

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Pós-Graduação em Física da Matéria Condensada

Speckles em cadeias quânticas topológicas

YURE MATHEUS INACIO ALVES RODRIGUES

Maceió

2024

YURE MATHEUS INACIO ALVES RODRIGUES

Speckles em cadeias quânticas topológicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador : Prof. Dr. Guilherme Martins Alves Almeida

Maceió

2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

R696s Rodrigues, Yure Matheus Inacio Alves.
Speckles em cadeias quânticas topológicas / Yure Matheus Inacio Alves
Rodrigues. – 2024.
58 f. : il. color.

Orientador: Guilherme Martins Alves Almeida.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Física. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 52-56.
Apêndices: f. 57-58.

1. Cadeia quântica topológica. 2. Simetria quirál - Desordem. 3. *Speckles*. I.
Título.

CDU: 53:544.122.3



**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

“Speckles in topological quantum chains”

por

Yure Matheus Inácio Alves Rodrigues

A Banca Examinadora composta pelos professores Guilherme Martins Alves de Almeida, como presidente da banca examinadora e orientador, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; e Aduino José Ferreira de Souza, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, consideram o **candidato aprovado com “A”**.

Maceió, 14 de agosto de 2024.

Documento assinado digitalmente



GUILHERME MARTINS ALVES DE ALMEIDA
Data: 15/08/2024 06:46:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida

Documento assinado digitalmente



FRANCISCO ANACLETO BARROS FIDELIS DE MO
Data: 14/08/2024 20:56:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

Documento assinado digitalmente



ADAUTO JOSE FERREIRA DE SOUZA
Data: 15/08/2024 00:17:39-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Aduino José Ferreira de Souza

Agradecimentos

A minha mãe, Patricia Alves, por toda a confiança, apoio, conselhos, dedicação e amor.

A minha namorada, Letícia Toté, por todo o suporte, conselhos, carinho conversas e paciência ao decorrer dessa etapa na minha vida, serei eternamente grato por tudo que fez na minha vida.

Aos meus amigos, Mariana, Lavínia, Luciano, Adenilson e Guilherme por todas as conversas, brincadeiras, descontrações e conselhos. Em especial aos meus grandes amigos, Matheus, Denisson e Gabriel, vocês foram essenciais na minha vida pessoal e acadêmica. Sou muito sortudo por ter amigos iguais a vocês.

Ao meu orientador Guilherme Almeida pela orientação e dedicação neste trabalho, pelos conselhos dados, pela compreensão ao decorrer do mestrado, pelas conversas produtivas, e a amizade construída ao longo desse tempo.

À Deus por tudo que aconteceu de bom tanto na minha vida pessoal quanto na vida acadêmica.

“O homem pode tanto quanto sabe.”

Francis Bacon.

*Dedico esta dissertação
a minha família, em especial à Patricia Alves, Otacília Alves, Letícia Toté e Adonay
Inácio.*

Resumo

A evolução temporal de uma cadeia topológica Su-Schrieffer-Heeger é analisada por meio das estatísticas de padrões de speckle. O surgimento de estados de borda topológicos afeta dramaticamente as flutuações dinâmicas da função de onda. As estatísticas de intensidade são descritas por uma família de distribuições qui-quadrado não centrais, com o parâmetro de não centralidade refletindo no grau de localização do estado de borda. A resposta do contraste de speckle com relação à dimerização da cadeia é explorada em detalhes, bem como o papel da desordem de quebra de simetria quirial, número de estados de borda, sua lacuna de energia e os locais entre os quais o transporte ocorre. Além de fornecer um local para personalização de speckle, nossos resultados apelam ao uso de padrões de speckle para caracterização de propriedades topológicas não triviais.

Palavras-chave: Cadeia quântica topológica, Simetria quirial, Speckles, Desordem.

Abstract

The time evolution of a topological Su-Schrieffer-Heeger chain is analyzed through the statistics of speckle patterns. The emergence of topological edge states dramatically affects the dynamical fluctuations of the wavefunction. The intensity statistics is found to be described by a family of noncentral chi-squared distributions, with the noncentrality parameter reflecting on the degree of edge-state localization. The response of the speckle contrast with respect to the dimerization of the chain is explored in detail as well as the role of chiral symmetry-breaking disorder, number of edge states, their energy gap, and the locations between which the transport occurs. In addition to providing a venue for speckle customization, our results appeal to the use of speckle patterns for characterization of nontrivial topological properties.

Keywords: Topological quantum chain, Chiral symmetry, Speckles, Disorder.

Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática de uma deformação contínua que conecta dois corpos geométricos (o donut e a xícara).	3
2.2	Representação artística de uma rede cristalina unidimensional. O átomo destacado com o padrão quadriculado representa a célula unitária da rede, e J denota o parâmetro de hopping.	5
2.3	Relação de dispersão eletrônica.	8
3.1	Representação artística do modelo SSH com 5 células unitárias, onde o círculo azul é o sítio A e o círculo vermelho é o sítio B.	11
3.2	Relação de dispersão do modelo SSH	15
3.3	Representação esquemática do winding number para diferentes parâmetros de hoppings ν e w	20
3.4	Representação esquemática de uma cadeia aberta no limite onde $\nu \neq 0$ e $w = 0$ do modelo SSH.	21
3.5	Autoestados de Energia para o caso onde $\nu \neq 0$ e $w = 0$	21
3.6	Representação esquemática de uma cadeia aberta no limite onde $\nu = 0$ e $w \neq 0$ do modelo SSH.	22
3.7	Autoestados de Energia para o caso onde $\nu = 0$ e $w \neq 0$	22
3.8	Espectro de energia da cadeia SSH versus $\nu/w (w \equiv 1)$ para $N = 30$ sítios.	23
3.9	Perfil espacial da função de onda para (a) estados de borda para $\nu/w = 1/2$, (b) descreve o mesmo par de modos quando $\nu/w = 2$, para o qual as propriedades de localização não são mais válidas.	24
4.1	Padrão de speckle.	25
4.2	Caminhada aleatória (a) construtiva e (b) destrutiva.	26
4.3	Gráfico de contorno representando a densidade de probabilidade constante para uma variável aleatória gaussiana complexa circular.	32
4.4	Função densidade de probabilidade Rayleigh	33
4.5	Caminhada aleatória com um fasor constante(azul), e várias contribuições de fasores aleatórios.	34
4.6	Função de densidade Rician para vários valores de A_0/σ	36
4.7	Função de densidade exponencial negativa.	40
5.1	Espectro de energia da cadeia SSH versus $\nu/w (w \equiv 1)$ para $N = 31$ sítios.	43

5.2	Perfil espacial da função de onda para o estado de borda único no meio da banda fortemente localizado em ambas as extremidades da cadeia para (a) $\nu/w = 1/2$ e (b) estado de borda para $\nu/w = 2$	44
5.3	Os gráficos (a) e (b) mostram distribuições de intensidade de speckle para os casos sem desordem e com desordem (realização única), respectivamente, considerando $x_0 = 1$, $x = 3$ e $N = 31$ sítios. Os resultados numéricos exatos são obtidos para $\nu/w = 1$ (círculos azuis), $\nu/w = 0.8$ (quadrados vermelhos) e $\nu/w = 0.6$ (losangos verdes) realizando a evolução até o tempo $5 \times 10^6 w^{-1}$ em etapas de $100 w^{-1}$. As linhas sólidas representam as distribuições qui-quadrado não centrais correspondentes a Equação 5.8. Note que no ponto crítico metálico $\nu/w = 1$ a distribuição se aproxima do qui-quadrado padrão (exponencial) tanto na ausência como na presença da desordem.	46
5.4	Relação entre o parâmetro de não centralidade λ e a distorção da cadeia dada por $\nu/w(w = 1$ Para uma cadeia com $N=31$ sítios, onde iniciamos a função de onda no sítio (a) $x_0 = 1$ e (b) $x_0 = 3$	47
5.5	Contrastes de Speckle versus ν/w para o caso sem desordem (a) e desordenado (b), para uma cadeia com $N = 31$ sítios. Onde colocamos a função de onda inicialmente e onde medimos (x_0, x) são: (1,1) [círculos]; (1,5) [quadrados]; (3,5) [diamantes]. Em todos os casos a evolução unitária é realizada até o tempo $10^6 w^{-1}$ em passos de $100 w^{-1}$. Apenas uma amostra desordenada é considerada, onde as energias no local estão uniformemente distribuídas dentro de $[-0.01w, 0.01w]$. As linhas sólidas cinza representam os contrastes analíticos $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{2+4\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso sem desordem e $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso com desordem.	48

5.6 Contrastes de Speckle versus ν/w para o caso sem desordem (a) e desordenado (b), para uma cadeia com $N = 30$ sítios. Onde colocamos a função de onda inicialmente e onde medimos (x_0, x) são: (1,1) [círculos]; (1,5) [quadrados]; (3,5) [diamantes]. Em todos os casos a evolução unitária é realizada até o tempo $10^6 w^{-1}$ em passos de $100 w^{-1}$. Apenas uma amostra desordenada é considerada, onde as energias no local estão uniformemente distribuídas dentro de $[-0.01w, 0.01w]$. As linhas sólidas cinza representam os contrastes analíticos $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{2+4\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso sem desordem e $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso com desordem. Eventualmente, para ν/w suficientemente baixo, o comportamento de speckle correspondente a N par, quando o sistema está com desordem, se aproxima do caso quando N é ímpar, que apresenta um único estado de borda. No caso sem desordem, tal perda de informação sobre a existência de um par de estados de borda quando N é par, ocorre porque o gap de energia de δE_e fecha no meio da banda a medida que $\nu/w \rightarrow 0$, conforme mostrado no gráfico (c). Uma transição dinâmica do comportamento par-para-ímpar- N também ocorre no caso desordenado, mas não é conduzida pelo fechamento do gap. Em vez disso, o par de estados das bordas se separa devido à desordem, forçando um dos fasores dominantes a desaparecer, como mostra o gráfico (d) com $C_{e\pm}$ avaliado para $(x_0 = 1, x = 5)$ 50

Sumário

Folha de Rosto	i
Ficha Catalográfica	iii
Parecer da Banca Examinadora	iii
Agradecimento	iv
Epígrafe	v
Dedicatória	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Sumário	xii
1 Introdução	1
2 Cadeias Quânticas Topológicas	3
2.1 Topologia	3
2.1.1 Topologia na mecânica quântica	4
2.2 Método Tight-Binding	4
2.3 Modelo de Anderson	8
3 Modelo Su-Schrieffer-Heeger	10
3.1 O Hamiltoniano SSH	10
3.2 O Hamiltoniano do bulk	12
3.3 Correspondência bulk-boundary	15
3.3.1 Simetria quiral	16
3.3.2 Winding number no modelo SSH	18
3.3.3 Limite totalmente dimerizado	20
3.3.4 Espectro de energia com open-boundary	23
3.3.5 Função de onda do estado de borda	24
4 Speckles	25
4.1 Introdução	25
4.2 O formalismo de Speckle	26

4.2.1	Estatística da soma fasorial aleatória	27
4.2.2	Primeiro e segundo momentos de um fasor resultante	28
4.2.3	Soma fasorial aleatória com um fasor constante	33
4.2.4	Sinal analítico como intensidade	38
4.3	Estatística de Primeira Ordem	39
5	Speckles Topológicos	42
5.1	Estado unicamente localizado	43
5.2	Estados bi-localizados	49
6	Conclusão	51
	Referências	56
	Apêndices	57
A	Demonstração do estado de borda para o caso ímpar	57

Capítulo 1

Introdução

Os speckles resultam da interferência entre múltiplas componentes de onda [1] e se manifestam como texturas granulares aleatórias em imagens, por exemplo. Embora esses padrões possam inicialmente parecer ruído aleatório, eles frequentemente revelam um padrão de flutuação universal bem definido. Na realidade, os speckles têm uma ampla gama de aplicações, incluindo imagens médicas [2], biossensores [3], caracterização de superfícies [4], metrologia óptica [5] e manipulação de átomos frios [6, 7]. Portanto, há um esforço considerável direcionado ao desenvolvimento de técnicas para a personalização dos speckles [8, 9, 10].

O estudo dos padrões de speckle também possui um apelo mais fundamental, pois pode revelar informações valiosas sobre o sistema subjacente que, de outra forma, seriam difíceis de investigar. Recentemente, foi demonstrado que o emaranhamento resultante da simetrização de bósons e férmions idênticos em uma rede se manifesta no comportamento dos speckles de sua função de onda ao longo do tempo, exibindo estatísticas não-Rayleigh [11]. Assim, a teoria do speckle pode ser utilizada para explorar fenômenos quânticos como emaranhamento [11, 12, 13, 14], dinâmica quântica de muitos corpos [15] e eventos extremos de cauda longa [16, 17]. Esses estudos recentes lançaram nova luz sobre o papel da desordem na produção de eventos, como rogue waves, em cadeias quânticas de baixa dimensão. Nesta dissertação, iremos focar na possibilidade de obter impressões dos estados de borda topológicos por meio da análise de padrões de speckle. Redes topológicas têm sido objeto de intensa pesquisa ao longo dos anos [18].

Sua robustez contra a desordem e as ricas propriedades de transporte associadas às fases topológicas não triviais da matéria são vantajosas para implementações fotônicas [19]. Para isso, consideramos uma cadeia topológica do tipo Su-Schrieffer-Heeger (SSH), que segue um padrão dimerizado de acoplamentos fracos e fortes. Devido ao bulk-boundary, um único ou um par de estados de borda emergem.

Ao mapear a evolução hamiltoniana unitária em modelos fasoriais aleatórios, derivamos uma família de distribuições qui-quadrado não centrais que descrevem as flutuações de intensidade local no modelo SSH. O grau de localização dos estados de borda controla, em última análise, o contraste dos speckles. Também analisamos a influência da desordem que quebra a simetria e dos locais de entrada e saída. Então, de maneira geral, essa dissertação tem o objetivo de entender como o padrão de speckle pode ser usada para

analisar a evolução temporal de uma cadeia topológica do tipo SSH. Para um melhor entendimento do trabalho desenvolvido nessa dissertação, o trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 2 iniciaremos abordando brevemente o conceito de topologia e como ele se conecta as cadeias quânticas. Também é discutido o método tight-binding que será usado para descrever as cadeias quânticas, e abordaremos o modelo de Anderson brevemente para explicar a desordem em sistemas quânticos.

No capítulo 3 nos dedicamos a uma descrição detalhada do modelo SSH, onde apresentamos o formalismo a ser empregado nesse tipo de cadeia topológica. Também analisamos quando temos uma cadeia com infinitos sítios e quando ela é truncada, ou seja, o número de sítios é finito, e com isso analisamos os casos onde a cadeia tem uma fase topológica trivial e não trivial. Abordamos profundamente o caso não trivial, que é quando surge os estado de borda, que é o objetivo central do nosso trabalho.

No capítulo 4 exploramos a origem e algumas características do fenômeno de speckles, abordando conceitos essenciais para sua descrição. Primeiramente, discutimos a natureza de uma caminhada aleatória e estabelecemos as premissas necessárias para analisar as propriedades estatísticas da soma fasorial. A partir disso, derivamos duas distribuições fundamentais para a compreensão dos resultados apresentados e, por fim, examinamos a estatística de primeira ordem dos padrões de speckles.

No capítulo 5 Introduzimos a estatística de speckle para descrever uma cadeia topológica do tipo SSH, focado apenas no caso não trivial, onde discutimos os resultados obtidos a partir da evolução temporal do sistema.

E para finalizar, no capítulo 6 apresentamos a conclusão do trabalho realizado.

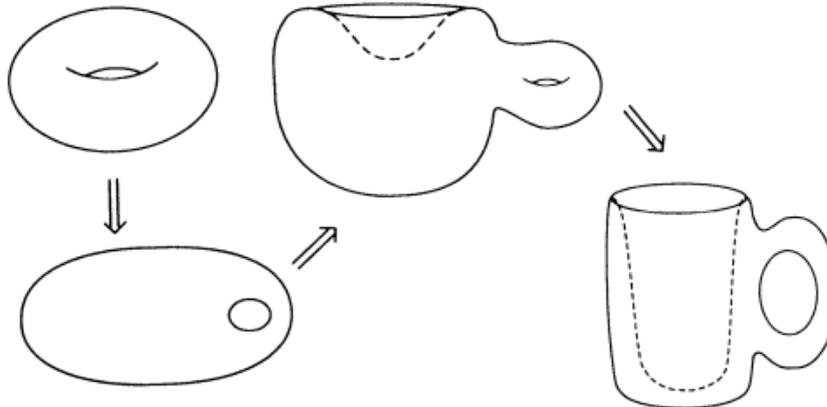
Capítulo 2

Cadeias Quânticas Topológicas

2.1 Topologia

Uma primeira pergunta a se fazer antes de estudar cadeias quânticas topológicas é: o que estuda a topologia? Topologia estuda se objetos podem ser transformados continuamente uns nos outros, ou seja, se preocupa com as propriedades de um objeto geométrico que são preservadas sob deformações contínuas como alongamento e torção, isto é, sem fechar buracos ou rasgar[20, 21, 22]. Um exemplo de deformação contínua esta na Figura 2.1.

Figura 2.1: Representação esquemática de uma deformação contínua que conecta dois corpos geométricos (o donut e a xícara).



Fonte: Retirada da referência[22].

O que garante que a deformação que ocorre na Figura 2.1 é contínua é o teorema de Gauss-Bonnet, que diz que, se S for uma superfície compacta orientável e K a curvatura Gaussiana, então temos a seguinte expressão:

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S) = 4\pi(1 - g) \quad (2.1)$$

onde $\chi(S)$ é a característica de Euler, que nesse caso é dado por $\chi(S) = 2 - 2g$ e g

é o gênero da superfície [23, 24]. O g , que é um invariante topológico, nos dá a informação de quantos buracos um corpo geométrico possui. No caso da Figura 2.1, tanto o toro quanto a xícara possui um gênero $g = 1$, e quando colocamos na Equação 2.1, significa que os corpos geométricos são praticamente equivalentes do ponto de vista topológico, e que existe uma deformação contínua que permite converter um corpo em outro.

Dado essa pequena introdução sobre o conceito de topologia, vamos agora abordar sobre como a topologia pode ser inserida no contexto da mecânica quântica.

2.1.1 Topologia na mecânica quântica

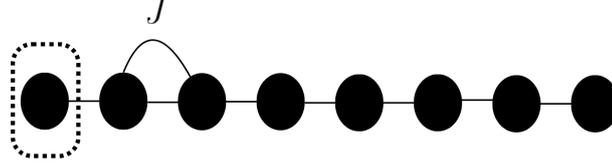
Como estudamos na sessão anterior, vimos que a topologia estuda como os objetos podem ser transformados continuamente uns nos outros. Então podemos nos perguntar: E como seria a topologia no contexto da mecânica quântica? Para responder essa pergunta precisamos saber o que define um sistema na mecânica quântica. Um sistema quântico é geralmente descrito por seu Hamiltoniano, que é um operador que dita a evolução temporal do sistema [25]. O espectro de energias (os autovalores do Hamiltoniano) e os autovetores (os estados quânticos) fornecem uma descrição completa do comportamento do sistema. Então, quando introduzimos a topologia na mecânica quântica estamos interessados em propriedades do Hamiltoniano que não mudam sob deformações contínuas e, essas propriedades topológicas podem ser caracterizadas por invariantes topológicos, que são quantidades que permanecem constantes sob deformações contínuas do sistema [26, 27, 28]. Neste trabalho, vamos focar no invariante topológico conhecido como *winding number*, que será melhor detalhado no capítulo 3. Esse invariante aparece frequentemente em sistemas unidimensionais, como cadeias que usa o método *tight-binding* para descrever o sistema. Além disso, o método *tight-binding*, detalhado na Seção 2.2, será fundamental ao longo deste trabalho e será empregado na descrição do modelo SSH.

2.2 Método Tight-Binding

O método *tight-binding* é uma técnica amplamente usada na física da matéria condensada para descrever, de forma aproximada, a estrutura eletrônica dos sólidos. No caso de uma cadeia quântica unidimensional, como a representada pela Figura 2.2, quando os átomos da rede estão muito distantes, podemos tratá-los separadamente, pois as funções de ondas são ortogonais, o que indica que não há uma sobreposição entre os autoestados dos átomos.

