UFAL

Breathers e Dinâmica de soluções para equações do tipo Korteweg-de Vries

Autor: Victor Ferreira de Araújo Santos

Orientador: Márcio Cavalcante de Melo

Julho 2024

Victor Ferreira de Araújo Santos

Breathers e Dinâmica de soluções para equações do tipo Korteweg-de Vries

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maceió - AL, 2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

S237b Santos, Victor Ferreira de Araújo.
Breathers e dinâmica de soluções para equações do tipo Korteweg-de Vries / Victor Ferreira de Araújo Santos. - 2024.
72 f. : il.

Orientador: Márcio Cavalcante de Melo.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 69-72.

1. Breathers. 2. Equação de Korteweg-de Vries. 3. Dispersivos. I. Título.

CDU: 519.662

Victor Ferreira de Araújo Santos

Breathers e Dinâmica de soluções para equações do tipo Korteweg-de Vries

Dissertação de mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, avaliado pela banca examinadora constituída pelos professores:

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCIO CAVALCANTE DE MELO
Data: 02/08/2024 14:58:49-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo
Instituto de Matemática - PPGMAT-UFAL
Orientador

gov.br Documento assinado digitalmente
DAVI DOS SANTOS LIMA
Data: 02/08/2024 15:41:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Davi dos Santos Lima
Instituto de Matemática - PPGMAT-UFAL
Examinador

CORCHO FERNANDEZ ADAN JOSE - Y8219592G
Assinado de forma digital por CORCHO FERNANDEZ ADAN JOSE - Y8219592G
Dados: 2024.08.02 19:39:18 +02'00'

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández
Universidad de Córdoba
Examinador

Aprovado em: 16 de Julho de 2024.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu pai, Paulo Roberto dos Santos, por me dar o exemplo do homem que eu deveria me tornar. Sem ele, eu não estaria aqui. Agradeço as minhas tias, Maria das Dores Correia de Lima e Duci Correia de Lima, por estabelecerem o padrão moral que eu deveria seguir, bem como me acolher diversas vezes como o filho que nunca tiveram. Deixo aqui meu mais profundo respeito por essas pessoas, que sempre que se deparam com a decisão entre fazer o bem a si ou a o próximo, não tem dúvidas de qual caminho seguir.

Agradeço aos meus irmãos que essa jornada reuniu em minha vida: Maxmiliam Barros de Siqueira e Gleydson Santos da Silva. Na vida muitos aparecem para beber do seu copo, mas poucos ficam para secar suas lagrimas. Fui sortudo de encontrar amigos que sangraram e choraram comigo ao longo dessa jornada e hoje terminamos essa etapa juntos com um sorriso no rosto. Eu não poderia pedir amigos mais leais, para eles deixo aqui meu mais sincero agradecimento.

Aos meus amigos, Jefferson da Rocha e Jennifer Rotandaro por me lembrarem que existe bondade em nossas ações, Monique Melo por enxergar e entender lados meus que por vezes tentei esconder, Cleisiane Fernandes por ser um raio de luz em alguns (muitos na verdade) dias escuros, Bárbara Amorim por ter enfrentado ao meu lado alguns dos meus maiores desafios, Mariana Bispo por me lembrar diariamente o motivo de eu estar aqui, levarei nossos dias comigo aonde quer que eu esteja e sempre lembrarei que sem vocês eu não teria conseguido.

Aos que começaram essa jornada comigo, Caio Philipe por seus valiosos conselhos e me escutar sem julgamentos, Hegel Marinho por me influenciar a nunca desistir, Davi Matheus por compartilhar meu lado Shelby, Weverson Franco por me ser um exemplo de determinação e a alguns que seguiram por caminhos diferentes: Lucas Bulandeira, Leandro Lucena e Lucas Honorato, agradeço a todos vocês por me darem a honra de caminhar ao seu lado mesmo que por pouco tempo.

Agradeço á Mikael Vitor, Alexsandro Souza, Patricio Laranja e Os Espécimes, José Marques, Vinicius Guardiano, Josafá Junior, Hiroshi e Companhia, Os Garotões do Sotão e as Meninas Super Poderosas. De alguma forma, me ajudaram a encontrar essa minha

versão que os escreve.

Agradeço aos professores, Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena por ter me acompanhado desde os meus primeiros dias da jornada acadêmica até o presente momento, foi em uma aula sua que decidi seguir na pesquisa matemática e o sigo como exemplo, ao professor José Carlos por ter visto algo ali quando ninguém mais via, Isadora Maria, Vânio Fragoso e Isnaldo Isaac por terem enxergado em diversos momentos a pessoa por trás do matemático.

Agradeço ao membros da banca, Davi Lima e Adán Corcho pela dedicação de ler e avaliar meu trabalho. Aos técnicos Ana Maria e Willian Alves pelo suporte ao longo do mestrado.

Por fim, dedico este parágrafo em agradecimento ao meu orientador Márcio Cavalcante de Melo. Com paciência e dedicação, me guia desde 2018 quando nos conhecemos em uma aula de Cálculo 1 e desde então não deixo de trazer problemas para ele. Ao longo dos anos sinto que não agradeci o suficiente, mas hoje ele é meu exemplo de Professor, Matemático e Pesquisador e deixo aqui registrado que sem seu direcionamento eu seria apenas uma criança brincando com alguns números. Obrigado.

O diabo sussurrou em meu ouvido,
"você não é forte o suficiente para
aguentar a tempestade".
Hoje eu sussurrei no ouvido do diabo,
"eu sou a tempestade".

Autor desconhecido.

Dedico este trabalho para Cleide Amorim. Que escutou os pesares de um garotinho com medo do escuro.

Resumo

Nesta dissertação, vamos seguir o trabalho de Munõz e Ponce [48] sobre comportamento assintótico de soluções para a equação do tipo KdV. Na primeira parte do trabalho vamos identificar uma classe de não linearidades para a equação do tipo KdV para o qual estas não possuem soluções do tipo Breathers. Em particular provaremos que a clássica equação de KdV não admitem Breathers. Na segunda parte do trabalho, baseado em identidades do tipo Virial, mostraremos que em regiões linearmente dominadas do tipo $x \sim t^{\frac{1}{2}}$, para certos modelos do tipo KdV as soluções com normas pequenas admitem decaimento no infinito.

Palavras-chave: Breathers, Korteweg-de Vries, Dispersivo.

Abstract

In this dissertation, we will follow the work of Munõz and Ponce [48] on the asymptotic behavior of solutions for the KdV-type equation. In the first part of the work, we will identify a class of nonlinearities for the KdV-type equation for which these do not have breather solutions. In particular, we will prove that the classical KdV equation does not admit breathers. In the second part of the work, based on Virial-type identities, we will show that in linearly dominated regions of the type $x \sim t^{\frac{1}{2}}$, for certain KdV-type models, solutions with small norms exhibit decay at infinity.

Keywords: Breathers, Korteweg-de Vries, dispersive.

Sumário

Introdução **4**

1 Preliminares **13**
1.1 A Transformada de Fourier 13
1.1.1 A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ 13
1.1.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ 17
1.2 Espaços de Funções 24

2 A equação de Korteweg-de Vries **32**
2.1 O Princípio de Duhamel 32
2.2 Solitons 34

3 Leis de Conservação para a Equação do tipo Korteweg-de Vries **37**

4 Modelos que não admitem Breathers **43**

5 Decaimento de soluções em regiões linearmente dominadas **55**

Introdução

A observação de estruturas dinâmicas na natureza que mantêm sua forma enquanto evoluem ao longo do tempo (também chamadas de estruturas coerentes) é um fato permanente na história da humanidade. Por exemplo, lembre-se do formato de algumas nuvens, dos padrões nas folhas das plantas ou na vegetação, nos desenhos nas conchas de moluscos bivalves, nos minerais, e assim por diante. A curiosidade humana impulsionou o questionamento da origem de tais estruturas, procurando explicar e entender como elas surgem e como podem ser geradas. Para obter as respostas corretas para tais questões, a Matemática é a ferramenta chave, desenvolvendo os modelos matemáticos que descrevem as características principais dessas estruturas coerentes.

Focando particularmente em estruturas observadas na água, temos a pororoca (ou onda de maré, veja [57]) no Brasil, que é um fenômeno recorrente da interação dos rios pouco profundos com as marés atlânticas do norte e nordeste do país. O mais notável desse espectáculo da natureza é a presença de uma onda que, mantendo seu perfil ao longo de grandes distâncias (documentadas em até 50 km rio adentro), é arrastada pela maré nos dias de lua cheia, e se dirige em contrafluxo rio adentro, elevando o caudal do rio e arrasando as margens e tudo o que encontra em seu caminho.

Embora esse fenômeno já fosse conhecido há séculos no Brasil e na América do Sul (no inicio do século XVI, na região norte do Brasil, a pororoca quase afundou a caravela do pioneiro navegante espanhol Vicente Yáñez Pinzón), a primeira observação documentada de uma estrutura coerente na água, evoluindo no tempo, foi do engenheiro escocês John Scott Russell [1] em 1834 (ver [52]). O que ele observou exatamente enquanto passeava a cavalo, paralelamente a um canal de água rasa, que era utilizado para transporte de mercadorias em pequenos barcos puxados por cavalos de ambos os lados, foi o seguinte, nas suas próprias palavras:

I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped -not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a

foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation...

Resumindo, o que Russell observou em 1834 foi uma onda (que ele chamou de onda de translação) em um canal de água rasa, ou pouco funda, produzida pela inércia do barco, a qual se propagou, sem perder sua forma e sua altura, ao longo do canal por uma distância considerável. Esse fenômeno de propagação chamou tanto a atenção de Russell que ele tentou explicá-la usando alguns modelos matemáticos, e tentou também recriá-la em seu laboratório, propondo uma fórmula para a velocidade de propagação da onda no final da sua pesquisa, dada por

$$c^2 = g(h + A) \tag{1}$$

onde g é a aceleração da gravidade, h a altura da camada de água em estado de repouso e A a amplitude da onda. Observe que em (1), quanto maior a amplitude A da onda, maior velocidade c ela atinge. Ele também foi capaz de produzir em seu laboratório duas ondas simultâneas com diferentes alturas e afastando-se uma da outra.

Entretanto, embora intuitivamente se possa entender o termo dispersar, o quê significa exatamente ser dispersivo?

Um sistema dispersivo é aquele no qual a velocidade de grupo depende do número de ondas, isto é, são aqueles sistemas nos quais a velocidade de grupo não é constante. Mais precisamente, considerando soluções de tipo onda plana

$$u(t, x) \approx e^{i(kx+\omega t)} \tag{2}$$

o termo ω é a velocidade de fase e o termo $\omega'(k)$ chama-se de velocidade de grupo. Portanto, um sistema será dispersivo sempre que $\omega''(k) \neq 0$.

Por exemplo, as soluções da equação

$$u_t + u_x = 0 \tag{3}$$

não são dispersivas (note que $\omega(k) = -k$), mas as soluções da equação de Airy

$$u_t + u_{xxx} = 0 \tag{4}$$

são dispersivas (note que $\omega(k) = k^3$). De fato, uma superposição contínua de ondas planas será a solução de (4)

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\left(kx+k^3t\right)} dk \tag{5}$$

De fato, para $t \neq 0$, a integral anterior pode ser calculada explicitamente em termos da função de Airy $\mathrm{Ai}(x) = u(1, x)$, isto é

$$u(t,x) = \frac{1}{t^{1/3}} Ai\left(\frac{x}{t^{1/3}}\right), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{6}$$

Pode se demostrar que a função de Airy Ai é regular e decai a 0 no infinito. Além disso, $Ai(x)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

Portanto, as soluções de (4) vão diminuindo sua amplitude u e se dispersam á medida que o tempo t aumenta.

Obviamente, a equação de Airy (4) não pode descrever o comportamento de ondas solitárias descrito por Russell, pois suas soluções dispersam. É preciso então um outro modelo. Depois dessas primeiras tentativas, outros engenheiros e cientistas tentaram melhorar a explicação para obter soluções mais parecidas e semelhantes ao fenômeno observado, sendo que o modelo seguinte (simples e unidimensional), proposto em 1895, e chamado de KdV (por seus criadores, Diederik Korteweg e Gustav de Vries [31])

$$v_t + v_{xxx} + vv_x = 0 \tag{7}$$

foi o primeiro modelo a gerar de maneira matemática ondas solitárias dentre as suas soluções. Em (7), v é a altura da perturbação na camada de água do canal de água rasa.

A equação de KdV (7) possuem algumas propriedades invariantes, que permitem ampliar o número de soluções encontradas. Por exemplo, se $v(t,x)$ é solução de (7), então $\frac{1}{\mu} v\left(\frac{t}{\sqrt{\mu^3}}, \frac{x}{\sqrt{\mu}}\right), \quad \mu \in \mathbb{R}^+$(transformação de escala) e $\mu + v(t, x - \mu t), \quad \mu \in \mathbb{R}$ (transformação de Galileu) são também soluções de (7). Esse último tipo de transformação permite "decolar" a solução, conseguindo descrever então a altura $\mu > 0$ da camada de água sobre a qual se levanta a perturbação na forma de onda de translação, que Russell observou.

Voltando à (7), observe que se descartamos o termo não linear vv_x em (7), a equação torna-se a equação de Airy (4), onde já vimos que as soluções dispersam. Portanto, o modelo KdV (7) diz-nos que é preciso a concorrência de termos dispersivos $(v_t + v_{xxx})$ contra termos não lineares ou concentradores $(vv_x\ )$ para que, em um equilíbrio adequado, gerem soluções que não dispersam, mantendo sua forma no tempo. É o que se chamam soluções de tipo onda solitária.

Uma onda solitária, do ponto de vista matemático, pode ser considerada como uma solução da equação diferencial correspondente, da forma $f(x \pm ct)$, onde f é uma função que satisfaz a equação diferencial, e c é considerada a velocidade de propagação. Isto é, o perfil da função f move-se para a esquerda ou direita (dependendo se tivermos $+c$ ou $-c$ na velocidade) ao longo do tempo.

No caso concreto da equação (7), as suas ondas solitárias são fáceis de obter. Propondo soluções do tipo $u(t,x) = f(x - ct)$ e substituido em (7), obtemos a equação diferencial (aqui ' quer dizer derivada com respeito a $\xi = x - ct$)

$$-cf' + f''' + ff' = 0 \tag{8}$$

e integrando em ξ e levando em conta que procuramos soluções com a propriedade $f \underset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, obtemos a equação

$$f'' - cf + \frac{1}{2}f^2 = 0 \tag{9}$$

que pode ser resolvida em termos de funções conhecidas. De fato as soluções de (9) (e portanto também soluções de (7)) são dadas pela forma funcional

$$Q_c(t,x) := 3c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\left(x - ct + x_0\right)\right) \tag{10}$$

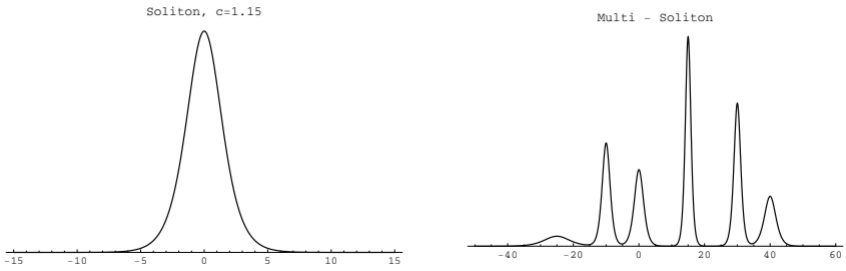

Figura 1: Esquerda: Sóliton (10) de KdV com $c = 1.15$ e $x_0 = 0$. Direita: Multi-Sóliton (11) obtido como superposição de 6 sólitons com diferentes scalings $c_i, i = 1, \ldots 6$.

com $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado de modo arbitrário. Voltando às soluções (10), essas ondas de translação são chamadas de ondas solitárias, ou viajantes, ou também sólitons. Observe também que na solução (10) anterior, quanto maior a sua amplitude c, maior é a sua velocidade de propagação c, sendo essa uma propriedade típica das ondas, como bem sabem as pessoas que vivem do mar, e também os surfistas.

Obviamente, da mesma maneira que observamos na realidade uma única onda como (10), também podem ser observadas, em condições de águas rasas (por exemplo na beira de uma praia com inclinação pequena, num dia com pouco vento) duas, três ou mais ondas seguidas, propagando-se. Portanto, se o modelo matemático proposto for suficientemente bom, ele teria também que reproduzir ou replicar esses fenômenos de várias ondas consecutivas. Afortunadamente, o modelo KdV (7) reproduz essas multiondas ou n ondas solitárias, da seguinte forma:

$$R(t,x) := 12\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(F(t,x)) \approx \sum_{i=1}^{n}\left(Q_{c_i}\left(t, x - x_i\right) + \rho_{c_i}(t,x)\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{11}$$

com $F(t,x)$ uma certa função conhecida, dependendo das velocidades c_i (ver [1], [37], [23] ou [39] para uma expressão explícita da mesma). De fato, como pode se ver no lado direito, essa expressão pode se aproximar como uma soma de ondas solitárias Q_{c_i} (10) com diferentes velocidades c_i e separadas por quantidades determinadas pelos x_i. Além disso, aqui $\rho_{c_i}(t,x)$ é um termo que se dissipa no tempo, indo para 0 . Observe que se em (8) supomos condições não nulas para f nos extremos, isto é, se depois da integração obtivermos

$$f'' - cf + \frac{1}{2}f^2 = a, \quad a \neq 0 \tag{12}$$

então podemos obter soluções periódicas (no espaço) para a equação (7).

Voltando às multiondas (11), observe que como as ondas têm diferentes alturas c_i, e portanto velocidades c_i diferentes, elas se afastam umas das outras, sendo difícil ter "controle" sobre elas. Bom, uma maneira de ter "controle"sobre as ondas seria escolher uma outra solução com todas as velocidades c_i iguais a uma velocidade comum c, e separando cada uma das ondas, na mesma distância $x_i \equiv \bar{x}$, e assim ter todas as ondas indo na mesma velocidade e sem se afastar entre elas. Apesar desse estado poder ser construído analiticamente, é muito difícil observar tal distribuição na realidade, como consequência do grande número de fatores aleatórios que afetam a precisa colocação de uma tal distribuição ordenada inicialmente. Em certa medida, é um estado de ondas "artificial"e a natureza tende a não se comportar exatamente desse modo.

Como fazer então para "controlar" ou "empacotar" as ondas ? Como a natureza faz ? A resposta para essas perguntas são os chamados *breathers* ou *pacotes de ondas* (um exemplo aparece na Figura 2) como veremos a seguir.

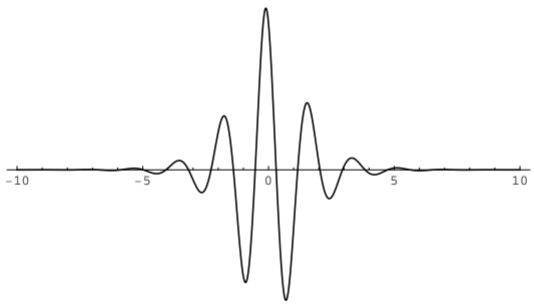

Figura 2: Um exemplo de *breathers* ou *pacote de ondas* no instante inicial $t = 0$.

