeu da Banca Examinadora a seguinte média final: 8,50. Média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima (Orientadora): 8,50

Prof. Dr. Valter Victor Cerqueira Moitinho: 8,50

Prof. Dr. Gersica Valesca Lima de Freitas: 8,50

 Documento assinado digitalmente
JULIANA ROBERTA THEODORO DE LIMA
Data: 11/12/2024 12:57:56-0300
Verifique em <https://validar.j6.gov.br>

Maceió, 06 de dezembro de 2024.

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

 Documento assinado digitalmente
VALTER VICTOR CERQUEIRA MOITINHO
Data: 10/12/2024 23:50:45-0300
Verifique em <https://validar.j6.gov.br>

Prof. Dr. Valter Victor Cerqueira Moitinho

 Documento assinado digitalmente
GERSICA VALESKA LIMA DE FREITAS
Data: 10/12/2024 22:28:09-0300
Verifique em <https://validar.j6.gov.br>

Profa. Dra. Gersica Valesca Lima de Freitas

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE AMORIM

Introdução à Teoria de Enlaçamentos de Intervalos Generalizados no Disco: um estudo de teoria de tranças isotópicas e tranças homotópicas

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Instituto de Matemática para obtenção do grau de Licenciado em Matemática em Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL .

Data de Aprovação: 11/12/2024

Documento assinado digitalmente
 JULIANA ROBERTA THEODORO DE LIMA
Data: 11/12/2024 12:10:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima
Instituto de Matemática IM-UFAL
Orientadora

Documento assinado digitalmente
 VALTER VICTOR CERQUEIRA MOITINHO
Data: 10/12/2024 23:52:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Valter Victor Cerqueira Moitinho
Campus de Engenharia e Ciências Agrárias - CECA-UFAL

Documento assinado digitalmente
 GERSICA VALESCA LIMA DE FREITAS
Data: 10/12/2024 22:21:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Gersica Valesca Lima de Freitas
Instituto de Matemática (UFRPE)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima pela oportunidade de me orientar na construção de todo este trabalho, sempre com entusiasmo, alegria, acolhimento, amor, carinho e palavras motivadoras.

À minha família, em especial à minha mãe, que foi a responsável por me incentivar a sempre seguir pelo caminho da educação, com dedicação, esforço e muita persistência.

Também agradeço a todos os colegas e amigos que fui fazendo ao longo desse percurso, um com passagens temporárias e outros que levarei para sempre em meu coração, com trabalhos realizados, compartilhamentos de tensões antes das provas, conversas e muitas alegrias.

Todo este trabalho carrega um pouco dos colegas e também dos professores, que sempre serviram como exemplos para a minha formação.

"No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade."

Albert Einstein

RESUMO

Esse trabalho de conclusão de curso versa sobre os estudos dos artigos de Emil Artin (ARTIN, 1947) e de Deborah Goldsmith (GOLDSMITH, 2006), estudando os grupos de tranças no disco e o grupo de homotopia de tranças no disco; esse último mais formalmente chamado de enlaçamentos de intervalos generalizados no disco (LIMA, 2019), trazendo as abordagens geométricas e topologicamente algébricas dessas estruturas.

Para a abordagem geométrica da teoria de tranças e enlaçamentos, vide (MURASUGI; KURPITA, 2012); para a abordagem topológica algébrica, vide (LIMA, 2010).

Palavras-chave: Teoria das Tranças; Enlaçamentos de Intervalos; Tranças Isotópicas, Tranças Homotópicas.

ABSTRACT

In this work we study some papers about braids and homotopy braids made by (ARTIN, 1947) and (GOLDSMITH, 2006), respectively. More specifically, studying the braid groups over the disk and the homotopy braid groups over the disk; this last one formally called generalized string links over the disk in the way of (LIMA, 2019), bringing geometrical and algebraic topological approaches of both structures.

For geometrical approach of braids and generalized string links theories, see (MURASUGI; KURPITA, 2012); for algebraic topology approach, see (LIMA, 2010).

Palavras-chave: Braid Theory; Homotopy Braids; Isotopy Braids; Generalized String Links.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Cubo unitário	17
Figura 2 – 2-trança, 4-trança e enlaçamento de intervalo, respectivamente	18
Figura 3 – Os movimentos elementares Ω e Ω^{-1} , respectivamente.	19
Figura 4 – Os movimentos elementares no processo de deformação.	21
Figura 5 – Projeção "duvidosa" de uma trança à direita.	22
Figura 6 – Cruzamento por baixo e por cima na projeção da trança.	22
Figura 7 – Tranças conhecidas como "twists".	24
Figura 8 – Produto (concatenação) de duas tranças.	25
Figura 9 – Associatividade entre tranças.	26
Figura 10 – Produto (concatenação) de duas tranças e sua deformação final até a trança trivial.	27
Figura 11 – As tranças elementares σ_i e suas inversas σ_i^{-1} , $i = 1, \dots, n - 1$	28
Figura 12 – Caso particular $\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$	29
Figura 13 – A relação particular $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$	30
Figura 14 – Os geradores σ_i e seus inversos σ_i^{-1} de B_n , $i = 1, \dots, n - 1$	31
Figura 15 – Relação $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $ i - j \geq 2$, em B_n	31
Figura 16 – Relação $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, $i = 1, \dots, n - 2$, em B_n	31
Figura 17 – Enlaçamento de Intervalo Generalizado em 2-fios.	49
Figura 18 – Mudança de cruzamento em uma trança homotópica.	50
Figura 19 – Caso particular de auto-intersecção de um fio em $[t_{i,j}, t_{i,j}^h]$	51

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Ômega
β	Beta
ϵ	Epsilon
σ	Sigma
γ	Gama
α	Alfa
ρ	Rho
λ	Lambda
Δ/δ	Delta
ξ	Xi
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$ $	Tal que
$\cup$	União
$\cap$	Interseção
$\sim$	Equivalente
$\approx$	Não equivalente
$\Rightarrow$	Implica
$\neq$	Diferente
$\pm$	Mais ou menos
$\in$	Pertence
$\pi_1(D - \beta)$	Grupo Fundamental

SUMÁRIO

1	VISÃO GEOMÉTRICA DA TEORIA DE TRANÇAS NO DISCO	17
1.1	Definição de Tranças	17
1.2	Movimentos Elementares e Equivalência de Tranças	18
1.3	Projeção de Trança	21
1.4	Permutação de Tranças e Tranças Puras	23
1.5	Grupo de Tranças	24
1.6	Uma apresentação para o grupo de Artin	27
2	TEORIA DE TRANÇAS ISOTÓPICAS	36
2.1	Formalização da Equivalência de Tranças: a Isotopia	36
2.2	Palavras associadas a uma n-trança	39
2.3	Diversas Interpretações de Equivalência	44
3	TRANÇAS ISOTÓPICAS $\times$ TRANÇAS HOMOTÓPICAS .	49
3.1	Grupos de Enlaçamentos de Intervalos Generalizados	49
3.2	Isotopia $\times$ Homotopia	51
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
	REFERÊNCIAS	57

Introdução à Teoria de Tranças e Tranças Homotópicas

As estruturas de tranças são casos particulares de nós e links. Contudo, tais estruturas possuem um protagonismo só delas, tendo uma área que estuda grupos de tranças (no disco ou em superfícies) separadamente das teorias mencionadas.

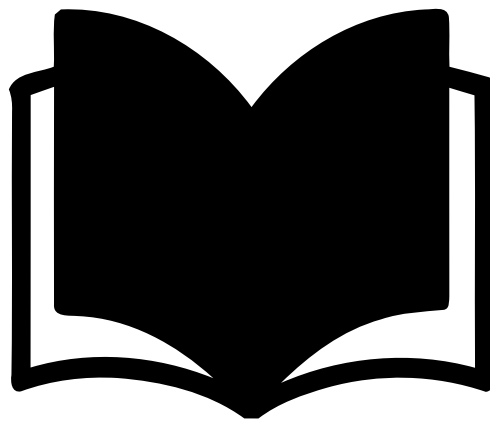
Em 1925, Emil Artin, considerado o pai da teoria de tranças em superfícies descreveu formal e explicitamente a estrutura dos *Grupos de Tranças no Disco* ou *Grupos de Tranças de Artin*. Porém, foi só em (ARTIN, 1947) que esse trabalho foi realmente disseminado cientificamente no mundo, quando Artin se mudou obrigatoriamente da Alemanha para os EUA durante a Segunda Guerra mundial, já que sua esposa era judia. Esse trabalho descreve em detalhes toda a estrutura das tranças como um grupo quociente com relação de equivalência de isotopia, munido com a operação concatenação (produto de tranças). Além disso, Artin demonstra dois resultados hercúleos para a teoria de tranças no disco: os *Teoremas da Apresentação e Representação de Grupos de Tranças no Disco*. Os resultados demonstrados por Artin são estudados até hoje para tranças e generalizações de tranças no disco e em superfícies que continuam em aberto até hoje.

O Teorema da Apresentação de Artin nos oferece o grupo de tranças no disco, a saber, B_n , através de uma apresentação finitamente gerada composta por seus geradores e relações. Já o Teorema da Representação de Artin aborda B_n como um subgrupo do Grupo dos autormorfismo entre Grupos Livres com n geradores, satisfazendo certas propriedades. No final do artigo, Artin deixa algumas perguntas particulares sobre tranças:

- O que acontece com a boa definição de tranças quando se considera o conjunto das tranças de n fios quocientado por *homotopia* (tais estruturas são conhecidas como *tranças homotópicas ou enlaçamentos de intervalos no disco*).
- As tranças homotópicas possuem uma estrutura bem definida de grupo algébrico?
- Quais as diferenças, caso existam, entre o grupo de tranças e o grupo de tranças homotópicas?

Essas respostas foram dadas por Deborah Goldsmith em (GOLDSMITH, 2006). Goldsmith descreveu a estrutura de grupos para tranças homotópicas e encontrou uma apresentação finitamente gerada para o grupo de tranças homotópicas, a saber, $\hat{B}_n$, mostrando também que os grupos de tranças no disco e o grupo de tranças homotópicas no disco não coincidem.

Esse trabalho de conclusão de curso é composto pelos seguintes capítulos: o primeiro capítulo nos oferece uma abordagem geométrica dos grupos de tranças no disco; o segundo capítulo versa sobre a formalização dos grupos de tranças no disco como estruturas da topologia algébrica; o terceiro capítulo introduz a teoria de tranças homotópicas (enlaçamentos de intervalos generalizados no disco) e comparações com as tranças isotópicas de Artin; por fim, o capítulo 4 fará considerações finais a respeito do trabalho realizado entre o aluno e a orientadora e os encaminhamentos futuros.



Capítulo 1: Visão Geométrica da Teoria de Tranças no Disco

1 Visão Geométrica da Teoria de Tranças no Disco

As tranças e os nós são objetos extremamente conhecidos e utilizados no dia a dia das pessoas, sendo utilizadas como cordas, embutidas em cabelo e até alimentos. Além disso, as tranças têm um viés cultural em muitos povos diferentes.

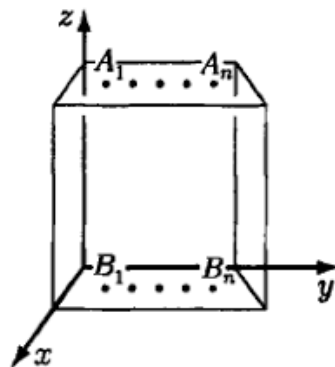
Neste trabalho, o objetivo é estudar as tranças do ponto de vista matemático, formalizando conceitos e resultados.

O estudo das propriedades matemáticas das tranças foi realizado pelo matemático alemão Emil Artin (1898-1962). Portanto, temos as tranças claramente como algum tipo de objeto geométrico, sendo esta confeccionada de diversas formas. Contudo, para os fins matemático deste estudo, o material que a trança é tecida não importa.

1.1 DEFINIÇÃO DE TRANÇAS

Definição 1 (Trança Geométrica de n fios). *Seja D um cubo unitário, então $D = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$. Coloque na face superior do cubo n pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$, e da mesma forma na face inferior temos n pontos $B_1, B_2, \dots, B_n$. Como mostra a Figura 1.*

Figura 1 – Cubo unitário

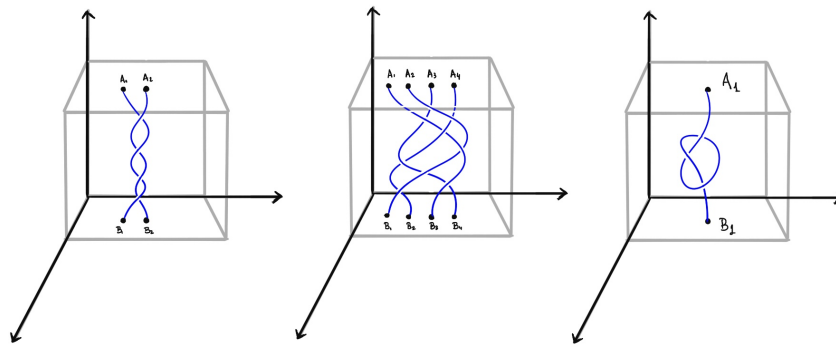


Fonte: A study of Braids (MURASUGI; KURPITA, 2012).