Porém, quando os átomos estão muito próximo, e a rede é ordenada, há uma sobreposição entre os seus autoestados e a função de onda não é mais ortogonal, ou seja, as funções de onda se misturam e com isso formam estados de anti-ligação e ligação. As sobreposições da função de onda ajudam o elétron a saltar de um átomo para outro, ou seja, o elétron se desloca pela rede [29, 30]. Para entender melhor o método, vamos considerar a aproximação de um único orbital por sítio e denotar $|n\rangle$ como orbital ocupável pelo elétron quando ele se encontra no sítio n . Com isso temos que o estado geral para um elétron é dado por:

Figura 2.2: Representação artística de uma rede cristalina unidimensional. O átomo destacado com o padrão quadriculado representa a célula unitária da rede, e J denota o parâmetro de hopping.



Fonte: Autor, 2024.

$$|\psi\rangle = \sum_n \phi_n |n\rangle \quad (2.2)$$

Vamos aplicar o Hamiltoniano a esse estado geral,

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2.3)$$

O Hamiltoniano é dado por:

$$H = K + \sum_i V_i \quad (2.4)$$

onde K é a energia cinética e V_i é a energia potencial que é dado por

$$V_i = V(\vec{r} - \vec{R}_i) \quad (2.5)$$

onde \vec{r} é a posição do elétron e \vec{R}_i é a posição do i -ésimo átomo. Com isso, temos que o potencial $\sum_i V_i$ representa a interação de Coulomb do elétron na posição \vec{r} com o núcleo do i -ésimo sítio. Logo, sabendo que $|\psi\rangle$ é dada pela Equação 2.2, temos que,

$$H \left[\sum_n \phi_n |n\rangle \right] = \sum_n E \phi_n |n\rangle = E \sum_n \phi_n |n\rangle \quad (2.6)$$

Portanto,

$$\sum_n \phi_n \langle m|H|n\rangle = E \sum_n \phi_n \langle m|n\rangle \quad (2.7)$$

Resolvendo o lado esquerdo da Equação 2.7 obtemos

$$\begin{aligned} \langle m|H|n\rangle &= \langle m|K + \sum_i V_i|n\rangle \\ &= \langle m|K + V_n|n\rangle + \sum_{i \neq n} \langle m|V_i|n\rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

O termo $K + V_n$ representa o Hamiltoniano se houvesse apenas um único núcleo, nesse caso, o n -ésimo núcleo. Vamos denominar esse termo de energia orbital, E_{orbital} , que é a energia de um elétron no núcleo n na ausência de outros núcleos. Assim podemos reescrever a Equação 2.8 como,

$$\langle m|H|n\rangle = \langle m|E_{\text{orbital}}|n\rangle + \sum_{i \neq n} \langle m|V_i|n\rangle \quad (2.9)$$

O termo com $\sum_{i \neq n} \langle m|V_i|n\rangle$ é a integral,

$$\langle m|V_i|n\rangle = \int dx \phi_m^*(x) V(x) \phi_n(x) = \begin{cases} V_0, & \text{se } m = n \\ -J, & \text{se } m = n \pm 1 \\ 0, & \text{outros casos} \end{cases} \quad (2.10)$$

onde V_0 é o potencial que desloca a energia no sítio e J é o *hopping* do sistema. Portanto, a Equação 2.7 fica da seguinte forma:

$$\sum_{n,m} \phi_n \left[\langle m|E_{\text{orbital}}|n\rangle + \sum_{i \neq n} \langle m|V_i|n\rangle \right] = E \sum_{n,m} \phi_n \langle m|n\rangle \quad (2.11)$$

Da condição de ortogonalidade do conjunto $\{|n\rangle\}$ podemos escrever, $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$. Com isso, usando os resultados obtidos na equação 2.10, e substituindo na equação 2.11, temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} [E_{\text{orbital}} \langle m|n\rangle + V_0 \langle m|n\rangle - J \langle m|n\rangle - J \langle m|n\rangle] \phi_n &= E \sum_{n,m} \phi_n \langle m|n\rangle \\ (E_{\text{orbital}} + V_0) \phi_m \delta_{m,n} - J \phi_m \delta_{n+1,n} - J \phi_m \delta_{n-1,n} &= E \phi_m \delta_{m,n} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Vamos chamar $E_{\text{orbital}} + V_0$ de ε_0 que é a energia do sítio, ou seja, que é a energia potencial que o elétron possui para permanecer no sítio. Com isso, temos que,

$$\varepsilon_0 \phi_m - J(\phi_{m+1} + \phi_{m-1}) = E \phi_m \quad (2.13)$$

Quando os elétrons saltam entre os orbitais, eles geram autoestados que se comportam como ondas planas, o que nos sugere que uma possível solução para a Equação 2.13 pode ser encontrada usando o *ansatz*,

$$\phi_m = C e^{ikma} \quad (2.14)$$

Onde C é uma constante de normalização dada por,

$$\begin{aligned}
\sum_m |\phi_m|^2 &= 1 \\
C \sum_m |e^{ikma}|^2 &= 1 \\
C^2 \cdot \sum_m |e^{ikma}|^2 &= 1 \\
C^2 \cdot N &= 1 \\
C &= \frac{1}{\sqrt{N}}
\end{aligned}$$

Com isso temos que,

$$\phi_m = \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} \quad (2.15)$$

Substituindo a Equação 2.15 na Equação 2.13 ficamos com,

$$\begin{aligned}
H\phi_m &= \varepsilon_0 \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} - J \left(\frac{e^{-ik(m+1)a}}{\sqrt{N}} + \frac{e^{-ik(m-1)a}}{\sqrt{N}} \right) \\
&= \varepsilon_0 \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} - J \left(\frac{e^{-ikma} e^{-ika}}{\sqrt{N}} + \frac{e^{-ikma} e^{ika}}{\sqrt{N}} \right) \\
&= \varepsilon_0 \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} - J \left(\frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} e^{-ika} + \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} e^{ika} \right) \\
&= \varepsilon_0 \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} - J \left(\frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} (e^{-ika} + e^{ika}) \right)
\end{aligned}$$

Logo temos que,

$$\varepsilon_0 \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} - J \left(\frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} (e^{-ika} + e^{ika}) \right) = E \frac{e^{-ikma}}{\sqrt{N}} \quad (2.16)$$

O que nos dá,

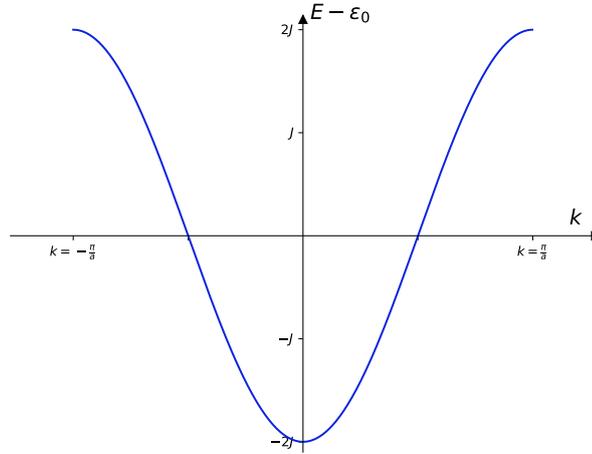
$$E = \varepsilon_0 - J (e^{-ika} + e^{ika}) \quad (2.17)$$

Como $e^{-ikma} + e^{ikma} = 2\cos(ka)$ temos que,

$$E = \varepsilon_0 - 2J\cos(ka) \quad (2.18)$$

A Equação 2.18 é a relação de dispersão eletrônica. Note que a dispersão tem uma energia mínima e uma máxima, o que implica que os elétrons só possuem autoestados dentro de uma determinada faixa de energia, $\varepsilon_0 - 2J \leq E \leq \varepsilon_0 + 2J$ que são as energias permitidas, como mostra a Figura 2.3.

Figura 2.3: Relação de dispersão eletrônica.



Fonte: Autor, 2024.

Note que a banda¹ é deslocada por ϵ_0 e a largura da banda é $4J$, que depende das distâncias entre os núcleos atômicos. Toda a discussão feita nessa seção foi baseada considerando uma rede unidimensional ordenada na qual todos os átomos são idênticos, caracterizando-a como uma rede cristalina perfeita. No entanto, surge uma questão importante: o que acontece quando há uma imperfeição na rede? No caso de tal eventualidade, recorreremos ao modelo de Anderson, que será discutido na seção 2.3.

2.3 Modelo de Anderson

Na sessão anterior, estudamos o modelo *tight-binding* aplicado a um sistema cristalino perfeito, onde a energia *on-site* do sistema era constante, e que poderíamos atribuir qualquer valor a ele, e sendo assim, um sistema que não possui desordem.

Quando um sistema passa a possuir uma desordem, ou seja, quando possui potenciais aleatórios, recorreremos ao modelo de Anderson, que é comumente utilizado para estudar a natureza dos estados eletrônicos em sistemas desordenados[33, 34, 35, 36], e que é dado pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H = \sum_n \epsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_{n \neq m} J_{n,m} |n\rangle \langle m| \quad (2.19)$$

Onde $|n\rangle$ é o orbital atômico centrado em n , ϵ_n é a energia potencial e $J_{n,m}$ é o *hopping* do sistema, e decresce rapidamente com a distância entre os sítios. A principal característica do Hamiltoniano de Anderson, que é dado pela Equação 2.19 é que as

¹Estrutura de banda ou banda descreve a faixa de níveis de energia que os elétrons podem ter dentro dessa faixa, bem como também descreve as faixas de energia que eles podem não ter (*band gaps*) [29, 31, 32].

energias potenciais ϵ_n é escolhida aleatoriamente dentro de um intervalo $[-W, W]$, onde W representa largura da desordem. Note que no caso cristalino, $W = 0$, e as energias ϵ_n são constantes, e o sistema não possui desordem. No trabalho realizado por Anderson[33], ele considerou o *hopping* constante $J_{n,m} = J$ e assumiu o potencial aleatório, com isso ficamos com o seguinte Hamiltoniano:

$$H = \sum_n \epsilon_n |n\rangle\langle n| + J \sum_{n \neq m} |n\rangle\langle m| \quad (2.20)$$

Um dos principais consequências do modelo de Anderson é a identificação da localização espacial das funções de onda. Isso significa que, dependendo do nível de desordem no sistema, a função de onda pode não se espalhar por toda a rede. Em condições de desordem fraca, a função de onda se estende pela rede, mas perde a coerência de fase, resultando em um comportamento geralmente metálico para o sistema. No entanto, para um valor de desordem forte, ocorre a localização da função de onda, fenômeno conhecido como localização de Anderson. Uma característica interessante dessa localização é o comportamento exponencialmente localizado das funções de onda, o que implica que a probabilidade de encontrar a partícula diminui rapidamente à medida que nos afastamos da região onde ela está inicialmente localizada[34, 35, 36].

Graças aos estudos de Anderson, diversas áreas exploraram o estudo que abrangem desordem como a área de transporte eletrônico[33, 34, 35], óptica[37, 38, 39] e até muito importante para entender melhor o fenômeno de Bose-Einstein[40, 41, 42].

Capítulo 3

Modelo Su-Schrieffer-Heeger

O modelo Su-Schrieffer-Heeger, mais conhecido como modelo SSH, é um modelo *tight-binding* unidimensional, inicialmente descrito nas referências [43, 44]. Ele é o modelo mais simples e bem mais estabelecido sobre isolante topológico [45, 28]. Um isolante topológico é um material cuja parte interna atua como um isolante elétrico, enquanto sua superfície funciona como um condutor elétrico, o que significa que os elétrons só podem se mover ao longo da superfície do material, ou seja, os isolantes topológicos possuem um *band gap* como um isolante comum, mas possuem estados condutores protegidos¹ em sua borda ou superfície [45, 46, 49, 26]. Dito isto, o modelo SSH considera uma configuração com dois sítios em uma célula unitária, com dois tipos de acoplamento: um entre os sítios intracelulares e o outro entre os sítios intercelulares. Esses acoplamentos alternam, o que será mais elaborado ao longo do capítulo. Graças a essa alternância entre os acoplamentos, a cadeia SSH exibe duas fases topológicas diferentes: uma sendo a fase trivial e a outra, a não trivial [45]. Com isso, vamos inicialmente escrever o Hamiltoniano *tight-binding* do modelo SSH.

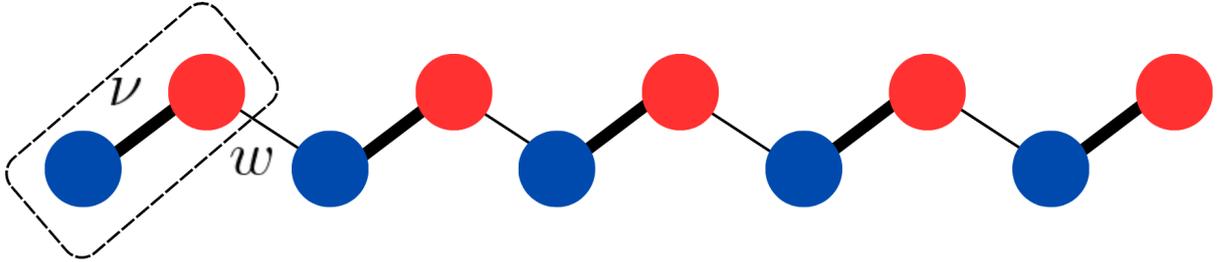
3.1 O Hamiltoniano SSH

O modelo SSH é um modelo *tight-binding* que descreve um único elétron sem spin em uma rede unidimensional de célula unitária de dois sítios, com amplitudes de *hopping* escalonada. Os dois sítios em uma célula unitária são representados por A e B, como podemos ver na Figura 3.1.

Como o elétron não tem spin, o único grau de liberdade é que eles podem tunelar de um sítio para o outro. Dito isto, vamos denominar de ν o *hopping* intracelular (que ocorre dentro da célula unitária) e w o *hopping* extracelular (que ocorre entre as células unitárias vizinhas). Com isso, o Hamiltoniano *tight-binding* do modelo SSH com N células

¹Estados condutores protegidos refere-se aos estados eletrônicos presentes na borda ou na superfície do material que permitem a condução de eletricidade. Isso ocorre porque os estados condutores são resultado de propriedades topológicas do material, não podendo ser facilmente eliminados ou perturbados sem alterar fundamentalmente a estrutura topológica do sistema. Esses estados garantem que os elétrons possam se mover livremente ao longo da superfície ou borda do material, mesmo que o interior permaneça isolante [46, 47, 48].

Figura 3.1: Representação artística do modelo SSH com 5 células unitárias, onde o círculo azul é o sítio A e o círculo vermelho é o sítio B.



Fonte: Autor, 2024.

unitárias é escrito da seguinte forma:

$$H = \nu \sum_{n=1}^N (|n, B\rangle\langle n, A| + |n, A\rangle\langle n, B|) + w \sum_{n=1}^{N-1} (|n+1, A\rangle\langle n, B| + |n, B\rangle\langle n+1, A|) \quad (3.1)$$

A base utilizada para definir o hamiltoniano é escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |n\rangle \otimes |A\rangle &= |n, A\rangle \\ |n\rangle \otimes |B\rangle &= |n, B\rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $|n, A\rangle$ e $|n, B\rangle$ denota o estado da cadeia onde o elétron está na célula unitária n , no local da sub-rede A, B respectivamente e $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Esta representação da base indica que o espaço de Hilbert completo é dividido em duas partes que são o Hamiltoniano externo e o Hamiltoniano interno, denotados como $H_{\text{externo}} \otimes H_{\text{interno}}$ [28]. O espaço de Hilbert externo resulta da repetição das células unitárias N vezes, enquanto o espaço de Hilbert interno é determinado pelos dois sítios da sub-rede, designados como A ou B , dentro da célula unitária.

Para o modelo SSH, a energia potencial é nula (energia *on-site*), o que implica que temos N estados ocupados. Essa situação é conhecida como semi-preenchimento, e é característica dos isolantes simples, como por exemplo o poliacetileno, em que cada átomo de carbono possui um elétron de condução e com isso encontramos uma partícula por célula unitária[28].

A representação matricial do Hamiltoniano do modelo SSH, numa base de espaço real, para uma cadeia de $N = 3$ células unitárias, pode ser escrita como,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Note que a matriz para $N = 3$ tem uma dimensão de 6×6 devido a célula unitária conter dois sítios, ou seja, para cada N células unitárias teremos uma matriz com $2N$ dimensões.

Como todo sistema da física do estado sólido, a cadeia do modelo SSH tem um volume (*bulk*) e um limite (*boundary*). O *bulk* é a parte central da cadeia e os limites são as bordas na extremidade como podemos ver na Figura 3.1. Com isso, vamos inicialmente tratar a nossa cadeia SSH como se fosse uma cadeia infinita e tirar alguns resultados importantes.

3.2 O Hamiltoniano do bulk

A cadeia é dita infinita quando temos um número N muito grande, ou seja, quando consideramos que N tende ao infinito. Isso também nos permite usar as condições de contorno periódicas (Born-von-Karman). Devido termos condições de contorno periódica, nossa cadeia é invariante translacional o que nos permite fazer uma transformação de Fourier. Portanto, vamos resolver a relação de dispersão focando apenas na parte principal da cadeia, o *bulk*, ou seja, assumindo que a cadeia forma um loop (limite periódico), vamos realizar uma transformada de Fourier no espaço de Hilbert externo que é dado por:

$$\begin{aligned} |n, A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k, A\rangle \rightarrow \langle n, A| = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'n} \langle k', A| \\ |n, B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k, B\rangle \rightarrow \langle n, B| = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'n} \langle k', B| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pelo fato do Hamiltoniano total ser separável, podemos reescrever a Equação 3.4 na forma tensorial:

$$\begin{aligned} |n\rangle \otimes |A\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k\rangle \otimes |A\rangle \rightarrow \langle n| \otimes \langle A| = \langle k| \otimes \langle A| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikn} \\ |n\rangle \otimes |B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k\rangle \otimes |B\rangle \rightarrow \langle n| \otimes \langle B| = \langle k| \otimes \langle B| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikn} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agora, usando a transformada de Fourier, vamos reescrever o Hamiltoniano na nova base, ou seja, na base dos momentos:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{n=1}^N \left[\nu \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k, B\rangle \langle k', A| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k, A\rangle \langle k', B| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'n} \right) \right. \\
&\quad \left. + w \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik(n+1)} |k, A\rangle \langle k', B| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikn} |k, B\rangle \langle k', A| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} e^{-ik'(n+1)} \right) \right] \\
&= \sum_k \sum_{k'} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i(k-k')n} \right) \left[\nu \left(|k, B\rangle \langle k', A| + |k, A\rangle \langle k', B| \right) \right. \\
&\quad \left. + w \left(e^{ik} |k, A\rangle \langle k', B| + e^{-ik'} |k, B\rangle \langle k', A| \right) \right]
\end{aligned}$$

Sabendo que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i(k-k')n} = \delta_{k,k'}$, temos que:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_k \left[\nu (|k, B\rangle \langle k, A| + |k, A\rangle \langle k, B|) \right. \\
&\quad \left. + w (e^{ik} |k, A\rangle \langle k, B| + e^{-ik} |k, B\rangle \langle k, A|) \right] \\
&= \sum_k \left[(\nu + e^{-ik} w) |k, B\rangle \langle k, A| \right. \\
&\quad \left. + (\nu + e^{ik} w) |k, A\rangle \langle k, B| \right]
\end{aligned}$$

Portanto, temos que o Hamiltoniano escrito na nova base, $\{|k, A\rangle, |k, B\rangle\}$ é:

$$H = \sum_k [(\nu + e^{-ik} w) |k, B\rangle \langle k, A| + (\nu + e^{ik} w) |k, A\rangle \langle k, B|] \quad (3.6)$$

onde k é o vetor de onda. Como o Hamiltoniano externo e interno podem ser separados, iremos reescrever a Equação 3.6 da seguinte forma:

$$H = |k\rangle \langle k| \otimes [(\nu + e^{ik} w) |A\rangle \langle B| + (\nu + e^{-ik} w) |B\rangle \langle A|] \quad (3.7)$$

que na forma compacta fica da seguinte forma:

$$H = \sum_k |k\rangle H(k) \langle k| \quad (3.8)$$

onde $H(k)$ é dado por,

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & \nu + e^{-ik}w \\ \nu + e^{ik}w & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$H(k)$ é o Hamiltoniano da banda que atua no espaço de Hilbert interno. Através da equação característica, vamos obter a relação de dispersão desse sistema. para isso vamos calcular o determinante da matriz:

$$\det \begin{vmatrix} -E & \nu + we^{-ik} \\ \nu + we^{ik} & -E \end{vmatrix} = 0$$

Simplificando, obtemos:

$$E^2 - (\nu + we^{ik})(\nu + we^{-ik}) = 0$$

Agora, expandindo o produto:

$$E^2 = \nu^2 + w^2 + \nu w(e^{ik} + e^{-ik})$$

Como $e^{ik} + e^{-ik} = 2 \cos(k)$, temos que a relação de dispersão é:

$$E = \pm \sqrt{\nu^2 + w^2 + 2\nu w \cos(k)} \quad (3.10)$$

A partir da relação de dispersão temos que os autoestados é dado por:

$$|\pm k\rangle = \begin{pmatrix} \pm e^{-i\phi(k)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

onde,

$$\phi(k) = \tan^{-1} \left(\frac{w \sin k}{\nu + w \cos k} \right) \quad (3.12)$$

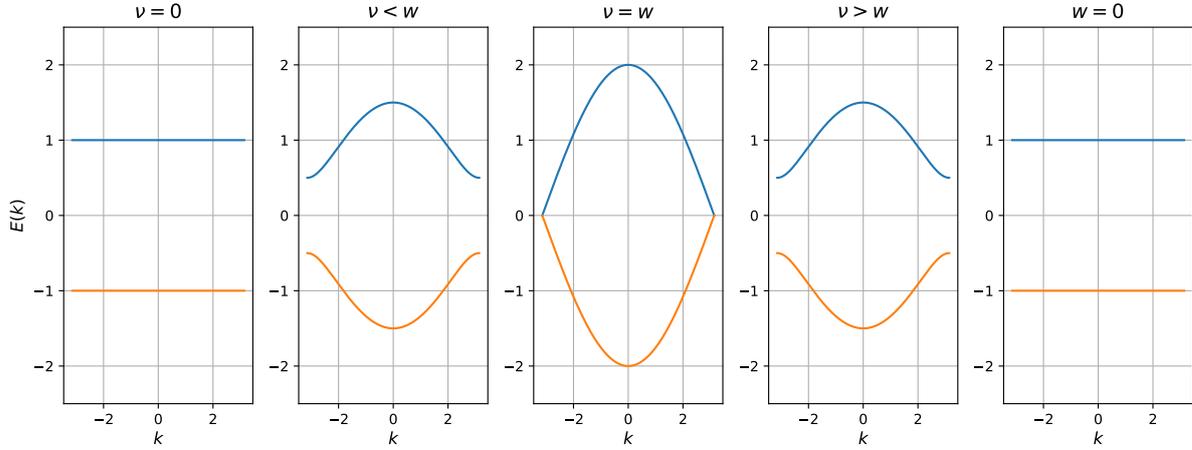
O gráfico da relação de dispersão para diferentes valores de ν e w é mostrado na Figura 3.2.