Breathers

Antes de tentar "controlar" ondas, como falávamos anteriormente, é preciso entendê-las melhor. Assim, para abranger a descrição de mais fenômenos ondulatórios observados, ao

longo do tempo foram propostas melhorias e generalizações do modelo (7). Por exemplo, Miura percebeu em [45], que através da transformação

$$v(t,x) := \left(u^2 + u_x\right)(t,x) \tag{13}$$

a equação KdV (7) torna-se outra equação, chamada de equação modificada de KdV (ou mKdV) desfocalizante (pelo sinal - na frente da não linearidade)

$$u_t + u_{xxx} - u^2 u_x = 0 \tag{14}$$

ou no caso de trabalhar com a transformação complexa

$$v(t,x) := \left(u^2 + iu_x\right)(t,x) \tag{15}$$

a KdV (7) converte-se na correspondente equação modificada de KdV (ou mKdV) focalizante (pelo sinal + na frente da não linearidade)

$$u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0 \tag{16}$$

Resumindo, o que Miura encontrou foram as chamadas transformações de Miura (13) e (15), que levam soluções da KdV (7) em soluções da mKdV (14) e (16), dependendo da transformação usada.

Além do mais, pode-se estabelecer uma outra equação relacionada com a KdV (7) a partir da seguinte observação: procurando na mKdV focalizante (16) (por exemplo), soluções do tipo $u(t,x) = \mu + w(t,x)$ com $\mu \in \mathbb{R}$, e depois de fazer uma translação simples no espaço, pode-se encontrar simplesmente a equação de Gardner

$$w_t + w_{xxx} + \mu w w_x + w^2 w_x = 0, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{17}$$

que como pode ser visto, é uma mistura entre os modelos KdV e o mKdV (16). Ambos os modelos (16) e (17) também descrevem propagação de ondas solitárias, tendo soluções explícitas que podem ser encontradas. Por exemplo, da mesma maneira que a (7), a solução sóliton de (16) é dada por

$$u(t,x) = Q_c\left(x - ct + x_0\right), \quad Q_c(s) := \sqrt{c}Q(\sqrt{c}s), \quad c > 0, x_0 \in \mathbb{R} \tag{18}$$

onde x_0 é uma translação fixa de modo arbitrário e com $Q(x) := \sqrt{6}\,\mathrm{sech}(x)$. De fato, $Q_c > 0$ é solução da equação diferencial

$$Q_c'' - cQ_c + \frac{1}{3}Q_c^3 = 0 \tag{19}$$

ou reescrita em termos de um operador diferencial de segunda ordem da seguinte forma

$$\mathcal{T}_c Q_c = 0, \quad \mathcal{T}_c := \partial_x^2 - c + \frac{1}{3}Q_c^2 \tag{20}$$

e que chamaremos de *operador do sóliton*. A mKdV (16) também tem soluções na forma de múltiplas ondas solitárias de maneira parecida ao exemplo de (11), sendo que uma

das consequências diretas de ter essas multiondas, ou N ondas solitárias, é que sob certas condições elas podem se acoplar e grudar como um todo. O exemplo mais simples aparece no caso de duas ondas solitárias. Para a mKdV (16) por exemplo, isto é quando $N = 2$ em (11). Nesse caso particular, quando os parâmetros c_1 e c_2 estão relacionados pela conjugação complexa, assim $\sqrt{c_1} = \sqrt{\sqrt{c_2}} = \beta + i\alpha$, então se obtém uma solução chamada de *breather*, ou de *pacote de ondas*

$$B_{\alpha,\beta}(t,x) := 2\sqrt{6}\partial_x \left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\operatorname{sen}(\alpha(x+\delta t))}{\cosh(\beta(x+\gamma t))}\right)\right] \qquad \gamma = 3\alpha^2 - \beta^2, \quad \delta = \alpha^2 - 3\beta^2 \tag{21}$$

Estes *breathers* foram descobertos por Wadati em 1973 [55] para o modelo mKdV (16). De fato, pode se comprovar que o modelo mKdV desfocalizante (14) também tem soluções *breather*, mas eles são singulares em vez dos *breathers* (21) que são regulares em $\mathbb{R}$. Esses *breathers* ou *pacotes de ondas* propagam-se com velocidade γ (observe em (21), que ela pode ser > 0 ou < 0 dependendo da relação entre os parâmetros α e β), oscilando no tempo, sem dispersar ou desaparecer, e até inclusive colidir elasticamente com outras estruturas ou objetos. Isso quer dizer que os *breathers* têm boas propriedades de estabilidade, pois pequenas perturbações não os afetam, e permanecem essencialmente como estavam antes da perturbação interagir e atuar sobre a solução (ver na Figura 2 um exemplo de (21) e ler [4] para mais detalhes das propriedades de estabilidade desses *breathers*).

Apesar da expressão (21) ser, funcionalmente falando, mais complicada que a expressão da onda solitária (10), ela pode ser interpretada de maneira simples, quando o parâmetro α (que leva a informação da oscilação da onda) é bem maior que o parâmetro β (que leva a informação da amplitude da onda). Isto é, quando $\alpha \gg \beta$. Sendo assim, podemos fazer um desenvolvimento em (21) para $\beta/\alpha \ll 1$ e obter

$$B_{\alpha,\beta}(t,x) \approx 2\sqrt{6}\beta\cos(\alpha(x+\delta t))\operatorname{sech}(\beta(x+\gamma t)) + O\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{22}$$

que é uma oscilação (a função cosseno) "morando" dentro da função sech, que decai exponencialmente rápido no espaço, o que essencialmente é um *breathers*. Matematicamente falando, é uma solução periódica no tempo que está localizada no espaço.

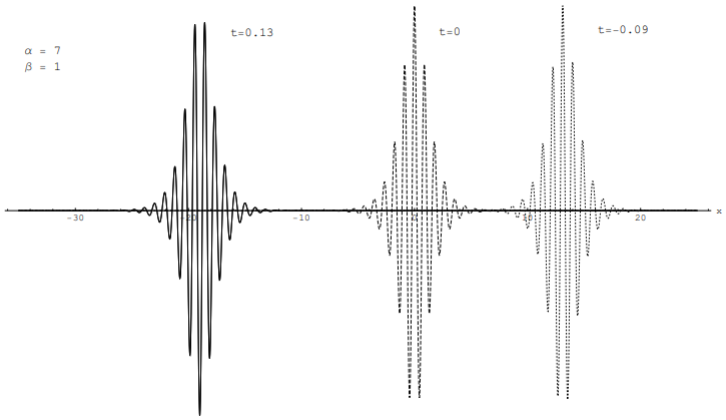

Figura 3: *Breather* de mKdV (16) com scalings $\alpha = 7, \beta = 1$, evoluindo no tempo.

Da mesma maneira que o sóliton (18) é caracterizado por ser solução da equação diferencial (19), foi provado recentemente em [4] que os *breathers* também satisfazem uma equação diferencial, sendo sua propriedade principal o fato de ser de quarta ordem. Explicitamente, os *breathers* de mKdV (16) satisfazem a seguinte equação diferencial (aquí $B_{\alpha,\beta} \equiv B$)

$$B_{xxxx} - 2\left(\beta^2 - \alpha^2\right)\left(B_{xx} + \frac{1}{3}B^3\right) + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2 B + \frac{5}{3}BB_x^2 + \frac{5}{3}B^2B_{xx} + \frac{1}{6}B^5 = 0 \quad (23)$$

O fato surpreendente é que outras soluções *breathers* em outros modelos da Física Matemática (Por exemplo sine-Gordon, NLS, Sasa-Satsuma. Ver [9],[7], [10] e [11] para mais detalhes) satisfazem o mesmo tipo de equação diferencial, isto é, uma equação diferencial de quarta ordem com diferentes termos não lineares do mesmo tipo para os diferentes modelos.

Uma maneira de interpretar esse caráter universal da equação diferencial (23) é observar que usando o operador do sóliton (20), substituindo $Q_{c_i}, i = 1, 2$ pelo *breather* B e levando em conta que no caso *breather* $\sqrt{c_1} = \sqrt{c_2} = \beta + i\alpha$, podemos reescrever (23) como

$$\mathcal{T}_{c_1}\mathcal{T}_{c_2}B + \frac{1}{3}B^2B_{xx} - \frac{1}{3}BB_x^2 + \frac{1}{18}B^5 = 0 \quad (24)$$

Portanto, no fundo, essa universalidade da equação diferencial satisfeita por perfis tipo *breather* não deixa de ser um reflexo do caráter "dois-sóliton"do *breather*, pois pode-se interpretar como se cada sóliton, compondo o estado acoplado *breather*, fornecesse um operador ∂_x^2 ao operador de quarta ordem da equação diferencial (23). Para mais detalhes sobre essa questão veja [4].

Um aspecto positivo da mKdV (16), e outros modelos da Física Matemática, é que se pode construir soluções que sejam *multipacotes de ondas*, ou N *breathers*, ou até *breathers*

periodicamente distribuídos. É por isso que esses modelos são chamados de integráveis, pois de alguma maneira permitem integrar as equações diferenciais para obter as suas soluções. Por exemplo, no caso particular da equação de Gardner [3], podem se obter soluções tipo *breather* periódico como na Figura 4.

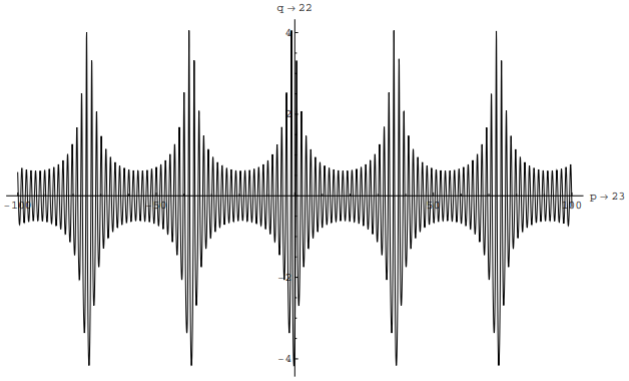

Figura 4: *Breather* espacialmente periódico de Gardner (17).

O leitor poderia se perguntar por que foi preciso ir até a equação mKdV focalizante (16) ou até a equação de Gardner (17) para encontrar estes *breathers* ou *pacotes de ondas*, sendo que o primeiro modelo, e mais simples de todos, é a equação de KdV (7). Essa é uma boa e profunda pergunta que só pôde ser respondida recentemente (2018), num trabalho de Muñoz e Ponce [48], onde eles caracterizaram os modelos que possuem *breathers* e alguns que não admitem esse tipo de solução, sendo que a KdV (7) está entre esses últimos. Tal trabalho será o foco dessa dissertação, onde os resultados citados anteriormente serão provados no Capítulo 2. O Capítulo 1 segue com algumas preliminares que ajudarão na compreensão do texto.

Dedico os créditos dessa introdução á Miguel A. Alejo, seu trabalho me serviu de inspiração para um primeiro contato com *breathers* e pode ser consultado em [2].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 A Transformada de Fourier

Nesta seção, estudaremos algumas propriedades básicas da transformada de Fourier. A sub-seção 1.1.1 trata da sua definição e propriedades em $L^1(\mathbb{R}^n)$, o caso $L^2(\mathbb{R}^n)$ é abordado na sub-seção seguinte e o espaço das distribuições temperadas é brevemente abordado na sub-seção 1.1.3.

1.1.1 A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.1 A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\widehat{f}$, é definida como:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x\cdot\xi)} dx, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

onde $(x \cdot \xi) = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Listamos algumas propriedades básicas da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.2 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então:*

1. *$f \mapsto \widehat{f}$ define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ para $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1. \tag{1.2}$$

2. *$\widehat{f}$ é contínua.*
3. *$\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$ (Riemann-Lebesgue).*
4. *Se $\tau_h f(x) = f(x-h)$ denota a translação por $h \in \mathbb{R}^n$, então*

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i (h\cdot\xi)} \widehat{f}(\xi) \tag{1.3}$$

e

$$\left(\widehat{e^{-2\pi i(x\cdot h)}f}\right)(\xi) = \left(\tau_{-h}\widehat{f}\right)(\xi) \tag{1.4}$$

5. Seja $\delta_a f(x) = f(ax)$ denotando uma dilatação por $a > 0$, então

$$\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n}\widehat{f}\left(a^{-1}\xi\right). \tag{1.5}$$

6. Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f * g$ a convolução de f e g. Então,

$$\widehat{(f*g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \tag{1.6}$$

7. Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy \tag{1.7}$$

Note que a igualdade em (1.2) vale para $f \geq 0$, ou seja, $\widehat{f}(0) = \|\widehat{f}\|_\infty = \|f\|_1$.

Para detalhes sobre esses fatos consulte [38].

A seguir, alguns exemplos para ilustrar as propriedades apresentadas no Teorema 1.2.

Exemplo 1.1.1 Seja $n = 1$ e $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$ (a função característica do intervalo (a, b)). Então,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_a^b e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= -\frac{e^{-2\pi ib\xi} - e^{-2\pi ia\xi}}{2\pi i\xi} \\ &= -e^{-\pi i(a+b)\xi}\frac{\sin(\pi(a-b)\xi)}{\pi\xi}\end{aligned}$$

Note que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ e que $\widehat{f}(\xi)$ tem uma extensão analítica $\widehat{f}(\xi + i\eta)$ para todo o plano $\xi + i\eta \in \mathbb{C}$. Em particular, se $(a, b) = (-k, k), k \in \mathbb{Z}^+$, então

$$\widehat{\chi}_{(-k,k)}(\xi) = \frac{\sin(2\pi k\xi)}{\pi\xi}$$

Exemplo 1.1.2 Seja $n = 1$ e para $k \in \mathbb{Z}^+$ defina

$$g_k(x) = \begin{cases} k + 1 + x, & \text{se } x \in (-k-1, -k+1] \\ 2, & \text{se } x \in (-k+1, k-1) \\ k + 1 - x, & \text{se } x \in [k-1, k+1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ou seja, $g_k(x) = \chi_{(-1,1)} * \chi_{(-k,k)}(x)$. A identidade (1.6) e o exemplo anterior mostram que

$$\widehat{g}_k(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)\sin(2\pi k\xi)}{(\pi\xi)^2}$$

Note que $\widehat{g}_k \in L^1(\mathbb{R})$ e tem uma extensão analítica para todo o plano $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.1.3 Seja $n \geq 1$ e $f(x) = e^{-4\pi^2 t|x|^2}$ com $t > 0$. Então, mudando de variáveis $x \to x/\sqrt{t}$ e usando (1.5), podemos nos restringir ao caso $t = 1$. Pelo Teorema de Fubini, escrevemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|x|^2} e^{-2\pi i(x\cdot\xi)} dx &= \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-4\pi^2 x_j^2 - 2\pi i \xi_j x_j\right)} dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-4\pi^2 x_j^2 - 2\pi i \xi_j x_j + \xi_j^2/4\right)} e^{-\xi_j^2/4} dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{n} e^{-\xi_j^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_j + i\xi_j/2)^2} dx_j \\
&= 2^{-n}\pi^{-n/2} e^{-|\xi|^2/4},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade, usamos as identidades da integração complexa e cálculo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x + i\xi/2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Portanto,

$$\widehat{e^{-4\pi^2 t|x|^2}}(\xi) = \frac{e^{-|\xi|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}. \tag{1.8}$$

Observe que tomando $t = 1/4\pi$ e mudando as variáveis $t \to 1/16\pi^2 t$ obtemos:

$$\widehat{e^{-\pi|x|^2}}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2} \quad \text{e} \quad \widehat{\frac{e^{-|x|^2/4}}{(4\pi t)^{n/2}} t}(\xi) = e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}$$

respectivamente.

Uma das características mais importantes da transformada de Fourier é sua relação com a diferenciação. Isso é descrito no seguinte resultado de linares e Ponce (ver [38]).

Proposição 1.3 *Suponha que $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onde x_k denota a k-ésima coordenada de x. Então, $\widehat{f}$ é diferenciável em relação a ξ_k e*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = \left(-\widehat{2\pi i x_k f(x)}\right)(\xi). \tag{1.9}$$

Em outras palavras, a transformada de Fourier do produto $x_k f(x)$ é igual a um múltiplo da derivada parcial de $\widehat{f}(\xi)$ em relação à variável k.

Para considerar tal resultado, precisamos introduzir uma definição.

Definição 1.4 Seja $1 \leq p < \infty$. Uma função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é diferenciável em $L^p(\mathbb{R}^n)$ em relação à k-ésima variável, se existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h} - g(x) \right|^p dx \to 0 \text{ quando } h \to 0$$

onde e_k tem a k-ésima coordenada igual a 1 e 0 nas outras. Se tal função g existe (neste caso é única), é chamada de derivada parcial de f em relação à k-ésima variável na norma L^p.

Teorema 1.5 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e g seja sua derivada parcial em relação à k-ésima variável na norma L^1. Então, $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$.*

Demonstração:

As propriedades (1.2) e (1.4) do Teorema 1.2 nos permitem escrever

$$\left| \widehat{g}(\xi) - \widehat{f}(\xi) \frac{\left(1 - e^{-2\pi i h(\xi \cdot e_k)}\right)}{h} \right|,$$

e então tomamos $h \to 0$ para obter o resultado.

■

Dos teoremas anteriores, é fácil obter as fórmulas:

$$\begin{aligned} P(D)\widehat{f}(\xi) &= (P(-2\pi i x) f(x))^{\wedge}(\xi) \\ \widehat{(P(D)f)}(\xi) &= P(2\pi i \xi)\widehat{f}(\xi) \end{aligned} \tag{1.10}$$

onde P é um polinômio em n variáveis e $P(D)$ denota o operador diferencial associado a P.

Agora voltamos nossa atenção para a seguinte questão: Dada a transformada de Fourier $\widehat{f}$ de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$, como podemos recuperar f?

O exemplo 1.1.3 sugerem o uso da fórmula

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i (x \cdot \xi)} d\xi$$

Infelizmente, $\widehat{f}(\xi)$ pode ser não integrável (veja o Exemplo (1.1.1)). Para evitar esse problema, é necessário usar o chamado método de somabilidade (Abel e Gauss), semelhante aos usados no estudo das séries de Fourier. Combinando as ideias por trás do método de somação de Gauss e as identidades (1.4), (1.7), (1.8), obtemos as seguintes igualdades:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{e^{-|\cdot|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} * f(x) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} f(y)dy \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \frac{e^{-|y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} f(y)dy \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{2\pi i(x\cdot\xi)} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\right)(y) f(y)dy \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)d\xi,
\end{aligned}
$$

onde o limite é tomado na norma L^1.

Assim, se f e $\widehat{f}$ são ambos integráveis, o teorema da convergência dominada de Lebesgue garante a igualdade pontual. Além disso, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é contínua no ponto x_0, obtemos:

$$
f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-|\cdot|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} * f(x_0) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x_0\cdot\xi)} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)d\xi
$$

Agrupando esta informação, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.6 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$
f(x) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)d\xi
$$

onde o limite é tomado na norma L^1. Além disso, se f é contínua no ponto x_0, então a seguinte igualdade pontual é válida:

$$
f(x_0) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x_0\cdot\xi)} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)d\xi
$$

Seja $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então,

$$
f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} \widehat{f}(\xi)d\xi, \qquad \textit{quase em todo ponto} x \in \mathbb{R}^n
$$

A partir deste resultado e do Teorema 1.2, podemos concluir que

$$
\wedge : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n)
$$

é uma aplicação linear, injetora, limitada. No entanto, não é sobrejetora.