Por conveniência, vamos definir $A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1), A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 1), \dots, A_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1)$, e também $B_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0), B_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 0), \dots, B_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0)$. Agora una os pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$ com os pontos $B_1, B_2, \dots, B_n$ por meio de n segmentos poligonais/arcos $d_1, d_2, \dots, d_n$. Entretanto, estes arcos devem satisfazer as três condições seguintes:

- (1) $d_1, d_2, \dots, d_n$ são mutuamente disjuntos.
- (2) Cada d_i conecta algum A_j a algum B_k , onde j e k podem ou não ser iguais. Mas não é permitido conectar A_j ao ponto A_k (ou B_j a B_k).
- (3) Cada plano de nível $z = s$, tal que $0 \leq s \leq 1$, intercepta cada arco d_i em um e apenas um ponto.

Figura 2 – 2-trança, 4-trança e enlaçamento de intervalo, respectivamente



Fonte: Autores.

A configuração acima de n arcos $d_1, \dots, d_n$ é chamada de n -trança ou trança com n cordas. Pela condição 3 dada acima, e pela construção da definição 1, temos que as cordas d_i fluem monotonicamente de cima para baixo. As Figuras 2(a) e 2(b) são exemplos de 2-tranças e 4-tranças, respectivamente. Já 2(c) é um caso que no momento não pode ocorrer para este tipo de n -trança. Mas adiante, iremos dissertar sobre a condição da Figura 2(c) dada acima, permitindo que as cordas possam "subir" em certos momentos, ou seja, quando permitimos uma liberdade maior para o movimento das tranças, que é formalmente desconsiderar a condição 3 da definição de tranças geométricas de n fios dada acima.

1.2 MOVIMENTOS ELEMENTARES E EQUIVALÊNCIA DE TRANÇAS

Como dito anteriormente, para os fins deste trabalho, não importa o material que compõe a trança, o que nos importa é a maneira que movemos as cordas para formar as tranças. Abaixo, segue uma definição de movimento elementar.

Definição 2 (Movimento Elementar). *Suponha D um cubo unitário com os números de cordas como na Definição 1. Seja AB uma aresta da corda d_i e C um ponto em D , tal que o triângulo $\triangle ABC$ não cruza nenhuma outra corda e apenas encontra d_i ao longo de AB . Além disso;*

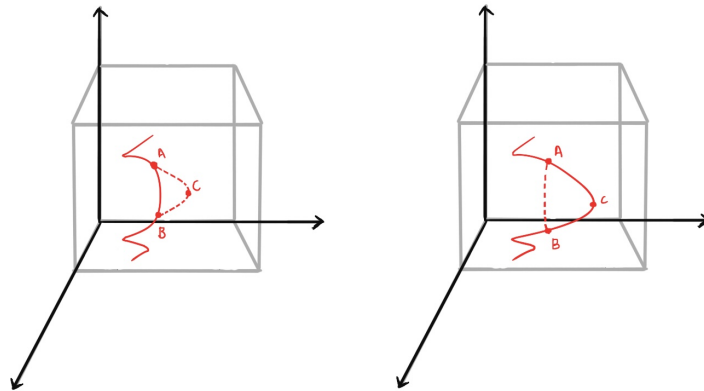
- (1) $AC \cup CB$ intercepta cada plano de nível s , com $0 \leq s \leq 1$ em no máximo um ponto.

Denotaremos a seguinte operação por Ω ;

- (2) Substitua AB pela as duas arestas $AC \cup CB$.

A operação inversa de Ω será denotada por Ω^{-1} .

Figura 3 – Os movimentos elementares Ω e Ω^{-1} , respectivamente.



Fonte: Autores.

As condições 1 e 2 da Definição 2 garante que durante a realização de qualquer sequência de movimento elementar (Ω ou Ω^{-1}) a n -trança nunca deixe de ser uma n -trança. E pelo exposto, temos que duas n -tranças são essencialmente iguais ou equivalentes se, por uma sequência de movimentos elementares finitos, as suas diferenças puderem ser removidas de maneira razoavelmente direta, por exemplo, sem cortar as cordas.

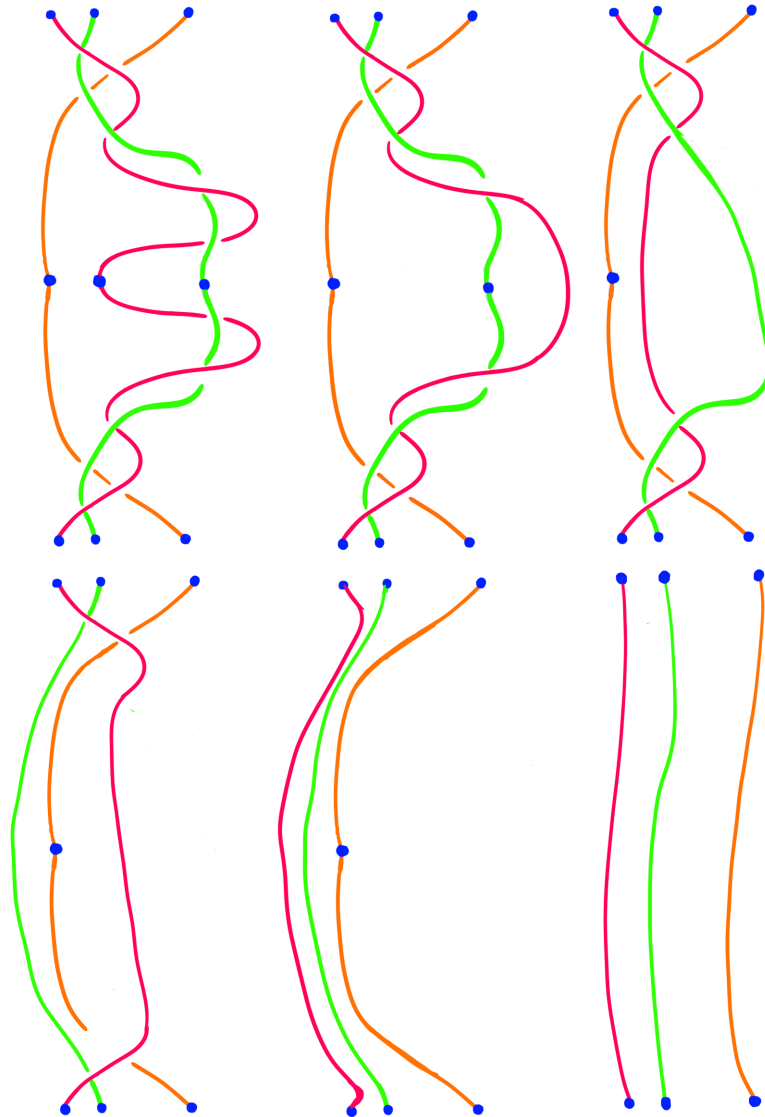
Definição 3 (Equivalência de Tranças). *Uma n -trança β é equivalente a uma n -trança β' , e denotada como $\beta \sim \beta'$, se β pode ser transformado/deformado em β' aplicando, a partir de β , uma série finita de movimentos elementares dentro do cubo D .*

Satisfazendo as condições acima teremos duas n -tranças que são visualmente diferentes a primeira vista, mas que contém propriedades iguais, ou seja, são equivalentes. Podemos ver a definição acima como a seguinte série finita de movimentos elementares:

$$\beta = \beta_0 \rightarrow^{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \rightarrow^{\Omega^{\pm 1}} \dots \rightarrow^{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta'$$

onde para $i = 1, 2, \dots, m$ a n -trança β_i é obtida a partir da n -trança β_{i-1} aplicando Ω ou Ω^{-1} . De forma mais intuitiva, o movimento elementar nos permite esticar/encolher as cordas da trança em alguma vizinhança. E no contexto matemático da teoria das tranças, sendo essas equivalentes, podemos tratá-las como sendo a mesma trança.

Figura 4 – Os movimentos elementares no processo de deformação.

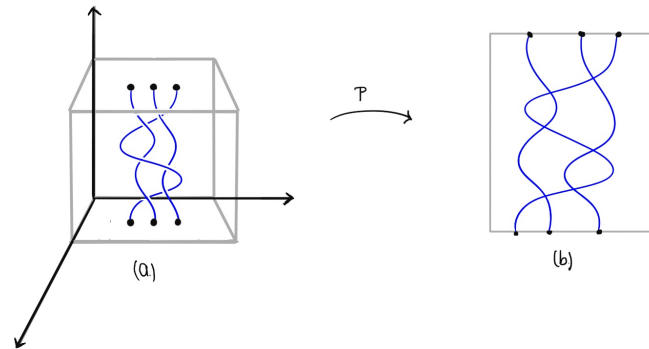


Fonte: Autores.

1.3 PROJEÇÃO DE TRANÇA

Como veremos mais adiante neste trabalho, as tranças ficarão mais complexas, dificultando a sua representação. Como forma de superar esta dificuldade iremos sair do plano tridimensional para o plano bidimensional fazendo uso de projeção. A projeção de uma n -trança β será denotada por $p(\beta)$.

Figura 5 – Projeção "duvidosa" de uma trança à direita.



Fonte: Autores

Contudo, esta representação no plano bidimensional também traz uma outra dificuldade que pode ser chamada de ponto duplo, ou seja, não é possível determinar qual corda está passando por cima ou por baixo da outra, como mostra a figura 5(b). Esse engano visual é superado "cortando" perto de um ponto duplo um pequeno pedaço de cada lado de uma das cordas, veja a figura 6. Assim, conseguimos deixar explícito os cruzamentos "por baixo" ou "por cima" na projeção, sem perder propriedades essenciais da estrutura das tranças.

Figura 6 – Cruzamento por baixo e por cima na projeção da trança.



Fonte: Autores.

Uma projeção que foi alterada, como acima, será chamada de diagrama regular. Os diagramas se tornam muito úteis, pois auxiliam a entender e investigar as propriedades e natureza de uma trança ou de um conjunto de tranças com maior facilidade visual.

1.4 PERMUTAÇÃO DE TRANÇAS E TRANÇAS PURAS

Pela Definição 3, duas n -tranças β e β' serão equivalentes se por uma série finita de movimentos elementares, β puder ser transformada/deformada em β' . Porém, isto não garante que dadas duas n -tranças, elas sejam equivalentes. Dessa forma, encontraremos invariantes de tranças, ou seja, algo que pode atribuir "valor" as n -tranças. Com isto, o invariante consegue trazer o rigor matemático desejado para comprovar a equivalência ou não de duas n -tranças.

Logo, seja f um mapeamento de um conjunto de todas as n -tranças para algum objeto algébrico que possa ser calculado. Se f tem a seguinte propriedade,

$$\beta \sim \beta' \Rightarrow f(\beta) = f(\beta') \quad (1)$$

então f é um invariante de trança. Contudo, a relação (1) não necessariamente tem natureza recíproca. Entretanto, é fato que se $f(\beta) \neq f(\beta')$ temos que β não é equivalente a β' , logo $\beta \not\sim \beta'$.

Exemplo 1. *Seja β uma n -trança e suponha que cada i -ésima corda d_i de β une A_i em $B_{j(i)}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Defina $f : B_n \rightarrow S_n$ (B_n sendo o conjunto de todas as n -tranças e S_n o conjunto de todas as permutações em $\{1, 2, \dots, n\}$) como,*

$$f(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j(1) & j(2) & \dots & j(n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

então f é um invariante de trança. De fato, se $\beta \sim \beta'$, então para cada i a i -ésima corda em cada n -trança deve ter o mesmo ponto inferior $B_{j(i)}$. Portanto, elas têm a mesma permutação, logo, $f(\beta) = f(\beta')$. Caso tivéssemos o invariante de trança diferente, ou seja, $f(\beta) \neq f(\beta')$ significaria que as cordas têm pontos inferiores diferentes em β e β' , e assim $\beta \not\sim \beta'$. Usualmente, as permutações são denotadas por $\pi(\beta)$ ou π_β .