É importante observar que definimos a energia de Fermi com o nível de energia zero, sendo esta a origem da nossa escala de energia. Pela Figura 3.2, os casos onde $\nu > w$ e $\nu < w$ existe um *gap* ΔE entre o valor mínimo de E_+ e o valor máximo de E_- , que representa a região proibida entre as bandas de valência e de condução. O cálculo do *gap* de energia do sistema é feita através da Equação 3.10. Lembrando que o *gap* é a metade do valor mínimo da diferença entre as duas bandas, temos:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \min \left(2\sqrt{\nu^2 + w^2 + 2\nu w \cos k} \right) \quad (3.13)$$

O valor mínimo ocorre quando $\cos k = -1$. Logo temos que,

Figura 3.2: Relação de dispersão do modelo SSH



Fonte: Autor, 2024.

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\nu^2 + w^2 - 2\nu w} \right) \quad (3.14)$$

sabendo que $(\sqrt{\nu^2 + w^2 - 2\nu w}) = \sqrt{(\nu - w)^2} = |\nu - w|$

Logo, o *gap* do sistema é dado por,

$$\Delta E = |\nu - w| \quad (3.15)$$

Assim, para excitar os elétrons para a banda de condução, é necessário uma energia $E \geq \Delta E$. Por isso, nos casos onde $\nu = 0$, $\nu < w$, $\nu > w$ e $w = 0$, a relação de dispersão descreve um material isolante. Quando $\nu = w$, $\Delta E = 0$, ou seja, o *gap* é nulo, o que significa que temos um material condutor. Com essas análises surge a seguinte indagação: As fases isolantes nos casos $\nu < w$ e $\nu > w$ são iguais? De acordo com a teoria de Landau para transições de fases, ambas as fases isolantes possuem as mesmas simetrias, o que implica que ao conservar o número de partículas, essas fases devem ser fisicamente equivalentes, ou seja, não deve haver diferenças significativas entre as propriedades físicas dessas fases [50, 51, 52, 53]. Porém, não é o que acontece quando observamos a Figura 3.2, pois, justamente quando $\nu = w$ temos uma transição de fase topológica, pois ela separa duas fases isolantes com a mesma simetria mas com propriedades físicas e topológicas diferentes. Para, entender melhor essas propriedades vamos estudar o caso onde teremos estados de bordas, ou seja, uma relação entre o *bulk* e a fronteira do sistema, ao qual chamamos de correspondência *bulk-boundary*.

3.3 Correspondência bulk-boundary

Antes de estudar o sistema com estados de borda propriamente dito, vamos antes falar sobre uma simetria muito importante que é presente no modelo SSH, que é a simetria

quiral.

3.3.1 Simetria quirial

A simetria quirial se refere ao fato de que o sistema exibir propriedades ou comportamento que não é idêntico a sua imagem espelhada, o que indica que não é possível transformar o sistema por meio de uma simples rotação ou translação. Com isso, dizemos que um sistema tem simetria quirial quando o Hamiltoniano obedece a seguinte relação:

$$\hat{\Gamma}\hat{H}\hat{\Gamma}^\dagger = -\hat{H} \quad (3.16)$$

O operador Γ é Hermitiano e unitário, $\hat{\Gamma}^\dagger\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}^2 = 1$. Podemos reescrever o Hamiltoniano dado pela Equação 3.8, expandindo o termo exponencial usando a relação de Euler, $e^{ik} = \cos k + i\sin k$. Logo

$$H(k) = \begin{pmatrix} 0 & \nu + w\cos k - iws\sin k \\ \nu + w\cos k + iws\sin k & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Vamos denominar $h_1 = \nu + w\cos k$ e $h_2 = ws\sin k$. Com isso, o nosso Hamiltoniano fica da seguinte forma:

$$h_k = \begin{pmatrix} 0 & h_1 - ih_2 \\ h_1 + ih_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Pode ser decomposto em:

$$h_k = \begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ h_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ih_2 \\ ih_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Reescrevendo cada parte como uma combinação linear das matrizes de Pauli σ_x e σ_y :

$$h_k = h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

onde:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Com isso, temos que nosso Hamiltoniano escrito em termos das matrizes de Pauli é:

$$h_k = h_1\sigma_x + h_2\sigma_y \quad (3.22)$$

Vamos multiplicar a Equação 3.22 pela matriz de Pauli σ_z :

$$\begin{aligned}
\sigma_z h_k \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \left[h_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= h_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= - \left[h_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= -h_k
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto, temos que nosso operador quiral é $\Gamma = \sigma_z$.

Como o operador simetria quiral é σ_z , temos que uma das propriedades de anti-comutação das matrizes de Pauli[25] é dado por,

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{3.24}$$

onde δ_{ij} é a delta de Kronecker. Com esse fato, podemos definir a simetria quiral pela seguinte Equação:

$$\{h_k, \sigma_z\} = 0 \tag{3.25}$$

Temos também que a Equação de Schrodinger em qualquer base para o Hamiltoniano do modelo SSH é escrito da seguinte forma:

$$H|\varphi_k\rangle = E|\varphi_k\rangle \tag{3.26}$$

Vamos agora aplicar a simetria quiral na Equação 3.26

$$h_k \sigma_z |\varphi_k\rangle = -\sigma_z h_k |\varphi_k\rangle$$

$$h_k \sigma_z |\varphi_k\rangle = -E (\sigma_z |\varphi_k\rangle)$$

$$h_k |\varphi_k'\rangle = -E |\varphi_k'\rangle$$

Portanto, obtemos a Equação 3.27

$$|\varphi_k'\rangle = \sigma_z |\varphi_k\rangle \tag{3.27}$$

que nos diz que, para cada estado $|\varphi_k'\rangle$ com energia E , existe um estado $\sigma_z |\varphi_k\rangle$ com energia $-E$.

Após essa discussão sobre a simetria quiral, vamos analisar a correspondência *bulk-boundary*, o que vai nos permitir identificar o caso onde $\nu > w$ é a fase trivial (isolante típico) e $\nu < w$ como a fase topológica (isolante topológico) do sistema. Para isso, vamos introduzir um invariante topológico, conhecido como *winding number*.

3.3.2 Winding number no modelo SSH

Apesar da relação de dispersão nos revelar algumas propriedades físicas do *bulk* do sistema, há informações importantes que ela não nos revela, como por exemplo, porque o sistema possui dois tipos de isolantes, e no que eles diferem. Para sanar esses questionamentos, vamos definir uma representação compacta para a obtenção desta informação para o modelo SSH.

Para isso, sabemos que o Hamiltoniano dado pela Equação 3.8 pode ser escrito como a Equação 3.22. Além disso, seja $\vec{h}_k = (h_1, h_2, 0)$ e $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, podemos escrever h_k da seguinte forma:

$$h_k = \vec{h}_k \cdot \vec{\sigma} \quad (3.28)$$

Uma vez que o sistema possui simetria quiral, podemos dizer que \vec{h}_k se restringe ao plano XY . À medida que k varre a zona de Brillouin, \vec{h}_k descreve um caminho fechado no plano XY sem passar pelo ponto $\vec{h}_k = 0$ com o qual teríamos um condutor. Contando o número vezes que o vetor \vec{h}_k circula em torno da origem, obtemos o *winding number*, que no modelo SSH é dado pela seguinte equação:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} \text{Tr} \left(\sigma_z H_k^{-1} \frac{\partial H_k}{\partial k} \right) dk \quad (3.29)$$

onde temos as seguintes expressões:

1. A inversa de H_k :

$$H_k^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h_1 + ih_2} \\ \frac{1}{h_1 - ih_2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. A matriz σ_z :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. A derivada parcial de H_k em relação a k :

$$\frac{\partial H_k}{\partial k} = \begin{pmatrix} 0 & -iwe^{-ik} \\ iwe^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

e sabendo que $h_1 = \nu + w \cos k$ e $h_2 = w \sin k$ temos que, ao resolver o traço do integrando da Equação 3.29 obtemos:

$$\mathcal{W} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{ik}}{\nu + we^{ik}} + \frac{e^{-ik}}{\nu + we^{-ik}} \right) dk \quad (3.30)$$

Vamos chamar $z = e^{ik} \rightarrow dk = dz/ik$. Com isso, temos que a Equação 3.30 fica da seguinte forma:

$$\frac{w}{4\pi i} \left\{ \frac{1}{w} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{z + \frac{\nu}{w}} + \frac{1}{\nu} \int_0^{2\pi} \frac{dz}{z \left(z + \frac{w}{\nu} \right)} \right\} \quad (3.31)$$

Como temos uma integral complexa, vamos recorrer ao teorema de resíduos:

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (3.32)$$

onde $Res(f(z), z_0)$ é o resíduo da função $f(z)$, z_0 é um ponto singular da função $f(z)$ e $f(z)$ é uma função analítica [54]. Substituindo a Equação 3.32 na Equação 3.31 temos:

$$\mathcal{W} = \frac{w}{4\pi i} \left\{ \frac{2\pi i}{w} Res(f(z), -\frac{\nu}{w}) + \frac{2\pi i}{\nu} \left[Res(f(z), 0) + Res(f(z), -\frac{w}{\nu}) \right] \right\} \quad (3.33)$$

O resíduo(Res) é dada pela seguinte expressão:

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dk^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] \quad (3.34)$$

onde k é a ordem no polo, que no nosso caso é $k = 1$.

Definimos $z = e^{ik}$ cujo módulo é $|z| = 1$. Para calcular o *winding number* usando a Equação 3.33, vamos considerar que os polos estejam dentro de um círculo cujo raio é $|z| = 1$. Para isso vamos analisar o seguinte caso: quando $\frac{|\nu|}{|w|} < 1 \rightarrow \frac{|w|}{|\nu|} > 1$ o que implica que o $Res(f(z), -\frac{|\nu|}{|w|})$ não está dentro do círculo de raio $|z| = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{w}{4\pi i} \left\{ \frac{2\pi i}{w} Res(f(z), -\frac{\nu}{w}) + \frac{2\pi i}{\nu} Res(f(z), 0) \right\} \\ &= \frac{w}{4\pi i} \left\{ \frac{2\pi i}{w} \cdot (1) + \frac{2\pi i}{\nu} \cdot \frac{\nu}{w} \right\} \\ &= \frac{w}{4\pi i} \left\{ \frac{2\pi i}{w} + \frac{2\pi i}{w} \right\} \\ &= \frac{w}{4\pi i} \cdot \frac{4\pi i}{w} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

O outro caso é quando temos $\frac{|\nu|}{|w|} > 1 \rightarrow \frac{|w|}{|\nu|} < 1$, o que implica que $Res(f(z), -\frac{|\nu|}{|w|})$ não está dentro do círculo de raio $|z| = 1$. Logo,

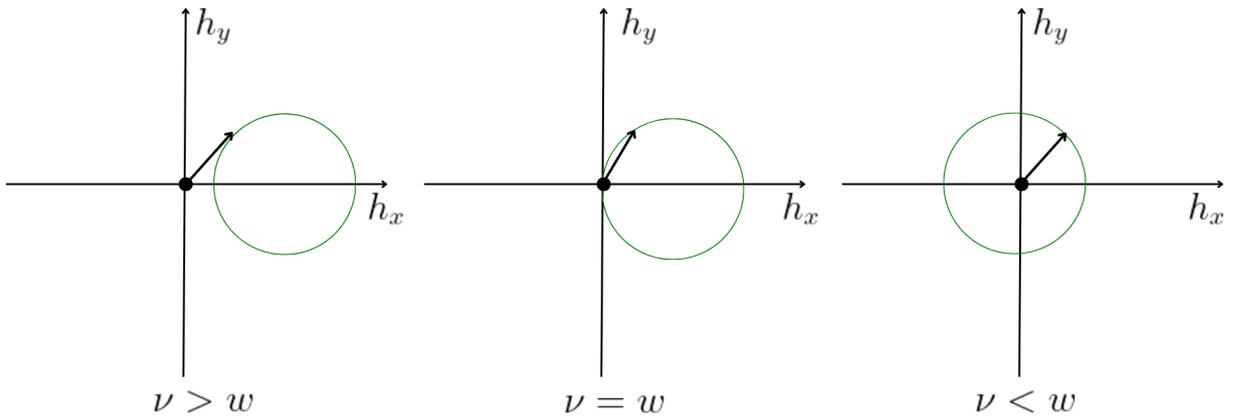
$$\mathcal{W} = \frac{w}{4\pi i} \left\{ \frac{2\pi i}{w} \left(\frac{\nu}{w} - \frac{\nu}{w} \right) \right\} = 0 \quad (3.36)$$

Portanto, o *winding number* no modelo SSH é:

$$\mathcal{W} = \begin{cases} 1, & \text{se } \nu < w \\ 0, & \text{se } \nu > w \end{cases} \quad (3.37)$$

Na Figura 3.3 são apresentadas as curvas que o vetor \vec{h}_k descreve no plano XY para diferentes parâmetros do modelo SSH.

Figura 3.3: Representação esquemática do winding number para diferentes parâmetros de hoppings ν e w .



Fonte: Autor, 2024

O *winding number* é um invariante topológico e serve para caracterizar uma fase topológica, de modo que, quando temos $\nu > w$, isto é, o acoplamento dentro da célula unitária é mais forte do que entre as células unitárias vizinhas temos $\mathcal{W} = 0$. Por outro lado, quando $\nu < w$ ou seja, quando o acoplamento entre as células unitárias vizinhas é mais forte temos $\mathcal{W} = 1$. Para entender melhor a diferença física entre esses resultados, vamos analisar o que ocorre nas extremidades do sistema, ou seja, o que acontece nas bordas. Para isso vamos analisar os limites totalmente dimerizados.

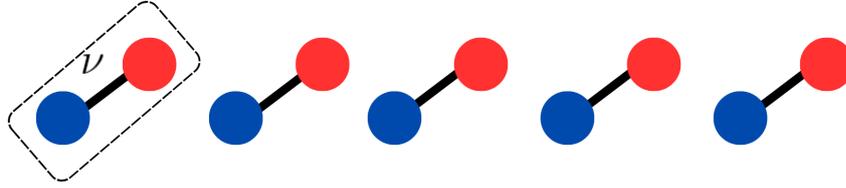
3.3.3 Limite totalmente dimerizado

O modelo SSH com bordas não é trivial, pois, uma vez que não há invariância translacional, não podemos usar a transformada de Fourier para diagonalizar o nosso Hamiltoniano. Sabendo disso, analisaremos dois casos extremos: $\nu \neq 0$ e $w = 0$, e $\nu = 0$ e $w \neq 0$, considerando uma cadeia com $N = 10$ sítios. Também, no limite totalmente dimerizado, podemos escolher um conjunto de autoenergias restritos a cada dímero, o que consistem nas superposições pares ($E = 1$) e ímpares ($E = -1$) dos dois sítios formando um dímero.

Primeiro caso: $\nu \neq 0$ e $w = 0$. Para esse caso temos a seguinte cadeia que é representada pela Figura 3.4.

As soluções devem ser a superposição do sítio A e do sítio B para cada dímero, o que corresponde a um estado isolante, uma vez que a cadeia está quebrada e nenhuma partícula

Figura 3.4: Representação esquemática de uma cadeia aberta no limite onde $\nu \neq 0$ e $w = 0$ do modelo SSH.



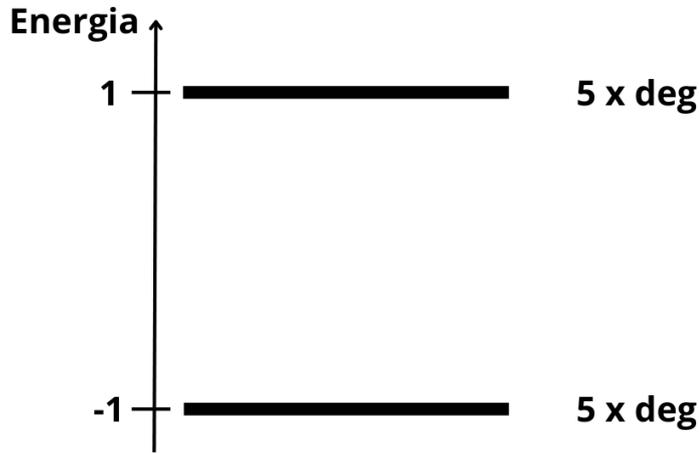
Fonte: Autor, 2024

pode "saltar" de uma extremidade à outra da cadeia. Para esse caso os autoestados de energia da cadeia SSH é dada pela Equação 3.38:

$$H(|n, A\rangle \pm |n, B\rangle) = \pm (|n, A\rangle \pm |n, B\rangle) \quad (3.38)$$

Para esse caso temos que os autoestados de energia é representada pela Figura 3.5.

Figura 3.5: Autoestados de Energia para o caso onde $\nu \neq 0$ e $w = 0$.



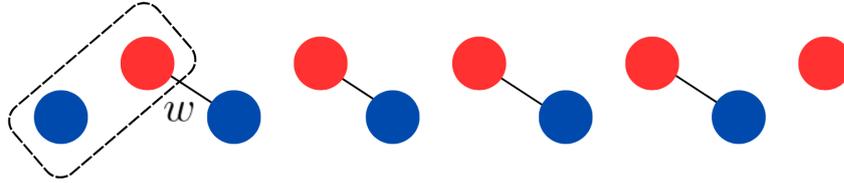
Fonte: Autor, 2024

Note que, para uma cadeia de 10 sítios, há 10 estados degenerados, onde temos 5 estados com energia $E = 1$ e 5 estados com energia $E = -1$. Essa degenerescência ocorre porque o sistema possui simetria quiral. Esse primeiro caso é o que denominamos caso trivial.