1.1.2 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Para definir a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, vamos primeiro considerar que $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.7 (Plancherel) *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Então, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \tag{1.11}$$

Demonstração:
Seja $g(x) = -x$. Usando a desigualdade de Young e o resultado (1.6), segue que

$$f * g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Como $\widehat{g} = \widehat{(\widehat{f})}$, temos que $\widehat{(\widehat{f * g})} = |\widehat{f}|^2 \geq 0$. Logo, $\widehat{(f * g)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pela Proposição 1.6, temos que

$$(f * g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(f * g)}(\xi)\, d\xi$$

e

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(f * g)}(\xi)\, d\xi = (f * g)(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(0 - x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{f}(x)\, dx = \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

■

Portanto, a transformada de Fourier define um operador linear limitado de $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. De fato, este operador é uma isometria. Assim, existe uma extensão única limitada $\mathcal{F}$ definida em todo $L^2(\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}$ é chamada de transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Usaremos a notação $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Em geral, a definição de $\widehat{f}$ é realizada como um limite em L^2 da sequência $\{\widehat{h}_j\}$, onde $\{h_j\}$ denota qualquer sequência em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ que converge para f na norma L^2. É conveniente tomar h_j igual a f para $|x| \leq j$ e fazer h_j se anular para $|x| > j$. Então,

$$\widehat{h}_j(\xi) = \int_{|x|<j} f(x)e^{-2\pi i(x\cdot\xi)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} h_j(x)e^{-2\pi i(x\cdot\xi)}\, dx$$

e assim,

$$\widehat{h}_j(\xi) \to \widehat{f}(\xi) \text{ em } L^2, \text{ conforme } j \to \infty.$$

Teorema 1.8 *A transformada de Fourier define um operador unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração:
Da identidade (1.11) segue que $\mathcal{F}$ é uma isometria. Em particular, sua imagem é um subespaço fechado de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha que este seja um subespaço próprio de L^2. Então, existe $g \neq 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)\, dy = 0, \quad \text{para qualquer } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Usando a fórmula (1.7), que obviamente se estende para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)\, dy = 0, \quad \text{para qualquer } f \in L^2.$$

Portanto, $\widehat{g}(\xi) = 0$ quase em todo ponto, o que contradiz

$$\|g\|_2 = \|\widehat{g}\|_2 \neq 0.$$

■

Teorema 1.9 *A inversa da transformada de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ pode ser definida pela fórmula*

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x), \quad \textit{para qualquer } f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.12}$$

Demonstração:
$\mathcal{F}^{-1}\widehat{f} = \tilde{f}$ é o limite na norma L^2 da sequência

$$f_j(x) = \int_{|\xi|<j} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(\xi\cdot x)}\, d\xi.$$

Primeiro, consideramos o caso onde $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Basta verificar que isso concorda com $\mathcal{F}^*\widehat{f}$, onde $\mathcal{F}^*$ é o operador adjunto de $\mathcal{F}$ (lembramos que para um operador unitário o adjunto e a inversa são iguais). Isso pode ser verificado da seguinte forma:

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(\xi\cdot x)}\, d\xi = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\begin{aligned}(g, \tilde{f}) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i(\xi\cdot x)}\, d\xi \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i(x\cdot\xi)}\, dx \right) \overline{\widehat{f}(\xi)}\, d\xi = (\mathcal{F}g, \widehat{f})\end{aligned}$$

para qualquer $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo $\tilde{f} = f$.

O caso geral segue combinando o resultado acima com a passagem do limite. ■

1.3 Distribuições Temperadas

Das definições da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$, há uma extensão natural para $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Não é difícil ver que $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ contém os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq 2$. Para ver isso de maneira mais concreta, podemos usar a desigualdade de Hölder, que afirma que se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $L^q(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$. No caso específico de $1 \leq p \leq 2$, a desigualdade de Hölder implica que $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, qualquer função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser decomposta como $f = g + h$, onde $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Isso mostra que $L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, como provaremos, qualquer função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 2$ tem uma transformada de Fourier no sentido das distribuições. No entanto, elas podem não ser funções, são distribuições temperadas. Antes de estudá-las, é conveniente ver até onde a Definição 1.1 pode ser levada.

Exemplo 1.1.4 Seja $n \geq 1$ e $f(x) = \delta_0$, a função delta, ou seja, a medida de massa um concentrada na origem. Usando (1.1), encontramos que

$$\widehat{\delta_0}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(x) e^{-2\pi i(x\cdot\xi)} dx \equiv 1$$

De fato, a Definição 1.1 nos diz que se μ é uma medida finita, então $\widehat{\mu}(\xi)$ representa uma função em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Suponha que dado $f(x) \equiv 1$ queremos encontrar $\widehat{f}(\xi)$. Neste caso, a Definição 1.1 não pode ser usada diretamente. É necessário introduzir a noção de distribuição temperada. Para este propósito, primeiro precisamos da seguinte família de seminormas.

Para cada $(\nu, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$ denotamos a seminorma $\|\cdot\|_{(\nu,\beta)}$ definida como:

$$\|f\|_{(\nu,\beta)} = \left\|x^\nu \partial_x^\beta f\right\|_\infty$$

Agora podemos definir o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções C^∞ que decaem no infinito, ou seja,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{(\nu,\beta)} < \infty \text{ para qualquer } \nu, \beta \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^n\right\}$$

Assim, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (considere $f(x)$ como em Exemplo 1.1.3).

A topologia em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada pela família de seminormas $\|\cdot\|_{(\nu,\beta)}, (\nu,\beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$.

Definição 1.10 Seja $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, $\varphi_j \to 0$ quando $j \to \infty$, se para qualquer $(\nu,\beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$ temos que

$$\|\varphi_j\|_{(\nu,\beta)} \longrightarrow 0 \text{ quando } j \to \infty.$$

A relação entre a transformada de Fourier e o espaço de funções $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é descrita nas fórmulas (1.10). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.11 *A aplicação $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em si mesmo.*

Assim, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aparece naturalmente associado à transformada de Fourier. Por dualidade, podemos definir as distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.12 Dizemos que $\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ define uma distribuição temperada, isto é, $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se:

1. Ψ é linear.
2. Ψ é contínua, isto é, se para qualquer $\{\varphi_j\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \to 0$ quando $j \to \infty$, então a sequência numérica $\Psi(\varphi_j) \to 0$ quando $j \to \infty$.

É fácil verificar que qualquer função limitada f define uma distribuição temperada Ψ_f, onde

$$\Psi_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \text{ para qualquer } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{1.13}$$

De fato, esta identidade nos permite ver que qualquer função localmente integrável com crescimento polinomial no infinito define uma distribuição temperada. Em particular, temos os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. O exemplo a seguir nos dá uma distribuição temperada fora desses espaços de função.

Exemplo 1.1.5 Em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, definimos a função valor principal de $1/x$, denotada por p.v. $\frac{1}{x}$, pela expressão

$$\text{p.v. } \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Como $1/x$ é uma função ímpar,

$$\text{p.v. } \frac{1}{x}(\varphi) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \tag{1.14}$$

Portanto,

$$|\text{ p.v. } \frac{1}{x}(\varphi)| \leq 2\|\varphi'\|_\infty + 2\|x\varphi\|_\infty \tag{1.15}$$

e consequentemente, p.v. $\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Agora, dada uma $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier pode ser definida na seguinte forma natural.

Definição 1.13 Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, sua transformada de Fourier $\widehat{\Psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida como:

$$\widehat{\Psi}(\varphi) = \Psi(\widehat{\varphi}), \text{ para qualquer } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{1.16}$$

Observe que para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, (1.7), (1.13) e (1.16) nos dizem que

$$\widehat{\Psi}_f(\varphi) = \Psi_f(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(x)dx = \Psi_{\widehat{f}}(\varphi)$$

Portanto, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $\widehat{\Psi}_f = \Psi_{\widehat{f}}$. Assim, a Definição 1.13 é consistente com a teoria da transformada de Fourier desenvolvida nas Seções 1.1.1 e 1.1.2.

Exemplo 1.1.6 Seja $f(x) \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Usando a notação anterior, para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$\widehat{\Psi}_1(\varphi) = \Psi_1(\widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} 1\widehat{\varphi}(x)dx = \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(x)\varphi(x)dx = \delta_0(\varphi).$$

Logo $\widehat{1} = \delta_0$. Lembramos que no Exemplo 1.1.4 já vimos que $\widehat{\delta_0} = 1$.

A seguir computamos a transformada de Fourier da distribuição temperada do Exemplo 1.1.5

Exemplo 1.1.7 Combinando a Definição 1.13, o Teorema de Fubini e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{p.v. } \frac{1}{x}}(\varphi) = \text{ p.v. } \frac{1}{x}(\widehat{\varphi}) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{x} dx \\
&= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{1}{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i x y} dy \right) dx \\
&= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \left(\int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{e^{-2\pi i x y}}{x} dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \left(\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{e^{-2\pi i x y}}{x} dx \right) dy \\
&= -i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(y) \varphi(y) dy
\end{aligned}$$

onde uma mudança de variáveis e integração complexa foram utilizadas para concluir que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{e^{-2\pi i x y}}{x} dx = -2i \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi x y)}{x} dx &= -2i \operatorname{sgn}(y) \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \\
&= -i\pi \operatorname{sgn}(y).
\end{aligned}$$

Isso nos dá a identidade:

$$\widehat{\text{p.v. } \frac{1}{x}}(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi).$$

A topologia em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser descrita da seguinte forma.

Definição 1.14 Se $\{\Psi_j\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, então, $\Psi_j \to 0$ quando $j \to \infty$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, se para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ segue que $\Psi_j(\varphi) \longrightarrow 0$ quando $j \to \infty$.

Como consequência das Definições 1.12, 1.14, obtemos a próxima extensão do Teorema 1.11, cuja prova será omitida.

Teorema 1.15 *A aplicação $\mathcal{F} : \Psi \mapsto \widehat{\Psi}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ em si mesmo.*

Exemplo 1.1.8 $e^{-\widehat{4\pi^2 i t}|x|^2} = \lim_{\epsilon \to 0^+} e^{-\pi^2 \widehat{(\epsilon + it)}|x|^2}$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Segue que,

$$\left(e^{-4\pi^2\widehat{(\epsilon+it)}|x|^2}\right)(\xi) = \frac{e^{-|\xi|^2/4(\epsilon+it)}}{[4\pi(\epsilon+it)]^{n/2}}$$

Tomando o limite $\epsilon \to 0^+$, obtemos:

$$\left(e^{-4\widehat{\pi^2 it}|x|^2}\right)(\xi) = \frac{e^{i|\xi|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} \tag{1.17}$$

Como aplicação dessas ideias, introduzimos a transformada de Hilbert.

Definição 1.16 Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos sua transformada de Hilbert $\mathrm{H}(\varphi)$ por

$$\mathrm{H}(\varphi)(y) = \frac{1}{\pi}\ \text{p.v.}\ \frac{1}{x}(\varphi(y-\cdot)) = \frac{1}{\pi}\ \text{p.v.}\ \frac{1}{x} * \varphi(y).$$

De (1.14) e (1.15) é claro que $\mathrm{H}(\varphi)(y)$ é definido para qualquer $y \in \mathbb{R}$ e é limitado por $g(y) = a|y| + b$, com $a, b > 0$ dependendo de φ. Em particular, temos que $\mathrm{H}(\varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Vamos calcular sua transformada de Fourier.

Exemplo 1.1.9 Do Exemplo 1.1.7 e da identidade

$$\mathrm{H}(\varphi)(y) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{x}\chi_{\{\epsilon<|x|<1/\epsilon\}} * \varphi\right)(y) \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

segue que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{x}\chi_{\{\epsilon<|x|<1/\epsilon\}} * \varphi\right)(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$$

Isso implica que

$$\widehat{\mathrm{H}(\varphi)}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi), \text{ para qualquer } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.18}$$

A identidade (1.18) nos permite estender a transformada de Hilbert como uma isometria em $L^2(\mathbb{R})$. Não é difícil ver que

$$\|\mathrm{H}(\varphi)\|_2 = \|\varphi\|_2 \text{ e } \mathrm{H}(\mathrm{H}(\varphi)) = -\varphi.$$

Na Definição 1.16, implicitamente utilizamos o seguinte resultado,

Proposição 1.17 *Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Defina*

$$\Psi * \varphi(x) = \Psi(\varphi(x-\cdot)) \tag{1.19}$$

Então,

$$\Psi * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\widehat{\Psi * \varphi} = \widehat{\Psi}\widehat{\varphi} \tag{1.20}$$

onde $\widehat{\Psi}\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é definido como* $\widehat{\Psi}\widehat{\varphi}(\phi) = \widehat{\Psi}(\widehat{\varphi}\phi)$ *para qualquer* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Espaços de Funções

Nesta seção, apresentamos uma breve introdução aos espaços de Sobolev clássicos $H^s(\mathbb{R}^n)$. Os espaços de Sobolev medem a diferenciabilidade (ou regularidade) das funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e são uma ferramenta fundamental no estudo de equações diferenciais parciais. Começamos definindo os espaços de Sobolev.

Definição 1.18 Para $s \in \mathbb{R}$, definimos o espaço de Sobolev de ordem s, denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$, como:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^s f(x) = \left(\left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \right)^{\vee}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} \tag{1.21}$$

com a norma $\|\cdot\|_{s,2}$ definida como:

$$\|f\|_{s,2} = \|\Lambda^s f\|_2 \tag{1.22}$$

Exemplo 1.2.1 Para $n = 1$ e $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$. Do Exemplo 1.1.1, temos que $\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$. Assim, $f \in H^s(\mathbb{R})$ se $s < \frac{1}{2}$.

Exemplo 1.2.2 Para $n = 1$ e $g(x) = \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x)$. No Exemplo 1.1.2, vimos que

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{\sin^2(2\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}$$

Assim, $g \in H^s(\mathbb{R})$ sempre que $s < \frac{3}{2}$.

Da definição dos espaços de Sobolev, deduzimos as seguintes propriedades, cuja prova será omitida.

Proposição 1.19 *1. Se* $s < s'$, *então* $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.

2. $H^s(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ *definido como segue:*

$$\textit{Se } f, g \in H^s(\mathbb{R}^n), \textit{ então } \langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)}\, d\xi$$

Podemos ver, via transformada de Fourier, que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é igual a:

$$L^2(\mathbb{R}^n; (1+|\xi|^2)^s \, d\xi)$$

3. *Para qualquer $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

4. *Se $s_1 \leq s \leq s_2$, com $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, então*

$$\|f\|_{s,2} \leq \|f\|_{s_1,2}^{\theta} \|f\|_{s_2,2}^{1-\theta}$$

Para entender a relação entre os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ e a diferenciabilidade das funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$, lembramos a Definição 1.4 no caso $p = 2$.

Definição 1.20 Uma função f é diferenciável em $L^2(\mathbb{R}^n)$ com respeito à k-ésima variável, se existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h} - g(x) \right|^2 dx \to 0 \text{ quando } h \to 0$$

onde e_k tem coordenada k-ésima igual a 1 e 0 nas outras.

Equivalentemente, $\xi_k \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ou

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_k} \phi(x) \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x) \, dx$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (sendo $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto).

Com essa definição, para $k \in \mathbb{Z}^+$ podemos dar uma descrição do espaço $H^k(\mathbb{R}^n)$ sem usar a transformada de Fourier.

Teorema 1.21 *Se k é um inteiro positivo, então $H^k(\mathbb{R}^n)$ coincide com o espaço de funções $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ cujas derivadas (no sentido das distribuições) $\partial_x^\alpha f$ pertencem a $L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^n$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$.*

Nesse caso, as normas $\|f\|_{k,2}$ e $\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_2$ são equivalentes.

Demonstração:

A prova segue combinando a fórmula $\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$ (veja (1.10)) e as desigualdades:

$$\left|\xi^\beta\right| \leq \left(1+|\xi|^2\right)^{k/2} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|, \quad \beta \in (\mathbb{Z}^+)^n, \quad |\beta| \leq k$$

■

O Teorema 1.21 nos permite definir de maneira natural $H^k(\Omega)$, o espaço de Sobolev de ordem $k \in \mathbb{Z}^+$ em qualquer subconjunto Ω (aberto) de $\mathbb{R}^n$. Dado $f \in L^2(\Omega)$, dizemos

que $\partial_x^\alpha f$, $\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^n$ é a α-ésima derivada parcial (no sentido das distribuições) de f, se para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f \partial_x^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial_x^\alpha f \phi dx$$

Então,

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \partial_x^\alpha f(\text{ no sentido das distribuições }) \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k \right\}$$

com a norma

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} \equiv \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \left| \partial_x^\alpha f(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

A seguir vamos provar uma série de resultados importantes conhecidos como imersões de Sobolev.

Teorema 1.22 (Imersão) *Se $s > n/2 + k$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente incluído em $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$, o espaço de funções com k derivadas contínuas que se anulam no infinito. Em outras palavras, se $f \in H^s(\mathbb{R}^n), s > n/2 + k$, então (após uma possível modificação de f em um conjunto de medida zero) $f \in C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{C^k} \leq c_s \|f\|_{s,2} \tag{1.23}$$

Demonstração:
Caso $k = 0$.

Primeiro mostramos que se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com

$$\left\| \widehat{f} \right\|_1 \leq c_s \|f\|_{s,2} \quad \text{, se } s > \frac{n}{2} \tag{1.24}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| \left(1 + |\xi|^2\right)^{s/2} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \\ &\leq \|\Lambda^s f\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2} \leq c_s \|f\|_{s,2} \end{aligned}$$

se $s > \frac{n}{2}$. Combinando (1.24), a Proposição 1.6 e o Teorema 1.2, concluímos que

$$\|f\|_\infty = \left\| (\widehat{f})^\vee \right\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_1 \leq c_s \|f\|_{s,2}$$

Caso $k \geq 1$

Usando o mesmo argumento, temos que se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > \frac{n}{2} + k$, então para $\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^n, |\alpha| \leq k$, segue que $\widehat{\partial_x^\alpha f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|\partial_x^\alpha f\|_\infty \leq \left\| \widehat{\partial_x^\alpha f} \right\|_1 = \left\| (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f} \right\|_1 \leq c_s \|f\|_{s,2}$$

■

Corolário 1.23 *Se $s = n/2 + k + \theta$, com $\theta \in (0,1)$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente incluído em $C^{k+\theta}(\mathbb{R}^n)$, o espaço de funções C^k com derivadas parciais de ordem k Hölder contínuas com índice θ.*

Demonstração:

Provaremos o caso $k = 0$.