O caso em que uma n -trança β tem a seguinte permutação identidade

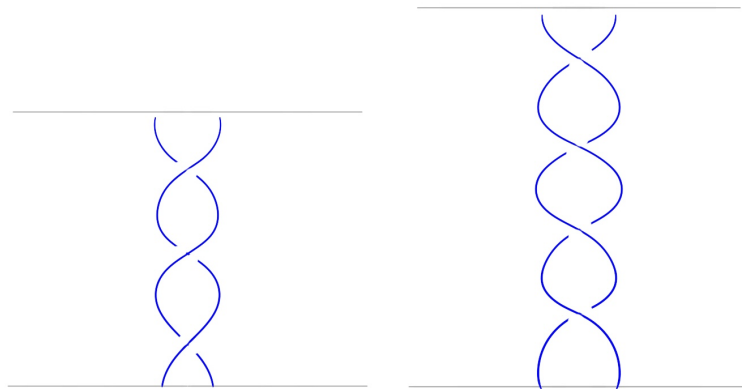
$$f(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (3)$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$ a i -ésima corda sempre une A_i em B_i , então β será denominada uma n -trança pura. As permutações são casos simples de invariantes de tranças.

1.5 GRUPO DE TRANÇAS

Antes de chegarmos na construção do grupo de tranças, temos a seguinte questão: quantas tranças diferentes existem para cada n ? Sendo B_n o conjunto de todas as n -tranças não equivalentes, ou diferentes, segue que para $n \geq 2$ temos infinitas tranças não equivalentes. Isto se dar pelo número de torções, pois temos 2-tranças de duas formas.

Figura 7 – Tranças conhecidas como "twists".



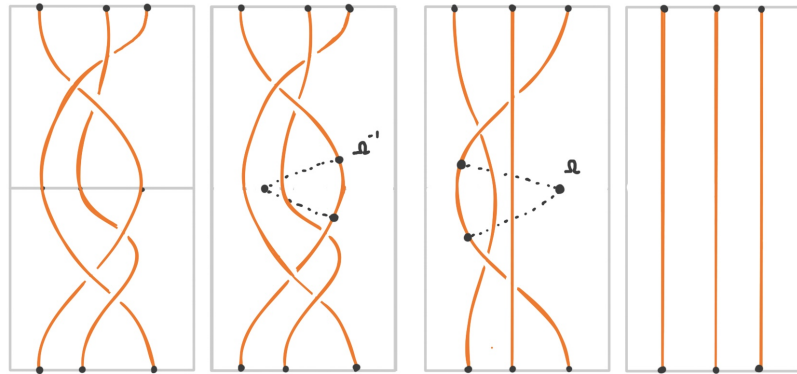
Fonte: Autores.

Sendo p e q o número de torções de duas 2-tranças, com $p, q \geq 1$ e $p \neq q$ tem-se que as tranças não são equivalentes. Diante disso, introduziremos o conceito de grupo de tranças, ou grupo de tranças de Artin, como forma de comprovar a afirmação realizada acima. Para isto, iremos introduzir a operação de produto de tranças que segue abaixo.

Definição 4 (Produto de tranças). *Suponha que β_1 e β_2 sejam duas n -tranças em B_n (o conjunto de todas as n -tranças). Dessa forma, podemos realizar um produto e criar uma terceira n -trança a partir delas, que representaremos por $\beta_1\beta_2$.*

O produto de duas n -tranças β_1 e β_2 é realizado unindo os pontos do plano inferior de β_1 com os pontos do plano superior de β_2 . Dessa forma, basta então remover os planos que foram unidos e formaremos uma terceira n -trança $\beta_1\beta_2$. Na figura abaixo iniciamos unindo o plano inferior e o plano superior de duas 3-tranças, em seguida removemos os planos que foram unidos e por fim obtemos uma terceira n -trança.

Figura 8 – Produto (concatenação) de duas tranças.



Fonte: Autores.

Proposição 1.1. *Suponha que $\beta, \beta', \bar{\beta}, \bar{\beta}'$ são n -tranças tal que $\beta \sim \beta'$ e $\bar{\beta} \sim \bar{\beta}'$. Então temos que $\beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$.*

Demonstração. A prova segue de forma simples, basta observar as equivalências em torno dos movimentos elementares. Isto é;

$$\beta \sim \beta' \Rightarrow \beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}$$

e também

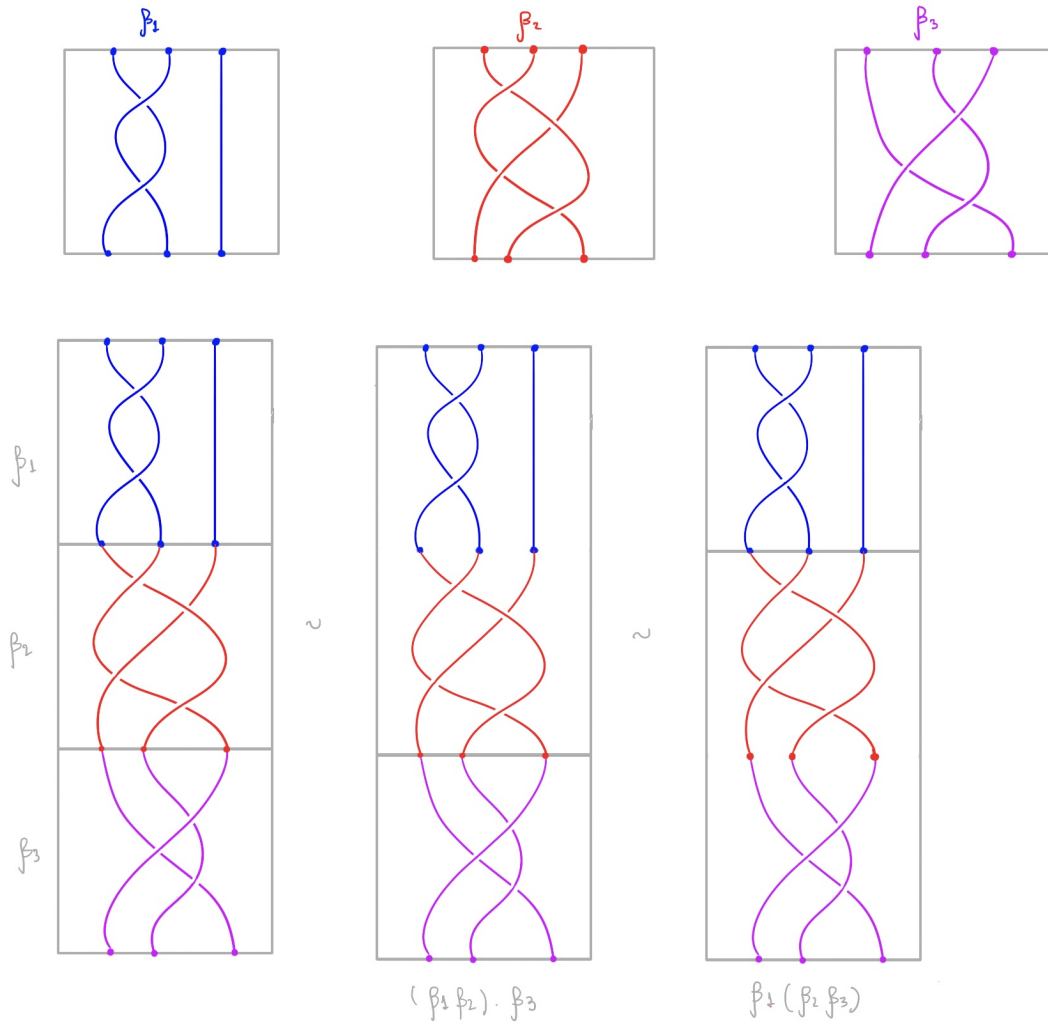
$$\bar{\beta} \sim \bar{\beta}' \Rightarrow \beta'\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$$

dessa forma, concluímos por transitividade que $\beta\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta} \sim \beta'\bar{\beta}'$. □

Proposição 1.2. *O produto de n -tranças dado na Definição 4 é associativo, ou seja, $\beta_1(\beta_2\beta_3) \sim (\beta_1\beta_2)\beta_3$.*

Demonstração. Note que a ordem dos fatores não são alterados, apenas a ordem de montagem, e isto acaba por não alterar o resultado do produto. Podemos observar isto na figura abaixo que serve como uma prova diagramática.

Figura 9 – Associatividade entre tranças.



Fonte: Autores.

Contudo, não podemos afirmar a comutatividade do produto de n -tranças, pois a ordem dos fatores importa e podem alterar o resultado final.

Proposição 1.3. *Seja e uma n -trança identidade (ou trivial), isto é, une os pontos A_i aos pontos B_i para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Então para cada n -trança β temos*

$$\beta e \sim \beta \text{ e } \beta \sim \beta e$$

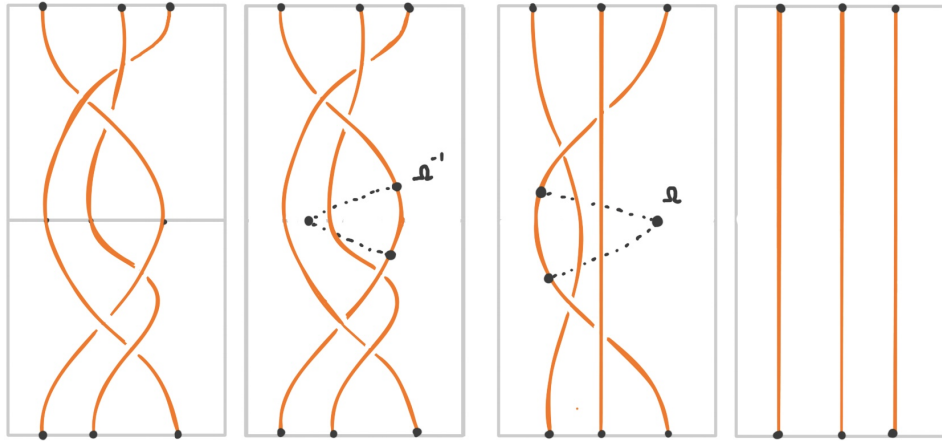
Demonstração. A proposição acima diz que ao realizarmos o produto βe as cordas de β são simplesmente esticadas por e . Dessa forma, podemos facilmente por movimentos elementares obter $\beta e \sim \beta$ e também $\beta \sim \beta e$. A n -trança trivial e também é denotada por 1_n . □

Proposição 1.4. Para cada n -trança β , existe uma n -trança $\bar{\beta}$ tal que

$$\beta\bar{\beta} \sim 1_n \text{ e } \bar{\beta}\beta \sim 1_n$$

Demonstração. Podemos construir esta nova n -trança $\bar{\beta}$ a partir de um espelhamento de uma n -trança β , isto é, o plano inferior de β se torna o plano superior de $\bar{\beta}$. Dessa forma, o plano atua como um espelho, portanto, tudo que é realizado em β acaba por ser desfeito em $\bar{\beta}$, que por movimentos elementares obtemos a equivalência do produto $\beta\bar{\beta}$ ou $\bar{\beta}\beta$ com 1_n . Portanto, obtemos uma n -trança inversa.

Figura 10 – Produto (concatenação) de duas tranças e sua deformação final até a trança trivial.



Fonte: Autores.

□

Teorema 1 (Grupo de Tranças). O conjunto de classes de equivalência de n -tranças B_n , forma um grupo. Este grupo pode ser chamado de grupo de n -tranças ou grupo de n -tranças de Artin.

Demonstração. A operação do grupo é o produto dado pela Definição 4. Já a associatividade é dado na Proposição 1.2; elemento neutro 1_n é dado pela Proposição 1.3 e o elemento inverso de $[\beta]$ é dado pela Proposição 1.4, sendo denotado por $[\beta^{-1}]$ ou $[\beta]^{-1}$. □

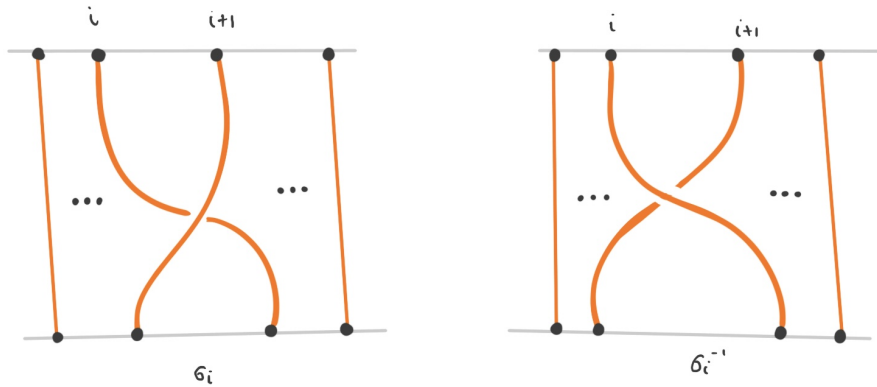
1.6 UMA APRESENTAÇÃO PARA O GRUPO DE ARTIN

Nosso objetivo nesta seção é definir uma apresentação algébrica para o grupo de n -tranças, ou grupo de Artin. Primeiramente vamos olhar a projeção de uma n -trança.

