UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO EM MATEMÁTICA BACHARELADO
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

HEGEL MARINHO VIANA FILHO

O TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN

MACEIÓ
2024

HEGEL MARINHO VIANA FILHO

O TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wagner Ranter Gouveia da Silva .

MACEIÓ

2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

V614t Viana Filho, Hegel Marinho.
O teorema de Seifert-Van Kampen / Hegel Marinho Viana Filho. - 2024.
62 f. : il.

Orientador: Wagner Rânter Gouveia da Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 62.

1. Seifert-Van Kampen, Teorema de. 2. Grupo livres. 3. Grupos Fundamentais. 4. Homotopia. I. Título.

CDU: 515.14

Folha de Aprovação

HEGEL MARINHO VIANA FILHO

Título do trabalho: O TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à banca examinadora do curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 08 de Agosto de 2024.

Documento assinado digitalmente
WAGNER RANTER GOUVEIA DA SILVA
Data: 22/08/2024 11:07:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

(Orientador(a) - Prof. Dr. Wagner Rânter Gouveia da Silva, UFAL)

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
JULIANA ROBERTA THEODORO DE LIMA
Data: 22/08/2024 11:18:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

____

(Examinador(a) Interno(a) - Profª. Drª. Juliana Roberta Theodoro de Lima, UFAL)

____

(Examinador(a) Interno(a) - Prof. Dr. Davi dos Santos Lima, UFAL)

Documento assinado digitalmente
DAVI DOS SANTOS LIMA
Data: 14/11/2024 16:07:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Agradeço a todos que de algum jeito deixou a caminhada mais leve até nesse presente momento.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a mim mesmo, por todas as vezes que pensei em desistir e até mesmo quando desisti, recuperei as forças para continuar.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, amor e incentivo constantes. Sem vocês, esta conquista não teria se tornado realidade.

Ao meu irmão, Max Viana, por todos os conselhos e ensinamentos, sem o seu direcionamento eu não seria capaz de seguir carreira acadêmica.

À minha namorada, Yasmin Araújo, pela compreensão, carinho e que foi minha âncora por todo meus anos de graduação. E a meu irmão de vida Daniel Cavalcante, por toda paciência em me escutar nos momentos mais difíceis durante toda a minha vida.

Aos meus amigos de graduação, que compartilharam momentos inesquecíveis, tanto de alegria quanto de dificuldades, e em especial quero citar os nomes de Davi Matheus, Vinicius Guardiano, Gleydson Silva, Maxmiliam Siqueira, Cícero Calheiros, Alan Francisco, Gabriel Oliveira, Victor Ferreira, Jefferson Silva, Jeann Rocha e Kevyn Lacerda que sem eles, tudo isso não seria possível.

Aos professores, por todo conhecimento passado, por todo projeto, por cada conversa e orientação. Em especial eu agradeço ao professores Alan Pereira, Wagner Ranter e Juliana Theodoro, que foram cruciais para que eu não desistisse do curso. Também gostaria de agradecer aos professores Luis Maza, Rafael Lucena, Davi Lima, Krerley Oliveira, Isnaldo Isaac e Elaine Silva, que foram importantes na minha jornada.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, meu sincero agradecimento. Cada um de vocês tem um lugar especial na minha história e no meu coração.

"O que se leva dessa vida é o que se vive, é o que se faz."
(Charlie Brown Jr.)

RESUMO

Este trabalho aborda o Teorema de Seifert-Van Kampen, estruturado em três partes principais. Inicialmente, são apresentados os pré-requisitos necessários para a compreensão do teorema, abrangendo conteúdos de álgebra básica, topologia, homotopia, grupo fundamental e grupos livres. A segunda parte foca diretamente no Teorema de Seifert-Van Kampen, detalhando suas hipóteses, enunciado e demonstração. Por fim, a última parte explora as aplicações do teorema, destacando sua relevância e utilidade em alguns casos especiais.

Palavras-chave: Teorema de Seifert-Van Kampen, Grupo Livre, Grupo Fundamental, Homotopia.

ABSTRACT

This work addresses the Seifert-Van Kampen Theorem, structured into three main parts. Initially, the prerequisites necessary for understanding the theorem are presented, covering topics in basic algebra, topology, homotopy, fundamental group, and free groups. The second part focuses directly on the Seifert-Van Kampen Theorem, detailing its hypotheses, statement, and proof. Finally, the last part explores the applications of the theorem, highlighting its relevance and usefulness in some special cases.
Keywords: Seifert-Van Kampen Theorem. Free Groups.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A topologia algébrica é uma área da matemática que estuda propriedades de espaços topológicos utilizando ferramentas algébricas. Um dos conceitos importantes desta área é o que se refere a grupo fundamental, que consiste no conjunto das classes de homotopias de caminhos fechados baseados em um ponto fixo x_0 em um espaço topológico X, com a operação de justaposição. Esse grupo captura informações essenciais sobre a estrutura dos caminhos fechados em espaços topológicos.

O Teorema de Seifert-Van Kampen foi desenvolvido pelos matemáticos Herbert Seifert e Egbert van Kampen, e é um resultado fundamental na teoria dos grupos fundamentais. Ele permite decompor o grupo fundamental de um espaço topológico X em termos dos grupos fundamentais de subespaços mais simples U e V, onde U e V são dois subconjuntos abertos, conexos por caminhos e cuja interseção $U \cap V$ é conexa por caminhos.

O grupo fundamental fornece propriedades topológicas do espaço X, e o Teorema de Seifert-Van Kampen relaciona essa estrutura topológica com a estrutura algébrica dos grupos através do produto livre de grupos e grupos livres, oferecendo uma forma eficaz de calcular o grupo fundamental de X.

2 PRELIMINARES

2.1 Conceitos básicos de álgebra

Nesta seção, vamos introduzir algumas noções importantes de álgebra que serão utilizados nos capítulos seguintes.

Introduziremos a teoria básica dos grupos, ou seja, o que é um grupo, subgrupo, produto direto, subgrupos gerados por um subconjunto, grupos cíclicos, classes laterais, subgrupos normais e grupos quocientes. O livro texto utilizado está na referência [4].

Definição 1. *Um conjunto G com uma operação*

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

é um grupo se as condições seguintes são satisfeitas:

i) A operação associativa, isto é,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \forall a,b,c \in G.$$

ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists e \in G \text{ tal que } e \cdot a = a \cdot e = a, \ \forall a \in G.$$

iii) Todo elemento possui um inverso, isto é,

$$\forall a \in G, \ \exists b \in G \text{ tal que } a \cdot b = b \cdot a = e.$$

Dizemos também que um grupo é abeliano ou comutativo se satisfaz:

iv) A operação de comutatividade, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a, \ \forall a,b \in G.$$

Observação. *1. O elemento neutro é único. De fato, se $e, e' \in G$ são elementos neutros de G, então*

$$\begin{aligned} e &= e \cdot e' \text{ pois e' é elemento neutro} \\ &= e' \text{ pois e é elemento neutro.} \end{aligned}$$

2. *O elemento inverso é único. De fato, seja $a \in G$, e sejam $b, b' \in G$ dois elementos inversos de a; temos:*

$$\begin{aligned} b &= b \cdot e = b \cdot (a \cdot b') \\ &= (b \cdot a) \cdot b' = e \cdot b' = b'. \end{aligned}$$

Denotaremos o único inverso de a por a^{-1}.

Nota: Muitas vezes deixaremos de indicar a operação do grupo escrevendo G para denotar um grupo $(G, \cdot)$.

Exemplos de grupos:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano infinito.

   As propriedades são herdadas da própria estrutura de $\mathbb{Z}$.

2. $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ é um grupo abeliano finito com n elementos.

   Sejam $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$ quaisquer temos:

   i) Associatividade em $\mathbb{Z}_n$

   $$\begin{aligned} \bar{a} \oplus (\bar{b} \oplus \bar{c}) &= \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c}, \text{ associatividade em } \mathbb{Z} \\ &= (\bar{a} \oplus \bar{b}) \oplus \bar{c}. \end{aligned}$$

   ii) Existe um elemento neutro que é o $\bar{0}$

   $$\bar{a} \oplus \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}.$$

   iii) Seja $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, então existe $\bar{b} = \overline{n - a}$, com $n - a \in \mathbb{Z}$, tal que

   $$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + (n - a)} = \bar{n} = \bar{0}.$$

   iv) Comutatividade em $\mathbb{Z}_n$

   $$\bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{a} \oplus \bar{b}.$$

   Portanto, $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ é um grupo abeliano finito com n elementos.

3. Sejam $(G_1, \oplus), (G_2, \odot)$ dois grupos. No conjunto $G_1 \times G_2$ defina a operação

   $$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 \oplus g_2, g_1' \odot g_2').$$

   O grupo formado $(G_1 \times G_2, \cdot)$ é chamado de produto direto finito de G_1 com G_2. Provaremos o caso geral no capítulo de Produto Fraco de Grupos Abelianos.

Definição 2. *Seja $(G,\cdot)$ um grupo. Um subconjunto não-vazio H de G é dito ser um subgrupo (denotaremos por $H < G$) quando, com a operação de G, o conjunto H é um grupo, isto é, quando as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $h_1 \cdot h_2 \in H$, $\forall h_1, h_2 \in H$.

ii) $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3$, $\forall h_1, h_2, h_3 \in H$.

iii) *Existe* $e_H \in H$ *tal que* $e_H \cdot h = h \cdot e_H = h$, $\forall h \in H$.

iv) *Para cada* $h \in H$, *existe* $k \in H$ *tal que* $h \cdot k = k \cdot h = e_H$.

Observações. 1. *As condições $i)$ e $ii)$ são herdadas de G.*

2. *O elemento neutro e_H de H é necessariamente o elemento neutro de G. De fato, tomando $a \in H \subset G$, temos $e_H \cdot a = a$, multiplicando os dois lados por a^{-1} à direita, temos $e_H \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$, e obtemos $e_H = e$.*

3. *Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual ao elemento inverso de h em G. De fato, se k é o inverso de h em H, então $h \cdot k = k \cdot h = e_H$, logo $h \cdot k = k \cdot h = e$, pois $e_H = e$, e portanto k é o inverso de h em G.*

Proposição 1. *Seja H um subconjunto não-vazio do grupo G. Então H é um subgrupo de G se e somente se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

1. $h_1 \cdot h_2 \in H$, $\forall h_1, h_2 \in H$.
2. $h^{-1} \in H$, $\forall h \in H$.

Demonstração. $\Longrightarrow)$ *Suponhamos $H < G$. Logo, a condição $1)$ é satisfeita por definição. Agora, seja $h \in H$; sendo H um grupo, h possui um inverso em H; mas pela Observação precedente, tal inverso é necessariamente igual ao inverso de h em G, isto é, é igual a h^{-1}; logo $h^{-1} \in H$, e a segunda condição é satisfeita.*
$\Longleftarrow)$ *Suponha válidas as condições $1)$ e $2)$. Então, as condições $i)$ e $ii)$ são sempre satisfeitas. Para mostrarmos que $iii)$ é satisfeita, basta ver que $e \in H$. Isto ocorre, pois tomando $h \in H$, temos $h^{-1} \in H$ pela condição $2)$ e logo $e = h \cdot h^{-1} \in H$ pela condição $1)$. Finalmente, a condição $iii)$ é satisfeita decorre da condição $2)$ ser satisfeita* $\square$

Exemplo 1. *Veremos alguns exemplos de subgrupos:*

1. Se G é um grupo então $\{e\}$ e G são subgrupos de G.
2. Se $n \in \mathbb{Z}$, então $(n\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Seja G um grupo qualquer. Considere o subconjunto $Z(G) = \{x \in G | xg = gx;\ \forall g \in G\}$. Mostraremos que $H < G$. De fato, seja $g \in G$, então dados $x, y \in Z(G)$, temos que

$$\begin{aligned}(xy)g &= x(yg) = x(gy) = (xg)y \\ &= (gx)y = g(xy).\end{aligned}$$

Logo a condição $i)$ é satisfeita. Para a condição $ii)$, seja $h \in G$ um elemento qualquer e $x \in Z(G)$, logo, $xh = hx$. Daí, como $xh, hx \in G$, temos que os inversos são iguais, isto é, $h^{-1}x^{-1} = x^{-1}h^{-1}$, chame $h^{-1} = g$, então temos $x^{-1}g = gx^{-1}$. E pela observação que fizemos o inverso de x em $Z(G)$ é o inverso de x em G. Portanto, garantimos que a condição $ii)$ e logo $Z(G)$ é um subgrupo de G.

Fixemos inicialmente algumas notações. Se H e K são subconjuntos não-vazios de um grupo G (em particular, se H e K são subgrupos de G), o conjunto $\{hk | h \in H \text{ e } k \in K\}$ será denotado por HK, e o conjunto $\{h^{-1} | h \in H\}$ será denotado por H^{-1}. Em geral, HK não é um subgrupo de G, mesmo quando H e K são subgrupos de G.
Se S é um subconjunto não-vazio de G, o conjunto $\{a_1a_2 \cdots a_n | n \in \mathbb{N},\ a_i \in S \text{ ou } a_i \in S^{-1}\}$ será denotado por $< S >$. Quando o conjunto é finito, digamos $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$, utilizaremos a notação $< \alpha_1, ..., \alpha_r >$ para designar $< \{\alpha_1, ..., \alpha_r\} >$. Observe que se $g \in G$ então $< g >= \{..., (g^{-1})^2, g^{-1}, e, g, g^2, ...\}$; com frequência, quando $r \in \mathbb{N}$, escreveremos g^{-r} para denotar o elemento $(g^{-1})^r$; assim, com estas notações, temos $< g >= \{g^t | t \in \mathbb{Z}\}$.

Proposição 2. *Sejam G um grupo e S um subconjunto não-vazio de G. Então o conjunto $< S >$ é um subgrupo de G.*

Demonstração. *Devemos provar que:*

1. *$\forall x, y \in < S >$, temos $xy \in < S >$.*
2. *$\forall x \in < S >$, temos $x^{-1} \in < S >$.*

Sejam $x, y \in < S >$. Temos

$$\begin{aligned}x &= a_1a_2 \cdots a_n,\ \text{com } a_i \in S \text{ ou } a_i \in S^{-1},\ \forall i \\ y &= b_1b_2 \cdots b_m,\ \text{com } b_j \in S \text{ ou } b_j \in S^{-1},\ \forall j\end{aligned}$$

Logo, $xy = a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_m$ e $x^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$, estão também em $< S >$ □

Definição 3. *Sejam G um grupo e S um subconjunto não-vazio de G. Então $< S >$ é subgrupo gerado por S.*

Definição 4. *Um grupo G é cíclico quando ele pod ser gerado por um elemento, isto é, quando $G =< S >$, para algum $g \in G$.*

Exemplo 2. *$\mathbb{Z} =< 1 >$, $\mathbb{Z}_n =< \bar{1} >$. Note que se G é cíclico então G é abeliano.*

Exemplo 3. *O subgrupo $< \{xyx^{-1}y^{-1} | x, y \in G\} >$ é o subgrupo dos comutadores do grupo G; ele será denotado por G'. Note que G' é abeliano, se e somente se, $G' = e$.*

Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Sobre G, defina a relação de equivalência $\underset{E}{\sim}$ da seguinte maneira:

$$y \underset{E}{\sim} x \Longleftrightarrow \exists h \in H \text{ tal que } y = xh.$$

Isso de fato, é uma relação de equivalência, pois

i) (Reflexividade) $y \underset{E}{\sim} y$, pois existe $e \in H$, tal que $y = ye$.

ii) (Simetria) Se $y \underset{E}{\sim} x$, então existe $h \in H$ tal que $y = xh$. Como $H < G$, então existe $h^{-1} \in H$, tal que $x = yh^{-1}$. Portanto, $x \underset{E}{\sim} y$.

iii) (Transitividade) Se $y \underset{E}{\sim} x$ e $x \underset{E}{\sim} z$, então existem $h, k \in H$ tais que $y = xh$ e $x = zk$. Daí, $y = z(kh)$, como $hk \in H$, então $y \underset{E}{\sim} z$.

Por definição, a classe de equivalência que contém x é o conjunto $\{y \in G | y \underset{E}{\sim} x\} = \{xh | h \in H\}$; denotaremos esse conjunto por xH e o chamaremos de classe lateral à esquerda de H em G que contém x. Quando não houver confusão possível, chamaremos simplesmente esta classe de classe lateral de x à esquerda. Em particular, H é classe lateral do elemento neutro e à esquerda. Observe que $y \in xH \Longleftrightarrow yH = xH$.

Analogamente, poderíamos definir a relação de equivalência seguinte:

$$y \underset{D}{\sim} x \Longleftrightarrow \exists h \in H; y = hx.$$

Obteríamos então as classes laterais à direita de H em G; a classe lateral de x à direita seria $Hx = \{hx | h \in H\}$.

