UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA

BÁRBARA AMORIM NETO

HIPOELIPTICIDADE GEVREY ÓTIMA PARA UMA CLASSE DE OPERADORES

Maceió - AL

Agosto de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

BÁRBARA AMORIM NETO

HIPOELIPTICIDADE GEVREY ÓTIMA PARA UMA CLASSE DE OPERADORES

Dissertação apresentada ao PPGMAT da UFAL como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof Dr. Renan Dantas Medrado

Maceió - AL
Agosto de 2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Lívia Silva dos Santos - CRB 1670

A524h Amorim Neto, Bárbara.
Hipoelipticidade gevrey ótima para uma classe de operadores / Bárbara, Amorim Neto. – Maceió, 2024.
100 f.:il.

Orientador: Renan Dantas Medrado.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática . Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 99-100

1. Classes gevrey - Características. 2. Hipoelipticidade gevrey . 3. Regularidade de Gevrey. Classe de operadores (Matemática). I. Título.

CDU:510

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de pós-graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Bárbara Amorim Neto

Hipoelipticidade Gevrey Ótima para uma Classe de Operadores

Dissertação apresentada ao PPGMAT da UFAL como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática. Aprovada em 30 de setembro de 2024.

Banca examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
RENAN DANTAS MEDRADO
Data: 01/10/2024 14:20:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof.º Dr. Renan Dantas Medrado (Presidente – PPGMAT/UFAL)

gov.br Documento assinado digitalmente
GERARDO JONATAN HUAROTO CARDENAS
Data: 01/10/2024 16:44:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Gerardo Jonatan Huaroto Cardenas (PPGMAT/UFAL)

gov.br Documento assinado digitalmente
LUIS FERNANDO RAGOGNETTE
Data: 01/10/2024 16:04:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

Prof. Dr. Luis Fernando Ragognette (PPGMAT/UFMG)

À memória de Yuri Amorim, que enfrentou batalhas internas das quais nunca soube como ajudar, mas cuja vida me ensinou a importância de amar e de cuidar de quem amamos. Este trabalho é um tributo ao amor que sempre esteve presente, e a luta que você travou silenciosamente, mas com uma força imensurável. Espero que, de alguma forma, este trabalho sirva como uma forma de honrar sua memória e sua luta. Com amor e saudade.

Da sua, para sempre, prima Bárbara.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES pelo financiamento e apoio durante o mestrado. Ao meu orientador, Renan Medrado, por toda a paciência e pelas horas dedicadas, não apenas a este trabalho, mas à minha formação. À Dona Quitéria, minha mainha, que, mesmo vindo de um lugar de tanta escassez, me ensinou que não há nada ao qual, com muita garra, não consigamos alcançar. Aos meus irmãos, Salomé e Rodolfo, que, sem dúvidas, são as melhores pessoas de todo o universo, obrigada por serem um porto seguro nesta caminhada. Ao meu companheiro, Rayan França, que foi o meu farol neste processo. Aos meus tios, Vânia e Luiz, pela companhia, pela escuta e por nunca medirem esforços por mim. A todas as amizades que fiz nesse caminho, em especial a Cleisi Fernandes, que foi fundamental em vários momentos. Quero deixar um agradecimento especial ao meu pai, a todos os meus tios e tias, primos e primas, aos quais não é mensurável expressar em palavras, mas que, mesmo sem saberem o que significa um mestrado, me motivaram tanto. Por fim, agradeço a todos os professores e pessoas que, de alguma forma, tornaram isso possível.

A felicidade às vezes é uma bênção - mas geralmente é uma conquista.

Paulo Coelho, *Na Margem do Rio Piedra Eu Sentei e Chorei.*

Resumo

Neste trabalho, exploramos a relação entre a regularidade Gevrey((1.10) para definição das Classes Gevrey) e a transformação FBI (veja (2.1) para definição da transformada FBI), generalizando resultados conhecidos do caso real analítico ($s = 1$). Considerando operadores diferenciais parciais na forma de soma de quadrados de campos vetoriais, estudamos o problema da hipoelipticidade Gevrey. Nosso resultado principal é para a classe de operadores $L = \partial_x^2 + x^{2(p-1)}\partial_{t_1}^2 + x^{2(q-1)}\partial_{t_2}^2$ (com $1 \leqslant p \leqslant q$). Mostraremos que se $s \geqslant q/p$ então L é G^s-hipoeliptico em alguma vizinhança de 0. Destacamos que essa monografia segue de perto o trabalho [2].

Abstract

Is to explore the relation between Gevrey regularity (see (1.10) for the definition of Gevrey classes) and the FBI transform (see (2.1) for the definition of the FBI transform), generalizing known results from the real analytic case ($s = 1$). Considering partial differential operators in the form of sums of squares of vector fields, we study the problem of Gevrey hypoellipticity. Our main result is for the class of operators $L = \partial_x^2 + x^{2(p-1)}\partial_{t_1}^2 + x^{2(q-1)}\partial_{t_2}^2$ (with $1 \leqslant p \leqslant q$). We show that if $s \geqslant q/p$, then L is G^s-hypoelliptic in some neighborhood of 0. We note that this dissertation closely follows the work in [2].

Sumário

Introdução

Seja L um operador diferencial parcial linear, com coeficientes C^∞. Denote por G^s a classe Gevrey de ordem s, para $1 \leqslant s < \infty$ (veja Definição 11). Dizemos que o operador L é G^s-hipoelíptico em um ponto x, quando satisfaz a propriedade: "se u é uma distribuição definida em uma vizinhança U de x e $W \subset V \subset U$ $Lu \in G^s$ em alguma vizinhança $V \subset U$ de x, então $u \in G^s$ em alguma vizinhança (provavelmente menor) de x". L é G^s-hipoelíptico em um conjunto aberto U se valer essa propriedade para cada ponto de U. O expoente ótimo para regularidade Gevrey para L em x é o ínfimo de todos $s \geqslant 1$ tais que L é G^s-hipoelíptico em x. O expoente ótimo Gevrey para L em um conjunto aberto U é o supremo, para cada $x \in U$, do expoente ótimo para L em x.

Os trabalhos [7], [13], [14], [16] apresentam condições sobre os colchetes de Lie, exibindo um número m tal que os operadores estudados são s - hipoelípticos se e somente se $s \geqslant m$.

O objetivo deste trabalho é revisar o trabalho publicado por Michael Christ em 1997, [2], exibindo os detalhes da melhor forma possível. Vale destacar que M. Christ demonstrou a hipoelipticidade Gevrey ótima para uma classe de operadores. Para isso foram, serão necessários resultados gerais sobre a caracterização da regularidade Gevrey via transformada FBI, generalizando resultados bem conhecidos para o caso analítico real $s = 1$.

Os operadores que estudamos foram anteriormente considerados por Grüsin [7], que provou que alguns deles são hipoelipticos analíticos, e por Oleinik [14], que provaram que todos os outros não são hipoelipticos analíticos.

A seguir apresentaremos a classe de operadores que queremos estudar. Sejam $1 \leqslant p \leqslant q \in \mathbb{N}$, (x, t) coordenadas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Defina

$$L = \partial_x^2 + x^{2(p-1)}\partial_{t_1}^2 + x^{2(q-1)}\partial_{t_2}^2. \tag{1}$$

Estes operadores são hipoelípticos analíticos se (veja [7]) e somente se (veja [14]) $p = q$. O que nos leva a seguinte pergunta natural. E a hipoelipticidade Gevrey? Em [2], é demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 1. *L é G^s hipoelíptico em alguma vizinhança de 0 se, e somente se, $s \geqslant q/p$*

No entanto, demonstraremos apenas que se $s \geqslant \frac{p}{q}$ então L é G^s hipoelíptico. A principal ferramenta para a nossa demonstração é a caracterização dos espaços G^s a partir de uma classe de transformadas FBI. Para caracterizações de espaços de funções mais gerais do que G^s, classe de transformações mais gerais e outras aplicações destas transformadas, nós recomendamos a leitura de [8] e [9]. Inclusive a subseção 2.2 foi inspirada nesses artigos.

No capítulo 1 desta monografia reunimos todos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do trabalho.

Já no capítulo 2, definimos uma classe de transformada FBI (veja Definição 2.1) bem como as principais estimativas e através delas caracterizamos as classes Gevrey.

Por fim, no capítulo 3, fizemos uma análise da regularidade Gevrey para o operador definido em (3.1).

Capítulo

1

Pré-requisitos

Neste capítulo, apresentamos resultados essenciais para o desenvolvimento dos resultados discutidos nos capítulos seguintes. As demonstrações detalhadas estão disponíveis nas referências bibliográficas, deste trabalho. E podem ser consultada por leitores que desejarem mais detalhes.

1.1 Notações

Começamos apresentando algumas notações básicas.

Denote por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ e $\mathbb{Z}_+^n$ o conjunto de todas as n-uplas $\alpha = (\alpha_1, \cdots \ \alpha_n)$ com $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, para cada $j = 1, \cdots, n$. O *comprimento* de $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ é $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Dados $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ $\beta \leqslant \alpha$, denota que $\beta_j \leqslant \alpha_j$ para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$. Além disso, $\alpha! \doteq \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ e, se $\beta \leqslant \alpha$ então denotamos

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

Para derivadas parciais usaremos a notação

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

De maneira similar, para $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Usando a notação de multi-índice, escrevemos a *Fórmula de Leibniz* do seguinte modo

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \geqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \partial^\beta g, \tag{1.1}$$

onde assumimos $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Se $f \in C^\infty(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$, então podemos considerar a expensão de Taylor de f, $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$. Funções que possuem essa série uniformemente convergentes em compactos são ditas **reais analíticas**.

Teorema 2. *(Fórmula de Faà di Bruno) Seja $f(y) = f(y_1, \ldots, y_m)$ uma função inteira e $g^{(i)} \in C_\nu(t)$ para $i = 1, \ldots, m$. Então, em uma vizinhança de t^0, a composição $h(t) = f\left(g^{(1)}(t), \ldots, g^{(m)}(t)\right)$ possui a ν-ésima derivada dada por*

$$h_\nu = \nu! \sum_{1 \leqslant |\lambda|} \frac{f^\lambda(0)}{\lambda!} \sum_{s(\nu,\lambda)} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \frac{\lambda_i}{\mu_j^{(i)}} \frac{g^{(i)}_{\mu_j^{(i)}}}{\mu_j^{(i)}!}, \tag{1.2}$$

onde

$$s(\nu, \lambda) = \left\{ \left(\mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_{\lambda_1}^{(1)}; \ldots; \mu_1^{(m)}, \ldots, \mu_{\lambda_m}^{(m)}\right) : \mu_j^{(i)} \in \mathbb{N}_0^d \ e \ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \mu_j^{(i)} = \nu \right\}.$$

Demonstração. Veja [1] ou [3]. □

Iremos nos referir também ao espaço $L^p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$, o espaço de Lebesgue das funções de p-ésima potência integrável em Ω, com norma

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

No espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ nos consideramos o produto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} dx, \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

1.2 Funções teste

Definição 1. *Seja f uma função contínua em um aberto Ω, o **suporte** de f, denotado por* $\operatorname{supp} f$, *é o fecho em Ω de $\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}$.*

Denotaremos por $C_c^k(\Omega)$ o conjunto das funções em C^k em Ω com suporte compacto. Para um subconjunto arbitrário $S \subset \mathbb{R}^n$ definimos também $C_c^k(S)$ o conjunto de todos os elementos em $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ com suporte contido em S.

Definição 2. *As funções $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto em Ω serão chamadas de funções teste em Ω. O conjunto das funções teste em Ω será denotado por $C_c^\infty(\Omega)$.*

Definição 3. *Uma sequência (ϕ_j) de funções $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em C_c^∞ se:*

1. *Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K, j = 1, 2, \cdots$.*

2. *Para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$,isto é, $\partial^\alpha \phi_j$ converge uniformemente, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.*

1.3 Distribuições

Definição 4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. O espaço das distribuições em Ω se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dado $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, escreveremos $\langle u, \phi \rangle$ em vez de $u(\phi)$.*

Observação 1. A continuidade pode ser definida sequencialmente, isto é, se $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $\phi_j \longrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ então $\langle u, \phi_j \rangle \longrightarrow 0$.

Definição 5. *Dados $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dizemos que u_1 e u_2 são iguais em uma bola aberta $U \subset \Omega$ quando $\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(U)$.*

Teorema 3. *Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ existe uma vizinhança aberta $V(x)$ onde $u_1 = u_2$. Então, $\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle$ para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Veja [12]. □

Definição 6. *Dado $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos o suporte de u como sendo a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo.*

Definição 7. *Se Ω é aberto de $\mathbb{R}^n$, denotamos o espaço das distribuições em Ω com suporte compacto contido em Ω por $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Observação 2. As definições de suporte de distribuições e de funções coincidem, para as distribuições que são funções. Lembre-se, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ então definimos a distribuição $\langle T_u, \phi\rangle = \int u\phi, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Por abuso de notação é comum denotar T_u simplesmente por u. E, o suporte delas coincide.

Definição 8. *Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é dita ser C^∞ em um aberto $U \subset \Omega$, se existe $f \in C^\infty(U)$ tal que*

$$\langle u, \phi\rangle = \int f(x)\phi(x)dx, \ \forall \phi \in C_c^\infty(U). \tag{1.4}$$

Observação 3. Assim como na observação acima, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ então as definições de C^∞ coincidem. A clássica e aquela da teoria das distribuições.

Teorema 4. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty \to \mathbb{C}$ tal que,*

1. $\langle \tilde{u}, \phi\rangle = \langle u, \phi\rangle, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

2. $\langle \tilde{u}, \phi\rangle = 0$ *se* $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\operatorname{supp}(\phi) \cap \operatorname{supp}(u) \neq \varnothing$.

Definição 9. *Uma sequência (ϕ_j) de funções $C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ quando para todo compacto $K \subset \Omega$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$ a sequência de funções $(\partial^\alpha \phi_j)$ converge uniformemente a zero em K.*

Observação 4. Se (ϕ_j) é uma sequência de funções convergindo a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então (ϕ_j) converge a zero em $C^\infty(\Omega)$.

Teorema 5. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$, a valores em $\mathbb{C}$, u é sequencialmente contínuo se e somente se existem um compacto $K \subset \Omega$, uma constante real positiva C e $m \in \mathbb{Z}^+$ tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup |D^\alpha \phi|, \ \forall \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{1.5}$$

Demonstração. Veja [12]. □

Teorema 6. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. u é contínuo se e somente se para todo compacto $K \subset \Omega$ existem uma constante real positiva C e $m \in \mathbb{Z}^+$*

tais que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup |D^{\alpha}\psi|;\ \forall \psi \in C_c^{\infty}(\Omega)\ \ e\ \ \operatorname{supp}(\phi) \subset K.$$

Demonstração. Veja [12]. □

Lema 1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $\phi \in C^{\infty}(U \times V)$ e $u \in \mathcal{E}'(U)$. Defina $F : V \to \mathbb{C}$ tal que $x \mapsto F(x) = \langle u(y), \phi(y, x) \rangle$, então $F \in C^{\infty}(V)$. Mais ainda, $\partial^{\alpha} F(x) = \langle u(y), \partial^{\alpha}\phi(x, y)$.*

Demonstração. Veja [15]. □

1.4 Transformada de Fourier

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f por:

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x\ \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Teorema 7. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-\epsilon||\xi||^2} \hat{f}(\xi) d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7}$$

Demonstração. Veja [6]. □

1.5 Espaços Gevrey

As classes Gevrey desempenham um papel importante na teoria das equações diferenciais parciais pois são espaços intermediários entre o espaço C^{∞} e o espaço das funções analíticas. Em geral, sempre que as propriedades de um certo operador diferem no C^{∞} e no espaço das funções analíticas, é natural testar o seu comportamento nas classes das funções Gevrey.

O exemplo básico, que motivou Maurice-Joseph Gevrey, em 1918, estudar tais classes intermediárias é o operador de calor em $\mathbb{R}^n$, para $n \geqslant 2$:

$$L = \frac{\partial}{\partial x_n} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

cuja solução fundamental é

$$E(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} (4\pi x_n)^{\frac{(1-n)}{2}} \exp\left[-(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2)/4x_n\right], & x_n > 0, \\ 0, & x_n \leqslant 0. \end{cases}$$

A função E não é analítica para $x_n = 0$, no entanto, E está em $C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$; isso se reflete nas soluções da equação homogênea $Lu = 0$ que não são analíticas em geral, embora sempre C^∞. Uma estimativa precisa da regularidade de E pode ser dada observando que, para qualquer subconjunto compacto fixo $K \subset \mathbb{R}^n$, $0 \notin K$, temos $C > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha E(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^2, \text{ quando } x \in K \text{ e } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n. \tag{1.8}$$

onde C depende somente de K. Note que (1.7) não vale para $\alpha!$ no lugar de $\alpha!^2$, por isso E não é analítica.

A seguir apresentaremos outra motivação para existência de soluções para equações do calor que não são real analíticas. Considere o problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u & = 0, \\ u(0,t) & = f(t). \end{cases} \tag{1.9}$$

Vamos exibir uma solução para (1.8) dada por uma série de potências em x. Isto é,

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t) \frac{x^j}{j!}.$$

Derivando u, usando que $u_t = u_{xx}$ e supondo que podemos derivar sob o sinal da soma temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j'(t) \frac{x_j}{j!} = \sum_{j=2}^{\infty} u_j(t) \frac{x^{j-2}}{(j-2)!} = \sum_{j=0}^{\infty} u_{j+2}(t) \frac{x^j}{j!}.$$

E, derivando novamente em relação a x e substituindo a condição inicial temos $f(t) = u(0,t) = u_0(t), f'(t) = u_0'(t) = u_2(t)$; $f^2(t) = u_2'(t) = u_4(t), \cdots, f^j(t) = u_{2j}(t), \cdots$. Daí podemos considerar

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{+\infty} f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Agora note que, $\sum_{j=0}^{+\infty} f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge quando existe $\epsilon < 1$ tal que $\frac{|f^{(j)}||x|^{2j}}{(2j!)} \leqslant \epsilon^j$. além disso, quando $|f^j(t)| \leqslant C^j(2j)!$ nós temos

$$\frac{|f^{(j)}(t)||x|^{2j}}{(2j)!} \leqslant C^j r^j, \text{ para } |x| \leqslant r.$$

Para $r < C^{-1}$ nós temos a convergência da solução. Mais ainda, $j!^2 \leqslant (2j)! \leqslant 4^j j!^2$. Assim, para obter a convergência de u é suficiente considerar que, para cada compacto K existe $C > 0$ tal que $\sup_{t\in K}|f^j(t)| \leqslant C^j j!^2$. O ponto principal é que existem funções satisfazendo a condição acima que não satisfazem $\sup_{t\in K}|f^j(t)| \leqslant C^j j!$, ou seja, não são reais analítica. Por exemplo, $f(t) = e^{-t^{-2}}$, $t \neq 0$ e $f(0) = 0$. Neste caso, definimos uma solução u para a equação do calor tal que $u(x,0) = 0$ e u não é real analítica. Nesta seção iremos generalizar (1.8), definindo o que denominamos **Classes Gevrey**.

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e fixe um número real $s \geqslant 1$. Usaremos $G^s(\Omega)$ para denotar a classe de funções Gevrey de ordem s em Ω.

Definição 10. *A função $f(x)$ está em $G^s(\Omega)$ se $f \in C^\infty(\Omega)$ e para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante C positiva tal que*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s, \ \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ e } x \in K. \tag{1.10}$$

Em particular, $G^1(\Omega) = A(\Omega)$ é o espaço de todas as funções analíticas em Ω. Além disso, temos que $G^s(\Omega) \subset G^t(\Omega)$, quando $s \leqslant t$. No entanto, as inclusões

$$A(\Omega) \subset \bigcap_{s>1} G^s(\Omega), \quad \bigcup_{s\geqslant 1} G^s(\Omega) \subset C^\infty$$

são estritas.

Listaremos agora algumas expressões equivalentes (1.10).

Teorema 8. *A estimativa* (1.10) *para* $x \in K$ *é válida se, e somente se, uma (e, portanto, todas) das seguintes estimativas é válida:*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^s$$
$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1}|\alpha|^{s|\alpha|}$$
$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant C^{|\alpha|+1}\Gamma(s|\alpha|+1),$$

para todo α *multi-índice, onde* C *representa diferentes constantes adequadas independentes de* α *e* Γ *denota a função Gamma.*

Demonstração. Veja [15]. □

Definição 11. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *uma vizinhança aberta do ponto* x_0, *e* $s \in (1, +\infty)$. *Uma distribuição* $u \in \mathcal{D}'(U)$ *pertence a classe* G^s *em* x_0 *se existe uma vizinhança* $V \subset U$ *e uma função* $\tilde{u} \in G^s(V)$ *tal que* $\langle u, \phi\rangle = \langle \tilde{u}, \phi\rangle$, $\forall \phi \in C_c^\infty(V)$.

Diremos que $u \in G^s(U)$ se $u \in G^s$ em cada ponto de U.

1.6 Operador Diferencial Parcial Linear

Definição 12. *Um operador linear diferencial parcial* P *é definido por*

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha(x) D^\alpha,$$

onde os coeficientes $c_\alpha(x)$ *são* $C^\infty(\Omega)$. *Se para algum* α *de comprimento* m *o coeficiente* $c_\alpha(x)$ *não é identicamente nulo, então* m *é chamado ordem de* P.

O *símbolo* de P é a função

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha(x)\xi^\alpha, (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

O *símbolo principal* de P é

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Definição 13. *Um operador P é dito elíptico em Ω se $p_m(x,\xi) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \neq 0$.*

Definição 14. *Seja $\mathcal{A}$ um espaço de funções e L um operador com coeficientes em $\mathcal{A}$. Dizemos que L é $\mathcal{A}$ hipoelíptico quando vale: "se $Lu \in \mathcal{A}$ então $u \in A$".*

Em particular P é s-hipoelíptico quando $Pu \in G^s(U)$ implica que $u \in G^s(U)$.

Exemplo 1. Dado $k \in \{1, 2, \cdots\}$. Defina o operador k- Mizohata em $\mathbb{R}^2$ por

$$P_k = \partial_t + it^k \partial x.$$

Temos que P_k é C^∞ - hipoelíptico se e somente se k é par. O mesmo vale para s - hipoelipticidade. Veja [[15], Teorema 2.3.5 e Teorema 2.3.6]

Teorema 9. *Se P é eliptico em U e possui coeficiente em G^s então P é s-hipoelíptico em U.*

Demonstração. Veja [11] e [15]. □

Observação 5. O exemplo 1 mostra que a recíproca do Teorema 9 é falsa.

1.7 Identidades e Inequações para Fatoriais e Coeficientes Binomiais

Nesta seção traremos algumas identidades e inequações frequentemente usados no estudo das classes de Gevrey.

Começamos com a generalização da Fórmula de Newton

$$(t_1 + \cdots + t_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}, \tag{1.11}$$

onde $N \geqslant 1$ é um número inteiro e $t_1, \cdots t_n$ são n números reais. Fixando $t_1 = \cdots = t_n = 1$ temos que

$$n^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} n^{|\alpha|}.$$

Em particular, dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ temos $|\alpha|! \leqslant n^{|\alpha|}\alpha!$.

No caso $n = 2$ obtemos que

$$(k+j)! \leqslant 2^{k+j}k!j!, \tag{1.12}$$

para cada $k, j \in \mathbb{Z}_+$. Além disso, temos que

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}. \tag{1.13}$$

Em particular,

$$\binom{\alpha}{\beta} \leqslant 2^{|\alpha|},$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \leqslant \alpha$.

Usando a expansão de Taylor temos

$$t^N \leqslant N!e^t, \forall l > 0 \text{ e } N \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.14}$$

Em particular $N^N \leqslant N!e^N$. Ademais, como $N! \leqslant N^N$ temos que $t^N \leqslant N^N e^t$.
Além disso,

$$\sum_{r=1}^{m} r! \sum_{P(m,r)} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{k_j} = \binom{m-1}{r-1} \leqslant \binom{m}{r} \leqslant 2^m \tag{1.15}$$

onde $P(m,r) = \{(k_1, ..., k_m); k_j \in \mathbb{Z}^+, \sum_{j=1}^m k_j = r, \sum_{j=1}^m jk_j = m\}$ veja [3]. Por fim, observe que, o número de multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ satisfazendo $|\alpha| \leqslant m$ é $\binom{m+n}{m}$, e o número de multi-índices satisfazendo $|\alpha| = m$ é $\binom{m+n-1}{n-1}$.
Por fim, relembre a definição da função Gamma (Γ) de Euler

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda}\lambda^{t-1}d\lambda,$$

para $t > 0$.

1.8 Formas de Diferenciais

Definição 15. *Sejam E e F espaços vetoriais, uma aplicação r-linear $f \in \mathcal{L}_r(E;F)$ diz-se alternada quando $f(v_1, \cdots, v_r) = 0$ sempre que há repetição na sequência $v_1, \cdots, v_r$.*

O conjunto $\mathcal{U}_r(E;F)$ denota as aplicações r-lineares alternadas de E em F. No caso em que $F = \mathbb{R}$ escreveremos apenas $\mathcal{U}_r(E)$.

Definição 16. *Uma forma diferencial de grau r num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $w : U \to \mathcal{U}_r(\mathbb{R}^n)$. Para cada $x \in U$, $\omega(x)$ é uma aplicação r-linear alternada em $\mathbb{R}^n$.*

Sejam E um espaço vetorial de dimensão n e E^* o seu dual.

Definição 17. *O produto exterior de r funcionais lineares $f_1, \cdots, f_r \in E^*$ é a forma r-linear $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r \in \mathcal{U}_r(E)$ definida por*

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(v_1, \cdots, v_r) = \det[f_i(v_j)].$$

Podemos enxergar o conjunto das formas diferenciais como um espaço vetorial, de modo que a sua base consiste nas formas $d_{x_I} = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$ onde $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$ percorre todos os subconjuntos com r elementos do conjunto $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. Então, para cada $x \in U$, temos $w(x) = \sum_I a_I(x) dx_I$, onde os $a_I(x) = w(x) \cdot (e_{i_1}, \cdots, e_{i_r})$ são as coordenadas de $w(x)$ relativas à base composta pelos d_{x_I}. Quando as funções $a_i : U \to \mathbb{R}$ são de classe C^k, diz-se que ω é uma forma de classe C^k.

Uma superfície com fronteira M é*orientável* quando admite um atlas coerente, isto é, um conjunto $\mathcal{U}$ de parametrizações cujas imagens cobrem M. E, dadas $\phi : U_0 \to U$ e $\psi : V_0 \to V$ duas parametrizações tais que $U \cap V \neq$, temos que a mudança de parametrização $\xi = \psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ tem determinante da jacobiana positivo em todos os pontos. O par $(M,\mathcal{U})$, chama-se uma *superfície orientada* e dizemos que as parametrizações $\phi \in \mathcal{U}$ são positivas.

O caso em que ω é uma forma diferencial de grau m na superfície M de dimensão m. Se $\omega(x) = a(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_m = b(v)dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_m$ então $a(u) = \det J\xi(u)b(v)$ onde $u \in \phi^{-1}(U \cap V)$.

Teorema 10. *(Stokes) Seja ω uma forma diferencial de grau m e classe C^1, com suporte compacto na superfície orientada M, de dimensão $m+1$, com fronteira ∂M. Então $\int_M d\omega = \int_{\partial M} w$.*

Demonstração. Veja [4]. $\square$

Observação 6. Considere f holomorfa, por definição, sua diferencial é:

$$d[f(\zeta)d\zeta] = \sum_{j=1}^{n} \partial_{\zeta_j} f(\zeta) d\zeta_j \wedge d\zeta + \sum_{j=1}^{n} \partial_{\bar{\zeta}_j} f(\zeta) d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta, \tag{1.16}$$

em que $d\zeta = d\zeta_1 \wedge ... \wedge d\zeta_n$. Como, $d\zeta_j \wedge d\zeta = 0$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_{\zeta_j} f(\zeta) d\zeta_j \wedge d\zeta = 0. \tag{1.17}$$

Além disso, como f é holomorfa, temos que $\partial_{\bar{\zeta}_j} f(\zeta) = 0$, assim

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_{\bar{\zeta}_j} f(\zeta) d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta = 0. \tag{1.18}$$

Por (1.16), (1.17), (1.18) temos $d[f(\zeta)d\zeta] = 0$. Daí, pelo Teorema 10 temos que

$$\int_{\partial M} f(\zeta) d\zeta = 0 \tag{1.19}$$

Capítulo

2

Caracterizações das Classes Gevrey

2.1 Construção de uma classe de Transformadas FBI

Em 1973, Brós e Iagnolnitzer introduziram uma transformada que se mostrou bem apropriada para o estudo de regularidade analítica:

$$\mathcal{F}u(x,\xi) = \langle u(x'), e^{i\xi(x-x')-|\xi||x-x'|^2}\rangle,\ u \in \mathcal{E}'(R^n).$$

Nesta seção, apresentaremos uma classe da transformada Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI).