Da fórmula de inversão da transformada de Fourier e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned} |f(x+y) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} \widehat{f}(\xi) \left(e^{2\pi i(y\cdot\xi)} - 1\right) d\xi \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{n/2+\theta} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|e^{2\pi i(y\cdot\xi)} - 1\right|^2}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}} d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left|e^{2\pi i(y\cdot\xi)} - 1\right|^2}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}} d\xi \\ &\leq c \int_{|\xi|\leq|y|^{-1}} |y|^2 |\xi|^2 \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}} + 4 \int_{|\xi|\geq|y|^{-1}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{n/2+\theta}} \\ &\leq c|y|^2 \int_0^{|y|^{-1}} \frac{r^{n+1}}{(1+r)^{n+2\theta}} dr + 4 \int_{|y|^{-1}}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{n+2\theta}} dr \leq c|y|^{2\theta} \end{aligned}$$

Se $|y| < 1$, concluímos que $|f(x+y) - f(x)| \leq c|y|^\theta$. Isso encerra a prova. ∎

Para o último resultado, vamos enunciar alguns fatos, incluindo o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev

Definição 1.24 Seja $0 < \alpha < n$. O Potencial de Riesz de ordem α, denotado por I_α é definido por

$$I_\alpha f(x) = c_{\alpha,n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy. \tag{1.25}$$

onde $c_{\alpha,n} = \phi^{-n/2} 2^{-\alpha} \Gamma(n/2 - \alpha/2)/\Gamma(\alpha/2)$.

Com essa definição podemos enunciar:

Teorema 1.25 (Hardy-Littlewood-Sobolev) *Seja $0 < \alpha < n, 1 \leq p < q < \infty$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*

1. Se $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ então a integral em (1.25) é absolutamente convergente para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

2.Se $p > 1$ então

$$\|I_\alpha f(x)\|_q \leq c_{n,p,\alpha} \|f\|_2 \tag{1.26}$$

Demonstração:
Consulte [38] ∎

Teorema 1.26 *Se $s \in (0, n/2)$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é continuamente imerso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $p = 2n/(n-2s)$, isto é, $s = n(1/2 - 1/p)$. Além disso, para $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, n/2)$,*

$$\|f\|_p \leq c_{n,s} \|D^s f\|_2 \leq c\|f\|_{s,2} \tag{1.27}$$

onde

$$D^l f = (-\Delta)^{l/2} f = \left((2\pi|\xi|)^l \widehat{f} \right)^\vee$$

Demonstração:
A última desigualdade em (1.27) é imediata, então precisamos apenas mostrar a primeira. Definimos

$$D^s f = g \quad \text{ou} \quad f = D^{-s} g = c_{n,s} \left(\frac{1}{|\xi|^s} \widehat{g} \right)^\vee = \frac{c_{n,s}}{|x|^{n-s}} * g \tag{1.28}$$

Assim, pela estimativa de Hardy-Littlewood-Sobolev (1.26), segue que

$$\|f\|_p = \|D^{-s} g\|_p = \left\| \frac{c_{n,s}}{|x|^{n-s}} * g \right\|_p \leq c_{n,s} \|g\|_2 = c\|D^s f\|_2 \tag{1.29}$$

∎

Observamos a partir dos Teoremas 1.22 e 1.26, e do Corolário 1.23 que a regularidade local em H^s, $s > 0$, aumenta com o parâmetro s.

Para completar os resultados de imersões nos espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$, resta considerar o caso $s = n/2$ (pois para $s = k + n/2$, $k \in \mathbb{Z}^+$, o resultado segue deste). Assim, definimos o espaço de funções da oscilação média limitada ou BMO, introduzido por John e Nirenberg.

Definição 1.27 Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ com $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, dizemos que $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ (f tem oscilação média limitada (BMO)) se

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - f_{B_r(x)}| dy < \infty \tag{3.9}$$

onde

$$f_{B_r(x)} = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy$$

Percebemos que $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$ é uma semi-norma, já que se anula para funções constantes.

O espaço $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial com $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$, já que $\|f\|_{\text{BMO}} \leq 2\|f\|_\infty$ e $\log|x| \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.28 *$H^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em* $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. *Mais precisamente, existe $c = c(n) > 0$ tal que*

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leq c\|D^{n/2}f\|_2$$

Demonstração:

Sem perda de generalidade, assumimos que f é uma função real. Para $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, definimos a função de suporte compacto suave $\phi_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\phi_r \subseteq \{x; |x| \leq \frac{2}{r}\}$ com $0 \leq \phi_r(x) \leq 1$ e $\phi_r(x) \equiv 1$ se $|x| < 1/r$, e definimos então

$$f(x) = f_l + f_h = \left(\widehat{f}\phi_r\right)^\vee + \left(\widehat{f}\,(1-\phi_r)\right)^\vee$$

onde f_l representa a parte de baixa frequência de f e f_h representa a parte de alta frequência de f.

Observamos que

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \leq \|f_l\|_{\mathrm{BMO}} + \|f_h\|_{\mathrm{BMO}}$$

e $f_l \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $s > 0$; portanto,

$$f_{l,B_r(x)} = \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f_l(y)dy = f_l(x_0)$$

para algum $x_0 \in B_r(x)$, e assim para qualquer $y \in B_r(x)$

$$|f_l(y) - f_{l,B_r(x)}| \leq 2r\|\nabla f_l\|_\infty.$$

Usando esta estimativa, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f_l(y) - f_{l,B_r(x)}|dy \\
&\quad\leq \frac{1}{|B_r(x)|^{1/2}}\left(\int_{B_r(x)} |f_l(y) - f_{l,B_r(x)}|^2 dy\right)^{1/2} \\
&\quad\leq 2r\|\nabla f_l\|_\infty \leq 2r\|\widehat{\nabla f_l}\|_1 \qquad (1.30)\\
&\quad\leq 2r\int_{|\xi|\leq 1/2r} |\xi|^{1-n/2}|\xi|^{n/2}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \\
&\quad\leq 2r\left(\int_{|\xi|\leq 1/2r} |\xi|^{2-n}d\xi\right)^{1/2}\|D^{n/2}f\|_2 \leq c\|D^{n/2}f\|_2.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f_h(y) - f_{h,B_r(x)}|dy \leq \frac{2}{|B_r(x)|^{1/2}}\|f_h\|_2 \\
&\quad\leq \frac{2}{|B_r(x)|^{1/2}}\left(\int_{|\xi|\geq 1/2r} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&\quad= \frac{c_n}{r^{n/2}}\left(\int_{|\xi|\geq 1/2r} r^n|\xi|^n|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \leq \|D^{n/2}f\|_2,
\end{aligned}$$

o que nos dá o resultado desejado.

■

Mostramos assim que $H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > n/2$ é um espaço de Hilbert cujos elementos são funções contínuas. Do ponto de vista da análise não linear, a próxima propriedade é essencial.

Teorema 1.29 *Se $s > \frac{n}{2}$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra com respeito ao produto de funções. Ou seja, se $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\|fg\|_{s,2} \leq c_s \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2} \tag{1.31}$$

Demonstração:
A partir da desigualdade triangular, temos que para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \leq 2^s \left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} + \left(1+|\eta|^2\right)^{s/2}\right].$$

Usando isso, deduzimos que

$$\begin{aligned}
|\Lambda^s(fg)| &= |\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{(fg)}\,(\xi)| \\
&= \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta) d\eta \right| \\
&\leq 2^s \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| \right. \\
&\quad \left. + \left(1+|\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| \right] d\eta \\
&\leq 2^s \left(\left|\widehat{\Lambda^s f}\right| * |\widehat{g}| + |\widehat{f}\,| * |\widehat{\Lambda^s g}| \right)
\end{aligned}$$

Assim, tomando a norma L^2 e usando que, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$,e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então ,$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Segue que

$$\|fg\|_{s,2} = \|\Lambda^s(fg)\|_2 \leq c \left(\|\Lambda^s f\|_2 \, \|\widehat{g}\|_1 + \|\widehat{f}\|_1 \, \|\Lambda^s g\|_2 \right). \tag{1.32}$$

Finalmente, (1.24) assegura que se $r > n/2$, então

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{s,2} &\leq c_s \left(\|f\|_{s,2} \|\widehat{g}\|_1 + \|\widehat{f}\|_1 \|g\|_{s,2} \right) \\
&\leq c_s \left(\|f\|_{s,2} \|g\|_{r,2} + \|f\|_{r,2} \|g\|_{s,2} \right).
\end{aligned}$$

Escolhendo $r = s$, obtemos (1.31).

■

Como último resultado da seção enunciaremos uma das desigualdades mais clássicas quando se fala de imersões:

Teorema 1.30 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) *Se $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\|\partial_x^\alpha f\|_p \leq c \sum_{|\beta|=m} \left\|\partial_x^\beta f\right\|_q^\theta \|f\|_r^{1-\theta} \tag{3.14}$$

com $|\alpha| = j, c = c(j, m, p, q, r), 1/p - j/n = \theta(1/q - m/n) + (1-\theta)1/r$, $\theta \in [j/m, 1]$.

Demonstração:
Consulte [12]. ∎

Espaços de Sobolev com Pesos

Definição 1.31 Sejam k e m inteiros não negativos e seja $1 \leq p \leq \infty$. O Espaço de Sobolev ponderado $W_m^{k,p} = W_m^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ consiste de todas as funções localmente integráveis $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para cada multiíndice α com $|\alpha| \leq K$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e esta pertence à $L^p(\mathbb{R}^n)$ e além disso para cada multiíndice β tal que $|\beta| \leq m$ a função $x^\beta u$ pertence à $L^p(\mathbb{R}^n)$.

O espaço $W_m^{k,p}$ é um espaço vetorial real de Banach com a seguinte norma

$$\|u\|_{W_m^{k,p}} = \sum_{\alpha \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p + \sum_{\alpha \leq m} \|x^\alpha u\|_p, \tag{1.33}$$

onde a norma $\|\cdot\|_p$ denota a norma em $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$.

Vamos denotar L_m^p e H_m^k por $W_m^{0,p}$ e $W_m^{k,2}$ respectivamente. Observemos que H_m^k é um espaço de Hilbert.

No decorrer do texto usaremos a seguinte propriedade.

Lema 1.32 *Se m é um inteiro não negativo e $1 < p < \infty$, então vale*

$$\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_p \leq c\|\phi\|_{W_m^{m,p}}. \tag{1.34}$$

Em particular temos

$$\|(x - 2it\partial)^\alpha \phi\|_p \leq (1 + |t|)^m \|\phi\|_{W_m^{m,p}}, \tag{1.35}$$

sempre que $|\alpha| \leq m$, $t \in \mathbb{R}$ e $\phi \in W_m^{m,p}$. Para detalhes consulte [12].

Por último iremos relembrar a definição de uma *equação diferencial dispersiva*

Definição 1.33 (Dispersividade) Um sistema dispersivo é aquele no qual a velocidade de grupo depende do número de ondas, isto é, são aqueles sistemas nos quais a velocidade de grupo não é constante. Mais precisamente, considerando soluções de tipo onda plana

$$u(t, x) \approx e^{i(kx+\omega t)}$$

o termo ω é a velocidade de fase e o termo $\omega'(k)$ chama-se de velocidade de grupo. Portanto, um sistema será dispersivo sempre que $\omega''(k) \neq 0$.

Capítulo 2

A equação de Korteweg-de Vries

Nesta seção enunciaremos alguns resultados de existência de soluções para a equação do tipo KdV existentes na literatura, e que serão suporte para o estudo do comportamento asintótico destas. Aqui não estaremos interessados na prova destes resultados e em fazer uma revisão completa de literatura, temos apenas o propósito de enunciar os resultados em espaços de energia, visto que nesta dissertação temos o foco de fazer o estudo do comportamento assintótico de tais soluções. Para o leito interessado em conhecer ferramentas que envolvem boa colocação recondamos os textos [38] e [53].

Consideremos a equação generalizada de Korteweg-de Vries (gKdV) na reta real

$$u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \tag{2.1}$$

(p é um inteiro positivo) onde $u = u(t,x)$ é uma função real avaluada, e$(t,x) \in \mathbb{R}^2$. O caso $p = 2$ é a famosa equação de Korteweg-de Vries (KdV), um modelo para ondas de superfície rasas e um exemplo canônico de equação dispersiva não linear.

O estudo de soluções para a equação (2.1) se mostra bem técnico mesmo sendo um modelos unidimensional.

Em geral o modelo acima aparece da forma do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [0,T]; \\ u(x,0) = u_0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1 O Princípio de Duhamel

Nesta seção, vamos obter uma representação integral de (2.2), para $p = 2, 3$ e 4. Aplicando a transformada de Fourier com respeito a variavel x para $u(x,t) \in S'(\mathbb{R})$ no sistema (2.2), obtemos

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(\xi,t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) + p\widehat{u^{p-1}\partial_x u}(\xi,t) = 0, \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{2.3}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.3) pelo fator integrante $e^{(i\xi)^3 t}$, obtemos

$$\widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} + e^{(i\xi)^3 t} \widehat{f}(t) = 0, \tag{2.4}$$

onde $f(x,t) = pu(x,t)^{p-1}\partial_x u(x,t)$. Observando que

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}\right) = \widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}, \tag{2.5}$$

de (2.4) e (2.5), obtemos a relação

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}\right) = -\widehat{f}(t) e^{(i\xi)^3 t}.$$

Integrando de 0 até t, temos a seguinte igualdade

$$e^{(i\xi)^3 t}\widehat{u}(t) = \widehat{u}_0 - \int_0^t \widehat{f}\,(t')\, e^{(i\xi)^3 t'} dt',$$

ou ainda,

$$\widehat{u}(t) = \widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t} - e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}\,(t')\, e^{(i\xi)^3 t'} dt'.$$

Portanto, aplicando a transformação inversa, obtemos a equação

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t}\right)^\vee - \left(e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}\,(t')\, e^{(i\xi)^3 t'} dt'\right)^\vee \\ &= \left(\widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t}\right)^\vee - \int_0^t \left(e^{i\xi^3 (t'-t)} \hat{f}\,(t')\right)^\vee dt'. \end{aligned}$$

Agora, definimos $S(t)u_0 = \left(e^{-(i\xi)^3 t}\widehat{u}_0\right)^\vee$, então

$$\left(e^{i\xi^3(t'-t)}\widehat{f}\,(t')\right)^\vee = S\,(t'-t)\, f\,(t') = S\,(t'-t)\left(pu^{p-1}u_x\right)(t'),$$

obtemos a seguinte equação integral,

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S\,(t-t')\left(\partial_x u^p\right)(t')\, dt'. \tag{2.6}$$

Isto é, se u satisfaz o problema de Cauchy (2.2), então u satisfaz a equação integral (2.6), a qual recebe o nome de fórmula de Duhamel.

A seguir, vamos comentar alguns resultados de boa colocação global para o problemas de Cauchy (2.2), no sentido de resolver a equação integral (2.6). Primeiramente Kato [27], e depois Kenig, Ponce e Vega [13] provaram existência e boa colocação global se o dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, para $p = 2, 3$ and 4 . Estes resultados foram melhorados por outros autores, ver por exemplo, os trabalhos de Bourgain [25] e do *I team* [26]. Para a proposta desta dissertação somente precisaremos da teoria de boa colocação global acima do nível de regularidade H^1 , dada pelo seguinte resultado.

Teorema 2.1 (1993, Kenig, Ponce e Vega) *Seja $s \geq 1$. Assuma que $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, com $p = 2, 3$ ou 4 em (2.2). Então existe uma única $u \in C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}))$ solução de (2.2) no sentido de Duhamnel:*

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\left[(u^p)_x(s)\right] ds, \quad S(t) := e^{-t\partial_x^3}.$$

Além disso, tem-se

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\left(\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}\right).$$

Observação 2.2 *Os resultados do Teorema 2.1 podem ser enunciados para a equação de Gardner,*

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^2 + \mu u^3)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [0,T]; \\ u(x,0) = u_0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.7}$$

visto que na prova de existência é utilizado o método do ponto fixo de Banach e o caráter subcrítico da não linearidade.

Além disso, destacamos o seguinte resultado de boa colocação em espaços de Sobolev com pesos obtido por Kato [27].

Teorema 2.3 (Kato) *Seja $u_0 \in H^{2r}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx), r \in \mathbb{Z}^+$. Existe $T > 0$, dependendo somente da norma de u_0 em $H^{2r}(\mathbb{R}) \cap L^2(|x|^{2r}dx)$, e uma única solução $u = u(x,t)$ para o IVP (2.2) tal que*

$$u \in C\left([0,T] : H^{2r}(\mathbb{R}) \cap L^2\left(|x|^{2r}dx\right)\right).$$

Além disso o mapa $u_0 \to u$ é contínuo.

2.2 Solitons

Como visto na introdução, além do resultado de boa colocação global enunciado anteriormente, o modelo (2.1) também é interessante por conter soluções especiais, chamadas de *soliton*. Um *soliton* para (2.1) é uma solução da forma

$$u(t,x) = Q_c(x - ct - x_0), \quad c > 0, x_0 \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Note que Q_c é um perfil fixo dependendo somente de $c > 0$ (usualmente referido como *scaling* ou velocidade do *soliton*), e x_0 é um parâmetro que denota a posição do *soliton*. Substituido (2.8) em (2.1), e assumindo que Q_c se anula no infinito, obtemos, após alguns cálculos, que Q_c must satisfy the equation

$$(Q_c'' - cQ_c + Q_c^p)' = 0$$

ou

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

As soluções desta equação elíptica são bem conhecidas, denotadas por $Q_c = Q_c(s)$ e dada pela seguinte fórmula explícita

$$Q_c(s) = c^{1/(p-1)} Q(\sqrt{c}s).$$

onde

$$Q(s)\,(= Q_{c=1}) := \left(\frac{p+1}{2\cosh^2\left(\frac{(p-1)}{2}s\right)} \right)^{1/(p-1)}.$$

Em outras palavras, um soliton é uma onda viajante com velocidade positiva $c > 0$. Note que quanto maior for $c > 0$,o soliton viaja mais rápido.

Enfatizamos que solitons são objetos puramente não linear. De fato, a equação linearizada de KdV, chamada de equação de Airy,

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

não tem solitons.

Existe uma relação entre solitons e a teoria de boa colocação global usando a norma L^2 de cada soliton. Mais precisamente, tem-se

$$\|Q_c\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim c^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}}.$$

Com efeito, uma mudança de variável fornece

$$\begin{aligned}
\|Q_c\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(c^{\frac{2}{p-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |Q(\sqrt{c}s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \int_{\mathbb{R}} |Q(s')|^2 ds' \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}} |Q(s')|^2 ds' \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}} M,
\end{aligned}$$

onde $M := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |Q(s')|^2 ds'$.

Consequentemente, $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} > 0$ se $p = 2, 3, 4$ (L^2-regime subcrítico), $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} = 0$ se $p = 5$ (L^2-regime crítico), e $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} < 0$ se $p > 5$ (L^2-regime super crítico).