Observação. *Se G é um grupo abeliano e se H é um subgrupo de G, então $Hx = xH$, $\forall x \in G$.*

Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Queremos ver se a operação de G induz de maneira natural uma operação sobre o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G, isto é, se a operação

$$(xH, yH) \mapsto xyH$$

é bem definida, no sentindo de não depender da escolha dos representantes x e y. Dados $x, y \in G$ e $h, k \in H$ arbitrários, então x e xh são representantes da mesma classe xH e y e yk são representantes da mesma classe yH. Assim, a operação induzida sobre as classes laterais à esquerda é bem definida se e só se

$$xyH = xhyk \in H, \ \forall x, y \in G, \ \forall h, k \in H;$$

logo, se e só se

$$y^{-1}x^{-1}xyH = y^{-1}x^{-1}xhykH,$$
$$H = y^{-1}hyH, \ \forall y \in G, \ \forall h \in H,$$

e portanto se e só se

$$ghg^{-1} \in H, \ \forall g \in G, \ \forall h \in H.$$

Proposição 3. *Seja H um subgrupo de um grupo G. As afirmações seguintes são equivalentes:*

i) a operação induzida sobre as classes laterais à esquerda de H em G é bem definida.

ii) $gHg^{-1} \subset H$, $\forall g \in G$.

iii) $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$.

iv) $gH = Hg$, $\forall g \in G$.

Demonstração. $(i) \iff (ii)$ *já foi feito.*

$(iii) \iff (iv)$ *é claro de ver.*

$(iii) \implies (ii)$ *é por definição de conjunto.*

$(ii) \implies (iii)$ *Suponhamos que $gHg^{-1} \subset H$, $\forall g \in G$; queremos mostrar que $H \subset gHg^{-1}$, $\forall g \in G$. Sejam então $h \in H$ e $g \in G$; temos*

$$h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in H = g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subset gHg^{-1}$$

□

Definição 5. *Um subgrupo H é um subgrupo normal de G (e escrevemos $H \triangleleft G$) se ele satisfaz as afirmações equivalentes da proposição anterior. Neste caso, as classes laterais à esquerda de H são iguais às classes laterais à direita de H; vamos chamá-las de classes laterais de H.*

Exemplo 4. *e e G são subgrupos normais de G.*

Exemplo 5. *$Z(G)$ é um subgrupo normal de G. Mais geralmente, se $H < Z(G)$, então $H \triangleleft G$.*

Exemplo 6. *$G' =< \{xyx^{-1}y^{-1}|x,y \in G\} >$ é um subgrupo normal de G.*

Estes exemplos são muito importantes para conhecermos as aplicações do Teorema de Seifert-Van Kampen.

Definição 6. *Sejam G um grupo e H um subgrupo normal de G. O grupo de suas classes laterais, com a operação induzida de G, é chamado de grupo quociente de G por H; ele será denotado por $G \setminus H$.*

2.2 Conceitos básicos de topologia

Nesta seção utilizaremos como referência [7]. Abordaremos os conceitos de Topologia, conjuntos abertos, conjuntos fechados, conjuntos compactos, conjuntos conexos, conjuntos conexos por caminho, cobertura, cobertura aberta, aplicação aberta, grupo topológico.

Definição 7. *Uma topologia num conjunto X qualquer não vazio é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados os subconjuntos abertos (segundo a topologia τ) satisfazendo as seguintes condições:*

1. *X e o subconjunto vazio $\emptyset$ são abertos;*
2. *a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;*
3. *a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.*

Um espaço topológico é um par (X,τ) onde X é um conjunto não vazio e τ é uma topologia em X. Frequentemente se diz apenas "o espaço topológico X", mencionando τ somente quando for necessário para evitar ambiguidade.

Exemplo 7. *Dado X um conjunto qualquer não vazio. As coleções $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\tau_2 = \mathscr{P}(X)$, são topologias para X.*

Uma aplicação $f : X \to Y$, de um espaço topológico X em um espaço topológico Y, diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ de Y, é um aberto em X.

Definição 8. *Dado $S \subset X$, um conjunto qualquer não vazio de um espaço topológico X, podemos induzir uma topologia em S, chamada de topologia induzida. Dado A subconjunto conjunto qualquer de S e B um aberto em X, então $A \cap B$ é um aberto de S.*

Observação. *A relação $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ mostra que a composta $g \circ f : X \to Z$ de duas aplicações contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ é uma aplicação contínua.*

Definição 9. *Um homeomorfismo $h : X \to Y$, de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma aplicação contínua e biunívoca de X sobre Y, cuja inversa $h^{-1} : Y \to X$ também é contínua.*

Um homeomorfismo entre espaços topológicos significa de maneira intuitiva que ambos possuem a mesma estrutura topológica, ou seja, os abertos se correspondem de maneira única.

Uma aplicação $f : X \to Y$, diz-se aberta quando, para cada aberto $A \subset X$, $f(A)$ é aberto em Y.

Definição 10. *Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se fechado quando o seu complementar $X - F$ é aberto.*

Proposição 4. *Os subconjuntos fechados de um espaço topológico X satisfazem das seguintes propriedades:*

1. *o conjunto vazio e o conjunto X são fechados;*
2. *a interseção de uma família qualquer de subconjuntos fechados é um subconjunto fechado de X;*
3. *a reunião finita de subconjutos fechados, é um subconjunto fechado de X.*

Demonstração.

1. *X e $\emptyset$ são complementares dos conjuntos $\emptyset$ e X, respectivamente, logo são fechados.*
2. *Seja $A_\lambda = X - F_\lambda$. Cada A_λ é aberto em X, logo $A = \cup_\lambda A_\lambda$ é também aberto. Como $F = \cap_\lambda F_\lambda = \cap_\lambda (X - F_\lambda) = X - \cup_\lambda A_\lambda = X - A$, segue-se que F é fechado.*
3. *Novamente, os conjuntos $A_1 = X - F_1, ..., A_n = X - F_n$ são abertos. Logo, $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é aberto em X, logo $F_1 \cup \cdots \cup F_n = (X - A_1) \cup \cdots \cup (X - A_n) = X - (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ é fechado.* □

Proposição 5. *Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f : X \to Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F')$ de todo subconjunto fechado $F' \subset Y$ seja um subconjunto fechado em X.*

Corolário 1. *Seja $f : X \to Y$ biunívoca de X sobre Y. A fim de que f seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que a seguinte condição seja satisfeita: dado $P \subset X$, $f(P)$ é fechado em Y se, e somente se, P é fechado em X.*

Estas duas proposições não são difíceis e serão deixadas para o leito. Você poderá encontrar na referência [7].

Definição 11. *Um espaço topológico X é dito conexo, quando não pode ser expresso como reunião de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não vazios.*

Um caminho num espaço topológico X é uma aplicação contínua $f : I \to X$, onde $I = [0,1]$. Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$ são chamados as extremidades do caminho f; $a = f(0)$ é o ponto inicial e $b = f(1)$ é o ponto final. Diz-se também que os pontos a e b estão ligados pelo caminho f.

Definição 12. *Um espaço topológico X diz-se conexo por caminhos quando, dados dois pontos quaiquer $a,b \in X$, existe sempre um caminho $f : I \to X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$.*

Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma cobertura de S é uma família $\mathscr{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X com $S \subset \cup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $s \in S$ existe um índice $\lambda \in L$ tal que $s \in C_\lambda$.

Diz-se que uma cobertura $\mathscr{C}$ é aberta, quando os conjuntos C_λ que a compõem são abertos. Do mesmo modo, diz-se que a cobertura $\mathscr{C}$ é finita, enumerável ou não enumerável, quando o conjunto L de índices é finito, enumerável ou não enumerável.

Seja $\mathscr{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura de S. Uma subcobertura de $\mathscr{C}$ é uma subfamília $\mathscr{C}' = \{C_\lambda\}_{\lambda' \in L'}$, onde $L' \subset L$, que ainda é cobertura de S.

Definição 13. *Um espaço topológico X chama-se compacto quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.*

Proposição 6. *Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto.*

Proposição 7. *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Definição 14. *Uma métrica num conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x,y \in X$ um número real $d(x,y)$, chamado a distância do ponto x ao ponto y, de tal modo que:*

1. $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$ *se* $x \neq y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$; *quaisquer que sejam* $x,y,z \in X$.

Um espaço métrico é um par (X,d) formado por um conjunto X não vazio qualquer e uma métrica d em X.

Um subconjunto M de um espaço métrico diz-se limitado quando existe um número real $r \geq 0$ tal que $d(x,y) \leq r$ quaisquer que sejam $x,y \in M$. O menor desses números r chama-se o diâmetro do conjunto M e representa-se pelo símbolo $\delta(M)$. Assim, Diâmetro de $M = \delta(M) = \sup\{d(x,y)|x,y \in M\}$.

Seja $\mathscr{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura de um espaço métrico. Diz-se que um número $\varepsilon > 0$ é um número de Lebesgue da cobertura $\mathscr{C}$ quando a seguinte condição é satisfeita: para todo subconjunto $S \subset M$ com $\delta(S) < \varepsilon$, existe um $\lambda \in L$ tal que $S \subset C_\lambda$.

Evidentemente, se $\varepsilon > 0$ é um número de Lebesgue da cobertura $\mathscr{C}$, todo número real positivo menor do que ε ainda será um número de Lebesgue de $\mathscr{C}$.

Proposição 8. *Toda cobertura aberta $\mathscr{C}$ de um espaço métrico compacto X possui um número de Lebesgue.*

2.3 Homotopia

Nesta seção estamos interessados em entender os conceitos de homotopia. Esse conceito é fundamental para o desenvolver de toda a teoria a cerca de grupo fundamental e, consequentemente para o Teorema de Seifert-Van Kampen. Toda essa seção, como também a posterior (grupo fundamental) foi usado como referência [1].

Definição 15. *Sejam X e Y espaços topológicos, e sejam $f,g : X \to Y$ duas aplicações contínuas. Dizemos que f é **homotópica** a g (e denotamos por $f \simeq g$) se existe uma aplicação contínua $H : X \times I \to Y$, onde $I = [0,1]$, tal que para todo $x \in X$, temos $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$. A aplicação H é chamada de **homotopia** entre f e g.*

De maneira intuitiva, podemos pensar na homotopia H como sendo a deformação, de maneira suave (que não é brusca), da aplicação f na aplicação g.

Seja $f : I \to X$. Dizemos que f é um caminho ligando x_0 a x_1 se $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, onde x_0 é dito ser o ponto inicial e x_1 o ponto final. Por conveniência, I sempre será o intervalo $[0,1]$.

Definição 16. *Dois caminhos $f,g : I \to X$, são ditos **caminhos homotópicos** se eles possuem o mesmo ponto inicial x_0 e o mesmo ponto final x_1, e se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$*

*tal que para todo $s \in I$, temos $H(s,0) = f(s)$ e $H(s,1) = g(s)$ e para todo $t \in I$, temos $H(0,t) = x_0$ e $H(1,t) = x_1$. Dizemos que a aplicação H é uma **homotopia de caminho** entre f e g, ou diremos que f e g são caminhos homotópicos e denotaremos por $f \simeq_p g$.*

A primeira condição acima diz que H é uma homotopia entre f e g, e a segunda diz que para cada t, o caminho h_t é definido pela equação $h_t(s) = H(s,t)$ que é um caminho iniciando em x_0 e com fim em x_1.

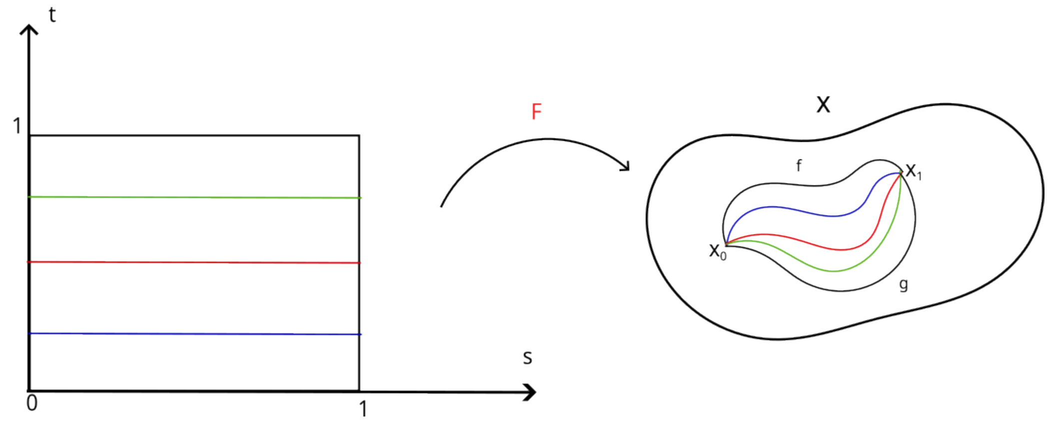


Figura 1 - Homotopia F do caminho f no caminho g.

Lema 2.3.1. *As relações $\simeq$ e $\simeq_p$ são relações de equivalência.*

Demonstração. *Se f é um caminho, denotaremos sua classe de homotopia de caminhos por $[f]$. Verificaremos as propriedades de relação de equivalência para $\simeq$.*

1. *Dada f uma aplicação contínua, então a aplicação $F(x,t) = f(x)$ é uma homotopia, pois para cada $t \in I$, $F(x,t)$ é contínua e além disso, $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = f(x)$, para todo $x \in X$. Isso mostra que $f \simeq f$, e se f é um caminho, é fácil ver que F é uma homotopia de caminhos e daí, teríamos $f \simeq_p f$.*
2. *Dadas aplicações f e g contínuas tais que $f \simeq g$, então existe uma aplicação $F : X \times I \to Y$, com $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$, para cada $x \in X$. Defina então a aplicação $G : X \times I \to Y$ dado por $G(x,t) = F(x, 1-t)$, claramente é uma aplicação contínua pela sua definição. E além disso, $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$ e $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$. Daí, $g \simeq f$. Se f e g são caminhos com inicío em x_0 e final em x_1, então tomando a mesma aplicação G acima, verificam-se as igualdades acima e também $G(0,t) = F(0,1-t) = h_{1-t}(0) = x_0$ e $G(1,t) = F(0,1-t) = h_{1-t}(1) = x_1$, onde h_{1-t} é o instante $1-t$ da deformação, logo são caminhos que começam em x_0 e em x_1. Portanto, $g \simeq_p f$.*

3. *Dadas as aplicações contínuas $f,g,h : X \to Y$, e suponha que $f \simeq g$ e $g \simeq h$. Então, existem $F : X \times I \to Y$ e $F' : X \times I \to Y$ homotopias entre os pares f e g e g e h, respectivamente. Defina a aplicação $G : X \times I \to Y$, dada por*

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & ,t \in [0,1/2] \\ F'(x,2t-1) & ,t \in [1/2,1] \end{cases}.$$

É contínuo pelo lema da colagem. Daí, $G(x,0) = F(x,0) = f(x)$ e $G(x,1) = F'(x,1) = h(x)$. Logo, $f \simeq h$. Se f,g e h são caminhos começando em x_0 e com fim em x_1, então o mesmo se verifica acima e, também $G(0,t) = F(0,2t) = x_0$ se $0 \leq t \leq 1/2$ e $G(0,t) = F'(0,2t-1) = x_0$ se $1/2 \leq t \leq 1$, logo $G(0,t) = x_0$. E também, $G(1,t) = F(1,2t) = x_1$ se $0 \leq t \leq 1/2$ e $G(1,t) = F'(1,2t-1) = x_1$ se $1/2 \leq t \leq 1$. Daí, $G(1,t) = x_1$ e, portanto, $f \simeq_p h$ $\square$

Exemplo 8 (Homotopia de Segmento de Reta)**.** *Sejam $f,g : X \to \mathbb{R}^2$ aplicações contínuas. Então*

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

é uma homotopia de f em g.