Segundo caso: $\nu = 0$ e $w \neq 0$. Neste caso, temos a seguinte cadeia representada pela Figura 3.6.

Nesse segundo caso temos alguns dímeros mas, como a cadeia é aberta, temos dois sítios únicos na extremidade da cadeia. Se esses dois sítios, um em cada extremidade da cadeia, carrega um elétron, a energia deverá ser zero, pois no modelo SSH, não há

Figura 3.6: Representação esquemática de uma cadeia aberta no limite onde $\nu = 0$ e $w \neq 0$ do modelo SSH.



Fonte: Autor, 2024

contribuição energética para que qualquer elétron seja mantido fixo em um sítio. Portanto, há dois estados de energia zero no sistema localizado nas bordas da cadeia [28]. Com isso, temos que os autoestados de energia é dado por:

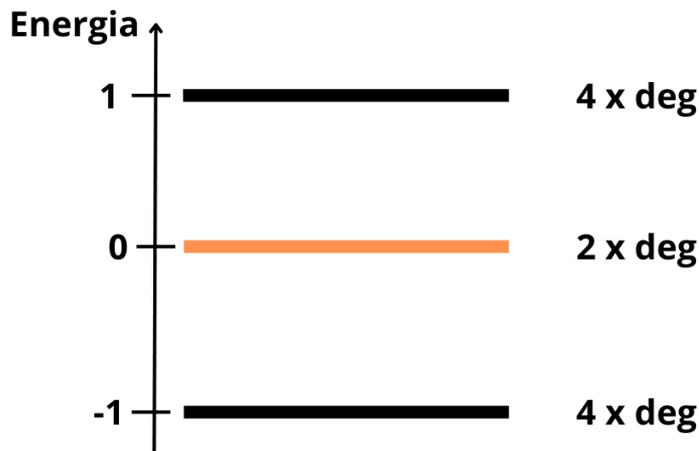
$$H(|n, B\rangle \pm |n, A\rangle) = \pm (|n, B\rangle \pm |n + 1, A\rangle) \quad (3.39)$$

para $n = 1, \dots, N - 1$. Note que, nesse segundo caso, a cadeia possui mais autoestados de energia do que no caso anterior. Isso ocorre porque cada extremidade da cadeia hospeda um único elétron com energia zero, ou seja,

$$H|1, A\rangle = H|N, B\rangle = 0 \quad (3.40)$$

Esses autoestados têm suporte em apenas um sítio. A sua energia é zero porque no modelo SSH não são permitidos potenciais *on-site*. Para esse caso temos que os autoestados de energia é representada pela Figura 3.7.

Figura 3.7: Autoestados de Energia para o caso onde $\nu = 0$ e $w \neq 0$.



Fonte: Autor, 2024

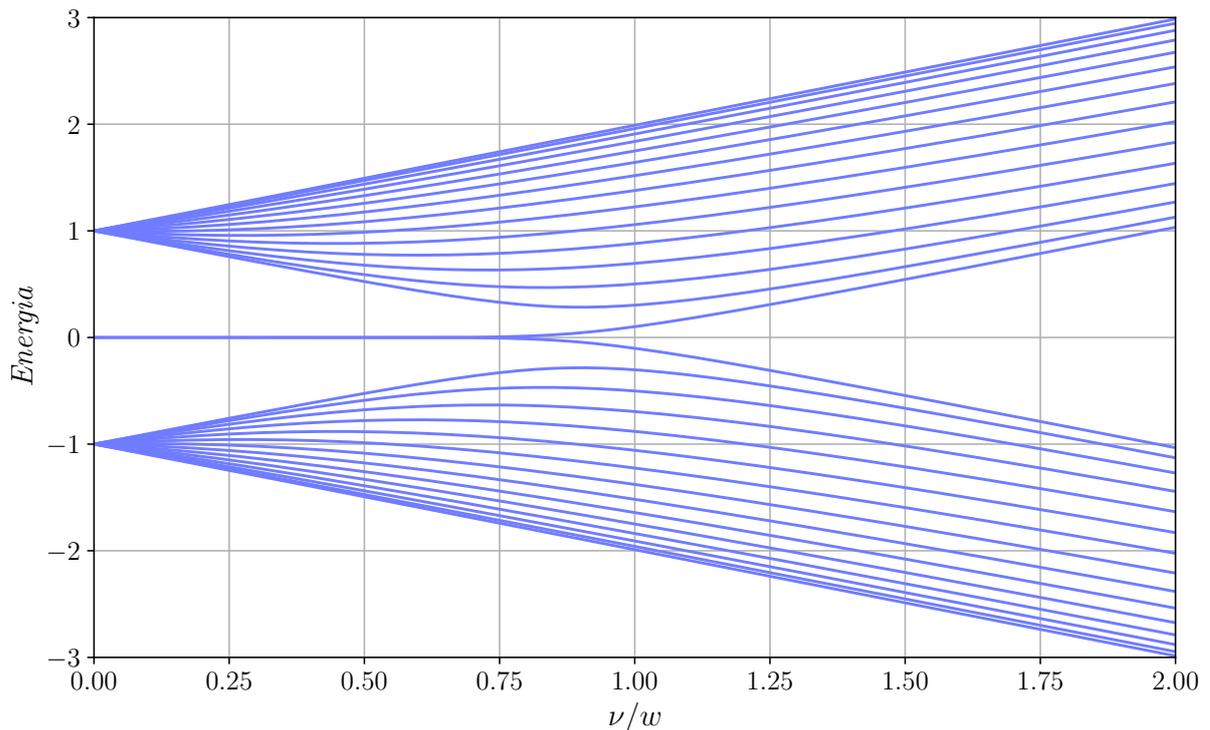
Para esse segundo caso, a cadeia ainda possui 10 sítios e há 10 estados degenerados,

só que dessa vez temos 4 estados com energia $E = 1$, 4 estados com energia $E = -1$ e 2 estados com energia zero. Esses 2 estados a mais é devido ao sistema possui duas bordas com energia zero. Esse segundo caso é o que denominamos de caso não trivial. Vamos agora analisar o que ocorre quando nos afastamos do limite totalmente dimerizado e analisar o espectro de energia no espaço real quando a cadeia é aberta.

3.3.4 Espectro de energia com open-boundary

Agora investigaremos o comportamento dos estados de borda ao nos afastarmos do limite completamente dimerizado. Especificamente, analisamos como o espectro de uma cadeia topológica aberta, com $\nu = 0$ e $w = 1$, composta por $N = 30$ sítios se altera à medida que aumentamos gradualmente a amplitude de *hopping* intracelular ν . Para obtermos o espectro de energia, vamos diagonalizar numericamente o Hamiltoniano semelhante ao da Equação 3.3 mas com 30 sítios. para essa diagonalização, usamos a linguagem de programação FORTRAN90 e a biblioteca LAPACK. Com isso, obtemos a Figura 3.8.

Figura 3.8: Espectro de energia da cadeia SSH versus ν/w ($w \equiv 1$) para $N = 30$ sítios.



Fonte: Autor, 2024

Quando a cadeia é aberta, a correspondência *bulk-boundary* implica na existência de estados de borda. E como podemos observar, para um número N par, uma das fases topológicas distintas, a não trivial $\nu < w$, está associada a um par de autoestados quase degenerados no meio do band gap, que é fortemente localizados nas duas extremidades da

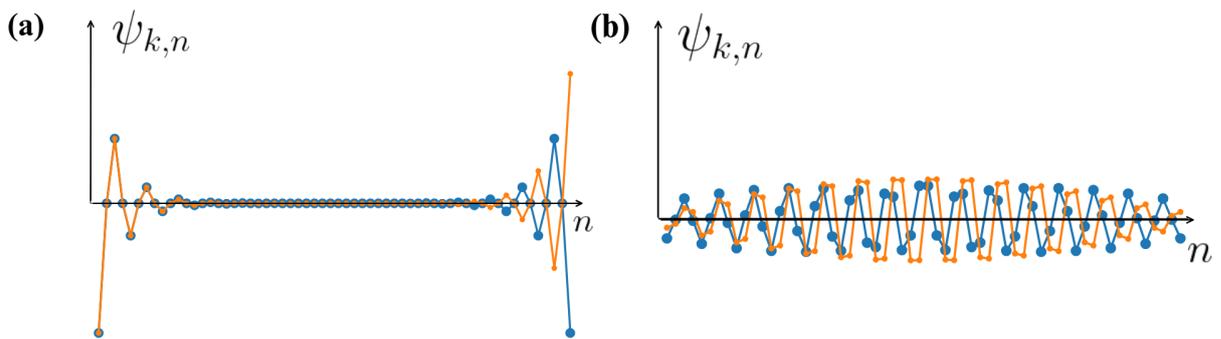
cadeia. Pela Figura 3.8(a), nota-se que existe 14 energias positivas e 14 energias negativas, e quando $\nu < 1$ temos duas energias zero, o que corresponde ao caso topológico. Quando $\nu > 1$, temos o caso trivial.

Após a diagonalização do nosso Hamiltoniano e obtermos o espectro de energia, vamos agora analisar as funções de onda correspondentes desses autoestados de energia.

3.3.5 Função de onda do estado de borda

A função de onda do estado de borda esta representado na Figura 3.9, onde $\psi_{k,n}$ é a função de onda, k é o sítio onde colocamos nossa função de onda e n é a posição do sítio onde estamos medindo.

Figura 3.9: Perfil espacial da função de onda para (a) estados de borda para $\nu/w = 1/2$, (b) descreve o mesmo par de modos quando $\nu/w = 2$, para o qual as propriedades de localização não são mais válidas.



Fonte: Autor, 2024

Na Figura 3.9(a) podemos observar que os estados de energia zero são exponencialmente localizados nas bordas da cadeia, conforme esperado no limite dimerizado. Esses estados são chamados de estados de borda porque estão localizados nas extremidades da cadeia. Além disso, nota-se que esses estados de borda permanecem como estados de energia zero somente enquanto $\nu < w$ [55]. Quando $\nu > w$ não há estados de energia zero e todos os estados são deslocalizados por toda a rede como podemos ver na Figura 3.9(b). Então, a existência desses estados de borda no caso $\nu < w$ difere do caso quando $\nu > w$ pois, caso eles tivessem as mesmas propriedades, os dois casos seriam isolantes. O caso em que o *winding number* é um, é conhecido como topologicamente não trivial. Enquanto quando o *winding number* é zero é o caso trivial. Esses dois casos estão relacionados por meio de uma transição de fase topológica que corresponde ao fechamento do *gap* de banda que dá origem aos estados de borda condutores. De fato, o invariante topológico \mathcal{W} nos informa o número de estados de borda na ponta da cadeia [56]. A proteção dos estados de borda decorre da topologia não trivial dos estados eletrônicos do *bulk*, uma vez que o cálculo do invariante topológico \mathcal{W} depende exclusivamente dos estados do *bulk*.

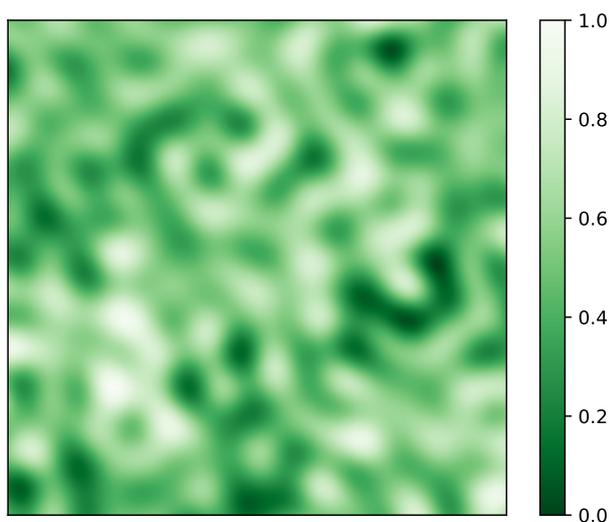
Capítulo 4

Speckles

4.1 Introdução

Na década de 60, quando lasers de ondas contínuas tornaram-se comercialmente disponíveis para a sociedade, os pesquisadores da época que trabalhavam com o laser observaram que, quando a luz do laser era refletida em uma superfície, como na parede do laboratório ou em um papel, surgia um padrão granular com alto contraste e em pequena escala no ponto de dispersão [57, 1, 58]. A origem dessa granularidade foi rapidamente reconhecida pelos cientistas que trabalhavam na época com pesquisa direcionada ao laser [1, 59, 60]. A esse padrão granular é dado o nome de padrão de speckle, que consiste em uma distribuição aleatória de intensidade da luz, com áreas claras e escuras que se alteram ao longo da distribuição conforme mostra a Figura 4.1.

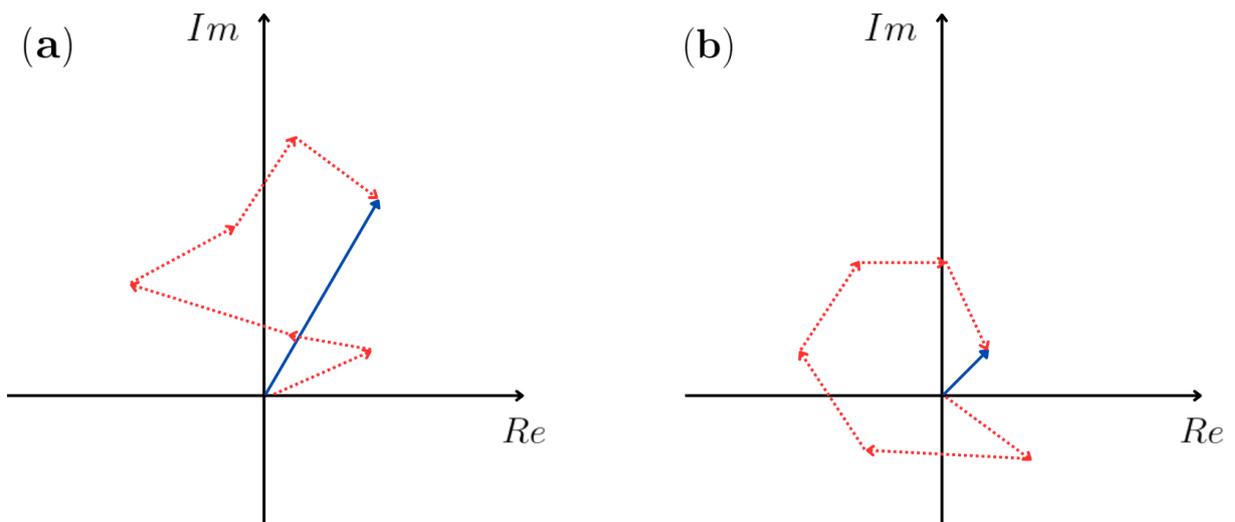
Figura 4.1: Padrão de speckle.



Fonte: Autor, 2024.

Essa distribuição é formada quando uma luz razoavelmente coerente é refletida em uma superfície rugosa ou, quando se propaga através de um meio com efeitos aleatórios. O speckle tem um papel importante em outros estudos onde a radiação é refletida ou transmitida por corpos que são rugosos na escala de comprimento de onda. Exemplos da importância do padrão de speckle incluem estudos sobre micro-ondas, raio-x e imagens médicas de ultrassom de órgãos do corpo humano [1, 61, 62, 63]. Portanto, considerando que a distribuição de speckles é resultado da interferência de uma infinidade de componentes complexos da luz, onde cada componente possui amplitude e fase aleatórias, é importante abordar as propriedades estatísticas dessa distribuição. É essencial salientar que, quando somamos essas componentes, obtemos uma caminhada aleatória, como podemos ver na Figura 4.2. A Figura 4.2 mostra a caminhada aleatória que resulta em (a) um fasor grande e (b) um pequeno, ambos indicados pela seta azul. Em ambos os casos, nenhuma contribuição específica predomina na soma, pois os comprimentos e as fases são aleatórias. Neste contexto, a intensidade da onda observada, que é a quantidade medida, corresponde ao quadrado da magnitude do fasor resultante.

Figura 4.2: Caminhada aleatória (a) construtiva e (b) destrutiva.



Fonte: Autor, 2024.

4.2 O formalismo de Speckle

Como já dito anteriormente, o padrão de speckle pode ser abordado como uma caminhada aleatória. Podemos observar na Figura 4.2 que temos vetores aleatórios sendo somados e um vetor resultante. A esses vetores damos o nome de fasor¹. Com isso, podemos explorar muito mais sobre a natureza e os eventos estocásticos² do fenômeno de

¹Um fasor ou vetor de fase, é um número complexo que representa uma função senoidal cuja amplitude e fase são invariantes no tempo[64, 65]. Com isso, podemos usar o fasor para representar uma onda.

²Eventos estocásticos são aqueles cujo estado é indeterminado, originando-se de eventos aleatórios. Em outras palavras, esse termo refere-se à propriedade de uma distribuição aleatória ser bem descrita[66].

speckle.

Para simplificar nossa compreensão da modelagem estatística da distribuição de speckle, consideraremos uma onda monocromática e polarizada. A essa onda, atribuiremos um sinal analítico[1, 67], que é dado por:

$$\mathbf{A}(x, y; t) = |A(x, y)| e^{i\phi} e^{2\pi i \omega t} \quad (4.1)$$

onde ω é a frequência óptica e t é o tempo. O produto $|A(x, y)| e^{i\phi}$ é a amplitude complexa do fasor que podemos chamar de $A(x, y)$. Logo o sinal analítico pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(x, y; t) = A(x, y) e^{2\pi i \omega t} \quad (4.2)$$

Com isso, o fenômeno speckle ocorre quando uma representação complexa resultante é formada pela sobreposição de inúmeros componentes complexos "elementares", onde cada componente esta em uma fase aleatória. Assim, em um único ponto no espaço-tempo, podemos escrever,

$$\mathbf{A}(x, y; t) = A e^{i\phi} = \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\theta_n} \quad (4.3)$$

onde \mathbf{a}_n é a n ésima componente fasorial complexa da soma, com comprimento a_n e fase θ_n .

Para facilitar nosso entendimento, vamos considerar o instante $t = 0$, onde a amplitude do fasor resultante A é a soma ponderada de diversas contribuições de $\frac{a_n(x,y)}{\sqrt{N}}$. Com isso, temos:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n e^{i\theta_n} \quad (4.4)$$

onde N representa o número de componentes fasoriais na caminhada aleatória. O fator $\frac{1}{\sqrt{N}}$ serve para preservar os segundos momentos finitos da soma, mesmo quando o número de componentes de fasores se aproximam do infinito [1].

Vamos agora abordar a estatística da soma fasorial.

4.2.1 Estatística da soma fasorial aleatória

Usando a fórmula de Euler, podemos reescrever a Equação 4.4 da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(x, y; t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n [\cos(\theta_n) + i \sin(\theta_n)] \quad (4.5)$$

Com isso, podemos separar essa soma numa parte real e numa parte imaginária da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \mathbb{R} = \text{Re}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos(\theta_n) \\ \mathbb{I} = \text{Im}\{\mathbf{A}\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin(\theta_n) \end{cases} \quad (4.6)$$

Com isso, podemos fazer algumas suposições:

1. As fases θ_m estão distribuídas uniformemente no intervalo $(-\pi, \pi)$, o que implica que todos os valores de fase são igualmente prováveis.
2. Para qualquer n , a_n e θ_n são estatisticamente independentes um do outro. Em outras palavras, o conhecimento da fase de uma componente de um fasor não nos fornece nenhuma informação sobre a amplitude do fasor, da mesma forma que o conhecimento da amplitude do fasor não nos transmite nenhuma informação sobre a fase.
3. A fase θ_n e a amplitude a_n são estatisticamente independentes de θ_m e a_m , desde que $n \neq m$.

No contexto de problemas envolvendo caminhadas aleatórias, essas condições são satisfeitas. Com isso em mente, passamos agora à análise dos primeiros e segundos momentos das componentes real e imaginária do fasor resultante.