Para $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos $\langle y\rangle = (1 + \sum_{j=1}^n {y_j}^2)^{\frac{1}{2}}$, que é bem definido e holomorfo em uma vizinhança cônica $\Gamma \in \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Seja $(x, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Para cada $\gamma \in [0, 1]$, consideremos a forma diferencial ω,

$$\omega = dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \wedge d(\xi_1 + ix_1\langle\xi\rangle^\gamma) \wedge ... \wedge d(\xi_n + ix_n\langle\xi\rangle^\gamma),$$

e definimos uma função α_γ de modo que

$$\omega = \alpha_\gamma(x, \xi)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \wedge d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_n.$$

Para $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $(x, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \Gamma$ e $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ definimos

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) = \langle u(x'), e^{i(x-x').\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi)\rangle, \tag{2.1}$$

onde a notação acima $u(x')$é usada para destacar que a distribuição está agindo em uma função em relação a variável x', ademais x e ξ são parâmetros. Vale destacar que

$$i(x-x')\xi - \langle\xi\rangle^\gamma(x-x')^2 = i\sum_{j=1}^n(x_j - x'_j)\xi_j - \langle\xi\rangle^\gamma \sum_{j=1}^n(x_j - x'_j)^2.$$

Note que quando $\gamma = 1$ temos a FBI clássica. O fato de u ter suporte compacto é fundamental para boa definição de $\mathcal{F}_\gamma u$.

Iremos fazer algumas observações com respeito aos objetos que definimos acima. A primeira é a respeito da regularidade de α_γ.

Observação 7. α_γ é holomorfa com respeito a x.

De fato, defina $\phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tal que

$$\phi(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) = (x_1, ..., x_n, \xi_1 + ix_1\langle\xi\rangle^\gamma, ..., x_n\langle\xi\rangle^\gamma).$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x_k}(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) &= (e_k; \langle\xi\rangle^\gamma e_k);\\
\frac{\partial\phi}{\partial \xi_k}(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) &= (0, e_k + i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_k x),
\end{aligned}$$

para cada $k \in \{1, ..., n\}$. Daí a jacobiana de ϕ é dada por

$$J = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\langle\xi\rangle^\gamma & 0 & \cdots & 0 & 1 + i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_1x_1 & \cdots & i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_nx_1\\
0 & \langle\xi\rangle^\gamma & \cdots & 0 & i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_1x_2 & \ddots & i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_nx_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \langle\xi\rangle^\gamma & i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_1x_n & \cdots & 1 + i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_nx_n
\end{bmatrix}.$$

Considerando

$$A_\gamma(x, \xi) = \begin{bmatrix}
1 + i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_1x_1 & \cdots & i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_nx_1\\
i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_1x_2 & \cdots & i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_nx_2\\
\vdots & \cdots & \vdots\\
i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_nx_n & \cdots & 1 + i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_nx_1
\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

temos que

$$\alpha_\gamma(x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n) = \det J = \det A_\gamma(x, \xi) \tag{2.3}$$

Donde

$$\det A_\gamma = \sum_\sigma \epsilon_\sigma i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_1 x_{\sigma(1)} \cdots (1 + i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2})\xi_j x_{\theta(j)} \cdots i\gamma\langle\xi\rangle^{\gamma-2}\xi_n x_{\sigma(n)},$$

com a soma nas permutações $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

Observação 8. A derivada de α_γ é limitada.

De fato, $\partial^p_{y_k}(\alpha_\gamma(x-y,\eta)) = \partial^p_{y_k}(\det A_\gamma)$ onde A_γ é dado por 2.2. Temos que $\alpha_\gamma(x-y,\eta)$ é escrita como o produto da soma de parcelas de dois tipos: $1 + i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l)$ e $i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l)$. Assim,

$$\partial^p_{y_k}(1 + i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l)) = \begin{cases} 1 + i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l), \text{ se } p = 0 \\ -i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}n_j\delta_{jl}, \text{ se } p = 1 \\ 0, \text{ se } p \geqslant 2 \end{cases};$$

$$\partial^p_{y_k}(i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l)) = \begin{cases} i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l), \text{ se } p = 0 \\ -i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}n_j\delta_{jl}, \text{ se } p = 1 \\ 0, \text{ se } p \geqslant 2 \end{cases}.$$

Como $\langle\eta\rangle = (1 + \sum_{j=1}^n |\eta_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ temos que

$$\langle\eta\rangle^{\gamma-2}|\eta_j| \leqslant \langle\eta\rangle^{\gamma-2}\langle\eta\rangle = \langle\eta\rangle^{\gamma-1} \leqslant ((1 + |\eta|^2|)^{\frac{1}{2}})^{\gamma-1} \leqslant 1,$$

já que $\gamma - 1 < 0$. Além disso, se $y \in \operatorname{supp} u \subset B(0, R)$ e x está em um conjunto limitado, temos então que $|x_l - y_l|$ é limitado, digamos por C. Daí

$$|\partial^p_{y_k}(1 + i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l))| \leqslant 1 + C, \tag{2.4}$$

$$|\partial^p_{y_k}(i\langle\eta\rangle^{\gamma-2}\eta_j(x_l - y_l))| \leqslant C. \tag{2.5}$$

Além disso, observe que, se $\phi \in C_c^n(\mathbb{R}^n)$ então

$$\partial_{y_k}^m(\phi(x')\alpha(x-x',\xi)) = \sum_{p+q=m} \binom{m}{p} \partial_{y_k}^p(\phi(x'))\partial_{y_k}^q(\alpha(x-x',\xi)).$$

Note que existe $C = C_\phi$ tal que $|\partial_{x'_k}^p \phi(x')| \leqslant C$, $\forall\, p \in \{0,1,...,n+1\}$, $x' \in \operatorname{supp}\phi$ e $k \in \{1,2,..,n\}$. Por (2.4) e (1.13) temos que existe $C > 0$ (redefinindo as constantes C acima) tal que

$$\partial_{x'_k}^m(\phi(x')\alpha(x-x',\xi)) \leqslant C2^m \tag{2.6}$$

para $x' \in \operatorname{supp}\phi \cup \operatorname{supp} u$, x em um compacto dado e $m \leqslant n$.

2.2 Estimativas gerais para transformada FBI

Nesta seção apresentaremos estimativas importantes no estudo de transformadas FBI. Para o que segue, será fundamental a seguinte estimativa:

Lema 2.

$$\partial_y^m(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}) \leqslant m!^{\frac{1}{2}} 8^m e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2} |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}, \;\; \forall\xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

Demonstração. Observe que, $\partial_y^m\{e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\} = \prod_{l=1}^n \partial_{y_l}^m\{e^{ix_l\xi_l-\langle\xi\rangle^\gamma(x_l-y_l)^2}\}$. Utilizando (1.2),

$$\partial_y^m\{e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\} = \sum_{r=1}^m e^{ix.\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2} \sum_{P(m,r)} m! \prod_{j=1}^m \frac{[\partial_{y_l}^j G]^{k_j}}{k_j[j!]^{k_j}}$$

onde $G = x\xi - \langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2$, $P(m,r) = \{(k_1,\cdots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=1}^m k_j = r, \sum_{j=1}^m jk_j = m\}$. Como $\partial_{y_l}^1 = 2\langle\xi\rangle^\gamma(x_l-y_l)$, $\partial_{y_l}^2 = 2\langle\xi\rangle^\gamma$ e $\partial_y^j G = 0$ para $j \geqslant 3$, podemos considerar a soma sobre um subconjunto de $P(q,r)$, considerando apenas as derivadas de ordem menor que três. Assim, denotando $P_2(m,r) = \{(k_1,k_2) \in \mathbb{N}_0^2 : k_1+k_2 = r, k_1+2k_2 = m\}$, nós temos

$$\left|\partial_y^m\{e^{i\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\}\right| \leqslant \sum_{r=1}^m |e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}| \sum_{P_2(m,r)} m! \frac{|2\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)|^{k_1}|2\langle\xi\rangle^\gamma|^{k_2}}{k_1!k_2!1!^{k_1}2!^{k_2}}$$

Usando que $r = k_1 + k_2 = \frac{k_1}{2} + \frac{m}{2}$ obtemos que

$$\left|\partial_y^m \{e^{ix.\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}\}\right| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{P_2(m,r)} \frac{m! 2^{k_1}}{k_1! k_2!} [e^{-2\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} |\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2|^{k_1}]^{\frac{1}{2}} |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}$$

Usando (1.14), $k_1!^{\frac{1}{2}} k_2! \leqslant m!^{\frac{1}{2}}$, $m! \leqslant 2^m r!(2k_2)! \leqslant 2^{m+2k_2} k_1! k_2!^2$ e lembrando que $P_2(m,r) \subset P(m,r)$ temos que

$$\begin{aligned}\left|\partial_y^m \{e^{ix.\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}\}\right| &\leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{P_2(m,r)} \frac{m! 2^{k_1}}{k_1! k_2!} [e^{-2\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} e^{\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} k_1!]^{\frac{1}{2}} |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}} \\ &\leqslant m!^{\frac{1}{2}} 4^m e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} |\langle\xi\rangle|^{\frac{m}{2}} \sum_{r=1}^{m} \sum_{P(m,r)} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{k_j!}\end{aligned}$$

Usando (1.15) temos que

$$\left|\partial_y^m \{e^{ix.\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}\}\right| \leqslant m!^{\frac{1}{2}} 8^m e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} |\langle\xi\rangle|^{\frac{m}{2}}.$$

□

Lema 3. *Dado $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que*

$$|\mathcal{F}_\gamma \phi(x,\xi)| \leqslant \frac{C}{1 + |\xi|^{n+1}} \in L^1$$

(veja (2.1) para definição de $\mathcal{F}_\gamma$.)

Demonstração. Primeiro observe que, como $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})^n$ temos

$$\mathcal{F}_\gamma \phi(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{i(x-x').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2} \alpha_\gamma(x-x',\xi) dx'.$$

Considere

$$F(x,x',\xi) = \phi(x) e^{ix\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2} \alpha_\gamma(x-x',\xi).$$

Daí

$$\mathcal{F}_\gamma \phi(x',\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,x',\xi) e^{-ix'\xi} dx'$$

Fixando $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, existe $k \in \{1, 2 \cdots, n\}$ tal que $|\xi| \leqslant n|\xi_k|$. Assim, $1/|\xi_k| \leqslant n/|\xi|$.

Multiplicando por $|\xi|^m$ temos que,

$$|\xi|^m|\mathcal{F}_\gamma\phi(x',\xi)| \leqslant |(n\xi_k)^m\mathcal{F}_\gamma\phi(x',\xi)| \tag{2.8}$$

já que $\partial^m_{x'_k}(e^{-ix'\xi}) = (-i\xi_k)^m e^{-ix'\xi}$ temos

$$|\xi_k|^m|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant \left|\frac{\eta^m}{(-i)^m}\int_{\mathbb{R}^n} F(x',\xi)\partial^m_{x'_k}(e^{-ix'\xi})dx'\right|.$$

Além disso, pelo o fato de ϕ ter suporte compacto, integrando por partes, temos que

$$|\xi_k|^m|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant \left|\frac{\eta^m}{(-i)^m}\int_{\mathbb{R}^n} \partial^m_{x'_k}(F(x,x',\xi))e^{-ix'\xi}dx'\right|.$$

Utilizando (1.1), temos

$$\partial^m_{x'}(F(x,x',\xi)) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\partial^{m-j}_{y_k}(\phi(x')\alpha_\gamma(x-x',\xi))\partial^j_{y_k}(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}).$$

Por (2.6) para cada m existe $C = C_{m,\phi}$ tal que

$$\partial^m_{x'_k}(\phi(x')\alpha(x-x',\xi)) \leqslant C2^m, \forall(x,x',\xi) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \tag{2.9}$$

e, por (2.7) temos que $\partial^j_{x'_k}(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}) \leqslant m!^{\frac{1}{2}}8^m e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}|\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}, \forall(x,x',\xi) \in \mathbb{R}^n\times$ $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Daí,

$$|\partial^m_{x'_k}(F(x,x',\xi))| \leqslant C2^m2^m m!^{\frac{1}{2}}8^m e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}|\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}, \forall(x,x',\xi) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

Observando que, $e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2} \leqslant 1$, existe $C_1 > 0$ tal que $|\partial^m_{x'}F(x,x',\xi)| \leqslant C_1|\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}$. Como ϕ possui suporte compacto e $\langle\xi\rangle = (1+|\xi^2)^{\frac{1}{2}}$ existe $C_2 > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant \frac{C_2(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{4}}}{|\xi|^m}.$$

Assim, para $|\xi| \geqslant 1$ temos $|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant C_2 2^{\frac{m}{4}}|\xi|^{\frac{m}{2}-m} = C_2 2^{\frac{m}{4}}|\xi|^{-\frac{m}{2}}$. Escolhendo $m = 2(n+1)$ existe $C_3 > 0$ tal que $|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant C_3|\xi|^{-(n+1)}$, quando $|\xi| \geqslant 1$. Como $\operatorname{supp}\Phi$ é compacto, existe $C_4 > 0$ tal que $|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant C_4, \forall\xi \in \mathbb{R}^n$. Assim, existe $C_5 > 0$ tal que

$|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant C_5$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Por fim,

$$|\mathcal{F}_\gamma\phi(x,\xi)| \leqslant \frac{C_5}{1+|\xi|^{n+1}} \in L^1.$$

$\square$

Lema 4. *Para todo $\theta > 0$ existe $C_\theta > 0$ tal que*

$$|\partial_{x'}^m\{e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(z-x')^2}\}| \leqslant C_\theta^m m! e^{\frac{-\langle\xi\rangle^\gamma}{2}(x-x')^2} e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y^2} e^{\frac{\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n, x, y, x' \in \mathbb{R}$, $z = x+iy, m \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Usando (1.2) temos que

$$\left\{\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}\right\} = \sum_{r=1}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2} \sum_{P(m,r)} m! \prod_{j=1}^m \frac{[\partial_{x'}^j\{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2\}]^{k_j}}{k_j![j!]^{k_j}}$$

onde $P(m,r) = \{(k_1,...,k_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=1}^m = r, \sum_{j=1}^m jk_j = m\}$. Como $\partial_{x'}^j\{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2\} = 0$ para $j \geqslant 3$, considerando $P_2(m,r) = \{(k_1,k_2) \in \mathbb{N}_0^2 : k_1+k_2 = r, k_1+2k_2 = m\}$, segue que

$$|\partial_{x'}^m\left\{e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}\right\}| \leqslant \sum_{r=1}^m |e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \sum_{P_2(m,r)} m! \frac{|2\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')|^{k_1}|2\langle\xi\rangle^\gamma|^{k_2}}{k_1!k_2!1!^{k_1}2!^{k_2}}.$$

Note que $\Re((x+iy-x')^2) = (x-x')^2 - y^2$. Além disso, $|e^{(x+iy-x')^2}| = e^{(x-x')^2-y^2}$ e $|x+iy-x'| \leqslant |x-x'|+|y|$. Assim, segue que

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \leqslant \sum_{r=1}^m \sum_{P_2(m,r)} \frac{m!2^{k_1}}{k_1!k_2!} e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)}(|x-x'|+|y|)^{k_1}|\langle\xi\rangle^\gamma|^r$$

Usando (1.11), temos

$$(|x-x'|+|y|)^{k_1} = \sum_{l=0}^{k_1}\binom{k_1}{l}|x-x'|^l|y|^{k_1-l}.$$

Daí, usando que $r = k_1 + k_2 = \frac{k_1+2k_2}{2} + \frac{k_1}{2} = \frac{m}{2} + \frac{k_1}{2}$, temos

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{P_2(m,r)} \frac{m!2^{k_1}}{k_1!k_2!} e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)} \sum_{l=0}^{k_1} \binom{k_1}{l} |\langle\xi\rangle|^{\frac{k_1}{2}} |x-x'|^l |y|^{k_1-l} |\langle\xi\rangle|^{\frac{m}{2}}.$$

Assim,

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{P_2(m,r)} \frac{m!2^{k_1}}{k_1!k_2!} e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)} \sum_{l=0}^{k_1} \binom{k_1}{l} l!^{\frac{1}{2}} (k_1-l)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left[\frac{|\langle\xi\rangle^\gamma|^{k_1-l} |y|^{2(k_1-l)}}{(k_1-l)!)} \frac{|\langle\xi\rangle^\gamma|^l |x-x'|^{2l}}{l!} \right]^{\frac{1}{2}} |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}$$

e, usando (1.14) e (1.13)

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{P_2(m,r)} \frac{m!4^{k_1} l!^{\frac{1}{2}} (k_1-l)!^{\frac{1}{2}}}{k_1!k_2!} \left[e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|y|^2} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|x-x'|^2} \right] |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}.$$

Assim, por (1.12)

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{P_2(m,r)} \frac{m!4^{k_1} k_1!^{\frac{1}{2}}}{k_1!k_2!} \left[e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|y|^2} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|x-x'|^2} \right] |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}.$$

Observe que $m!k_1! \leqslant (m+k_1)! = (k_1+2k_2+k_1)! \leqslant 2^{2r} r!r!$ e daí,

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \sum_{P_2(m,r)} \frac{8^m r! m!^{\frac{1}{2}}}{k_1!k_2!} \left[e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|y|^2} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|x-x'|^2} \right] |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}}.$$

Como $P_2(m,r) \subset P(m,r)$, temos

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2}| \leqslant m!^{\frac{1}{2}} 8^m \left[e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|y|^2} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|x-x'|^2} \right] |\langle\xi\rangle^\gamma|^{\frac{m}{2}} \sum_{r=1}^{m} r! \sum_{P(m,r)} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{k_j}.$$

Assim , usando (1.15)

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(z-x')^2}| \leqslant m!^{\frac{1}{2}} 16^m \left[e^{-\langle\xi\rangle^\gamma((x-x')^2-y^2)} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|y|^2} e^{\frac{\langle\xi\rangle^\gamma}{2}|x-x'|^2} \right] |\langle\xi\rangle^{\frac{\gamma m}{2}}|.$$

Agora, dado $\theta > 0$, observe que

$$\langle\xi\rangle^{\gamma\frac{m}{2}} = \left[\frac{\theta^m\langle\xi\rangle^{\gamma m}}{m!}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{m!^{\frac{1}{2}}}{\theta^{\frac{m}{2}}} \leqslant e^{\frac{\theta}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}}\frac{m!^{\frac{1}{2}}}{\theta^{\frac{m}{2}}}.$$

Daí

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(z-x')^2}| \leqslant \frac{16^m}{\theta^{\frac{m}{2}}} m! e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma(x-x')^2} e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y^2} e^{\frac{\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}.$$

Portando, considerando $C_\theta = \frac{16}{\theta^{\frac{1}{2}}}$, temos que

$$|\partial_{x'}^m e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(z-x')^2}| \leqslant C_\theta^m m! e^{\frac{-\langle\xi\rangle^\gamma}{2}(x-x')^2} e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y^2} e^{\frac{\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}, (z,x',\xi) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

□

Lema 5. *Se $u \in \mathcal{E}'$ e $u \equiv 0$ em uma vizinhança de x_0 então existe uma vizinhança aberta V de x_0 e existem $\delta, C > 0$ tais que*

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| \leqslant Ce^{-\delta|\xi|^\gamma},\ \forall\, x \in V,\ \ e\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Considere $r > 0$ tal que $u \equiv 0$ em $B(x_0, r)$ e $R > 0$ tal que $\operatorname{supp} u \subset B(x_0, R)$. Defina $\psi \in C_c^\infty(B(x_0, 2R) - B(x_0, \frac{r}{2}))$ tal que $\psi \equiv 1$ em $A = \{x \in \mathbb{R}^n; r \leqslant |x - x_0| \leqslant R\}$. Assim

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| = |\mathcal{F}_\gamma \psi u(x,\xi)|.$$

De fato, por definição,

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) = \langle u, e^{i(x-y).\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle.$$

Somando e subtraindo ψu e usando a linearidade temos que

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) = \langle\psi u, e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle + \langle(1-\psi)u, e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle$$

Assim,

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) = \langle \psi u, e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle + \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)u](x,\xi)$$

Usando o fato de $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,$\psi \equiv 1$ em $\overline{B(0,R)}\backslash B(0,r)$ e $u \equiv 0$ em $B(0,r)$ temos

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) = \langle u(y)\psi(y), e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle = \mathcal{F}_\gamma(\psi u)(x,\xi)$$

Mais ainda, usando temos $C > 0$ tal que (1.4) temos

$$|\mathcal{F}_\gamma \psi u(x,\xi)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{\frac{r}{2}<|x-x_0|<2R} |\partial^\alpha(\psi(y)e^{i(x-y).\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi))|$$

A seguir vamos estimar

$$\partial_y^\alpha(\psi(x)e^{i(x-y').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi))$$

Por (1.1) temos

$$\partial_y^\alpha \left\{\psi(y)e^{i(x-y).\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\right\} = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial_y^{\alpha-\beta}(\psi(y)\alpha_\gamma(x-y,\xi))\partial_y^\beta(e^{i(x-y').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2})$$

Por (2.6) temos que

$$|\partial_y^{\alpha-\beta}(\psi(y)\alpha_\gamma(x-y,\xi))| \leqslant C2^{|\alpha-\beta|}$$

Usando Lema 4, temos que $\forall\theta > 0\, \exists C_\theta > 0$ tal que

$$|\partial_y^\alpha(e^{i(x-y').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2})| \leqslant C_\theta e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} e^{\theta\langle\xi\rangle^\gamma}|\alpha|!.$$

Por outro lado, $\frac{r}{2} < |x-x_0| < 2R$. Daí, $|x-y| \geqslant |x-x_0| - |y-y_0| > \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4}$ quando $|y-x_0| < \frac{r}{4}$. Fazendo $a = \frac{r^2}{16}$ e usando (1.14) temos

$$\sup_{\frac{r}{2}<|x-x_0|<2R}\left|\partial_y^\alpha\{e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}\}\right| \leqslant C_2 e^{-a\langle\xi\rangle} e^{\langle\xi\rangle^\gamma}|\alpha|!.$$

Portanto, escolhendo $\theta = \frac{a}{2}$ temos $C_3 > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}_\gamma(x,\xi)| \leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C_3 e^{\frac{-a\langle\xi\rangle^\gamma}{2}} = C_4 e^{\frac{-a}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}$$

quando $|y - x_0| < \frac{r}{4}$. Por fim, observe que $|\xi|^\gamma \leqslant (1+|\xi|^2)^{\frac{\gamma}{2}} = \langle\xi\rangle^\gamma$. $\square$

Lema 6. *Considere* $Q(x+iy,x',\xi) = i(x+iy-x')\xi - \langle\xi\rangle^\gamma(x+iy-x')^2$. *Para todo* $\theta,\lambda > 0$ *existe* $C_{\theta,\lambda}$ *tais que*

$$|\partial_{x'}^\alpha\{e^{Q(x+iy,x',\xi)}\}| \leqslant C_{\theta,\lambda}^{|\alpha|}e^{-y\xi}e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^\gamma(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y^2}e^{(\frac{n\theta}{2}+\frac{\lambda\gamma}{\gamma})\langle\xi\rangle^\gamma}$$

para $z = x+iy$ *e* $(\alpha,x,y,x',\xi)\in\mathbb{N}_0^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Por (1.1) temos que

$$\partial_{x'}^\alpha\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(z-x')^2}\} = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(-i\xi)^{\alpha-\beta}e^{i(x+iy-x')\xi}\prod_{k=1}^{n}\partial_{x'_k}^{\beta_k}\{e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x_k-iy_k-x'_k)^2}\}$$

onde $\beta = (\beta_1,..\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $x = (x_1,...,x_n)$, $y = (y_1,...,y_n)$ e $x' = (x'_1,...,x'_n)$. Usando o Lema 4, para cada $\theta > 0$ existe $C_\theta > 1$ tal que

$$|\partial_{x'_k}^{\beta_k}\{e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x_k+iy_k-x'_k)^2}\}| \leqslant C_\theta^{|\beta_k|}\beta_k!e^{\frac{-\langle\xi\rangle^\gamma}{2}(x_k-x'_k)^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y_k^2}e^{\frac{\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}.$$

Como

$$\prod_{k=1}^{n}C_\theta^{|\beta_k|}\beta_k!e^{\frac{-\langle\xi\rangle^\gamma}{2}(x_k-x'_k)^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y_k^2}e^{\frac{\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma} \leqslant C_\theta^{|\beta|}\beta!e^{\frac{-\langle\xi\rangle^\gamma}{2}(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y^2}e^{\frac{n\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}$$

e $|e^{i(x+iy-x')\xi}| = e^{-y\xi}$, temos

$$\begin{aligned}|\partial_{x'}^\alpha\{e^{Q(x+iy,x',\xi)}\}| &\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\xi^{\alpha-\beta}|e^{-y\xi}C_\theta^{|\beta|}\beta!e^{\frac{-\langle\xi\rangle^\gamma}{2}(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y^2}e^{\frac{n\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}\\ &\leqslant e^{-y\xi}e^{\frac{-\langle\xi\rangle^\gamma}{2}(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^\gamma y^2}e^{\frac{n\theta}{2}\langle\xi\rangle^\gamma}\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\frac{|\xi|^{|\alpha-\beta|}\lambda^{|\alpha-\beta|}}{|\alpha-\beta|!^{\frac{1}{\gamma}}}\frac{|\alpha-\beta|!^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda^{|\alpha-\beta|}}C_\theta^\beta\beta!\end{aligned}$$

Logo,

$$|\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{Q(x+iy,x',\xi)}\}| \leqslant e^{-y\xi}e^{\frac{-\langle\xi\rangle^{\gamma}}{2}(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}y^2}e^{\frac{n\theta}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}}\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}e^{\frac{1}{\gamma}\lambda^{\gamma}|\xi|^{\gamma}}\frac{C_{\theta}^{|\beta|}}{\lambda^{|\alpha-\beta|}}|\alpha|!^{\frac{1}{\gamma}}$$

já que $\beta! = \beta_1!...\beta_n! \leqslant (\beta_1+...+\beta_n)! = |\beta|!$, $0<\gamma<1$ $\beta! \leqslant |\beta|! \leqslant |\beta|^{\frac{1}{\gamma}}$, $|\alpha-\beta| = |\alpha|-|\beta|$ e $|\alpha-\beta|!^{\frac{1}{\gamma}}\beta! \leqslant ((\alpha-\beta)!|\beta|!)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant |\alpha|!^{\frac{1}{\gamma}}$. Por outro lado,

$$\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(C_\theta,...,C_\theta)^{\beta} = \left[(C_\theta+\frac{1}{\lambda})(1,...,1)\right]^{\alpha}.$$

Assim, existe $\tilde{C}_{C,\lambda}$ de modo que

$$|\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{Q(x+iy,x',\xi)}\}| \leqslant e^{-y\xi}e^{\frac{-\langle\xi\rangle^{\gamma}}{2}(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}y^2}e^{\frac{n\theta}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}}|\alpha|!^{\frac{1}{\gamma}}[\tilde{C}_{\theta,\lambda}]^{|\alpha|}e^{\frac{\lambda^{\gamma}\langle\xi\rangle^{\gamma}}{\gamma}}.$$

Consequentemente, usando que $|\xi|^{\gamma} \leqslant \langle\xi\rangle^{\gamma}$

$$|\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{Q(x+iy,x',\xi)}\}| \leqslant e^{-y\xi}e^{\frac{-\langle\xi\rangle^{\gamma}}{2}(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}y^2}e^{(\frac{n\theta}{2}+\frac{\lambda^{\gamma}}{\gamma})\langle\xi\rangle^{\gamma}}C_{\theta,\lambda}^{|\alpha|}.$$

□

Lema 7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Dado $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ então, para cada $\theta > 0$, existem $C = C_\theta > 0$ e $a, b > 0$ tais que*

$$|\mathcal{F}_{\gamma}u(z,\xi)| \leqslant C_\theta e^{-y\xi}e^{by^2\langle\xi\rangle^{\gamma}}e^{\theta\langle\xi\rangle^{\gamma}}\sup_{x'\in K}e^{-a\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2}$$

para cada $(z,\xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n$, $z = x+iy$ e $K = \operatorname{supp} u$.