Demonstração. *De fato, como f e g são aplicações contínuas então $F(x,t) = (1-t)f(x)+tg(x)$ é uma aplicação contínua. Além disso, $F(x,0) = (1-0)f(x) + 0g(x) = f(x)$, e $F(x,1) = (1-1)f(x) + 1g(x) = g(x)$. Note que se $X = I$, então essa homotopia é também uma homotopia de caminhos, pois $F(0,t) = (1-t)f(0) + tg(0) = (1-t)x_0 + tx_0 = x_0$, $F(1,t) = (1-t)f(1) + tg(1) = (1-t)x_1 + tx_1 = x_1$.* $\square$

Exemplo 9. *Seja $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Os seguintes caminhos em X, $f(s) = (\cos\pi s, \sin\pi s)$ e $g(s) = (\cos\pi s, 2\sin\pi s)$ são caminhos homotópicos com a homotopia do segmento de reta, mas f e o caminho $h(s) = (\cos\pi s, -\sin\pi s)$ não são homotópicos com a homotopia do segmento de reta.*

Demonstração. *De fato, veja que a aplicação contínua $F(s,t) = (1-t)f(s) + tg(s)$ define uma homotopia entre f e g, pois $F(s,0) = f(s) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ e $F(s,1) = g(s) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, uma vez que $\cos\pi s \neq 0$, $\sin\pi s \neq 0$ e $2\sin\pi s \neq 0$, para todo $s \in I$. E também, $F(s,0) = (1-t)(1,0) + t(1,0) = (1,0)$ e $F(s,1) = (1-t)(-1,0) + t(-1,0) = (-1,0)$. Mas, veja que f e h não são caminhos homotópicos, pois, no instante $t = 1/2$ e no ponto $s = 1/2$ temos que $F(s,t) = (1-1/2)f(1/2) + 1/2h(1/2) = 0 \notin \mathbb{R}^2 - \{0\}$.* $\square$

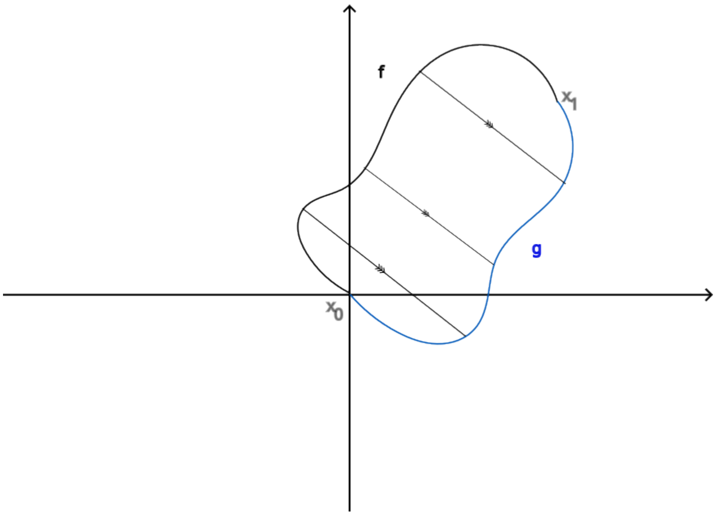


Figura 2 - Homotopia Linear

Se f e g são caminhos sobre X de x_0 a x_1 e x_1 a x_2, respectivamente, então definiremos o produto $f*g$ de f e g como sendo o caminho dado pela equação

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & ,s \in [0,1/2] \\ g(2s-1) & ,s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

a aplicação h é bem definida e contínua, conhecido como a justaposição de f e g, e é o caminho sobre X que liga x_0 a x_2.
A operação de produtos sobre caminhos induz uma operação bem definida sobre as classes de homotopia de caminhos, definido pela equação

$$[f]*[g] = [f*g].$$

De fato, precisamos mostrar que essa equação não depende da escolha dos representantes de cada classe. Dados os caminhos $f,g : I \to X$, as classes de homotopia de f e g são

$$[f] = \{f' : f \simeq f'\}\ , [g] = \{g' : g \simeq g'\}$$

Seja F o caminho homotópico de f e f' e G o caminho homotópico de g e g'. Afirmamos que $f*g \simeq f'*g'$ e também $f^{-1} \simeq (f')^{-1}$. Com efeito, definamos a aplicação

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & ,s \in [0,1/2] \\ G(2s-1,t) & ,s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

e por definição, H é bem definida, uma vez que $H(1/2,t) = F(1,t) = G(0,t) = x_1$. A aplicação H é uma homotopia entre os caminhos $f * g$ e $f' * g'$. Para simplificar notação escreva

$$h(s) = (f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & ,s \in [0,1/2] \\ g(2s-1) & ,s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

E,

$$h'(s) = (f' * g')(s) = \begin{cases} f'(2s) & ,s \in [0,1/2] \\ g'(2s-1) & ,s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

Separando por casos, temos:

1. Para $s < 1/2$:

$$H(s,0) = F(2s,0) = f(2s) = h(s).$$

$$H(s,1) = F(2s,1) = f'(2s) = h'(s).$$

2. Para $s > 1/2$:

$$H(s,0) = G(2s-1,0) = g(2s-1) = h(s).$$

$$H(s,1) = G(2s-1,1) = g'(2s-1) = h'(s).$$

3. Para $s = 1/2$: Faremos os casos por limites laterais.

$$\lim_{s \to 1/2^-} H(s,0) = \lim_{s \to 1/2^-} F(s,0) = \lim_{s \to 1/2^-} f(2s) = f(\lim_{s \to 1/2^-} 2s) = f(1) = x_1.$$

$$\lim_{s \to 1/2^+} H(s,0) = \lim_{s \to 1/2^+} G(s,0) = \lim_{s \to 1/2^+} g(2s-1) = g(\lim_{s \to 1/2^+} 2s-1) = g(0) = x_1.$$

Logo, $H(1/2,0) = h(1/2) = x_1$. Além disso,

$$\lim_{s \to 1/2^-} H(s,1) = \lim_{s \to 1/2^-} F(2s,1) = \lim_{s \to 1/2^-} f'(2s) = f'(\lim_{s \to 1/2^-} 2s) = f'(1) = x_1.$$

$$\lim_{s \to 1/2^+} H(s,1) = \lim_{s \to 1/2^+} G(2s-1,1) = \lim_{s \to 1/2^+} g'(2s-1) = g'(\lim_{s \to 1/2^+} 2s-1) = g'(1) = x_1.$$

garantindo $H(1/2,1) = h'(1/2) = x_1$.

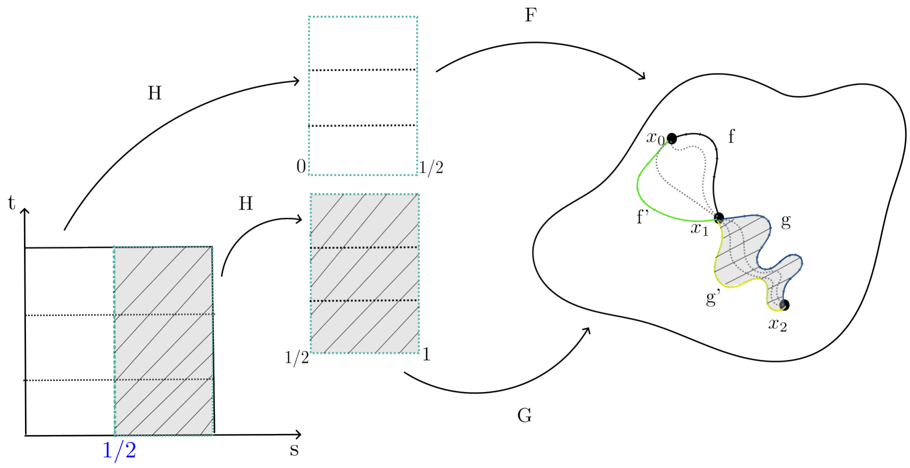


Figura 3 - Figura para demonstração acima.

Portanto, H é uma homotopia de caminhos entre $f*g$ e $f'*g'$. E, para mostrar que $f^{-1} \simeq (f')^{-1}$ é simples, uma vez que já foi construída H. Basta considerarmos a aplicação $G(s,t) = H(1-s,t)$ e da maneira que foi definida é uma homotopia $\square$

A operação $*$ sobre as classes de homotopia de caminhos não define um grupo, pois $[f]*[g]$ não é definido para todos os pares de classes, é somente válido para aqueles nos quais $f(1) = g(0)$.

Proposição 9. *Seja $H: I \times I \to X$ uma aplicação contínua, e seja f,g,h e k caminhos em X definidos por*

$$f(s) = H(s,0);$$

$$g(s) = H(1,s);$$

$$h(s) = H(0,s);$$

$$k(s) = H(s,1);$$

Então, $f*g \simeq h*k$.

Não demonstraremos este fato aqui, poderá ser encontrado na referência [6], capítulo 7.

Lema 2.3.2. *Se $k: X \to Y$ é uma aplicação contínua, e se F é uma homotopia de caminhos sobre X entre os caminhos f e f', então koF é uma homotopia de caminho em Y entre o caminhos kof e kof'.*

Demonstração. *Como F é uma homotopia de caminhos entre f e f', então valem*

- $F(s,0) = f(s)$;
- $F(s,1) = f'(s)$;
- $F(0,t) = x_0$;
- $F(1,t) = x_1$.

Seja a aplicação $k \circ F : I \times I \to Y$, definida por

$$k \circ F(s,t) = \begin{cases} k \circ f(2s) & ,s \in [0,1/2] \\ kof'(2s-1) & ,s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

claramente é contínua e satisfaz

- $k \circ F(s,0) = k(F(s,0)) = k(f(s)) = k \circ f(s)$;
- $k \circ F(s,1) = k(F(s,1)) = k(f'(s)) = k \circ f'(s)$;
- $k \circ F(0,t) = k(F(0,t)) = k(x_0) \in Y$;
- $k \circ F(1,t) = k(F(1,t)) = k(x_1) \in Y$;

Portanto, $k \circ F : (k \circ f) \simeq_p (k \circ f')$ □

Lema 2.3.3. *Se $k : X \to Y$ é uma aplicação contínua e se f e g são caminhos sobre X com $f(1) = g(0)$, então $k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g)$.*

Demonstração. *Basta notar que*

$$k \circ (f * g) = \begin{cases} k \circ f(2s) & ,s \in [0,1/2] \\ kog(2s-1) & ,s \in [1/2,1] \end{cases} = (k \circ f) * (k \circ g)$$

□

Teorema 1. *Seja f um caminho sobre X de x_0 a x_1, arbitrário. A operação $*$ tem as seguintes propriedades:*

1. *Se $[f] * ([g] * [h])$ está bem definido, então $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$.*
2. *Dado $x \in X$, seja e_x o caminho constante $e_x : I \to X$; $e_x(t) = x$. Então, $[f] * [e_{x_1}] = [f]$ e $[e_{x_0}] * [f] = [f]$.*
3. *Seja $\overline{f}$ o caminho definido por $\overline{f}(s) = f(1-s)$. É dito o caminho reverso de f. Então, $[f] * [\overline{f}] = [e_{x_0}]$ e $[\overline{f}] * [f] = [e_{x_1}]$.*

Demonstração. *Provaremos, inicialmente, (2). Denote $e_0 : I \to I$ definido como $e_0(s) = 0$ o caminho constante nulo e seja $i : I \to I$; $i(s) = s$ a identidade em I. Então,*

$$(e_0 * i)(s) = \begin{cases} e_0(2s) & , s \in [0,1/2] \\ i(2s-1) & , s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

é um caminho em I de 0 a 1. Como I é convexo, existe uma homotopia de caminhos (segmento de reta) $G : I \times I \to I$ entre i e $e_0 * i$. Então, pelo Lema 2.3.2, $f \circ G : I \times I \to X$ é uma homotopia de caminhos entre os caminhos $f \circ i = f$ e $f \circ (e_0 * i)$. Além disso, observe que

$$f \circ (e_0 * i) \overset{2.3.3}{=} (f \circ e_0) * (f \circ i) = (f \circ e_0) * f = e_{x_0} * f.$$

Desse modo, $[e_{x_0}] * [f] = [f]$. De maneira análoga, denote e_1 o caminho constante $e_1 : I \to I$, $e_1(s) = 1$. Então,

$$(i * e_1)(s) = \begin{cases} i(2s) & , s \in [0,1/2] \\ e_1(2s-1) & , s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

Pela convexidade de I existe uma homotopia de caminhos $H : I \times I \to I$ entre $i * e_1$ e i. Então, pelo Lema 2.3.2, $f o H$ é uma homotopia de caminhos entre $f \circ (i * e_1)$ e $f \circ i = f$. E,

$$f \circ (i * e_1) \overset{2.3.3}{=} (f \circ i) * (f \circ e_1) = f * e_{x_1}.$$

Portanto, $[f] = [f] * [e_{x_1}]$, concluíndo (2).

Para demonstrar (3), note que o caminho inverso de i é $\bar{i}(s) = 1 - s$. Então,

$$(i * \bar{i})(s) = \begin{cases} i(2s) & , s \in [0,1/2] \\ \bar{i}(2s-1) & , s \in [1/2,1] \end{cases} = \begin{cases} 2s & , s \in [0,1/2] \\ 2(1-s) & , s \in [1/2,1] \end{cases}.$$

Donde, $i * \bar{i}(0) = i * \bar{i}(1) = 0$. Como I é convexo, existe uma homotopia de caminhos $H : I \times I \to I$ entre e_0 e $i * \bar{i}$. Então, pelo Lema 2.3.2, $f \circ H$ é uma homotopia de caminhos entre $f \circ e_0 = e_{x_0}$ e $f \circ (i * \bar{i}) = (f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \overline{f}$. Logo, $[e_{x_0}] = [f] * [\overline{f}]$. De maneira análoga, obtemos uma homotopia de caminhos $J : I \times I \to I$ entre e_1 e $\bar{i} * i$, e consequentemente $f \circ J$ é uma homotopia entre $f \circ e_1 = e_{x_1}$ e $f \circ (\bar{i} * i) = (f \circ \bar{i}) * (f \circ i) = \overline{f} * f$. Portanto, $[e_{x_1}] = [\overline{f}] * [f]$. Concluíndo desta forma (3).

Para provarmos (1), devemos fixar uma nova notação que será útil para descrever o produto $f * g$ de uma maneira diferente. Se $[a,b]$ e $[c,d]$ são dois intervalos em $\mathbb{R}$, então existe uma única *aplicação $p:[a,b]\to[c,d]$ da forma $p:[a,b]\to[c,d]$ da forma $p(x)=mx+k$ tal que $p(a)=c$ e $p(b)=d$. Chamamos p de aplicação linear positiva de $[a,b]$ em $[c,d]$ por se tratar de um gráfico de reta com inclinação positiva. É fácil ver que a inversa e a composição de aplicações lineares positivas ainda é uma aplicação linear positiva. Com essa notação, o produto $f*g$ pode ser definido da seguinte forma: Em $[0,1/2]$ é igual a aplicação linear positiva de $[0,1/2]$ em $[0,1]$, $p_1:[0,1/2]\to[0,1]$, aplicada por f; e em $[1/2]$ é igual a aplicação linear positiva, de $[1/2,1]$ em $[0,1]$, $p_2:[1/2,1]\to[0,1]$, aplicada por g. Em expressão matemática,*

$$f*g(s)=\begin{cases} f\circ p_1(s) & ,s\in[0,1/2] \\ g\circ p_2(s) & ,s\in[1/2,1] \end{cases}.$$

Dados os caminhos $f,g,h:I\to X$, o produto $f*(g*h)$ e $(f*g)*h$ são definidos quando $f(1)=g(0)$ e $g(1)=h(0)$. Assumindo essas condições, definiremos um produto triplo dos caminhos f,g e h como segue: Escolha pontos $a,b\in I$ tais que $0<a<b<1$. Defina o caminho $k_{a,b}$ em X como sendo:

$$k_{a,b}(s)=\begin{cases} f\circ p_1(s) & ,s\in[0,a] \\ g\circ p_2(s) & ,s\in[a,b] \\ h\circ p_3(s) & ,s\in[b,1]. \end{cases}.$$

onde $p_1:[0,a]\to I, p_2:[a,b]\to I$ e $p_3:[b,1]\to I$ são as aplicações positivas lineares. O caminho $k_{a,b}$ depende dos pontos a e b escolhidos, mas sua classe de homotopia não depende desses pontos. De fato, considere dois pontos c e d de I, tais que $0<c<d<1$, e mostraremos que $k_{a,b}\simeq k_{c,d}$.

Seja $p:I\to I$ a aplicação cujo gráfico está acima. Quando restrito a $[0,a],[a,b],[b,1]$, é igual as aplicações lineares positivas q_1,q_2 e q_3 dos intervalos sobre $[0,c],[c,d],[d,1]$, respectivamente. Segue que, $k_{c,d}\circ p=k_{a,b}$.

Como p é um caminho de I para I, assim como a identidade $i:I\to I$, temos que existe uma homotopia de caminhos, $P:I\times I\to I$, entre p e i. Então, pelo Lema 2.3.2 garantimos que a homotopia $k_{c,d}\circ P$, definida pelos caminhos $k_{c,d}\circ p=k_{a,b}$ e $k_{c,d}\circ i=k_{c,d}$ é uma homotopia de caminhos entre $k_{a,b}$ e $k_{c,d}$.

Note que o produto $f*(g*h)$ é exatamente o produto triplo $k_{a,b}$, no caso em que $a=1/2$ e

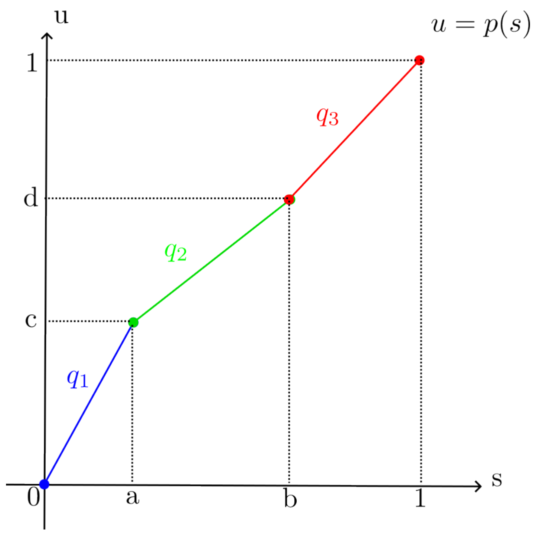


Figura 4 - Parametrização por retas.

$b = 3/4$

$$k_{a,b}(s) = \begin{cases} f\circ p_1(s) & ,s\in[0,1/2] \\ g\circ p_2(s) & ,s\in[1/2,3/4] \\ h\circ p_3(s) & ,s\in[3/4,1]. \end{cases} = \begin{cases} f(2s) & ,s\in[0,1/2] \\ g(4s-2) & ,s\in[1/2,3/4] \\ h(4s-3) & ,s\in[3/4,1]. \end{cases} = f*(g*h).$$

Enquanto que o produto $(f*g)*h$ *é igual a* $k_{c,d}$ *no caso em que* $c = 1/4$ *e* $d = 1/2$

$$k_{c,d}(s) = \begin{cases} f\circ p_1(s) & ,s\in[0,1/4] \\ g\circ p_2(s) & ,s\in[1/4,1/2] \\ h\circ p_3(s) & ,s\in[1/2,1]. \end{cases} = \begin{cases} f(4s) & ,s\in[0,1/4] \\ g(4s-1) & ,s\in[1/4,1/2] \\ h(2s-1) & ,s\in[1/2,1]. \end{cases} = f*(g*h).$$

Portanto, esses dois produtos são caminhos homotópicos $\square$

2.4 Grupo fundamental

Nesta seção definiremos grupo fundamental, entenderemos um pouco de sua estrutura e por fim mostraremos que o grupo fundamental é um invariante topológico.