Podemos particionar uma projeção de uma n -trança usando os planos de níveis, de forma que cada dois planos de níveis consecutivos haja apenas um ponto duplo e as outras cordas sigam verticalmente para baixo. Para satisfazer a condição acima, podemos aplicar movimentos elementares. Note que as cordas em cada plano de nível também configura uma n -trança. Tem-se que para uma n -trança existem $2n - 2$ possíveis n -tranças, podendo este conjunto ser dividido em dois conjuntos, cada um contendo $n - 1$ tranças.

Cada plano de nível, que também configura uma n -trança, é representado por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. O segundo conjunto de $n - 1$ tranças é formado trocando as informações de cruzamentos, sejam eles cruzamentos por cima (*Crossing over*) ou cruzamentos por baixo (*Crossing under*). Dessa forma, denotaremos o segundo conjunto como $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$. Portanto, o segundo conjunto é exatamente o inverso de cada elemento do primeiro conjunto.

Figura 11 – As tranças elementares σ_i e suas inversas σ_i^{-1} , $i = 1, \dots, n - 1$.



Fonte: Autores.

O conjunto $\{\sigma_i^{\pm 1}\}$ com $i = 1, 2, \dots, n - 1$ tem grande importância no estudo das n -tranças. Como foi dito acima, podemos usar os planos de níveis para realizarmos partições de uma n -trança, em que cada plano de nível consecutivo haja apenas um ponto duplo. Diante do exposto, segue a seguinte proposição.

Proposição 1.5. *Qualquer n -trança β (em B_n) pode ser escrita como um produto de elementos do conjunto $\{\sigma_i^{\pm 1}\}$ com $i = 1, 2, \dots, n - 1$, isto é*

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$$

com $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n - 1$ e $\epsilon_i = +1$ ou -1 para $i = 1, 2, \dots, k$.

Demonstração. Ao particionar uma projeção de uma n -trança β usando os planos de níveis $\sigma_i^{\pm 1}$ obteremos uma sequência finita de elementos $\sigma_i^{\pm 1}$. Pela Proposição 1.2 temos que o produto de n -tranças é associativo, como cada plano de nível $\sigma_i^{\pm 1}$ também é uma n -trança, o seu resultado será a n -trança inicial β , o que comprova a proposição em questão. Pois cada plano de nível também configura uma n -trança e além disso o seu produto apresenta perfeitamente como segue a montagem/construção de uma n -trança β composta pelo produto de elementos do conjunto $\{\sigma_i^{\pm 1}\}$. $\square$

Para prosseguirmos, vamos esclarecer algumas notações. Temos que σ_i^{+1} será igual a σ_i e também que $\sigma_i^0 = 1_n$, sendo 1_n uma n -trança identidade. Por fim, temos que o produto m -vezes de σ_i será denotado por σ_i^m , já para σ_i^{-1} teremos σ_i^{-m} . Desse modo, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ formam um conjunto de geradores do grupo B_n de n -tranças.

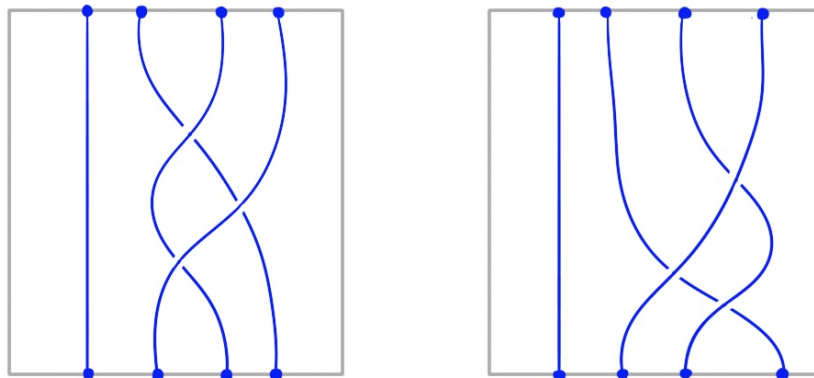
Para obtermos uma apresentação para B_n , além dos geradores dados acima, temos que encontrar um conjunto de relações definidoras. No caso, temos a seguinte relação em B_3

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \quad \text{ou} \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = 1_3. \quad (4)$$

Na verdade, para B_n com $n \geq 4$ a relação seguinte também é válida

$$\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3 \quad \text{ou} \quad \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1} = 1_n. \quad (5)$$

Figura 12 – Caso particular $\sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$.



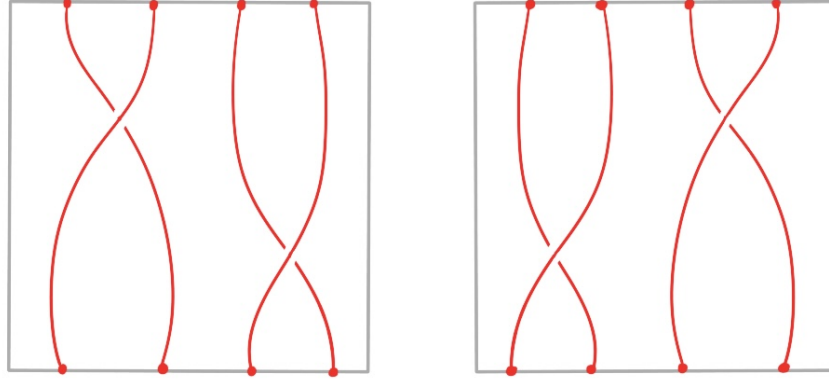
Fonte: Autores.

Ao realizarmos a continuação deste processo, podemos enxergar que em B_n para $n > 2$ as seguintes relações são válidas

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (6)$$

Como forma de compreendermos melhor esta relação, considere, em B_4 , o produto $\sigma_1 \sigma_3$ como mostra a figura abaixo. Por movimentos elementares conseguimos mostrar que o produto é igual a $\sigma_3 \sigma_1$.

Figura 13 – A relação particular $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$.



Fonte: Autores.

Generalizando isto, temos em B_n o seguinte conjunto de relações,

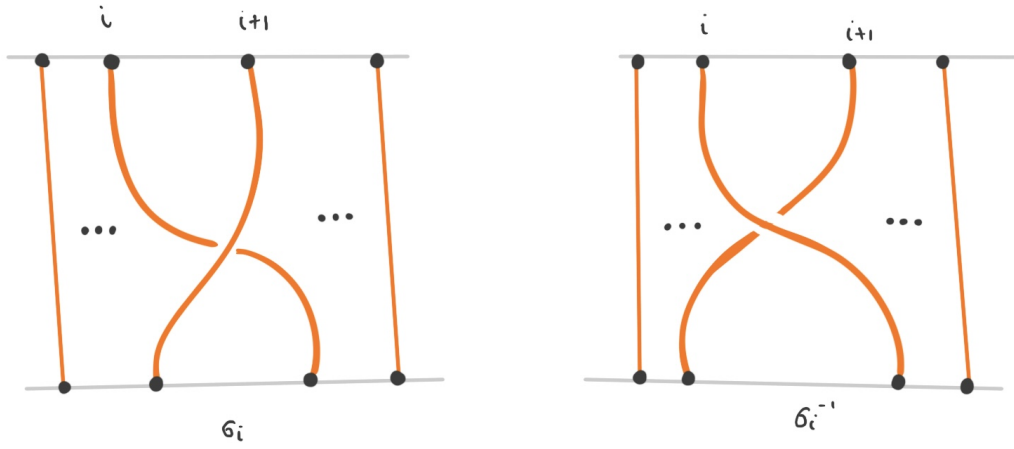
$$\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i \quad \text{para } i, k = 1, 2, \dots, n-1 \text{ e } |i - k| \geq 2. \quad (7)$$

Esta relação entre produtos $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$ estabelecida pode ser melhor compreendida de forma geométrica, pois o que basicamente está acontecendo é que estamos simplesmente mudando o ponto duplo de cada plano de nível de posição e esta mudança pode ser contornada por uma série finita de movimentos elementares. Isto é facilmente percebido na figura acima. Além disso, qualquer outra relação é consequência das relações em (6) e (7).

Teorema 2. (ARTIN, 1947) Para $n \geq 1$ o grupo de n -tranças B_n tem a seguinte apresentação,

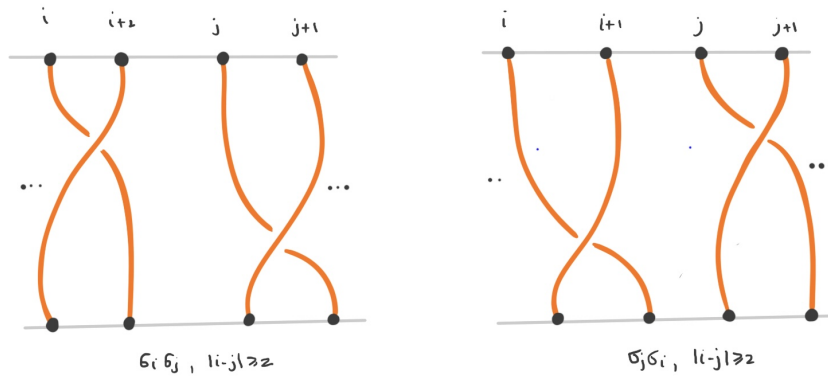
$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ para } 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ e } j - i \geq 2 \end{array} \rangle \quad (8)$$

Figura 14 – Os geradores σ_i e seus inversos σ_i^{-1} de B_n , $i = 1, \dots, n-1$.



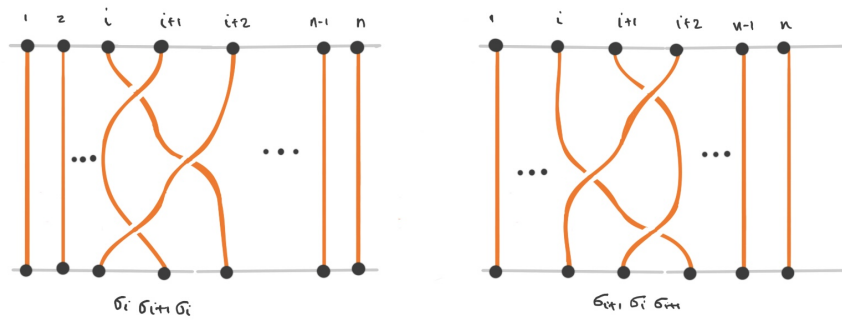
Fonte: Autores.

Figura 15 – Relação $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $|i - j| \geq 2$, em B_n .



Fonte: Autores.

Figura 16 – Relação $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-2$, em B_n .



Fonte: Autores.

Ideia da prova: Ao realizar a prova da afirmação de que qualquer outra relação é consequência das relações do teorema acima, também estaremos dando uma prova do mesmo. Inicialmente iremos definir um grupo G estritamente abstrato com a seguinte apresentação,

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \mid \begin{array}{l} x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2 \\ x_i x_j = x_j x_i \text{ para } 1 \leq i < j \leq n-1 \text{ e } j-i \geq 2 \end{array} \rangle \quad (9)$$

Logo, pela própria apresentação de G , para provar a afirmação, precisamos estabelecer um isomorfismo entre os grupos G e B_n , isto é, a correspondência natural entre $x_i \mapsto \sigma_i$, para $i = 1, 2, \dots, n-1$ na verdade é um isomorfismo de grupo.

Demonstração. Iremos definir um mapeamento $f : G \longrightarrow B_n$ e seja $W = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ um elemento arbitrário de G , portanto segue a correspondência natural

$$f(W) = f(x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}) = [\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}] \in B_n. \quad (10)$$

Logo, devemos mostrar que o mapeamento é um isomorfismo de grupo. O primeiro passo é mostrar que o mapeamento f é um homomorfismo de G para B_n . Por *Study of Braids de Murasugi e Kurpita* Teorema 4.3 no apêndice I, basta mostrarmos que f mapeia toda relação definidora de G com o elemento identidade de B_n . Sem dificuldades, segue que

$$f(x_k x_l x_k^{-1} x_l^{-1}) = [\sigma_k \sigma_l \sigma_k^{-1} \sigma_l^{-1}] = [1_n], \text{ para } |k-l| \geq 2$$

e

$$f(x_i x_{i+1} x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}^{-1}) = [\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}] = [1_n].$$

Dando continuidade, mostraremos que o homomorfismo é sobrejetor e injetor. Primeiro, f é sobrejetor. Seja β um elemento arbitrário em B_n , e que pela proposição 1.5 pode ser escrito como

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k},$$

com $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n-1$ e $\epsilon_i = \pm 1$. Agora, tomando um elemento $W = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ em G , por definição temos

$$f(W) = f(x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}) = [\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}] = [\beta].$$

Portanto, f é sobrejetiva.