Demonstração. Pela definição da FBI, temos que

$$|\mathcal{F}_{\gamma}u(z,\xi)| = |\langle u(x'), e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_{\gamma}(z-x',\xi)\rangle|$$

Por outro lado, como $u \in \mathcal{E}'$ e $x' \mapsto e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_{\gamma}(z-x',\xi)$ é C^{∞}, por (1.5) existe

$C_K > 0$ e $m \in \mathbb{Z}^+$ tais que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(z,\xi)| \leqslant C_K \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x'\in K} |\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_\gamma(z-x',\xi)\}|$$

Usando (1.1)

$$\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_\gamma(z-x',\xi)\} = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial_{x'}^{\beta}\left\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\right\}\partial_{x'}^{\alpha-\beta}\left\{\alpha_\gamma(z-x',\xi)\right\}.$$

Pelo (6), existe $\theta = \tilde{\theta}(\lambda,\theta)$ tal que

$$\begin{aligned}&|\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_\gamma(z-x',\xi)\}|\\ &\leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha} C_{\theta,\lambda}^{|\alpha|}e^{-y\xi}e^{\frac{-1}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2}e^{\frac{3}{2}\langle\xi\rangle^{\gamma}y^2}e^{(\frac{n\theta}{2}+\frac{\lambda\gamma}{\gamma})\langle\xi\rangle^{\gamma}}|\partial_{x'}^{\alpha-\beta}\alpha_\gamma(z-x,\xi)|\end{aligned}$$

Observe que, por (2.4) temos

$$|\partial_{x'}^{\alpha-\beta}\alpha_\gamma(z-x,\xi)| \leqslant (1+\langle\xi\rangle^{\gamma-1}|x-x'+iy|)^n$$

Além disso, usando a desigualdade triangular e (1.11), temos que

$$(1+\langle\xi\rangle^{\gamma-1}|x-x'+iy|)^n \leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}|x-x'|^{j-k}|y|^k.$$

Manipulando os termos, temos que dados $\theta_1,\theta_2 > 0$ existe C_{θ_1,θ_2} tal que

$$\begin{aligned}&(1+\langle\xi\rangle^{\gamma-1}|x-x'+iy|)^n\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\left[\frac{(\langle\xi\rangle^{2(\gamma-1)}\theta_1|x-x'|^2)^{(j-k)}}{(j-k)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\langle\xi\rangle^{2(\gamma-1)}\theta_2|y|^2}{k!}\right]^{\frac{1}{2}}(C_{\theta_1,\theta_2})^j j!^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Usando (1.14) temos

$$(1+\langle\xi\rangle^{\gamma-1}|x-x'+iy|)^n \leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)}\theta_1|x-x'|^2}e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)}|y|^2}(C_{\theta_1,\theta_2})^j j!^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)}\theta_1|x-x'|^2}e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(}\gamma-1)\theta_2|y|^2}(C_{\theta_1,\theta_2})^j j!^{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$(1+\langle\xi\rangle^{\gamma-1}|x-x'+iy|)^n \leqslant e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)}\theta_1|x-x'|^2}e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)}\theta_2|y|^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(C_{\theta_1,\theta_2})^j j!^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, usando que $\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\leqslant 2^j$, segue que

$$(1+\langle\xi\rangle^{\gamma-1}|x-x'+iy|)^n \leqslant e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)}\theta_1|x-x'|^2}e^{\frac{1}{2}\langle\xi\rangle^{(\gamma-1)}\theta_2|y|^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j(C_{\theta_1,\theta_2})^j j!^{\frac{1}{2}}.$$

Tomando $\theta_1=\frac{1}{2}$, $\theta_2=\frac{1}{2}$ e redefinindo $\tilde{C}_\theta=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j(C_{\theta_1,\theta_2})^j j!^{\frac{1}{2}}$ temos que

$$|\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_\gamma(z-x',\xi)\}| \leqslant e^{\frac{-1}{4}\langle\xi\rangle^{\gamma}|x-x'|^2}e^{\frac{7}{4}\langle\xi\rangle^{\gamma}y^2}e^{-y\xi}e^{\tilde{\theta}\langle\xi\rangle^{\gamma}}\tilde{C}_\theta$$

onde $\tilde{\theta}=(\frac{n\theta}{2}+\frac{\lambda^\gamma}{\gamma})$ e $\tilde{C}_\theta=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j(C_{\theta_1,\theta_2})^j j!^{\frac{1}{2}}$. Definindo $a=\frac{1}{4}$ e $b=\frac{7}{4}$ temos que

$$|\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_\gamma(z-x',\xi)\}| \leqslant e^{-a\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2}e^{b\langle\xi\rangle^{\gamma}y^2}e^{-y\xi}e^{\tilde{\theta}\langle\xi\rangle^{\gamma}}.$$

Tomando o supremo de ambos os lados temos que

$$\sup_{x'\in K}|\partial_{x'}^{\alpha}\{e^{i(z-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(z-x')^2}\alpha_\gamma(z-x',\xi)\}| \leqslant e^{b\langle\xi\rangle^{\gamma}y^2}e^{-y\xi}e^{\tilde{\theta}\langle\xi\rangle^{\gamma}}\sup_{x'\in K}e^{-a\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2}$$

□

Lema 8. *Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *aberto e* $u\in\mathcal{E}'(\Omega)$ *então, para cada* $\theta>0$, *existem* $C_\theta>0$ *e* $b>0$ *tais que*

$$|\mathcal{F}_\gamma u(z,\xi))| \leqslant C_\theta e^{-y\xi}e^{-by^2\langle\xi\rangle^{\gamma}}e^{\theta\langle\xi\rangle^{\gamma}}$$

para cada $(z,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n$, $z=x+iy$.

Demonstração. Usando Lema 7, temos que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(z,\xi))| \leqslant C_\theta e^{-y\xi} e^{-by^2\langle\xi\rangle^\gamma} e^{\theta\langle\xi\rangle^\gamma} \sup_{x'\in K} e^{-b\langle\xi\rangle^\gamma(x-x')}$$

Como $\sup_{x'\in K} e^{-a\langle\xi\rangle^\gamma(x-x')} \leqslant 1$ temos que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(z,\xi))| \leqslant C_\theta e^{-y\xi} e^{-ay^2\langle\xi\rangle^\gamma} e^{\theta\langle\xi\rangle^\gamma}$$

□

A próxima observação é uma consequência do lema das três retas.

Teorema 11. *Seja ψ uma função contínua limitada na faixa $[0,1]\times\mathbb{R}$ que é holomorfa em $(0,1)\times\mathbb{R}$. Se existem M_0, M_1 tais que $|\psi(ix_2)| \leqslant M_0$ e $|\psi(1+ix_2)| \leqslant M_1$, para cada $x_2\in\mathbb{R}$, então $|\psi(x_1+ix_2)| \leqslant M_0^{1-x_1}M_1^{x_1}$, $\forall(x_1,x_2)\in[0,1]\times\mathbb{R}$.*

Lema 9. *Assuma válidas as hipóteses do Lema 8. Se, além disso, supusermos que existe $x_0\in\Omega$ e constantes $C,a,r>0$ tais que*

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| \leqslant Ce^{-a\langle\xi\rangle^\gamma},\ \forall x\in B(x_0,nr)\ e\ \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

então existe $b_n = b_n(a,r,n)$ e $C_n = C(a,r)$ tais que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(z,\xi)| \leqslant C_n e^{\frac{-a}{2^n}\langle\xi\rangle^\gamma} e^{b_n|y||\xi|}$$

onde $z = x+iy$, $|x-x_0| < \frac{r}{2^n}$ e $|y|\leqslant 1$.

Demonstração. Denote $x_0 = (x_{(0,1)},...,x_{(0,n)})$. Defina

$$F(z_1) = \mathcal{F}_\gamma u(x_1,x_2,...x_n,\xi)e^{\frac{-2a}{r^2}(z_1-x_{(0,1)})^2\langle\xi\rangle^\gamma}, z\in\mathbb{C},$$

para alguma $(n-1)$-upla fixada $(x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ tal que $|x_j - x_{(0,j)}| < r$, $j\in\{2,3,...,n\}$. Note que,

1. Se $|x_1 - x_{(0,1)}| < r$ então

$$|F(x)| = |\mathcal{F}_\gamma u(x_1, x_2, ..., x_n, \xi) e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 - x_{(0,1)})^2 \langle \xi \rangle^\gamma}|. \tag{2.11}$$

   Como $|e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 - x_{(0,n)})^2 \langle \xi \rangle^\gamma}| \leqslant 1$, por (2.11) e (2.10)

$$|F(x)| \leqslant |\mathcal{F}_\gamma u(x_1, ..., x_n, \xi)| \leqslant C e^{-a\langle \xi \rangle^\gamma}$$

2. Se $|x_1 - x_{(0,1)}| \geqslant r$ então, pelo Lema 8 com $y = 0$, para cada $\theta > 0$, existe $C_\theta > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x_1, ..., n_n, \xi)| \leqslant C_\theta e^{\theta \langle \xi \rangle^\gamma}.$$

   Como $|x_1 - x_{(0,1)}| \geqslant r$ temos que $e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 - x_{(0,1)})^2 \langle \xi \rangle^\gamma} \leqslant e^{-2a\langle \xi \rangle^\gamma}$. Daí, lembrando a definição de F,

$$|F(x_1)| \leqslant C_\theta e^{(\theta - 2a)\langle \xi \rangle^\gamma}$$

   Tomando $\theta = a$, temos

$$|F(x_1)| \leqslant C_\theta e^{-a\langle \xi \rangle^\gamma}.$$

3. Juntando os dois itens acima $\exists C, a > 0$ tais que $|F(x_1)| \leqslant C e^{-a\langle \xi \rangle^\gamma}, \forall x_1 \in \mathbb{R}$.

4. Se $z_1 = x_1 + i$, $x_1 \in \mathbb{R}$ então

$$|F(x_1 + i)| \leqslant |\mathcal{F} u(x_1 + i, x_2, ..., x_n, \xi)| e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 + i - x_{(0,1)})^2 \langle \xi \rangle^\gamma}.$$

   Observe que

$$|e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 + i - x_{(0,1)})^2 \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}}| \leqslant e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 - x_{(0,1)})^2 \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}} e^{\frac{2a}{r^2}\langle \xi \rangle^\gamma}.$$

   Como $e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 - x_{(0,1)})^2 \langle \xi \rangle^{\frac{1}{s}}} \leqslant 1$. Pelo Lema 8 temos C'_θ

$$|F(x_1 + i)| \leqslant C'_\theta e^{|\xi|} e^{\theta \langle \xi \rangle^\gamma} e^{\frac{2a}{r^2}\langle \xi \rangle^\gamma} e^{b\langle \xi \rangle^\gamma}$$

   Como $\langle \xi \rangle^\gamma \leqslant (1 + |\xi|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \leqslant 1 + |\xi|$ temos $b_1 > 0$ tal que

$$|F(x_1 + i)| \leqslant C'_\theta e^{|\xi| b_1}$$

Portanto $\exists C_1 > 0$ tal que $|F(x)| \leqslant C_1 e^{-a\langle\xi\rangle^\gamma}$ e $|F(x+i)| \leqslant C_1 e^{b|\xi|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Daí, pelo Teorema 11,

$$|F(x_1 + iy_1)| \leqslant (C_1 e^{-a\langle\xi\rangle^\gamma})^{1-|y_1|}(C_1 e^{b_1|\xi|})^{|y_1|},\ \forall x_1 \in \mathbb{R} \text{ e } y_1 \in [0,2]$$

Por outro lado, como $\gamma \leqslant 1$, temos $(C_1 e^{-a\langle\xi\rangle^\gamma})^{1-|y_1|}(C_1 e^{b_1\langle\xi\rangle})^{|y_1|} = C_1 e^{-a\langle\xi\rangle^\gamma} e^{a\langle\xi\rangle|y_1|} e^{b_1\langle\xi\rangle|y_1|}$. Daí,

$$|F(x_1 + iy_1)| \leqslant C_1 e^{-a\langle\xi\rangle^\gamma} e^{(a+b_1)\langle\xi\rangle|y_1|}$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant y_1 \leqslant 1$. Analogamente, para $-1 \leqslant y_1 \leqslant 0$ temos

$$\begin{aligned}|F(x_1 + iy_1)| &= |\mathcal{F}_\gamma(x + iy, x_2, ..., x_n, \xi)||e^{\frac{-2a}{r^2}(x_1 + iy_1 - x_{(0,1)})^2\langle\xi\rangle^\gamma}| \\ &\leqslant C_1 e^{-a\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} e^{(a+b_1)\langle\xi\rangle|y_1|}, \forall x_1 \in \mathbb{R}\text{e } |y_1| \leqslant 1.\end{aligned}$$

Logo, dado $R > 0$ temos

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_\gamma u(x_1 + iy_1, x_2, ..., x_n, \xi)| &\leqslant C_1 e^{-a\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} e^{(a+b_1)\langle\xi\rangle|y_1|} e^{\frac{2a}{r^2}(x_1 - x_{(0,1)})^2\langle\xi\rangle^\gamma} e^{\frac{-2a}{r^2}y_1^2\langle\xi\rangle^\gamma} \\ &\leqslant C_1 e^{(-a + \frac{2aR^2}{r^2})\langle\xi\rangle^\gamma} e^{(a+b_1)\langle\xi\rangle|y_1|},\ \text{quando } |x_1 - x_{(0,1)}| < R\end{aligned}$$

Tomando $R = \frac{r}{2}$ temos então que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x_1 + iy_1, x_2, ..., x_n, \xi)| \leqslant C_1 e^{\frac{-a}{2}\langle\xi\rangle^\gamma} e^{(a+b_1)\langle\xi\rangle|y_1|}, |x_1 - x_{(0,1)}| < \frac{r}{2}\quad |y| \leqslant 1.$$

Analogamente existe $b_2 = b_2(b_1, a, r)$ e $C_2 > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \cdots, x_n; \xi)| \leqslant C_2 e^{-\frac{a}{4}\langle\xi\rangle^\gamma} e^{(a+b_2)|y_1|\langle\xi\rangle} e^{b_2|y_2|\langle\xi\rangle}$$

para $|x_1 - x_{(0,1)}| < \frac{r}{2^2}$, $|x_2 - x_{(0,2)}| < \frac{r}{2^2}$, $|x_j - x_{(0,j)}| < r$ $(j \in \{3, \cdots, n\})$, $|y_1| \leqslant 1$ e $|y_2| \leqslant 1$, Repetindo esse argumento temos que existe $C_n > 0$ de modo que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x_1 + iy_1; \cdots; x_n + y_n; \xi)| \leqslant C_n e^{-\frac{a}{2^n}\langle\xi\rangle^\gamma} e^{b_n|y||\xi|}$$

para $|x_j - x_{0,j}| \leqslant \frac{r}{2}\,(j \in \{1, \cdots, n\})$ e $|y_j| \leqslant 1(j \in \{1, \cdots, n\})$. □

É importante destacar que a observação acima ainda é válida quando trocamos γ por $1/s$ no lado direito e mantemos γ no lado esquerdo. Com $\frac{1}{s} < \gamma$.

Observação 9. Considere válidas as hipóteses do Lema 9. Se além disso supusermos a existência de $x_0 \in \Omega$, constantes $C, a, r > 0$

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| \leqslant Ce^{-a\langle\xi\rangle^\gamma} \text{ para todo } x \in B(x_0, nr) \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e} \xi \in \mathbb{R}^n,$$

então considerando $R < \min\{1, \frac{r}{4}\}$ segue que

$$|\partial_{x_n}^{\alpha_n} ... \partial {x_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| \leqslant \alpha! \frac{1}{R^{|\alpha|}} C_n e^{-\frac{a}{2^n}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} e^{b_n n R|\xi|}$$

quando $|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+1}}$. De fato, seja $x = (x_1, \cdots, x_n) \in B(x_0, \frac{r}{4n})$ e $R > 0$, segue da fórmula integral de Cauchy que:

$$\begin{aligned}
\partial_{x_n}^{\alpha_n} \cdots \partial_{x_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) &= \frac{\alpha_1!}{2\pi i} \int_{|z_1 - x_1| = R} \frac{\partial_{x_n}^{\alpha_n} \cdots \partial_{x_2}^{\alpha_2} \mathcal{F}_\gamma u(z_1, x_2, \cdots, x_n; \xi)}{(z_1 - x_1)^{\alpha_1 + 1}} dz_1 \\
&= \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1 - x_1| = R} \cdots \int_{|z_n - x_n| = R} \frac{\mathcal{F}_\gamma u(z_1, z_2, \cdots, z_n, \xi)}{(z_1 - x_1)^{\alpha + (1, \cdots, 1)}} dz_n \cdots dz_1.
\end{aligned}$$

Assim, considerando $R < \min\{1, \frac{r}{4}\}$ e usando a Observação 9 temos que

$$|\partial_{x_n}^{\alpha_n} \cdots \partial_{x_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| \leqslant \frac{|\alpha|}{(2\pi)^n} (2\pi R)^n \frac{1}{R^{|\alpha| + n}} C_n e^{\frac{-a}{2^n}\langle\xi\rangle^\gamma} e^{b_n n R|\xi|} \tag{2.12}$$

quando $|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+1}}$.

Observe que a observação acima segue analogamente trocando γ por $\frac{1}{s}$ apenas no lado esquerdo das desigualdades, desde que $\frac{1}{s} < \gamma$.

2.3 Fórmula de Inversão

A presente subseção é dedicada para apresentar fórmulas de inversão para a classe de transformadas FBI introduzida na Seção 2.1. Primeiro iremos mostrar que qualquer função suave, com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$, pode ser recuperada com a média de sua transformada FBI.

Lema 10. *Seja* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$*. Dado* $u \in C^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ *com suporte compacto e qualquer* $x \in \mathbb{R}^n$*, temos que*

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) d\xi.$$

Demonstração. Utilizando a fórmula da inversão da transformada de Fourier veja (1.7)

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-\epsilon\xi^2} \hat{u}(\xi) d\xi,$$

em que $\xi^2 = \sum_j \xi_j^2$ para $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Lembrando a definição da transformada de Fourier veja (1.6),

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-\epsilon\xi^2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x') e^{-ix'\xi} dx' d\xi.$$

Observe que

$$|u(x') e^{i(x-x')\xi - \epsilon\xi^2}| \leqslant \|u\|_\infty \mathcal{X}_{\operatorname{supp} u}(x') e^{-\epsilon\xi^2} \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n),$$

onde χ denota a função característica. Logo $u(x') e^{i(x-x')\xi - \epsilon\xi^2} \in L^1$. Aplicando o teorema de Fubini,

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} u(x') e^{i(x-x')\xi} e^{-\epsilon\xi^2} dx' d\xi. \tag{2.13}$$

Mais ainda, supondo $R > 0$ tal que $\operatorname{supp} u \subset B(0,R)$ temos

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{M \to \infty} \int_{B(0,R) \times B(0,M)} u(x') e^{i(x-x')\xi - \epsilon\xi^2} dx' d\xi. \tag{2.14}$$

Defina $\Gamma(y,\eta) = (y, \eta + i\langle\eta\rangle^\gamma(x-y))$, $(y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. A seguir vamos "desviar"a integração para a imagem de Γ. Tomando $\zeta(x,y,\eta,t) = \eta + it\langle\eta\rangle^\gamma(x-y)$ temos $\Re(-\epsilon\zeta^2) = -\epsilon\eta^2 + \epsilon t^2 \langle\eta\rangle^{2\gamma}(x-y)^2$. Observe que

$$\Re(-\epsilon\zeta^2) \leqslant -\epsilon\eta^2 + \epsilon\langle\eta\rangle^{2\gamma}(R+r)^2, \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant 1, |x| \leqslant R, |y| \leqslant r \text{ e } \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Lembre-se que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ e note que $\langle \eta \rangle^{2\gamma}(R+r)^2 = [1|\eta|^2]^\gamma (R+r)^2 \leqslant 2^\gamma |\eta|^{2\gamma}(R+r)^2 \leqslant \frac{1}{2}|\eta|^2$ quando $2^{\gamma-1}(R+r)^2 \leqslant |\eta|^{2(1-\gamma)}$(isto é, $2^{\frac{1}{2}}(R+r)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leqslant |\eta|$) e $|\eta| \geqslant 1$.Assim, existe $\tilde{A} > 0$ tal que

$$\Re(-\epsilon\zeta) \leqslant -\frac{\epsilon}{2}\eta^2, \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant 1, |x| \leqslant R, |y| \leqslant r \text{ e } |\eta| > \tilde{A}. \tag{2.15}$$

Considere $\Gamma(y,\eta,t) = (1-t)(y,\eta) + t\Gamma(y,\eta)$ com $0 \leqslant t \leqslant 1$, note que para $t = 1$ temos $\Gamma(y,\eta,t) = \Gamma(y,\eta)$ e para $t = 0$ temos $\Gamma(y,\eta,t) = (y,\eta)$. E, como $\zeta \mapsto u(x')e^{i(x-y)\xi - \epsilon\zeta^2}$ é holomorfa, aplicando o Teorema de Stokes (veja Teorema (10)) e utilizando (2.3) em (2.14) temos que

$$\begin{aligned} u(x) &= (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{M \to \infty} \int_{B(0,M)} \int_{B(0,R)} u(x')e^{i(x-x')\zeta(x',\xi,1) - \epsilon[\zeta(x',\xi,1)]^2} \alpha(x-x',\xi)dx'd\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{M \to \infty} \int_{B(0,M)} \int_{B(0,R)} u(x')e^{i(x-x')\xi - \langle \xi \rangle^\gamma (x-x')^2} e^{-\epsilon(\xi + i\langle \xi \rangle (x-x'))^2} \alpha(x-x',\xi)dx'd\xi. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Daí, por (2.15), podemos aplicar Fubini em (2.16), de modo que

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x')e^{i(x-x')\xi - \langle \xi \rangle^\gamma (x-x')^2} e^{-\epsilon(\xi + i\langle \eta \rangle (x-x'))^2} \alpha(x-x',\xi)dx'd\xi \tag{2.17}$$

Agora mostraremos que podemos usar o teorema da convergência dominada em (2.17). Para isso vamos limitar a integral em x' uniformemente em ϵ por uma função L^1 em ξ lembrando que $\operatorname{supp} u$ é compacta. Fixando ξ suficientemente grande, vamos integrar por partes $(n+1)$-vezes em relação a x',.

Para isso, fixe $\xi \in \mathbb{R}^n$ e considere

$$F(x,u,\xi,\gamma) = u(x')e^{ix\xi - \langle \xi \rangle^\gamma (x-x')^2 - \epsilon(\xi + i\langle \xi \rangle^\gamma (x-x'))^2} \alpha(x-x',\xi). \tag{2.18}$$

Podemos reescrever a integral do lado direito de (2.17)

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x,x',\xi,\alpha)e^{-ix'\xi}dx'.$$

Multiplicando por $|\xi|^{n+1}$ e considerando k tal que $|\xi| \leqslant n|\xi_k|$ temos

$$|\xi|^{n+1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y,\xi,\alpha)e^{-ix'\xi}dx'\right| = \left|n\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y,\xi,\alpha)\xi_k^n\xi_k e^{-ix'\xi}dx'\right|.$$

Como

$$-i\xi_k(e^{-ix'\xi}) = \partial_{x'_k}(e^{-ix'\xi}),$$

temos

$$|\xi|^{n+1}\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x,x',\xi,\alpha)e^{-ix'\xi}dx'\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x,x',\xi,\alpha)\partial_{x'}^{n+1}(e^{-ix'\xi})dx'\right|. \tag{2.19}$$

Seja

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,x',\xi,\alpha)\partial_{x'_k}^{n+1}(e^{-ix'\xi})dx'. \tag{2.20}$$

Queremos mostrar que que $|I| \leqslant \frac{C}{|\xi|^{n+1}}$. De fato, como u tem suporte compacto, integrando por partes, temos que

$$|I| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x'_k}^{n+1}(F(x,x',\xi,\alpha))e^{-ix'\xi}dx'\right|.$$

Por (2.18),

$$|I| = \left|\int \partial_{x'_k}^{m}\left\{u(x')e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2-\epsilon(\xi+i\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x'))^2}\alpha_{\gamma}(x-x',\xi)\right\}dx'\right|.$$

Daí, utilizando a regra de Leibniz (veja (1.1))

$$\begin{aligned}
&\partial_{x'_k}^{n+1}\left\{u(x')e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2-\epsilon(\xi+i\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x'))^2}\alpha_{\gamma}(x-x',\xi)\right\}\\
&=\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\partial_{x'_k}^{(n+1)-j}\{u(x')\alpha_{\gamma}(x-x',\xi)\}\partial_{x'_k}^{j}\{e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2-\epsilon(\xi+i\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x'))^2}\}.
\end{aligned}$$

Observe que $\partial_{y_k}^{(n+1)-j}(u(x')\alpha(x-x',\eta)$ é limitada por uma constante dimensional. Nos resta mostrar que

$$\partial_{x'_k}^{j}(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2-\epsilon(\xi+i\langle\eta\rangle^{\gamma}(x-x'))^2})$$

é limitada. Para isso considere $G = ix\eta - \langle\eta\rangle^\gamma(x-x')^2 - \epsilon(\xi + i\langle\xi\rangle^\gamma(x-x'))^2$, observe que
$$(x\xi + i\langle\xi\rangle^\gamma(x-x'))^2 = \sum_{l=1}^{n}[\xi_l + i\langle\xi\rangle^\gamma(x_l - x_l')]^2,$$
daí, utilizando Faa di Bruno (veja (1.2)) temos
$$\partial^j_{y_k}(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2-\epsilon(\xi+i\langle\xi\rangle^\gamma(x-y))^2}) = \sum_{\mathbf{P}(j)}\frac{j!}{l_1!...l_j!}(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2-\epsilon(\xi+i\langle\xi\rangle^\gamma(x-y))^2})\prod_{p=1}^{j}\left[\frac{\partial^p_{y_k}G}{p!}\right]^{m_j},$$
onde $\mathbf{P}(j) = \{(l_1,...,l_j); 1l_1 + 2l_2 + ... + jl_j = j\}$. Logo,
$$\left|\partial^j_{y_k}(e^G)\right| \leqslant \sum_{\mathbf{P}(j)}\left|\frac{j!}{l_1!...l_j!}\right|\left|(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2-\epsilon(\xi+i\langle\xi\rangle^\gamma(x-y))^2})\right|\left|\prod_{p=1}^{j}\left[\frac{\partial^p_{y_k}G}{p!}\right]^{m_j}\right|.$$
Note que existe $C > 0$ tal que

1. $\left|\frac{j!}{l_1!...l_j!}\right| \leqslant C$;
2. $\left|(e^{ix\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-x')^2-\epsilon(\xi+i\langle\xi\rangle^\gamma(x-x'))^2})\right| \leqslant e^{-\langle\xi\rangle^\gamma(x-x')^2}$;
3. $\prod_{p=1}^{j}\left[\frac{\partial^p_{x_k'}G}{p!}\right]^{m_j} = \partial^1_{x_k'}G \times \frac{1}{2}\partial^2_{x_k'}G$, pois para $p \geqslant 2$ temos que $\partial^p_{x_k'}G = 0$.

Observe que,
$$\partial^1_{y_k}G \times \frac{1}{2}\partial^2_{y_k}G = [\langle\eta\rangle^\gamma 2(x_k - x_k') + 2\epsilon(\eta_k + i\langle\eta\rangle^\gamma(x_k - x_k'))i\langle\eta\rangle^\gamma] \times [2\langle\eta\rangle^\gamma + \epsilon 2\langle\eta\rangle^\gamma\langle\eta\rangle^\gamma].$$
Como ϵ está tendendo a zero, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\epsilon < 1$, daí
$$|\partial^{n+1}_{x_k'}(F(x,x',\eta,\alpha)| \leqslant Ce^{-\langle\eta\rangle^\gamma(x-x')^2}\sum_{P(2)}[2\langle\eta\rangle^\gamma|x_k - x_k'| + 2\langle\eta\rangle^\gamma + 2\langle\eta\rangle^\gamma|x_k - x_k'|]4\langle\eta\rangle^\gamma\langle\eta\rangle^{2\gamma}. \tag{2.21}$$
Avaliando cada parcela
$$8Ce^{-\langle\eta\rangle^\gamma(x-y)^2}\langle\eta\rangle^{4\gamma}|x_k - y_k| \leqslant e^{-\langle\eta\rangle^\gamma(x-y)^2}\left[\frac{\langle\eta\rangle^\gamma|x_k - y_k|^2}{2}\right]^4\frac{1}{4!}4!2^4.$$

Usando (1.14)

$$\left[\frac{\langle\eta\rangle^{\gamma}|x_k-y_k|^2}{2}\right]^4\frac{1}{4!}\leqslant e^{\frac{1}{2}\langle\eta\rangle^{\gamma}|x_k-y_k|^2}.$$

temos

$$C8e^{-\langle\eta\rangle^{\gamma}}(x-y)^2\langle\eta\rangle^{4\gamma}|x_k-y_k|\leqslant 8C4!2^4e^{\frac{-1}{2}\langle\eta\rangle^{\gamma}|x_k-y_k|^2}\leqslant C''.$$

Como $2\langle\eta\rangle^{\gamma}\leqslant 2\langle\eta\rangle^{\gamma}|x_k-x_k'|$, temos que

$$|\partial_{x_k'}^{n+1}(F(x,x',\eta,\alpha)|\leqslant C'''.$$

Assim

$$|(|\eta|)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}F(x,x',\eta,\alpha)\partial_{x_k'}^{n+1}(e^{-ix'\eta})dx'|\leqslant C''' \text{ para} x'\in B(0,R), x\in B(0,R) \text{ e } |\eta|\geqslant\tilde{A}. \tag{2.22}$$

Considerando (2.17) e por consequência de (2.22), usando o teorema da convergência dominada temos que

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{B(0,R)}u(x')e^{i(x-x')\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2}\alpha(x-x',\xi)dx'd\xi \tag{2.23}$$

Pela definição de FBI temos que

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}_{\gamma}u(x,\xi)d\xi.$$

□

A seguir apresentaremos uma extensão do lema anterior, uma fórmula de inversão para distribuições com suporte compacto.