Definição 17. *Seja* X *um espaço topológico e* $x_0 \in X$*. Um caminho que começa e termina em* x_0 *é chamado de loop com base em* x_0*. O conjunto das classes de homotopias de loops com base em* x_0*, com operação* $*$*, é chamado de grupo fundamental de* X *relativo ao ponto base* x_0*. Denotamos este grupo por* $\pi_1(X, x_0)$*.*

Note que $\pi_1(X,x_0)$ se torna grupo quando utilizamos o Teorema 1. De fato, a justaposição está bem definida para quaisquer dois loops f e g, uma vez que $f(1)=g(0)=x_0$, e também garantimos por $(1),(2)$ e (3) que valem associatividade, existência e unicidade do elemento neutro e, existência e unicidade do elemento inverso para quaisquer loop de $\pi_1(X,x_0)$.

Exemplo 10. *$\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$ é o grupo trivial. Com efeito, seja f um loop em $\mathbb{R}^n$ com base em x_0 e, usando a homotopia do segmento de reta, ver Exemplo 8, $F: I\times I\to\mathbb{R}^n$ dada por $F(s,t)=(1-t)f(s)+tg(s)$ é uma homotopia entre f e o caminho constante x_0. Portanto, $f\simeq e_{x_0}$ para qualquer loop f em $\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)$.*

Um fato mais geral, é que se X é qualquer subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, então $\pi_1(X,x_0)$ é o grupo trivial. Por exemplo, a bola fechada $B^n=\{x:|x|\leq 1\}$ e a bola aberta $\overset{\circ}{B}=\{x:|x|<1\}$ também possuem seus grupos fundamentais triviais.

Sabendo que o grupo fundamental depende de um espaço topológico X e de um ponto base $x_0\in X$, então uma pergunta natural a se fazer é: existem condições em que o grupo fundamental não dependa do ponto base? A resposta é sim, e veremos que a condição para que isso aconteça é pedir que X seja conexo por caminhos.

Definição 18. *Seja α um caminho em X de x_0 a x_1. Definimos a aplicação*

$$\hat{\alpha}:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$$

dada pela equação

$$\hat{\alpha}([f])=[\overline{\alpha}]*[f]*[\alpha].$$

Note que a aplicação acima está bem definida uma vez que que ela toma loops com base em x_0 e obtém $\hat{\alpha}([f])$ que é um loop com base em x_1.

Teorema 2. *A aplicação $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. *Mostraremos inicialmente que $\hat{\alpha}$ é um homomorfismo. Considere os loops com base em x_0, $[f],[g]\in\pi_1(X,x_0)$. Então,*

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f])*\hat{\alpha}([g])=&([\overline{\alpha}]*[f]*[\alpha])*([\overline{\alpha}]*[g]*[\alpha])\\=&[\overline{\alpha}]*[f]*[g]*[\alpha]\\=&[\overline{\alpha}]*[f*g]*[\alpha]\\=&\hat{\alpha}([f*g]).\end{aligned}$$

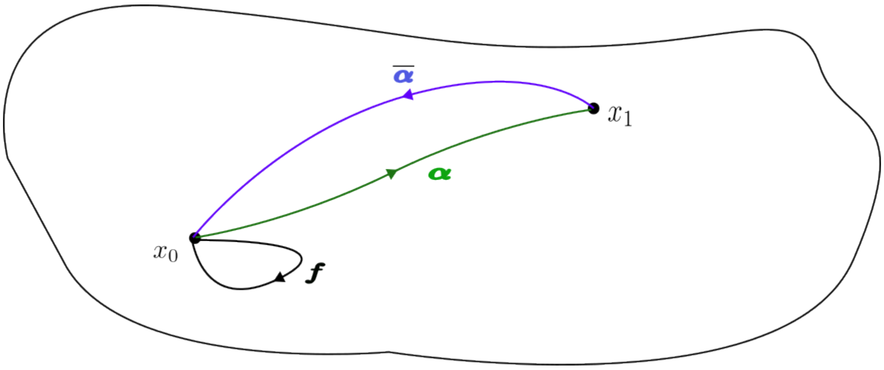


Figura 5 - Loop em x_1.

Basta mostrarmos que essa aplicação é inversível. De fato, denote por β o caminho inverso de α, e mostraremos que $\hat{\beta}$ é a aplicação inversa de $\hat{\alpha}$. Seja $[h]$ um elemento qualquer de $\pi_1(X,x_1)$, então note que

$$\hat{\beta}([h]) = [\overline{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}].$$

É um loop com base em x_0. Daí, aplicando $\hat{\alpha}$ temos que

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) =& [\overline{\alpha}] * [\hat{\beta}([h])] * [\alpha] \\ =& [\overline{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}]) * [\alpha] \\ =& [h].\end{aligned}$$

Do mesmo modo temos, que se $[f] \in \pi_1(X,x_0)$, temos

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) =& [\overline{\beta}] * [\hat{\alpha}([f])] * [\beta] \\ =& [\alpha] * ([\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * [\overline{\alpha}] \\ =& [f].\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{\alpha}$ é um isomorfismo entre $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(X,x_1)$ $\square$

Corolário 2. *Se X é conexo por caminhos e x_0 e x_1 são dois pontos de X, então $\pi_1(X,x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$.*

Demonstração. *Como X é conexo por caminhos então existe um caminho α que começa em x_0 e termina em x_1. Defina a aplicação $\hat{\alpha}$ e pelo teorema acima o resultado segue* $\square$

Seja X um espaço topológico. Seja C a componente conexa de X contendo x_0. É fácil ver que $\pi_1(X,x_0) = \pi_1(C,x_0)$, pois todos os loops e homotopias em X com base em x_0, estão no espaço C. Isso mostra que $\pi_1(X,x_0)$ depende apenas da componente conexa de X. Por essa razão, optamos por usar espaços conexos por caminhos.

Se X é conexo por caminhos, todos os grupos $\pi_1(X,x)$ são isomorfos para todo $x \in X$. Então, nesses casos podemos dizer apenas o grupo fundamental do espaço X, pois não dependerá do ponto x_0. Mas, observe que com essa abordagem não tem uma maneira muito natural de identificar $\pi_1(X,x_0)$ com $\pi_1(X,x_1)$; veja que diferentes caminhos α e β de x_0 a x_1 pode nos dar diferentes isomorfismos entre esses grupos. Por essa razão, omitir o ponto base pode nos levar ao erro.

Um jeito de você garantir que o isomorfismo de $\pi_1(X,x_0)$ com $\pi_1(X,x_1)$ seja independente de caminhos, é necessário e suficiente que o grupo fundamental seja abeliano. Esta prova não será dada aqui.

Vamos finalmente entender porque o grupo fundamental é um invariante topológico. Suponha que $h: X \to Y$ é uma aplicação contínua que leva $x_0 \in X$ em $y_0 \in Y$. Denotaremos esse fato escrevendo

$$h : (X,x_0) \to (Y,y_0).$$

Se f é um loop com base em x_0, então a composição $h \circ f : I \to Y$ é um loop em Y com base em y_0. A correspondência $f \to h \circ f$ nos dá uma aplicação de $\pi_1(X,x_0)$ em $\pi_1(Y,y_0)$. E definiremos essa aplicação como segue abaixo.

Definição 19. *Seja $h : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ uma aplicação contínua. Defina*

$$h_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$$

dada pela equação

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

A aplicação h_* é dita ser o homomorfismo induzido por h, relativo ao ponto base x_0.

Veja que h_* é bem definido, pois se F é uma homotopia de caminhos entre f e f', então $h \circ F$ é uma homotopia de caminhos entre $h \circ f$ e $h \circ f'$, via Lema 2.3.2.

Proposição 10. *h_* é um homomorfismo.*

Demonstração. *Dados os loops $f, f' \in \pi_1(X,x_0)$, temos que*

$$h_*([f]) * h_*([f']) = [h \circ f] * [h \circ f'] \overset{2.3.3}{=} [h \circ (f * g)] = h_*([f * g]) = h_*([f] * ([f']).$$

Observe que o homomorfismo h_* não só depende da aplicação $h : X \to Y$ como também depende do ponto base x_0 (não depende de y_0, porque uma vez escolhido x_0 temos que $y_0 = h(x_0)$). Note também que se x_0 e x_1 são dois pontos bases distintos em X, não poderemos usar o mesmo símbolo h_* para ambos os casos, pois trata-se de dois homomorfismos diferentes, uma vez que o dominio do primeiro é o grupo $\pi_1(X,x_0)$ enquanto que o domínio do segundo é dado por $\pi_1(X,x_1)$. Até mesmo quando X é conexo por caminhos, e esses grupos são isomorfos, eles ainda não são o mesmo grupo. Neste caso, uma notação mais correta seria

$$(h_{x_0})_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$$

para o primeiro homomorfismo e $(h_{x_1})_*$ para o segundo. Quando tivermos apenas um ponto base em questão, omitiremos essa notação apenas para h_*.

Teorema 3. *Se $h : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ e $k : (Y,y_0) \to (Z,z_0)$ são aplicações contínuas, então $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. Se $i : (X,x_0) \to (X,x_0)$ é a aplicação identidade, então i_* é o homomorfismo identidade.*

Demonstração. *Por definição, temos que*

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f]$$

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)] = [(k \circ h) \circ f].$$

Logo, $(k \circ h)_* = k_* \circ h_*$. De maneira análoga, temos que $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$ □

Corolário 3 (Invariante Topológico)**.** *Se $h : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ é um homeomorfismo de X com Y, então h_* é um isomorfismo entre $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(Y,y_0)$.*

Demonstração. *Seja $k : (Y,y_0) \to (X,x_0)$ a inversa de h. Então, $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$, que é a aplicação identidade de (X,x_0). E $h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*$ que é a aplicação identidade em (Y,y_0). Desde que i_* e j_* são homomorfismos entre os grupos $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(Y,y_0)$, respectivamente, temos que k_* é o inverso de h_** □

2.5 Grupo fundamental do círculo

Esta seção está completamente baseada na referência [5].

Mostraremos que o grupo fundamental do círculo S^1 é infinito e cíclico. Isto será feito associando a cada caminho fechado a no círculo um número $n(a)$, chamado o grau de a, de tal modo que dois caminhos são homotópicos, se e somente se, têm o mesmo grau. Além disso, todo número inteiro n é grau de algum caminho fechado em S^1. Como $n(ab) = n(a) + n(b)$, concluíremos que a correspondência $a \mapsto n(a)$ induz um isomorfismo entre os grupos $\pi_1(S^1)$ e $\mathbb{Z}$.

Observe que a multiplicação de números complexos define uma estrutura de grupo topológico em S^1. Logo, o grupo fundamental de S^1 é abeliano e daí dois caminhos fechados em S^1 com o mesmo ponto básico são homotópicos (com o ponto básico mantido fixo) se, e somente se, são livremente homotópicos.

Seja ξ a aplicação exponencial definida por

$$\xi : \mathbb{R} \to S^1, \quad \xi(t) = e^{it} = (cost, sent).$$

A igualdade $e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}$, nos diz que a sobrejeção contínua ξ é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre o grupo multiplicativo S^1 (números complexos módulo 1). O núcleo de ξ é dado pelo conjunto $Ker\ \xi = \{t \in \mathbb{R} | \xi(t) = e^{i0}\} = \{2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$, formado pelos múltiplos inteiros de 2π. Assim, dado $u \in S^1$, temos $\xi^{-1}(u) = \{t + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$, onde t é qualquer número real tal que $\xi(t) = u$. Note que $\xi(t) = u$ é uma determinação, em radianos, do ângulo que u faz com o semieixo positivo das abcissas.

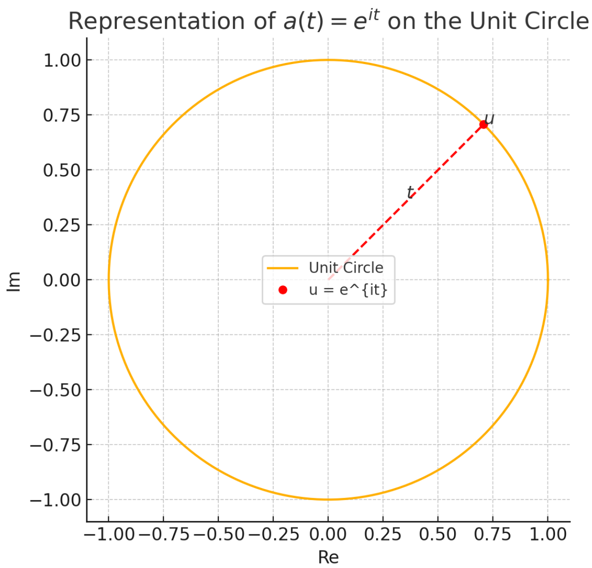


Figura 6 - Representação da curva $\xi(t)$.

Observação. *As vezes se define* $\xi(t) = e^{2\pi it}$*. Isto tem a vantagem de simplificar o núcleo de* ξ*, que se torna igual a* $\mathbb{Z}$*. Mas,* t *deixa de ser a medida do ângulo que* $\xi(t)$ *faz com o semieixo positivo das abcissas. As duas maneiras de definir* ξ *são equivalentes.*

Lema 2.5.1. $\xi : \mathbb{R} \to S^1$ *é uma aplicação aberta.*

Demonstração. *Dado um subconjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}$*, devemos provar que sua imagem* $\xi(U)$ *é um subconjunto aberto de* S^1*. Seja* $F = S^1 - \xi(U)$*. Basta provar que* F *é fechado em* S^1*. Ora,* $\xi^{-1}(\xi(U)) = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(U + 2\pi n)$ *é aberto em* $\mathbb{R}$*, logo seu complementar* $\xi^{-1}(F)$ *é fechado em* $\mathbb{R}$*. Observemos que para cada* $x \in \mathbb{R}$*, existe* $x' \in [0,2\pi]$ *tal que* $\xi(x') = \xi(x)$*. Portanto,* $F = \xi(\xi^{-1}(F)) = \xi(\xi^{-1}(F) \cap [0,2\pi])$*. Mas, o conjunto* $\xi^{-1}(F) \cap [0,2\pi]$ *é compacto logo sua imagem por* ξ *também é compacta, ou seja* F *é compacto, donde é um subconjunto fechado de* S^1 □

Proposição 11. *A restrição de* ξ *a todo intervalo aberto* $(t, t+2\pi)$ *é um homeomorfismo sobre* $S^1 - \{\xi(t)\}$*.*

Demonstração. *A aplicação* $\xi|_{(t,t+2\pi)}$ *é uma bijeção contínua sobre* $S^1 - \{\xi(t)\}$*. Pelo lema 2.5.1,* ξ *transforma abertos do intervalo* $(t, t+2\pi)$ *em abertos de* S^1*, logo a inversa de* $\xi|_{(t,t+2\pi)}$ *também é contínua.* □

Seja dado um caminho $a : I \to S^1$. Para cada $s \in I$, como ξ é sobre S^1, existe algum $\tilde{s} \in \mathbb{R}$ tal que $a(s) = \xi(\tilde{s}) = e^{i\tilde{s}}$; $\tilde{s}$, é uma determinação, em radianos, do ângulo de $a(s)$ com o semieixo positivo das abcissas. O problema é que $\tilde{s}$ não é determinado de modo único a partir de s. Mostraremos a seguir que, para cada $s \in I$, é possível escolher um $\tilde{s}$ de tal modo que $a(s) = e^{i\tilde{s}}$ e a função real $s \mapsto \tilde{s}$ seja contínua.