4.2.2 Primeiro e segundo momentos de um fasor resultante

As três suposições que fizemos anteriormente tem algumas implicações sobre o primeiro momento e o segundo momento da parte real e imaginária do fasor resultante. O primeiro momento está associado a média ou valores esperados e o segundo momento está relacionado à variância [68, 69]. Com isso, partindo das suposições que fizemos, é fácil ver que o primeiro momento é,

$$\langle \mathbb{R} \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \theta_n \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\langle \sum_{n=1}^N a_n \cos \theta_n \right\rangle \quad (4.7)$$

Como a_n e θ_n são estatisticamente independentes, temos:

$$\langle \mathbb{R} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \langle a_n \rangle \langle \cos \theta_n \rangle = 0 \quad (4.8)$$

Uma vez que $\cos \theta_n$ está distribuída uniformemente no intervalo $(-\pi, \pi)$.

Analogamente, para a parte imaginária, temos,

$$\langle \mathbb{I} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \langle a_n \rangle \langle \sin \theta_n \rangle = 0 \quad (4.9)$$

Agora, para o segundo momento, vamos analisar o caso em que $m \neq n$,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbb{R}}^2 = \langle \mathbb{R}^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \rangle \langle \cos \theta_n \cos \theta_m \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n \rangle \langle a_m \rangle \langle \cos \theta_n \rangle \langle \cos \theta_m \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Uma vez que θ_n e θ_m está distribuída uniformemente no intervalo $(-\pi, \pi)$. Analogamente, para a parte imaginária, temos,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbb{I}}^2 = \langle \mathbb{I}^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \rangle \langle \sin \theta_n \sin \theta_m \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n \rangle \langle a_m \rangle \langle \sin \theta_n \rangle \langle \sin \theta_m \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Logo, para $n \neq m$ temos que,

$$\sigma_{\mathbb{R}}^2 = \sigma_{\mathbb{I}}^2 = 0 \tag{4.12}$$

Agora, para o caso em que $n = m$, temos,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbb{R}}^2 = \langle \mathbb{R}^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \rangle \langle \cos \theta_n \cos \theta_m \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \langle \cos^2 \theta_n \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_n \right\rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\langle a_n^2 \rangle}{2}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

De forma análoga, para a parte imaginária temos,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbb{I}}^2 = \langle \mathbb{I}^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle a_n a_m \rangle \langle \sin \theta_n \sin \theta_m \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \langle \sin^2 \theta_n \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_n \right\rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\langle a_n^2 \rangle}{2}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Logo, para o caso em que $m = n$, temos,

$$\sigma_{\mathbb{R}}^2 = \sigma_{\mathbb{I}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\langle a_n^2 \rangle}{2} \tag{4.15}$$

Assim, podemos observar que, o primeiro momento e o segundo momento das partes real e imaginária de um fasor resultante são idênticas. Já obtemos as informações sobre o primeiro e o segundo momentos. Vamos agora calcular a função de correlação entre as partes real e imaginária.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbb{R},\mathbb{I}} &= \langle \mathbb{R}\mathbb{I} \rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \theta_n \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \theta_n \right\rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n a_n \rangle \langle \cos \theta_n \sin \theta_n \rangle \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle a_n^2 \rangle \left\langle \frac{\sin 2\theta_n}{2} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

pois $\langle \sin 2\theta_n \rangle = 0$. Com isso, concluímos que não há correlação entre as partes real e imaginária de um fasor resultante, de acordo com as suposições que impomos.

Agora, o que ocorre quando $N \rightarrow \infty$? Nesse caso, as partes real e imaginária do fasor resultante serão constituídas por uma soma significativa das variáveis independentes θ_n e a_n , e com isso, podemos recorrer ao Teorema do Limite Central³. Portanto, ao recorrer ao Teorema do Limite Central, quando $N \rightarrow \infty$, as partes real e imaginária se aproximarão assintoticamente da distribuição normal [1].

Para entender melhor, vamos expressar as partes real e imaginária como funções de densidade de probabilidade normais.

³Na teoria das probabilidades, o teorema do limite central (TLC) estabelece que, sob certas condições, a distribuição de uma média amostral normalizada tende a uma distribuição normal padrão. Isso ocorre mesmo que as variáveis originais não sigam uma distribuição normal [70, 71, 72].

A função de densidade de probabilidade normal para a parte real é:

$$f(\mathbb{R}) = \frac{1}{\sigma_{\mathbb{R}}\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbb{R}}{\sigma_{\mathbb{R}}} \right)^2 \right] \quad (4.17)$$

Analogamente, para a parte imaginária, temos:

$$f(\mathbb{I}) = \frac{1}{\sigma_{\mathbb{I}}\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbb{I}}{\sigma_{\mathbb{I}}} \right)^2 \right] \quad (4.18)$$

Como já mostrado anteriormente, a média e variância das partes real e imaginária são idênticas. Com isso, vamos considerar a variância ou segundo momento como $\sigma^2 \equiv \sigma_{\mathbb{R}}^2 = \sigma_{\mathbb{I}}^2$. Logo a densidade de probabilidade conjunta das partes real e imaginária do fasor resultante é:

$$p_{\mathbb{R},\mathbb{I}}(\mathbb{R}, \mathbb{I}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{\mathbb{R}^2 + \mathbb{I}^2}{2\sigma^2} \right) \quad (4.19)$$

A densidade de probabilidade conjunta no plano complexo revela que os contornos da densidade de probabilidade são constantes, o que reflete a independência estatística entre as partes real e imaginária, como podemos observar na Figura 4.3. Através do gráfico, percebemos que a distribuição revela que a natureza dos contornos é circular, indicando que o fasor complexo resultante, A , é caracterizado como uma variável gaussiana circular.

Outro interesse são as estatísticas da fase ϕ e da amplitude A do fasor resultante. Para isso, vamos usar as regras da teoria da probabilidade para transformar as variáveis [1]. Com isso, vamos expressar A e ϕ em termos de \mathbb{R} e \mathbb{I} . Logo, temos que:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\mathbb{R}^2 + \mathbb{I}^2} \\ \phi &= \arctan \left(\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{R}} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= A \cos \phi \\ \mathbb{I} &= A \sin \phi \end{aligned} \quad (4.21)$$

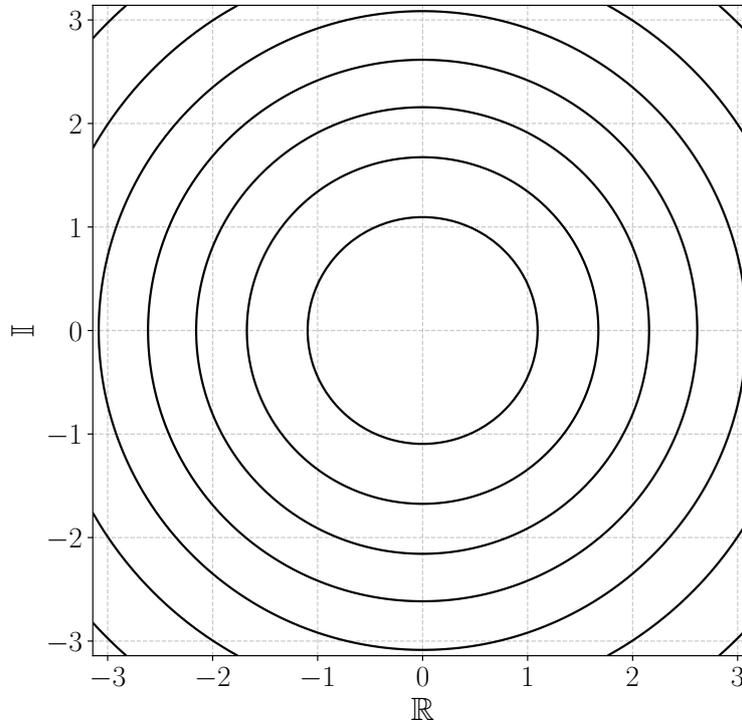
Com isso, podemos escrever a densidade de probabilidade conjunta de A e ϕ , que é:

$$p_{A,\phi}(A, \phi) = p_{\mathbb{R},\mathbb{I}}(A \cos \phi, A \sin \phi) \|J\| \quad (4.22)$$

onde $\|J\|$ é o jacobiano das transformações entre as duas variáveis que é dada por:

$$\|J\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial A} & \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \mathbb{I}}{\partial A} & \frac{\partial \mathbb{I}}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial A} \frac{\partial \mathbb{I}}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \phi} \frac{\partial \mathbb{I}}{\partial A} = A \quad (4.23)$$

Figura 4.3: Gráfico de contorno representando a densidade de probabilidade constante para uma variável aleatória gaussiana complexa circular.



Fonte: Autor, 2024.

Com isso, temos que a densidade de probabilidade conjunta, após a transformação de variáveis, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$p_{A,\phi}(A, \phi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.24)$$

Com $A \geq 0$ e $(-\pi \leq \phi < \pi)$ e zero em outros casos. Vamos agora encontrar as probabilidades individuais de A e ϕ individualmente. Primeiramente, vamos encontrar a amplitude A .

$$p_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{A,\phi}(A, \phi) d\phi = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.25)$$

Com isso, temos que,

$$p_A(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.26)$$

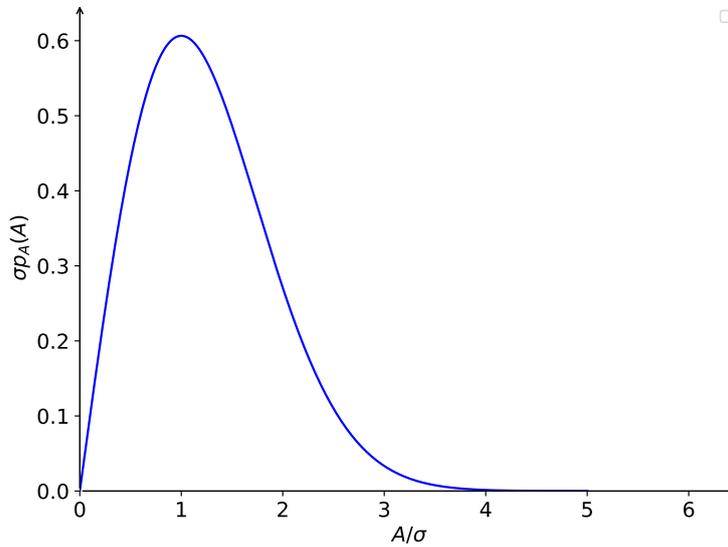
onde $A \geq 0$. A Equação 4.26 representa a distribuição Rayleigh, que modela o fasor resultante cujas componentes são independentes. Sua distribuição é ilustrada na Figura

4.4. É importante notar que essa distribuição é assimétrica e não negativa, concentrando-se principalmente em valores baixos de amplitude e diminuindo à medida que a amplitude aumenta. Já para a distribuição e probabilidade da fase, podemos encontrar integrando a Equação 4.23 em relação a amplitude:

$$\begin{aligned}
 p_\phi(\phi) &= \int_0^\infty p_{A,\phi}(A, \phi) dA \\
 &= \int_0^\infty \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) dA \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) AdA \\
 &= \frac{1}{2\pi}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Logo, percebe-se que a função densidade conjunta $p_{A,\phi}(A, \phi)$ pode ser fatorada em um produto de $p_A(A)$ e $p_\phi(\phi)$ o que mostra que A e ϕ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Com isso, conclui-se que o conhecimento da fase não nos fornece nenhuma informação sobre a amplitude do fasor da mesma forma que o conhecimento da amplitude não nos diz nada sobre a fase.

Figura 4.4: Função densidade de probabilidade Rayleigh

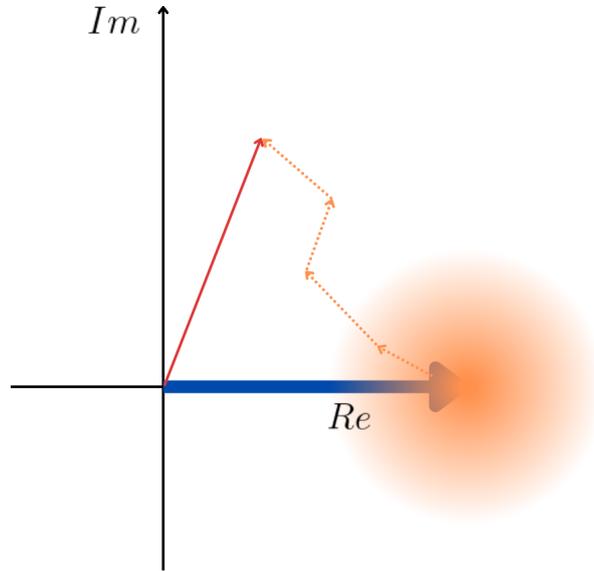


Fonte: Autor, 2024.

4.2.3 Soma fasorial aleatória com um fasor constante

Em certas situações, o fasor resultante é a soma de um fasor constante e uma soma fasorial aleatória, como podemos ver na Figura 4.5.

Figura 4.5: Caminhada aleatória com um fasor constante(azul), e várias contribuições de fasores aleatórios.



Fonte: Autor, 2024.

O uso dessa configuração se mostra especialmente proveitosa ao examinar fenômenos nos quais a contribuição do fasor constante é de grande importância. Dentro deste contexto, visando simplificar sem comprometer a generalidade, pressupomos que o fasor constante está totalmente alinhado ao longo do eixo real. Assim, as componentes real e imaginária do fasor resultante podem ser representadas como:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= A_0 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \cos \theta_n \\ \mathbb{I} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \sin \theta_n\end{aligned}\tag{4.28}$$

onde A_0 representa o fasor constante. A presença do fasor constante adiciona uma média conhecida na parte real do fasor resultante. Para um grande número de etapas na soma fasorial, $N \rightarrow \infty$, as estatísticas das partes real e imaginária do fasor resultante se aproxima assintoticamente da distribuição normal, de forma que a função de densidade de probabilidade conjunta é dada por:

$$p_{\mathbb{R},\mathbb{I}}(\mathbb{R}, \mathbb{I}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(\mathbb{R} - A_0)^2 + \mathbb{I}^2}{2\sigma^2}\right)\tag{4.29}$$

Usando as transformações de variáveis obtidas anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned}
p_{A,\phi}(A, \phi) &= p_{\mathbb{R},\mathbb{I}}(A \cos \phi, A \sin \phi) \|J\| \\
&= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(A \cos \phi - A_0)^2 + (A \sin \phi)^2}{2\sigma^2} \right] \\
&= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp \left[\frac{(A \cos \phi)^2 - 2AA_0 \cos \phi + (A \sin \phi)^2}{2\sigma^2} \right] \\
&= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp \left[\frac{A^2 - 2AA_0 \cos \phi + A_0^2}{2\sigma^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Logo, a função de densidade de probabilidade conjunta é:

$$p_{A,\phi}(A, \phi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp \left[\frac{A^2 - 2AA_0 \cos \phi + A_0^2}{2\sigma^2} \right] \tag{4.31}$$

que é válido para $A \geq 0$ e $(-\pi \leq \phi < \pi)$. Com isso, podemos encontrar a estatística marginal de A e ϕ . Primeiramente, vamos calcular $p_A(A)$.

$$\begin{aligned}
p_A(A) &= \int_{-\pi}^{\pi} p_{A,\phi}(A, \phi) d\phi \\
&= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(-\frac{A^2 + 2A_0A \cos \phi + A_0^2}{2\sigma^2} \right) d\phi \\
&= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left(\frac{2AA_0 \cos \phi}{2\sigma^2} \right) d\phi
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Vamos usar a seguinte identidade:

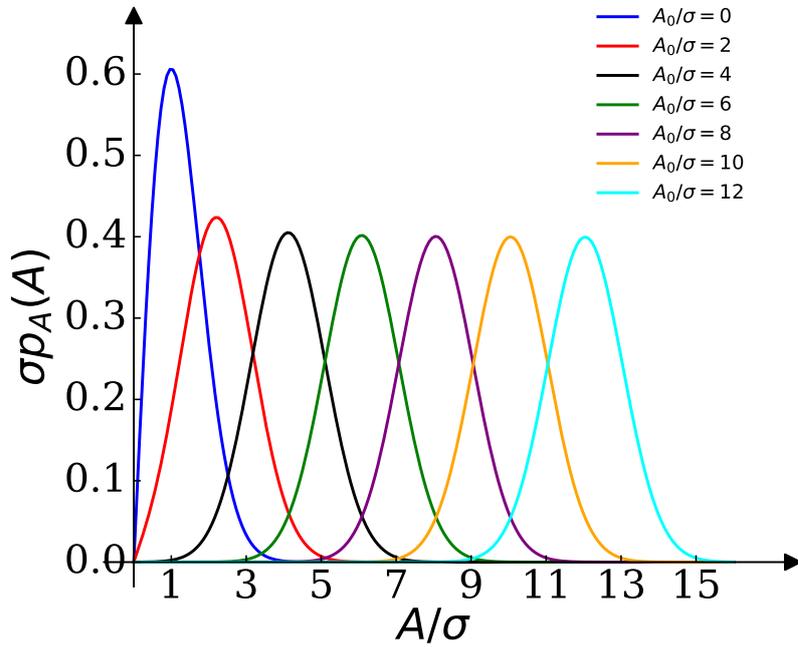
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{bcost} dt = 2\pi I_0(b) \tag{4.33}$$

onde $I_0(b)$ é a função de Bessel modificada do primeiro tipo. Para o nosso caso, $b = \frac{AA_0}{\sigma^2}$. Logo, temos que a função densidade de A é:

$$p_A(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{A^2 + A_0^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{AA_0}{\sigma^2} \right) \tag{4.34}$$

válido para $A \geq 0$. A Equação 4.34 é conhecida como densidade Rician, e o gráfico para vários valores esta mostrada na Figura 4.6. Observe que, quando $A_0/\sigma = 0$, a densidade Rician é igual a densidade Rayleigh. Isso implica que, sem a presença do componente constante A_0 , nossa distribuição se assemelha à bem conhecida distribuição de Rayleigh. Esta última é frequentemente empregada para descrever situações em que não há contribuição constante no sinal. Note que, à medida que A_0/σ cresce, a densidade Rician vai se tornando mais simétrica, que vai se aproximando de uma distribuição normal, o que indica que o fasor constante A_0 influencia na distribuição.

Observe que, à medida que A_0/σ aumenta, a densidade de Rician se torna mais simétrica, aproximando-se de uma distribuição normal. Isso sugere que a componente constante A_0 tem uma influência significativa na distribuição.

Figura 4.6: Função de densidade Rician para vários valores de A_0/σ .

Fonte: Autor, 2024.

Vamos agora resolver a densidade de probabilidade da fase $p_\phi(\phi)$.

$$p_\phi(\phi) = \int_0^\infty p_{A,\phi}(A, \phi) dA = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{A^2 - 2A_0 A \cos\phi}{2\sigma^2}\right) A dA \quad (4.35)$$

Vamos agora focar apenas na integral. Para resolver essa integral, vamos usar $A_0^2 \cos^2\phi - A_0^2 \cos^2\phi$ na integral, que é a soma zero. Com isso, temos que:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp\left(-\frac{A^2 - 2AA_0 \cos\phi}{2\sigma^2}\right) dA \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{A^2 - 2AA_0 \cos\phi + A_0^2 \cos^2\phi - A_0^2 \cos^2\phi}{2\sigma^2}\right) dA \\ &= \exp\left(\frac{A_0^2 \cos^2\phi}{2\sigma^2}\right) \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{A - A_0 \cos\phi}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] dA \end{aligned}$$

chamando $u = A - A_0 \cos\phi \rightarrow du = dA$. Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{A - A_0 \cos \phi}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] dA \\
&= \int_0^\infty (u + A_0 \cos \phi) \exp \left[- \left(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] du \\
&= \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] u du + A_0 \cos \phi \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] du
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Vamos usar as seguintes relações de integrais:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2n} \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] dx &= \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2} \right)^{2n+1} \\
\int_0^\infty x^{2n+1} \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] dx &= \frac{n!}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^{2(n+1)}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Considerando $n = 0$ temos que:

$$\int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{A - A_0 \cos \phi}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right] A dA = \sigma^2 + A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \cos \phi \tag{4.38}$$

Com isso, temos que a nossa função de densidade de probabilidade da fase é:

$$p_\phi(\phi) = \frac{\exp \left(-\frac{A_0^2}{2\sigma^2} \right)}{2\pi} \exp \left(\frac{A_0^2 \cos^2 \phi}{2\sigma^2} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A_0}{\sigma} \cos \phi \right) \tag{4.39}$$

que é válido para $(-\pi \leq \phi < \pi)$. conforme aumenta A_0/σ , a distribuição da fase torna-se mais concentrada em torno do fasor constante, o que implica que $\phi \ll 1$. Quando a razão A_0/σ é substancialmente alta, a distribuição da fase tende a se assemelhar a uma distribuição gaussiana. Esse processo de transição para uma distribuição gaussiana sugere que em situações onde a contribuição do componente constante é muito maior do que a variabilidade do sinal, a fase do fasor resultante segue uma distribuição gaussiana. Logo, para $A_0/\sigma \gg 1$ Vamos usar as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A_0}{\sigma} \cos \phi &= 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A_0}{\sigma} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A_0}{\sigma} \\
\exp \left(\frac{A_0^2 \cos^2 \phi}{2\sigma^2} \right) &\approx \exp \left(\frac{A_0^2}{2\sigma^2} (1 - \phi^2) \right) = \exp \left(\frac{A_0^2}{2\sigma^2} \right) \exp \left(-\frac{A_0^2 \phi^2}{2\sigma^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Com essas aproximações temos que a densidade de probabilidade da fase é:

$$p_\phi(\phi) \approx \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{A_0^2 \phi^2}{2\sigma^2} \right) \tag{4.41}$$

Com isso, temos que a média dessa distribuição é zero, o que indica que a fase do sinal não possui nenhum desvio em relação a componente constante do fasor. E o desvio padrão é A_0/σ .