Lema 11. *Seja $\gamma\in[0,1]$ e $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Defina*

$$u_\epsilon(x)=(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}}F_{\gamma}u(x,\xi)d\xi. \tag{2.24}$$

Então $\langle u_\epsilon,\phi\rangle\to\langle u,\phi\rangle$ para todo $\phi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon\to 0^+$.

Demonstração. Dada $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, por definição, temos

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi) = \langle u(x), e^{i(x-x').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi)\rangle.$$

Queremos mostrar, primeiramente, que u_ϵ está bem definida. De fato, pelo Teorema 6, existem $C > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ e um compacto K tais que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x'\in K} |\partial^\alpha_{x'}\{e^{i(x-x').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi)\}|.$$

Utilizando (1.1), (1.2) e procedendo de modo semelhante a prova do Lema 10, temos que existem $C > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

$$|\partial^\alpha_{x'}\{e^{i(x-x').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi)\}| \leqslant C\langle\xi\rangle^{p\gamma}.$$

Assim, $\exists \tilde{C} > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x'\in K} \langle\xi\rangle^{p\gamma} = \tilde{C}\langle\xi\rangle^{p\gamma}.$$

Logo, $\exists \bar{C} > 0$ de modo que

$$\left|\int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\gamma u(x,\xi)d\xi\right| \leqslant \int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}} C(1+|\xi|^2)^{\frac{p\gamma}{2}}d\xi \leqslant \bar{C}(1+\epsilon^{-2})^{\frac{p\gamma}{2}}\epsilon^{-2} < +\infty,$$

para cada $\epsilon > 0$. Daí, u_ϵ está bem definida. Para cada $\epsilon > 0$, por (1.4) e (2.24),

$$\langle u_\epsilon, \phi\rangle = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}} \langle u(x'); e^{i(x-x').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi)\phi(x)\rangle d\xi dx, \ \forall \phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n).$$

Dado $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, denotando $K = \operatorname{supp}\phi$, temos

$$\langle u_\epsilon, \phi\rangle = (2\pi)^{-n}\int_K\int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}} \langle u(x'), \phi(x)e^{i(x-x').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi)\rangle d\xi dx.$$

A seguir escreveremos $\phi(x)e^{i(x-x').\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi)$ como o termo da FBI de ϕ. Observe que $(x-x')\xi = (x'-x)(-\xi)$, $(x-x')^2 = (x'-x)^2$ e $\langle(-\xi)\rangle = (1+\sum(-\xi_j)^2)^{\frac{1}{2}} = (1+\sum(\xi_j)^2)^{\frac{1}{2}} = \langle\xi\rangle$. Daí

$$e^{i(x-x').\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2} = e^{i(x'-x)(-\xi)-\langle(-\xi)\rangle^{\gamma}(x'-x)^2}.$$

Além disso, por (2.3), podemos verificar que $\alpha_\gamma(x-x',\xi) = \alpha_\gamma(x'-x,-\xi)$. Consequentemente,

$$\phi(x)e^{i(x-x').\xi-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-x')^2}\alpha_\gamma(x-x',\xi) = \phi(x)e^{i(x'-x)(-\xi)-\langle(-\xi)\rangle^{\gamma}(x'-x)^2}\alpha_\gamma(x'-x,-\xi).$$

Logo

$$\langle u_\epsilon,\phi\rangle = (2\pi)^{-n}\int_K\int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}}\langle u(x'),\phi(x)e^{i(x'-x)(-\xi)-\langle(-\xi)\rangle^{\gamma}(x'-x)^2}\alpha_\gamma(x'-x,-\xi)\rangle d\xi dx.$$

Pela definição da integral de Riemann, considerando uma partição,

$$\langle u_\epsilon,\phi\rangle = (2\pi)^{-n}\lim_{m\to+\infty}\sum_j\langle u(x'),\phi(x)e^{i(x'-xj)(-\xi_j)-\langle(-\xi_j)\rangle^{\gamma}(x'-x_j)^2}\alpha_\gamma(x'-x_j,-\xi_j)\rangle\Delta\xi\Delta x.$$

Usando a linearidade das distribuições, temos que

$$\langle u_\epsilon,\phi\rangle = (2\pi)^{-n}\lim_{m\to+\infty}\langle u(x'),\sum_j\phi(x_j)e^{i(x'-xj)(-\xi_j)-\langle(-\xi_j)\rangle^{\gamma}(x'-x_j)^2}\alpha_\gamma(x'-x_j,-\xi_j)\Delta\xi\Delta x\rangle.$$

Usando a continuidade da distribuição u temos

$$\begin{aligned}\langle u_\epsilon,\phi\rangle &= \langle u(x'),\int\int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}}\phi(x_j)e^{i(x'-x)(-\xi)-\langle(-\xi)\rangle^{\gamma}(x'-x)^2}\alpha_\gamma(x'-x,-\xi)d\xi dx\rangle &(2.25)\\ &= \langle u(x'),\int_{|\xi|\leqslant\epsilon^{-1}}\mathcal{F}\phi(x',-\xi)\rangle. &(2.26)\end{aligned}$$

Observe que dado $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{\infty}\in(0,+\infty)$ tal que $\xi_j\to 0$ temos, pelo Lema 10

$$(2\pi)^n\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}\phi(x,-\xi)d\xi = \int_{|\xi|\leqslant\epsilon_j^{-1}}\mathcal{F}\phi(x,-\xi)d\xi + \int_{|\xi|>\epsilon_j^{-1}}\mathcal{F}\phi(x,-\xi)d\xi. \tag{2.27}$$

Denote

$$F_j(x) = \int_K\int_{|\xi|>\epsilon_j^{-1}}\mathcal{F}\phi(x,-\xi)d\xi. \tag{2.28}$$

Pelo Lema 3, temos que

$$\sup_{x \in K'} |\partial^\alpha \mathcal{F}\phi(x, -\xi)| \leqslant \frac{C_\alpha}{1 + |\xi|^{n+1}},$$

onde $\operatorname{supp} \phi \subset K'$, $C_\alpha / 1 + |\xi|^{n+1} \in L^1 \, \forall \, \alpha \geqslant n$. Logo, pela regularidade de $\mathcal{F}\phi(x, -\xi)$ e pelo fato de domínio de integração ser compacto, podemos derivar sob o sinal de integração, obtendo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K'} |\partial_x^\alpha F_j(x)| &= \sup_{x \in K'} | \int_{|\xi| > \epsilon_j^{-1}} \partial^\alpha \mathcal{F}\phi(x, -\xi) d\xi | \\ &\leqslant \int_{|\xi| > \epsilon_j^{-1}} \frac{C_\alpha}{1 + |\xi|^{n+1}} d\xi. \end{aligned}$$

Como $\frac{C_\alpha}{1+|\xi|^{n+1}} \in L^1$ $(\forall \, \alpha \in \mathbb{R}^n)$, temos que

$$A \mapsto \mu(A) = \int_A \frac{C_\alpha}{1 + |\xi|^{n+1}} d\xi,$$

define uma medida. Considere $Aj = [\bar{B}(0, \epsilon_j^{-1}]^c$ daí $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Logo, $\lim_{j \to \infty} \mu(A_j) = \mu(\cap_{j=1}^\infty A_j) = \mu(\varnothing) = 0$. Deste modo,

$$\int_{|\xi| > \epsilon_j^{-1}} \frac{C_\alpha}{1 + |\xi|^{n+1}} d\xi \to 0.$$

Consequentemente $F_j(x) \to 0$ em C^∞. Assim, por (2.25), (2.27) temos que $\langle u_{\epsilon_j}, \phi \rangle \to \langle u, \phi \rangle$. Como $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ é qualquer sequência tal que $\xi_j \to 0$ segue que $\langle u_\epsilon, \phi \rangle \to \langle u, \phi \rangle$. $\square$

2.4 Caracterizações de classes Gevrey via transformadas FBI

Nesta seção, nosso objetivo principal é fornecer uma caracterização da classe Gevrey utilizando a Transformada de FBI definida em (2.1). O Teorema abaixo relaciona as classes Gevrey com as transformada FBI.

Teorema 12. *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $s \in [1, \infty)$. Então os cinco itens a seguir são mutuamente equivalentes:*

1. *$u \in G^s$ em x_0.*

2. *Para todo* $\gamma \geqslant s^{-1}$ *e toda distribuição* $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *satisfazendo* $v \equiv u$ *em alguma vizinhança de* x_0, *existem* $C, \delta \in \mathbb{R}^+$ *e uma vizinhança* V *de* x_0 *tais que*

$$|\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi)| \leqslant Ce^{-\delta\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \text{ para todo } (x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^n.$$

3. *Existe* $v \in \mathcal{E}'$ *tal que* $u \equiv v$ *em uma vizinhança de* x_0, $\gamma \in [s^{-1}, 1]$, *e uma vizinhança* V *de* x_0 *tais que*

$$|\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi)| \leqslant Ce^{-\delta\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}}, \text{ para todo } (x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^n.$$

4. *Existe uma vizinhança aberta* $U \subset \mathbb{C}^n$ *de* x_0 *e* $C, \delta \in \mathbb{R}^+$ *tais que, para cada* $\gamma \geqslant 1$, *existe uma decomposição*

$$u = g_\lambda + h_\lambda \text{ em } U \cap \mathbb{R}^n,$$

de modo que g_λ *é holomorfa em* U,

$$|g_\lambda(z)| \leqslant Ce^{C\lambda|\Im(z)|}, \text{ para todo } z \in U,$$

e

$$|h_\lambda(x)| \leqslant Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}, \text{ para todo } x \in U \cap \mathbb{R}^n.$$

5. *Existe uma vizinhança aberta* $U \subset \mathbb{C}^n$ *de* x_0 *e* $C, \delta \in \mathbb{R}^+$ *tais que, para cada* $\gamma \geqslant 1$, *existe uma decomposição*

$$u = g_\lambda + h_\lambda \text{ em } U \cap \mathbb{R}^n,$$

de modo que g_λ *é holomorfa em* $\{z \in U : |\Im(z)| \leqslant \lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}\} = U_\lambda$,

$$|g_\lambda(z)| \leqslant C, \text{ para todo } z \in U_\lambda,$$

e

$$|h_\lambda(x)| \leqslant Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}, \text{ para todo } x \in U \cap \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. [(1) $\implies$ (2)]. Sejam $u \in G^s$ em x_0, $\gamma \geqslant s^{-1}$ e $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tal que v é igual a u em uma vizinhança aberta U de x_0. Considere um cubo Q centrado em x_0, cujo fecho está contido em U, fixe um conjunto aberto relativamente compacto V no interior de Q (ou seja, $\bar{V} \subset Q$). A seguir mostraremos

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \int_Q e^{i(x-y)\xi}(v(y)e^{-i\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi))dy + O(e^{-\delta\langle\xi\rangle^\gamma}),\ \forall(x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^n,$$

uniformemente. Isto é, mostraremos que $\exists C > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) - \int_Q e^{i(x-y)\xi}(v(y)e^{-i\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi))dy| \leqslant Ce^{-\delta\langle\xi\rangle^\gamma},\ \forall(x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^n.$$

Como, por hipótese, $u \in G^s$ em x_0 existe U_1 aberto tal que $u \in G^s(U_1)$ e $x_0 \in U_1$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $U_1 = U$(na verdade, trabalharemos com $U \cap U_1$). Seja $\psi \in C_c^\infty(Q)$ tal que $\psi \equiv 1$ em $\bar{V}$. Usando (2.1) temos

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \langle v, e^{i(x-y').\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle. \tag{2.29}$$

Somando e subtraindo ψv, o lado direito de (2.29) pode ser visto como

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \langle \psi v + (1-\psi)v, e^{i(x-y').\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle.$$

Usando a linearidade da distribuição,

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \langle \psi v, e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle + \langle(1-\psi)v, e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle.$$

Agora veja que

$$\langle(1-\psi)v, e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle = \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)v](x,\xi).$$

Assim, podemos reescrever (2.29)

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \langle v, \psi e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle + \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)v](x,\xi).$$

Por outro lado, usado o fato de $v = u$ em U e a existência de $\tilde{u} \in G^s(U)$ tal que $u = \tilde{u}$ em U temos

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(y)\psi(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy + \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)v](x,\xi).$$

Além disso, como $\operatorname{supp}\psi \subset Q$

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \int_Q \tilde{u}(y)\psi(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy + \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)v](x,\xi).$$

Somando e subtraindo

$$\int_Q \tilde{u}(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) &= \int_Q \tilde{u}(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy \\
&- \int_Q \tilde{u}(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy \\
&+ \int_Q \tilde{u}(y)\psi(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy + \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)v](x,\xi). \\
&= \int_Q \tilde{u}(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy \\
&+ \int_Q [\tilde{u}(\psi-1)](y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy + \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)v](x,\xi).
\end{aligned}$$

Pela definição da função característica

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = &\int_Q \tilde{u}(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q\tilde{u}(\psi-1)(y)e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy \\
&+ \langle(1-\psi)v, e^{i(x-y)\xi-\langle\xi\rangle^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)\rangle.
\end{aligned}$$

Juntando os termos comuns

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \int_Q \tilde{u}(y) e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) dy$$
$$+ \langle (1-\psi)(v - \chi_Q \tilde{u}), e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) \rangle.$$

Observe que

$$\langle (1-\psi)(v - \chi_Q \tilde{u}), e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) \rangle = \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)(v - \chi_Q \tilde{u})].$$

Consequentemente

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \int_Q \tilde{u}(y) e^{i(x-y)\xi - \langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) dy + \mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)(v - \chi_Q \tilde{u})].$$

Pelo Lema 5, existe uma vizinhança V tal que $x_0 \in V$, $\bar{V}$ é compacto e $\delta, C > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}_\gamma[(1-\psi)(v - \chi_Q \tilde{u})]| \leqslant C e^{-\delta|\xi|^\gamma}, \ \forall x \in V \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Daí, temos que

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \int_Q e^{i(x-y)\xi} \tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) dy + O(e^{-\delta\langle\xi\rangle^\gamma}).$$

A seguir, nos concentraremos com

$$I = \int_Q e^{i(x-y)\xi} \tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) dy.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $|\xi_1| \geqslant \frac{1}{n}|\xi| \geqslant 1$ e considere N um número suficientemente grande o qual escolheremos abaixo. Multiplicando por ξ_1^N, temos que

$$\xi_1^N I = \xi_1^N \int_Q e^{i(x-y)\xi} \tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) dy.$$

Usando o fato que

$$\partial_{y_1}[e^{i(x-y)\xi}] = (-i\xi_1) e^{i(x-y)\xi},$$

integrando por partes uma vez com respeito a y_1 e considerando $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ temos

$$\begin{aligned}
\xi_1^N I &= \int_Q \frac{\partial_{y_1}^N [e^{i(x-y)\xi}]}{(-i)^N} \tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) dy \\
&= \frac{1}{(-i)^N} \left[\int_{\prod_{j=2}^n [a_j,b_j]} \partial_{y_1}^{N-1} [e^{i(x-y)\xi}] \tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma} \alpha(x-y,\xi) dy_2 dy_3 ... dy_n \right]_{y_1=a_1}^{y_1=b_1} \\
&- \int_Q \partial_{y_1}^{N-1} [e^{i(x-y)\xi}] \partial_{y_1} [\tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}] dy.
\end{aligned}$$

Integrando por partes $N-1$ vezes, segue que

$$\begin{aligned}
\xi_1^N I = \frac{1}{(-i)^N} & \left[\sum_{k=1}^N \int_{\prod_{j=2}^n [a_j,b_j]} \partial_{y_1}^{N-k} [e^{i(x-y)\xi}] \partial_{y_1}^k [\tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)] dy_2 dy_3 ... dy_n \right]_{y_1=a_1}^{y_1=b_1} \\
- \frac{1}{(-i)^N} & \int_Q e^{i(x-y)\xi} \partial_{y_1}^N [\tilde{u}(y) e^{\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)] dy. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I = \frac{1}{(-i\xi_1)^N} & \left[\sum_{k=1}^N \int_{\prod_{j=2}^n [a_j,b_j]} \partial_{y_1}^{N-k} [e^{i(x-y)\xi}] \partial_{y_1}^k [\tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)] dy_2 dy_3 ... dy_n \right]_{y_1=a_1}^{y_1=b_1} \\
- \frac{1}{(-i\xi)^N} & \int_Q e^{i(x-y)\xi} \partial_{y_1}^N [\tilde{u}(y) e^{\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)] dy. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

A seguir nos concentraremos em estimar o segundo termo da identidade acima, para isso denote

$$L_N = (-i\xi_1)^{-N} \int_Q e^{(x-y)\xi} \partial_{y_1}^N (\tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)) dy.$$

Note que por 2.7 temos

$$|\partial_{y_1}^k e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}| \leqslant C^{k+1} \langle\xi\rangle^{\frac{\gamma k}{2}} k^{\frac{k}{2}}.$$

Utilizando (1.1)

$$\partial_{y_1}^N (\tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle(x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi)) = \sum_{a+b=N} \binom{N}{a} \partial_{y_1}^a (\tilde{u}(y) \alpha_\gamma(x-x',\xi)) \partial_{y_1}^b (e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}).$$

Como $\tilde{u} = u \in G^s$ (veja(1.10)) e por 2.4, crescendo C(se necessário) temos

$$|\partial_{y_1}^a (\tilde{u}(y) \alpha(x-y,\xi))| \leqslant C^{a+1} a^{sa} \lambda^{n(\gamma-1)}. \qquad (2.32)$$

em que $\lambda = \langle \xi \rangle$. Assim,

$$
\begin{aligned}
|L_N| &\leqslant \lambda^{-N} \sum_{a+b=N} \binom{N}{a} C^{a+1} a^{sa} \lambda^{n(\gamma-1)} 6^b \lambda^{\frac{\gamma b}{2}} b^{\frac{b}{2}} \\
&\leqslant \lambda^{-N} \left[\sum_{a+b=N} \binom{N}{a} C^{a+1} 2^a 6^b \right] \max_{a+b=N} N^{sa} \lambda^{\frac{\gamma b}{2}} N^{\frac{b}{2}}.
\end{aligned}
$$

Note que, usando (1.11), existe $C' > 0$ tal que

$$
|L_N| \leqslant \lambda^{-N} C'.6^N \max_{a+b=N} N^{sa} \lambda^{\frac{\gamma b}{2}} N^{\frac{b}{2}}.
$$

Tomando $C' > 6$ temos então que

$$
|L_N| \leqslant \lambda^{-N} C'^{N+1} \max_{a+b=N} N^{sa} \lambda^{\frac{\gamma b}{2}} N^{\frac{b}{2}}.
$$

Agora fixe $0 < \epsilon < 1$ e considere $N = N(\epsilon, \lambda, s) \in Z_+$ tal que $N \leqslant \epsilon \lambda^{\frac{1}{s}} \leqslant N + 1$, daí

$$
\begin{aligned}
|L_N| &\leqslant \lambda^{-N} C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}} + 1} \max_{a+b=N} (\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}})^{sa} \lambda^{\frac{\gamma b}{2}} (\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}})^{\frac{b}{2}} \\
&\leqslant C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}} + 1} \max_{a+b=N} \epsilon^{sa + \frac{b}{2}} \lambda^{-b + \frac{\gamma b}{2} + \frac{b}{2s}}.
\end{aligned}
$$

Observe que $\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2s} - 1 \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ e $sa + \frac{b}{2} \geqslant a + \frac{b}{2} \geqslant \frac{a+b}{2} = \frac{N}{2}$. Daí, como $0 < \epsilon < 1$ e $\lambda \geqslant 1$ temos

$$
|L_N| \leqslant C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}} + 1} \epsilon^{\frac{N}{2}}.
$$

Iremos melhorar ainda mais essa limitação, para isso dividiremos em dois casos.

1. Se $N \neq 0$, então

$$
C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}} + 1} \epsilon^{\frac{N}{2}} = C C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}} \left[\frac{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}}{N} \right]^{\frac{N}{2}} \frac{N^{\frac{N}{2}}}{\lambda^{\frac{N}{2s}}}.
$$

Como $N \leqslant \epsilon \lambda^{\frac{1}{s}} \leqslant N + 1$,

$$
C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}} + 1} \epsilon^{\frac{N}{2}} \leqslant C C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}} \left[\frac{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}}{N} \right]^{\frac{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}}{2}} \frac{N^{\frac{N}{2}}}{\lambda^{\frac{N}{2s}}} \leqslant C C^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}} (\epsilon^{\frac{1}{2}})^{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}} \left[\frac{\lambda^{\frac{1}{s}}}{N} \right]^{\frac{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}}{2}} \frac{N^{\frac{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}}{2}}}{\lambda^{\frac{\epsilon \lambda^{\frac{1}{s}}}{2s}} \lambda^{\frac{-1}{2s}}}.
$$

pois $N \geqslant 1$ e $\lambda \geqslant 1$, implica $\lambda^{\frac{N}{2s}} \geqslant \lambda^{\frac{\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}-1}{2s}}$. Por outro lado,

$$C^{\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}+1}\epsilon^{\frac{N}{2}} \leqslant C(C\epsilon^{\frac{1}{2}})^{\epsilon\lambda^{\frac{1}{2}}}\lambda^{\frac{1}{2s}}. \tag{2.33}$$

Agora note que $(C\epsilon^{\frac{1}{2}})^{\epsilon} < 1$, pois definindo

$$f(\epsilon) = (C\epsilon^{\frac{1}{2}})^{\epsilon} = e^{\epsilon\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}})},$$

temos que

$$f'(\epsilon) = e^{\epsilon\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}})}\left[\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{\epsilon}{C\epsilon^{\frac{1}{2}}}C\frac{1}{2}\epsilon^{\frac{-1}{2}}\right] = e^{\epsilon\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}})}[\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}].$$

Assim existe $\epsilon_0 \in]0,1[$ tal que $f'(\epsilon) < 0$, $\forall \epsilon \in]0,\epsilon_0[$. Ademais,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}}) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}})}{\epsilon^{-1}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\frac{C\epsilon^{\frac{-1}{2}}}{C\epsilon^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2}}{-\epsilon^{-2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{-1}{2}\epsilon^{-1}\epsilon^{2} = 0.$$

Assim, como f é decrescente em $]0,\epsilon_0[$ temos $f(\epsilon) < 1, \forall\, \epsilon \in]0,\epsilon_0[$ (diminuindo ϵ_0, se necessário). Logo

$$1 = e^{0} = \lim_{t\to 0^+} f(t) > f(\epsilon) = e^{\epsilon\log(C\epsilon^{\frac{1}{2}})} = [C\epsilon^{\frac{1}{2}}]^{\epsilon}.$$

Daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$(C\epsilon^{\frac{1}{2}})^{\epsilon} = f(\epsilon) < e^{-\delta},\ \forall\, \epsilon \in]0,\epsilon_0[.$$

Portanto,

$$C(C\epsilon^{\frac{1}{2}})^{\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\lambda^{\frac{1}{2s}} < Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}\lambda^{\frac{1}{2s}}. \tag{2.34}$$

E,

$$Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}\lambda^{\frac{1}{2s}} = Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}\left[\frac{\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}{1!}\right]^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{-1}{2}} \leqslant C\delta^{\frac{-1}{2}}e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}[e^{\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}]^{\frac{1}{2}} = (C\delta^{\frac{-1}{2}})e^{\frac{-\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.35}$$

Assim, usando (2.33), (2.34), (2.35) temos $C^{\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}+1}\epsilon^{\frac{N}{2}} \leqslant (C\delta^{\frac{-1}{2}})e^{-\frac{-\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}$

2. Se N=0, então

$$C^{\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}+1}\epsilon^{\frac{N}{2}} = CC^{2\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}C^{-\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}} \leqslant C^2e^{-\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}},$$

pois neste caso $\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}} \leqslant 1$.

Juntando os dois casos acima temos $C'', \delta > 0$ tal que

$$|L_N| \leqslant C''e^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}} \tag{2.36}$$

Assim, estimamos um dos termos de (2.30). Agora vamos nos concentrar em estimar o outro termo de (2.31). A saber

$$\frac{1}{(-i\xi_1)^N}\left[\sum_{k=0}^{N}\int_{\prod_{j=2}^{n}[a_j,b_j]}\partial_{y_1}^{N-k}[e^{i(x-y)\xi}]\partial_{y_1}^{k}[\tilde{u}(y)e^{-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-y)^2}\alpha_{\gamma}(x-y,\xi)]dy_2dy_3...dy_n\right]_{y_1=a_1}^{y_1=b_1}.$$

Dado $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\partial Q$ existe $\epsilon_y>0$ tal que se $V_y=\prod_{j=1}^{n}]y_j-\epsilon_y,y_j+\epsilon_y[$ então $y\in V_y$ e $x_0\notin\bar{V}_y$. Como ∂Q é compacto existem $V_1, V_2, ..., V_m$ abertos tais que $x_0\notin\bigcup_{j=1}^{m}\bar{V}_j$ e $\partial Q\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_j$. Vamos considerar $y\in Q$ tal que $y_1\in]x_0^1-x_j,x_0^1+x_j[$. Daí,

$$\left|\partial_{y_1}^{q}[e^{-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-y)^2}]\right|_{y_1=a_1 \text{ ou } y_1=b_1} \leqslant \left|\partial_{y_1}^{q}[e^{-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x_1-y_1)^2}]\right|_{y_1=a_1 \text{ ou } y_1=b_1}.$$

e

$$|x_1-y_1| \geqslant |y_1-x_0^1|-|x_0^1-x_1| \geqslant r-|x_0-x| > \frac{r}{2}.$$

onde r é a distância mínima entre x_0 e y_1 em relação a x, garantindo que $|x_1-y_1|$ seja suficientemente grande. Assim, usando a integração de Cauchy temos

$$\begin{aligned}\left|\partial_{y_1}^{q}[e^{-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-y)^2}]\right|_{y_1=a_1 \text{ ou } y_1=b_1} &= \left|\frac{q!}{2\pi i}\int_{\partial B(y_1,R)}\frac{e^{-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x_1-w)}}{(w-y_1)^{q+1}}dw\right| \\ &\leqslant \frac{q!}{2\pi}\frac{1}{R^{q+1}}2\pi R\sup_{w\in\partial B(y_1,R)}e^{-\langle\xi\rangle^{\gamma}\Re(x_1-w)^2}.\end{aligned}$$

onde R é o raio da bola $\partial B(y_1,R)$ usado na fórmula da integral de Cauchy, no qual escolheremos abaixo. Tomando $w = w_1 + iw_2$, temos $\Re(x_1 - w)^2 = (x_1 - w_1)^2 - w_2^2 \geqslant (-|w_1 - y_1| + |y_1 - x_1|)^2 - w_2^2$. Como $(-|w_1 - y_1| + |y_1 - x_1|)^2 - w_2^2 \geqslant (-|w - y_1| + ||y_1 - x_1|)^2 - w_2^2$ e $(-|w - y_1| + ||y_1 - x_1|)^2 - w_2^2 \geqslant (-R + \frac{r}{2})^2 - R^2 = -2R\frac{r}{2} + \frac{r^2}{4}$. Tomando $R < \frac{r}{4}$ temos $\Re(x_1 - w)^2 \geqslant 0$. Logo

$$\left|\partial_{y_1}^q [e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}]\right| \leqslant C^{q+1} q! e^{-\delta\langle\xi\rangle^\gamma} \leqslant C^{q+1} q^q e^{-\delta\langle\xi\rangle^\gamma}, \text{ para } x \in B(x_0, \frac{r}{2}), \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } y \in Q \text{ com } y_1 \in]x_0^1 - x \tag{2.37}$$

Assim, para $x \in V$, $y \in \partial Q$ e qualquer $M \geqslant N$, por (2.32) e (2.37) temos que,

$$|\xi_1|^{-N} |\partial_{y_1}^N (v(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}) \alpha_\gamma(x - y, \xi)| \leqslant |\xi_1|^{-N} C^{N+1} e^{-\delta\langle\xi\rangle^\gamma} \max_{a+b=N} N^{sa} N^b.$$

Como $\gamma \geqslant s^{-1}$ e $\lambda = \langle\xi\rangle \leqslant 2|\xi| \leqslant 2n|\xi_1|$(quando $|\xi| \geqslant 1$) temos que (crescendo C, caso seja necessário)

$$|\xi_1|^{-N} |\partial_{y_1}^N (v(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}) \alpha_\gamma(x - y, \xi)| \leqslant C^{N+1} \max_{a+b=N} N^{sa} N^{sb} e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}} \lambda^{-N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\xi_1|^{-N} |\partial_{y_1}^N (v(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}) \alpha_\gamma(x - y, \xi) &\leqslant C^{N+1} N^{sN} \lambda^N e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}} \\ &\leqslant C^{N+1} \left(\frac{N^s}{\lambda}\right)^N e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}, \text{ quando } |\xi| \geqslant 1. \end{aligned}$$

Como $N \leqslant \epsilon\lambda^{\frac{1}{s}} \leqslant N + 1$ temos que $N^s \leqslant \epsilon^s\lambda$. Daí,

$$|\xi_1|^{-N} |\partial_{y_1}^N (v(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2}) \alpha_\gamma(x - y, \xi)| \leqslant C^{N+1} (\frac{\epsilon^s\lambda}{\lambda})^N e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}} \leqslant C(C\epsilon^s)^N e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}} \leqslant Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}, \text{ quando } |\xi|$$

e ϵ de modo que $C\epsilon^s \leqslant 1$. Consequentemente

$$\left| \frac{1}{(-i\xi_1)^N} \left[\sum_{k=0}^N \int_{\prod_{j=2}^n [a_j, b_j]} \partial_{y_1}^{N-k} [e^{i(x-y)\xi}] \partial_{y_1}^k [\tilde{u}(y) e^{-\langle\xi\rangle^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x - y, \xi)] dy_2 dy_3 ... dy_n \right]_{y_1 = a_1}^{y_1 = b_1} \right|$$
$$\leqslant Vol(\prod_{j=2}^n [a_j, b_j]) C^{N-k+1} (N - k)^{N-k} e^{-\delta\lambda^\gamma} Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}, |\xi| \geqslant 1.$$

Como $\gamma \leqslant s^{-1}$, redefinindo C e δ temos que

$$\left| \frac{1}{(-i\xi_1)^N} \left[\sum_{k=0}^{N} \int_{\prod_{j=2}^{n}[a_j,b_j]} \partial_{y_1}^{N-k}[e^{i(x-y)\xi}]\partial_{y_1}^{k}[\tilde{u}(y)e^{-\langle\xi\rangle^{\gamma}(x-y)^2}\alpha_{\gamma}(x-y,\xi)]dy_2dy_3...dy_n \right]_{y_1=a_1}^{y_1=b_1} \right|$$
$$\leqslant Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}} \tag{2.38}$$

Usando a continuidade de $(x,\xi) \mapsto \mathcal{F}_{\gamma}v(x,\xi)$ Por (2.30), (2.36)e (2.38),como $\lambda = \langle\xi\rangle$, redefinindo C e δ, temos que

$$\mathcal{F}_{\gamma}v(x,\xi) \leqslant O(e^{-\delta}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}), \text{ para } x \in B(0,\frac{r}{2}) \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n$$

Terminamos a demonstração da afirmação. Mas queremos mostrar algo melhor ainda, A transformada $\mathcal{F}_{\gamma}v(z,\xi)$ se estende, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, para uma função inteira em $z \in \mathbb{C}^n$. Pela Obervação 9 temos que

$$|\mathcal{F}_{\gamma}v(z,\xi)| \leqslant Ce^{-\delta|\xi|^{1/s}}e^{C(\xi)|\operatorname{Im}(z)|} \tag{2.39}$$

para z em uma vizinhança suficientemente pequena $V \subset \mathbb{C}^n$ de x_0.