Proposição 12. *Dados um intervalo* $J = [s_0, s_1]$*, uma função contínua* $a : J \to S^1$ *e um número real* t_0 *com* $a(s_0) = e^{it_0}$*, existe uma única função contínua* $\tilde{a} : J \to \mathbb{R}$ *tal que* $a(s) = e^{i\tilde{a}(s)}$ *para todo* $s \in J$ *(isto é,* $a = \xi \circ \tilde{a}$*) e* $\tilde{a}(s_0) = t_0$*.*

Demonstração. *A proposição é válida no caso em que* $a(J) \subset S^1 - \{y\}$ *para algum* $y \in S^1$*: como* $a(x_0) \neq y$*, existe um único* $x \in \xi^{-1}(y)$ *tal que* $t_0 \in (x, x+2\pi)$*. Então,* $\xi_x = \xi|_{(x,x+2\pi)}$ *é um homeomorfismo sobre* $S^1 - \{y\}$ *e, pondo* $\tilde{a} = \xi_x^{-1} \circ a$*, obtemos a função desejada. Suponhamos agora que* $J = J_1 \cup J_2$ *seja reunião de dois intervalos compactos com extremos* s_* *em comum, e que a proposição seja válida para as restrições* $a_1 = a|_{J_1}$ *e* $a_2 = a|_{J_2}$*. Escolhemos* $\tilde{a}_1 : J_1 \to \mathbb{R}$

de modo que $\tilde{a}_1(s_0) = t_0$ e $\xi \circ \tilde{a}_1 = a_1$. Em seguida escolhemos $\tilde{a}_2 : J_2 \to \mathbb{R}$ tal que $\xi \circ \tilde{a}_2 = a_2$ e $\tilde{a}_1(s_*) = \tilde{a}_2(s_*)$. Finalmente, definimos $\tilde{a} : J \to \mathbb{R}$ pondo $\tilde{a}|_{J_1} = \tilde{a}_1$ e $\tilde{a}|_{J_2} = \tilde{a}_2$. A existência de $\tilde{a}$ no caso geral se reduz aos dois casos particulares acima abordados, pois, em virtude da compacidade de J, para toda aplicação contínua $a : J \to S^1$, existe uma decomposição $J = J_1 \cup \cdots \cup J_k$ como reunião de intervalos justapostos, de modo que $a(J_i) \neq S^1$ para todo $i = 1, 2, ..., k$. Quanto a unicidade, basta observar que se $\tilde{a}, \hat{a} : J \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $e^{i\tilde{a}(s)} = e^{i\hat{a}(s)}$ para todo $s \in J$, então $f(s) = [\hat{a}(s) - \tilde{a}(s)]/2\pi$ é para todo $s \in J$, um inteiro que depende continuamente de s. Segue-se que $f(s)$ é constante. Em particular, se $\tilde{a}(s_0) = \hat{a}(s_0)$, então $\tilde{a} = \hat{a}$. □

A existência da função $\tilde{a}$ tal que $a = \xi \circ \tilde{a}$ é frequentemente ilustrada com o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\xi"] \\ {[S_0, S_1]} \arrow[ur, "\tilde{a}"] \arrow[r, "a"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

A função $\tilde{a} : J \to \mathbb{R}$ chama-se uma função-ângulo para a. Como vimos acima, fixado t_0 com $a(s_0) = \xi(t_0)$, e obtida uma função-ângulo $\tilde{a}$ com $\tilde{a}(s_0) = t_0$, as demais funções-ângulo para a que devem ter início nos pontos $t_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ tem forma $\hat{a}(s) = \tilde{a}(s) + 2k\pi$.

Se $a : I \to S^1$ é um caminho fechado, toda função-ângulo $\tilde{a} : I \to \mathbb{R}$ para a deve ser tal que o número

$$n(a) = \frac{\tilde{a}(1) - a\widetilde{(0)}}{2\pi}$$

é inteiro (positivo, negativo ou nulo). O número $n(a)$ não depende da função-ângulo escolhida, já que duas quaisquer delas diferem por uma constante e essa constante desaparece ao se efetuar a diferença $\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)$.

Proposição 13. *Sejam $a, b : I \to S^1$ caminhos fechados. Então:*

1. *Se a e b têm o mesmo ponto básico, vale $n(ab) = n(a) + n(b)$;*
2. *Se a e b são livremente homotópicos, tem-se $n(a) = n(b)$;*

3. *Se $n(a) = n(b)$ então a e b são livremente homotópicos. Além disso, $a \simeq b$ quando a e b têm o mesmo ponto básico.*
4. *Dados $p \in S^1$ e $k \in \mathbb{Z}$, existe um caminho fechado $a : I \to S^1$ com base no ponto p tal que $n(a) = k$.*

A demonstração deste teorema não será feita neste trabalho, mas poderá ser encontrada na referência [5]. Embora, vamos utilizar estes resultados para calcularmos o grupo fundamental do círculo.

Proposição 14. *O grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$ dos inteiros.*

Demonstração. *A cada classe de homotopia $\alpha = [a]$ de caminhos fechados em S^1 associemos o inteiro $n(a)$. Pelo item (2) da proposição 13, o grau $n(a)$ depende apenas da classe α mas não do caminho fechado a que escolhemos para representá-la. Assim podemos falar no grau $n(\alpha)$ da classe α e obtemos uma aplicação $n : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$. O item (1) da proposição acima nos diz que n é um homomorfismo, o item (3) afirma que n é injetivo e o item (4) dà a sobrejetividade. Portanto n é um isomorfismo de $\pi_1(S^1)$ sobre $\mathbb{Z}$.* □

2.6 Produto fraco de grupos

Nas seções anteriores, foram vistos alguns exemplos de grupos fundamentais de certos espaços. Em casos mais complicados precisamos de mais ferramentas de teoria de grupos para determinar o grupo fundamental e conhecer suas propriedades. O objeto principal a ser estudado sobre grupos é caracterizar grupo livre e usá-lo para determinar o grupo fundamental de espaços mais complicados. Usaremos como referência [2].

Considere o produto finito de grupos,

$$G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n.$$

Os elementos de G são n-uplas ordenadas $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$, onde $g_i \in G_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$, com multiplicação definida coordenada à coordenada:

$$(g_1, g_2, \cdots, g_n)(g_1', g_2', \cdots, g_n') = (g_1 g_1', g_2 g_2', \cdots, g_n g_n').$$

Vamos extender essa definição para o caso de uma coleção infinita de grupos $\{G_i : i \in I\}$, onde I é um conjunto de índice, o qual pode ser enumerável ou não-enumerável. O produto direto dessa coleção será denotado por

$$\prod_{i \in I} G_i.$$

Seus elementos são funções g que atribui para cada $i \in I$ um elemento $g_i \in G_i$. Esses elementos também são multiplicados coordenada à coordenada: se $g, h \in \prod_{i \in I} G_i$, então

$$(gh)_i = (g_i)(h_i).$$

qualquer que seja $i \in I$.

Com essa operação o produto direto de uma coleção de grupos $\{G_i : i \in I\}$ é, de fato, um grupo. Faremos o caso em que $I = \mathbb{N}$.

Proposição 15. *O produto direto da coleção $\{G_i : i \in \mathbb{N}\}$ é um grupo, com a operação de produto coordenada a coordenada.*

Demonstração. *De fato, provaremos de maneira direta as propriedades de grupo. Sejam $g, h, k \in G$, $g = (g_1, g_2, ..., g_n, ...), h = (h_1, h_2, ..., h_n, ...), k = (k_1, k_2, ..., k_n, ...)$. Então, observe que*

1. $$\begin{aligned}(gh)k =&(g_1h_1, g_2h_2, ..., g_nh_n, ...).(k_1, k_2, ..., k_n, ...)\\ =&((g_1h_1)k_1, (g_2h_2)k_2, ..., (g_nh_n)k_n, ...)\\ =&(g_1(h_1k_1), g_2(h_2k_2), ..., g_n(h_nk_n), ...)\\ =&g(hk).\end{aligned}$$

   Na terceira igualdade foi usado que para todo $i \in I$, $g_i, h_i, k_i \in G_i$, e G_i é um grupo, logo vale associatividade.

2. *Defina $e \in G$, como $e = (1_{G_1}, 1_{G_2}, ..., 1_{G_n}, ...)$. Dessa forma, o elemento "e" é a identidade de G.*

   $$\begin{aligned}eg =&(1_{G_1}, 1_{G_2}, ..., 1_{G_n}, ...).(g_1, g_2, ..., g_n, ...)\\ =&(1_{G_1}g_1, 1_{G_2}g_2, ..., 1_{G_n}g_n, ...)\\ =&(g_1 1_{G_1}, g_2 1_{G_2}, ..., g_n 1_{G_n}, ...)\\ =&ge\\ =&g\end{aligned}$$

   Uma vez que 1_{G_i} é a identidade de cada G_i, para todo $i \in I$.

3. *Dado um elemento* $g = (g_1, g_2, ..., g_n, ...) \in G$, *então defina* $g^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, ..., g_n^{-1}, ...)$, *onde* g_i^{-1} *é o inverso de* g_i *em cada* G_i, *para todo* $i \in I$. *Desse modo,* g^{-1} *é de fato o inverso de* g *em* G.

$$\begin{aligned}
gg^{-1} =& (g_1, g_2, ..., g_n, ...)(g_1^{-1}, g_2^{-1}, ..., g_n^{-1}, ...) \\
=& (g_1 g_1^{-1}, g_2 g_2^{-1}, ..., g_n g_n^{-1}, ...) \\
=& (1_{G_1}, 1_{G_2}, ..., 1_{G_n}, ...) \\
=& e.
\end{aligned}$$

Definição 20. *O produto fraco da coleção* $\{G_i : i \in I\}$ *é o subgrupo de* $\prod_{i \in I} G_i$, *consistindo de todos os elementos* $g \in \prod_{i \in I} G_i$ *tal que* g_i *é a identidade de* G_i, *para todo índice* $i \in I$, *exceto para uma quantidade finita.*

É fácil ver que se $\{G_i : i \in I\}$ é uma coleção finita de grupos, então o produto direto e o produto fraco coincidem.

Se G denota o produto direto ou o produto fraco da coleção $\{G_i : i \in I\}$ então para $i \in I$, existe um monomorfismo natural $\varphi_i : G_i \to G$, definido pela seguinte regra: Para cada $x \in G_i$ e qualquer índice $j \in I$,

$$(\varphi_i x)_j = \begin{cases} x, & se, j = i \\ 1, & se, j \neq i \end{cases}.$$

Se cada G_i for abeliano, o teorema a seguir da uma importante caracterização do seu produto fraco G e também dos monomorfismos φ_i.

Teorema 4. *Se* $\{G_i : i \in I\}$ *é uma coleção de grupos abelianos e* G *é o produto fraco desta coleção, então para qualquer grupo abeliano* A *e qualquer coleção de homomorfismos* $\psi_i : G_i \to A$, $i \in I$, *existe um único homomorfismo* $f : G \to A$ *tal que para cada* $i \in I$ *o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & G \arrow[d, "f"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Demonstração. *Dada a coleção de homomorfismos* $\psi_i' s$, *defina* f *pela seguinte regra: Para qualquer* $x \in G$, $f(x) = \prod_{i \in I} \psi_i(x_i)$. *Como* G *é o produto fraco, então* $x_i = 1$ *para todo índice* i, *exceto para uma quantidade finita, logo o produto que define* f *é finito; e como todos os grupos* G_i *são abelianos, a ordem em que multiplicamos não importa, desse modo* f *está bem definida.*

Mostraremos que f é homomorfismo. De fato, dados $x,y \in G$, então $x_i = 1$ e $y_j = 1$ para todo índice, exceto para uma quantidade finita. Isso implica que xy tem uma quantidade finita de termos diferentes de 1. Logo,

$$\begin{aligned} f(xy) =& \prod_{i\in I} \psi_i((xy)_i) \\ =& \prod_{i\in I} \psi_i((x_i)(y_i)) \\ =& \prod_{i\in I} \psi_i(x_i)\psi_i(y_i) \\ =& \prod_{i\in I} \psi_i(x_i) \prod_{i\in I} \psi_i(y_i) \\ =& f(x)f(y). \end{aligned}$$

Usamos na terceira igualdade que ψ_i é homomorfismo e na quarta igualdade foi usado que A é abeliano. Para mostrarmos que f é o único homomorfismo com essa propriedade, é fácil, basta olharmos o diagrama

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & G \arrow[d, "f"] \arrow[d, bend left=60, "f'"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Se tanto f quanto f' são homomorfismos que fazem o diagrama comutar, então teremos $f \circ \varphi_i = f' \circ \varphi_i$, e como f e f' são determinadas por ψ_i, logo só podemos ter $f = f'$. $\square$

Proposição 16. *Sejam $\{G_i : i \in I\}$, G e $\varphi_i : G_i \to G$ como no Teorema 4. Sejam G' qualquer grupo abeliano e $\varphi_i' : G_i \to G'$ uma coleção qualquer de homomorfismo satisfazendo o Teorema 4 com G' e φ_i'. Então, existe um único isomorfismo $h : G \to G'$ tal que o seguinte diagrama comuta para todo $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i'"'] & G \arrow[d, "h"] \\ & G' \end{tikzcd}$$

Demonstração. *Pelo Teorema 4 com $A = G'$, usando G e φ_i existe um único homomorfismo $h : G \to G'$. Também, podemos aplicar o Teorema 4 para G' e φ_i', trocando $A = G$, então existe um único homomorfismo $k : G' \to G$ tal que o seguinte diagrama comuta, para todo $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\varphi_i'"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & G' \arrow[d, "k"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Afirmamos que k é o inverso de h. De fato, como ambos os diagramas comutam, daí,

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi'_i"'] & G' \arrow[d, "k"] \\
& G \arrow[u, bend right=60, "h"']
\end{tikzcd}$$

Também comutam

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & G \arrow[d, "kh"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\varphi'_i"] \arrow[dr, "\varphi'_i"'] & G' \arrow[d, "hk"] \\
& G'
\end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 4, temos que $kh = id_G$ e $hk = id'_G$, respectivamente. Portanto, $k = h^{-1}$ e, consequentemente h é isomorfismo. $\square$

Note que o produto fraco da coleção $\{G_i\}$ de grupos abelianos é completamente caracterizado pelas propriedades dos monomorfismos $\varphi_i : G_i \to G$ no Teorema 4 de caracterização. Nosso foco está em G e em φ_i, pois como cada φ_i é monomorfismo, podemos identificar G_i como sendo a imagem de G por φ_i e então considerar φ_i como a aplicação inclusão, se for conveniente.

2.7 Grupos abelianos livres

Definição 21. *Se S é um subconjunto do grupo G, então S gera G se cada elemento de G pode ser escrito como produto de potências positivas e negativas de elementos de S. Ou equivalentemente, S não está contido propriamente em qualquer subgrupo de G.*

Exemplo 11. *Se S gera G, alguns produtos de elementos de S pode resultar na identidade de G. Por exemplo,*

(a) Se $x \in S$, $xx^{-1} = 1$.

(b) Se G é grupo cíclico de ordem n gerado por $\{x\}$, então $x^n = 1$.

Definição 22. *Qualquer produto de elementos de S que resulta na identidade, chamamos de* relação *entre os elementos do conjunto gerador S. Isto é, dados $x, y \in S$, se $xy = 1$ então xy é uma relação de S.*

De modo informal, consideraremos dois tipos de relações: as relações triviais são aquelas que provém diretamente dos axiomas de grupo, isto é, independe da escolha de S e G, por exemplo, (a) do Exemplo 11, já as relações não triviais, são aquelas que não são consequências dos axiomas de grupo, ou seja, depende da escolha de S e G, ver Exemplo 11 (b).

Definição 23. *Seja S um conjunto de geradores de um grupo G. Dizemos que G é gerado livremente por S ou que G é um grupo livre de S no caso que existem relações não triviais entre os elementos de S.*

Podemos descrever um grupo simplesmente pela listagem dos elementos de S e as relações não triviais entre eles.

Observação. *Vejamos algumas observações a cerca do conjunto S de geradores de um grupo G, e as relações não triviais.*

1. Seja S um conjunto de geradores de G, e seja $f : G \to G'$ um epimorfismo, isto é, G' é a imagem homomorfica de G. Então o conjunto $f(S)$ é um conjunto de geradores de G'. Ainda mais, qualquer relação entre elementos de S também será uma relação entre as suas imagens por S, em $f(S)$. Logo, G' satisfaz as mesmas relações que G, ou até mais.

   Demonstração. *Mostraremos inicialmente que $f(S)$ é um conjunto de geradores de G'. Com efeito, seja $y \in G'$, então como f é sobrejetiva, temos que existe $x \in G$ tal que $y = f(x)$. Desse modo, $x = s_1 \cdots s_n$, onde $s_1, ..., s_n \in S$, daí $f(x) = f(s_1 \cdots s_n) = f(s_1) \cdots f(s_n)$, uma vez que f é homomorfismo. Isso mostra que todo elemento $y \in G'$ é escrito como $y = f(s_1)...f(s_n)$. Logo, $f(S)$ é um conjunto de geradores de G'. Seja $x_1 \cdots x_n = 1$ uma relação entre os elementos $x_1, ..., x_n \in S$, então $f(x_1 \cdots x_n) = f(1)$, isso implica que $f(x_1) \cdots f(x_n) = 1$, com certo abuso de notação onde 1 é a identidade em G e em G', isso mostra que $f(x_1) \cdots f(x_n) = 1$ é uma relação entre os elementos $f(x_1), ..., f(x_n) \in f(S)$.*

2. Seja S um conjunto de geradores de G e seja $f : G \to G'$ um homomorfismo arbitrário. Então, f é totalmente determinada por sua restrição ao conjunto S.

   Demonstração. *De fato, decorre imediatamente da demonstração acima. Dado qualquer $y \in G'$, existem $f(s_1), ..., f(s_n) \in f(S)$, tais que $y = f(s_1) \cdots f(s_n)$. Portanto, f está totalmente determina por sua restrição ao conjunto S.*

Observe em (2) que nem toda aplicação $g : S \to G'$ pode ser extendida no homomorfismo $f : G \to G'$ e a razão intuitiva para isso é que pode existir uma relação não trivial entre os elementos de S que não é satisfeita em $g(S)$, ver Exemplo 11 (b).