Com isso tudo, como associar com uma onda luminosa? para isso vamos definir o conceito de intensidade luminosa.

Após essa discussão sobre o formalismo de speckle, vamos agora abordar um pouco sobre a intensidade de uma luz coerente.

4.2.4 Sinal analítico como intensidade

Podemos definir a intensidade de uma luz coerente da seguinte forma:

$$I(x, y; t) = |A(x, y; t)|^2 \quad (4.42)$$

ou seja, podemos representar a intensidade de uma luz coerente como o quadrado da magnitude do sinal analítico, que é proveniente da estatística de speckle. Como a luz apresenta um comportamento aleatório, a intensidade em um ponto específico também se torna uma variável aleatória. Para entender melhor essa aleatoriedade, introduzimos o conceito de média de ensemble. Isso envolve calcular a média ao longo de muitas repetições da função aleatória. Ao observar o padrão de speckle em um ponto ao longo do tempo, cada medição corresponde a um instante específico. A média de ensemble é a média dessas diferentes realizações. Esse processo permite obter uma representação mais estável do comportamento médio da luz coerente em um ponto específico, levando em conta sua aleatoriedade. Podemos representar esse processo da seguinte forma:

$$I(x, y; t) = \langle |A(x, y; t)|^2 \rangle \quad (4.43)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ representa a média de ensemble. Resolvendo a Equação 4.43 temos que,

$$\begin{aligned} I(x, y; t) &= \langle |A(x, y; t)|^2 \rangle \\ &= \langle |A(x, y)e^{2\pi i \omega t}|^2 \rangle \\ &= \langle |A(x, y)|^2 |e^{2\pi i \omega t}|^2 \rangle \\ &= \langle |A(x, y)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.44)$$

Com isso temos que a intensidade é representada por:

$$I(x, y; t) = \langle |A(x, y)|^2 \rangle \quad (4.45)$$

Com isso, vemos que a intensidade do padrão de speckle é determinada pela magnitude ao quadrado da amplitude do fasor resultante.

Para facilitar nosso entendimento, vamos considerar a luz estacionária, ou seja, a sua intensidade média não varia ao decorrer do tempo, o que nos fornece um processo

estatisticamente estacionário. Se o processo for não estacionário a intensidade média varia ao longo tempo.

Essa discussão sobre o formalismo, e de como associar o speckle com a intensidade, é necessária e suficiente para podermos discutir sobre a estatística de primeira ordem.

4.3 Estatística de Primeira Ordem

Vamos agora considerar as propriedades estatística de primeira ordem do padrão de speckle. O nome estatística de primeira ordem é porque estamos considerando apenas as propriedades num único ponto no espaço [1]. Como já discutido, o speckle é oriundo da adição de uma série de várias contribuições complexas de fases aleatórias e de amplitudes complexas. Assim, os resultados obtidos a partir dos estudos do formalismo de speckle e as estatísticas obtidas até aqui, serão de grande importância no desenvolvimento dessa seção.

Como I , a intensidade, é uma variável aleatória e ,que tem uma relação com a amplitude do fasor resultante $|A|$, Vamos fazer uma transformação monótona da variável aleatória, que é dada por:

$$I = f(A) = A^2 \quad (4.46)$$

Tendo conhecimento da função de probabilidade $p_A(A)$, podemos encontrar a função de probabilidade correspondente $p_I(I)$. Como I é uma variável aleatória e que tem uma relação com a amplitude do fasor resultante A , que também é uma variável aleatória, vamos fazer uma transformação monótona da variável aleatória, que é dada por:

$$p_I(I) = p_A(\sqrt{I}) \left| \frac{dA}{dI} \right| = \frac{1}{2\sqrt{I}} p_A(\sqrt{I}) \quad (4.47)$$

A Equação 4.47 nos permite descrever a função densidade de probabilidade da intensidade para cada caso em que a função de densidade de probabilidade da amplitude A é conhecida. Para um grande número de contribuições dos fasores aleatórios, onde cada fase está distribuída no intervalo $(-\pi, \pi)$, a função de densidade de probabilidade da amplitude tem uma distribuição do tipo Rayleigh, como já abordamos. Logo usando a transformação dada pela Equação 4.47, obtemos:

$$p_I(I) = \frac{\sqrt{I}}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{I}} = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) \quad (4.48)$$

para $I \geq 0$, vemos que a intensidade é distribuída de acordo com uma densidade de probabilidade exponencial. Podemos representar essa distribuição em termos do primeiro momento, que é dada pela seguinte integral:

$$\langle I \rangle = \int_0^\infty I p_I(I) dI = \int_0^\infty \frac{I}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) dI \quad (4.49)$$

Para resolver essa integral, faremos as seguintes mudanças de variáveis; seja $u = -\frac{I}{2\sigma^2} \rightarrow du = -\frac{dI}{2\sigma^2}$, Com isso, temos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{I}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) dI = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} \exp(u)udu$$

Resolvendo a integral por partes, obtemos:

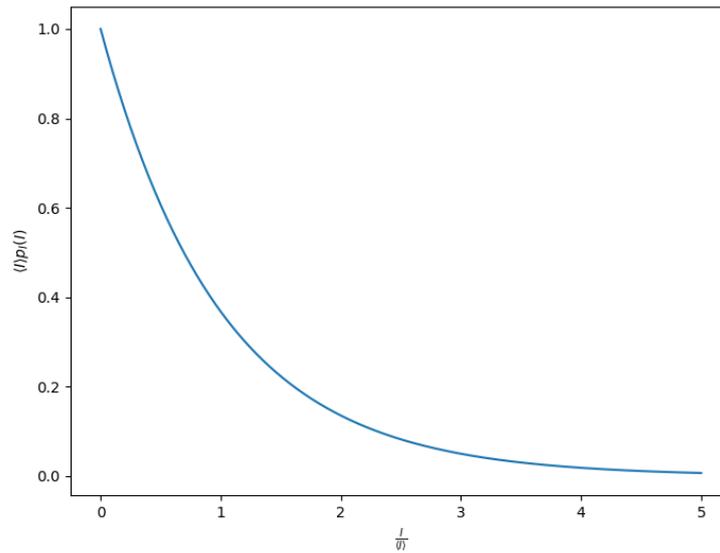
$$\langle I \rangle = \int_0^{\infty} I p_I(I) dI = 2\sigma^2 \quad (4.50)$$

Logo, temos que a função de densidade de probabilidade da intensidade, escrita em termos do primeiro momento é:

$$p_I(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (4.51)$$

A Figura 4.7 mostra como se comporta essa distribuição.

Figura 4.7: Função de densidade exponencial negativa.



Fonte: Autor, 2024.

Quando o speckle tem essa distribuição de probabilidade, nos referimos a ela como speckle totalmente desenvolvido, o que nos diz que há uma uniformidade na distribuição de intensidade e que a complexidade do padrão é plenamente manifestada. Uma outra quantidade que vai ser importante é o contraste, que é uma medida que fornece informações sobre a variabilidade da intensidade dentro do padrão de speckle, e é dado por:

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \quad (4.52)$$

onde σ_I é o segundo momento e $\langle I \rangle$ é a intensidade média. Essa grandeza nos permite avaliar a intensidade das variações em um padrão de speckle em relação à sua

intensidade média, o que nos dá a indicação do quão significativas são as variações da intensidade o que nos fornece informações sobre o meio ao qual estamos estudando.

Para speckle totalmente desenvolvido, temos que:

$$\begin{aligned}\sigma_I^2 &= \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 \\ &= 2 \langle I \rangle^2 - \langle I \rangle^2 \\ &= \langle I \rangle^2 \\ \Rightarrow \sigma_I &= \langle I \rangle\end{aligned}\tag{4.53}$$

Logo, para a distribuição exponencial, o contraste é:

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} = \frac{\langle I \rangle}{\langle I \rangle} = 1\tag{4.54}$$

Quando $C = 1$, ocorre uma variação significativa na intensidade do padrão de speckle, indicando que as flutuações de intensidade são tão intensas quanto a própria intensidade média.

Assim, apresentamos o tratamento estatístico do formalismo de speckle, destacando que a intensidade de um padrão de speckle totalmente desenvolvido segue uma distribuição de probabilidade exponencial negativa. Como a distribuição exponencial descreve o comportamento da amplitude de speckle totalmente desenvolvida, ela é frequentemente referida como speckle de Rayleigh. No entanto, padrões de speckle que não seguem essa distribuição são chamados de não-Rayleigh, como no caso em que um fasor constante é adicionado à soma fasorial.

Entretanto, ao considerar o tratamento estatístico do speckle de luz, surge a seguinte pergunta: como descrever essa estatística para um sistema quântico topológico? É o que vamos elaborar no Capítulo 5.

Capítulo 5

Speckles Topológicos

Como já abordado no Capítulo 4, os speckles resultam da interferência entre muitas componentes de ondas, mas o que pode parecer um ruído sem sentido, pode muitas vezes estar associada a um padrão universal bem definido. Um exemplo onde a partir do padrão de speckle torna a investigação do sistema relativamente mais simples é o trabalho da referência [11], onde os autores demonstraram que o emaranhamento devido a simetrização de bósons e férmions idênticos em uma rede, está impresso no comportamento speckle de sua função de onda evolutiva no tempo na forma de estatística não-rayleigh. Baseado no trabalho [11], nesse capítulo vamos direcionar nosso estudo e atenção para a perspectiva de identificar estados de bordas topológicos analisando o padrão de speckle. Para isso, vamos considerar uma cadeia topológica do tipo SSH unidimensional com N sítios, e com condições de contorno aberta, que segue um padrão dimerizado de acoplamentos fortes e fracos, cujo Hamiltoniano é dado por:

$$H = \sum_{n=1}^N \epsilon_n |n\rangle\langle n| + \sum_{n=1}^{N-1} J_{n,n+1} (|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|) \quad (5.1)$$

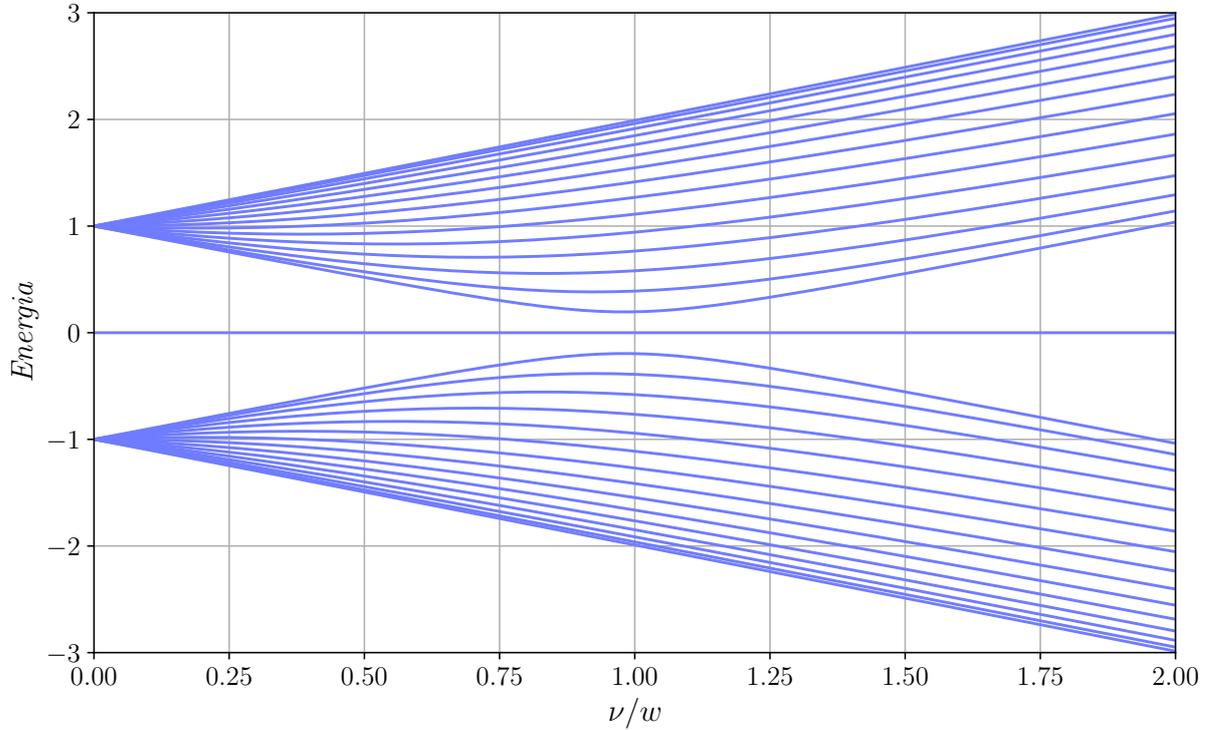
onde ϵ_n é a energia *on-site*, $|n\rangle$ denota uma única partícula ocupando o n -ésimo sítio e $J_{n,n+1}$ é o *hopping* entre os sítios vizinhos. Vamos definir um padrão dimerizado de *hopping* tal que:

$$\begin{cases} J_{n,n+1} = \nu, & \text{para } n \text{ ímpar} \\ J_{n,n+1} = w, & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (5.2)$$

Como já visto no Capítulo 3, quando temos condições de contorno periódicas, o sistema tem duas fases isolantes (*gapped*), uma quando $\nu < w$ e a outra quando $\nu > w$ que são topologicamente equivalentes mas que possuem *winding number* distintos. Quando $\nu = w$ temos a fase metálica, que é quando ocorre transição de fase topológica. Quando a cadeia é aberta, a correspondência *bulk-boundary* implica na existência de estados de borda. E de fato, para um número N par, uma das fases topológicas distintas, a não trivial $\nu < w$, está associada a um par de autoestados quase degenerados no meio do *band gap*, que é fortemente localizados nas duas extremidades da cadeia, como podemos ver

no espectro de energia mostrada na Figura 3.8. também é possível notar que o gap de energia $\delta E_e = E_{e+} - E_{e-}$ fecha rapidamente a medida que $\sim \left(\frac{\nu}{w}\right)^{\frac{N}{2}+1}$. Agora, quando N é ímpar não ocorre a transição de fase topológica como podemos ver na Figura 5.1.

Figura 5.1: Espectro de energia da cadeia SSH versus ν/w ($w \equiv 1$) para $N = 31$ sítios.



Fonte: Autor, 2024.

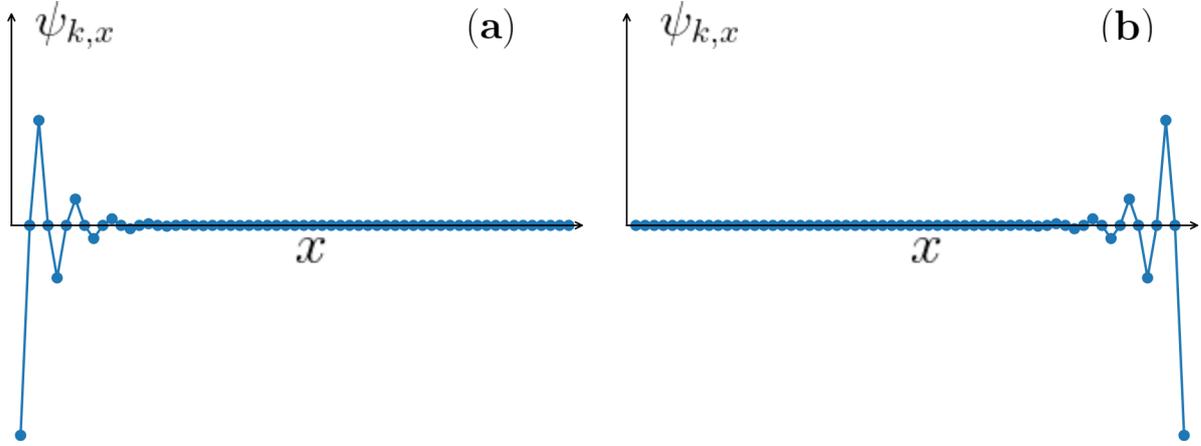
Entretanto, podemos observar que mesmo sem uma transição topológica ainda emerge um único estado de borda no sistema a depender da escolha de $\nu < w$ ou $\nu > w$, como podemos ver na Figura 5.2.

Com isso, vamos analisar quando temos a fase não trivial em dois casos, o primeiro quando temos um número ímpar e o segundo quando tivemos um número par de sítios. Inicialmente, vamos considerar $\epsilon_n = \epsilon = 0$, ou seja, a cadeia é homogênea.

5.1 Estado unicamente localizado

Um fato a se observar é que quando N é ímpar não há uma transição de fase topológica, entretanto, emerge um único estado de borda de energia zero, que é fortemente localizado em uma das extremidades da cadeia de acordo com $\nu < w$ ou $\nu > w$. Para o caso ímpar, o estado de borda $\psi_{e,x}$ correspondente ao estado de energia zero, cuja demonstração está no Apêndice A, que foi baseado no artigo [73], é dado analiticamente pela seguinte expressão:

Figura 5.2: Perfil espacial da função de onda para o estado de borda único no meio da banda fortemente localizado em ambas as extremidades da cadeia para (a) $\nu/w = 1/2$ e (b) estado de borda para $\nu/w = 2$.



Fonte: Autor, 2024.

$$\psi_{e,2m-1} = (-1)^m \nu^{m-1} \sqrt{\frac{1-\nu^2}{1-\nu^{N+1}}} \quad (5.3)$$

com $m = 1, \dots, \frac{N+1}{2}$ e $\nu \in (0, 1)$. Note que só temos componentes nos sítios ímpares. Com isso, temos que a geração de speckle é causada pela evolução unitária do sistema baseada no Hamiltoniano. Para isso, dada uma entrada do tipo delta, ou seja, $\psi(t=0) = |x_0\rangle$ e sabendo que o operador evolução temporal é $U = e^{iHt}$, temos que:

$$\begin{aligned} \Psi_x(t) &= \langle x_0 | U | x \rangle \\ &= \langle x_0 | e^{-iHt} | k \rangle \langle k | x \rangle \\ &= \langle x_0 | \sum_k e^{-iE_k t} | k \rangle \langle k | x \rangle \\ &= \sum_k e^{-iE_k t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | x \rangle \\ &= \sum_k e^{-iE_k t} \langle k | x_0 \rangle \langle k | x \rangle \end{aligned}$$

sabendo que $\langle k | x_0 \rangle = \psi_{k,x_0}$ obtemos,

$$\Psi_x(t) = \sum_k e^{-iE_k t} \psi_{k,x_0} \psi_{k,x} \quad (5.4)$$

Como nas bordas do sistema a energia é nula $E = 0$, então nossa função de onda num sítio x após um certo tempo t é:

$$\Psi_x(t) = \psi_{e,x_0}\psi_{e,x} + \sum_{k \neq e} \psi_{k,x_0}\psi_{k,x} e^{-iE_k t} \quad (5.5)$$

onde E_k são autovalores $M = N - 1$ pertencentes às duas bandas contínuas, o segundo termo da Equação 5.5 pode ser considerado como uma soma fasorial aleatória para intervalos de tempo $\Delta t \gg 1/w$, ou seja, para passo no tempo relativamente alto, é como se as fases dependentes do tempo $\phi_k = E_k t \pmod{2\pi}$ fossem fases aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo $(0, 2\pi)$ [11]. As amplitudes $C_k = C_k(x_0, x) \equiv \psi_{k,x_0}\psi_{k,x}$ são obtidas a partir de M modos deslocalizados $\psi_{k,x} \sim 1/\sqrt{M}$ e, portanto, $C_k \sim 1/\sqrt{M}$. Todas as amplitudes são assumidas reais sem perda de generalidade.