[(1) $\implies$ (4)]

Suponha que $u \in G^s$ em x_0. Fixe $v \in \mathcal{E}'$ tal que $v \equiv u$ numa vizinhança de x_0 (para isso basta multiplicar u por uma função corte) e considere $\gamma = s^{-1}$ pelo o que fizemos acima segue a desigualdade (2.39). Daí é suficiente mostrar que (2.39) $\implies$ (4). Para cada $\lambda \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$g_{\lambda}(z) = (2\pi)^{-n}\int_{|\xi|\leqslant\lambda} \mathcal{F}_{\gamma}v(z,\xi)d\xi.$$

Como $|\mathcal{F}_{\gamma}v(z,\xi)| \leqslant Ce^{-\delta\langle\xi\rangle^{\gamma}+C\langle\xi\rangle|\Im(z)|}$ em uma vizinhança complexa $U \subset \mathbb{C}^n$ de x_0 independente de ξ, e $z \mapsto \mathcal{F}_{\gamma}v(z,\xi)$ é holomorfa em U, temos que g_{λ} é holomorfo em U. Além disso, pela Observação 9 temos $\delta, C > 0$ tais que

$$|g_{\lambda}(z)| \leqslant C\int_{|\xi|\leqslant\lambda} e^{-\delta\langle\xi\rangle^{\gamma}+C|\xi||\Im(z)|}d\xi.$$

Fazendo uma mudança de variáveis polares e usando o fato de $|\xi| \leqslant \langle\xi\rangle$ temos $C_1 > 0$ tal que

$$|g_\lambda(z)| = C_1 \int_{r=0}^{r=\lambda} e^{-\delta r^\gamma} e^{Cr|\Im(z)|} r^{n-1} dr.$$

Como $\int_{r=0}^{\infty} e^{-\delta r^\gamma} r^{\gamma-1} dr < +\infty$ existe $C_2 > 0$ tal que

$$|g_\lambda(z)| \leqslant \int_{r=0}^{r=\lambda} e^{Cr|\Im(z)|} \leqslant C_2 e^{C\lambda|\Im(z)|}. \tag{2.40}$$

Além disso, para $x \in U \cap \mathbb{R}^n$, lembrando que $v \in G_c^s$, $v(x) = u(x) \in G_c^s$, a definição de g_λ acima e usando o Lema 11 e o item (2) (lembrando (1) $\Longrightarrow$ (2), temos $C, \tilde{\delta} > 0$ tal que

$$|(u - g_\lambda)(x)| = |(v - g_\lambda)(x)| = (2\pi)^{-n} \left| \int_{|\xi| \geqslant \lambda} \mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) d\xi \right| \leqslant C \int_{r=\lambda}^{\infty} e^{-\tilde{\delta} r^\gamma} r^{n-1} dr \leqslant C e^{-\delta \lambda^\gamma},$$

é importante destacar que acima usamos mudanças de variáveis polares. Tomando $h_\lambda(x) = (u - g_\lambda)(x)$ temos que

$$|h_\lambda(x)| \leqslant C e^{-\delta \lambda^\gamma}, x \in U \cap \mathbb{R}.$$

(4) $\Longrightarrow$ (5) Pelo item (4) temos que existe $U \subset \mathbb{C}^n$ aberto, tal que $x_0 \in U$ e também existem $C, \delta \in \mathbb{R}^+$ tais que, para cada $\lambda \geqslant 1$, existe g_λ holomorfa em U satisfazendo

$$|g_\lambda(z)| \leqslant C e^{C\lambda|\Im(z)|},\ \forall z \in U. \tag{2.41}$$

Além disso, se definirmos

$$h_\lambda(x) = (u - g_\lambda)(x),\ \forall x \in U \cap \mathbb{R}^n,$$

temos

$$|h_\lambda(x)| \leqslant C e^{-\delta \lambda^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.42}$$

Queremos mostrar que g_λ é holomorfa em $U_\lambda = \{z \in U \| \Im(z)| \leqslant \lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}\}$ (esse fato é imediato pois g_λ é holomorfa em U) e, além disso, que $|h_\lambda(z)| \leqslant C$ para $z \in U_\lambda$. Observe que, dado $z \in U$, por (2.41), definindo $D = 2C$

$$|g_\lambda(z) - g_{\frac{\lambda}{2}}(z)| \leqslant |g_\lambda(z)| + |g_{\frac{\lambda}{2}}(z)| \leqslant Ce^{C\lambda|\Im(z)|} + Ce^{\frac{C\lambda}{2}|\Im(z)|} \leqslant 2Ce^{C\lambda|\Im(z)|} \leqslant De^{D\lambda|\Im(z)|}. \tag{2.43}$$

Por outro lado, dado $x \in U \cap \mathbb{R}^n$

$$|g_\lambda(x) - g_{\frac{\lambda}{2}}(x)| = |g_\lambda(x) - u(x) + u(x) - g_{\frac{\lambda}{2}}(x)| = |h_\lambda(x)| + |h_{\frac{\lambda}{2}}(x)|.$$

Por (2.42), temos

$$|g_\lambda(x) - g_{\frac{\lambda}{2}}(x)| \leqslant Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}} + Ce^{-\delta(\frac{\lambda}{2})^{\frac{1}{s}}} \leqslant = Ce^{-\delta_1\lambda^{\frac{1}{s}}}, x \in U \cap \mathbb{R}^n.$$

Assim, crescendo C (se necessário) existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g_\lambda(x) - g_{\frac{\lambda}{2}}| \leqslant Ce^{-\delta_1\lambda^{\frac{1}{s}}}, x \in U \cap \mathbb{R}^n. \tag{2.44}$$

Agora iremos mostrar que, definindo $f_\lambda(z) = (g_\lambda - g_{\frac{\lambda}{2}})(z)$, temos

$$|f_\lambda(z)| \leqslant e^{-\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}},$$

para $z \in U$. Considere $x_0 = (x_{(0,1)}, ..., x_{(0,j)})$ e $R > 0$ tais que

$$\prod_{j=1}^{n}[x_{(0,j)} - R, x_{(0,j)} + R] + i\prod_{j=1}^{n}[-R, R] \subset U.$$

Além disso, defina

$$F_\lambda(z) = f_\lambda(z)e^{\frac{-\delta}{r^2}(z_j - x_{(0,j)})^2\lambda^{\frac{1}{s}}}.$$

Fixe $(x_2, ..., x_n) \in \prod_{j=2}^{n}[x_{(0,j)} - R, x_{(0,j)} + R]$. Para $n = 1$, usando (2.44) e (2.43)

1. $|F_\lambda(x + 0i)| = |f_\lambda(x)|e^{\frac{-\delta}{R^2}(x_1 - x_{(0,1)})^2\lambda^{\frac{1}{s}}} \leqslant Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}$.

2.

$$
\begin{aligned}
|F_\lambda(x+i\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}e_1)| &\leqslant |f_\lambda(x+i\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}e_1)||e^{\frac{-\delta}{R^2}(x_1+i\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}-x_{(0,1)})^2\lambda^{\frac{1}{s}}}| \\
&\leqslant Ce^{C\lambda\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}}e^{\frac{-\delta}{R^2}((x_1-x_{(0,1)})^2-(\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}})^2)\lambda^{\frac{1}{s}}} \\
&\leqslant Ce^{C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}e^{\frac{\delta}{R^2}\epsilon^2\lambda^{-2+\frac{2}{s}}\lambda^{\frac{1}{s}}} \\
&\leqslant \exp\left\{C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}+\frac{\delta}{R^2}\epsilon^2\lambda^{\frac{1}{s}})\right\} \\
&\leqslant \exp\{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}\}.
\end{aligned}
$$

Em que ϵ é tal que $\frac{\delta}{R^2}\epsilon \leqslant C($ ou seja, $\epsilon \leqslant \frac{CR^2}{\delta})$ e $\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}} \leqslant R$, para todo $\lambda \geqslant 1$. Para isso basta escolher $\epsilon \leqslant R$, pois $\lambda \geqslant 1$ assim $\lambda^{-1+\frac{1}{s}} \leqslant 1$.

3. Para não ser repetitivo usaremos a notação $\pm R$, pois a mesma demonstração vale para $+R$ e $-R$.

$$
|F_\lambda(x_{(0,1)}\pm R+iy_1,x_2,...,x_n)| \leqslant |f_\lambda(x_{(0,1)}\pm R+iy_1,x_2,...,x_n)|e^{(\frac{-\delta}{R^2}(\pm R)^2-y_1^2)\lambda^{\frac{1}{s}}}.
$$

Usando a estimativa (2.44) nestes segmentos, temos que

$$
|F_\lambda(x_{(0,1)}\pm R+iy_1,x_2,...,x_n)| \leqslant Ce^{C\lambda y_1}e^{\frac{\delta}{R^2}y_1^2\lambda^{\frac{1}{s}}}e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}.
$$

Ademais,

$$
Ce^{C\lambda y_1}e^{\frac{\delta}{R^2}y_1^2\lambda^{\frac{1}{s}}}e^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}} = C\exp\left(C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}+\frac{\delta}{R^2}\epsilon^2\lambda^{\frac{1}{s}}-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}\right),
$$

A seguir escolha ϵ suficientemente pequeno tal que

$$
C\epsilon+\frac{\delta}{R^2}\epsilon^2<\frac{\delta}{2}.
$$

Assim

$$
|F_\lambda(x_{(0,1)}\pm R+iy_1,x_2,...,x_n)| \leqslant Ce^{\frac{-\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}.
$$

Agora defina

$$
G_\lambda(z_1)=F_\lambda(z_1,x_2,...,x_n)\left[Ce^{\frac{-\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{-i\frac{(z_1-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}}-1}\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{i\frac{(z_1-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{-\frac{s-1}{s}}}}.
$$

Daí

1. $$|G_\lambda(x_1)| \leqslant Ce^{\frac{-\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\left[Ce^{\frac{-\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{-i\frac{(x_1-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}-1}\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{i\frac{(x_1-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}}}.$$

2. $$\begin{aligned}|G_\lambda(x+i\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}e_1)| &\leqslant Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\left[Ce^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{-i\frac{(x+i\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}-1}\\ &\times\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{i\frac{(x_1+i\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}}\\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}|G_\lambda(x_{(0,1)}\pm R+iy_1)| &\leqslant Ce^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\left[Ce^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{i\frac{(\pm R+iy_1)}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}-1}\\ &\times\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{i\frac{(\pm R+iy_1)}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}}\\ &\leqslant\left[Ce^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{\frac{y_1}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}}\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{-\frac{y_1}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}}.\end{aligned}$$

   Logo,
   $$\left[Ce^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{\frac{y_1}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}}\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{-\frac{y_1}{\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}}}=e^{-2C\lambda y_1}e^{-\frac{\delta}{2}\epsilon^{-1}\lambda y_1}\leqslant 1,$$
   quando $0\leqslant y_1\leqslant\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}$.

Assim, pelo Princípio do Máximo,

$$|G_\lambda(x_1+iy_1)|\leqslant 1,$$

quando $|x_1-x_{(0,1)}|\leqslant R$ e $0\leqslant y_1\leqslant\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}$. Daí

$$\begin{aligned}|F_\lambda(z)| &\leqslant\left[Ce^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{i\frac{(x_1+iy_1-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}}+1}\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{-i\frac{(x_1+iy_1-x_{(0,1)})}{\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}}}\\ &\leqslant\left[Ce^{-\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{-\frac{y_1}{\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}}+1}\left[Ce^{2C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right]^{\frac{y_1}{\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}}}.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $y_1 \leqslant \epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}$ temos

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{\delta}{2}\epsilon^{-1}\lambda y_1 - \frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}} + 2C\lambda y_1\right\} &\leqslant \exp\left\{\frac{\delta}{2}\epsilon^{-1}\lambda\frac{1}{2}\lambda^{-1+\frac{1}{s}}\epsilon - \frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}} + 2C\lambda\frac{1}{2}\epsilon\lambda^{-1+\frac{1}{s}}\right\} \\ &\leqslant C\exp\left\{\frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}} - \frac{\delta}{2}\lambda^{\frac{1}{s}}C\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}\right\}.\end{aligned}$$

Assim

$$|F_\lambda(z)| \leqslant C\exp\left(\frac{-\delta}{8}\lambda^{\frac{1}{s}}\right),$$

onde tomamos ϵ pequeno tal que $(\frac{\delta}{4} - C\epsilon) \leqslant \frac{\delta}{2}$. Mais ainda

$$\begin{aligned}|f_\lambda(z_1, x_2, ..., x_n)| &\leqslant |Ce^{-\frac{\delta}{8}\lambda^{\frac{1}{s}}}e^{\frac{\delta}{R^2}(x_1+iy_0-x_{(0,1)})^2\lambda^{\frac{1}{s}}}| \\ &\leqslant Ce^{-\frac{\delta}{16}\lambda^{\frac{1}{s}}} = Ce^{-\tilde{\epsilon}\lambda^{\frac{1}{s}}},\end{aligned}$$

para $|x_1 - x_{(0,1)}| \leqslant \frac{R}{4}$ e $|y| < \frac{1}{2}\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}$. Logo,

$$|f_\lambda(z_1, x_2, ..., x_n)| \leqslant Ce^{-\tilde{\epsilon}\lambda^{\frac{1}{s}}}.$$

Seguindo os mesmos passos para as demais coordenadas, redefinindo ϵ e R, temos então que

$$|f_\lambda(z_1, z_2, ..., z_n)| \leqslant Ce^{-\tilde{\epsilon}\lambda^{\frac{1}{s}}}. \tag{2.45}$$

para $|x_j - x_{(0,j)}| \leqslant \frac{R}{4}$ e $|y| < \frac{1}{2}\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, escolha k tal que

$$2^k \leqslant \lambda \leqslant 2^{k+1},$$

e escreva

$$g_\lambda = g_{\frac{\lambda}{2^k}} + \sum_{j=1}^{k}(g_{\frac{\lambda}{2^{j-1}}} - g_{\frac{\lambda}{2^j}}).$$

Observe que, dado $z = x + iy$ em V,

$$|g_\lambda(z)| \leqslant |g_{\frac{\lambda}{2^k}}(z)| + \sum_{j=1}^{k}|g_{\frac{\lambda}{2^{j-1}}} - g_{\frac{\lambda}{2^j}}|.$$

Usando as estimativas (2.41), (2.45)

$$|g_\lambda(z)| \leqslant Ce^{C\frac{\lambda}{2^k}|y|} + \sum_{j=1}^{k} e^{-\epsilon(\frac{\lambda}{2^{j-1}})^{\frac{1}{s}}} \leqslant Ce^{C\frac{\lambda}{2^k}\lambda^{-1+\frac{1}{s}}} + \sum_{j=1}^{k} e^{-\epsilon(\frac{\lambda}{2^{j-1}})^{\frac{1}{s}}}.$$

Agora observando que o segundo termo pode ser estimado pela soma de uma progressão geométrica temos

$$\begin{aligned}
|g_\lambda(z)| &\leqslant \left[C\exp\left\{C\frac{\lambda^{\frac{1}{s}}}{2^k}\right\}\right] + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\epsilon(\frac{\lambda}{2^{j-1}})^{\frac{1}{s}}}\\
&= \left[C\exp\left\{C\frac{\lambda^{\frac{1}{s}}}{2^k}\right\}\right] + \frac{2^{-\frac{1}{s}}}{\epsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}2^{\frac{1}{s}}\frac{(2^{\frac{k}{s}}-1)}{2^{\frac{1}{s}}-1}\\
&\leqslant C\exp\left(C2^{(k(\frac{1}{s}-1)+\frac{1}{s})}\right) + \frac{(1-2^{-\frac{k}{s}})}{\epsilon(2^{\frac{1}{s}}-1)},\ \text{pois } 2^k \leqslant \lambda \leqslant 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $k \to +\infty$

$$|g_\lambda(z)| \leqslant C\exp\left(C2^{\frac{1}{s}}\right) + \frac{1}{\epsilon(2^{\frac{1}{s}}-1)}.$$

Consequentemente, existe $D > 0$ de modo que

$$|g_\lambda(z)| \leqslant D. \tag{2.46}$$

[(5) $\Longrightarrow$ (2)] Considere $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e U_0 vizinhança aberta de x_0 tal que $v \equiv u$ em U_0. Considere também $\gamma \geqslant s^{-1}$ e $|\xi| \geqslant n$. Sem perda de generalidade podemos assumir $|\xi_1| \geqslant \frac{|\xi|}{n} \geqslant 1$. Nesta parte da demonstração denotaremos $\lambda = |\xi|$. Seja $\tilde{U}_1 \subset \mathbb{C}^n$ uma vizinhança aberta de x_0 tal que $u = g_\lambda + h_\lambda$ em $U_1 \doteq \tilde{U}_1 \cap \mathbb{R}^n$, em que g_λ é holomorfa em $U_\lambda = \{z \in \tilde{U}_1 : |\Im(z)| \leqslant \lambda^{-1+\frac{1}{s}}\}$, $|g_\lambda| \leqslant C$ para todo $z \in U_\lambda$ e $|h_\lambda(x)| \leqslant Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}$ para todo $x \in U_1$. Seja $\eta \in C_c^\infty(U_1 \cap U_0)$ tal que $\eta \equiv 1$ em uma vizinhança de x_0. Assim, usando a linearidade da FBI temos

$$\mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) = \mathcal{F}_\gamma[\eta v](x,\xi) + \mathcal{F}_\gamma[(1-\eta)v](x,\xi).$$

Usando o fato que $\eta - 1 \equiv 0$ em uma vizinhança de x_0 pelo Lema 5 temos que existem

$C, a > 0$ tais que

$$|\mathcal{F}_\lambda v(x,\xi)| \leqslant |\mathcal{F}_\lambda[\eta v](x,\xi)| + Ce^{-a\lambda^{\frac{1}{s}}}.$$

Como $u \equiv v$ em U_0, $u = g_\lambda + h_\lambda$ em U_1 e $\eta \in C_c^\infty(U_1 \cap U_0)$ temos

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_\lambda v(x,\xi)| &\leqslant |\mathcal{F}_\lambda[\eta(g_\lambda + h_\lambda)](x,\xi)| + Ce^{-a\lambda^{\frac{1}{s}}} \\ &\leqslant |\mathcal{F}_\gamma(\eta g_\lambda)(x,\xi)| + |\int \eta(y)h_\lambda(y)e^{i(x-y)\xi-|\xi|^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy| + Ce^{-a\lambda^{\frac{1}{s}}}.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (2.42) e por 2.32 (crescendo C, se necessário), temos

$$|\mathcal{F}_\lambda v(x,\xi)| \leqslant |\mathcal{F}_\gamma(\eta g_\lambda)(x,\xi)| + Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}\int |\eta(y)|dy + Ce^{-a\lambda^{\frac{1}{s}}}.$$

Como η possui suporte compacto temos que $\int_{\operatorname{supp}\eta} |\eta(y)|dy \leqslant D$. Redefinindo $C = C.D+C$ e $\delta = \min\{a, \delta\}$, temos então

$$|\mathcal{F}_\lambda v(x,\xi) \leqslant |\mathcal{F}_\gamma(\eta g_\lambda)(x,\xi)| + Ce^{-\delta\lambda^{\frac{1}{s}}}.$$

Transladando o sistema para origem em x_0 e considerando r suficientemente pequeno tal que $\operatorname{supp}\eta \subset B(x_0, 3r) \subset U_0 \cap U_1$ onde

$$B(x_0, r) = \{x : |x_j - x_0^j| < r\, \forall j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Suponha que $\eta(x) \equiv 1$ em $B(x_0, 2r)$. Seja $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant \phi \leqslant \frac{1}{2}$, $\phi(t) > 0$ para $|t| \leqslant 2r$ e $\phi(t) = 0$ quando $|t| \geqslant 3r$. Considere $\epsilon > 0$ pequeno e um desvio no contorno de integração dado por

$$\Phi(y) = (y_1 + i\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y_1), y_2, ..., y_n),$$

onde $y_1 \in [x_0^1 - 3r, x_0^1 + 3r]$,

Agora, como ηg_λ é contínua e de suporte compacto,

$$\mathcal{F}_\gamma \eta g_\lambda(x,\xi) = \int_{B(x_0,3r)} \eta(y)g_\lambda(y)e^{i(x-y)\xi-|\xi|^\gamma(x-y)^2}\alpha_\gamma(x-y,\xi)dy.$$

Usando Fubini-Tonelli e lembrando que supp $\subset B(x_0,3r) \subset \prod_{j=1}^{n}[x_0^j - 3r, x_0^j + 3r]$

$$\mathcal{F}_\gamma \eta g_\lambda(x,\xi) = \int_{\prod_{j=2}^{n}[x_0^j-3r,x_0^j+3r]} \int_{x_0^1-3r}^{x_0^1+3r} \eta(y) g_\lambda(y) e^{i(x-y)\xi - |\xi|^\gamma (x-y)^2} \alpha_\gamma(x-y,\xi) dy_1 dy_2 \cdots dy_n.$$

A seguir denote

$$\omega = \eta(z) g_\lambda(z) e^{i(x-y)\xi - |\xi|^\gamma (x-z)^2} \alpha_\gamma(x-z,\xi) dz,$$

e

$$F = \eta(z) g_\lambda(z) e^{i(x-y)\xi - |\xi|^\gamma (x-z)^2} \alpha_\gamma(x-z,\xi).$$

Usando Teorema de Stokes e o fato de $\operatorname{supp} \eta \operatorname{supp} B(x_0,3r)$

$$\int_S d_1\omega = \int_{\partial S} \omega = \int_{S_1} \omega - \int_{x_0^1-3r}^{x_0^1+3r} \omega dy, \tag{2.47}$$

onde $S = \{y_1 + i\epsilon t \lambda^{-\frac{(s-1)}{s}} \phi(y_1) : y_1 \in [x_0^1 - 3r, x_0^1 + 3r], t \in [0,1]\}$ e $S_1 = \{y_1 + i\epsilon \lambda^{\frac{-(s-1)}{s}} \phi(y_1); y_1 \in [x_0^1 - 3r, x_0^1 + 3r]\}$. Observe que, parametrizando S_1 temos

$$\int_{S_1} \omega = -\int_{x_0^1-3r}^{x_0^1+3r} F(y_1 + i\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{a}} \phi(y_1))[1 + i\epsilon\lambda^{-\frac{s-1}{s}} \phi'(y_1)] dy,$$

e

$$\int_{x_0^1-3r}^{x_0^1+3r} \omega = \int_{x_0^1-3r}^{x_0^1+3r} F(y) dy.$$

Além disso

$$\begin{aligned} d[\eta(z) g_\lambda(z) e^{i(x-z)\xi - |\xi|^\gamma (x-z)^2} \alpha_\gamma(x-z,\xi)] &= \frac{\partial}{\partial z_1}[\eta(z) g_\lambda(z) e^{i(x-z)\xi - |\xi|^\gamma (x-z)^2} \alpha_\gamma(x-z,\xi) dz_1] dz \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\eta(z) g_\lambda(z) e^{i(x-z)\xi - |\xi|^\gamma (x-z)^2} \alpha_\gamma(x-z,\xi) dz_1] d\bar{z}. \end{aligned}$$

A primeira parcela se anula por $dz \wedge dz = 0$. Além disso, como η possui suporte compacto e $g_\lambda(z)e^{i(x-z)\xi-|\xi|^\gamma(x-z)^2}\alpha_\gamma(x-z,\xi)$ é holomorfa, usando a regra do produto temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\bar z}[\eta(z)g_\lambda(z)e^{i(x-z)\xi-|\xi|^\gamma(x-z)^2}\alpha_\gamma(x-z,\xi)] &= \frac{\partial}{\partial\bar z}[\eta(z)]g_\lambda(z)e^{i(x-z)\xi-|\xi|^\gamma(x-z)^2}\alpha_\gamma(x-z,\xi)\\ &+\eta(z)\frac{\partial}{\partial\bar z}\left\{g_\lambda(z)e^{i(x-z)\xi-|\xi|^\gamma(x-z)^2}\alpha_\gamma(x-z,\xi)\right\}\\ &=\frac{\partial}{\partial\bar z}[\eta(z)]g_\lambda(z)e^{i(x-z)\xi-|\xi|^\gamma(x-z)^2}\alpha_\gamma(x-z,\xi)dz.\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\sup_{z\in S}|\frac{\partial F}{\partial\bar z_1}(z)| = \sup_{(y,t)\in[x_0^1-3r,x_0^1+3r]\times[0,1]}&|\frac{\partial\eta}{\partial\bar z_1}(y_1+i\epsilon t\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y_1),y_2,...,y_n)|\times\\ &\times|G(y_1+i\epsilon t\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y_1),y_2,...,y_n)|,\end{aligned}$$

onde $G(z)=g_\lambda(z)e^{i(x-z)\xi-|\xi|^\gamma(x-z)^2}\alpha_\gamma(x-z,\xi)$. Agora, pela definição de η,

$$\begin{aligned}&\mathrm{supp}_{z\in S}|\frac{\partial F}{\partial\bar z_1}(z)|\\ &=\sup_{2r<|y_1-x_0^1|<3r,t\in[0,1]}|\frac{\partial\eta}{\partial\bar z}(y_1+i\epsilon t\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y_1),y_2,...,y_n)||G(y_1+i\epsilon t\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y_1),y_2,...,y_n)|.\end{aligned}$$

A seguir vamos estimar

$$\begin{aligned}F_d=|&\frac{\partial\eta}{\partial\bar z}(y_1+i\epsilon t\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}\phi(y_1),y_2,...,y_n)||g_\lambda(y_1+i\epsilon t\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}\phi(y_1),y_2,...,y_n)|\times\\ &\times e^{i(x-z(y,t)\xi-|\xi|^n(x-z(y,t))^2}\alpha_\gamma(x-z(y,t);\xi),\end{aligned}$$

quando $t\in[0,1]$ e $2r\leqslant|y_1-x_0^1|\leqslant 3r$. Observe que, usando (2.46), o fato de α ser limitada e a limitação de η. Segue que

$$F_d\leqslant Ce^{\Re(i(x-z(y,t)\xi-|\xi|^n(x-z(y,t))^2)}. \tag{2.48}$$

Em que,

$$\begin{aligned}\Re(i(x-z(y,t)\xi-|\xi|^n(x-z(y,t))^2)&=\epsilon t\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y)\xi_1-|\xi|^\gamma((x-y)^2-[\epsilon t\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}\phi(y)]^2)\\ &\leqslant\epsilon c_1|\xi|^{\frac{1}{s}}-|\xi|^\gamma((x-y)^2-\epsilon^2c_2\lambda^{-2+\frac{2}{s}}).\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\lambda^{-2+\frac{2}{s}} \leqslant 1$ (pois, $\lambda = |\xi| \geqslant 1$) e $|x-y| \geqslant |y-x_0|-|x-x_0| > 2r-r = r$, temos que

$$\Re(i(x-z(y,t)\xi - |\xi|^n(x-z(y,t))^2) \leqslant \epsilon C|\xi|^{\frac{1}{s}} - |\xi|^\gamma(r^2-\epsilon^2 C).$$

Escolha $\epsilon > 0$ tal que $r^2 - \epsilon^2 C > 0$, ou seja, $\epsilon < (\frac{r^2}{C})^{\frac{1}{2}}$. Lembrando que $\gamma > \frac{1}{s}$, tomando $\epsilon < 1$,

$$\Re(i(x-z(y,t)\xi - |\xi|^n(x-z(y,t))^2) \leqslant -|\xi|^{\frac{1}{s}}(r^2-2\epsilon C).$$

Agora escolheremos $r^2 - 2\epsilon C > 0$, ou seja, $\epsilon < \frac{r^2}{2C}$, existe $a > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|\int_S \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z)dz| &\leqslant ||S|| \sup_{z\in S} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z)|3r\epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}} \frac{1}{2} \sup_{2r<|y-x_0^1|<3r, t\in[0,1]} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(y+i\epsilon t\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y)) \\ &\leqslant \frac{3r}{2}\epsilon e^{-a|\xi|^{\frac{1}{s}}}.\end{aligned}$$

Assim temos a estimativa de um dos termos de (2.47)

$$|\int_S dw| \leqslant \left|\int_S \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z)dz\right| \leqslant \frac{3r}{2}\epsilon e^{-a|\xi|^{\frac{1}{s}}}.$$

Nos resta estimar

$$\int_{S_1} w = \int_{x_0^1-3r}^{x_0^1+3r} F(\Phi(y))\Phi'(y)dy.$$

Observe que, usando (2.48),

$$\left|\int_{x_0^1-3r}^{x_0^1+3r} F(\Phi(y))\Phi'(y)dy\right| \leqslant C \sup_{|y-x_0|<3r} |e^{i(x-\Phi(y))\xi - |\xi|^\gamma(y-\Phi(y))^2}|.$$

Além disso, como $\Phi(y) = y + i\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y)e_1$, temos

$$\Re\left\{i(x-\Phi(y)\xi - |\xi|^\gamma(x-\Phi(y))^2\right\} = \epsilon\lambda^{\frac{-(s-1)}{s}}\phi(y)\xi_1 - |\xi|^\gamma((x-y)^2 - \epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}\phi(y_1)).$$

A seguir dividiremos em dois casos:

1. Se $|y_1 - x_0| > 2r$, então existe $a > 0$ tal que (lembremos que $\lambda = |\xi|$)

$$\Re\left\{i(x - \Phi(y)\xi - |\xi|^\gamma (x - \Phi(y))^2) \leqslant -a|\xi|^{\frac{1}{s}},\right\}$$

   quando $|x - x_0| < r$ (e ϵ é suficientemente pequeno).