Em outra sa palavras, em um problema supercrítico, pequenos solitons (no sentido da norma L^∞), são grandes na norma L^2. Entretanto quando $p = 5$, os solitons tem sempre o mesmo tamanho. Resumimos esta propriedade com a seguinte notação

$$\partial_c \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 \Big|_{c=1} =: \int_{\mathbb{R}} \Lambda Q Q \begin{cases} > 0, & p = 2, 3, 4, \\ = 0, & p = 5, \\ < 0, & p > 5. \end{cases}$$

onde

$$Q(s)\,(= Q_{c=1}) := \left(\frac{p+1}{2\cosh^2\left(\frac{(p-1)}{2}s\right)} \right)^{1/(p-1)}.$$

onde denotamos ΛQ_c a chamada direção de scaling, dado por

$$\Lambda Q_c(s) := \partial_c Q_c(s) = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{p-1} Q_c(s) + \frac{1}{2} s Q_c'(s) \right),$$

e $\Lambda Q := \Lambda Q_c|_{c=1}$. Note que ΛQ_c é uma função par que satisfaz a equação (basta derivar com respeito a c em (2.9))

$$\mathcal{L}\Lambda Q_c = -Q_c.$$

Para o leitor interessado em um texto básico que envolva a teoria de solitons e sua estabilidade, consultar a monografia [51].

Capítulo 3

Leis de Conservação para a Equação do tipo Korteweg-de Vries

Este trabalho tem como foco a equação generalizada de Korteweg-de Vries (gKdV) estabelecida na reta real $\mathbb{R}$ dada por

$$\partial_t u + \partial_x \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

onde $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$ é uma função com valor real e $f = f(s)$ é uma função definida por

$$f(s) = s^k + f_k(s), \quad \lim_{s\to 0} \frac{f_k(s)}{|s|^k} = 0 \ (k = 2,3,...), \tag{3.2}$$

onde $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^k.

Destacamos os seguintes casos particulares que geram equações conhecidas:

1. $k = 2$ e $f_2(s) = 0$ (a equação original de Korteweg-de Vries (KdV)),
2. $k = 2$ e $f_2(s) = \mu s^3$ $(\mu \neq 0)$(a equação de Gardner),
3. $k = 3$ e $f_3(s) = 0$ (A equação KdV modificada, ou mKdV).

Formalmente, as soluções reais de (3.1) satisfazem pelo menos três leis de conservação:

Proposição 3.1 *Se $u = u(x,t) \in S(\mathbb{R}^2)$ é solução de (3.1) então u satisfaz as seguintes relações:*

(i) $I_1(u) := \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)dx = I_1(u_0)$;

(ii) $I_2(u) := \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t,x)dx = I_2(u_0)$;

(iii) $I_3(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - G(u)\right)(t,x)dx = I_3(u_0)$,

onde

$$G(x) = \int_0^x f(s)ds. \tag{3.3}$$

Demonstração:
1. Integrando em $\mathbb{R}$ a equação (3.1), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}} u_t dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) dx = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} u_t dx + \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \partial_x \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) dx = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} u_t dx + \lim_{n\to\infty} \left(\partial_x^2 u(n,t) + f(u(n,t))\right) - \left(\partial_x^2 u(-n,t) + f(u(-n,t))\right) dx = 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left(\partial_x^2 u(n,t) + f(u(n,t))\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} \left(\partial_x^2 u(-n,t) + f(u(-n,t))\right)$ temos que

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} u dx = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} u dx = c,$$

para uma certa constante c. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x,t) dx$$

2. Multiplicando (3.1) por u e integrando em $\mathbb{R}$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} u u_t dx + \int_{\mathbb{R}} u \partial_x \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) dx = 0.$$

Distribuindo e usando integração por partes no segundo termo temos

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{2} dx - \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xx} dx - \int_{\mathbb{R}} u_x f(u) dx =$$

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{2} dx - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{(u_x)^2}{2}\right) dx}_{=0} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u_x f(u) dx}_{=0} = 0.$$

Dessa forma,

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{2} dx = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2 dx,$$

provando assim a segunda identidade.

3. Finalmente vamos provar a terceira identidade. Multiplicando (3.1) por $(\partial_x^2 u + f(u))$ e integrando em $\mathbb{R}$,

$$I + II := \int_{\mathbb{R}} u_t \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) dx = 0.$$

Desenvolvendo a primeira integral obtemos,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} u_t \left(\partial_x^2 u + f(u)\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_t \partial_x^2 u dx + \int_{\mathbb{R}} u_t f(u) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \partial_t(\partial_x u)\partial_x u dx + \partial_t \int_{\mathbb{R}} G(u) dx \qquad \left(G(u) = \int_0^u f(s)ds \Rightarrow \partial_t G(u) = f(u)u_t\right) \\ &= \partial_t \left(-\int_{\mathbb{R}} \frac{(\partial_x u)^2}{2} dx + \int_{\mathbb{R}} G(u) dx \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} II &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\partial_x^2 u + f(u)\right)\left(\partial_x^2 u + f(u)\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\partial_x^2 u + f(u)\right)^2 dx \\ &= \frac{2}{2}\left(\partial_x^2 u + f(u)\right)^2 \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0. \end{aligned}$$

O resultado segue dos dois cálculos acima. ∎

Usando um argumento de aproximação por funções mais regulares com a continuidade do fluxo dado inicial - solução, pode-se estender os resultado anterior para funções no espaço de energia.

Proposição 3.2 *Seja u_0 em $H^1(\mathbb{R})$. As soluções de (2.1) em $C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ satisfazem as seguintes leis de conservação*

$$I_2(u(t)) = I_2(u_0) \text{ e } I_3(u(t)) = I(u_0), \tag{3.4}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 3.3 *É padrão em equações dispersivas não lineares, do tipo totalmente integrável, obter resultado de boa colocação local usando métodos de ponto fixo, mostrando que o tempo de existência depende do tamanho do dado inicial. Em seguida fazendo uso das quantidades conservadas, mostra-se que com repetições do método do ponto fixo a solução é global. Para detalhes sobre boa colocação local e global recomendamos [38, 53]. Para dar fluidez ao trabalho vamos aqui assumir o resultado de boa colocação global enunciado no Teorema 2.1 e vamos provar as identidades no espaço de energia.*

Demonstração:

Inicialmente, sabemos que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $H^1(\mathbb{R})$, então existe $u_{0_n} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$u_{0_n} \longrightarrow u_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}).$$

Mas $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset H^4(\mathbb{R})$, logo pelo Teorema 2.1, temos que para cada dado inicial $u_{0_n} \in H^4(\mathbb{R})$, existe uma única solução u_n do problema (2.2). Agora, pela imersão de Sobolev, temos que

$$u_n(x,t) \in H^4(\mathbb{R}) \Longrightarrow u_n(x,t) \in C_0^3,$$

para cada t fixo, pois $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_\infty^k(\mathbb{R})$ para $s > k + \frac{1}{2}$, então tomando $k = 3, n = 1$ segue o resultado acima. Portanto, pela proposição anterior, temos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_n^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_n^2(x,0)dx \quad \text{em } H^4(\mathbb{R}) \tag{3.5}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x u_n^2(x,t)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u_n^{p+1}(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x u_n^2(x,0)dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u_n^{p+1}(x,0)dx. \tag{3.6}$$

Por outro $H^4(\mathbb{R})) \subset H^1(\mathbb{R})$, o que implica $u_{0_n} \in H^1(\mathbb{R})$, além disso, sabemos que o fluxo $u_0 \longrightarrow u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ é contínuo, ou seja, a aplicação $\Gamma : H^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ dada por

$$\Gamma(u_0) = u,$$

é contínua. Então usando o fato de que $u_{0_n} \longrightarrow u_0$ em $H^1(\mathbb{R})$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} u_n^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} u^2 dx.$$

Portanto, fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (3.5), obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x,0)dx,$$

portanto, provamos a primeira identidade para $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Já para a segunda identidade, aplicamos a seguinte desigualdade de **Gagliardo-Nirenberg** que diz:

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}), \quad \int |v|^{p+1}dx \leqslant C(p)\left(\int v^2 dx\right)^{(p+3)/4}\left(\int v_x^2 dx\right)^{(p-1)/4}.$$

Finalmente, fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (3.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{u_x^2(x,t)}{2}dx - \frac{u^{p+1}(x,t)}{p+1}\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{u_x^2(x,0)}{2}dx - \frac{u^{p+1}(x,0)}{p+1}\right)dx.$$

■

É conhecido na literatura que os modelos m-KdV e Gardner possuem soluções do tipo Breathers [1]-[5], [7], isto é, soluções localizadas no espaço que também são periódicas no

tempo. Um exemplo deste tipo de soluções são os os Breathers da m-KdV, obtidos pela primeira vez por Wadati [55]: para qualquer $\alpha, \beta > 0$,

$$B(t,x) := 2\sqrt{2}\partial_x \arctan\left(\frac{\beta \sin(\alpha(x+\delta t))}{\alpha \cosh(\beta(x+\gamma t))}\right), \quad \delta = \alpha^2 - 3\beta^2, \gamma = 3\alpha^2 - \beta^2. \tag{3.7}$$

Trata-se de uma solução para mKdV periódica no tempo, ao fixarmos a variável espacial. Assim, vemos que a equação mKdV pode conter soluções que não decaem uniformemente em t ao tender t para o infinito. Diferentemente das equações dispersivas lineares que em geral decaem. Por outro lado, a equação de Gardner ($f_2(u) := \mu u^3$ onde)

$$\partial_t u + \partial_x \left(\partial_x^2 u + u^2 + \mu u^3\right) = 0, \quad \mu > 0 \tag{3.8}$$

possui soluções do tipo Breathers (estáveis), (Pelinovsky-Grimshaw [49], ver [3] para mais detalhes). Na verdade, se $\alpha, \beta > 0$ são tais que $\Delta := \alpha^2 + \beta^2 - \frac{2}{9\mu} > 0$, então

$$B(t,x) := 2\sqrt{\frac{2}{\mu}}\partial_x \arctan\left(\frac{\mathcal{G}(t,x)}{\mathcal{F}(t,x)}\right), \tag{3.9}$$

onde

$$\mathcal{G} := \frac{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\sqrt{\Delta}} \sin(\alpha y_1) - \frac{\sqrt{2}\beta\left[\cosh(\beta y_2) + \sinh(\beta y_2)\right]}{3\sqrt{\mu}\Delta}, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{F} := \cosh(\beta y_2) - \frac{\sqrt{2}\beta\left[\alpha\cos(\alpha y_1) - \beta\sin(\alpha y_1)\right]}{3\sqrt{\mu}\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\Delta}}, \tag{3.11}$$

e $y_1 = x + \delta t, y_2 = x + \gamma t, \delta := \alpha^2 - 3\beta^2, \gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$,é uma solução suave com não decaimento para (1.8).

Enfatizamos que as soluções do tipo Breathers do PVI (3.1) são conhecidas apenas nos casos descritos anteriormente, ou seja, para a equação mKdV e para a equação de Gardner com $\mu > 0$. Diante disso vemos que este tipo de soluções são bem especiais e determinar se um dado modelo tem ou não tem Breathers é um grande desafio. Nosso primeiro objetivo, seguindo o trabalho de Muñoz e Ponce [48], é provar que para uma grande classe de não linearidades $f(\cdot)$ em (3.1) o gKdV não possui soluções do tipo Breathers (localizadas em soluções espaciais periódicas no tempo).

Desenvolvendo a equação (3.7) podemos chegar em uma fórmula mais explicita, que enunciaremos a seguir

Definição 3.4 (Solução Breathers, Wadatti) Sejam $\alpha, \beta > 0$. Uma soluçaõ do tipo *breathers* para o PVI (3.1) é dada pela seguinte fórmula

$$\begin{aligned} B(t,x) :=& 2\sqrt{2}\partial_x \arctan\left(\frac{\beta\sin(\alpha(x+\delta t))}{\alpha\cosh(\beta(x+\gamma t))}\right) \\ =& 2\sqrt{2}sech(y_2)\left[\frac{\cos(\alpha y_1) - (\beta/\alpha)\sin(\alpha y_1)\tanh(\beta y_2)}{1 + (\beta/\alpha)^2\sin^2(\alpha y_1)sech^2(\beta y_2)}\right]. \end{aligned}$$

Onde, $y_1 = x + \delta t$ e $y_2 = x + \gamma t$ com $\delta = \alpha^2 - 3\beta^2, \gamma = 3\alpha^2 - \beta^2$.

Observação 3.5 *Neste trabalho estaremos trabalhando com o caso de Breathers periódicos no tempo. Isto é, na definição acima consideramos* $\gamma = 0$.

Lembremos a definição de espaços de Sobolev com pesos,

$$H^{s,r}(\mathbb{R}) := H^s(\mathbb{R}) \cap L^2\left(|x|^{2r}dx\right), \quad s, r \geq 0. \tag{3.12}$$

Capítulo 4

Modelos que não admitem Breathers

Nesta seção mostraremos que alguns modelos do tipo KdV não admitem Breathers, seguiremos o trabalho de Muñoz e Ponce [48].

Aqui e em vários momentos desse capítulo estaremos fazendo os cálculos, assumido $u \in C_c^\infty$, isto é, uma solução suave e com suporte compacto do PVI (3.1). Tais cálculos podem ser generalizados através de teoremas de aproximação em espaços de Sobolev, seguindo as mesmas ideias da prova da Proposição 3.2. Além disso, algumas vezes simplificaremos a notação denotando $u(x,t)$ por apenas u.

Proposição 4.1 *Se*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^{4,2}(\mathbb{R})\right) \tag{4.1}$$

é uma solução do PVI (3.1)*, então*

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xu(t,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u(t,x))dx \tag{4.2}$$

Observação 4.2 *A hipótese* (4.1) *serve para garantir que* $xu(t,x) \in L^1(\mathbb{R})$*. Além disso, pelo Teorema 2.3 o fluxo de* (2.2) *é preservado em* $H^{4,2}$*.*

Demonstração:

Devido a argumentos de densidade é suficiente mostrarmos o resultado assumindo que $u \in C^1(\mathbb{R}; C_c^3(\mathbb{R}))$. Multiplicando a equação em (3.1) por x e integrando o resultado em $\mathbb{R}$ obtém-se:

$$\int_{\mathbb{R}} xu_t dx + \int_{\mathbb{R}} x\partial_x(\partial_x^2 u + f(u))dx = 0.$$

Fazendo integração por partes,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xudx - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 u + f(u))dx + [x\partial_x^2 u + xf(u)]\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Como $[x\partial_x^2 u + xf(u)]\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xudx = \int_{\mathbb{R}} (\partial_x^2 u + f(u))dx.$$

Usando $\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 udx = 0$ (pois $u = u(x,t)$ tem decaimento no infinito), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xudx = \int_{\mathbb{R}} f(u)dx,$$

provando assim o resultado.

■

Teorema 4.3 (Inexistência de Breathers.) *Seja*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^{4,2}(\mathbb{R})\right) \tag{4.3}$$

uma solução forte não trivial do PVI (3.1). *Se* $u = u(t,x)$ *é uma função periódica no tempo com período* ω, *então*

$$\int_0^{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(u(t,x))dxdt = 0. \tag{4.4}$$

Em particular, se

$$\begin{cases} f(u) = u^2, \quad ou \quad f(u) = u^4, \\ ou \\ f(u) = u^2 \pm \mu u^3 + \epsilon^2 u^4, \quad 0 \leq \mu < 2\epsilon \end{cases} \tag{4.5}$$

então u *não pode ser uma solução periódica no tempo.*

Demonstração:
Como $u \in C\left(\mathbb{R} : H^{4,2}(\mathbb{R})\right)$ pela Proposição 4.1 temos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xudx = \int_{\mathbb{R}} f(u)dx$$

como $u = u(x,t)$ é periódica com período ω temos

$$\int_0^{\omega}\int_{\mathbb{R}} f(u)dxdt = \int_0^{\omega}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xudxdt = 0.$$

De fato, pelo Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\int_0^\omega \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xu dxdt &= \int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt}(xu)dxdt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^\omega \frac{d}{dt}(xu)dtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\int_0^\omega \frac{d}{dt}u(x,t)dtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(u(x,\omega)-u(x,0))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x0dx = \int_{\mathbb{R}} 0dx = 0.\end{aligned}$$

No caso, $f(u) = u^2$ e $f(u) = u^4$ temos (supondo u não identicamente nula)

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)dx > 0 \Rightarrow \int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} f(u)dxdt > 0.$$

Contradizendo (4.4). Portanto, u não pode ser periódica com relação ao tempo.

Agora seja $f(u) = u^2 \pm \mu u^3 + \varepsilon u^4, 0 \leq \mu < 2\varepsilon$. Daí,

$$\int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} u^2 \pm \mu u^3 + \varepsilon u^4 dxdt = I + II + III + IV,$$

onde:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\omega \int_A u^2 \pm \mu u^3 + \varepsilon^2 u^4 dxdt, \quad A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq u(x,t) \leq 1\} \\ II &= \int_0^\omega \int_B u^2 \pm \mu u^3 + \varepsilon^2 u^4 dxdt, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : u(x,t) > 1\} \\ III &= \int_0^\omega \int_C u^2 \pm \mu u^3 + \varepsilon^2 u^4 dxdt, \quad C = \{x \in \mathbb{R} : u(x,t) < -1\} \\ IV &= \int_0^\omega \int_D u^2 \pm \mu u^3 + \varepsilon^2 u^4 dxdt, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq u(x,t) < 0\}\end{aligned}$$

Vamos seguir com a demonstração, separando esta em alguns casos.

Caso 1: $0 \leq u \leq 1$.
Temos $u^2 \leq u \Rightarrow u^4 \leq u^3$ logo,

$$I \geq \int_0^\omega \int_A \mu u^3 + \varepsilon^2 u^4 dxdt \geq \int_0^\omega \int_A \mu u^4 + \varepsilon^2 u^4 dxdt > 0.$$

Caso 2: $u > 1$
Então $u^3 > u^2$ logo,

$$II \geq \int_0^\omega \int_B u^2 \pm \mu u^3 dxdt \geq \int_0^\omega \int_B u^2 \pm \mu u^2 dxdt > 0.$$

Caso 3: $u < -1$
Seguindo a mesma linha dos casos anteriores, $u^3 < -u^2 \Rightarrow -u^3 < u^4$:

$$III \geq \int_0^\omega \int_C \mu u^3 + \varepsilon^2 u^4 dxdt \geq \int_0^\omega \int_C -\varepsilon^2 u^4 + \varepsilon^2 u^4 dxdt \geq \int_0^\omega \int_C (-\theta + \varepsilon^2) u^4 dxdt > 0.$$

onde aqui usamos que se $\varepsilon^2 > \theta \Rightarrow \varepsilon^2 - \theta > 0$ e $-\mu u^3 < \varepsilon^2 u^4 \Rightarrow \mu u^3 > -\varepsilon u^4 > -\theta u^4$.