Por fim, suponha que em G existam dois elementos g e g' tais que $f(g) = f(g')$. Escrevendo $g = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ e $g' = x_{j_1}^{m_1} x_{j_2}^{m_2} \dots x_{j_l}^{m_l}$, e sejam $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ e $\beta' =$

$\sigma_{j_1}^{m_1} \sigma_{j_2}^{m_2} \dots \sigma_{j_l}^{m_l}$. Dessa forma, pela suposição de que $f(g) = f(g')$ precisamos mostrar que $g = g'$ como elementos de G .

$$\begin{aligned} f(g) &= f(g') \\ f(x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}) &= f(x_{j_1}^{m_1} x_{j_2}^{m_2} \dots x_{j_l}^{m_l}) \\ [\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}] &= [\sigma_{j_1}^{m_1} \sigma_{j_2}^{m_2} \dots \sigma_{j_l}^{m_l}] \\ [\beta] &= [\beta'] \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $g = g'$. Caso $g \neq g'$, teríamos cruzamentos diferentes nos planos de níveis tais que estas dificuldades não seriam superadas por movimentos elementares, gerando assim $f(g) \neq f(g')$ e também $\beta \not\sim \beta'$. $\square$

Com isto, chegamos a uma apresentação para o grupo de n -tranças de Artin, esta apresentação estando bem estruturada e dada em função de σ_i com $i = 1, 2, \dots, n-1$, que podem ser chamados de geradores de Artin.

Até o momento mostramos que o conjunto de tranças forma um grupo no sentido algébrico de forma natural. E como avanço de estudo, as propriedades algébricas dos grupos são muito importantes, de fato, pois muitas propriedades de tranças são derivadas do grupo de tranças. Diante disso, temos um resultado de invariante de trança significativo que depende de uma estrutura do grupo de tranças.

Proposição 1.6. *Seja β uma n -trança, então podemos escrevê-la como $\beta = \sigma_1^{\epsilon_1} \sigma_2^{\epsilon_2} \dots \sigma_k^{\epsilon_k}$, onde $\epsilon_k = \pm 1$. Vamos definir a soma dos expoentes de β (em termos de σ_i), denotado por $\exp(\beta)$, como*

$$\exp(\beta) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_k. \quad (11)$$

Então, $\exp(\beta)$ é um invariante do grupo de trança, ou seja,

$$\beta_1 \sim \beta_2 \Rightarrow \exp(\beta_1) = \exp(\beta_2). \quad (12)$$

Demonstração. Como $\beta_1 \sim \beta_2$, podemos ter a seguinte sequência finita

$$\beta_1 = \gamma_0 \longrightarrow \gamma_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \gamma_m = \beta_2,$$

onde γ_i são palavras em $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ e γ_{i+1} é obtido a partir de γ_i , para $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, inserindo ou excluindo uma palavra da forma $uR^{\pm 1}u^{-1}$, onde R é uma das relações definidoras do grupo de n -tranças B_n . Como $\exp(R) = 0$, segue-se que

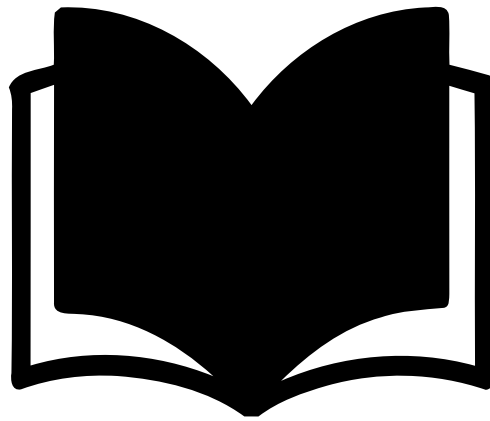
$$\exp(\gamma_i) = \exp(\gamma_{i+1}) \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Por isso,

$$\exp(\beta_1) = \exp(\gamma_0) = \exp(\gamma_m) = \exp(\beta_2).$$

□

O invariante determinado acima nos permite verificar de forma simples se duas tranças não são equivalentes. Por exemplo, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ não é equivalente a $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$, pois $\exp(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = 3$ e $\exp(\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}) = 1$. Por isto, a soma dos expoentes como invariante de trança é um resultado útil e significativo.



Capítulo 2: Teoria de Tranças (Isotópicas)

2 Teoria de Tranças Isotópicas

2.1 FORMALIZAÇÃO DA EQUIVALÊNCIA DE TRANÇAS: A ISOTOPIA

Como foi visto anteriormente, tínhamos que duas n -tranças eram equivalentes se uma pudesse ser deformada na outra puxando, encurtando ou qualquer outro movimento que não provocasse uma quebra na definição da n -trança, sendo ela uma n -trança em cada passo da deformação através de seus movimentos elementares e seus inversos. Tudo isto acontecendo dentro de um espaço ambiente, que no caso é o cubo unitário $D = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$.

Contudo, vamos introduzir o uso formal do conceito de isotopia (ou isotopia ambiente), além da abordagem intuitiva realizada que foi abordada no capítulo anterior, em ordem de termos uma base matemática mais sólida.

Para detalhes mais concretos, vide (HANSEN, 1989) e (LIMA, 2010).

Definição 5. *Sejam β e β' duas n -tranças em um cubo D . Dizemos que β é ambiente isotópico para β' , denotado por $\beta \approx \beta'$, se existir um homeomorfismo*

$$H : D \times [0, 1] \longrightarrow D \times [0, 1],$$

que, para $x \in D$ e $0 \leq t \leq 1$, tem a forma

$$H(x, t) = (h_t(x), t), \tag{13}$$

e a família de homeomorfismos $\{h_t, 0 \leq t \leq 1\}$, com $h_t : D \longrightarrow D$ satisfaz:

(1) Em ∂D (o limite de D), para $0 \leq t \leq 1$, o homeomorfismo h_t é a identidade, ou seja, $h_t|_{\partial D} = id$.

(2) $h_0 = id$ e $h_1(\beta) = \beta'$.

O homeomorfismo H é chamado de isotopia ou isotopia ambiente.

Nesta definição, podemos tomar t como uma medida de tempo, e então enxergar h_t como sendo uma deformação que ocorre no interior do cubo D que começa em $t = 0$ e gradualmente deforma β , que em $t = 1$ transforma totalmente β em β' . Mas durante o período de movimento, β e seu espaço ambiente, no caso o cubo D , se deformam de forma contínua.

Em geral, temos que em um determinado momento t , para $0 < t < 1$, $h_t(\beta)$ não precisa ser uma n -trança, ou seja, é possível que $h_t(\beta)$ intersepta mais de n pontos do plano de nível E_s em D , com $0 \leq s \leq 1$. Isto é, as cordas não seguem monotonicamente

para baixo, em algum momento elas podem subir. Mas tendo em mente que as cordas de $h_t(\beta)$ nunca podem se intersectar. Dessa forma, para remover a possibilidade de interseção com algum plano de nível E_s , em mais de n pontos, adicionamos uma terceira condição a Definição 5;

(3) Para $0 \leq t \leq 1$, h_t é sempre uma n -trança no cubo D.

Com este reforço na definição, tem-se que H é chamada agora de isotopia forte ou s-isotopia, e β é considerado s-isotópico para β' e denotado por $\beta \sim^s \beta'$.

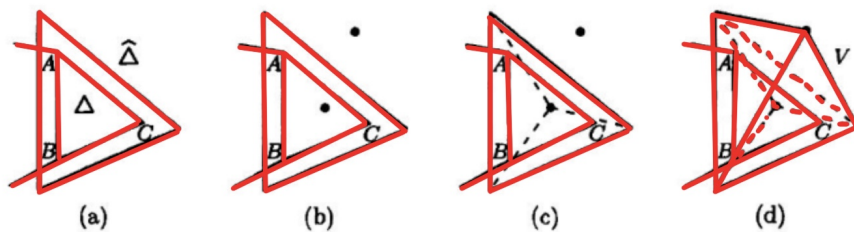
Proposição 2.1. *Se duas n -tranças β e β' são equivalentes, então β e β' são isotópicas ambientais.*

Demonstração. (Ideia da Prova:) Suponha que exista uma sequência da forma,

$$\beta = \beta_0 \rightarrow^{\Omega^{\pm 1}} \beta_1 \rightarrow^{\Omega^{\pm 1}} \dots \rightarrow^{\Omega^{\pm 1}} \beta_m = \beta', \quad (14)$$

onde β_{i+1} é obtido a partir de β_i aplicando um movimento elementar $\Omega^{\pm 1}$ em β_i . Para o nosso objetivo, é suficiente mostrar que β_i e β_{i+1} são isotópicas ambientais. Assim podemos assumir que β' é obtido de β pela aplicação de $\Omega^{\pm 1}$.

Após a aplicação de um movimento elementar Ω , uma aresta AB é substituída por $AC \cup CB$. Agora seja Δ o triângulo subsequente ABC . Em seguida, ampliamos ligeiramente Δ para formar o triângulo $\hat{\Delta}$ ($\supset \Delta$).

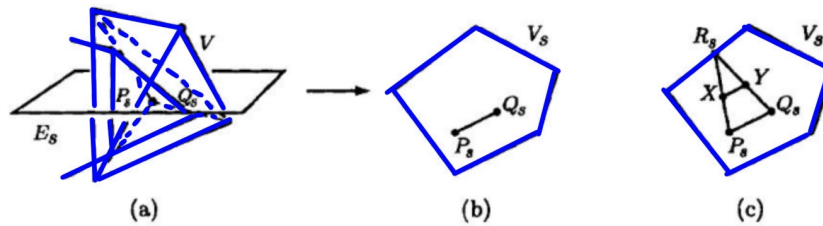


Fonte: Autores.

Agora escolhemos dois pontos próximos de $\hat{\Delta}$, um na frente da página e outro atrás. A partir destes pontos construímos dois tetraedros com uma base comum em cada lado de $\hat{\Delta}$. A união destes tetraedros será denotada por V . A escolha dos dois pontos tomada

inicialmente deve ser realizada de modo que forme um V convexo. Podemos também assumir que V não contém cordas, exceto as quais aplicamos $\Omega^{\pm 1}$.

Considere $V \cap E_s = V_s$, com $0 \leq s \leq 1$, e observemos os pontos P_s e Q_s que intersectam V_s com Δ . Além disso, escolhemos um ponto $X (\neq P_s)$ em V_s . Então a meia reta que une P_s e X intercepta ∂V_s no ponto R_s , digamos que também unimos a Q_s . Para completar a construção, iremos tomar um ponto Y que é a interseção de $R_s Q_s$ da reta que passa por X e é paralela a $P_s Q_s$.



Fonte: Autores.

Usando a construção acima como base para uma família de homeomorfismo h_t , temos mais precisamente $h_t : E_s \rightarrow E_s$, com $0 \leq t \leq 1$ e

- (1) h_t é a identidade fora de V_s para todo $0 \leq t \leq 1$.
- (2) h_0 é a identidade.
- (3) Para $0 < t \leq 1$, $h_t(P_s) = U$, onde U é o ponto na reta $P_s Q_s$ obtido por meio da razão $(P_s U)/(P_s Q_s) = t$, então $h_0(P_s) = P_s$ e $h_1(P_s) = Q_s$.
- (4) $h_t(X) = W$, onde W é derivado da razão $(XW)/(XY) = t$, então $h_0(X) = X$ e $h_1(X) = Y$.

Para o caso, excepcional, em que X estar na reta $P_s Q_s$, o ponto Y é definido de forma que a seguinte razão seja válida,

$$\frac{XY}{P_s Q_s} = \frac{R_s X}{R_s P_s}. \quad (15)$$

Além disso, h_t é a identidade para $0 \leq t \leq 1$ se V_s intercepta Δ em apenas um ponto, ou se V_s não intercepta Δ . Por fim, podemos estender esta isotopia para a isotopia ambiente $H : D \times [0, 1] \rightarrow D \times [0, 1]$. $\square$

Pelo ambiente isotópico que foi criado acima, $h_t(\beta)$ para cada $0 \leq t \leq 1$ é restringido a ser uma n -trança, ou seja, satisfaz a condição 3 da definição 5, logo H é uma s -isotopia.

Assim temos a seguinte afirmação, sendo as n -tranças β e β' isotópicas ambientais, então existe um homeomorfismo $H : D \longrightarrow D$ tal que:

(1) h_t é a identidade em ∂D .

(2) $h(\beta) = \beta'$.

- Observação: Um homeomorfismo $h : D \rightarrow D$ tal que $h|_{\partial D}$ é ambiente isotópico para a identidade pela isotopia ambiente H mantendo o limite fixo.

2.2 PALAVRAS ASSOCIADAS A UMA N-TRANÇA

Aqui iremos introduzir o conceito de palavra associado a uma n -trança. Por uma razão técnica, assumiremos que os pontos iniciais A_i de uma n -trança foram movidos para os novos pontos $(\frac{1}{4}, \frac{i}{n+1}, 1)$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Estes novos pontos serão denotados também de A_i , pois de um ponto de vista matemático nada mudou. No caso, o diagrama de uma n -trança permanece no plano yz , como antes.