2. Se $|y_1 - x_0| \leqslant 2r$ temos que $\phi(y_1) = \frac{1}{2}$ e assim,

$$\Re(i(x - \Phi(y)\xi - |\xi|^\gamma (x - \Phi(y))^2) \leqslant \epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}} + |\xi|^\gamma \epsilon^2 \lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}.$$

Agora observe que, se estivermos no caso $\xi_1 < 0$ então $|\xi| \leqslant |\xi_1| n = -n\xi_1$. Logo

$$\Re(i(x - \Phi(y)\xi - |\xi|^\gamma (x - \Phi(y))^2) \leqslant \frac{-\epsilon\lambda^{-\frac{(s-1)}{s}}}{n}|\xi| + |\xi|^{\frac{1}{s}}\epsilon^2 \quad = (\epsilon^2 - \frac{\epsilon}{n})|\xi|^{\frac{1}{s}} = -a|\xi|^{\frac{1}{s}},$$

desde que $\epsilon^2 - \frac{\epsilon}{n} < 0$, ou seja, $\epsilon < \frac{1}{n}$. Se $\xi_1 > 0$. Repetiremos o mesmo processo só que tomando $\phi(y) = -\frac{1}{2}$. Pela semelhança omitiremos a demonstração.

[(3) $\implies$ (1)] Suponha que $u \equiv v$ em uma vizinhança x_0, com $v \in \mathcal{E}'$ e suponha também $\gamma \in [s^{-1}, 1]$, $C > 0$ e $c > 0$ de modo que

$$\mathcal{F}_\gamma v(x, \xi) \leqslant C \exp\left(-c\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}\right) \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para x numa vizinhança fixa de x_0. Pela Observação 9 existem $C, \delta, c > 0$ e $r_0 > 0$ tais que, se $r < r_0$ então

$$|\partial_x^\alpha \mathcal{F}_\gamma(x, \xi)| \leqslant \alpha! C e^{-\delta\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}} + cr\langle\xi\rangle} \frac{1}{r^{|\alpha|}},\ |x - x_0| < r.$$

Escolha $r = \langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}-1}\frac{\delta}{2c}$ (diminuindo δ, se necessário, para obter $r < r_0$). Daí

$$|\partial_x^\alpha \mathcal{F}_\gamma v(x, \xi)| \leqslant \alpha! C e^{-\frac{\delta}{2}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} \left[\frac{\langle\xi\rangle^{1-\frac{1}{s}} 2c}{\delta}\right]^{|\alpha|}, \text{ para } |x - x_0| < \delta.$$

Em particular,

$$|\mathcal{F}_\gamma v(x, \xi)| \leqslant C e^{-\frac{\delta}{2}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} \in L^1.$$

Utilizando a Fórmula da Inversão e o Teorema da Convergência Dominada,

$$u(x) = v(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \leqslant \epsilon^{-1}} \mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_\gamma v(x,\xi) d\xi, \; x \in B(x_0, \delta).$$

Logo, usando novamente o Teorema da Convergência Dominada e derivando sob o sinal de integração existe $C_1 > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha u(x)| = |(2\pi)^{-n} \int \partial_x^\alpha \mathcal{F} v(x,\xi) d\xi| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \alpha! C^{|\alpha|+1} e^{-\frac{\delta}{2}\langle\xi\rangle^{\frac{1}{s}}} \langle\xi\rangle^{|\alpha|(1-\frac{1}{s})} d\xi.$$

quando $|x - x_0| < \delta$. Fazendo uma mudança de variáveis e lembrando que $\langle\xi\rangle = (1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}$ existe $C_1 > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha u(x)| &\leqslant \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} \alpha! C^{|\alpha|+1} e^{-\frac{\delta}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2s}}} (1+t^2)^{\frac{|\alpha|}{2}(1-\frac{1}{s})} t^{n-1} dt dV(\xi) \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \alpha! C_1^{|\alpha|+1} e^{-\frac{\delta}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2s}}} (1+t^2)^{\frac{|\alpha|}{2}(1-\frac{1}{s})} t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Observe que

1. Existe $C_2 > 0$ de modo que

$$\int_0^1 \alpha! C_1^{|\alpha|} e^{-\frac{\delta}{2}(1+t^2)^{\frac{|\alpha|}{2}(1-s)}} dt \leqslant C_2^{|\alpha|+1} \alpha!^s.$$

2. Fazendo a mudança $t^{\frac{1}{s}} = r$, $r^s = t$ (consequentemente $sr^{s-1}dr = dt$ e $dt = sr^{s-1}$) temos:

$$\int_1^{+\infty} \alpha! e^{-\frac{\delta}{2} t^{\frac{1}{s}}} t^{|\alpha|(1-\frac{1}{s})} 2^{\frac{|\alpha|}{2}} C_1^{|\alpha|} t^{n-1} dt = C_1^{|\alpha|+1} |\alpha|! \int_1^{\infty} e^{-\frac{\delta}{2} r} r^{|\alpha|(s-1)} r^{(sn-s)} s r^{s-1} dr.$$

Assim, lembrando a definição da função gama e que $\Gamma(m) = m!$, temos $C_2 > 0$ tal que

$$\int_1^{+\infty} \alpha! e^{-\frac{\delta}{2} t^{\frac{1}{s}}} t^{|\alpha|(1-\frac{1}{s})} 2^{\frac{|\alpha|}{2}} C_1^{|\alpha|} t^{n-1} dt = C!^{|\alpha|+1} |\alpha|! \Gamma(|\alpha|(s-1) + ns) \leqslant C_2^{|\alpha|+1} |\alpha|^{s|\alpha|}.$$

Assim, juntando as afirmações acima existe $C_3 > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha u(x)| \leqslant C_3^{|\alpha|+1} |\alpha|^{s|\alpha|}, \ |x - x_0| < \delta.$$

Daí, u é G^s em x_0.

Uma vez que mostramos (1) $\implies$ (4), (para isso antes fizemos (1) $\implies$ (2)) (4) $\implies$ (5), (5) $\implies$ (2) e (3) $\implies$ (1). Note que (2) $\implies$ (3) é direto. Assim, finalizamos a demonstração com a seguinte cadeia de afirmações

$$(1) \implies (4) \implies (5) \implies (2) \implies (3) \implies (1).$$

$\square$

Capítulo

3

Regularidade de Gevrey para o operador L

No presente capítulo, abordaremos a hipoelipticidade Gevrey do operador

$$L = \partial_x^2 + (x^{p-1}\partial_{t_1})^2 + (x^{q-1}\partial_{t_2})^2, \tag{3.1}$$

quando $1 \leqslant p \leqslant q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

3.1 Uma classe de espaços de Sobolev com peso

Neste capítulo nós precisaremos inverter um operador diferencial. Para isso usaremos alguns resultados de análise funcional. Os espaços Sobolev clássicos não nos ajudam nestes objetivos, nós usaremos espaços de Sobolev com peso (cuja definição depende do operador). Por exemplo, com tais pesos provaremos facilmente que o operador é contínuo, já com espaço sobolev clássico não sabemos se é contínuo ou não. Nesta seção nós iremos definir tais espaços. Para $x \in \mathbb{R}$ e $0 \neq \tau \in \mathbb{R}^2$ considere

$$w(x, \tau) = (\tau_1^{\frac{2}{p}} + \tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^{\frac{2}{q}} + \tau_2^2 x^{2(q-1)})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Fixe $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ com valor real e não-negativa, satisfazendo $v \equiv 0$ em uma vizinhança de 0, e $v(x) \equiv 1$ para todo $|x| \geqslant 1$. Seja $\rho > 0$ um parâmetro pequeno, que irá, eventualmente, depender de v, e defina as classes de **espaços de Sobolev com peso** $\mathcal{H}^k_{\tau,\rho,\theta,w}(\mathbb{R})$ cujas normas são

$$||f||^2_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho,v,w}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx; \tag{3.3}$$

$$||f||^2_{\mathcal{H}^1_{\tau,\rho,v,w}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} [w(x,\tau)^{-2}|\partial_x f(x)|^2 + |f(x)|^2] e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx; \tag{3.4}$$

$$||f||^2_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho,v,w}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} [w(x,\tau)^{-2}|\partial_x^2 f(x)|^2 + |\partial_x f(x)|^2 + w(x,\tau)^2|f(x)|^2] e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx. \tag{3.5}$$

Para não carregar a notação denotaremos $\mathcal{H}^k_{\tau.\rho,v,w}$ por τ^k para $k \in \{0,1,2\}$Observe que podemos redefinir as normas como

$$||f||^2_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} = ||w^{-1} f e^{\frac{\rho}{2}\tau^{\frac{p}{q}} v}||^2_{L^2}; \tag{3.6}$$

$$||f||^2_{\mathcal{H}^1_\tau(\mathbb{R})} = ||w^{-1} f' e^{\frac{\rho}{2}\tau^{\frac{p}{q}} v}||_{L^2} + ||f e^{\frac{\rho}{2}\tau^{\frac{p}{q}} v}||^2_{L^2}; \tag{3.7}$$

$$||f||^2_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})} = ||w^{-1} f'' e^{\frac{\rho}{2}\tau^{\frac{p}{q}} v}||^2_{L^2} + ||f' e^{\frac{\rho}{2}\tau^{\frac{p}{q}} v}||^2_{L^2} + ||w f e^{\frac{\rho}{2}\tau^{\frac{p}{q}} v}||^2_{L^2}. \tag{3.8}$$

Ou ainda, poderíamos considerar uma medida com peso no lugar da medida de Lebesgue. Vale mencionar a densidade das funções teste nestes espaços.

Lema 12. *Dado $f \in \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})$ existe $\phi_j \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ tal que $\phi_j \to f$ em $\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})$.*

A demonstração deste lema foi omitida devido a semelhança com o caso clássico (veja [5]).

Vamos definir também o espaços de Sobolev com peso para $\mathbb{R} \times D$, onde D é um disco aberto. Para qualquer disco aberto $D \subset \mathbb{C}^2$ centrado em 0, definimos os espaços de Sobolev $\mathcal{H}^k_{\tau,\rho,v,w}(\mathbb{R} \times D)$ de funções mensurávies de $(x,t) \in \mathbb{R} \times D$ cujo quadrado é localmente integrável e que são holomorfas com respeito a $t \in D$ (para quase todo x), para qual as normas são

$$||f||^2_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho,v,w}(\mathbb{R}\times D)} = \int_{\mathbb{R}\times D} |f(x,t)|^2 w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx dt d\bar{t}. \tag{3.9}$$

$$||f||^2_{\mathcal{H}^1_{\tau,\rho,v,w}(\mathbb{R}\times D)} = \int_{\mathbb{R}\times D} [w(x,\tau)^{-2}|\partial_x f(x,t)|^2 + |f(x,t)|^2] e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx dt d\bar{t}. \tag{3.10}$$

$$||f||^2_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho,v,w}(\mathbb{R}\times D)} = \int_{\mathbb{R}\times D} [w(x,\tau)^{-2}|\partial_x^2 f(x,t)|^2 + |\partial_x f(x,t)|^2 + w(x,\tau)^2|f(x,t)|^2] e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx dt d\bar{t}. \tag{3.11}$$

Para simplificar notação escreveremos $||f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho,v,w}} = ||f||_{\mathcal{H}^0_\tau}$, $||f||^2_{\mathcal{H}^1_{\tau,\rho,v,w}} = ||f||^2_{\mathcal{H}^1_\tau}$ e $||f||^2_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho,v,w}} = ||f||^2_{\mathcal{H}^2_\tau}$.

3.2 Hipoelipticidade Gevrey do Operador L

Esta seção é dedicada para demonstrar uma aplicação da seção 2. O resultado apresentados aqui tem grande valor histórico e por isso, em certo sentido, é o principal resultado desse texto. Como definido acima, considere

$$L_{p,q} = L = \partial_x^2 + (x^{p-1}\partial_{t_1})^2 + (x^{q-1}\partial_{t_2})^2,$$

com $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ e $1 \leqslant p \leqslant q$. Acima estamos denotando $\partial_x^2 = \partial_x \circ \partial_x$ e $(x^{p-1}\partial_t)^2 = (x^{p-1}\partial_t) \circ (x^{p-1}\partial_t)$ Observe que, tomando $f(x)$ uma função arbitrária, por definição temos

$$Lf(x) = \partial_x^2 f(x) + x^{2(p-1)}\partial_{t_1}^2 f(x) + x^{2(q-1)}\partial_{t_2}^2 f(x).$$

Assim

$$\partial_x^2 + x^{2(p-1)}\partial_{t_1}^2 + x^{2(q-1)}\partial_{t_2}^2 = \partial_x^2 + (x^{p-1}\partial_{t_1})^2 + (x^{q-1}\partial_{t_2})^2$$

Nosso objetivo é mostrar que $L_{p,q}$ é G^s hipoelíptico para todo $s \geqslant \frac{q}{p}$. A prova é baseada nos itens 2 e 5 do Teorema 12 junto dos lemas abaixo. Para simplificar a notação considere

$$E = E_{\tau,\eta,t}(t') = e^{i(t-t')\tau - \langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}(t-t')^2}.$$

Lema 13. *Seja $L = \partial_x^2 + (x^{p-1}\partial_{t_1})^2 + (x^{q-1}\partial_{t_2})^2$, para $1 \leqslant p \leqslant q$. Então existem $c, c', \delta \in \mathbb{R}^+$ e uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ da origem tais que para cada $\eta = (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ satisfazendo $|\xi| \leqslant |\tau|$ e cada $(x,t) \in U$ existe $g \in C^0(U)$, holomorfa com respeito a t, satisfazendo*

$$L(Eg)(x',t') = \alpha_{\frac{p}{q}}(x-x', t-t', \eta)e^{(x-x')\xi - \langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}(x-x')^2}E(t') + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}}),$$

em $U \cap \mathbb{R}^3$,

$$g = O(1) \ \ em\ U,$$

e para $(x', t') \in U \cap \mathbb{R}^3$,

$$g(x', t') = O(e^{-\delta|\tau|^{\frac{p}{q}}}), \ \ se\ |x'| > c\ \ e\ |x| < c',$$

cujas as limitações são uniformes para (x, t, η).

Lema 14. *Seja* $L = \partial_x^2 + (x^{p-1}\partial_{t_1})^2 + (x^{q-1}\partial_{t_2})^2$, *para* $1 \leqslant p \leqslant q$. *Então existem* $c, c', \delta \in \mathbb{R}^+$ *e um conjunto aberto* $0 \in U \subset \mathbb{C}^3$ *tais que para cada* $(x, t) \in U \cap \mathbb{R}^3$ *e* $\eta = (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^3$ *satisfazendo* $|\xi| \geqslant |\tau|$, *então existe* g *holomorfa em* U *satisfazendo*

$$L(Eg)(x', t') = \alpha_{p/q}(x - x', t - t', \eta) \cdot E(x', t) + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle}), \ \ em\ \mathbb{R}^3 \cap U,$$

e $g = O(1)$ *em* U, *uniformemente em* (x, t, η).

Antes de apresentar os detalhes da prova do Lema 12, mostraremos porque o Lema os Lemas 13 e 14 implicam a hipoelipticidade Gevrey de L.

Teorema 13. *Seja* $L = \partial_x^2 + (x^{p-1}\partial_{t_1})^2 + (x^{q-1}\partial_{t_2})^2$, *para* $1 \leqslant p \leqslant q$. *Se* $s \leqslant \frac{q}{p}$ *temos que* L *é* G^s*- hipoelíptico.*

Demonstração. Seja $\gamma = \frac{p}{q}$. Suponha que $W \subset \mathbb{R}^3$ é aberto, $u \in \mathcal{D}'(W)$, $s \geqslant \gamma^{-1} = \frac{q}{p}$ e $Lu \in G^s(W)$. Observe que L é elíptico quando $x \neq 0$. De fato, considere a equação

$$\eta^2 + x^{2(p-1)}\xi_1^2 + x^{2(q-1)}\xi_2^2 = 0.$$

Note que, se $x \neq 0$ então a única solução da equação acima é $(\eta, \xi_1, \xi_2) = 0$. Portanto, L é eliptico em $W \backslash \{0\}$. Daí, L é G^s hipoeliptico em $W \backslash \{0\}$ (veja por exemplo [10], Teorema 1.1) . Nos resta mostrar que L é hipoeliptico em $\{(x, t_1, t_2) : x = 0\}$. Para isso fixe um conjunto aberto relativamente compacto $V \subset U \cap W$ (em que U é aberto do Lema 12) e $h \in C_0^\infty(U \cap W)$ satisfazendo $h \equiv 1$ em uma vizinhança de $\bar{V}$. Rescrevendo u como $u.h$. Observe que $L(hu) = L(u)$ em V. Logo $L(hu)$ é G^s em uma vizinhança de 0 contida em V. Se mostrarmos que hu é G^s em uma vizinhança de 0 contida em V então temos $u \in G^s$

nesta vizinhana pois $u = uh$ em V. Então $u, Lu \in C^\infty(U \cap W)$ pois L é C^∞ hipoeliptico (veja [11]). Considere qualquer $(x,t) \in V$ e $\eta = (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ com $|\xi| \leqslant |\tau|$ e seja $g = g_{(x,t,\eta)}$ satisfazendo as conclusões do Lema 13. Assim,

$$L(Eg)(x',t') = \alpha_{\frac{p}{q}}(x-x', t-t', \eta)e^{i(x-x')\xi - \langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}(x-x')^2}E(x',t') + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}}).$$

Pela definição de E e lembrando que $\eta = (\xi, \tau)$ temos

$$L(Eg)(x',t') = \alpha_{\frac{p}{q}}(x-x', t-t', \eta)e^{i[(x,t)-(x',t')]\eta - \langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}[(x,t)-(x',t')]^2} + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}}).$$

Observe que, como $u \in C^\infty(W)$ temos

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,t,\eta) = \int u(x',t')e^{[(x,t)-(x',t')]\eta - \langle\eta\rangle^\gamma((x,t)-(x',t'))^2}\alpha_\gamma((x,t)-(x',t'),\eta)d(x',t').$$

Daí, usando que $\operatorname{supp} u \subset \bar{V} \subset U$ (lembre-se que a u original foi reescrita) temos

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,t,\eta) = \int_{\operatorname{supp} u} u(x',t')[L(Eg)(x',t') + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}})]d(x',t').$$

Como $\operatorname{supp} u$ é compacto temos

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,t,\eta) = \int_{\bar{V}} [u \cdot L(Eg)](x',t')d(x',t') + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}}).$$

Por outro lado, fazendo integração por partes duas vezes temos que

$$\int_{\bar{V}} [u \cdot L(Eg)](x',t')d(x',t') = \int_{\bar{V}} [(Lu) \cdot (Eg)](x',t')d(x',t').$$

Consequentemente

$$\mathcal{F}_\gamma u(x,t,\eta) = \int_{\bar{V}} [(Lu) \cdot (Eg)](x',t')d(x',t') + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^{\frac{p}{q}}}). \tag{3.12}$$

Como $Lu \in G^s$, pelo item 5 do Teorema 12 existem uma vizinhança aberta $V_1 \subset \mathbb{C}^3$ contendo $(0, t_1, t_2)$ e $C, \delta > 0$ tais que para cada η, Lu é decomposto em $V_1 \cap \mathbb{R}^3$ como

$$Lu = G + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^{\frac{1}{s}}}),$$

onde G é holomorfa e $O(1)$ em

$$U_\eta = \{(x,t) \in V_1 : |\Im(x,t)| < \langle \eta \rangle^{-\frac{s-1}{s}}\}.$$

Ademais, $|(Lu - G)(z)| \leqslant Ce^{-\delta \langle \eta \rangle^{\frac{1}{s}}}$, $\forall z \in U_\eta$ (em que C independe de η). Portanto, voltando em (3.12) temos que existem $C > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$|F_\gamma u(x,t,\eta)| \leqslant Ce^{-\delta \langle \eta \rangle^{\frac{1}{s}}}, \text{ para } (x,t) \in V, \eta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Para o caso $|\tau| \geqslant |\xi|$ podemos provar de modo análogo a partir do Lema 14. Consequentemente L é hipoeliptico. $\square$

Para prova do Lema 13, substituiremos (x,t) e (x',t') na afirmação do lema por $(\tilde{x},\tilde{t})$ e (x,t), respectivamente, de modo que L atue com respeito a (x,t), e os parâmetros são $(\tilde{x},\tilde{t})$ e $\eta = (\xi,\tau)$. Defina $\gamma = \frac{p}{q}$ e considere

$$E(t) = e^{i(\tilde{t}-t)\tau - \langle \eta \rangle^\gamma (\tilde{t}-t)^2}.$$

Defina também o operador

$$L_\eta = E^{-1} \circ L \circ E. \tag{3.13}$$

Ambos E e L_η dependem dos parâmetros $\tilde{t}, \eta$. A seguir iremos estudar L_η como a soma de 3 operadores a serem definidos. Iniciamos com o operador A_τ,

$$\mathcal{A}_\tau = \partial_x^2 - x^{2(p-1)}\tau_1^2 - x^{2(q-1)}\tau_2^2. \tag{3.14}$$

Para o entendimento do próximo lema veja 3.3. Recomendamos que o Leitor relembre a definição dos espaços definidos em (3.3)-(3.9) antes de ler o próximo Lema.

Lema 15. *Para todo $|\rho|$ suficientemente pequeno, $\mathcal{A}_\tau : C_0^2(\mathbb{R}) \to C_0^0(\mathbb{R})$ estende-se a um operador invertível de $\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R})$ para $\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R})$ de modo que existe $C > 0$ tal que C independente dos parâmetros $||f||_{\mathcal{H}_\tau^2}^2 \leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}_\tau^0}^2$ $\forall f \in \mathcal{H}_\tau^0$.*

Note que o lema permanece verdadeiro se os expoentes $\frac{p}{q}$ na definição das normas é substituído por qualquer expoente pertencente a $(0,1]$, mas a nossa aplicação requer $\frac{p}{q}$.

Demonstração. Primeiro é importante destacar que $\mathcal{A}_\tau : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})$ é limitada, cujas limitações independem de ρ e τ. Mais ainda, existe $C > 0$ (independente de ρ e τ) de modo que $||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant ||f||^2_{\mathcal{H}_\tau}, \forall f \in \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})$. De fato, por (3.3) e (3.14) temos

$$\begin{aligned} ||\mathcal{A}_\tau f||^2_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{A}_\tau f(x)|^2 w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\partial_x^2(f(x)) - x^{2(p-1)}\tau_1^2(f(x)) - x^{2(q-1)}\tau_2^2(f(x))|^2 w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pela desigualdade de Minkowski temos

$$\begin{aligned} ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant & \left[\int [|\partial_x^2 f(x)| w^{-1} e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)}]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int [w^{-1}|f(x)| x^{2(p-1)}\tau_1^2 e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)}]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ & + \left[\int [w^{-1}|f(x)| x^{2(q-1)}\tau_2^2 e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)}]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Além disso, por (3.2),

$$|x^{2(p-1)}\tau_1^2|^{\frac{1}{2}} \leqslant w(x,\tau)$$

e

$$|x^{2(q-1)}\tau_2^2|^{\frac{1}{2}} \leqslant w(x,\tau).$$

Daí

$$||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} \leqslant \left[\int w^{-2}|\partial_x^2 f(x)|^2 e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx\right]^{\frac{1}{2}} + 2\left[\int |f(x)|^2 w^2 e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Acima, os termos que "faltam" para obter a norma $\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})$ são positivas. Assim,

$$||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} \leqslant ||f||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})}.$$

Para provar a invertibilidade considere primeiro $\rho = 0$ nas normas de $\mathcal{H}^0_\tau$ e $\mathcal{H}^2_\tau$, veja (3.3) (lembre-se que elas dependem de ρ, v e w além de τ). A seguir vamos mostrar uma estimativa por baixo. Para qualquer função de valor real $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, por (3.14), temos

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f . f dx = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 f)(x) \cdot f(x) dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 (x^{2(p-1)}\tau_1^2 + x^{2(q-1)}\tau_2^2) dx \qquad (3.16)$$

Agora observe que, utilizando integração por partes e lembrando que f possui suporte compacto

$$-\int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 f)(x) \cdot f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x).f'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx$$

Assim, voltando para (3.16) temos

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f . f dx = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 (x^{2(p-1)}\tau_1^2 + x^{2(q-1)}\tau_2^2) dx. \qquad (3.17)$$

A seguir mostraremos que para quaisquer $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\lambda^{\frac{2}{m}} ||f||_{L^2}^2 \leqslant C||\partial_x f||_{L^2}^2 + C \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \lambda^2 x^{2(m-1)} dx. \qquad (3.18)$$

Observe que

$$||f||_{L^2(\mathbb{R})}^2 = ||f||_{L^2((-1,1))}^2 + ||f||_{L^2((-1,1)^c)}^2. \qquad (3.19)$$

Vamos trabalhar com cada termo separadamente. pela desigualdade de Poincaré existe $\tilde{C} > 0$ tal que $||f||_{L^2((-1,1))} \leqslant \tilde{C}||\partial_x f||_{L^2((-1,1))}$. E, como $m \geqslant 1$,

$$||f||_{L^2((-1,1)^c)}^2 = \int_{(-1,1)^c} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{|x|>1} |x|^{2(m-1)} |f(x)|^2 dx.$$

Voltando em (3.19) temos

$$\begin{aligned} ||f||_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= (\tilde{C})^2 ||\partial_x f||_{L^2((-1,1))}^2 + \int_{|x|>1} |x|^{2(m-1)} |f(x)|^2 dx \\ &\leqslant \tilde{C}||\partial_x f||_{L^2}^2 + 1 \int_{\mathbb{R}} |x|^{2(m-1)} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Escolhendo $C = \max\{1, \tilde{C}\}$ temos

$$||f||_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leqslant C||\partial_x f||_{L^2}^2 + C \int |x|^{2(m-1)} |f(x)|^2 dx$$

Deste modo terminamos de mostrar (3.18) para $\lambda = 1$. Para o caso geral, considere $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e defina $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Note que

1.

$$||f_\lambda||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x)|^2 dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 du = \frac{1}{\lambda}||f||_2^2, \text{ onde } u = \lambda x \tag{3.20}$$

2.

$$||\partial_x f_\lambda||^2 = \int_{\mathbb{R}} |\frac{d}{dx} f(\lambda x)|^2 dx = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} |f'(\lambda x)|^2 dx = \lambda^2 \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f'(u)|^2 du = \lambda ||\partial_x f||_2^2 \tag{3.21}$$

3.