Caso 4: $-1 \leq u < 0$.
Então $-u^2 \leq u^3$. Dessa forma,

$$IV \geq \int_0^\omega \int_D u^2 \pm \mu u^3 dxdt \geq \int_0^\omega \int_D u^2 - \mu u^2 dxdt \geq \int_0^\omega \int_D (1 - \mu) u^2 dxdt > 0.$$

Portanto,

$$\int_0^\omega \int_{\mathbb{R}} u^2 \pm \mu u^3 + \varepsilon u^4 dxdt > 0,$$

contradizendo (4.4). Concluímos que $u = u(x,t)$ não pode ser periódica com relação ao tempo. ∎

Teorema 4.4 (Não linearidades mais gerais) *Seja*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^{4,2}(\mathbb{R})\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R})\right) \tag{4.6}$$

uma solução não trivial do PVI (3.1)*, com*

$$f(u) = u^{2k} + f_{2k}(u), \quad k \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.7}$$

Existe um $\epsilon = \epsilon(k; f_{2k}) > 0$ *suficientemente pequeno, tal que se*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^1} < \epsilon \tag{4.8}$$

então $u = u(t,x)$ *não é uma solução periódica no tempo.*

Demonstração:
Inicialmente, lembremos que,

$$\lim_{s \to 0} \frac{f_{2k}(s)}{|s|^{2k}} = 0. \quad \text{(ver (3.2))}$$

Isto é, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $0 < \delta < \varepsilon$ implica que $|f_{2k}(s)| < \tilde{\varepsilon}|s|^{2k}$. Pela hipótese (4.8) dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < |u(x,t)| < \varepsilon$, para todos $x, t \in \mathbb{R}$, ou seja, temos que

$$\Rightarrow |f_{2k}(u(x,t))| < \tilde{\varepsilon}|u(x,t)|^{2k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(u)| = |u^{2k} + f_{2k}(u)| &\geqslant |u^{2k}| - |f_{2k}(u)| \\ &> |u|^{2k} - \tilde{\varepsilon}|u|^{2k} \\ &> (1 - \tilde{\varepsilon})|u|^{2k} > 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)dx > 0 \Rightarrow \int_0^{\omega} \int_{\mathbb{R}} f(u)dxdt > 0.$$

Contradizendo (4.4). Portanto u não pode ser periódica com relação ao tempo.

■

A seguir, trataremos o modelo de Gardner, para tanto precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.5 *Seja $u = u(x,t) \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e defina o mapa*

$$\Lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xu^2(x,t)dx$$

Se $u = u(x,t)$ for uma solução periódica no tempo, então o mapa $\Lambda(t)$ não pode ser estritamente monótono.

Demonstração:

Suponha, sem perda de generalidade, o caso em que $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} xu^2dx$ é estritamente crescente. Como u é periódica no tempo e não nula, exite $L > 0$ tal que

$$u(x,t) = u(x,t + Lk), k \in \mathbb{Z}.$$

Agora note que,

$$0 \neq \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} u^2(x,t + Lk)dx.$$

Tomando $t_k = t + Lk$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} xu^2(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} xu^2(x,t_k)dx \quad \forall \quad t_k = t + Lk.$$

Daí, $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} xu^2dx$ não pode ser estritamente crescente pois existe uma sequência de tempo $t_k \to \infty$ tal que

$$t_k \mapsto \int_{\mathbb{R}} xu^2(x,t_k)dx \tag{4.9}$$

é constante. ■

Proposição 4.6 *Se*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^{1,1/2}(\mathbb{R})\right) \tag{4.10}$$

é uma solução forte do PVI (3.1)*, então*

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xu^2(t,x)dx = -6\left(I_3\left(u_0\right) + \int_{-\infty}^{\infty}\left(G(u) - \frac{F(u)}{3}\right)(t,x)dx\right), \tag{4.11}$$

onde G é como em (2.5) e

$$\partial_x F(u) := u\partial_x f(u), \quad F(0) = 0.$$

Demonstração:
Temos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xu^2 dx = 2\int_{\mathbb{R}} xu\partial_t u dx.$$

Usando a equação (3.1):

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xu^2 dx = -2\int_{\mathbb{R}} xu\partial_x(\partial_x^2 u + f(u))dx.$$

Agora, integrandio por partes obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xu^2 dx =& 2\int_{\mathbb{R}} u(\partial_x^2 u + f(u))dx + 2\int_{\mathbb{R}} x(\partial_x u)(\partial_x^2 u + f(u))dx.\\ =& 2\int_{\mathbb{R}} u\partial_x^2 u dx + 2\int_{\mathbb{R}} uf(u)dx + 2\int_{\mathbb{R}} x(\partial_x u)(\partial_x^2 u)dx + 2\int_{\mathbb{R}} x(\partial_x u)f(u)dx.\end{aligned}$$

Usando novamente integração por partes no $1^{\underline{o}}$ termo, reescrevendo o $3^{\underline{o}}$ termo e usando que $\partial_x G(u) = f(u)\partial_x u$ no último termo, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} xu^2 dx =& -2\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} uf(u)dx + 2\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{2}\partial_x (u_x)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} x\partial_x G(u)dx\\ =& -2\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} uf(u)dx - \int_{\mathbb{R}} (u_x)^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}} G(u)dx\\ =& -3\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} uf(u)dx - 2\int_{\mathbb{R}} G(u)dx. \quad (*)\end{aligned}$$

Afirmamos que $uf(u) = F(u) + G(u)$. De fato,

$$\begin{aligned}\partial_x(uf(u)) =& \partial_x uf(u) + u\partial_x f(u)\partial_x u\\ =& \partial_x G(u) + (\partial_x F(u))\partial_x u\\ =& \partial_x G(u) + \partial_x F(u).\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}(*) &= -3\int_{\mathbb{R}}(\partial_x u)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} G(u) + F(u)dx - 2\int_{\mathbb{R}} G(u)dx.\\ &= -3\int_{\mathbb{R}}(\partial_x u)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} F(u)dx. \quad (**)\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$-6\left(I_3(u_0) + \int_{-\infty}^{\infty}\left(G(u) - \frac{F(u)}{3}\right)(t,x)dx\right) = ...$$

$$\begin{aligned}... &= -6\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - G(u)\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty}\left(G(u) - \frac{F(u)}{3}\right)dx\right)\\ &= -3\int_{\mathbb{R}}(\partial_x u)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} F(u)dx. \quad (***)\end{aligned}$$

Igualando $(**)$ e $(***)$ obtemos o resultado desejado.

■

A seguir mostramos que a equação de Gardner para $\mu < 0$ não admite breathers.

Teorema 4.7 (A equação de Gardner com $\mu < 0$.) *Seja*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^{4,2}(\mathbb{R})\right) \tag{4.12}$$

uma solução forte não trivial do PVI (3.1) *com*

$$f(u) = u^2 + f_2(u) = u^2 + \mu u^3, \quad \mu < 0. \tag{4.13}$$

Então $u = u(t,x)$ não é uma solução periódica no tempo.

Demonstração:

No caso da equação de Gardner, ou seja, $f(u) = u^2 + \mu u^3, \mu \neq 0$ em (3.1), segue de (2.15) que

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xu(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(u^2 + \mu u^3\right)(x,t)dx \qquad (*)$$

e de (2.22) temos:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xu^2(x,t)dx = -6I_3(u_0) - \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty} u^3(x,t)dx. \qquad (**)$$

De fato,

$$G(u) = \int_0^u f(t)dt = \int_0^u t^2 + \mu t^3 dt = \frac{u^3}{3} + \mu\frac{u^4}{4}$$

e

$$F(u) = uf(u) - G(u) = u(u^2 + \mu u^3) - (\frac{u^3}{3} + \mu\frac{u^4}{4}) = \frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{4}u^4.$$

$$\Rightarrow G(u) - \frac{F(u)}{3} = \frac{u^3}{3} - \frac{2u^3}{9} = \frac{u^3}{9}.$$

logo,

$$-6\int_{\mathbb{R}} G(u) - \frac{F(u)}{3}dx = -6\int_{\mathbb{R}} \frac{u^3}{9}dx = -\frac{6}{9}\int_{\mathbb{R}} u^3 dx.$$

Assim, multiplicando $(*)$ por $\frac{2}{3}$ e $(**)$ por μ e somando as duas, vemos que as soluções da equação de Gardner satisfazem

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{3}xu + \mu x u^2\right)(x,t)dx = \frac{2}{3}I_2(u_0) - 6\mu I_3(u_0). \tag{4.14}$$

Provaremos que para $\mu < 0$

$$\Phi := \frac{2}{3}I_2(u_0) - 6\mu I_3(u_0) > 0 \tag{4.15}$$

Com esse fato e o Lema 4.5, temos que para $\mu < 0$a equação de Gardner não pode ter breather periódico. Reescrevendo (2.26),

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{2}{3}\|u_0\|_2^2 - 6\mu\left(\frac{\|\partial_x u_0\|_2^2}{2} - \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{u_0^3}{3} + \frac{\mu u_0^4}{4}\right)(x)dx\right) \\
&= \frac{2}{3}\|u_0\|_2^2 - 3\mu\|\partial_x u_0\|_2^2 + 2\mu\int_{\mathbb{R}} u_0^3 dx + \mu\frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}} u_0^4 dx \\
&> \frac{2}{3}\|u_0\|_2^2 + 2\mu\|u_0\|_3^3 + \frac{3}{2}\mu^2\|u_0\|_4^4 \quad (\text{pois} - 3\mu\|\partial_x u_0\|_2^2 > 0) \\
&\geq \frac{2}{3}\|u_0\|_2^2 + 2\mu\|u_0\|_2\|u_0\|_4^2 + \frac{3}{2}\mu^2\|u_0\|_4^4 \\
&= \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\|u_0\|_2 + \sqrt{\frac{3}{2}}\mu\|u_0\|_4^2\right)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Donde a última desigualdade é justificada pela seguinte desigualdade de interporlação:

$$\|u_0\|_3 \leq \|u_0\|_2^{\theta} + \|u_0\|_4^{1-\theta}$$

Queremos encontrar θ tal que:

$$\frac{1}{3} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1+\theta}{4}$$

$$\Rightarrow 3\theta + 3 = 4 \Rightarrow \theta = 1/3$$

logo, $\|u_0\|_3 \leq \|u_0\|_2^{1/3} + \|u_0\|_4^{2/3} \Rightarrow \|u_0\|_3^3 \leq \|u_0\|_2 + \|u_0\|_4$ justificando a passagem. Agora combinando o fato de $\Phi > 0$ com (2.25) vemos que o mapa

$$\Lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xu^2(x,t)dx$$

é monótono. Portanto $u = u(x,t)$ não pode ser uma solução periódica no tempo, pelo Lema 4.5. ∎

Teorema 4.8 (L^2 casos críticos e supercríticos.) *Seja*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^{1,1/2}(\mathbb{R})\right) \cap L^{\infty}\left(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R})\right) \tag{4.16}$$

uma solução forte não trivial do PVI (3.1) *com*

$$f(u) = u^j + f_j(u), \quad j = 5, 6, .. \tag{4.17}$$

Então existe $\epsilon = \epsilon(j; f_j) > 0$ suficientemente pequeno, tal que se

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^1} < \epsilon \tag{4.18}$$

então $u = u(t,x)$ não é uma solução periódica no tempo.

Demonstração:

Primeiro, recordamos um caso particular da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg: para qualquer $p \in [2, \infty]$

$$\|u(t)\|_p \leq c_p \|\partial_x u(t)\|_2^{1/2-1/p} \|u(t)\|_2^{1/2+1/p}. \tag{4.19}$$

Assim temos que,

$$\begin{aligned} &I_3(u_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(G(u) - \frac{F(u)}{3}\right)(t,x)dx = \frac{1}{2}\int (\partial_x u)^2 - \frac{F(u)}{3}dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\partial_x u)^2 dx - \int \frac{j}{j+1} u^{j+1}dx - \int G_j(u)dx, \end{aligned}$$

onde usamos,

$$\begin{aligned} \partial_x F(u) &= u\partial_x f(u) \\ &= u(ju^{j+1}u_x + \partial_x f_j(u)u_x) \\ &= \partial_x(\frac{j}{j+1}u^{j+1} + \int_0^u s f_j(s)ds). \end{aligned}$$

Logo,

$$F(u) = \frac{j}{j+1}u^{j+1} + \int_0^x u\partial_x f_j(u)dx = \frac{j}{j+1}u^{j+1} + G_j(u)dx.$$

Assim,

$$I_3(u_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(G(u) - \frac{F(u)}{3} \right)(t,x)dx = \int (\partial_x u)^2 dx + A + B$$

onde $A = \int \frac{j}{j+1} u^{j+1} dx$ e $B = -\int G_j(u)dx$.

Estimemos A :

$$|A| \leq c \int |u|^{j+1} dx = c \|u\|_{j+1}^{j+1} + \leq c \|\partial_x u\|_2^{\frac{j+1}{2} - \frac{j+1}{j+1}} \|u\|_2^{\frac{j+1}{2} + \frac{j+1}{j+1}} \quad \text{(ver (4.19))} \qquad (4.20)$$

agora lembre o seguinte fato,

$$\|u\|_\infty \leq c \|u\|_{H^1} \leq c\varepsilon.$$

onde usamos (4.18). Daí, se $0 < \varepsilon < 1$ vale $\|u\|_{j+1}^{j+1} \leq c \|u\|_6^6$. (isto é, para o menor j em questão, neste caso $j = 5$). Portanto,

$$|A| \leq c \|\partial_x u\|_2^{\frac{j+1}{2} - \frac{j+1}{j+1}} \|u\|_2^{\frac{j+1}{2} + \frac{j+1}{j+1}} \leq c \|\partial_x u\|_2^{3-1} \|u\|_2^{3+1} = c \|\partial_x u\|_2^2 \|u\|_2^4 . \qquad (4.21)$$

Agora estimemos B. Por (3.2) temos que $\lim_{s\to 0} \frac{f_j(s)}{|s|^j} = 0$, donde existe $c > 0$ tal que $|f_j(s)| < c|s|^j$ e usando a hipótese (4.18) temos que

$$|f_j(u)| < c|u|^j$$

que implica

$$\int |G_j(u)|dx \leq \int |u||f_(u)|dx \leq c \int |u||u|^j dx = c \int |u|^{j+1} dx = c \|u\|_{j+1}^{j+1} .$$

Daí, repetindo os passos da estimativa de A temos que

$$|B| \leq \int |G_j(u)|dx \leq c \|\partial_x u\|_2^{3-1} \|u\|_2^{3+1} = c \|\partial_x u\|_2^2 \|u\|_2^4 . \qquad (4.22)$$

Logo, por (4.21) e (4.22) temos que:

$$I_3(u_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(G(u) - \frac{F(u)}{3} \right)(t,x)dx \geq \int (\partial_x u)^2 dx - 2c/3 \|\partial_x u\|_2^2 \|u\|_2^4 .$$

Novamente pela hipótese (4.18) temos que podemos tomar ε suficientemente pequeno tal que

$$\frac{2c}{3} \|u\|_2^4 \leq \frac{2c}{3} \varepsilon^4 \leq \frac{1}{4}.$$

Concluímos que,

$$I_3(u_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(G(u) - \frac{F(u)}{3} \right)(t,x)dx \geq \int (\partial_x u)^2 dx - \frac{1}{4} \|\partial_x u\|_2^2 > 0.$$

Portanto, o mapa

$$\Lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x u^2(t,x)dx$$

é estritamente crescente, logo pelo Lema 4.5 não pode ser periódico. ∎

Teorema 4.9 (Caso Cúbico) *Seja*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^{1,1/2}(\mathbb{R})\right) \cap L^{\infty}\left(\mathbb{R} : H^{1}(\mathbb{R})\right) \tag{4.23}$$

ser uma solução forte não trivial do PVI (3.1) *com*

$$f(u) = u^3 + \beta u^{2j+1} + f_{2j+1}(u), \quad \beta < 0, \quad j \in \mathbb{Z}^+, \quad j \geq 2, \tag{4.24}$$

e dados iniciais u_0 *tais que (ver* (3.2) *)*

$$I_3(u) = I_3(u_0) \geq 0. \tag{4.25}$$

Existe $\epsilon = \epsilon\left(f_{2j+1}; \beta; I_3(u_0)\right) > 0$ *suficientemente pequeno, tal que se*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^1} < \epsilon \tag{4.26}$$

então $u = u(t,x)$ *não é uma solução periódica no tempo.*

A mesma conclusão se aplica se $f(\cdot)$ *satisfaz* (4.24) *com* $\beta > 0$ *e os dados iniciais* u_0 *sustenta que* $I_3(u_0) \leq 0$.

Demonstração:

Como

$$f(u) = u^3 + \beta u^{2j+1} + f_{2j+1}(u), \quad \beta < 0, \quad j \in \mathbb{Z}^+, j \geq 2, \tag{4.27}$$

nós temos que

$$\begin{cases} F(u) = \frac{3}{4}u^4 + \frac{(2j+1)\beta}{2j+2}u^{2j+2} + F_{f_{2j+1}}, \\ G(u) = u^4 + \frac{\beta}{2j+2}u^{2j+2} + G_{f_{2j+1}} \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \partial_x F_{f_{2j+1}}(u) = u\partial_x f_{2j+1}(u), \quad F_{f_{2j+1}}(0) = 0, \\ G_{f_{2j+1}}(u) = \int_0^u f_{2j+1}(s)ds. \end{cases}$$

Portanto,

$$G(u) - \frac{1}{3}F(u) = u^4 + \frac{\beta}{2j+2}u^{2j+2} + G_{f_{2j+1}}(u) - \frac{u^4}{4} - \left(\frac{2j+1}{3}\right)\frac{\beta}{2j+2}u^{2j+2} - \frac{1}{3}F_{f_{2j+1}}(u),$$

$$G(u) - \frac{1}{3}F(u) = \frac{3}{4}u^4 + \frac{\beta}{2j+2}u^{2j+2}\left(1 - \frac{2j+1}{3}\right) + G_{f_{2j+1}}(u) - \frac{1}{3}F_{f_{2j+1}}(u),$$

com

$$\left|G_{f_{2j+1}}(s)\right| + \left|F_{f_{2j+1}}(s)\right| = o\left(|s|^{2j+2}\right) \quad \text{quando} \quad |s| \to 0. \tag{4.28}$$

Como $\frac{3}{4}u^4 \geq 0$ temos que

$$G(u) - \frac{1}{3}F(u) \geq \frac{\beta}{2j+2}u^{2j+2}\left(1 - \frac{2j+1}{3}\right) + G_{f_{2j+1}}(u) - \frac{1}{3}F_{f_{2j+1}}(u),$$

Donde, por (4.28)

$$\int_{\mathbb{R}} G(u) - \frac{1}{3}F(u)dx \geq \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta}{2j+2}u^{2j+2}\left(1 - \frac{2j+1}{3}\right)dx \geq 0.$$

Dessa forma,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xu^2(t,x)dx = -6\left(\underbrace{I_3(u_0)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(G(u) - \frac{F(u)}{3}\right)(t,x)dx}_{\geq 0}\right).$$

Concluímos que,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} xu^2(t,x)dx \leq 0.$$

Novamente pelo Lema 4.5 temos o resultado desejado. ∎

Capítulo 5

Decaimento de soluções em regiões linearmente dominadas

Definição 5.1 Seja $C > 0$ seja uma constante arbitrária e seja $I(t)$ o intervalo dependente do tempo.

$$I(t) := \left(-\frac{C|t|^{1/2}}{\log|t|}, \frac{C|t|^{1/2}}{\log|t|} \right), \quad |t| \geq 2. \tag{5.1}$$

Teorema 5.2 *Assuma $k = 2$ e $f_2(s) = 0$ em (3.2). Suponha que $u = u(x,t)$ é a solução para (3.1) de tal modo que*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R})\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R} : L^1(\mathbb{R})\right). \tag{5.2}$$

Então, tem-se

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|u(t)\|_{H^1(I(t))} = 0. \tag{5.3}$$

Além disso, a seguinte estimativa de suavização de Kato é válida para qualquer $c_0 > 0$,

$$\int_2^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-c_0|x|} \left(u^2 + (\partial_x u)^2 + \left(\partial_x^2 u\right)^2 \right)(t,x) dx dt < +\infty. \tag{5.4}$$

Observação 5.3 *Por conta de (5.3), temos o decaimento de soluções quando $t \to \pm\infty$ na região $I(t) =:= \left(-\frac{C|t|^{1/2}}{\log|t|}, \frac{C|t|^{1/2}}{\log|t|} \right), \quad |t| \geq 2$. Isto prova que não existem solitons ou Breather localizados nesta região (podendo haver somente a "calda" destas ondas). Note que este fato não contradiz em nada com o fato da região dos clássicos solitons $Q_c(x-ct-L)$ descritos na introdução deste trabalho, visto que estes solitons estão localizados em região distante de $I(t)$.*

Uma vantagem importante dos métodos de prova é que podemos estender o Teorema 5.2 ao caso de perturbações da KdV, incluindo a equação integrável de Gardner, desde que os dados iniciais sejam suficientemente pequenos na norma H^1. Dessa forma temos o seguinte resultado:

Teorema 5.4 *Considere $k = 2$ e $f_2(s) \neq 0$ em (3.2). Assuma que $u = u(t,x)$ é uma solução para (3.1) tal que*

$$u \in C\left(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R})\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R} : L^1(\mathbb{R})\right) \tag{5.5}$$

e existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^1} < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Então, dado o mesmo intervalo dependente do tempo $I(t)$ como em (5.1), tem-se (5.3) e (5.4).