Para iniciarmos, seja β uma n -trança no cubo D . Suponha que P e P' sejam pontos nas faces superior e inferior, respectivamente. Mais precisamente, $P = (0, \frac{1}{2}, 1)$ e $P' = (0, \frac{1}{2}, 0)$. Em seguida, una P e P' por um segmento de reta g , e podemos assumir que g estar no plano yz . Agora, para $i = 1, 2, \dots, n$ seja α_i um segmento de reta que une P a A_i . É importante notar que para $i \neq j$, α_i e α_j encontram-se apenas em P .

Proposição 2.2. *Seja β uma n -trança, e suponha que*

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Além disso, seja d_j a j -ésima corda, ou seja, a corda que conecta A_j a $B_{\pi(j)} = B_{i_j}$. Então existem n arcos simples mutuamente disjuntos $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ na face inferior tais que:

(1) *Cada uma das curvas fechadas simples*

$$\alpha_j \cup d_j \cup \alpha'_{i_j} \cup g$$

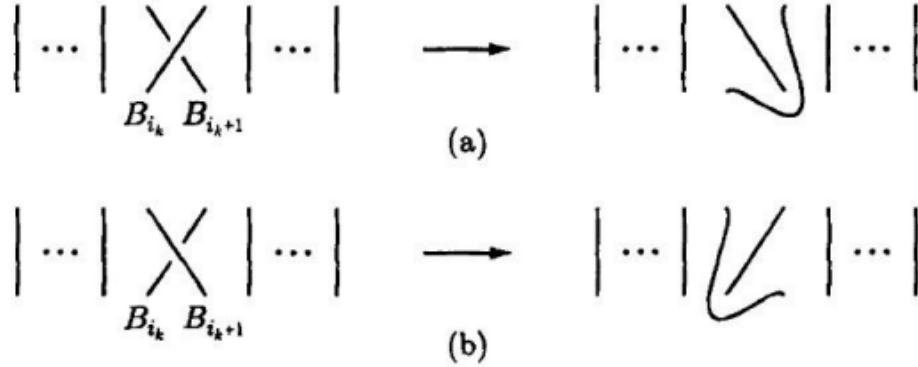
limitam um disco D_j no cubo D .

(2) *Para qualquer k e j ($k \neq j$) temos que $D_k \cap D_j = g$.*

Demonstração. Iremos construir os arcos simples $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ na face inferior de D deformando o diagrama da trança. De início, escrevemos $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \sigma_{i_2}^{\epsilon_2} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ e então "copiamos"

um diagrama de β na face inferior E_0 de D . Esta projeção é feita por $p^* : D \rightarrow E_0$ dada por $p^*(x, y, z) = (x, y, 0)$.

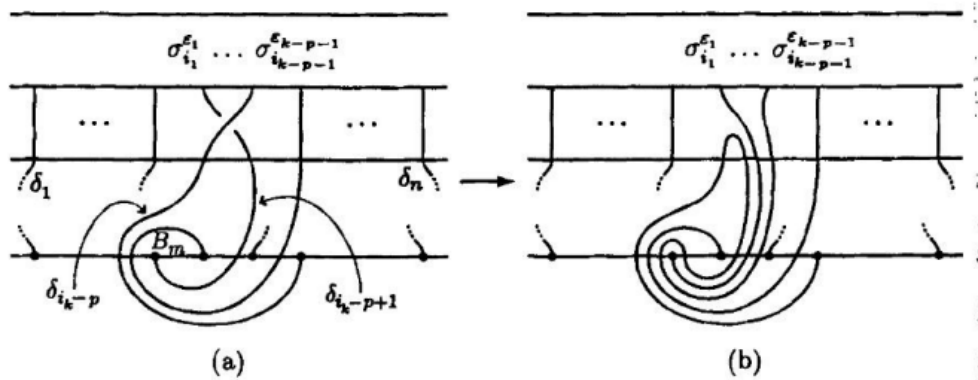
Então, começando pelo último gerador $\sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ de β , puxamos um pequeno pedaço do arco de passagem superior ao longo do arco de passagem inferior até B_{i_k+1} se $\epsilon_k = +1$, ou até B_{i_k} se $\epsilon_k = -1$. Este movimento de empurrar a corda ocorre na face inferior, já que B encontra-se na face inferior.



Fonte: (MURASUGI; KURPITA, 2012).

Iterando a construção acima em termos de cordas trançadas consecutivas, o que foi dito torna-se um primeiro passo em um argumento de indução. Então, supondo que aplicamos o procedimento, de puxar a corda, aos últimos p geradores de β , criamos arcos mutuamente disjuntos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ na face inferior.

A seguir, consideremos o $(p+1)$ -ésimo gerador de β do final, ou seja, $\sigma_{i_k-p}^{\epsilon_{k-p}}$. Logo, o procedimento de construção requer que puxemos um pequeno pedaço do arco de passagem superior ao longo do arco δ_{i_k-p} ou δ_{i_k-p+1} até o ponto B_m na face inferior.

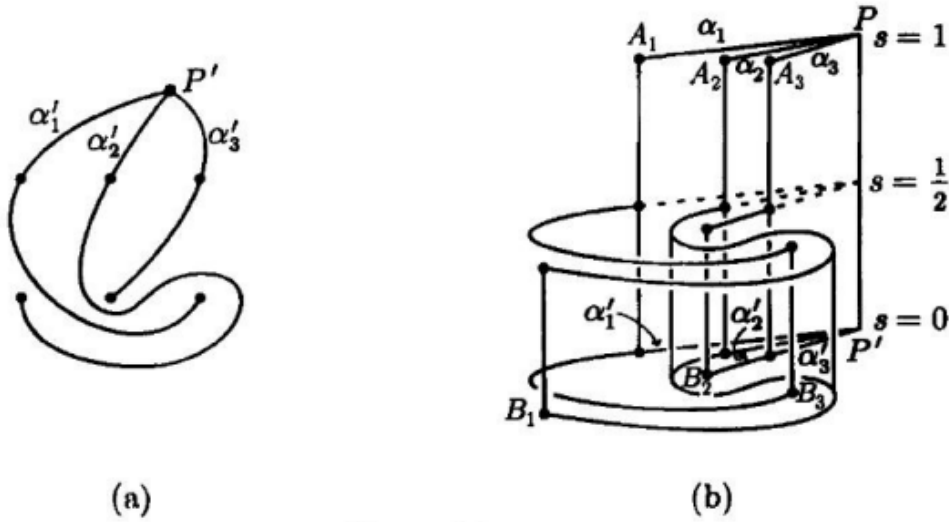


Fonte: (MURASUGI; KURPITA, 2012)

Com o mecanismo de indução configurado, podemos continuar o procedimento acima.

Finalmente, unindo (exceto p') $A'_i = p^*(A_i)$ a p' por um segmento de reta mutuamente disjunta, obtemos os arcos necessários $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$.

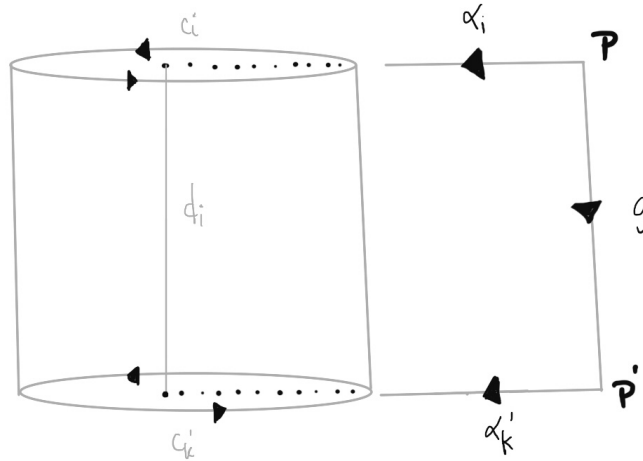
O disco D_i , que abrange $\alpha_j \cup d_j \cup \alpha'_{ij} \cup g$, é obtido construindo primeiro paredes ao longo de α'_j , mais precisamente para $j = 1, 2, \dots, n$ os segmentos são $\alpha'_j \times [\frac{1}{2}, 1]$, e conectando cada uma dessas paredes ao longo de α_j , mais precisamente para $j = 1, 2, \dots, n$ os segmentos são $\alpha_j \times [0, \frac{1}{2}]$. Finalmente, precisamos de uma modificação óbvia para cada disco D_i que modo que $\partial D_i - (\alpha_i \cup \alpha_{ji} \cup g)$ é uma corda trançada. Durante o procedimento, a corda original d_j pode precisar ser ligeiramente deformada.



Fonte: (MURASUGI; KURPITA, 2012).

Agora, vamos orientar α_i e α'_i de tal forma que eles fluam para fora de P e P' , respectivamente. No final de cada α_i e α'_i , ou seja, A_i e $B_{\pi(i)} = B_k$, respectivamente, desenhe um pequeno círculo orientado c_i e c'_k . Temos que c_i e c'_k , respectivamente, são as interseções das faces superior e inferior com uma vizinhança de d_i . A parte que conecta P (ou P') a c_i (ou c'_k) também será denotada por α_i (ou α'_i), isto visa simplificar a notação.

A seguir, vamos considerar os loops $v_i = g^{-1}\alpha_i c_i \alpha_i^{-1} g$ e $w_i = \alpha'_k c'_k \alpha'^{-1}_k$ (veja a figura abaixo). Então, v_i e w_i são homotópicos (com o ponto P' fixo) em $D - \beta$, então v_i e w_i representam o mesmo elemento de $\pi_1(D - \beta)$. O precedente segue desde os dois loops v_i e w_i são limitados pelo disco D_i e por um cilindro, o limite de uma vizinhança de d_i .



Fonte: (MURASUGI; KURPITA, 2012).

Sejam $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ segmentos de reta conectando P' aos pontos $B_1, B_2, \dots, B_n$, respectivamente. Para $i \neq j$, segue-se que α_i^* e α_j^* se encontram apenas em P' . Agora, considere que t_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, denota o seguinte loop $\alpha_i^* c'_i \alpha_i^{*-1}$, ou seja, $t_i = \alpha_i^* c'_i \alpha_i^{*-1}$. Então o conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ é o conjunto dos geradores livres do grupo livre $\pi_1(E_0 - \{B_1, B_2, \dots, B_n\}, P')$, onde $E_0 - \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ é a face inferior E_0 com n furos.

Como w_i é uma curva fechada simples em E_0 , ele pode ser escrito como um produto de t_j e t_j^{-1} , e o que é mais,

$$w_i = S_i t_k S_i^{-1}, \quad (16)$$

onde $k = \pi(i)$ e S_i é uma palavra em t_j e t_j^{-1} .

Agora iremos determinar a palavra S_i , em que o ponto essencial para isto é um α'_k na face inferior E_0 . Começamos unindo cada B_j a $C_j = (1, \frac{j}{n+1}, 0)$ por um segmento de reta γ_j , digamos. Agora se nos movermos ao longo de α'_i seguindo sua orientação, veremos que α'_i intersepta γ_j em vários pontos. Começando pelo elemento identidade, multiplicamos isso por t_l (ou t_l^{-1}) se inicialmente α'_i intersepta γ_l da esquerda para a direita (ou da direita para a esquerda). Continuando este meio de multiplicação em cada interseção subsequente, até B_{j_i} , eventualmente resultará na palavra S_i . Portanto, podemos escrever w_i das seguintes formas, por exemplo,

$$w_1 = (t_2^{-1} t_1 t_2) t_3 (t_2^{-1} t_1^{-1} t_2)$$

$$w_2 = t_2^{-1}t_1t_2.$$

Definição 6 (Palavras associadas a uma n -trança). *Suponha que β é uma n -trança tal que $\pi(\beta)(i) = k$. Vamos definir $w_i = S_i t_k S_i^{-1}$ e*

$$w(\beta) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}, \quad (17)$$

então $w(\beta)$ é o conjunto de palavras associadas a β .

Lema 1. *Suponha que $w'(\beta)$ seja um segundo conjunto de palavras associadas a β , obtido de outro conjunto de disco D'_i conforme descrito na Proposição 2.2. Como na Definição 6, seja $w'(\beta) = \{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$ com $w'_i = S'_i t_k S_i'^{-1}$.*

Então, para algum inteiro λ ,

$$S'_i = S_i t_k^\lambda. \quad (18)$$

Portanto, para cada i ,

$$w'_i = w_i.$$

Demonstração. Como a única corda de β que $D_i \cup D'_i$ intersepta é d_i , segue que w_i e w'_i são homotópicas em $E_0 - \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Portanto,

$$S_i t_k S_i^{-1} = S'_i t_k S_i'^{-1},$$

e assim

$$S_i^{-1} S'_i t_k S_i'^{-1} S_i = t_k.$$

Então,

$$S_i^{-1} S'_i t_k = t_k S_i^{-1} S'_i.$$

Dessa forma, t_k comuta com $S_i^{-1} S'_i$. Mas $t_1, t_2, \dots, t_n$ são geradores livres, o que significa que existe um inteiro λ , digamos, tal que $S_i^{-1} S'_i = t_k^\lambda$.