Definição 24. *Seja S um conjunto arbitrário. Um grupo abeliano livre no conjunto S é um grupo abeliano F com uma função $\varphi : S \to F$ tal que a seguinte condição seja satisfeita: para qualquer grupo abeliano A e qualquer função $\psi : S \to A$, existe um único homomorfismo $f : F \to A$ tal que o seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & F \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proposição 17. *Sejam F e F' grupos abelianos livres no conjunto S com respeito as funções $\varphi : S \to F$ e $\varphi' : S \to F'$, respectivamente. Então, existe um único isomorfismo $h : F \to F'$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & F \arrow[d, "h"] \\ & F' \end{tikzcd}$$

Demonstração. *Como F e F' são grupos abelianos livres no conjunto S com respeito as funções $\varphi : S \to F$ e $\varphi' : S \to F'$, respectivamente, então existem únicos homomorfismos $h : F \to F'$ e $h' : F' \to F$ tais que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & F \arrow[d, "h"] \\ & F' \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F' \arrow[d, "h'"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Desse modo, $h'h = id_F$ e $hh' = id'_F$ e portanto $h' = h^{-1}$ □

Com o que já foi feito, não está claro se dado um conjunto S, vai existir um grupo abeliano livre F no conjunto S. Além disso, mesmo que F exista, perceba que φ não precisa ser uma função injetiva e também que F não seja gerado por $\varphi(S)$.

Proposição 18. *Seja S um conjunto e F o grupo abeliano livre gerado por S, com a função $\varphi : S \to F$. Então $\varphi(S)$ gera F.*

Demonstração. *Suponha por absurdo que $\varphi(S)$ não gera F, então existe um elemento de F que não pode ser escrito por potências positivas e negativas de elementos de S. Então, considere o subgrupo F' de F tal que $\varphi(S)$ gera F'. Isso contradiz a equivalência da definição 21, pois S estaria contido propriamente em um subgrupo de F.* □

Vamos considerar a seguinte situação. Assuma que $\{S_i : i \in I\}$ é uma família de subconjuntos não vazios de S, os quais são 2-2 disjuntos e tais que $S = \bigcup_{i\in I} S_i$. Para cada índice $i \in I$, seja F_i um grupo abeliano livre sobre S_i com respeito a função $\varphi_i : S_i \to F_i$. Denote por F o produto fraco dos grupos F_i, $\forall i \in I$, e seja $\eta_i : F_i \to F$ o monomorfismo natural. Como os S_i são 2-2 disjuntos, podemos definir uma função $\varphi : S \to F$ pela regra $\varphi|_{S_i} = \eta_i\varphi_i$.

Proposição 19. *Com as hipóteses acima, F é um grupo abeliano livre no conjunto S com respeito a função $\varphi : S \to F$. Isto é, o produto fraco de qualquer coleção de grupos abelianos livres é um grupo abeliano livre.*

Demonstração. *Seja A um grupo abeliano e $\psi : S \to A$ uma função. Queremos mostrar a existência de um único homomorfismo $f : F \to A$ tal que $\psi = f\varphi$. Para cada $i \in I$, seja $\psi_i : S_i \to A$ a restrição $\psi|_{S_i}$. Como F_i é um grupo abeliano livre sobre S_i, existe um único homomorfismo $f_i : F_i \to A$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} & F_i \arrow[d, "f_i"] \\ S_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[r, "\psi_i"'] & A \end{tikzcd}$$

Pelo teorema 4 existe um único homomorfismo $f : F \to A$ tal que para cada $i \in I$, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "f"] \\ F_i \arrow[ur, "\eta_i"] \arrow[r, "f_i"'] & A \end{tikzcd}$$

Desse modo, também comuta o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & F_i \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "f_i"] & F \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

e como $\varphi|_{S_i} = \eta_i\varphi_i$, podemos simplificar o diagrama acima em

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[rr, "\varphi_i|S_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & F \arrow[dl, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Daí, temos que $\psi_i = f\varphi|_{S_i}$, para todo $i \in I$ e $S = \bigcup_{i\in I} S_i$, então usando o fato de que $\psi_i = \psi|_{S_i}$, logo $\psi = f\varphi$. O que prova a existência. Para provar a unicidade, considere $f : F \to A$ um homomorfismo tal que $\psi = f\varphi$. Defina $f_i : F_i \to A$ por $f_i : f\eta_i$. Segue de $\psi_i = f_i\varphi_i$ que

$$f_i\varphi_i = f\eta_i\varphi_i = f\varphi|_{S_i} = \psi_i|_{S_i} = \psi_i$$

uma vez que F_i é um grupo abeliano livre em S_i com respeito a φ_i. Portanto, f é única $\square$

Uma aplicação interessante do teorema anterior é supor $S = \{x_i : i \in I\}$ e para cada $i \in I$, tomar $S_i = \{x_i\}$ unitário e F_i um grupo cíclico infinito consistindo de todas as potências positivas e negativas do elemento x_i, isto é, $F_i = \{x_i^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Seja $\varphi_i : S_i \to F_i$ a aplicação de inclusão, isto é, $\varphi_i(x_i) = x_i^1$. Então, concluímos que F_i é um grupo abeliano livre sobre S_i. Logo, todas as condições do teorema anterior são satisfeitas. Portanto, concluímos que um grupo abeliano livre no conjunto S é o produto fraco da coleção dos grupos cíclicos infinitos, com cardinalidade igual a de S.

Como F é o produto fraco de F_i, qualquer elemento $g \in F$ é da seguinte forma: para qualquer índice $i \in I$, a i-ésima componente $g_i = x_i^{n_i}$, onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e $n_i = 0$ exceto para uma quantidade finita de índices i. Além disso, a função φ é definida, para cada índice j, por

$$(\varphi x_i)_j = \begin{cases} x_i^1, & i = j \\ x_j^0, & i \neq j \end{cases}$$

desse modo φ é injetiva. Se quisermos, podemos identificar cada $x_i \in S$ como sua imagem $\varphi(x_i) \in F$. Então, S se torna um subconjunto de F, e podemos expressar cada elemento $g \neq 1$, unicamente como $g = x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_k}^{n_k}$, onde os índices $i_1,...,i_k$ são todos distintos, e $n_1,...,n_k$ são inteiros não negativos. Essa expressão para g é única exceto pela ordem dos fatores. Além disso, cada produto dos $x_i's$ representam um único elemento $g \neq 1$ de F. O que deixa claro que F é gerado pelo subconjunto $S = \varphi(S)$. Essa identificação é comum para grupos abelianos livres e φ se tornará a inclusão. Um outro caminho para a construção de grupos abelianos livres seria definir um grupo abeliano F ser livre no subconjunto $\{x_i : i \in I\} \subset F$, se cada elemento $g \neq 1$ admite a expressão $g = x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_k}^{n_k}$ a qual é única considerando a ordem dos fatores. Esta segunda construção embora mais fácil não permite a generalização para grupos não-abelianos.

Proposição 20. *Qualquer grupo abeliano é a imagem homomorfica do grupo abeliano livre, isto é, dado um grupo abeliano A, existe um grupo abeliano livre F e um epimorfismo $f : F \to A$.*

Demonstração. *Seja $S \subset A$ o conjunto gerador de A, e seja F o grupo livre sobre o conjunto S com respeito a função $\varphi : S \to F$. Seja $\psi : S \to A$ a inclusão. Por definição de grupo abeliano livre, temos que existe um homomorfismo $f : F \to A$ tal que $f\varphi = \psi$. Como ψ é a inclusão e S é gerador garantimos que $f(\varphi(S)) = \psi(S) = S$. Portanto, f é epimorfismo* $\square$

Esta proposição nos permite dar sentido a noção de relação não trivial entre os geradores de S. Sejam A,S,F e f como na proposição acima, definimos $r \neq 1$ elemento do núcleo de f, como uma relação não trivial entre os elementos de S. Se $\{r_i : i \in I\}$ é uma coleção destas relações, e r é um elemento do subgrupo de F gerado pelos $r_i's$, então a relação r é dita ser uma *consequência* das relações $r_i's$. Isso significa que r pode ser escrito como produto dos $r_i's$ e seus inversos.

Se a coleção $R = \{r_i : i \in I\}$ gera o núcleo de f, então o grupo A é completamente determinado pelo isomorfismo do conjunto gerador S e as relações $\{r_i : i \in I\}$. Isto é, A é isomorfo ao grupo quociente $F \backslash < R >$.

2.8 Produto Livre de Grupos

Definição 25. *Seja $\{G_i : i \in I\}$ uma coleção de grupos, e assuma que para cada índice $i \in I$ existe um homomorfismo $\varphi_i : G_i \to G$. Dizemos que G é o produto livre ou coproduto dos G_i com respeito aos homomorfismos φ_i se, e somente se, satisfaz as seguintes condições: Para algum grupo H e quaisquer homomorfismos $\psi_i : G_i \to H$, $i \in I$, existe um único homomorfismo $f : G \to H$ tal que para qualquer índice $i \in I$, o diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "f"] \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

Proposição 21 (Unicidade)**.** *Assuma que G e G' são produtos livres de uma coleção $\{G_i : i \in I\}$ de grupos, com respeito aos homomorfismos $\varphi_i : G_i \to G$ e $\varphi_i' : G_i \to G'$, respectivamente. Então, existe um único isomorfismo $h : G \to G'$ tal que o seguinte diagrama comuta, para todo $i \in I$*

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dd, "h"] \\ G_i \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i'"'] & \\ & G' \end{tikzcd}$$

Demonstração. *Análogo a Proposição 16.*

É sabido que o produto livre está bem definido e que é único. Mas, uma pergunta que não respondemos ainda é sobre a existência, isto é, sempre existirá o produto livre de uma coleção de grupos? E a resposta é sim! Mas, não demonstraremos neste trabalho. Você poderá encontrar na referência [2].

Teorema 5 (Existência)**.** *Dada qualquer coleção $\{G_i : i \in I\}$ de grupos, o produto livre desta coleção existe.*

Definição 26. *Dada uma aplicação $G \times E \to E$, $(g,x) \to gx$, tal que $\forall g \in G$ e $\forall x \in E$ satisfaz*

1. *$\forall x \in E$, $1x = x$;*
2. *$\forall x \in E$, $g_1, g_2 \in G$, tenha-se $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$*

Considerando a definição acima, seja $g \in G_i$ e $(x_1, \ldots, x_n) \in W$; definiremos $g(x_1, \ldots, x_n)$ como

Caso 1. $x_1 \notin G_i$. Então, se $g \neq 1$ temos

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (g, x_1, \ldots, x_n)$$

Na palavra vazia, $g() = (g)$.

Se $g = 1$, então

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Caso 2. $x_1 \in G_i$. Então,

$$g(x_1,...,x_n) = \begin{cases} (gx_1,x_2,...,x_n), \text{ se } gx_1 \neq 1 \\ (x_2,...,x_n), \text{ se } gx_1 = 1 \end{cases}$$

Note que se $gx_1 = 1$ e $n = 1$, fica entendido que $g(x_1) = ()$.

Propriedades da left-operation de G_i em W. Seja $w \in W$, então são satisfeitas:

1. $1w = w$;
2. $(gg')w = g(g'w)$;

Portanto, cada elemento $g \in G_i$ pode ser considerado como uma permutação do conjunto W, e G_i pode ser considerado como subgrupo do grupo de todas as permutações de W. Seja G o subgrupo do grupo de todas as permutações de W o qual é gerado pela união dos $G_i's$. Então, G contém cada G_i como um subgrupo; e seja $\varphi_i : G_i \to G$ a aplicação inclusão.
Veja que qualquer elemento de G pode ser escrito como produto finito dos elementos de $G_i's$. Observe também que se dois fatores consecutivos no produto vem do mesmo G_i, então podem ser colocados como um fator só. Portanto, qualquer elemento $g \neq 1$ de G pode ser expresso como um produto finito de elementos de $G_i's$ de forma reduzida, isto é, fatores consecutivos não pertencem ao mesmo grupo, logo nenhum fator é a identidade. Seja $g \neq 1$ um elemento de G na sua forma reduzida, essa forma é única se

$$g = g_1 g_2 \cdots g_m = h_1 h_2 \cdots h_n$$

dois produtos em sua forma reduzida, então $m = n$ e $g_i = h_i$, para $1 \leq i \leq m$. Isso vem do fato de que se considerarmos as permutações de $g_1 \cdots g_m$ e $h_1 \cdots h_n$ sobre a palavra vazia, os resultados serão as palavras $(g_1,...,g_m)$ e $(h_1,...,h_n)$, respectivamente. Pois, estas duas palavras são iguais. Portanto, a sua forma reduzida é única.

Desse modo fica claro como formar o inverso de um elemento em G na sua forma reduzida. Seja $g = g_1 \cdots g_m$, então seu inverso será escrito como $g^{-1} = g_m^{-1} \cdots g_1^{-1}$. Agora, fica fácil de verificar que G é de fato o produto livre dos $G_i's$ com respeito a $\varphi_i's$. Então, sendo H um grupo e seja $\psi_i : G_i \to H$, $i \in I$, uma coleção de homomorfismo. Defina a função $f : G \to H$ como segue: escrevendo $g \neq 1$, em sua forma reduzida, temos $g = g_1 ... g_m$, $g_k \in G_{i_k}$, $1 \leq k \leq m$, então

$$f(g) = (\psi_{i_1} g_1)(\psi_{i_2} g_2) \cdots (\psi_{i_m} g_m)$$

e como $f(1) = 1$, uma vez que ψ_{i_k} é homomorfismo. Portanto, f é um homomorfismo tal que faz o diagrama comutar $\square$

Como os homomorfismos $\varphi_i : G_i \to G$ são monomorfismos, é comum identificar cada grupo G_i, por sua imagem sobre φ_i, e considerá-lo como subgrupo do produto livre G. Então, φ_i torna-se a inclusão.

Relembre dois fatos importantes da demonstraçao do teorema anterior:

a) Qualquer elemento $g \neq 1$ do produto livre pode ser expresso de maneira única como sendo o produto das formas reduzidas dos elementos dos grupos G_i.

b) As regras de multiplicação de dois produtos reduzidos são obviamentes as naturais.

Estes fatos nos fornece noções sobre a estrutura do espaço do produto livre de grupos.

Exemplo 12. *Sejam G_1 e G_2 grupos cíclicos de ordem 2, $G_1 = \{1, x_1\}$ e $G_2 = \{1, x_2\}$. Então, qualquer elemento $g \neq 1$ do produto livre de G_1 com G_2 , pode ser escrito unicamente como produto de x_1 e x_2, com fatores x_1 e x_2 alternando-os. Por exemplo, $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_1$ ou $x_2, x_2x_1, x_2x_1x_2$, etc. são elementos do produto livre. Note que os elementos x_1x_2 e x_2x_1 são de ordem infinita, e são elementos distintos. O que é uma grande diferença do produto direto ou do produto fraco de G_1 com G_2, com relação ao produto livre. O produto direto é um grupo abeliano de ordem 4, já o produto livre é um grupo não abeliano com ordem infinita.*

Daremos uma notação para o produto livre dos grupos $G_1, G_2, ..., G_n$ por $G_1 * G_2 * \cdots * G_n$ ou $\prod_{1 \leq i \leq n} *G_i$. Já o o produto livre de uma familia de grupos $\{G_i : i \in I\}$ é denotado por $*_{i \in I} G_i$.

2.9 Grupos livres

A construção do grupo livre é exatamente a mesma do grupo abeliano livre.

Definição 27. *Seja S um conjunto arbitrário. Um grupo livre no conjunto S (ou um grupo livre gerado por S), é um grupo F com respeito a função $\varphi : S \to F$ tal que satisfaz as seguintes condições: Para qualquer grupo H e qualquer função $\psi : S \to H$, existe um único homomorfismo $f : F \to H$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dd, "f"] \\ S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

Proposição 22 (Caracterização)**.** *Sejam F e F' grupos livres no conjunto S, com respeito as funções $\varphi : S \to F$ e $\varphi' : S \to F'$, respectivamente. Então, existe um único isomorfismo $h : F \to F'$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "h"] \\ S \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & \\ & F' \end{tikzcd}$$

Dado um conjunto S arbitrário, será que o grupo livre sobre S existe? E quais são suas propriedades? Mostraremos a seguir. A construção será análoga ao que foi feito a grupos abelianos livres.

Assuma que $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, com S_i subconjuntos disjuntos e não-vazios. Para cada índice $i \in I$, seja F_i um grupo livre sobre F_i, com respeito a função $\varphi_i : S_i \to F_i$. Denote por F o produto livre dos grupos F_i com respeito aos homomorfismos $\eta_i : F_i \to F$ (monomorfismos). Como cada S_i é disjunto, podemos definir a função $\varphi : S \to F$ pela regra $\varphi|_{S_i} = \eta_i \varphi_i$.

Proposição 23. *Sobre as hipóteses acima, F é o grupo livre sobre o conjunto S com respeito a função $\varphi : S \to F$. Em outras palavras, o produto livre de grupos livres, é um grupo livre.*

Aplicaremos essa proposição para mostrar a existência do grupo livre.

Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto arbitrário não-vazio, e para cada $i \in I$, defina $S_i = \{x_i\}$. Seja F_i o grupo cíclico infinito gerado por x_i, isto é, $F_i = \{x_i^n : n \in \mathbb{Z}\}$, e considere $\varphi : S_i \to F_i$ a aplicação inclusão. Então, F_i é claramente um grupo livre sobre S_i com respeito a aplicação φ_i. Como as hipóteses da proposição anterior são satisfeitas, concluímos que F é um grupo livre sobre S com respeito a função $\varphi : S \to F$. Note que F é o produto livre de grupos cíclicos infinitos. Cada elemento $g \neq 1$ do grupo livre F pode ser expresso unicamente na forma

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k},$$

onde $x_1, ..., x_k \in S$ e $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Tal expressão de g, é dita ser a sua forma reduzida de elementos de S. E a identidade 1 será representada pela palavra vazia. O produto e os inversos são análogos o caso anterior. E $\varphi : S \to F$ é injetiva, logo $F = \varphi(S)$.