Na ausência de desordem *on-site*, o Hamiltoniano SSH preserva a simetria quiral, o que implica $E_k = -E_{-k}$ e $C_k = \pm C_{-k}$. Então, considerando valores ímpares de x_0 e x para que C_e não desapareça trivialmente, a Equação 5.5 se apresenta da seguinte forma:

$$\Psi_x(t) = C_e + \sum_{k'} 2C_{k'} \cos(\phi_{k'}) \quad (5.6)$$

com a soma sobre k' percorrendo metade dos M modos. Recorrendo ao teorema do limite central, argumentamos que muitas realizações de Ψ_x (através da evolução temporal truncada) resultam em um fasor constante C_e perturbado por um ruído gaussiano com média zero e variância dada por:

$$\sigma^2 = 2 \sum_{k'} C_{k'}^2 \quad (5.7)$$

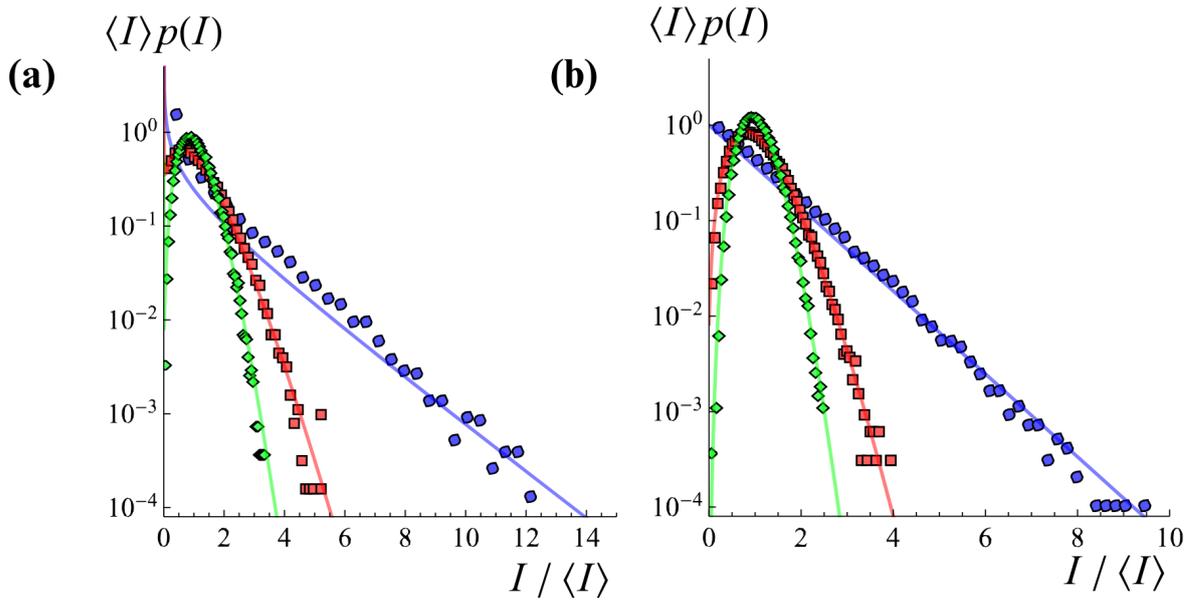
Assim, Ψ_x é também normalmente distribuído com uma média deslocada C_e . Por sua vez, a amplitude $A = |\Psi_x|$ obedece a uma distribuição normal dobrada. Nesse cenário a intensidade $I = A^2/\sigma^2$ é distribuída de acordo com a distribuição qui-quadrado não central:

$$p_I(I; \mu, \lambda) = \frac{1}{2} e^{-(I+\lambda)} \left(\frac{I}{\lambda}\right)^{\frac{\mu}{4}-\frac{1}{2}} \mathcal{I}_{\frac{\mu}{2}-1}(\sqrt{\lambda I}) \quad (5.8)$$

onde μ é o grau de liberdade, $\lambda = (C_e/\sigma)^2$ é o parâmetro de não centralidade e $\mathcal{I}_\alpha(z)$ é a função de Bessel modificada de primeira ordem. No caso sem desordem $\mu = 1$. A distribuição qui-quadrado não central e os dados numéricos são mostrados na Figura 5.3.

Quando há desordem *on-site* no sistema, a simetria quiral é quebrada. Para analisar o sistema com desordem, vamos considerar que ϵ_x/w é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[-0.01, 0.01]$. Como a desordem é muito fraca, não ocorrem mudanças substanciais no espectro de energia. A energia associada ao estado de borda E_e irá desviar ligeiramente do centro da banda, com $\psi_{e,x}(C_e)$ mantendo sua forma

Figura 5.3: Os gráficos (a) e (b) mostram distribuições de intensidade de speckle para os casos sem desordem e com desordem (realização única), respectivamente, considerando $x_0 = 1$, $x = 3$ e $N = 31$ sítios. Os resultados numéricos exatos são obtidos para $\nu/w = 1$ (círculos azuis), $\nu/w = 0.8$ (quadrados vermelhos) e $\nu/w = 0.6$ (losangos verdes) realizando a evolução até o tempo $5 \times 10^6 w^{-1}$ em etapas de $100 w^{-1}$. As linhas sólidas representam as distribuições qui-quadrado não centrais correspondentes a Equação 5.8. Note que no ponto crítico metálico $\nu/w = 1$ a distribuição se aproxima do qui-quadrado padrão (exponencial) tanto na ausência como na presença da desordem.



Fonte: Retirada da referência[74].

como na Equação 5.3. Com isso, temos que a evolução temporal no caso desordenado é dado por:

$$\Psi_x = C_e e^{-i\phi_e} + \sum_k C_k e^{-i\phi_k} \quad (5.9)$$

Um fator de fase global $e^{i\phi_e}$ pode ser configurado para deixar C_e como um fator constante situado no eixo real por conveniência. Temos que agora o segundo termo descreve um ruído gaussiano circular, com a variância das partes real e imaginária dada por:

$$\sigma'^2 = \frac{1}{2} \sum_k C_k^2 \quad (5.10)$$

como resultado da quebra da simetria quiral.

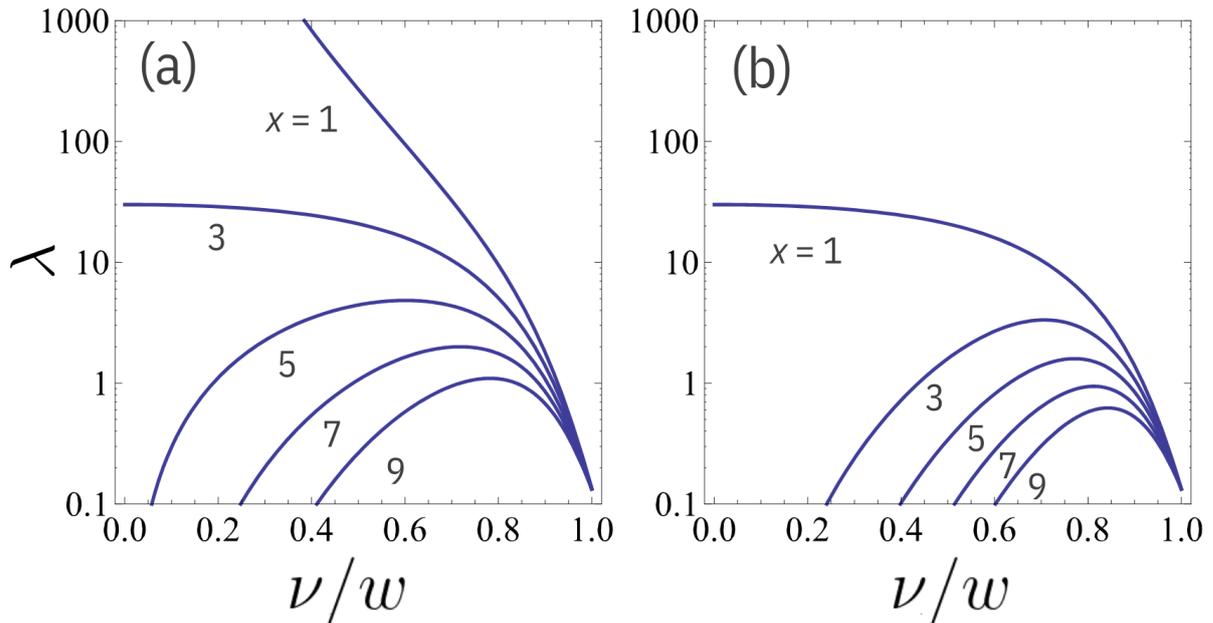
A intensidade $I = A^2 / \sigma'^2$ é novamente descrita pela distribuição qui-quadrada não central, com parâmetro de não centralidade $\lambda \rightarrow \lambda' = (C_e / \sigma')^2$. Como o sistema agora esta com desordem, temos que $\mu = 2$.

Para entender melhor o parâmetro de não centralidade, vamos encontrar uma solução analítica para ele. Para isso, vamos assumir que a amplitude fasorial C_e é a mesma em ambas as situações sem e com desordem. A variância σ^2 para o caso sem desordem pode ser aproximado fazendo $\psi_{k,x} \approx [(1 - |\psi_{e,x}|^2) / M]^{1/2}$ e assim obtendo $\sigma^2 = MC_k^2$. Com isso, temos a seguinte Equação:

$$\lambda = \frac{C_e^2}{MC_k^2} = \frac{\nu^{2(m_0+m)} (\nu^2 - 1)^2 M}{\tilde{\nu}_{m_0} \tilde{\nu}_m} \quad (5.11)$$

onde $\tilde{\nu}_m = \nu^2 - \nu^{N+4} - \nu^{2m} + \nu^{2+2m}$ e $m = (x + 1)/2$. Para o caso desordenado, o parâmetro de não centralidade é similar, sendo que $\sigma'^2 = \sigma^2/2$ o que resulta $\lambda' = 2\lambda$. O comportamento de λ em relação ao parâmetro de dimerização ν/w é mostrado na Figura 5.4.

Figura 5.4: Relação entre o parâmetro de não centralidade λ e a distorção da cadeia dada por ν/w ($w = 1$). Para uma cadeia com $N=31$ sítios, onde iniciamos a função de onda no sítio (a) $x_0 = 1$ e (b) $x_0 = 3$.



Fonte: Retirada da referência[74].

Pela Figura 5.4 podemos observar que, $\lambda \rightarrow 0$ a medida que a cadeia se torna homogênea, ou seja, quando a dimerização $\nu/w \rightarrow 1$, o que significa que $P_I(I)$ assume a forma qui-quadrado padrão, que é a distribuição exponencial tanto na ausência quanto na presença da desordem.

Também temos que em uma cadeia homogênea para um número ímpar de sítios, a função de onda do modo zero é:

$$\psi_{e,x_0} \propto [(N + 1) / 2]^{-1/2} \quad (5.12)$$

Para todo x ímpar.

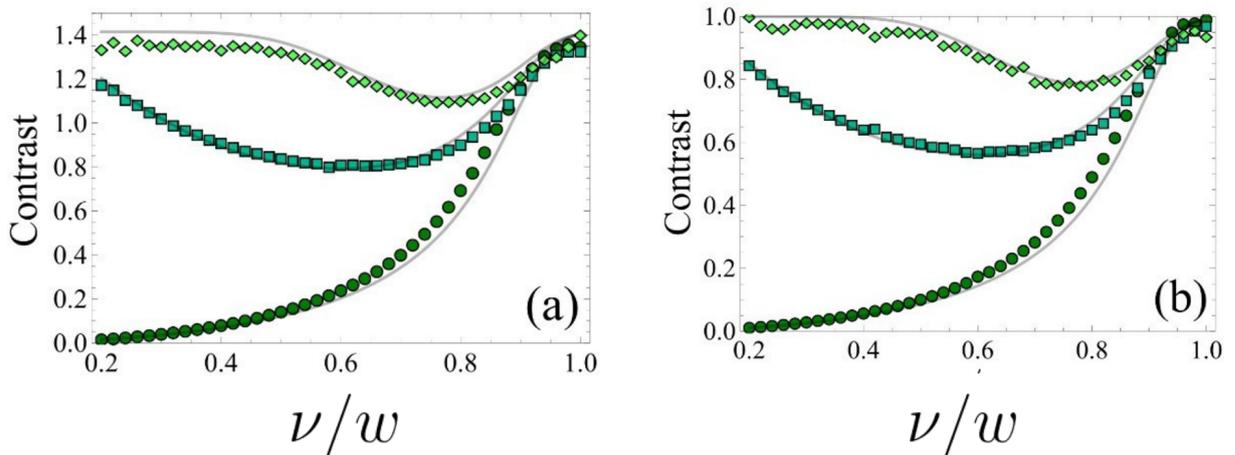
Então, quando $\nu/w < 1$, o estado de borda surge com queda exponencial em todo o *bulk*. Dado $x \neq 1$ e não muito longe da borda principal, a amplitude da função de onda atingirá o pico em algum valor limite de ν/w antes de desaparecer de modo a estar em conformidade com $|\psi_{e,1}| \rightarrow 1$ quando $\nu/w \rightarrow 0$, ou seja, no limite dimerizado o estado de borda torna-se totalmente localizado no primeiro sítio, o que explica a divergência de λ quando $(x_0, x) = (1, 1)$ que vemos na Figura 5.4(a). Outro comportamento particular é em $(x_0, x) = (1, 3)$ que podemos ver melhor na Figura 5.4(b). A saturação de λ com $\nu/w \rightarrow 0$ nesse caso aponta uma dependência funcional semelhante das taxas de decaimento de C_e^2 e C_k^2 . De fato, ambos decaem $\sim (\nu/w)^2$ nesse limite. Então λ mede o quanto o fasor constante $C_e(x_0, x)$ está borrado no ruído Gaussiano e, quanto mais longe da borda principal se escolher x_0 e x , mais o ruído Gaussiano domina a medida que $\nu/w \rightarrow 0$.

Vamos agora analisar o contraste em relação à dimerização da cadeia. Sabemos que o contraste de Speckle mede o desvio padrão da intensidade em relação a sua média $\mathcal{C} = \sigma_I / \langle I \rangle$. Com relação a distribuição qui-quadrado não central na Equação 5.8 temos que o contraste assume a seguinte expressão:

$$\mathcal{C} = \frac{\sqrt{2(\mu + 2\lambda)}}{\mu + \lambda} \quad (5.13)$$

Note que o contraste é uma função de λ . Observe que no caso sem desordem ($\mu = 1$) e no caso com desordem ($\mu = 2$) o contraste difere por um fator de $\sqrt{2}$. O contraste em relação a dimerização é mostrada na Figura 5.5.

Figura 5.5: Contrastes de Speckle versus ν/w para o caso sem desordem (a) e desordenado (b), para uma cadeia com $N = 31$ sítios. Onde colocamos a função de onda inicialmente e onde medimos (x_0, x) são: (1,1) [círculos]; (1,5) [quadrados]; (3,5) [diamantes]. Em todos os casos a evolução unitária é realizada até o tempo $10^6 w^{-1}$ em passos de $100 w^{-1}$. Apenas uma amostra desordenada é considerada, onde as energias no local estão uniformemente distribuídas dentro de $[-0.01w, 0.01w]$. As linhas sólidas cinza representam os contrastes analíticos $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{2+4\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso sem desordem e $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso com desordem.



Fonte: Retirada da referência[74].

À medida que a cadeia torna-se homogênea, o contraste converge para $\sqrt{2}$, na

ausência da desordem, e para o caso com desordem converge para 1, que se relaciona com a estatística speckle exponencial padrão (qui-quadrado). O mesmo regime pode ser alcançado em uma razão de dimerização finita assim que x_0 e x forem escolhidos a alguns sítios longe da borda [74].

5.2 Estados bi-localizados

Agora vamos explorar as propriedades de speckle quando a cadeia SSH hospeda dois estados de borda. Para os estados bi-localizados, temos agora uma cadeia com um número par de sítios e , induzimos a formação de um par de estados de borda $\psi_{e\pm}$ com energias $E_{e\pm}$ que decaem exponencialmente a partir de ambas as bordas. Para um espectro de simetria quirial, a evolução temporal do fasor é dada por:

$$\Psi_x = 2C_{e\pm}\cos(\phi_\delta) + \sum_{k'} 2C_{k'}\cos(\phi_{k'}) \quad (5.14)$$

onde k' cobre $(N-2)/2$ modos deslocalizados, $C_{e\pm} = C_{e+} = C_{e-}$ e $\phi_\delta = \delta E_e t/2$. O fasor dominante não é constante, ele evolui periodicamente a uma taxa que depende do intervalo $\delta E_e t/2$. Em princípio, a distribuição para I pode ser obtida compondo a distribuição qui-quadrado não central $\mu = 1$ sobre vários λ .

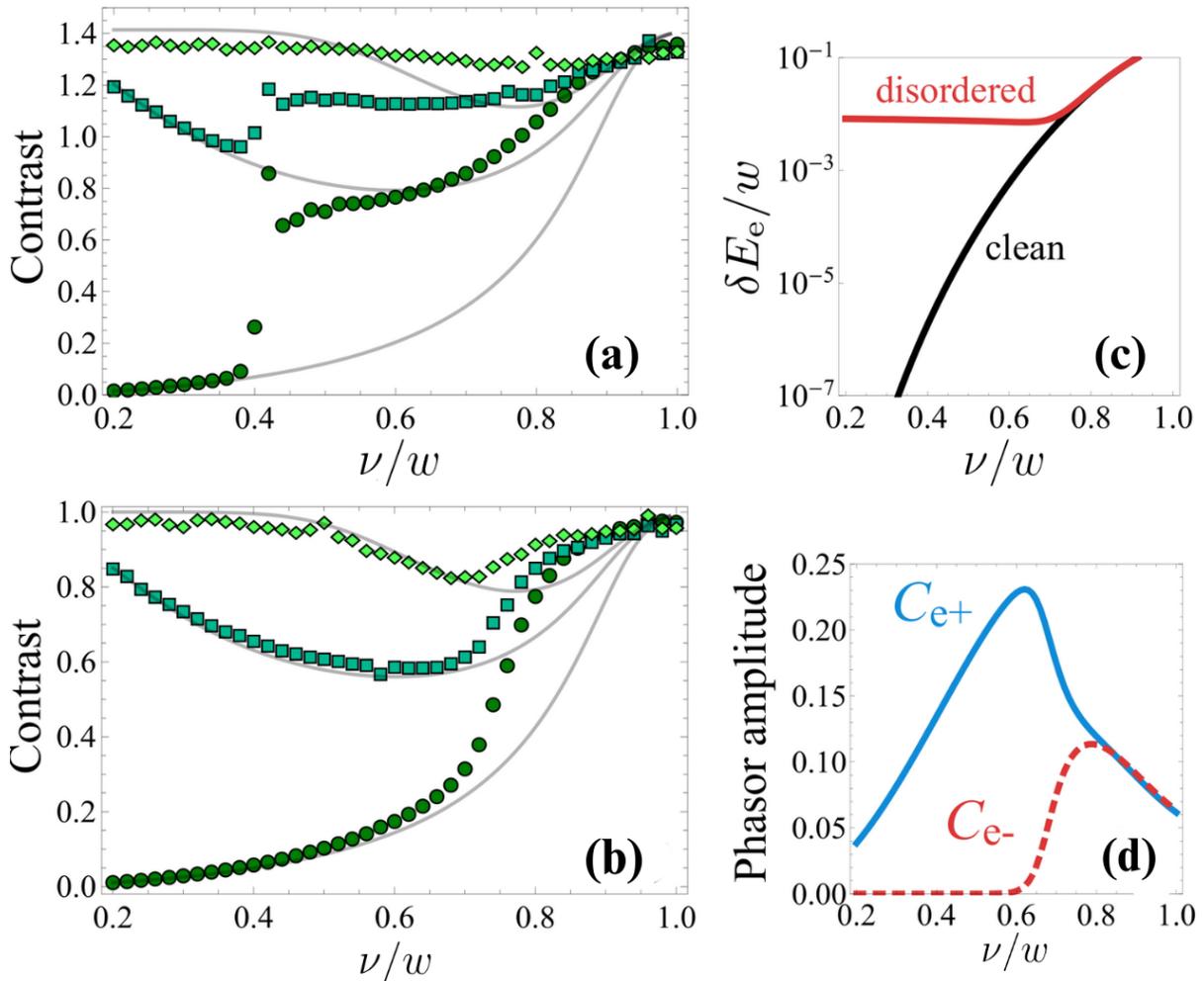
Observa-se, entretanto, que o *gap* no meio da banda obedece $\delta E_e \sim (\nu/w)^{N/2+1}$ [75]. Portanto, dependendo da janela de tempo considerada, a função cosseno pode parar, gerando um fasor de estado de borda constante. Na Figura 5.6(a), plotamos o contraste de speckle versus ν/w e confirmamos tal comportamento no momento em que δE_e atinge cerca de $10^{-6}w$, que é da ordem do inverso do tempo máximo de evolução, Como podemos ver na Figura 5.6(c). Observe que o contraste mantém um limite superior de $\sqrt{2}$, apesar do valor de ν/w .