Observação 5.5 *Por conta deste resultado, temos o decaimento de soluções quando $t \to \pm\infty$ na região $I(t) =:= \left(-\frac{C|t|^{1/2}}{\log|t|}, \frac{C|t|^{1/2}}{\log|t|}\right), \quad |t| \geq 2$. na hipótese adicional do controle das normas (5.6). Isto prova as equações do tipo Gardner em (3.1) não podem possuir "soluções pequenas" semelhantes a breathers na região $I(t)$.*

Vamos dividir a prova em três passos.

Passo 1: Integrabilidade local da norma L^2.

Sem perda de generalidade, assumimos agora que $t \geq 2$ e $C = 1$ em (5.1). Seja

$$\lambda(t) := \frac{t^{1/2}}{\log t}. \tag{5.7}$$

Observe que

$$\lambda'(t) = \frac{1}{2t^{1/2}\log t} - \frac{1}{t^{1/2}\log^2 t} = \frac{1}{t^{1/2}\log t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log t}\right)$$

e

$$\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log t}\right), \quad \lambda'^2(t) = \frac{1}{t\log^2 t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log t}\right)^2. \tag{5.8}$$

Seja ψ uma função suave e limitada. Vamos considerar o funcional a seguir, onde u resolve (3.1)

$$\mathcal{I}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u(t,x)dx. \tag{5.9}$$

Observe que a partir da hipótese dos Teoremas 5.2 e 5.4, tem-se $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{I}(t) < +\infty$. Afirmamos o seguinte resultado, cuja prova é direta.

Lema 5.6 *Temos que*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}(t) = -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u(t,x)dx + \frac{1}{\lambda^3(t)}\int \psi^{(3)}\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u(t,x)dx + \frac{1}{\lambda(t)}\int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(u^2 + f_2(u)\right)(t,x)dx.$$

Demonstração:
Derivando o funcional $\mathcal{I}$ obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{I}(t) &= \int \frac{d}{dt}(\psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)u)dx = \int \frac{d}{dt}\psi u dx + \int \psi\frac{d}{dt}u dx\\ &= \int \psi'\left(-\frac{x\lambda'}{\lambda^2}\right)u dx + \int \psi u_t dx\\ &= -\frac{\lambda'}{\lambda}\int \frac{x}{\lambda}\psi' u dx - \int \psi\partial_x(\partial_x^2 u + f(u))dx\\ &= -\frac{\lambda'}{\lambda}\int \frac{x}{\lambda}\psi' u dx + \int \partial_x\psi(\partial_x^2 u + f(u))dx\\ &= -\frac{\lambda'}{\lambda}\int \frac{x}{\lambda}\psi' u dx + I,\end{aligned}$$

onde I é definido por

$$I = \int \partial_x\psi(\partial_x^2 u + f(u))dx. \tag{5.10}$$

A seguir, reescrevemos I da seguinte forma,

$$\begin{aligned}I &= \int \partial_x\psi(\partial_x^2 u + f(u))dx = \int \partial_x\psi(\partial_x^2 u)dx + \int \partial_x\psi f(u)dx\\ &= \frac{1}{\lambda}\int \psi' u_{xx}dx + \frac{1}{\lambda}\int \psi' f(u)dx\\ &= \frac{1}{\lambda}\int \psi' u_{xx}dx + \frac{1}{\lambda}\int \psi'(u^2 + f_2(u))dx\\ &= II + \frac{1}{\lambda}\int \psi'(u^2 + f_2(u))dx,\end{aligned}$$

onde,

$$II = \frac{1}{\lambda}\int \psi' u_{xx}dx = -\frac{1}{\lambda^2}\int \psi^{(2)}u_x dx = \frac{1}{\lambda^3}\int \psi^{(3)}u dx,$$

como queríamos mostrar. ∎

A seguir, provamos um fato elementar sobre integrais de Lebesgue que foi utilizado na prova anteriormente.

Lema 5.7 *Sejam $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_a^\infty f(t) \int_{\mathbb{R}} g(t,x)dxdt < +\infty \tag{5.11}$$

e f não é integrável com relação a t. Então para alguma sequência $(t_n) \in \mathbb{R}$ com $t_n \to +\infty$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t_n,x)dx = 0.$$

Demonstração:

Suponha por contradição que existe uma sequência (t_n) em $\mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t_n,x)\,dx = b > 0$.

Dado que f não é integrável com relação a t, para todo $M > 0$, existe um conjunto mensurável $E_M \subset \mathbb{R}$ tal que $\int_{E_M} |f(t)|\,dt > M$ (pela definição de não integrabilidade de f).

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f(t_n) \int_{\mathbb{R}} g(t_n,x)dx > M \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t_n,x)dx = Mb.$$

Para todo $M > 0$. Contradizendo (5.11). Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(t_n,x)dx = 0.$$

■

Corolário 5.8 *Considere $\psi(x) := \tanh x$, tal que $\psi'(x) = \operatorname{sech}^2 x$. Assuma que $k = 2$ e também $f_2(s) = 0$, ou $f_2(s) \neq 0$ e que a condição (5.6) é válida. Então nós temos*

$$\int_2^\infty \frac{1}{\lambda(t)} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^2(t,x)dxdt < +\infty. \tag{5.12}$$

Além disso, para alguma sequência crescente de tempo $t_n \to +\infty$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda\,(t_n)}\right) u^2\,(t_n,x)\,dx = 0. \tag{5.13}$$

Demonstração:

A prova deste resultado será feita utilizando o Lema 5.6, o qual cada termo será estimado. Com a escolha de $\lambda(t)$ dado em (5.7).

Afirmação 1:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \int \frac{x}{\lambda(t)}\psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u(t,x)dx\right| \leq & \frac{(\lambda'(t))^2}{\lambda(t)} \int \left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)^2 \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) dx \\ & + \frac{\lambda'(t)}{4\lambda(t)} \frac{1}{\lambda'(t)} \int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^2(t,x)dx.\end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u(t,x)dx\right| &\leq \left|\frac{\lambda'}{\lambda}\int \left|\frac{x}{\lambda}\psi\right| |u|dx\right| \\ &\leq \left|\frac{\lambda'}{\lambda}\right| \frac{1}{2}\left\{\int \left(|x/\lambda|^2|\psi| + |u|^2|\psi'|\right)dx\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\int |x/\lambda|^2|\psi|dx + \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\int |u|^2|\psi'|dx.\end{aligned}$$

Note que, $\lambda' < (\lambda')^2$ visto que para $t >> 2$ vale

$$\frac{1}{t^{1/2}\log t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log t}\right) < \frac{1}{t\log^2(t)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log t}\right)^2.$$

Além disso, temos que $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4\lambda'}$ ocorre, se, somente se, $\lambda' \leq \frac{1}{2}$. De fato,

$$\lambda' \leq \frac{1}{\sqrt{2}log2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log 2}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u(t,x)dx\right| &\leq \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\int |x/\lambda|^2|\psi|dx + \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}\int |u|^2|\psi'|dx \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{(\lambda')^2}{\lambda}\int |x/\lambda|^2|\psi|dx + \frac{1}{4\lambda'}\frac{\lambda'}{\lambda}\int |u|^2|\psi'|dx.\end{aligned}$$

Provando assim a afirmação 1.

Afirmação 2:

$$\frac{1}{2}\frac{(\lambda')^2}{\lambda}\int |x/\lambda|^2|\psi|dx \leq C\left(\lambda'\right)^2.$$

Antes de provar a afirmação vamos provar alguns fato elementares a respeito do espaço de Schwarz. Temos que

$$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow I = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|dx < +\infty. \tag{5.14}$$

De fato,

$$I = \int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)\frac{\phi(x)}{(1+|x|^2)}dx \leq c\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+|x|^2}dx < +\infty.$$

Além disso, $|\phi(\cdot)p(\cdot)| < k \Rightarrow |\phi'(\cdot)| \leq \frac{k}{p(\cdot)}$.
Assim, ver (5.14)

$$\frac{\lambda'}{\lambda}\int \left|\frac{x}{\lambda}\right|^2 \left|\psi(\frac{x}{\lambda})\right| dx = \frac{\lambda'}{\lambda}\lambda\int y^2\phi'(y)dy \leq C\lambda'.$$

Basta fazer a mudança da variável, $y = \frac{x}{y} \Rightarrow \lambda dy = dx$. Donde,

$$\frac{1}{2}\frac{(\lambda')^2}{\lambda}\int |x/\lambda|^2|\psi|dx = \frac{1}{2}\lambda' \leq C\,(\lambda')^2\,\frac{\lambda'}{\lambda}\int \left|\frac{x}{\lambda}\right|^2 \left|\psi(\frac{x}{\lambda})\right| dx \leq C(\lambda')^2.$$

Provando a Afirmação 2. Portanto,

$$\left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u(t,x)dx\right| \leq C\,(\lambda'(t))^2 + \frac{1}{4\lambda(t)}\int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^2(t,x)dx. \quad (5.15)$$

Por outro lado, usando (5.1) temos

$$\frac{1}{\lambda^3(t)}\int \psi^{(3)}\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u(t,x)dx \lesssim \frac{1}{\lambda^3(t)}\lambda^{1/2}(t)\|u(t)\|_{L^2} \lesssim \frac{\log^{5/2}t}{t^{5/4}}. \quad (5.16)$$

De fato,

$$(1): \int \psi^{(3)}(\frac{x}{\lambda})udx \leq \left\|\psi^3\right\|_2 \|u\|_2$$

visto que,

$$\left\|\psi^3\right\|_2 = \left(\int [\psi^{(3)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx]^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}\left(\int [\psi^{(3)}(y)dx]^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}}\left\|\psi^3\right\|_2.$$

Para a segunda parte da desigualdade temos:

$$(2): \frac{1}{\lambda^3}\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{log^3(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{t^{1/4}}{log^{1/2}(t)} = t^{-(5/4)}log^{5/2}(t).$$

Donde, por (3.1)

$$\frac{1}{\lambda^3}\lambda^{\frac{1}{2}}\|u\|_2 \leq Ct^{-(5/4)}log^{5/2}(t).$$

Portanto, no caso em que $f_2(s) = 0$, concluímos de (5.15) e (5.16) que

$$\frac{1}{\lambda(t)}\int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^2(t,x)dx \leq \frac{C\log^{5/2}t}{t^{5/4}} + C\,(\lambda'(t))^2$$
$$+\frac{1}{4\lambda(t)}\int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^2(t,x)dx + \frac{d}{dt}\mathcal{I}(t).$$

Logo,

$$\frac{1}{\lambda(t)}\int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^2(t,x)dx \leq \frac{4}{3}\left(\frac{C\log^{5/2}t}{t^{5/4}} + C\frac{1}{tlog^2(t)}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{logt}\right)^2 + \frac{d}{dt}\mathcal{I}(t)\right)$$
$$\lesssim \frac{\log^{5/2}t}{t^{5/4}} + \frac{1}{t\log^2 t} + \frac{d}{dt}\mathcal{I}(t).$$

Agora devemos integrar os dois lados com relação ao tempo. Para resolver a integral do lado direito, podemos dividi-la em duas partes e tratar cada uma separadamente. Vamos calcular $\int_2^\infty \frac{\log^{5/2} t}{t^{5/4}}\, dt$ e $\int_2^\infty \frac{1}{t \log^2 t}\, dt$ e, em seguida, somá-las. Começamos com $\int_2^\infty \frac{\log^{5/2} t}{t^{5/4}}\, dt$. Note que, $log^{5/4} t \leq C t^{1/8}$. De fato,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{log^{5/2} t}{t^{1/8}} = 0. \tag{5.17}$$

Usando regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{d}{dt}(\log t)^{5/2}}{\frac{d}{dt} t^{1/8}}.$$

Agora, derivamos cada termo: Para o numerador:

$$\frac{d}{dt}(\log t)^{5/2} = \frac{5}{2}(\log t)^{3/2} \cdot \frac{1}{t},$$

enquanto para o denominador:

$$\frac{d}{dt} t^{1/8} = \frac{1}{8} t^{-7/8}.$$

Agora, substituímos essas derivadas de volta na nossa expressão original:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{log^{5/2} t}{t^{1/8}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{2}(\log t)^{3/2} \cdot \frac{1}{t}}{\frac{1}{8} t^{-7/8}} = \lim_{t\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{(\log t)^{3/2}}{t} \cdot 8 \cdot t^{7/8} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{40}{2} \cdot \frac{(\log t)^{3/2}}{t^{1/8}} = \lim_{t\to\infty} 20 \cdot \frac{(\log t)^{3/2}}{t^{1/8}}.\end{aligned}$$

Agora, quando t tende ao infinito, $(\log t)^{3/2}$ cresce muito mais lentamente do que $t^{1/8}$. Portanto, o limite se aproxima de zero:

$$\lim_{t\to\infty} 20 \cdot 0 = 0.$$

Daí,

$$\int_2^\infty \frac{\log^{5/2} t}{t^{5/4}} dt \leq \int_2^\infty \frac{t^{1/8}}{t^{5/4}} dt = C \int_2^\infty t^{-(9/8)} dt < \infty.$$

Agora, vamos calcular $\int_2^\infty \frac{1}{t \log^2 t}\, dt$.

Podemos fazer uma substituição $u = \log t$, então $du = \frac{1}{t} dt$, transformando a integral em

$$\int_{log2}^\infty \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{log2}.$$

Logo, usando que $\psi' = sech^2$ temos:

$$\int_2^\infty \frac{1}{\lambda(t)} \int \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^2(t,x) dx < +\infty.$$

Uma estimativa que mostra o resultado para este caso.

Para o caso $f_2(s) \neq 0$, usamos (3.2) e (5.6) de forma que

$$s^2 + f_2(s) \leq s^2 + \delta s^2 = (1+\delta)s^2,$$

válido para todo $|s|$ pequeno. Consequentemente, de (1.35),

$$\frac{1}{\lambda(t)} \int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \left(u^2 + f_2(u)\right)(t,x)dx \leq \frac{1+\delta}{\lambda(t)} \int \psi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^2(t,x)dx.$$

O resto da prova é similar ao caso $f_2(s) = 0$. Finalmente, (5.13) é apenas consequência de (5.12) e do fato de que $\frac{1}{\lambda(t)}$ não é integrável em $[2,\infty)$ (ver Lema 5.7). ∎

Passo 2: Decaimento local médio das derivadas em L^2.

Seja ϕ uma função suave e limitada, a ser definida posteriormente. Vamos definir o funcional

$$\mathcal{J}(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^2(t,x)dx \tag{5.18}$$

Observe que a partir da hipótese dos Teoremas 5.2 e 5.4, tem-se $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{J}(t) < +\infty$. Afirmamos o seguinte resultado.

Lema 5.9 *Seja $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F_2(0) = 0$ and $F_2'(s) = f_2(s)$. Então, temos*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{J}(t) = &-\frac{\lambda'(t)}{2\lambda(t)} \int \frac{x}{\lambda(t)} \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^2(t,x)dx - \frac{3}{2\lambda(t)} \int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) (\partial_x u)^2 (t,x)dx \\ &+ \frac{1}{2\lambda^3(t)} \int \phi^{(3)}\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^2(t,x)dx \\ &+ \frac{1}{\lambda(t)} \int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \left(\frac{2}{3}u^3 + uf_2(u) - F_2(u)\right)(t,x)dx.\end{aligned}$$

Demonstração:

A demonstração segue os mesmos passos do Lema 5.6, isto é, seguem de cálculos que envolvem integrações por partes. Consulte [42] para mais detalhes. ∎

Reunindo os resultados do Corolários 5.8 e do Lema 5.9, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 5.10 *Considere a função peso $\phi(x) := \tanh(2x)$, de tal modo que $\phi'(x) = 2\,\mathrm{sech}^2(2x)$. Então temos do Lema 5.9*

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\lambda(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^4\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) (\partial_x u)^2 (t,x)dxdt < +\infty. \tag{5.19}$$

Em particular, existe uma sequência crescente de tempos $s_n \to +\infty$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{\lambda\left(s_n\right)}\right)\left(\partial_x u\right)^2\left(s_n,x\right)dx=0. \tag{5.20}$$

Demonstração:

Semelhante à prova do Corolário 5.8, a qual precisamos estimar os termos no Lema 5.9, temos que,

$$\begin{aligned}|I| &= \left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\int\frac{x}{\lambda(t)}\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^2(t,x)dx\right| \leq \left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\right|\int|(x/y)\phi'|\,u^2dx\\ &\leq \left|\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}\right|\sup_{x,t\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{\lambda}\phi'\right|\int_{\mathbb{R}}u^2dx \leq C(\lambda')^2I_2(u_0)\end{aligned}$$

e

$$|II| = \left|\frac{1}{2\lambda^3(t)}\int\phi^{(3)}\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^2(t,x)dx\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda^3}\right|\int|\phi^3|u^2dx \lesssim \left|\frac{1}{\lambda^3}\right|\int u^2dx \lesssim \frac{1}{|\lambda^3|}I_2(u_0).$$

Agora provemos que $\dfrac{1}{|\lambda^3|}$ é integrável com relação ao tempo.

De fato, $\lim_{t\to\infty} log^3(t)t^{-(1/3)}=0$. (basta usar a regra de L'Hôpital, ver (5.17)) Logo,

$$\int_2^{\infty}\frac{log^3(t)}{t^{3/2}} \leq C\int_2^{\infty}\frac{t^{1/3}}{t^{3/2}} \leq C\int_2^{\infty}t^{-(7/6)}dt<\infty. \tag{5.21}$$

Resta estimar agora o termo não linear.