3 O TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN

Utilizaremos como referência [6], faremos também uma apropiação da sua notação para simplificar passos técnicos. Uma das mudanças é que reservaremos o símbolo $*$ para produtos livres, o $\cdot$ representará o produto de caminhos usual.

Nosso objetivo é encontrar o grupo fundamental de um espaço topológico X. E nossa ferramenta, se baseia em encontrarmos dois abertos U e V contidos em X, cuja a união seja X e tais que U, V e $U \cap V$ sejam conexos por caminho, com $U \cap V$ não vazia. Além disso, devemos também sermos capazes de calcular $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$ e $\pi_1(U \cap V)$ e só então estaremos apto para encontrarmos o $\pi_1(X)$.

Primeiro, vamos encontrar as relações entre estes espaços utilizando as inclusões naturais

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dr, "k"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\
& V \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

e que induzem inclusões em seus respectivos grupos fundamentais, como vemos abaixo

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(U,q) \arrow[dr, "k_*"] & \\
\pi_1(U \cap V, q) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_1(X,q) \\
& \pi_1(V,q) \arrow[ur, "l_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Vamos então inserir o produto livre de grupos $\pi_1(U,q)*\pi_1(V,q)$ dentro do nosso diagrama. Sejam $\iota_U : \pi_1(U,q) \hookrightarrow \pi_1(U,q)*\pi_1(V,q)$ e $\iota_V : \pi_1(V,q) \hookrightarrow \pi_1(U,q)*\pi_1(V,q)$ são as injeções canônicas. Pela caracterização de produto livre, k_* e l_* induzem um homomorfismo $\Phi : \pi_1(U,q)*\pi_1(V,q) \to \pi_1(X,q)$ tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,q) \arrow[d, "\iota_U"] \arrow[dr, "k_*"] & \\
\pi_1(U\cap V,q) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "j_*"'] & \pi_1(U,q)*\pi_1(V,q) \arrow[r, "\Phi"] & \pi_1(X,q) \\
 & \pi_1(V,q) \arrow[u, "\iota_V"] \arrow[ur, "l_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Definimos a aplicação $F : \pi_1(U\cap V,q) \to \pi_1(U,q)*\pi_1(V,q)$ por $F(\gamma) = (i_*(\gamma))^{-1}(j_*(\gamma))$. Note que F não é homomorfismo. Seja $N = \overline{F(\pi_1(U\cap V,q)}$ o fecho normal da imagem de F em $\pi_1(U,q)*\pi_1(V,q)$.

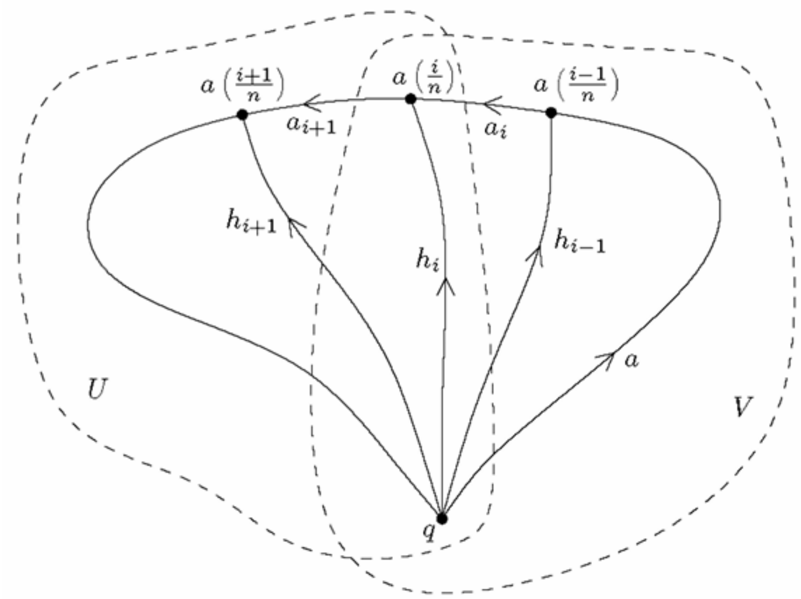


Figura 7 - Fatoração do loop a.

Teorema 6 (Seifert-Van Kampen)**.** *Seja X um espaço topológico. Suponha $U,V \subset X$ abertos cuja união é X, e satisfazendo que $U,V,U\cap V$ são conexos por caminho. Então, para qualquer $q \in U\cap V$, o homomorfismo $\Phi : \pi_1(U,q) * \pi_1(V,q) \to \pi_1(X,q)$ é sobrejetivo, e seu núcleo é $N = \overline{F(\pi_1(U\cap V,q))}$. Portanto,*

$$\pi_1(X,q) \simeq \pi_1(U,q) * \pi_1(V,q) \Big/ \overline{(F(\pi_1(U\cap V,q))}.$$

Demonstração. *Faremos a prova em 3 etapas: 1) Φ é sobrejetiva, 2) $N \subset Ker\Phi$ e 3) $Ker\Phi \subset N$.*
1) Φ é sobrejetiva: *De fato, seja $\alpha \in \pi_1(X,q)$. Considere o loop $a : [0,1] \to X$ um representante da classe α. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n <$ número de Lebesgue da cobertura $a^{-1}(U), a^{-1}(V)$ de $[0,1]$. Logo,*

$$a\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \subset U \text{ ou } V,\ \forall i = 1,...,n.$$

Denote por a_i o caminho

$$[0,1] \overset{\text{função afim}}{\longrightarrow} \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \overset{a|_{[(i-1)/n, i/n]}}{\longrightarrow} U \text{ ou } V.$$

Daí, segue que $a = a_1 \cdot a_{n-1} \cdots a_n$. Desse modo, temos que a classe de a em X tem fatores $[a]_X = [a_1 \cdot \cdots \cdot a_n]_X$. Mas, o problema dessa fatoração é que os caminhos a_i não são loops em geral. Para remediarmos isto, para cada $i = 1,...,n-1$, tome um caminho h_i de q até $a(i/n)$ como na Figura 7 - Fatoração do caminho a. Se $a(i/n) \in U\cap V$, tome h_i inteiramente em $U\cap V$; caso contrário, escolha tome h_i onde estiver $a(i/n)$, isto é, em U ou em V, isso podemos pois U, V e $U\cap V$ são conexos por caminho. Então, pondo $\tilde{a}_i = h_{i-1}\cdot a_i \cdot h_i^{-1}$, e onde h_0 e h_n são constantes igual a q. Neste caso, cada $\tilde{a}_i$ é um loop com base em q e estão inteiramente contidos em U ou em V. Segue facilmente que a pode ser decomposto por $[a]_X = [\tilde{a}_1 \cdot \cdots \cdot \tilde{a}_n]_X$.
Considere um elemento

$$\gamma = [\tilde{a}_1]_U * [\tilde{a}_2]_V * \cdots * [\tilde{a}_n]_V \in \pi_1(U,q) * \pi_1(V,q),$$

então temos

$$\begin{aligned}
\Phi(\gamma) &= \Phi([\tilde{a}_1]_U * [\tilde{a}_2]_V * \cdots * [\tilde{a}_n]_V) \\
&= \Phi([\tilde{a}_1]_U) \cdot \Phi([\tilde{a}_2]_V) \cdot \Phi([\tilde{a}_n]_V)) \\
&= k_*([\tilde{a}_1]_U) \cdot l_*([\tilde{a}_2]_V) \cdots l_*([\tilde{a}_n]_V) \\
&= [\tilde{a}_1]_X \cdot [\tilde{a}_2]_X \cdots [\tilde{a}_n]_X \\
&= [\tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_n]_X \\
&= [a]_X
\end{aligned}$$

E portanto, Φ é sobrejetiva.

2) Provaremos que $N = \overline{F(\pi_1(U \cap V, q))} \subset Ker\ \Phi$*: Como Ker Φ é normal, basta mostrarmos que $F(\pi_1(U \cap V, q)) \subset Ker\ \Phi$. De fato, seja $[a]_{U\cap V} \in \pi_1(U \cap V, q)$ um elemento arbitrário. Então,*

$$\begin{aligned}
\Phi \circ F([a]_{U\cap V}) &= \Phi((i_*([a]_{U\cap V})^{-1} * (j_*([a]_{U\cap V})) \\
&= \Phi([a^{-1}]_U * [a]_V) \\
&= \Phi([a^{-1}]_U) * \Phi([a]_V) \\
&= k_*([a^{-1}]_U) \cdot l_*([a]_V) \\
&= [a^{-1}]_X \cdot [a]_X \\
&= [a^{-1} \cdot a]_X = 1.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

3) Provaremos que $Ker\ \Phi \subset N$*: Seja $\gamma = [a_1]_U * [a_2]_V * \cdots * [a_k]_V \in \pi_1(U, q) * \pi_1(V, q)$, um elemento arbitrário no produto livre, e suponha que $\Phi(\gamma) = 1$. Daí, temos*

$$\begin{aligned}
1 =& \Phi(\gamma) = \Phi([a_1]_U * [a_2]_V * \cdots * [a_k]_V) \\
=& \Phi([a_1]_U) * \Phi([a_2]_V) * \cdots * \Phi([a_k]_V) \\
=& k_*([a_1]_U) \cdot l_*([a_2]_V) \cdot \cdots \cdot l_*([a_k]_V) \\
=& [a_1]_X \cdot [a_2]_X \cdot \cdots \cdot [a_k]_X \\
=& [a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k]_X.
\end{aligned}$$

Isso é equivalente a dizer que $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \underset{X}{\sim} c_q$ (loop constante em q). Precisamos mostrar que $\gamma \in N$.

Seja $H : I \times I \to X$ uma homotopia de caminhos de $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$ para c_q em X. Pela proposição do número de Lebesgue (encontra-se em preliminares), podemos subdividir $I \times I$ em quadrados de lados $1/n <$ número de Lebesgue. Então, H leva cada quadrado $S_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, em U ou em V.

Vamos denotar por $v_{ij} = H(i/n, j/n)$, a_{ij} é a restrição de H no conjunto $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left\{\frac{j}{n}\right\}$ e b_{ij} é a restrição de H no conjunto $\left\{\frac{i}{n}\right\} \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, ambos adequadamente parametrizados em I como mostra na figura abaixo.

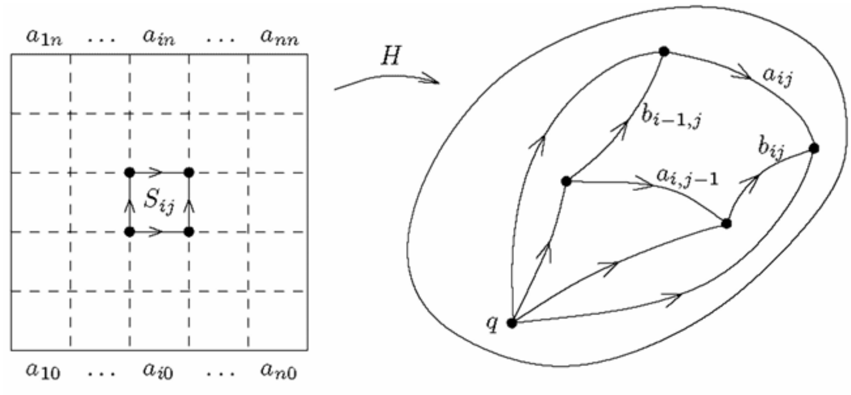


Figura 8 - Partição do quadrado *IxI* e a ação da homotopia H.

A restrição de H na borda inferior do quadrado (quando $t = 0$), temos $H(s,0) = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$. Tomando n um potência de 2 suficientemente grande, podemos garantir que os pontos finais dos caminhos a_i neste prouto são da forma i/n, então o caminho obtido restrigindo H para a borda inferior do quadrado também pode ser obtida por

$$H_0 \sim a_1 \cdots a_k \sim (a_{10} \cdots a_{p0}) \cdots (a_{r0} \cdots a_{n0}).$$

No produto livre, isso significa que

$$\gamma = [a_{10} \cdots a_{p0}]_U \cdots [a_{r0} \cdots a_{n0}]_V.$$

Veja que não podemos abrir esses fatores em $[a_{10}]_U * [a_{20}]_U * ...$ e assim por diante, pois estes caminhos não são loops com ponto base em q, logo não podemos fazer esse passo. Mas, isso pode ser facilmente consertado, para cada i e j, escolha um caminho h_{ij} de q para v_{ij} e faremos as seguintes escolhas: o caminho h_{ij} estará em $U \cap V$ se $v_{ij} \in U \cap V$, caso contrário, estará em U ou em V, e ainda se $v_{ij} = q$, escolha $h_{ij} = c_q$. Então, podemos definir os loops,

$$\tilde{a}_{ij} = h_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot h_{ij}^{-1}, \quad \tilde{b}_{ij} = h_{i,j-1} \cdot b_{ij} \cdot h_{i,j}^{-1}, \quad (9.1)$$

onde cada um deles está inteiramente em U ou em V. Então, γ pode ser fatorada como

$$\gamma = [\tilde{a_{10}}]_U * [\tilde{a_{20}}]_U * \cdots * [\tilde{a_{n0}}]_V. \quad (9.2)$$

Queremos mostrar que a expressão (9.2) módulo N para γ pode ser trocada pela seguinte expressão que é obtida através da restrição de H para a linha do topo dos quadrados da *primeira linha:*

$$\gamma \equiv [\tilde{a_{11}}]_U * \cdots * [\tilde{a_{n1}}]_V \ \ (mod\ N)$$

Repetindo esse argumento, podemos sempre subirmos para a próxima linha e por indução, provaremos que

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{1n}]_U * \cdots * [\tilde{a}_{nn}]_V \ \ (mod\ N).$$

Mas, a borda superior do quadrado IxI (quando $t = 1$*), é levada por H no ponto q, então cada* $\tilde{a}_{in}$ *é igual ao loop constante* c_q*, e logo este último produto é igual a identidade. E portanto* $\gamma \in N$*, terminando a prova.*

Prova da indução: *O caso base é a expressão* (9.2)*. Suponha que existe* $j-1$ *tal que*

$$\gamma \equiv [\tilde{a}_{1,j-1}]_U * \cdots [\tilde{a}_{n,j-1}]_V \ \ (9.3).$$

provaremos que γ *é equivalente módulo N, para a mesma expressão trocando* $j-1$ *por* j*.*

Primeiro observe o seguinte fato: Suponha que $a : I \to U \cap V$ *é um loop. Então,* $[a]_U$ *e* $[a]_V$ *estão na mesma classe no produto livre módulo N, pois*

$$[a]_V * N = [a]_U * ([a]_U^{-1} * [a]_V) * N = [a]_U * F([a]_{U\cap V}) * N = [a]_U * N.$$

Desde que N é normal, isso também implica que

$$x * [a]_U * y * N = x * [a]_U * N * y = x * [a]_V * N * y = x * [a]_V * y * N,$$

para quaisquer x, y *no produto livre. Portanto, contato que estivermos calculando módulo N e* $a : I \to U \cap V$*, seja um loop em* $U \cap V$*, podemos trocar livremente* $[a]_U$ *e* $[a]_V$*, onde quer que estes termos apareçam.*

Considere um quadrado S_{ij} *qualquer, e suponha pela definição de H que H leva* S_{ij} *em* V*. O bordo de* S_{ij}*, percorrido no sentido horário começando no vértice inferior esquerdo, é descrito pelo caminho* $(b_{i-1,j} \cdot a_{ij}) \cdot (b_{ij}^{-1} \cdot a_{i,j-1}^{-1})$*. Pela proposição 9, isso significa que*

$$a_{i,j-1} \underset{V}{\sim} b_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot b_{ij}^{-1}. \quad (9.4)$$

Usando a definição de (9.3) *dos loops* $\tilde{a}_{ij}$ *e* $\tilde{b_{ij}}$*, em* (9.4)*, temos*

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_{i,j-1} &= h_{i-1,j-1} \cdot a_{i,j-1} \cdot h_{i,j-1}^{-1} \\
&\underset{V}{\sim} h_{i-1,j-1} \cdot b_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot b_{ij}^{-1} \cdot h_{i,j-1}^{-1} \\
&\underset{V}{\sim} h_{i-1,j-1} \cdot b_{i-1,j} \cdot h_{i-1,j}^{-1} \cdot h_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot h_{ij}^{-1} \cdot h_{ij} \cdot b_{ij}^{-1} \cdot h_{i,j-1}^{-1} \\
&\underset{V}{\sim} \tilde{b}_{i-1,j} \cdot \tilde{a}_{ij} \cdot \tilde{b}_{ij}^{-1} \quad (9.5)
\end{aligned}
$$

Agora, começando com a expressão (9.3) *para* γ*. Para cada fator* $[\tilde{a}_{i,j-1}]_U$*, cheque quando o quadrado* S_{ij} *abaixo está sendo levado em* U *ou em* V*. Se ele for levado em* V*, então* $\tilde{a}_{i,j-1}$ *deverá ser levado em* $U \cap V$*, para ser substituído pelo fator* $[\tilde{a}_{i,j-1}]_V$ $(mod\ N)$*. De maneira análoga, faça esse ajuste quando* $\tilde{a}_{i,j-1}$ *estiver em* U*.*