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\lambda|^2 x^{2(m-1)} dx = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 (\frac{u}{\lambda})^{2(m-1)} \frac{du}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{2m-1}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2 u^{2(m-1)} du \tag{3.22}$$

Sabemos que (usando (3.18))

$$||f_\lambda||^2 \leqslant C||\partial_x f_\lambda||^2 + C\int_{\mathbb{R}} |f_\lambda|^2 x^{2(m-1)} dx \tag{3.23}$$

Substituindo as igualdades feitas nos itens acima em (3.23), (3),

$$\frac{1}{\lambda}||f||_2^2 = ||f_\lambda||_2^2 \leqslant C\lambda \|\partial_x f\|^2 + C\lambda{-}(2m-1)\int_{\mathbb{R}} |f|^2 x^{2(m-1)} dx.$$

Multiplicando ambos os lados por λ^{-1}

$$\lambda^{-2}||f||^2 \leqslant C||\partial_x f||^2 + C\lambda^{-2m}\int_{\mathbb{R}} |f|^2 x^{2(m-1)} dx, \, \forall \lambda > 0$$

Assim, para $\lambda^{-\frac{1}{m}}$ no lugar de λ temos

$$\lambda^{2/m}\|f\|^2 \leqslant C\|\partial_x f\|^2 + C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \lambda^2 x^{2(m-1)} dx, \text{ para } \lambda > 0. \tag{3.24}$$

Lembre-se que voltando em (3.17)

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f \cdot f\, dx = ||\partial_x f||^2 + \int_{\mathbb{R}} |f|^2(\tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^2 x^{2(q-1)})dx \tag{3.25}$$

e, usando (3.24) temos

1. $$\tau_1^{\frac{2}{p}}||f||^2 \leqslant C||\partial_x f||^2 + C\int_{\mathbb{R}} |f|^2\tau_1^2 x^{2(p-1)}dx$$

   Daí,
   $$\frac{1}{4C}\int_{\mathbb{R}} \tau_1^{\frac{2}{p}}|f|^2 - \frac{1}{4}\int |\partial_x f|^2 \leqslant \frac{1}{4}\int |f|^2\tau_1^2 x^{2(p-1)}$$

2. $$\tau_2^{\frac{2}{q}}||f||^2 \leqslant C||\partial_x f||^2 + C\int_{\mathbb{R}} |f|^2\tau_2^2 x^{2(q-1)}dx$$

   Daí,
   $$\frac{1}{4C}\int_{\mathbb{R}} \tau_2^{\frac{2}{p}}|f|^2 - \frac{1}{4}\int |\partial_x f|^2 \leqslant \frac{1}{4}\int |f|^2\tau_2^2 x^{2(q-1)}$$

Assim, pelos itens acima, lembrando que $||\partial_x f||^2 = \int |\partial_x f|^2$, temos

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f \dot{f} dx &= ||\partial_x f||^2 + \int |f|^2(\tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^2 x^{2(q-1)})\, dx \\
&\geqslant ||\partial_x f||^2 + \frac{3}{4}\int |f|^2\tau_1^2 x^{2(p-1)}dx + \frac{1}{4C}\int \tau_1^{\frac{2}{p}}|f|^2 dx \\
&\quad - \frac{||\partial_x f||^2}{4} + \frac{3}{4}\int |f|^2\tau_2^2 x^{2(q-1)}dx + \frac{1}{4C}\int \tau_2^{\frac{2}{q}}|f|^2 dx - \frac{||\partial_x f||^2}{4}.
\end{aligned}$$

Rearrumando os termos temos que

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f \dot{f} dx \geqslant \frac{1}{2}||\partial_x f||^2 + D\int |f|^2(\tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_1^{\frac{2}{p}} + \tau_2 x^{2(q-1)} + \tau_2^{\frac{2}{q}}) \tag{3.26}$$

onde $D = \min\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4C}\}$. Tomando $E = \min\{\frac{1}{2}, D\}$, lembrando a definição de w (veja (3.2)), por (3.26), segue que existe $E > 0$ de modo que

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f \cdot f\, dx \geqslant E(||\partial_x f||^2 + \int |f|^2 w^2) \tag{3.27}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Holder temos que

$$-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f \cdot f dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{A}_\tau f \cdot f| dx \leqslant \left[\int w^{-2}(\mathcal{A}_\tau f)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\int f^2 w^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

como $(\int w^{-2}(\mathcal{A}_\tau f)^2)^{\frac{1}{2}} = ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau}$, temos que

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau f \cdot f dx &\leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau} (\int f^2 w^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau} \left[||\partial_x f||^2 + \int f^2 w^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Consequentemente, por (3.27), existe $C > 0$ tal que

$$\left[||\partial_x f||^2 + \int_{\mathbb{R}} |f|^2 w(x,\tau)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau}. \tag{3.28}$$

Assim, controlamos dois, dos três, termos na definição da norma $\mathcal{H}^2_\tau$ (veja (3.9)) para definição desta norma). Nos resta majorar o terceiro termo de $||f||_{\mathcal{H}^2_\tau}$. Por outro lado, pela definição de A_τ (veja (3.14)) temos $\partial_x^2 = \mathcal{A}_\tau + \tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^2 x^{2(q-1)}$. Daí

$$\left(\int_{\mathbb{R}} w(x,\tau)^{-2} |\partial_x^2 f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} w(x,\tau)^{-2} [\mathcal{A}_\tau f(x) + \tau_1^2 x^{2(p-1)} f(x) + \tau_2^2 x^{2(q-1)} f(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Usando Minkowski, temos

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}^n} w^{-2} |\partial_x^2 f|^2 dx\right] &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} w(x,\tau)^{-2} \mathcal{A}_\tau f(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}} w(x,\tau)^{-2} [\tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^2 x^{2(q-1)}](f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Observe que $[\tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^2 x^{2(q-1)}] \leqslant [w(x,\tau)]^2$ assim temos, por (3.28), e a definição de

$\mathcal{H}_\tau^0$ (lembrando que estamos no caso $\rho = 0$)

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} w(x,\tau)^{-2}|\partial_x^2 f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||^2_{\mathcal{H}_\tau^0} + \left[\int_{\mathbb{R}} w(x,\tau)^2 |f(x)|\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||^2_{\mathcal{H}_\tau^0} + \left[||\partial_x f||^2 + \int |f|^2 w^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant (1+C)||\mathcal{A}_\tau f||^2_{\mathcal{H}_\tau^0}\end{aligned}$$

Portanto

$$\left(\int_{\mathbb{R}} w(x,\tau)^{-2}|\partial_x^2 f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (1+C)||\mathcal{A}_\tau f||^2_{\mathcal{H}_\tau^0} \tag{3.29}$$

Assim, por (3.28) e (3.29), lembrando as definições de $\mathcal{H}_\tau^2$ e de $\mathcal{H}_\tau^0$, aumentando C, temos

$$||f||^2_{\mathcal{H}_\tau^2} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||^2_{\mathcal{H}_\tau^0} \text{ para todo } f \in C_0^2 \tag{3.30}$$

em que C independe de τ e $\rho = 0$.

Falta obter a desigualdade para $\rho = 0$. A correspondente desigualdade para $|\rho|$ pequeno e $|\tau| \geqslant 1$ segue por conjugação com $\exp{(\rho|\tau|^\gamma)\frac{v(x)}{2}}$. Lembrando da definição de v consideraremos $v \equiv 1$ no interior de $B(0,1)^c$ e consequentemente $\nabla v \equiv 0$ em $B(0,1)^c$. Além disso, como $v \equiv 0$ em uma vizinhança de 0 então existe $r \in (0,1)$ tal que $v \equiv 0$ em $B(0,r)$. Seja $x \in \operatorname{supp} \nabla v \subset B(\bar{0},1) - B(0,r)$. Daí, como $p < q$ e $r^p > r^q$, temos

$$w(x,t) \geqslant \left[\tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^2 x^{2(q-1)}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant \left[\tau_1^2 r^{2(p-1)} + \tau_2^2 r^{2(q-1)}\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant r^{q-1}|\tau|. \tag{3.31}$$

daí $|\tau| \leqslant bw(x,\tau)$, em que $b = 1/r^{q-1}$. Observe que, dadas duas funções f, g

$$\partial_x^2\{f \cdot g\} = f''g + 2f'g' + fg''. \tag{3.32}$$

Além disso, pela definição de $\mathcal{A}_\tau$ (veja (3.14))

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}_\tau f)\cdot g + 2f'g' + fg'' &= f''g + 2f'g' + fg'' - (x^{2(p-1)}\tau_1^2 + x^{2(q-1)}\tau_2^2)(f\cdot g)\\ &= \partial_x^2\{(f\cdot g)\} - (x^{2(p-1)}\tau_1^2 + x^{2(q-1)}\tau_2^2)(f.g)\\ &= \mathcal{A}_\tau(f\cdot g). \end{aligned} \tag{3.33}$$

No caso especial $g = e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}$ temos que

$$g' = \frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v' e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}$$

e

$$g'' = [\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v']^2 e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v} + \frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v'' e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}$$

Logo, por (3.33) e a fórmula da derivada do produto

$$\mathcal{A}_\tau\{fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}\} = [\mathcal{A}_\tau f + f'\rho|\tau|^\gamma v' + f(\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v')^2 + f\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v'']e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v} \tag{3.34}$$

$$\partial_x\{fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}\} = f'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v} + f\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v' e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v} \tag{3.35}$$

$$\partial_x^2\{fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}\} = [f'' + f'\rho|\tau|^\gamma v' + f(\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v')^2 + f\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v'']e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}. \tag{3.36}$$

Por (3.3) temos que

$$\begin{aligned}||f||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})} &= \left[\int_{\mathbb{R}} [w(x,\tau)^{-2}|\partial_x^2 f(x)|^2 + |\partial_x f(x)|^2 + w(x,\tau)^2|f(x)|^2]e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v(x)}dx\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant ||w^{-1}|f''|e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}}v(x)}||_{L^2} + ||f'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}}v(x)}||_{L^2} + ||wfe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}}v(x)}||_{L^2}.\end{aligned}$$

A seguir vamos evidenciar ρ (lembrando que já fizemos o caso $\rho = 0$). Para isso denote

$$\begin{aligned}||f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} &= ||fw^{-1}e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{L^2}\\ ||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}} &= \left[\int w^{-2}|f''|^2 + |f'|^2 + w^2|f|^2]e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}}v}\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Já mostramos que $||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,0}} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,0}}$ para $f \in C_0^2$. Para o caso geral note que existe $a > 0$ tal que $|v'| \leqslant a$. Assim, usando (3.34) e lembrando as definições de $\mathcal{A}_\tau$ e w (veja

(3.14) e (3.2))

$$
\begin{aligned}
||\mathcal{A}_\tau(fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}}v})||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} &\leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + \rho a||f'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} + (\frac{\rho a}{a})^2a^2||fwe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} + \frac{\rho}{2}a^2||fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}w||_{L^2} \\
&\leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + 3\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}}. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como v possui suporte compacto, podemos supor, $|v'| \leqslant a$, $|\tau|^\gamma \leqslant aw$, $|v''| \leqslant a$, onde a é o mínimo entre o valor máximo de v e b em (3.31) . Além disso, $|\tau|^\gamma \leqslant |\tau|^{2\gamma} \leqslant a^2w^2$, já que $|\tau| > 1$. Veja que pelo que já fizemos

$$
||wfe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} \leqslant ||fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}^2_{\tau,0}} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau(fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v})||_{\mathcal{H}^2_{\tau,0}}.
$$

Usando (3.37) temos

$$
||wfe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + 3C\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}} \qquad (3.38)
$$

Agora usando (3.34), temos que

$$
\begin{aligned}
||f'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} &\leqslant ||\partial_x\{fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}\}||_{L^2} + ||f\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} \\
&\leqslant ||fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{\mathcal{H}^2_{\tau,0}} + \rho a||fwe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2}
\end{aligned}
$$

Usando (3.30), (3.37) e (3.38)

$$
\begin{aligned}
||f'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} &\leqslant C||\mathcal{A}_\tau(fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v})||_{\mathcal{H}^2_{\tau,0}} + C\rho a||\mathcal{A}_\tau||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + 3c\rho^2a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}} \qquad (3.39) \\
&\leqslant C(1+3a)||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + 6C\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}}. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Por fim, vamos estimar o primeiro termo, usando (3.34)

$$
\begin{aligned}
||w^{-1}f''e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v})||_{L^2} &\leqslant ||w^{-1}\partial_x^2\{fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v})\}||_{L^2} + ||w^{-1}f'\rho|\tau|^\gamma v')^2e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} \\
&\quad + ||w^{-1}f(\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v')^2e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} + ||w^{-1}f\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v''e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} \\
&\leqslant ||fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{\mathcal{H}^2_{\tau,0}} + \rho a||f'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} + (\frac{\rho a}{2})^2||wfe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} + \rho a||wfe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Por (3.30), (3.37), (3.39), (3.38), e como $(\frac{\rho a}{2})^2 \leqslant \rho a^2$

$$
\begin{aligned}
||w^{-1}(f'')e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} &\leqslant C||\mathcal{A}_\tau\{fe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}\}||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + \rho a||f'e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} + (\rho a^2 + \rho a)||wfe^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} \\
&\leqslant C[||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + 3\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}}] + \rho a[C(1+3a)||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} \\
&+ 6C\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}}] + (\rho a^2 + \rho a)[C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + 3C\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}}].
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
||w^{-1}(f'')e^{\frac{\rho}{2}|\tau|^\gamma v}||_{L^2} \leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||_{\tau,\rho^0} C(1+1+3\rho a^2 + 2\rho a^2) + 15C\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}}. \tag{3.41}
$$

Tome $D = C(1+1+3\rho a^2 + 2\rho a^2)$. Por (3.41), (3.39), (3.38) temos

$$
||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}} \leqslant D||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}} + 24C\rho a^2||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}}
$$

Assim,

$$
(1 - 24C\rho a^2)||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}} \leqslant D||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}}.
$$

Escolhendo ρ tal que $1 - 24\rho a^2 > 0$, ou seja, $\rho \leqslant \frac{1}{24a^2}$ temos $E > 0$ tal que

$$
E||f||_{\mathcal{H}^2_{\tau,\rho}} \leqslant ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_{\tau,\rho}}, \forall f \in C_c^\infty. \tag{3.42}
$$

Já conseguimos a estimativa que desejávamos. Agora mostraremos que $\mathcal{A}_\tau$ é simétrico em $L^2(\mathbb{R}, dx)$. De fato, considerando o produto interno de L^2, queremos mostrar então que

$$
\langle \mathcal{A}_\tau f, g\rangle = \langle f, \mathcal{A}_\tau g\rangle
$$

Sejam $f, g \in C_0^2$, usando integração por partes

$$
\langle \partial_x^2 f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{\partial_x^2 g(x)} dx = \langle f, \partial_x^2 g\rangle
$$

Por outro lado,

$$\langle x^{2(p-1)}\tau_1^2 f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} x^{2(p-1)}\tau_1^2 f(x)\cdot\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{x^{2(p-1)}\tau_1^2 g(x)}\cdot f(x)dx = \langle f, x^{2(p-1)}\tau_1^2 g\rangle$$

e de forma similar para o termo $x^{2(q-1)\tau_2^2}$. Portando, pela linearidade do produto interno temos que $\mathcal{A}_\tau$ é simétrico. Nos resta mostrar a invertibilidade de $\mathcal{A}_\tau$. Já mostramos que $\mathcal{A}_\tau : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})$ é linear, existe $C > 0$ tal que $||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant C||f||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})}$ para todo $f \in \mathcal{H}^0_\tau$ e $||\phi||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau\phi||_{\mathcal{H}^0_\tau}$, para toda $\phi \in C^2_c(\mathbb{R})$. A seguir mostraremos que isso também vale para $\mathcal{H}^2_\tau$. Pelo Lema (12), dados $f \in \mathcal{H}^2_\tau$ existe $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty \subset C^\infty_c(\mathbb{R})$ tal que $\phi_j \to f$ em $\mathcal{H}^2_\tau$. Sem perda de generalidade suponha $||\phi_j - f||_{\mathcal{H}^0_\tau} < \frac{1}{j}$. Logo,

$$\begin{aligned}
||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} &\leqslant ||f-\phi_j||_{\mathcal{H}^2_\tau} + ||\phi_j|||_{\mathcal{H}^2_\tau}\\
&\leqslant \frac{1}{j} + C||\mathcal{A}_\tau\phi_j||_{\mathcal{H}^0_\tau}\\
&\leqslant \frac{1}{j} + C||\mathcal{A}_\tau(\phi_j - f)||_{\mathcal{H}^0_\tau} + C||\mathcal{A}_\tau f|||_{\mathcal{H}^0_\tau}\\
&\leqslant \frac{1}{j} + C^2||\phi_j - f|||_{\mathcal{H}^2_\tau} + C||\mathcal{A}_\tau f|||_{\mathcal{H}^0_\tau}\\
&\leqslant \frac{1}{j} + C^2\frac{1}{j} + C||\mathcal{A}_\tau f|||_{\mathcal{H}^0_\tau}
\end{aligned}$$

Fazendo $j \to +\infty$ temos que $||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau}$. Em particular, se $A_\tau f = 0$ então $f = 0$. Ou seja, $\mathcal{A}_\tau$ é injetora em $\mathcal{H}^2_\tau$. Por fim mostraremos que A_τ é sobrejetora (de $\mathcal{H}^2_\tau$ para $\mathcal{H}^0_\tau$). Note que $\mathcal{H}^0_\tau = L^2(w^{-2}e^{\rho|\tau|^\gamma v}dx)$ (é um L^2 com a medida usual perturbada). Deste modo, $\mathcal{H}^0_\tau = \mathcal{A}_\tau(\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})) \oplus [\mathcal{A}_\tau(\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}))]^\perp$. Para concluir que $\mathcal{A}_\tau$ é sobrejetora, nós mostraremos que $[\mathcal{A}_\tau(\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}))]^\perp = \{0\}$. Dado $g \in [\mathcal{A}_\tau(\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}))]^\perp$ temos, pela definição do produto em $\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})$

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau(f)\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^\gamma v}dx, \forall f \in \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}).$$

Em particular, dado $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ arbitrário temos

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_\tau(\phi)\,\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^\gamma v}dx = \int \phi\mathcal{A}_\tau\{\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^\gamma v}\}dx$$

Lembrando que A_τ é simétrico, $\mathcal{A}_\tau\{\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^\gamma v}\} = 0$ como distribuição. Assim, $\mathcal{A}_\tau(\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}) =$

0 em $B(0,N)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, no sentido das distribuições. Logo

$$\partial_x^2(\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\gamma}v}) = [x^{2(p-1)}\tau_1^2 + x^{2(q-1)}\tau_2^2]\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}$$

em $B(0,N)$ no sentido das distribuições. Como $\bar{g}\in\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R})$ em particular g é função e temos que $\partial_x^2(\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\gamma}v})\in L^2(B(0,N))$. Como a derivada segunda é função temos que $\partial_x(\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\gamma}v})\in L^2(B(0,N))$. Portanto, $\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\gamma}v}\in\mathcal{H}_\tau^2(B(0,N))$. Seja $\psi\in C_c^\infty(B(0,1))$ tal que $\psi\equiv 1$ em $B(0,\frac{1}{2})$ e $0\leqslant\psi\leqslant 1$. Definindo $\psi_N(x)=\psi(\frac{1}{N}x)$ temos que $\psi_N\in C_c^\infty(B(0,N))$, $\psi_N\equiv 1$ em $B(0,\frac{N}{2})$ e $0\leqslant\psi_N\leqslant 1$. Assim, como $\psi_N\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}$ possui suporte compacto existem as derivadas até ordem 2 em $B(0,N)$. Assim

$$\begin{aligned}
||\psi_N\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}_\tau^2} &\leqslant C||\mathcal{A}_\tau(\psi_N\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}_\tau^0}\\
&= C||\mathcal{A}_\tau(\bar{g}w^{-1}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}) + \mathcal{A}_\tau(\psi_N-1)\bar{g}w^{-1}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}_\tau^0}\\
&= ||\mathcal{A}_\tau(\psi_N-1)\bar{g}w^{-1}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}_\tau^0}\\
&\leqslant C^2||(\psi_N-1)\bar{g}w^{-1}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}_\tau^0}
\end{aligned}$$

Por fim

$$\begin{aligned}
&||\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}_\tau^2}\\
&= \lim_{N\to+\infty}\left[\int_{B(0,\frac{N}{2})^c} w^{-2}|\partial_x^2\{\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}\}|^2 + |\partial_x\{\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}\}|^2 + w^2|\bar{g}w^{-2}|e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}dx\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \lim_{N\to+\infty}||\psi_N\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}||_{\mathcal{H}_\tau^2}\\
&\leqslant \lim_{N\to\infty}C^2(\tau_1^{\frac{2}{p}}+\tau_2^{\frac{2}{q}})e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}a}\left[\int_{B(0,\frac{N}{2})^c}(\bar{g})^2w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}dx\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= 0,\ \text{pois } \bar{g}\in\mathcal{H}_\tau^0
\end{aligned}$$

Portanto $\bar{g}w^{-2}e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}=0$ em quase todo ponto, já que $w^{-2}\neq 0$ (pois $w\geqslant(\tau_1^{\frac{2}{q}}+\tau_2^{\frac{2}{q}})^{\frac{1}{2}}>0$) e $e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v}\neq 0$ temos $\bar{g}\equiv 0$ qtp, daí $g=0$ qtp. Portanto, $\mathcal{A}_\tau(\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}))^\perp=\{0\}$. Concluindo que $\mathcal{A}_\tau$ é sobrejetiva. Como $\mathcal{A}_\tau:\mathcal{H}_\tau^2\to\mathcal{H}_\tau^0$ é bijetora e limitada, temos que A_τ possui inversa e sua inversa é limitada. Ademais, vimos que existe $C>0$, independente de τ e ρ, tal que $||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}_\tau^0}\leqslant C||f||_{\mathcal{H}_\tau^2}$ e que $||f||_{\mathcal{H}_\tau^2}\leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}_\tau^0}$. Portanto $\mathcal{A}_\tau: C_0^2(\mathbb{R})\to C_0^2(\mathbb{R})$

foi estendida para uma função $\mathcal{A}_\tau : \mathcal{H}^2_\tau \to \mathcal{H}^0_\tau$ invertível, limitada, com uma inversa e tais que existe uma constante C independente de τ de modo que $||\mathcal{A}_\tau|| \leqslant C$ e $||\mathcal{A}_\tau^{-1}|| \leqslant C$. $\square$

Seja $D \subset \mathbb{C}^2$ centrado em 0. Observe que $A_\tau : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R} \times D) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R} \times D)$ é invertível, por consequência do Lema 15. De fato, pelo Lema 15 temos que $A_\tau : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})$ é invertível. Ou seja, $||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} \leqslant C||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau}$ e $C||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} \geqslant ||\mathcal{A}_\tau f||_{\mathcal{H}^0_\tau}$. Integrando essa desigualdade em D, segue então que $A_\tau : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R} \times D) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R} \times D)$ é invertível e limitada. Defina $\mathcal{E}_\eta$ por

$$\mathcal{A}_\tau + \mathcal{E}_\eta = \partial_x^2 + x^{2(p-1)}[-i\tau_1 + 2\langle\eta\rangle^\gamma)(\tilde{t}_1 - t_1)]^2 + x^{2(q-1)}[-i\tau_2 + 2\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{t}_1 - t_1)]^2 \tag{3.43}$$

Além disso, defina $\mathcal{R}_\eta$ por $L_\eta = \mathcal{A}_\tau + \mathcal{E}_\eta + \mathcal{R}_\eta$. Note que a pertubação do termo $\mathcal{R}_\eta$ envolve diferenciação com respeito t, enquanto $\mathcal{A}_\tau, \mathcal{E}_\eta$ não. Seja D' um disco aberto em $\mathbb{C}^2$ centrado na origem tal que $D' \subset D$ e $d(D', \partial D) \geqslant \epsilon$. Seja r o raio de D.

Lema 16. *Fixe $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo $h \equiv 1$ em uma vizinhança de 0. Se $|\rho|$ é suficientemente pequeno então os termos de pertubação $\mathcal{E}_\eta, \mathcal{R}_\eta$ satisfazem as seguintes limitações que são uniformes para todo $|\tau| \geqslant 1$.*

$$h \cdot \mathcal{E}_\eta : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R} \times D) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R} \times D) \text{ com norma } O(r + |\tilde{t}|). \tag{3.44}$$

$$h \cdot \mathcal{R}_\eta : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R} \times D) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R} \times D') \text{ com norma } O(\epsilon^{-2}|\tau|^{-2\gamma}). \tag{3.45}$$

Ou seja, existem constantes b e b' (independente de τ) tais que $||h\mathcal{E}_\eta f||_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant b||f||_{\mathcal{H}^2_\tau}(|\tilde{t}|+r)$ e $||hR_\eta f||_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant b'(\epsilon^{-2}|\tau|^{-2\gamma})||f||_{\mathcal{H}^2_\tau}$

Demonstração. Antes de mostrar (3.44) mostraremos a desigualdade auxiliar:

$$|\tau|^\gamma(|x|^{p-1} + |x|^{q-1}) \leqslant Cw(x,\tau) \;\; \forall\, x \in \operatorname{supp} h, \forall |\tau| \geqslant 1. \tag{3.46}$$

Com o objetivo de demonstrar (3.46) observe que, como $1 \leqslant p \leqslant q$ e $\operatorname{supp} h$ é compacto, existe $C > 0$ tal que $|x|^{q-1} \leqslant C|x|^{p-1}$ para todo $x \in \operatorname{supp}(h)$. Assim é suficiente mostrar $|\tau|^\gamma|x|^{p-1} \leqslant Cw(x,\xi)$. Veja que, por (3.2),

1. Se $|\tau_1| \geqslant |\tau_2|$ então (lembrando que $|\tau| \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant q$ e $\gamma = \frac{p}{q}$),

$$|\tau|^\gamma |x|^{p-1} = |\tau|^{\frac{p}{q}} |x|^{p-1} \leqslant |\tau||x|^{p-1} \leqslant C|\tau_1||x|^{p-1} = C(|\tau_1|^2 |x|^{2(p-1)})^{\frac{1}{2}} \leqslant Cw(x,\tau).$$

2. Se $|\tau_2| \geqslant |\tau_1|$. Sabemos que existe $C > 0$ tal que $|\tau| \leqslant C|\tau_2|$. Logo, sendo $\gamma = p/q$,

$$|\tau|^\gamma |x|^{p-1} \leqslant C|\tau_2|^{\frac{p}{q}} |x|^{p-1} = C|\tau_2|^{\frac{1}{q}} (|\tau_2|^{\frac{1}{q}} |x|)^{p-1}. \tag{3.47}$$

A seguir mostraremos que fixado $t \geqslant 0$ temos $t^{p-1} \leqslant 1 + t^{q-1}$ quando $1 \leqslant p \leqslant q$. Observe que para $t = 0$ é trivial. Note também que quando $q = 1$ (consequentemente $p = 1$) é trivial pois

$$t^{p-1} = t^{1-1} = 1 \leqslant 1 + 1 = 1 + t^{1-1} = 1 + t^{q-1}\, \forall t \neq 0.$$

A seguir fixe $t \neq 0$ Para o caso $q > 1$ vamos definir $h : [1, q] \to \mathbb{R}$ por

$$p \mapsto h(p) = t^{p-1} = e^{(p-1)\log t}.$$

Note que $h(q) = t^{q-1} \leqslant 1 + t^{q-1}$ e $h'(p) = \frac{p-1}{t} t^{p-1} \geqslant 0$. Assim

$$t^{p-1} = h(p) \leqslant h(q) \leqslant 1 + t^{q-1},\ p \in [1, q].$$

Voltando em (3.47) e usando a desigualdade acima, temos

$$|\tau|^\gamma |x|^{p-1} \leqslant C|\tau_2|^{\frac{1}{q}} [1 + (|\tau_2|^{\frac{1}{q}} |x|)^{q-1}] \leqslant 2C \max\{|\tau_2|^{\frac{1}{q}}; |\tau_2||x|^{q-1}\}.$$

Observe que

$$|\tau_2|^{\frac{1}{q}} = (|\tau_2|^{\frac{2}{q}})^{\frac{1}{2}} \leqslant (|\tau_1|^{\frac{2}{q}} + \tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^{\frac{2}{q}} + \tau_2^2 x^{2(q-1)})^{\frac{1}{2}} = w(x,\tau)$$

e,

$$|\tau_2||x|^{q-1} = (|\tau_2|^2 |x|^{2(q-1)})^{\frac{1}{2}} \leqslant (|\tau_1|^{\frac{2}{q}} + \tau_1^2 x^{2(p-1)} + \tau_2^{\frac{2}{q}} + \tau_2^2 x^{2(q-1)})^{\frac{1}{2}} = w(x,\tau)$$

Consequentemente, temos que $|\tau|^{\gamma}|x|^{p-1} \leqslant 2Cw(x,\tau)$. Portanto (3.46) está demonstrada.