Assim, concluímos que $S'_i = S_i t_k^\lambda$. □

Logo, a partir dos resultados acima, podemos definir de forma única o conjunto de palavras

$$w(\beta) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

que consiste nas palavras reduzidas $w_i = S_i t_k S_i^{-1}$.

2.3 DIVERSAS INTERPRETAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Com a definição de $w(\beta)$ estamos em condições de reunir várias maneiras pelas quais duas tranças podem ser consideradas iguais, ou seja, equivalentes. Portanto, aqui serão provados vários resultados que culminarão em mostrarmos que as diversas interpretações de equivalência são intercambiáveis.

Proposição 2.3. *Suponha que exista um homeomorfismo $h : D \rightarrow D$ tal que $h(\beta) = \beta'$ e $h|_{\partial D} = id$. Então*

$$w(\beta) = w(\beta'), \quad (19)$$

ou seja, o conjunto de palavras associadas são iguais.

Demonstração. Podemos começar supondo que $\{D_1, \dots, D_n\}$ é o conjunto de discos que são disjuntos, exceto em g , de β descrito na proposição 2.2 e que abrange $d_1, \dots, d_n$.

Então, $\{h(D_1), \dots, h(D_n)\}$ é o conjunto de discos disjuntos que abrangem $d'_1, \dots, d'_n$. Pela observação no final da seção 2.1, h é ambiente isotópico a identidade, e portanto, para cada i , α_i é homotópico a α'_i (exceto $\{P', B_k\}$) em $E_0 - \{B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B_{k+1}, \dots, B_n\}$, onde $\pi(i) = k$. Como o grupo fundamental deste disco com $n - 1$ furos é um grupo livre de classificação $n - 1$, segue-se que w_i é igual a w'_i . $\square$

Para prosseguirmos, primeiramente provaremos que se $w(\beta) = w(\beta')$ então β é s-isotópico a β' . Para mostrarmos que $w(\beta) = w(\beta')$ implica β equivalente a β' , inicialmente recorreríamos a um movimento elementar como ponto de partida, mas neste caso, precisamos de um movimento "global" em D em vez de um movimento local como Ω .

Proposição 2.4. *Suponha que β e β' são tranças tais que $w(\beta) = w(\beta')$, então β e β' são s-isotópicas.*

Demonstração. Como $w(\beta) = w(\beta')$, segue que $\pi(\beta) = \pi(\beta')$. Agora a prova irá prosseguir por meio de indução em n . É fácil notar que para $n = 1$ a proposição acima é verdadeira, pois toda 1-trança é trivial.

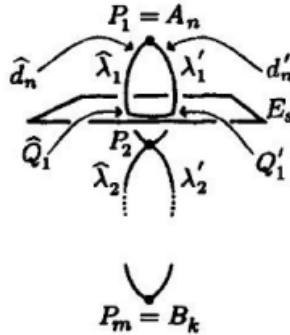
Suponha que a proposição vale para $n - 1$. Então se tivermos duas $(n - 1)$ -tranças γ e γ' tais que $w(\gamma) = w(\gamma')$, segue que γ e γ' são s-isotópicas.

Agora, dadas duas n -tranças β e β' , removendo suas respectivas últimas cordas d_n e d'_n , obtemos duas $(n - 1)$ -tranças γ e γ' , digamos. A seguir, podemos escrever $w(\beta) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ e $w(\beta') = \{w'_1, w'_2, \dots, w'_n\}$. Além disso, suponha que $\pi(\beta)(i) = k$. Então, podemos derivar $w(\gamma)$ e $w(\gamma')$ de $w(\beta)$ e $w(\beta')$ como segue, em $w(\beta)$ e $w(\beta')$:

- (i) Defina $t_k = 1$.
- (ii) Mantenha t_i inalterado se $i < k$.
- (iii) Substitua t_j por t_{j-1} se $j > k$.

Agora como $w(\beta) = w(\beta')$, segue que $w(\gamma) = w(\gamma')$. Dessa forma, por indução, γ é s-isotópica a γ' . Então seja $H : D \times [0, 1] \rightarrow D \times [0, 1]$ a s-isotopia que transforma γ em γ' . Se aplicarmos h_1 a β obtemos uma nova trança $h_1(\beta) = \hat{\beta}$ tal que $h_1(\gamma) = \gamma'$. Não necessariamente $\hat{\beta}$ precisa ser β' . Dessa forma, $\hat{\beta}$ é s-isotópico a β . Então será feita uma comparação de $\hat{\beta} = \{\gamma', d_n\}$ e $\beta' = \{\gamma', d'_n\}$, onde $\hat{d}_n = h_1(d_n)$.

Por *Study of Braids*, Lema 3.3, temos que mantendo fixas as pontas das cordas trançadas, $\hat{d}_n$ é homotópico a d'_n em $D - \gamma'$ (MURASUGI; KURPITA, P.106). Portanto, suponha que $\hat{d}_n$ e d'_n tenham vários pontos em comum, $P_1 = A_n, P_2, \dots, P_m = B_k$. Então, os arcos $\hat{\lambda}_i$ e λ'_i em $\hat{d}_n$ e d'_n , respectivamente, que unem P_i e P_{i+1} formam uma curva fechada simples $\xi_i = (\hat{\lambda}_i \cup \lambda'_i)$. Como $\hat{d}_n$ e d'_n são homotópicos em $D - \gamma'$ e também nas cordas da trança, ξ_i limita um disco $\tilde{D}_i$ em $D - \gamma'$ tal que $\tilde{D}_i \cup E_s$ é um arco simples $\hat{Q}_i Q'_i$ em qualquer plano de nível E_s .



Fonte: (MURASUGI; KURPITA, 2012).

Portanto, existe uma s-isotopia $\hat{H}^{(i)}$ tal que $\hat{h}_i^{(i)}(\hat{Q}_i) = Q'_i$ mas $\hat{h}_i^{(i)}$ é a identidade fora de uma vizinhança de $\tilde{D}_i$ em $D - \gamma'$.

Usando as s-isotopias $\hat{H}^{(i)}$, para $i = 1, 2, \dots, m-1$, podemos construir uma s-isotopia $\hat{H} : D \times [0, 1] \rightarrow D \times [0, 1]$ tal que $\hat{h}_1(\hat{\beta}) = \beta'$. Dessa forma, $\hat{\beta}$ é s-isotópico a β' . Agora combinando isso com β s-isotópico a $\hat{\beta}$, obtemos β s-isotópico a β' . A partir desta afirmação temos o desejado e concluímos a prova da proposição. $\square$

Com a Proposição acima, estamos em condições de prosseguir e provar a afirmação que β s-isotópico a β' implica que $\beta \sim \beta'$.

Proposição 2.5. *Sendo β s-isotópico a β' implica que β é equivalente a β' .*

Demonstração. Seja $H : D \times [0, 1] \rightarrow D \times [0, 1]$ uma s-isotopia que transforma β em β' . Então podemos decompor $[0, 1]$ em um número finito de pequenos intervalos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ de tal forma que a superfície, F , varrida por $h_t(\beta)$ durante o tempo $[t_i, t_{i+1}]$ não se intercepta. Além disso, $h_t(\beta)$ é sempre uma n -trança para cada t . Portanto, podemos decompor a superfície F em um número finitos de triângulos.

Usando esses triângulos, podemos mostrar que as duas n -tranças $h_{t_i}(\beta)$ e $h_{t_{i+1}}(\beta)$ são equivalentes. Então, $h_0(\beta) = \beta$ é equivalente a $h_1(\beta) = \beta'$. $\square$

Diante de todos os resultados obtidos, estamos em posição de provar a interdependência das várias interpretações de duas n -tranças serem equivalentes.

Teorema 3. *As 5 afirmações a seguir são equivalentes.*

- (1) β é equivalente a β' .
- (2) β é ambiente isotópico para β' .
- (3) Existe um homeomorfismo $h : D \rightarrow D$ tal que.
 - (i) $h(\beta) = \beta'$.
 - (ii) $h|_{\partial D} = id$.
- (4) $w(\beta) = w(\beta')$.
- (5) $\beta \sim^s \beta'$.

Para provarmos as afirmações, e consequentemente o teorema, iremos recorrer aos resultados obtidos.

(1) $\Rightarrow$ (2) é uma consequência da Proposição 2.1

(2) $\Rightarrow$ (3) é uma consequência da afirmação de 2.1

(3) $\Rightarrow$ (4) é uma consequência da Proposição 2.3

(4) $\Rightarrow$ (5) é uma consequência da Proposição 2.4

(5) $\Rightarrow$ (1) é uma consequência da Proposição 2.5

Corolário 3.1. *Duas n -tranças β e β' são equivalentes se, e somente se, existe um homeomorfismo $h : D \rightarrow D$ tal que:*

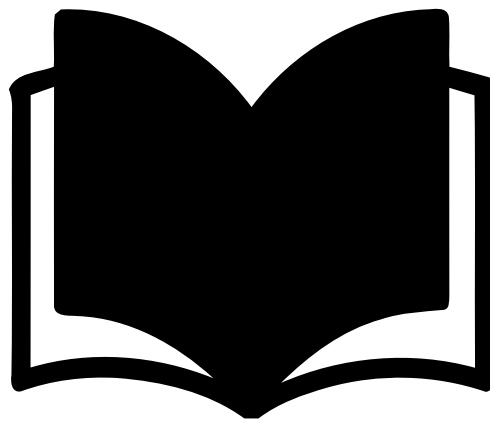
$$(i) \ h(\beta) = \beta'.$$

$$(ii) \ h|_{\partial D} = id.$$

Corolário 3.2. *Duas n -tranças β e β' são equivalentes se, e somente se, as palavras $w(\beta)$ e $w(\beta')$ forem iguais.*

Estes corolários reafirmam conclusões do teorema acima, e também de certa forma unem resultados vistos anteriormente.

Dessa forma, o Corolário 3.1 pode ser usado como uma definição alternativa de equivalência entre duas n -tranças. Já o Corolário 3.2 mostra que a palavra $w(\beta)$ é um invariante de trança, ou seja, é algo que podemos atribuir e “calcular” valores, os quais sendo diferentes implica que as tranças não são equivalentes. Assim, o problema de palavras para o grupo de tranças pode ser resolvido computando $w(\beta)$ como palavras reduzidas de um grupo livre gerado por $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.



Capítulo 3: Tranças Isotópicas versus Tranças Homotópicas

3 Tranças isotópicas $\times$ Tranças homotópicas

Nesse capítulo abordaremos as noções geométricas dos grupos de tranças homotópicas, formalmente chamadas de enlaçamentos de intervalos generalizados [Goldsmith, 1974]. Enlaçamentos de intervalos generalizados são estruturas similares às tranças, porém em seus fios são permitidos auto-intersecções.

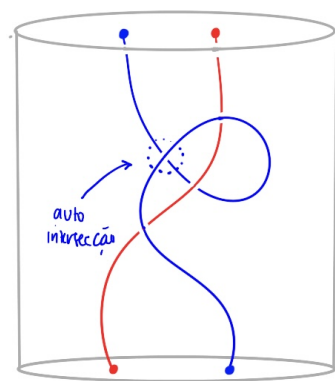
Essas estruturas aparecem na literatura em [Artin 1] quando ele questiona a mudança da relação de equivalência de isotopia para a definição de relação de equivalência de homotopia.

3.1 GRUPOS DE ENLAÇAMENTOS DE INTERVALOS GENERALIZADOS

Aqui abordaremos as noções dos grupos de tranças homotópicas, que são chamadas de enlaçamentos de intervalos generalizados (LIMA, 2019). As tranças são estruturas relacionadas a isotopia (ambiente), enquanto enlaçamentos de intervalos são estruturas relacionadas a homotopia.

Para esta nova estrutura, consideramos a Definição 1 (definição de trança) tal que a condição 3 seja desconsiderada. Dessa forma, temos uma nova estrutura chamada enlaçamentos de intervalos generalizados.

Figura 17 – Enlaçamento de Intervalo Generalizado em 2-fios.



Fonte: Autores.