Por (9.5)*, podemos substituir cada fator* $[\tilde{a}_{i,j-1}]_V$ *por* $[\tilde{b}_{i-1,j}]_V * [\tilde{a}_{ij}]_V * [\tilde{b}_{ij}^{-1}]_V$*, e da mesma maneira para fatores em* U*. Portanto,*

$$
\begin{aligned}
\gamma &\equiv [\tilde{b}_{0,j}]_U * [\tilde{a}_{ij}]_U * [\tilde{b}_{1j}^{-1}]_U * \cdots * [\tilde{b}_{n-1,j}]_V * [\tilde{a}_{nj}]_V * [\tilde{b}_{nj}^{-1}]_V \quad (mod\ N) \\
&\equiv [\tilde{a}_{1j}]_U * \cdots [\tilde{a}_{nj}]_V \quad (mod\ N).
\end{aligned}
$$

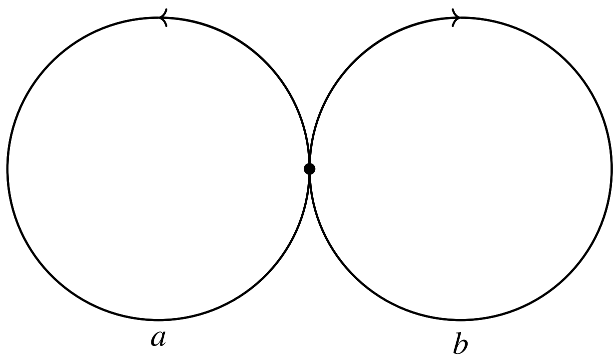
Pois, os fatores $\tilde{b}_{ij}$ *interiores, eles vão se cancelando após a substituição, já* $\tilde{b}_{0j}$ *e* $\tilde{b}_{nj}$ *são ambos iguais ao loop constante* c_q*. Isso conclui a demonstração de indução e a prova do teorema* $\square$

4 APLICAÇÃO

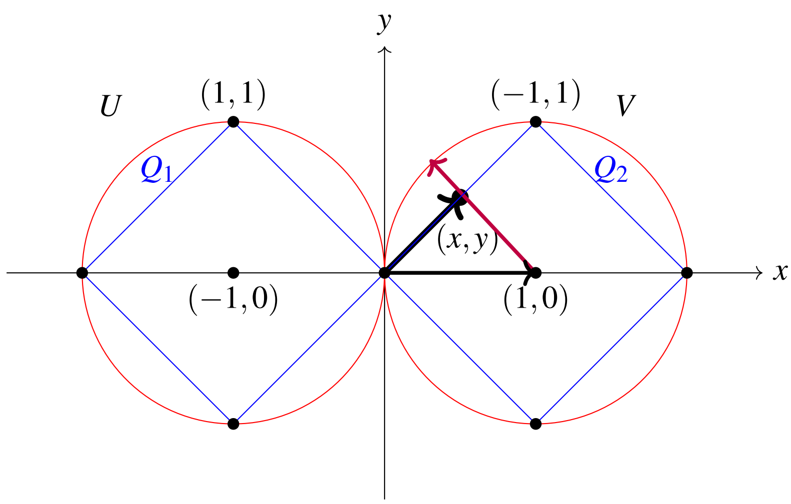
Usaremos o teorema de Seifert-Van Kampen, para calcular o grupo fundamental de casos particulares, o espaço $S^1 \vee S^1$ conhecido como 8, o espaço T^2 (toro) e o $T^2 \# T^2$ (bitoro).

4.1 Espaço $S^1 \vee S^1$

Seja X um espaço topológico tal que $X = U \cup V$, $U \cap V = \{0\}$, e U e V são homeomorfos ao círculo S^1. X pode ser visualizado como a curva como forma de um 8, como no gráfico abaixo.



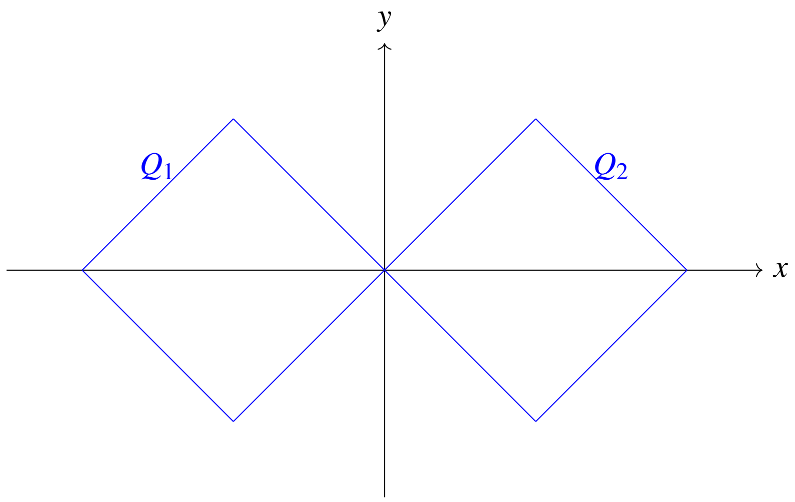
Provaremos inicialmente que a figura 8 (em vermelho), é homeomorfa a figura 8 poligonal (em azul).



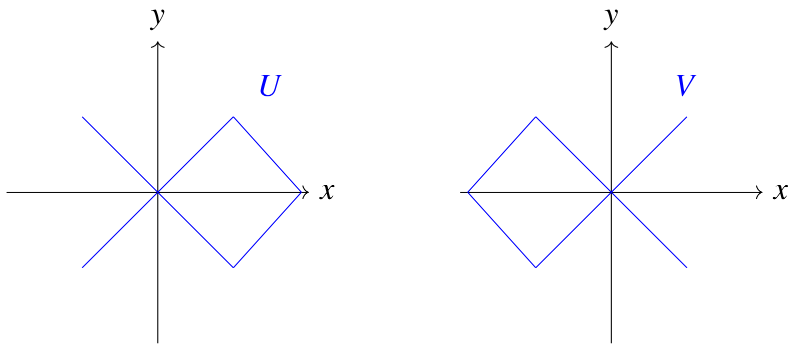
Podemos criar um homeomorfismo conforme o gráfico acima, escolhendo um ponto qualquer do polígono (x,y), e associando a um único ponto do círculo que será dado pela diferença de (x,y) com $(1,0)$, normalizado. Desta forma, podemos explicitar o homeomorfismo dado por $h : Q_1 \vee Q_2 \to S^1 \vee S^1$,

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{||(x-1,y)||}(x-1,y)+(1,0), \ \forall x,y \in Q_2 \\ \dfrac{1}{||(x+1,y)||}(x+1,y)+(-1,0), \ \forall x,y \in Q_1 \end{cases}.$$

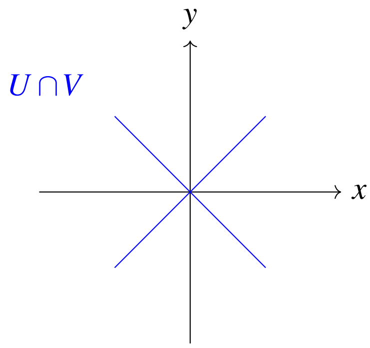
Com isso, podemos trabalhar apenas com o polígono $Q_1 \vee Q_2$.



Podemos tomar dois abertos $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$ tais que os subconjuntos abertos U e V de $Q_1 \vee Q_2$ são exatamente como no gráfico abaixo:



É fácil ver que $Q_1 \vee Q_2 = U \cup V$, que $U \cap V \neq \emptyset$, U e V são abertos e conexos por caminhos. São conexos por caminhos, pois dados dois pontos quaisquer em U ou em V, podemos ligá-los por pedaços de segmentos de retas. Observe também que $U \cap V$ é conexo por caminhos. Note que do ponto base 0 até qualquer outro ponto de $U \cap V$ podemos ligá-los por segmentos, onde todos os pontos pertencem ao conjunto $U \cap V$, isto é, $U \cap V$ é um conjunto estrelado em $(0,0)$ que é sempre contrátil e portanto $\pi_1(U \cap V, 0)$ é trivial.



Mostraremos agora que U é homotópico a $Q_2 \simeq S^1$ e V é homotópico a $Q_1 \simeq S^1$. Faremos o caso U e o caso V é análogo, basta fazer algumas alterações na homotopia. Considere $H : I \times U \to Q_2$, dado por $H(t,u) = \begin{cases} tu, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ u, \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$, onde $u = (x,y) \in U$. É contínua pois trata-se de sentenças de funções contínuas bem coladas em $(0,0)$. Então, H é uma homotopia entre U e Q_2. Portanto, $\pi_1(U,0) \simeq \pi_1(Q_2,0) \simeq \pi_1(S^1,0)$ e $\pi_1(V,0) \simeq \pi_1(Q_1,0) \simeq \pi_1(S^1,0)$, temos pelo Teorema de Seifert-Van Kampen que $\pi_1(X,0) \simeq \pi_1(U,0) * \pi_1(V,0) \simeq \pi_1(S^1,0) * \pi_1(S^1,0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. $\square$

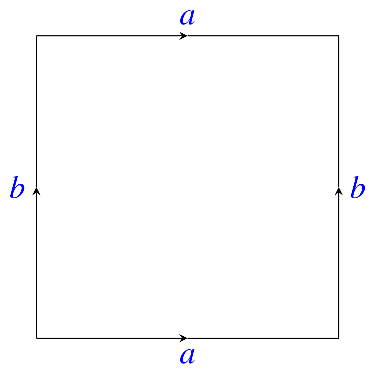
Proposição 24. *Seja X a união de n círculos com um ponto em comum, $n > 2$, isto é, $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, onde cada A_i é homeomorfo a S^1, e, se $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \{x_0\}$. Então, $\pi_1(X,x_0) = *_{i=1}^{n} A_i = S^1 * \cdots * S^1 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$.*

Demonstração. *Análogo ao caso anterior.*

4.2 Espaço T^2

Como aplicação do Teorema de Seifert-Van Kampen, queremos calcular o $\pi_1(T^2)$, a superfície conhecida como Toro. Podemos representar o Toro como o espaço obtido pela identificação faces opostas de um quadrado via relação de equivalência. Pois, demonstra-se em Topologia Combinatória, vide [Seifert e Threlfall 1980], que toda superfície compacta é o espaço quociente de um polígono plano por uma relação de equivalência segundo a qual os lados que constituem o bordo do polígono são identificados dois a dois.

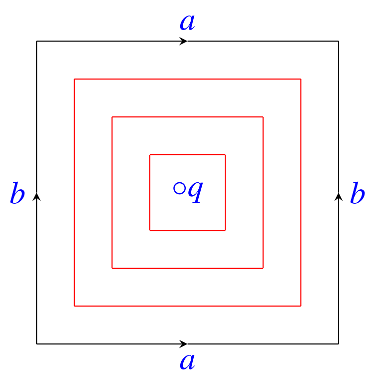
O Toro, tem sua representação poligonal como abaixo



que é o espaço quociente dado pelo quadrado e pelas relações entre os lados opostos.

Considere $U = B(q,r)$ uma bola aberta de centro $q = (1/2, 1/2)$ e raio r, $r < 1$ e considere $V = T^2 - \{q\}$. Claramente, U e V são abertos, e conexo por caminhos. Além disso, já sabemos que $\pi_1(U)$ é trivial, pois U é uma bola aberta.

Para calcularmos o $\pi_1(V)$, mostraremos que V é homotópico ao bordo do quadrado. Como $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial de dimensão finita, todas as normas são equivalentes e contínuas. Daí, tomando $|.|_{max}$ a norma do máximo e dado $z = (x,y)$ qualquer, a homotopia será definida pela projeção radial com norma do máximo.



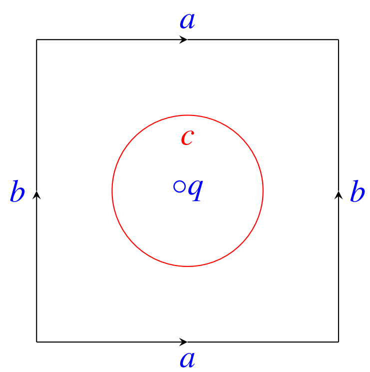
Desse modo, temos

$$H(t,z) = (1-t)(z-q) + t\frac{z-q}{|z-q|_{max}}.$$

Então, como V é homotópico ao bordo do quadrado, e que via relação de equivalência esse bordo do quadrado é homotópico a dois círculos com um ponto em comum. Pelo exemplo anterior sabemos então que $\pi_1(V) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Para a interseção, basta notar que $U \cap V = B(q,r) \setminus \{q\}$. Então, é um resultado conhecido que o anel circular (disco menos um ponto) é homotópico ao círculo, basta usar novamente a homotopia pela projeção radial, com a norma euclidiana. Desse modo, $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$. Diferente do caso anterior, o grupo fundamental da interseção não é trivial, teremos que entender como funcionam as classes de caminhos que saem de U e V para X, isto é, estamos interessados em entender o comportamento de $i_*(\alpha)^{-1} j_*(\alpha)$, onde α é um caminho em X.

Seja c uma curva fechada em $U \cap V$, então temos que $i_*([c]_{U\cap V}) = [c]_U = [q]_U$, pois o $\pi_1(U)$ é trivial. Já, $j_*([c]_{U\cap V}) = [c]_V$ vamos procurar entender melhor.



Como mostramos que $\pi_1(V)$ é homotópico ao bordo, temos que qualquer curva fechada é escrita pelo produto dos seus geradores, logo $c \simeq aba^{-1}b^{-1}$, logo $[c]_V = [aba^{-1}b^{-1}]_V$. Daí, temos que $1 = \Phi(i_*([c]_{U\cap V})^{-1} j_*([c]_{U\cap V})) = \Phi([c]_V) = [aba^{-1}b^{-1}]_X$, e portanto, $[aba^{-1}b^{-1}]_X = 1 \implies ab \simeq ba$. Portanto, pelo Teorema de Seifert-Van Kampen temos que

$$\pi_1(T^2) = \pi_1(U) * \pi_1(V)/ab \simeq ba = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/ab \simeq ba.$$

Como estamos quocientando o $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ pelo subgrupo normal dos comutadores, então

$$\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/ab \simeq ba \simeq Z \times Z.$$

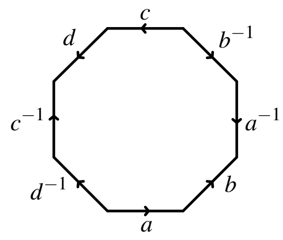
$\square$

Toda curva fechada em T^2 pode ser vista como as curvas geradas pelas potências de a^n e b^m, daí fazemos uma associação bijetiva $(a^n, b^m) \overset{f}{\mapsto} (n,m)$. Desse modo, se temos as palavras $a^n * b^m * a^k * b^l = a^{n+k} b^{m+l}$, isto é, $(n,m) + (k,l) = (n+k, m+l)$.

4.3 Espaço $T^2 \# T^2$

Esta demonstração segue de maneira análoga a anterior, como $T^2 \# T^2$ é uma superfície compacta, logo é o espaço quociente de um polígono plano por uma relação de equivalência segundo a qual os lados que constituem o bordo do polígono são identificados dois a dois.

A representação poligonal do bitoro será dada por



Considere $X = T^2\#T^2$, $U = B(q,r)$ e $V = T^2\#T^2 - \{q\}$. Desse modo, teremos $\pi_1(U)$ é trivial. Com homotopia radial, teremos que $\pi_1(V) \simeq Bd(X) = S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. E por fim, $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$, novamente usando homotopia radial.

Precisamos entender como funciona as inclusão das palavras da interseção em U e em V. Dado um caminho fechado c na interseção, vejamos como se comportam as palavras $i_*([c]_{U\cap V})^{-1} j_*([c]_{U\cap V}) \in Ker\Phi$. Como $\pi_1(U)$ é trivial e $\pi_1(V) \simeq Bd(X)$, temos então

$$\begin{aligned} 1 =& \Phi(i_*([c]_{U\cap V})^{-1} j_*([c]_{U\cap V})) \\ =& \Phi([aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}]_V) \\ =& [aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}]_X. \end{aligned}$$

Logo, $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1$. Dessa forma, pelo Teorema de Seifert-Van Kampen, temos que

$$\begin{aligned} \pi_1(X) \simeq& \pi_1(U) * \pi_1(V) \setminus [aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1] \\ \pi_1(T^2\#T^2) \simeq& \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \setminus [aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1] \end{aligned}$$

□

De maneira geral, temos o seguinte resultado.

Proposição 25. *O grupo fundamentalde de uma superfície compacta orientável de gênero $g \geq 1$ possui $2g$ geradores $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, ..., \alpha_g, \beta_g$ e uma única relação*

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}...\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1.$$

5 REFERÊNCIAS

[1] MUNKRES, James R. Topology prentice hall. Inc., Upper Saddle River, 2000.

[2] MASSEY, William S. A basic course in algebraic topology. Springer, 2019.

[3] HATCHER, Allen. Algebraic topology. Cambridge University Press, 2001.

[4] Garcia, Arnaldo, and Yves Lequain. Elementos de álgebra. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[5] LIMA, Elon Lages. Grupo fundamental e espaços de recobrimento. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CN Pq., 1977.

[6] LEE, John. Introduction to topological manifolds. Springer Science & Business Media, 2010.

[7] LIMA, Elon Lages. Elementos de topologia geral. Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.