Queremos usar (3.46) para concluir que $h \cdot \mathcal{E}_\eta : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R} \times D) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R} \times D)$ é limitado com norma $O(r + |\tilde{t}|)$. De fato, por (3.43),

$$\mathcal{A}_\tau + \mathcal{E}_\eta = \partial_x^2 + x^{2(p-1)}[-i\tau_1 + 2\langle\eta\rangle^{\gamma}(\tilde{t_1} - t_1)]^2 + x^{2(q-1)}[-i\tau_2 + 2\langle\eta\rangle^{\gamma}(\tilde{t_2} - t_2)]^2.$$

Vamos analisar cada parcela do operador acima (lembrando da continuidade de $\mathcal{A}_\tau$). Dado $t_1 \in D$, temos que $|\tilde{t_1} - t_1| \leqslant |\tilde{t}| + r$. Note que,

$$|x^{2(p-1)}[-i\tau_1 + 2\langle\eta\rangle^{\gamma}(\tilde{t_1} - t_1)]^2| \leqslant |x^{(p-1)}|\tau_1| + 2^{\gamma+1}|\tau|^{\gamma}x^{p-1}(|\tilde{t}| + r)|^2.$$

Note que, por (3.46) e pela definição de w (veja (3.2)), temos $D > 0$ tal que

$$|x^{2(p-1)}[-i\tau_1 + 2\langle\eta\rangle^{\gamma}(\tilde{t_1} - t_1)]^2| \leqslant Dw(x,\tau)^2(|\tilde{t}| + r).$$

Analogamente,

$$|x^{2(q-1)}[-i\tau_2 + 2\langle\eta\rangle^{\gamma}(\tilde{t_2} - t_2)]^2| \leqslant Dw(x,\tau)^2(|\tilde{t}| + r).$$

Consequentemente, pela definição de $\mathcal{A}_\tau$ (veja (3.14)) temos

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}_\tau + \mathcal{E}_\eta)(f)| &\leqslant |\mathcal{A}_\tau| + [x^{2(p-1)}\tau_1^2 + x^{2(q-1)}\tau_2^2]|f| + D(|\tilde{t}| + r)w^2|f| \\ &\leqslant |\mathcal{A}_\tau f| + w^2|f| + D(|\tilde{t}| + r)w^2|f|. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Pelas definições das normas $\mathcal{H}^0_\tau$, $\mathcal{H}^2_\tau$ (veja (3.3)) e usando Minkowski temos

$$\begin{aligned}
||\mathcal{E}_\eta||_{\mathcal{H}^0_\tau} &\leqslant ||(\mathcal{A}_\tau)(f)||_{\mathcal{H}^0_\tau} + ||(\mathcal{A}_\tau + \mathcal{E}_\eta)(f)||_{\tau^0} \\
&\leqslant C||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} + \left[\iint \left[(\frac{1}{r} + D)(|\tilde{t}| + r)w^2|f|\right]^2 w^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx dt d\bar{t}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2C||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} + (\frac{1}{r} + D)\left[\iint |f|^2 w^2 e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx dt d\tilde{t}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{2c}{r}(|\tilde{t}| + r)||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} + (\frac{1}{r} + D)(|\tilde{t}| + r)||f||_{\mathcal{H}^2_\tau} \\
&= (\frac{2C}{r} + \frac{1}{r} + D)||f||_{\mathcal{H}^2_\tau}(|\tilde{t}| + r).
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração de (3.44). Nos concentraremos agora em mostrar (3.45). Dada g holomorfa,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial g}{\partial z}(z)\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial B(z,r)} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2}\int_{\partial B(z,r)} |g(\zeta)| d\zeta
\end{aligned}$$

Como g é holomorfa segue que $|g(\zeta)| \leqslant ||g||_{L^\infty(\partial B(z,r))}$. Daí

$$\left|\frac{\partial g}{\partial z}(z)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2}||g||_{L^\infty(\partial B(z,r))}\int_{\partial B(z,r)} 1 d\zeta.$$

Lembrando que

$$\int_{\partial B(z,r)} 1 d\zeta = 2\pi r,$$

temos

$$\left|\frac{\partial g}{\partial z}(z)\right| \leqslant \frac{1}{r}||g||_{L^\infty(\partial B(z,r))}.$$

A seguir defina $||g||_{H(D')} = \int_{D'} |g(z)| dz d\bar{z}$.

$$||\partial_{z_1} f||_{H(D')} = \left[\int_{D'} |\partial_{z_1} f(z_1, z_2)|^2 d(z_1, z_2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Como, por hipótese, $d(D', \partial D) \geqslant \epsilon$ e f é holomorfa temos que

$$||\partial_{z_1} f(z_1, z_2)||_{H(D')} \leqslant \left[\int_{D'} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\partial B(z_1,\epsilon)} |f(\zeta_1, z_2)| d\zeta_1 \right]^2 d(z_1, z_2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por mudanças de variáveis polares,

$$\begin{aligned} ||\partial_{z_1} f||_{H(D')} &= \left[\int_{D'} \left[\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\partial B(0,1)} |f(z_1 + \epsilon\sigma, z_2)| \epsilon d\sigma \right]^2 d(z_1, z_2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\int_{D'} \left[\int_{\partial B(0,1)} |f(z_1 + \epsilon\sigma, z_2)| \epsilon d\sigma \right]^2 d(z_1, z_2) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade integral de Minkowski

$$||\partial_{z_1} f||_{H(D')} \leqslant \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{S^1} \left[\int_{D'} |f(z_1 + \epsilon\sigma, z_2)|^2 d(z_1, z_2) \right]^{\frac{1}{2}} d\sigma.$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis $w_1 = z_1 + \epsilon\sigma$ temos

$$||\partial_{z_1} f||_{H(D')} \leqslant \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{S^1} \left[\int_{D'_{\sigma,\epsilon}} |f(w_1, z_2)|^2 d(w_1, z_2) \right]^{\frac{1}{2}} d\sigma.$$

Em que $D'_{\sigma,\epsilon} = \{(z_1 + \epsilon\sigma, z_2) : (z_1, z_2) \in D'\}$. Note que $D'_{\sigma,\epsilon} \subset D$. Logo

$$||\partial_{z_1} f||_{L^2(D')} \leqslant \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{S_1} \left[\int_{D} |f(w_1, z_2)|^2 d(w_1, z_2) \right]^{\frac{1}{2}} d\sigma \leqslant \frac{1}{\epsilon} ||f||_{L^2(D)}.$$

Consequentemente,

$$||\partial_{t_j} f||_{\mathcal{H}^k_\tau(\mathbb{R}\times D')} \leqslant \frac{1}{\epsilon} ||f||_{\mathcal{H}^k_\tau(\mathbb{R}\times D)}; \; j \in \{1, 2\}. \tag{3.49}$$

Por outro lado, observe que, dada $f \in \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})$, pela definição de $\mathcal{H}^2_\tau$ (veja (3.3))

$$||h(x)x^{2(q-1)} f(x)||^2_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |h(x)x^{2(q-1)} f(x)|^2 w(x, \tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx.$$

Note que, dado $x \in \operatorname{supp} h$, por (3.46)

$$x^{2(q-1)} = (x^{q-1})^2 \leqslant (|\tau|^{-\gamma} w(x,\tau))^2 = |\tau|^{-2\gamma} w(x,\tau)^2.$$

Assim, como $\operatorname{supp} h$ é compacto, temos

$$\begin{aligned}
||h(x)x^{2(q-1)}f(x)||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} &\leqslant C' \int_{\mathbb{R}} (|\tau|^{-2\gamma} w(x,\tau)^2)^2 |f(x)|^2 w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx \\
&= C'(|\tau|^{-2\gamma})^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x,\tau)^2 e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx \\
&\leqslant C'(|\tau|^{-2\gamma})^2 \int_{\mathbb{R}} [|\partial_x^2 f(x)|^2 w(x,\tau)^{-2} + |\partial_x f(x)|^2 e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x,\tau)^2 e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}} v(x)} dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$||h(x)x^{2(q-1)}f(x)||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} \leqslant C'(|\tau|^{-2\gamma})||f(x)||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})}. \tag{3.50}$$

De maneira análoga

$$||h(x)x^{2(p-1)}f(x)||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R})} \leqslant C'(|\tau|^{-2\gamma})||f(x)||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R})}. \tag{3.51}$$

Tomando $f(x,\bar{t},t)$ com $(\bar{t},t) \in D'$ e integrando em D' como $D' \subset D$, por (3.50)

$$||h(x)x^{2(q-1)}f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R}\times D')} \leqslant (|\tau|^{-2\gamma})||f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D)}. \tag{3.52}$$

E, da mesma forma, por (3.51)

$$||h(x)x^{2(p-1)}f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R}\times D')} \leqslant (|\tau|^{-2\gamma})||f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D)}. \tag{3.53}$$

Por consequência (3.49) e (3.52) considerando o operador

$$h(x)x^{2(q-1)}\partial_{t_1}^2 : \mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D) \to \mathcal{H}^0_\tau(\mathbb{R}\times D')$$

temos que

$$||h(x)x^{2(q-1)}\partial_{t_1}^2 f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D')} \leqslant (|\tau|^{-2\gamma})||f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D)}.$$

De maneira análoga,

$$||h(x)x^{2(p-1)}\partial_{t_2}^2 f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D')} \leqslant (|\tau|^{-2\gamma})||f(x,\bar{t},t)||_{\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D)}.$$

Por outro lado, de (3.13) temos

$$||L_\eta||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D')} = ||E^{-1}\circ L\circ E||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D')} \leqslant ||L||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D')}.$$

Dado $f \in \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D')$, por (3.1) temos (3.49), (3.51) e(3.50)

$$||Lf||_{\mathcal{H}_\tau^0} \leqslant (\epsilon^{-2}|\tau|^{-2\gamma})||f||_{\mathcal{H}_\tau^2} \tag{3.54}$$

Lembrando que $R_\eta = L_\eta - (\mathcal{A}_\tau - \mathcal{E}_\eta)$, pela desigualdade triangular, (3.54) e a estimativas para $\mathcal{A}_\tau$ e $\mathcal{E}_\eta$

$$||hR_\eta f||_{\mathcal{H}_\tau^0} = ||hL_\eta f - h(\mathcal{A}_\tau - \mathcal{E}_\eta)f||_{\mathcal{H}_\tau^0} \leqslant (\epsilon^{-2}|\tau|^{-2\gamma})||f||_{\mathcal{H}_\tau^2} \tag{3.55}$$

□

Agora terminamos os lemas auxiliares e faremos a prova do Lema 13. Considere

$$\psi(x,t) = \psi_{\tilde{x}}(x,t) = e^{i(\tilde{x}-x)\xi - \langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2}\alpha_\gamma(\tilde{x}-x,\tilde{t}-t,\eta). \tag{3.56}$$

Observação 10. Note que $\psi(x,t) \in \mathcal{H}_\tau^0(D_1\times\mathbb{R})$. De fato, lembre-se

$$||\psi||^2_{\mathcal{H}_\tau^0} = \int_{D_1\times\mathbb{R}} |\psi(x,t)|^2 w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v(x)}dxdtd\bar{t} \tag{3.57}$$

Ademais, como existe $C_1 > 0$ tal que$|\alpha_\gamma(\tilde{x}-x,\tilde{t}-t,\eta)| \leqslant C_1$, temos

$$|\psi(x,t)| \leqslant C_1|e^{i(\tilde{x}-x)\xi-\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2}| = C_1 e^{-\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2}$$

Assim, existe $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}||\psi(x,t)||^2_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant & \int_{D_1\times\mathbb{R}} C_1 e^{-2\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v(x)} dx dt d\bar{t}\\ =& C\int_{\mathbb{R}} e^{-2\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}v(x)} dx.\end{aligned}$$

Seja $r>0$ tal que $v(x)\equiv 0$, quando $|x|<r$. Note que $\exists c>0$ tal que $||v||_\infty \leqslant c$. Logo,

$$||\psi||^2_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant C\int_{|x|<r} e^{-\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} dx + C\int_{|x|>r} e^{-\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}c} dx. \quad (3.58)$$

Por outro lado, $w(x,\tau)^{-2} \leqslant \frac{1}{\tau_1^{\frac{2}{p}}+\tau_2^{\frac{2}{q}}}$. Suponha sem perda de generalidade $|\tau_1| \geqslant |\tau_2|$ temos $w(x,\tau)^{-2} \leqslant \frac{1}{\tau_1^{\frac{2}{p}}}$, lembre-se também que $\tau \neq 0$ e consequentemente $\tau_1 \neq 0$. Como $||\tau|| \geqslant |\tau_1|$ temos

$$w(x,\tau)^{-2} \leqslant \frac{1}{||\tau||^{\frac{2}{p}}}. \quad (3.59)$$

Note que, por (3.59) e usando o fato de $||\tau|| \geqslant 1$existe uma constante $C_r>0$ tal que

$$\int_{|x|<r} e^{-\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} dx \leqslant \frac{1}{||\tau||^{\frac{2}{p}}}\int_{|x|<r} 1 dx \leqslant Cr. \quad (3.60)$$

Por outro lado, se $|x| \geqslant r$ e $|\tilde{x}| \leqslant \frac{r}{2}$ temos $|x-\tilde{x}| \geqslant \frac{r}{2}$. Daí usando que $\langle\eta\rangle \geqslant 1$, $||\tau|| \geqslant 1$ e $||\tau|| \leqslant \langle\eta\rangle$ temos

$$\begin{aligned}\int_{|x|>r} e^{-\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}c} dx \leqslant & \int_{|x|\geqslant r} e^{-\frac{\langle\eta\rangle^\gamma}{2}(x-\tilde{x})^2} e^{-\frac{\langle\eta\rangle^\gamma}{2}(x-\tilde{x})^2} \frac{1}{||\tau||^{\frac{2}{p}}} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}c} dx\\ \leqslant & \frac{1}{||\tau||^{\frac{2}{p}}}\int_{|x|\geqslant r} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-x)^2} e^{-\frac{r^2}{8}\langle\eta\rangle^\gamma} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}c} dx\\ \leqslant & \int_{|x|\geqslant r} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-x)^2} e^{-\left(\frac{r^2}{8}-\rho c\right)\langle\xi\rangle^\gamma} dx.\end{aligned}$$

Escolhendo ρ tal que $\frac{r^2}{8}-\rho c>0$ (isto é, $\rho<\frac{r^2}{8c}$) temos

$$\int_{|x|>r} e^{-\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}c} dx \leqslant \int_{|x|\geqslant r} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-x)^2} dx.$$

Fazendo uma mudança de variáveis temos

$$\int_{|x|>r} e^{-\langle\eta\rangle^{\gamma}(\tilde{x}-x)^2} w(x,\tau)^{-2} e^{\rho|\tau|^{\frac{p}{q}}c} dx \leqslant \int e^{-y^2} dy. \tag{3.61}$$

Portanto, aplicando em (3.58) as equações (3.60) e (3.61) temos $C' > 0$ tal que $||\psi||_{\mathcal{H}^0_\tau} \leqslant C'$, quando $|\tilde{x}| \leqslant \frac{r}{2}$. Finalizando a observação.

Para completar a demonstração do Teorema é suficiente resolver

$$(\mathcal{A}_\tau h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)g(x,t) = \psi(x,t) + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^\gamma}). \tag{3.62}$$

globalmente em $\mathbb{R}\times D_0$ para algum polidisco $D_0 \subset \mathbb{C}^2$ centrado em 0, para então a equação original ter solução em uma região onde $h \equiv 1$, já que $L_\eta g = (\mathcal{A}_\tau h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)g(x,t)$ teremos

$$L_\eta g(x,t) = \psi(x,t) + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^\gamma})$$

Por outro lado, pela definição de L_η (veja (3.13)) temos que

$$E^{-1} \circ L \circ Eg(x,t) = \psi(x,t) + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^\gamma})$$

Como o operador E é multiplicativo, segue

$$L \circ Eg(x,t) = E(x',t')\psi(x,t) + E(x',t')O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^\gamma})$$

Agora, pela definição de E (veja (3.2)) temos

$$L(Eg)(x,t) = E(x',t')\psi(x,t) + O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^\gamma})$$

que é o nosso objetivo no Lema 13. Vamos nos concentrar em resolver (3.62). Fixe polidiscos $D_\infty \subset D_2 \subset D_1 \subset \mathbb{C}^2$ centrado em 0, tal que cada um é relativamente compacto em relação ao próximo. Considere $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ uma constante grande que será escolhida adiante. Assuma que $|\tau|$ é grande, e escolha N inteiro tal que

$$|N - \Lambda^{-1}|\tau|^\gamma| < 1.$$

Construa polidiscos $D_2 \supset D_3 \supset \cdots \supset D_N = D_\infty$, centrados em 0, satisfazendo

$$d(D_{j+1}, \partial D_j) \geqslant c\Lambda|\tau|^{-\gamma}$$

onde c é uma constante que independe de Λ, τ.

Defina g pela soma

$$g = \sum_{j=0}^{N}(-1)^j[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi. \tag{3.63}$$

Se D_1 é escolhido suficientemente grande, mas independente de η, então, por (3.44) e pelo Lema 16, considerando r_j raio de D_j

$$||\mathcal{A}_\tau^{-1}h\mathcal{E}_\eta||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D_j)} \leqslant C(|\tilde{t}| + r_j)||f|||_{\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D_j)} \leqslant 2Cr_j||f|||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D_j)}. \tag{3.64}$$

para todo j e τ. Queremos que $2Cr_j \leqslant 1/2$, ou seja, $r_j \leqslant 1/4C$. Além disso, por (3.45) e (3.55), temos que

$$||\mathcal{A}_\tau^{-1}hR_\eta f||_{\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D_{j+1})} \leqslant (c\Lambda|\tau|^{-\gamma})^{-2}(|\tau|^{-2\gamma})||f||^2_{\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D_{j+1})}$$

Como $(c\Lambda|\tau|^{-\gamma})^{-2}(|\tau|^{-2\gamma}) = (c\Lambda)^{-2}$., daí elevando a $1/2$

$$||\mathcal{A}_\tau^{-1}h\mathcal{E}_\eta f||_{\mathcal{H}_\tau^0(\mathbb{R}\times D_j)} \leqslant (c\Lambda)^{-1}||f||_{\mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D_{j+1})}. \tag{3.65}$$

Portanto, considerando

$$[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)] : \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D_j) \to \mathcal{H}_\tau^2(\mathbb{R}\times D_{j+1})$$

e utilizando a desigualdade triangular

$$||[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)f]||_{\mathcal{H}_\tau^2} \leqslant ||\mathcal{A}_\tau^{-1}h\mathcal{E}_\eta f||_{\mathcal{H}_\tau^2} + ||\mathcal{A}_\tau^{-1}hR_\eta f||_{\mathcal{H}_\tau^2}.$$

Por (3.65) e (3.64), temos que

$$||[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)f]||_{\mathcal{H}^2_\tau} \leqslant (\frac{1}{2} + (c\Lambda)^{-1})||f||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D_{j+1})}.$$

Queremos que $1/2 + (c\Lambda)^{-1} \leqslant 3/4$, ou seja, $(c\Lambda)^{-1} \leqslant 3/4 - 1/2 = 1/4$. Daí, $\Lambda \geqslant 4/c$. Desta forma

$$||[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)f]||_{\mathcal{H}^2_\tau} \leqslant \frac{3}{4}||f||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D_{j+1})} \tag{3.66}$$

para todo j e τ suficientemente grande. Queremos calcular $||g||_{\mathcal{H}^2_\tau}$. Pela definição (3.63), temos que

$$\begin{aligned} ||g||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D_\infty)} &= ||\sum_{j=0}^{N}(-1)^j[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi||_{\mathcal{H}^2_\tau} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{N}||[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j||||\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D_\infty)} \end{aligned}$$

Por (3.66) e pela Observação 9 existe $\tilde{C}$, tal que

$$\sum_{j=0}^{N}||[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j||||\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D_\infty)} \leqslant \tilde{C}\sum_{j=0}^{N}(\frac{3}{4})^j = 4\tilde{C}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{N+1}\right) \leqslant 4\tilde{C} \tag{3.67}$$

Tomando $C = 4\tilde{C}$ temos que

$$||g||_{\mathcal{H}^2_\tau(\mathbb{R}\times D_\infty)} \leqslant C < +\infty.$$

Finalmente, note que,

$$L_\eta g = (\mathcal{A}_\tau + h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)g = \sum_{j=0}^{N}(-1)^j[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi]. \tag{3.68}$$

Ademais

$$\begin{aligned}&[(\mathcal{A}_\tau + h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j \mathcal{A}_\tau^{-1}\psi]\\ =&A_\tau[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j \mathcal{A}_\tau^{-1}\psi] + (h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^j \mathcal{A}_\tau^{-1}\psi]\\ =&(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{j-1}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi + (h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{j}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Substituindo em (3.68) temos

$$\begin{aligned}L_\eta g =&\psi + \sum_{j=1}^{N}(-1)^j(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{j-1}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi+\\ &+\sum_{l=1}^{N+1}(-1)^{l-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{l-1}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi,\end{aligned}$$

onde fizemos a mudança $j = l - 1($ ou seja, $l = j + 1)$ no segundo somatório. Veja que temos uma soma telescópica. Assim,

$$L_\eta g =\psi \pm (h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{N}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}&(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{N}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi\\ &= (h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{N-1}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi\\ &= [(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)\mathcal{A}_\tau^{-1}](h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{N-1}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi\end{aligned}$$

Seguindo dessa mesma forma

$$(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)[(\mathcal{A}_\tau^{-1}(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)]^{N-1}\mathcal{A}_\tau^{-1}\psi \quad = [(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)\mathcal{A}_\tau^{-1}]^{N+1}\psi$$

Consequentemente

$$L_\eta g = \psi \pm [(h\mathcal{E}_\eta + hR_\eta)\mathcal{A}_\tau^{-1}]^{N+1}\psi.$$

Além disso, usando o mesmo argumento de 3.66,

$$[h\mathcal{E}_\eta + h\mathbb{R}_\eta \mathcal{A}_\tau^{-1}]^{N+1}\psi \leqslant C\left(\frac{3}{4}\right)^{N+1}$$

Como $|N - \Lambda^{-1}|\tau|^\gamma| < 1$ e $|\tau|^\gamma \leqslant \langle\eta\rangle^\gamma$ e $3/4 \leqslant e$. Temos que existe $\delta > 0$ tal que $O(3/4)^{N+1} \leqslant O(e^{-\delta\langle\eta\rangle^\gamma})$

A prova do Lema 13 é semelhante, mas é muito mais simples pois o símbolo principal de L é não nulo para $|\xi| \geqslant |\tau|$, o que já garantirá a elipticidade. Para essa demonstração, o operador conjugado L_η é substituído por $E^{-1}LE$ onde

$$E(x,t) = e^{i(\tilde{x}-x,\tilde{t}-t)\eta - \langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{x}-x,\tilde{t}-t)^2}$$

O operador diferencial ordinário A_τ é agora substituído pelo operador definido pela multiplicação com o símbolo $-\xi^2 - \tau_1^2 x_2^{2(p-1)} - \tau_2^2 x_2^{2(q-1)}$, dessa forma,

$$\mathcal{A}_\tau = \xi^2 - x^{2(p-1)}\tau_1^2 - x^{2(q-1)}\tau_2^2$$

que para x em qualquer região limitada seja comparável a ξ^2, portanto a $\langle\eta\rangle^2$, de forma uniforme em todos os parâmetros. Além disso, por ser o operador multiplicação a sua inversa é definida pelo inverso da função. Vamos redefinir $\mathcal{E}_\eta$ por

$$\mathcal{A}_\tau + \mathcal{E}_\eta = \xi^2 + x^{2(p-1)}[-i\tau_1 + 2\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{t_1} - t_1)]^2 + x^{2(q-1)}[-i\tau_2 + 2\langle\eta\rangle^\gamma(\tilde{t_2} - t_2)]^2.$$

Todas as derivadas em relação a x ou t são agora incorporadas em R_n. Trabalha-se nos espaços de Hilbert mais simples $H^2(D_j)$, para uma sequência de polidiscos $D_j \subset \mathbb{C}^3$ centrados em 0, onde $1 \leqslant j \leqslant N \approx \Lambda^{-1}\langle\eta\rangle$ e a distância $(D_{j+1}, \partial D_j) \geqslant c\Lambda\langle\eta\rangle$. O resultado é uma solução g de $E^{-1}LEg = \psi + O(\exp[-\delta\langle\eta\rangle])$, na norma $H^2(D_\infty)$, para um certo polidisco $D_\infty \subset \mathbb{C}^3$ contendo a origem e independente de η.

Deste modo terminado a demonstração dos lemas que nos garantem a hipoelipticade G^s de L, quando $s \geqslant \frac{q}{p}$.

Como já dito, também é possível demonstrar que se $s < \frac{q}{p}$ então L não é G^s- hipoelíptico. Todavia resolvemos omitir a demonstração.

Referências Bibliográficas

[1] BIERSTONE, E.; MILMAN, P. D. *Resolution of singularities in Denjoy-Carleman classes*, v. 10, n. 1, p. 1–28, 2004.

[2] CHRIST, M. *Intermediate optimal gevrey exponents occur*, Communications in Partial Differential Equations, v. 22, n. 3-4, p. 117-204, 1997.

[3] CONSTANTINE, G. M.; SAVITS, T. H. *A multivariate Faa di Bruno formula with applications*, Trans. Am. Math. Soc., v. 348, n. 2, p. 503–520, 1996.

[4] LIMA, E. L. *Análise Real, vol. 3 - Análise Vetorial*, 4ª edição, IMPA, 2016.

[5] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2nd ed. Providence, RI: American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, v. 19, 2010.

[6] GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 3rd ed. 2014.

[7] GRUŠIN, V. V. *A certain class of elliptic pseudodifferential operators that are degenerate on a submanifold. Mat. Sbornik*, v. 84, p. 163-195, 1971.

[8] HOEPFNER, G.; MEDRADO, R. *A New Class of FBI Transforms and Applications. Journal of Fourier Analysis and Applications*, v. 30, p. 45, 2024.

[9] HOEPFNER, G.; MEDRADO, R. *The FBI transforms and their use in microlocal analysis*, J. Funct. Anal., v. 275, n. 5, p. 1208-1258, 2018.

[10] HÖRMANDER, L, *Hypoelliptic Second Order Diferencital Equations*, Acta Math. 119, 147–171, 1967.

[11] HÖRMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[12] HOUNIE, Jorge. *Teoria Elementar das Distribuições*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[13] MÉTIVIER, G. *Une classe d'opérateurs non hypoelliptiques analytiques. Indiana Math. J.*, v. 29, p. 823-860, 1980.

[14] OLEINIK, O. A. *On the analyticity of solutions of partial differential equations and systems. Astérisque*, v. 2-3, p. 272-285, 1973.

[15] RODINO, L. *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces*. World Scientific, 1993.

[16] TARTAKOFF, D. S. *On the local real analyticity of solutions to* $\square_b$ *and the* $\bar{\partial}$*-Neumann problem. Acta. Math.*, v. 145, p. 117-204, 1980.