Sejam agora $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ dois enlaçamentos de intervalos generalizados e considere a seguinte relação;

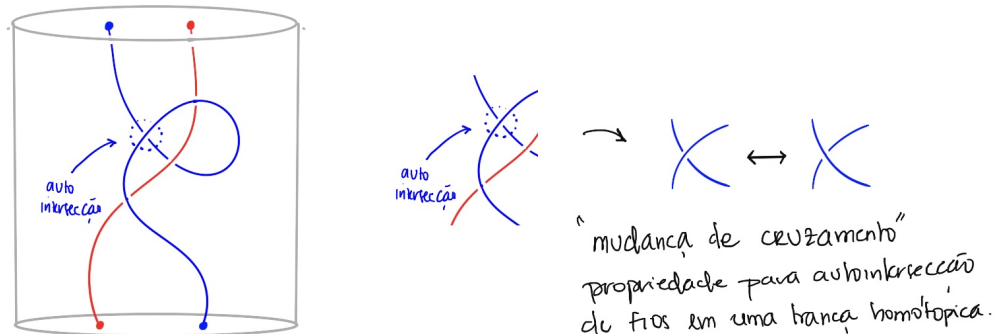
$\hat{\alpha} \approx \hat{\beta} \Leftrightarrow$ existe uma sequência finita de movimentos, sendo estes elementares ou não, que deformam $\hat{\alpha}$ em $\hat{\beta}$.

Esta relação é chamada de homotopia, ou seja, é uma deformação com mais liberdade de movimento nas cordas. Além disso, esta relação de homotopia ($\approx$) é uma relação de equivalência [Artin 1]. Vale ressaltar que o movimento que definimos aqui é um movimento que acontece entre os fios de um enlaçamento de intervalo, sendo este movimento uma deformação qualquer que preserva os itens (i) e (ii) da definição de enlaçamentos de intervalos.

Temos que, pela própria definição de enlaçamento de intervalos, os fios tem mais liberdade de movimento e podem subir em um determinado tempo t , para $t \in [0, 1]$, gerando uma auto-interseção qualquer em um enlaçamento de intervalo $\hat{\beta}$, digamos.

Esta auto-interseção, quando o fio sobe em determinado momento, tem a propriedade de alterar a informação de cruzamento por cima para um cruzamento por baixo, e vice-versa. Essa propriedade é denominada como "mudança de cruzamento" (crossing change).

Figura 18 – Mudança de cruzamento em uma trança homotópica.



Fonte: Autores.

A propriedade de mudança de cruzamento nos motiva a afirmar que $\sigma_1^{-2} = \sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}$. Além disso, segue por (GOLDSMITH, 2006) que qualquer enlaçamento de intervalo $\hat{\beta}$ no disco sob n -fios é homotópico a uma n -trança no disco.

Diante do exposto, e de forma semelhante aos passos para a construção do grupo de n -tranças B_n , podemos também encontrar uma estrutura de grupo para o conjunto quociente $\hat{B}_n = B_n/\approx$ munido com a operação de multiplicação de tranças (Definição 4). Portanto, $\hat{B}_n$ é chamado de grupo de enlaçamentos de intervalos generalizados no disco.

3.2 ISOTOPIA $\times$ HOMOTOPIA

Nessa seção vamos mostrar que as tranças da forma:

$$[t_{i,j}, t_{i,j}^h] = t_{i,j}(ht_{i,j}h)t_{i,j}^{-1}(ht_{i,j}^{-1}h^{-1}), h \in \mathbb{F}(n-1),$$

onde $\mathbb{F}(n-1)$ é um grupo livre de rank $(n-1)$ gerado por $\{t_{i,j}; 1 < j \leq n\}$ e $t_{i,j} = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1}^2 \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}$ são link-homotopicamente triviais, ou seja, são elementos que não são isotopicamente triviais, mas quando considerados em homotopia, são equivalentes à trança trivial.

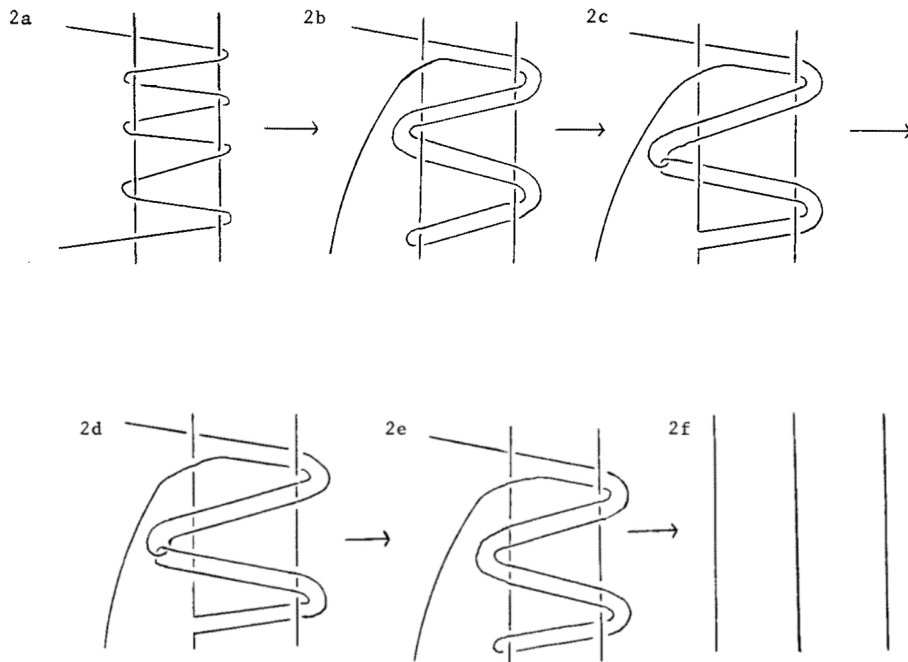
Como foi mencionado anteriormente, homotopia e isotopia (ambiente) são conceitos diferentes em relação as tranças. Com isto, destacaremos algumas diferenças e, em seguida, realizaremos uma apresentação para o grupo $\hat{B}_n$ de enlaçamentos de intervalos.

Proposição 3.1. (GOLDSMITH, 2006) *Seja β uma n -trança pura da forma*

$$\begin{aligned} \beta &= [t_{i,j}, t_{i,j}^h] \\ &= t_{i,j}(ht_{i,j}h)t_{i,j}^{-1}(ht_{i,j}^{-1}h^{-1}), \end{aligned}$$

onde $1 \leq i < j \leq n$ e h é um elemento do subgrupo P_G (de P_n) gerado por $t_{1,j}, t_{2,j}, \dots, t_{j-1,j}$. Então, β é homotopicamente trivial, ou seja, β é homotópico a 1_n .

Figura 19 – Caso particular de auto-intersecção de um fio em $[t_{i,j}, t_{i,j}^h]$.



Fonte: (GOLDSMITH, 2006).

A partir do processo apresentado concluímos que a trança não é isotopicamente trivial, mas se considerarmos esta mesma trança em homotopia, onde os fios tem mais liberdade de movimento, esta trança torna-se trivial, ou melhor, link-homotopicamente trivial.

Proposição 3.2. (*GOLDSMITH, 2006*) *Uma n -trança β pura é homotopicamente trivial se, e somente se, β pertencer ao fecho normal (em B_n) do conjunto de todas as tranças da forma*

$$\beta = [t_{i,j}, t_{i,j}^h]$$

onde $1 \leq i < j \leq n$ e h é um elemento do subgrupo P_G (de P_n) gerado por $t_{1,j}, t_{2,j}, \dots, t_{j-1,j}$, como na Proposição 3.1.

Agora, iremos olhar o grupo de enlaçamentos de intervalos, $\hat{B}_n$, mais de perto. Para $n \geq 1$ podemos definir o mapeamento

$$\rho_n : B_n \rightarrow \hat{B}_n$$

onde ρ_n envia uma n -trança arbitrária β para sua classe de equivalência sob homotopia. Além disso, como o homomorfismo $\rho_n : B_n \rightarrow \hat{B}_n$ é sobrejetivo, segue-se que

$$\hat{B}_n \cong B_n / \text{Ker} \rho_n. \quad (20)$$

Pela Proposição 3.2, podemos determinar a natureza exata do $\text{Ker} \rho_n$. Na verdade, $\text{Ker} \rho_n$ é o fecho normal do conjunto de todos os elementos da forma $t_{i,j}(ht_{i,j}h)t_{i,j}^{-1}(ht_{i,j}^{-1}h^{-1})$, onde $1 \leq i < j \leq n$ e h é um elemento de P_G , como em Proposição 3.1. Dessa forma, estamos aptos a realizar uma apresentação para $\hat{B}_n$.

Teorema 4. *O conjunto de classes equivalentes de todas as n -tranças sob homotopia formam o grupo que denotamos por $\hat{B}_n$. Além disso, $\hat{B}_n$ tem a seguinte apresentação,*

geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$

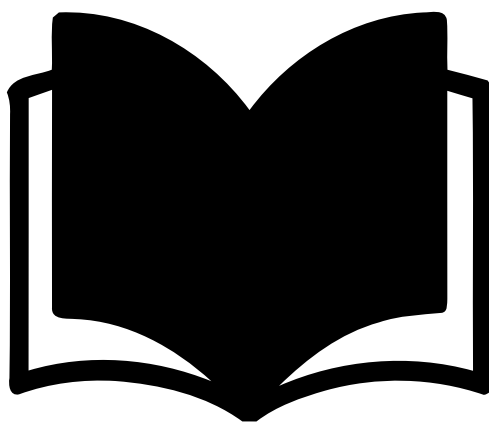
relações:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-2$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i-j| \geq 2 \text{ e } i, j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$t_{i,j} \rightleftharpoons ht_{i,j}h^{-1} \text{ onde } 1 \leq i < j \leq n \text{ e } h \text{ é um elemento do subgrupo (de } P_n) \text{ gerado por } t_{1,j}, t_{2,j}, \dots, t_{j-1,j}.$$

Dessa forma, temos uma apresentação para o grupo $\hat{B}_n$ de enlaçamentos de intervalos generalizados no disco, como desejado. Uma apresentação que complementa a apresentação do grupo de n -tranças B_n com duas relações.

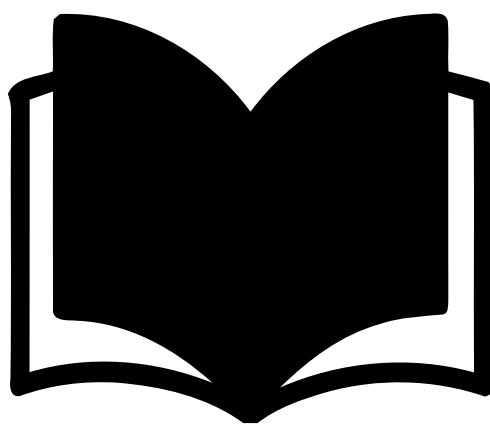


Considerações Finais

4 Considerações Finais

Os objetos de estudo apresentados nesse trabalho podem ainda ser generalizados para superfícies orientáveis e não orientáveis, sendo objetos de estudos atuais. Nesses casos, aparece um novo tipo de trança ou enlaçamento de intervalo generalizado, conhecidos como tranças ou enlaçamentos de intervalos que atravessam paredes do cilindro, cuja base é uma superfície conforme supracitado. Essas generalizações de tranças e enlaçamentos de intervalos generalizados possuem estruturas de grupo e também tem apresentações finitamente geradas. Suas representações continuam como questões em aberto até os dias atuais. Para mais detalhes, vide (LIMA, 2019) e (YURASOVSKAYA, 2008).

Essas estruturas tem protagonismo dentro e fora das áreas de matemática: em 2019, o artigo (LIMA, 2019) foi citado em um artigo da Nature ((LINGUA et al., 2022)), onde a estrutura da apresentação finitamente gerada para o grupo de enlaçamentos de intervalos generalizados em superfícies, define contribuição importantíssima no desenvolvimento da teoria de emaranhamento quântico, utilizada no desenvolvimento da memória de computadores quânticos atualmente.



Referências

REFERÊNCIAS

ARTIN, E. Theory of braids. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 101–126, 1947.

GOLDSMITH, D. L. Homotopy of braids—in answer to a question of e. artin. In: SPRINGER. **Topology Conference: Virginia Polytechnic Institute and State University, March 22–24, 1973**. [S.l.], 2006. p. 91–96.

HANSEN, V. L. **Braids and coverings: selected topics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989.

LIMA, J. R. T. d. **Apresentações dos grupos de tranças em superfícies**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010.

LIMA, J. R. T. D. Homotopy of braids on surfaces: Extending goldsmith’s answer to artin. **Journal of Knot Theory and Its Ramifications**, World Scientific, v. 28, n. 12, p. 1950072, 2019.

LINGUA, F.; WANG, W.; SHPANI, L.; CAPOGROSSO-SANSONE, B. Braiding properties of worldline configurations in hardcore lattice bosons. **Scientific reports**, Nature Publishing Group UK London, v. 12, n. 1, p. 18235, 2022.

MURASUGI, K.; KURPITA, B. **A study of braids**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 484.

YURASOVSKAYA, E. **Homotopy string links over surfaces**. Tese (Doutorado) — University of British Columbia, 2008.