No caso desordenado a função de onda é dada por:

$$\Psi_x = C_{e+} + C_{e-}e^{i\phi_\delta} + \sum_k C_k e^{i(\phi_e - \phi_k)} \quad (5.15)$$

Com o último termo compreendendo os $N-2$ modos deslocalizados representando o ruído circular gaussiano. Desta vez há um par de fasores dominantes, um dos quais gira a uma taxa definida pelo *gap* δE_e . Diferentemente do regime anterior, o *gap* não desaparecerá devido a desordem. Por outro lado, um dos fasores de estado de borda desaparecerá a medida que a desordem *on-site* destrói sua simetria quirial, como podemos ver na Figura 5.6(d). A transição entre regimes dinâmicos é mais suave em comparação com a exibida na Figura 5.6 (b) para o caso ordenado, pois são conduzidos por fontes distintas.

Figura 5.6: Contrastes de Speckle versus ν/w para o caso sem desordem (a) e desordenado (b), para uma cadeia com $N = 30$ sítios. Onde colocamos a função de onda inicialmente e onde medimos (x_0, x) são: (1,1) [círculos]; (1,5) [quadrados]; (3,5) [diamantes]. Em todos os casos a evolução unitária é realizada até o tempo $10^6 w^{-1}$ em passos de $100 w^{-1}$. Apenas uma amostra desordenada é considerada, onde as energias no local estão uniformemente distribuídas dentro de $[-0.01w, 0.01w]$. As linhas sólidas cinza representam os contrastes analíticos $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{2+4\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso sem desordem e $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{1+2\lambda}}{1+\lambda}$ para o caso com desordem. Eventualmente, para ν/w suficientemente baixo, o comportamento de speckle correspondente a N par, quando o sistema está com desordem, se aproxima do caso quando N é ímpar, que apresenta um único estado de borda. No caso sem desordem, tal perda de informação sobre a existência de um par de estados de borda quando N é par, ocorre porque o gap de energia de δE_e fecha no meio da banda a medida que $\nu/w \rightarrow 0$, conforme mostrado no gráfico (c). Uma transição dinâmica do comportamento par-para-ímpar- N também ocorre no caso desordenado, mas não é conduzida pelo fechamento do gap. Em vez disso, o par de estados das bordas se separa devido à desordem, forçando um dos fasores dominantes a desaparecer, como mostra o gráfico (d) com $C_{e\pm}$ avaliado para $(x_0 = 1, x = 5)$.



Fonte: Modificado da referência [74].

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho apresentamos os speckles topológicos. A partir de medições locais da função de onda em diferentes momentos revelaram propriedades topológicas intrínsecas da rede. Em uma determinada faixa de valores ν/w , a intensidade dos speckles podem ser utilizadas para identificar a presença de desordem que quebra a simetria, o *gap* no meio da banda e o grau de localização dos estados de borda. O mapeamento da dinâmica Hamiltoniana do sistema para modelos fasoriais aleatórios oferece um método para caracterizar os regimes dinâmicos envolvidos, e pode até ser empregado para avaliar o grau de correlações quânticas [11, 14]. O estudo de estatísticas de speckle em redes topológicas também pode lançar uma nova perspectiva sobre a natureza de estados quânticos não convencionais da matéria.

Escolhemos o modelo SSH para analisar a estatística de speckle porque ele é viável para uma implementação experimental baseada na propagação de luz clássica através de redes de guia de onda acopladas lineares [19]. A constante de hopping escalonada é realizada pelo espaçamento entre guias de onda e a evolução temporal Hamiltoniana é análoga à propagação do feixe ao longo do eixo longitudinal. Algumas configurações físicas potenciais para a realização de redes topológicas incluem matrizes de íons aprisionados [76] e circuitos supercondutores [77]. Em termos de personalização de speckle, uma extensão natural do nosso trabalho deve incluir o papel da desordem de acoplamento, que preserva a simetria quiral. Uma variação interessante do modelo é baseada em um conjunto de módulos SSH interagindo [78, 79]. Esse tipo de arranjo pode ser usado para controlar o tamanho da lacuna no meio da banda [79]. Com isso, a busca por alcançar estatísticas de intensidade personalizadas de alta precisão vai muito além de atender a aplicações práticas. A capacidade de extrair informações do ruído é fundamental para alcançar uma compreensão mais profunda da natureza. Com isso, esperamos que esse trabalho sirva de inspiração para pesquisas futuras e que abra novas perspectivas para analisar cadeias topológicas.

Referências

1. Goodman JW. Speckle phenomena in optics: theory and applications. Roberts e Company Publishers, 2007
2. Heeman W, Steenbergen W, Dam GM van e Boerma EC. Clinical applications of laser speckle contrast imaging: a review. *Journal of biomedical optics* 2019; 24:80901–1
3. Verwohlt J, Reiser M, Randolph L, Matic A, Medina LA, Madsen A, Sprung M, Zozulya A e Gutt C. Low dose X-ray speckle visibility spectroscopy reveals nanoscale dynamics in radiation sensitive ionic liquids. *Physical review letters* 2018; 120:168001
4. Zhang Q, Gamekkanda JC, Pandit A, Tang W, Papageorgiou C, Mitchell C, Yang Y, Schwaerzler M, Oyetunde T, Braatz RD et al. Extracting particle size distribution from laser speckle with a physics-enhanced autocorrelation-based estimator (PEACE). *Nature Communications* 2023; 14:1159
5. Luo Q, Patel JA e Webb KJ. Super-resolution sensing with a randomly scattering analyzer. *Physical Review Research* 2021; 3:L042045
6. Delande D e Orso G. Mobility edge for cold atoms in laser speckle potentials. *Physical review letters* 2014; 113:060601
7. Jendrzejewski F, Bernard A, Mueller K, Cheinet P, Josse V, Piraud M, Pezzé L, Sanchez-Palencia L, Aspect A e Bouyer P. Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential. *Nature Physics* 2012; 8:398–403
8. Bromberg Y e Cao H. Generating non-Rayleigh speckles with tailored intensity statistics. *Physical Review Letters* 2014; 112:213904
9. Bender N, Haig H, Christodoulides DN e Wise FW. Spectral speckle customization. *Optica* 2023; 10:1260–8
10. Han S, Bender N e Cao H. Tailoring 3D speckle statistics. *Physical Review Letters* 2023; 130:093802
11. Oliveira MFV, Moura FABF de, Souza AMC, Lyra ML e Almeida GMA. Non-Rayleigh signal of interacting quantum particles. *Phys. Rev. A* 2023 Aug; 108(2):023520. DOI: 10.1103/PhysRevA.108.023520. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.108.023520>
12. Peeters W, Moerman J e Van Exter M. Observation of two-photon speckle patterns. *Physical review letters* 2010; 104:173601
13. Di Lorenzo Pires H, Woudenberg J e Van Exter M. Statistical properties of two-photon speckles. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 2012; 85:033807
14. Beenakker C, Venderbos J e Van Exter M. Two-photon speckle as a probe of multi-dimensional entanglement. *Physical review letters* 2009; 102:193601

15. Kirkby W, Yee Y, Shi K e O'Dell D. Caustics in quantum many-body dynamics. *Physical Review Research* 2022; 4:013105
16. Buarque A, Dias W, Moura F de, Lyra M e Almeida G. Rogue waves in discrete-time quantum walks. *Physical Review A* 2022; 106:012414
17. Buarque A, Dias W, Almeida G, Lyra M e Moura F de. Rogue waves in quantum lattices with correlated disorder. *Physical Review A* 2023; 107:012425
18. Ozawa T, Price HM, Amo A, Goldman N, Hafezi M, Lu L, Rechtsman MC, Schuster D, Simon J, Zilberberg O et al. Topological photonics. *Reviews of Modern Physics* 2019; 91:015006
19. Kang J, Wei R, Zhang Q e Dong G. Topological photonic states in waveguide arrays. *Advanced Physics Research* 2023; 2:2200053
20. Lefschetz S. *Introduction to topology*. Princeton University Press, 2015
21. Mendelson B. *Introduction to topology*. Courier Corporation, 1990
22. Hubbard JH e West BH. *Differential equations: a dynamical systems approach: higher-dimensional systems*. Vol. 18. Springer Science & Business Media, 2012
23. Wu HH. Historical development of the Gauss-Bonnet theorem. *Science in China Series A: Mathematics* 2008; 51:777
24. Rotskoff G. *The Gauss-Bonnet theorem*. Tese de doutoramento. Master Thesis, 2010
25. Sakurai JJ e Napolitano J. *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2020
26. Hasan MZ e Kane CL. Colloquium: topological insulators. *Reviews of modern physics* 2010; 82:3045
27. Qi XL e Zhang SC. Topological insulators and superconductors. *Reviews of modern physics* 2011; 83:1057–110
28. Asbóth JK, Oroszlány L e Pályi A. *A short course on topological insulators*. Lecture notes in physics 2016; 919:166
29. Simon SH. *The Oxford solid state basics*. OUP Oxford, 2013
30. Batra N e Sheet G. Understanding basic concepts of topological insulators through su-schrieffer-heeger (ssh) model. *arXiv preprint arXiv:1906.08435* 2019
31. Ashcroft NW e Mermin ND. *Solid State Physics*. 1st. New York: Holt, Rinehart e Winston, 1976
32. Kittel C. *Introduction to solid state physics*. 7th ed. Wiley, 1996
33. Anderson PW. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review* 1958; 109:1492
34. Abrahams E, Anderson PW, Licciardello DC e Ramakrishnan TV. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Physical Review Letters* 1979; 42:673
35. Kramer B e MacKinnon A. *Localization: theory and experiment*. Reports on Progress in Physics 1993; 56:1469

36. Zallen R. The physics of amorphous solids. John Wiley & Sons, 2008
37. Ono Y, Ohtsuki T e Kramer B. Inverse participation number and fractal dimensionality of electronic states in a two dimensional system in strong perpendicular magnetic field. *Journal of the Physical Society of Japan* 1989; 58:1705–16
38. Schwartz T, Bartal G, Fishman S e Segev M. Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature* 2007; 446:52–5
39. Skipetrov S e Maynard R. Instabilities of waves in nonlinear disordered media. *Physical Review Letters* 2000; 85:736
40. Anderson MH, Ensher JR, Matthews MR, Wieman CE e Cornell EA. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science* 1995; 269:198–201
41. Lye J, Fallani L, Modugno M, Wiersma DS, Fort C e Inguscio M. Bose-Einstein condensate in a random potential. *Physical review letters* 2005; 95:070401
42. Roati G, D’Errico C, Fallani L, Fattori M, Fort C, Zaccanti M, Modugno G, Modugno M e Inguscio M. Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate. *Nature* 2008; 453:895–8
43. Su WP, Schrieffer JR e Heeger AJ. Solitons in polyacetylene. *Physical review letters* 1979; 42:1698. DOI: 10.1103/PhysRevLett.42.1698
44. Su WP, Schrieffer J e Heeger A. Soliton excitations in polyacetylene. *Physical Review B* 1980; 22:2099
45. Zhang Y, Ren B, Li Y e Ye F. Topological states in the super-SSH model. *Optics Express* 2021; 29:42827–36
46. Moore JE. The birth of topological insulators. *Nature* 2010; 464:194–8
47. König M, Wiedmann S, Brune C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp LW, Qi XL e Zhang SC. Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells. *Science* 2007; 318:766–70
48. Ando Y. Topological insulator materials. *Journal of the Physical Society of Japan* 2013; 82:102001
49. Kane CL e Mele EJ. Z₂ topological order and the quantum spin Hall effect. *Physical review letters* 2005; 95:146802
50. Landau LD et al. On the theory of phase transitions. *Zh. eksp. teor. Fiz* 1937; 7:926
51. Cowley R. Structural phase transitions I. Landau theory. *Advances in physics* 1980; 29:1–110
52. Toledano P e Toledano Jc. Landau Theory Of Phase Transitions, The: Application To Structural, Incommensurate, Magnetic And Liquid Crystal Systems. Vol. 3. World Scientific Publishing Company, 1987
53. Hohenberg PC e Krehov AP. An introduction to the Ginzburg–Landau theory of phase transitions and nonequilibrium patterns. *Physics Reports* 2015; 572:1–42
54. Arfken GB, Weber HJ e Harris FE. Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide. Academic press, 2011

55. Batra N e Sheet G. Understanding basic concepts of topological insulators through su-schrieffer-heeger (ssh) model. arXiv preprint arXiv:1906.08435 2019
56. Mong RS e Shivamoggi V. Edge states and the bulk-boundary correspondence in Dirac Hamiltonians. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics* 2011; 83:125109
57. Goodman JW. Some fundamental properties of speckle. *JOSA* 1976; 66:1145–50
58. Dainty JC. *Laser speckle and related phenomena*. Vol. 9. Springer science & business Media, 2013
59. Rigden J e Gordon E. Granularity of scattered optical maser light. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 1962; 50:2367
60. Oliver B. Sparkling spots and random diffraction. *Proceedings of the IEEE* 1963; 51:220–1
61. Wagner RF, Smith SW, Sandrik JM e Lopez H. Statistics of speckle in ultrasound B-scans. *IEEE Transactions on sonics and ultrasonics* 1983; 30:156–63
62. Sutton M, Mochrie S, Greytak T, Nagler S, Berman L, Held G e Stephenson G. Observation of speckle by diffraction with coherent X-rays. *Nature* 1991; 352:608–10
63. Wang J e Genack AZ. Transport through modes in random media. *Nature* 2011; 471:345–8
64. Bracewell R e Kahn PB. The Fourier transform and its applications. *American Journal of Physics* 1966; 34:712–2
65. Fox H e Bolton W. *Mathematics for engineers and technologists*. Elsevier, 2002
66. Stirzaker D. *Stochastic processes and models*. OUP Oxford, 2005
67. Mandel L e Wolf E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995
68. Casella G e Berger R. *Statistical inference*. CRC Press, 2024
69. Saleh BE e Teich MC. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & sons, 2019
70. Dudley RM. *Uniform central limit theorems*. Vol. 142. Cambridge university press, 2014
71. Kwak SG e Kim JH. Central limit theorem: the cornerstone of modern statistics. *Korean journal of anesthesiology* 2017; 70:144
72. Rosenblatt M. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proceedings of the national Academy of Sciences* 1956; 42:43–7
73. Ciccarello F. Resonant atom-field interaction in large-size coupled-cavity arrays. *Phys. Rev. A* 2011 Apr; 83(4):043802. DOI: 10.1103/PhysRevA.83.043802. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.043802>
74. Rodrigues YM, Oliveira MF, Souza A, Lyra ML, Moura FA de e Almeida G. Topological speckles. arXiv preprint arXiv:2310.20213 2023
75. Almeida GM. Interplay between speed and fidelity in off-resonant quantum-state-transfer protocols. *Physical Review A* 2018; 98:012334

-
76. Nevado P, Fernández-Lorenzo S e Porrás D. Topological edge states in periodically driven trapped-ion chains. *Physical Review Letters* 2017; 119:210401
 77. Youssefi A, Kono S, Bancora A, Chegnizadeh M, Pan J, Vovk T e Kippenberg TJ. Topological lattices realized in superconducting circuit optomechanics. *Nature* 2022; 612:666–72
 78. Zurita J, Creffield CE e Platero G. Fast quantum transfer mediated by topological domain walls. *Quantum* 2023; 7:1043
 79. Almeida GM, Ciccarello F, Apollaro TJ e Souza AM. Quantum-state transfer in staggered coupled-cavity arrays. *Physical Review A* 2016; 93:032310

Apêndice A

Demonstração do estado de borda para o caso ímpar

Para o caso de um número N ímpar de sítios, temos que o Hamiltoniano da Equação (tan) fica da seguinte forma

$$H = \sum_{x=1}^{N-1} \nu (|x+1\rangle\langle x| + |x\rangle\langle x+1|) \quad (\text{A.1})$$

onde ν é o hopping para o caso ímpar. Queremos encontrar a solução para $H\psi = E\psi$. Como nas bordas temos energia zero, então ficamos com a seguinte expressão:

$$\nu\psi_{x+1} + \nu\psi_{x-1} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Dividindo por ν obtemos:

$$\psi_{x+1} = -\psi_{x-1} \quad (\text{A.3})$$

Para $x = 2, 3, 4, \dots, N-1$. Com isso, vamos denominar $\psi_1 = \mathcal{A}$, onde \mathcal{A} é uma constante a ser determinado. Usando a Equação A.3, temos:

$$\begin{aligned} \psi_3 &= -\psi_1 = -\mathcal{A} \\ \psi_5 &= -\psi_3 = \mathcal{A} \\ \psi_7 &= -\psi_5 = -\mathcal{A} \\ \psi_9 &= -\psi_7 = \mathcal{A} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para um número N ímpar, a função de onda do estado de borda é alternado entre \mathcal{A} e $-\mathcal{A}$ e podemos escrever $x = 2m - 1$. Substituindo na Equação A.3, temos

$$\psi_{2m} = -\psi_{2m-2} \quad (\text{A.5})$$

Como a função de onda só não é nula nos sítios ímpares, então, a função de onda pode ser escrito da seguinte forma:

$$\psi_{2m-1} = (-1)^{m-1} \mathcal{A} \quad (\text{A.6})$$

Como ν é o hopping dos sítios ímpares, vamos adicionar ela a nossa função de onda. Assim, temos que:

$$\psi_{2m-1} = (-1)^{m-1} \nu^{m-1} \mathcal{A} \quad (\text{A.7})$$

Vamos agora normalizar nosso estado para obter a constante \mathcal{A} .

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} |\psi_{2m-1}|^2 &= \sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} [(-1)^{m-1} \nu^{m-1} \mathcal{A}]^2 \\ &= \mathcal{A}^2 \sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} [(-1)^{m-1} \nu^{m-1}]^2 \\ &= \mathcal{A}^2 \sum_{m=1}^{\frac{N+1}{2}} \nu^{2(m-1)} = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Note que o termo $(-1)^{m-1}$ "desaparece" da equação porque ele se torna par, ou seja, não haverá alternância de sinais. Também é possível notar que o somatório é uma soma geométrica dada pela seguinte expressão:

$$\sum_{m=0}^{k-1} r^m = \frac{1 - r^k}{1 - r} \quad (\text{A.9})$$

Logo, nossa série fica da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}^2 \sum_{m=0}^{(N-1)/2} \nu^{2m} = \mathcal{A}^2 \frac{1 - (\nu^2)^{(N+1)/2}}{1 - \nu^2} = \mathcal{A}^2 \frac{1 - \nu^{N+1}}{1 - \nu^2} \quad (\text{A.10})$$

Portanto, a constante de normalização \mathcal{A} é dado por

$$\mathcal{A}^2 \frac{1 - \nu^{N+1}}{1 - \nu^2} = 1 \rightarrow \mathcal{A}^2 = \frac{1 - \nu^2}{1 - \nu^{N+1}} \rightarrow \mathcal{A} = \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{1 - \nu^{N+1}}} \quad (\text{A.11})$$

Portanto nossa função de onda do estado de borda para uma cadeia SSH com N ímpar é:

$$\psi_{e,2m-1} = (-1)^m \nu^{m-1} \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{1 - \nu^{N+1}}} \quad (\text{A.12})$$