Afirmação:

$$\left|\frac{1}{\lambda(t)}\int\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\frac{2}{3}u^3+uf_2(u)-F_2(u)\right)(t,x)dx\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\lambda(t)}\int\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^2dx. \tag{5.22}$$

Pela imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}|A| &= \left|\frac{2}{3}\frac{1}{\lambda}\int\phi u^3dx\right| \lesssim \frac{1}{|\lambda|}\left\|u\right\|_{\infty}\int_{\mathbb{R}}u^2\phi'dx\\ &\lesssim \frac{1}{|\lambda|}\left\|u\right\|_{H^1}\int_{\mathbb{R}}u^2\phi'dx \lesssim \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}}u^2\phi'dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|B| &= \left|\frac{1}{\lambda}\int\phi' uf_2(u)dx\right| \lesssim \frac{1}{|\lambda|}\int\phi' u|u|^2dx\\ &\lesssim \frac{1}{|\lambda|}\left\|u\right\|_{\infty}\int\phi' u^2dx \lesssim \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\int\phi' u^2dx.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$|C| = \left|\frac{1}{\lambda}\int F_2(u)\phi'dx\right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int\phi' u|u|^2dx \lesssim \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\int\phi' u^2dx,$$

onde usamos que

$$|F_2'(s)| = |f_2(s)| \leq \delta |s|^2 = \delta s^2$$
$$\Rightarrow \int |F_2'(s)| ds = |F_2(u)| \lesssim |u|^3.$$

Então, temos que as estimativas $|I|e|II|$ são integraveis no tempo pela demonstração do corolário (5.8) e (5.21), e a afirmação acima sai diretamente da primera parte do Corolário 5.8 (ver (5.12)). Portanto,

$$\int_2^\infty \frac{1}{\lambda(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) (\partial_x u)^2 (t,x) dx dt < +\infty.$$

Daí a equação (5.20) se prova novamente (diretamente) pelo Lema 5.7. ∎

Agora provaremos o decaimento L^2 em (5.3). Lembre-se do intervalo $I(t)$ definido em (5.1).

Corolário 5.11 *Suponha as hipóteses do Teorema 5.2 ou Teorema 5.4. Então*

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|u(t)\|_{L^2(I(t))} = 0. \tag{5.23}$$

Demonstração:
Basta provar o resultado no caso $t \geq 2$. Considere agora a função $\phi(x) := \operatorname{sech}^6 x$ em (5.18). Vamos novamente estimar os termos em (5.9) (veja os detalhes da prova do Corolário 5.10 para algumas estimativas).
Inicialmente temos que

1. $\left| \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} \int \frac{x}{\lambda(t)} \phi' \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) u^2(t,x) dx \right| \leq C(\lambda')^2 I_2(u_0).$ (ver (5.10))

e

2. $\left| \frac{1}{2\lambda^3(t)} \int \phi^{(3)} \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) u^2(t,x) dx \right| \lesssim \frac{1}{|\lambda^3|} I_2(u_0).$ (ver (5.10))

Já o termo com derivadas ao quadrado é majorado por:

$$\left| \frac{3}{2\lambda(t)} \int \phi' \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) (\partial_x u)^2 (t,x) dx \right| \leq C \frac{1}{\lambda} \int \phi' (\partial_x u)^2 dx$$

e por último,

$$\left| \frac{1}{\lambda(t)} \int \phi' \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) \left(\frac{2}{3} u^3 + u f_2(u) - F_2(u) \right) (t,x) dx \right| \lesssim C \frac{1}{\lambda} \int \phi' u^2 dx + 2 \frac{\varepsilon}{\lambda(t)} \int \phi' \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) u^2 dx.$$

Como os termos do lado direito são todos integráveis no tempo, temos que

$$\left| \frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) \right| \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} \int \operatorname{sech}^4 \left(\frac{x}{\lambda(t)} \right) \left(u^2 + (\partial_x u)^2 \right) (t,x) dx \tag{5.24}$$

Donde, por (5.12) e (5.19) segue que o lado direito da desigualdade acima é integrável com relação ao tempo, que implica para $t < t_n$

$$-C \leq \mathcal{J}(t_n) - \mathcal{J}(t) \leq C.$$

Daí,

$$|\mathcal{J}(t) - \mathcal{J}(t_n)| \leq C \quad \text{quando} \quad t \uparrow \infty$$

e usando (5.13) temos que,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{L^2(I(t))} = \lim_{t\to\infty} \left(\int_{I(t)} u^2 dx \right)^{1/2} \leq \lim_{t\to\infty} \left(\int_{I(t)} sech^4(\cdot)((\partial_x u)^2 + u^2) dx \right)^{1/2} = 0.$$

resultado análogo para $t \to -\infty$. ∎

Considere novamente ϕ suave e limitada. Vamos definir agora o funcional

$$\mathcal{K}(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \left((\partial_x u)^2 - \frac{2}{3}u^3 - 2F_2(u) \right)(t,x) dx. \tag{5.25}$$

Observe que a partir da hipótese dos Teoremas 5.2 e 5.4, tem-se $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{K}(t) < +\infty$. A derivada do funcional é obtido no seguinte Lema.

Lema 5.12 *Vale a seguinte identidade,*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = &- \frac{\lambda'(t)}{2\lambda(t)} \int \frac{x}{\lambda(t)} \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \left((\partial_x u)^2 - \frac{2}{3}u^3 - 2F_2(u) \right) \\
&- \frac{3}{2\lambda(t)} \int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \left(\partial_x^2 u\right)^2 + \frac{1}{2\lambda^3(t)} \int \phi'''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) (\partial_x u)^2 \\
&+ \frac{1}{3\lambda^3(t)} \int \phi'''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) u^3 + \frac{1}{\lambda^3(t)} \int \phi'''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) F_2(u) \\
&+ \frac{2}{\lambda(t)} \int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \partial_x \left(u^2 + f_2(u)\right) \partial_x u \\
&+ \frac{2}{\lambda^2(t)} \int \phi''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \left(u^2 + f_2(u)\right) \partial_x u \\
&- \frac{1}{2\lambda(t)} \int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right) \left(u^2 + f_2(u)\right)^2.
\end{aligned}$$

Demonstração:

A prova segue os mesmo passos do Lema 5.6. Iremos exibir alguns passos para guiar o leitor. Primeiro, calculamos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = -\frac{\lambda'(t)}{2\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left((\partial_x u)^2 - \frac{2}{3}u^3 - 2F_2(u)\right) + \int \phi\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x u\partial_{tx}u - u^2\partial_t u - f_2(u)\partial_t u\right).$$

Integrando por partes,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = -\frac{\lambda'(t)}{2\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left((\partial_x u)^2 - \frac{2}{3}u^3 - 2F_2(u)\right) - \int \phi\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x^2 u + u^2 + f_2(u)\right)\partial_t u - \frac{1}{\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\partial_x u\partial_t u,$$

e usando a equação (3.1),

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = -\frac{\lambda'(t)}{2\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left((\partial_x u)^2 - \frac{2}{3}u^3 - 2F_2(u)\right) - \frac{1}{2\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x^2 u + u^2 + f_2(u)\right)^2 - \frac{1}{\lambda(t)}\int \partial_x\left(\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\partial_x u\right)\left(\partial_x^2 u + u^2 + f_2(u)\right).$$

Simplificando,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = -\frac{\lambda'(t)}{2\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left((\partial_x u)^2 - \frac{2}{3}u^3 - 2F_2(u)\right) - \frac{1}{2\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x^2 u + u^2 + f_2(u)\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2(t)}\int \phi''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\partial_x u\left(\partial_x^2 u + u^2 + f_2(u)\right) - \frac{1}{\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x^2 u + u^2 + f_2(u) - u^2 - f_2(u)\right)\left(\partial_x^2 u + u^2 + f_2(u)\right),$$

e

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) = -\frac{\lambda'(t)}{2\lambda(t)}\int \frac{x}{\lambda(t)}\phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left((\partial_x u)^2 - \frac{2}{3}u^3 - 2F_2(u)\right) - \frac{3}{2\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\left(\partial_x^2 u\right)^2 + \left(u^2 + f_2(u)\right)^2 + 2\partial_x^2 u\left(u^2 + f_2(u)\right)\right) + \frac{1}{2\lambda^3(t)}\int \phi'''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)(\partial_x u)^2 + \frac{1}{3\lambda^3(t)}\int \phi'''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)u^3 + \frac{1}{\lambda^3(t)}\int \phi'''\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)F_1(u) + \frac{1}{\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(u^2 + f_2(u)\right)\partial_x^2 u + \frac{1}{\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(u^2 + f_2(u)\right)^2,$$

que prova o resultado após mais uma integração por partes.

■

Observe que todas as quantidades no lado direto do lema acima são conhecidas por serem integráveis no tempo usando resultados anteriores, exceto o termo com duas derivadas $-\frac{3}{2\lambda(t)}\int \phi'\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x^2 u\right)^2 dx$. Um importante corolário deste resultado anterior é o seguinte efeito suavizante do tipo Kato:

Corolário 5.13 *Considere a função $\phi(x) := \tanh(3x)$, de modo que $\phi'(x) = 3\,\mathrm{sech}^2\,(3x)$. Então nós temos*

$$\int_2^\infty \frac{1}{\lambda(t)} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{sech}^6\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x^2 u\right)^2 (t,x)dxdt < +\infty \tag{5.26}$$

Em particular, existe uma sequência crescente de tempos $t_n \to +\infty$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{sech}^6\left(\frac{x}{\lambda\,(t_n)}\right)\left(\partial_x^2 u\right)^2 (t_n,x)\,dx = 0. \tag{5.27}$$

Demonstração:

Vamos estimar os termos no Lema 5.12. Observe que todos os termos ja foram estimados ou seguem técnicas iguais as dos Corolários 5.8 e 5.10. Todos os termos envolvendo a função ϕ e suas derivadas acompanhados por $u^2, u^3, f_2(u)$ ou $F_2(u)$ serão majoradas para termos do tipo Ku^2 onde K é constante. Dessa forma passando o termo que possui segunda derivada ao quadrado pro lado esquerdo no Lema (5.12) temos que ele será majorado por termos finitos e integráveis no tempo. Logo,

$$\int_2^\infty \frac{1}{\lambda(t)} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{sech}^6\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(\partial_x^2 u\right)^2 (t,x)dxdt < +\infty.$$

A segunda parte do Corolário é novamente resultado imediato do Lema 5.7.

■

Como aplicação direta desse resultado mais os corolários (5.8) e (5.10) vamos provar (5.4), conhecida como estimativa de suavização de Kato:

Teorema 5.14 *Considere as hipóteses dos Teoremas* (5.2) *ou* (5.4). *Então, para todo $c_0 > 0$ vale*

$$\int_2^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-c_0|x|}\left(u^2 + (\partial_x u)^2 + \left(\partial_x^2 u\right)^2\right)(t,x)dxdt < +\infty.$$

Demonstração:

Note que, tomando $\frac{1}{\lambda} = c_0$ temos

$$sech\left(\frac{x}{\lambda}\right) = sech(c_0 x) = \frac{2}{e^{c_0 x} + e^{-c_0 x}} \leq \frac{2}{e^{c_0|x|}} = 2e^{-c_0|x|}.$$

Dessa forma, pelos corolários (5.8), (5.10) e (5.13) temos que

$$c_0 \int_2^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-c_0|x|}\left(u^2 + (\partial_x u)^2 + \left(\partial_x^2 u\right)^2\right)(t,x)dxdt < +\infty$$

provando a estimativa de suavização de Kato em (5.4). ∎

Passo 3: Conclusões e Controle da norma H^1

Resta provar (5.3). Note que a estrategia de controle da norma H^1 já foi apresentada nesse texto durante a demonstração do Corolário 5.11, de fato uma vez que provamos (5.26) seguindo os mesmos passos do Corolário 5.11 chegaremos na seguinte estimativa

$$\left|\frac{d}{dt}\mathcal{K}(t)\right| \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\int \operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)\left(u^2+(\partial_x u)^2+\left(\partial_x^2 u\right)^2\right)(t,x)dx.$$

Donde, por (5.12), (5.19) e (5.26) segue que o lado direito da desigualdade acima é integrável com relação ao tempo, que implica

$$-C \leq \mathcal{K}(t_n)-\mathcal{K}(t) \leq C.$$

Daí,

$$|\mathcal{K}(t)-\mathcal{K}(t_n)| \leq C \quad \text{quando} \quad t \uparrow \infty.$$

Agora note que, por (5.13), (5.20) e (5.27) temos o seguinte resultado

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}^6\left(\frac{x}{\lambda(t_n)}\right)\left((\partial_x^2 u)^2+(\partial_x u)^2+u^2\right)(t_n,x)\,dx=0. \tag{5.28}$$

Usando as informações acima, obtemos:

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{H^1(I(t))} \leq \lim_{t\to\infty}\left(\int_{I(t)} sech^6(\cdot)\left((\partial_x^2 u)^2+(\partial_x u)^2+u^2\right)dx\right)^{1/2}=0. \tag{5.29}$$

Esses fatos podem ser formalizados e reescritos da seguinte forma

Teorema 5.15 *Assumindo as hipóteses do Teorema 5.2 ou Teorema 5.4. Vale que*

$$\lim_{t\to\pm\infty}\|u(t)\|_{H^1(I(t))}=0. \tag{5.30}$$

Referências Bibliográficas

[1] Ablowitz, M.J., Segur, H.*Solitons and the Inverse Scattering Transform.* SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 4, x+425 pp. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia (1981). ISBN 0-89871-174-6

[2] Alejo, M. A. em PROPAGAÇÃO DE PACOTES DE ONDAS: BREATHERS. Revista Matemática Universitária, v. 1, 2019.

[3] Alejo, M.A.*Nonlinear stability of Gardner breathers.* J. Differ. Eqs. 264, 1192-1230 (2018)

[4] Alejo, M.A., Muñoz, C.: *Nonlinear stability of mKdV breathers.* Commun. Math. Phys. 324(1), 233262(2013)

[5] Alejo, M.A., Muñoz, C.: *Dynamics of complex-valued modified KdV solitons with applications to the stability of breathers.* Anal. PDE. 8(3), 629-674 (2015)

[6] Alejo, M.A., Muñoz, C: *Almost sharp nonlinear scattering in one-dimensional Born-Infeld equations arising in nonlinear electrodynamics.* Proc. AMS 146(5), 2225-2237 (2018)

[7] Alejo, M.A., Muñoz, C., Palacios, J.M.: *On the variational structure of breather solutions II. Periodic mKdV equation.* EJDE 2017(56), 1-26 (2017)

[8] Alejo, M.A., Muñoz, C., Vega, L.: *The Gardner equation and the L^2-stability of the N-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation.* Trans. AMS 365(1), 195-212 (2013)

[9] Alejo, M.A, Muñoz, C e Palacios, J.M.: *On the Variational Structure of Breather Solutions I: Sine-Gordon case*, J. Math. Anal. Appl. Vol.453/2 (2017) pp. 1111-1138.

[10] Alejo, M.A, Fanelli, L. e Muñoz, C.: *Stability and instability of breathers in the U(1) Sasa-Satusuma and Nonlinear Schrödinger models,* arXiv:1901.10381.

[11] Blank, C., Chirilus-Bruckner, M., Lescarret, V. e Schneider, G.: *Breather solutions in periodic media,* Comm. Math. Phys. 302 (3) p. 815-841 (2011).

[12] Cavalcante, M.: *Um estudo qualitativo sobre o Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger Crítica.* 2012.

[13] C.E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega,; *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle* Comm. Pure Appl. Math. 46, (1993), 527–620.

[14] Christ, F.M., Weinstein, M.I.: *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation.* J. Funct. Anal. 100(1), 87-109 (1991)

[15] Côte, R.: *Construction of solutions to the subcritical* gKdV *equations with a given asymptotical behavior.* J. Funct. Anal. 241(1), 143-211 (2006)

[16] Deift, P., Venakides, S., Zhou, X.: *The collisionless shock region for the long-time behavior of solutions of the KdV equation.* Commun. Pure Appl. Math. 47, 199-206 (1994)

[17] Eckhaus, W., Schuur, P.: *The emergence of solitons of the Korteweg-de Vries equation from arbitrary initial conditions. Math. Methods Appl.* Sci. 5, 97-116 (1983)

[18] Escauriaza, L., Kenig, C.E., Ponce, G., Vega, L.: *On uniqueness properties of solutions of the k-generalized KdV.* J. Funct. Anal. 244(2), 504-535 (2007)

[19] Germain, P., Pusateri, F., Rousset, F.: *Asymptotic stability of solitons for mKdV.* Adv. Math. 299, 272330(2016)

[20] Hayashi, N., Naumkin, P.I.: *Large time asymptotics of solutions to the generalized Korteweg-de Vries equation.* J. Funct. Anal. 159(1), 110-136 (1998)

[21] Hayashi, N., Naumkin, P.I.: *Large time behavior of solutions for the modified Korteweg-de Vries equation.* Int. Math. Res. Not. 8, 395-418 (1999)

[22] Harrop-Griffiths, B.: Long time behavior of solutions to the mKdV. Commun. Partial Differ. Equ. 41(2), 282-317 (2016)

[23] Hirota, R.: *Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons*, J. Phys. Soc. Japan, 33, no. 5, 1456-1458 (1972).

[24] Isaza, P., Linares, F., Ponce, G.: *On decay properties of solutions of the k-generalized KdV equation.* Commun. Math. Phys. 324(1), 129-146 (2013)

[25] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation,* Geom. Funct. Anal. 3 (1993), no. 3, 209–262.

[26] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modiffed KdV on R and T*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), no. 3, 705–749 (electronic)

[27] Kato, T.: *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation,* Adv. in Math. Supp. Stud., Stud. in Appl. Math. 8 (1983), 93–128.

[28] Kenig, C.E., Ponce, G., Vega, L.: *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle.* Commun. Pure Appl. Math. 46, 527-620 (1993)

[29] Kenig, C.E., Ponce, G., Vega, L.: *Lower bounds for non-trivial traveling wave solutions of equations of KdV type.* Nonlinearity 25(5), 1235-1245 (2012)

[30] Koch, H., Marzuola, J.: *Small data scattering and soliton stability in $H^{-1/6}$ for the quartic KdV equation.* Anal. PDE 5(1), 145-198 (2012)

[31] Korteweg, D. e Vries, G.: *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Philosophical Magazine 39 (1895), 422-433.

[32] Kowalczyk, M., Martel, Y., Muñoz, C.: *Kink dynamics in the ϕ^4 model: asymptotic stability for odd perturbations in the energy space.* J. Am. Math. Soc. 30, 769-798 (2017)

[33] Kowalczyk, M., Martel, Y., Muñoz, C.: *Nonexistence of small, odd breathers for a class of nonlinear wave equations.* Lett. Math. Phys. 107(5), 921-931 (2017)

[34] Kowalczyk, M., Martel, Y., Muñoz, C.: *On asymptotic stability of nonlinear waves, Seminaire Laurent Schwartz-EDP et applications, vol (2016-2017), Exp. No. 18.* hrefhttps://doi.org/10.5802/SLSEdphttps://doi.org/10.5802/SLSEdp. 111

[35] Kwak, C., Muñoz, C.: *Extended decay properties for generalized BBM equations.* arXiv:1802.01925 (2018)

[36] Kwak, C., Muñoz, C., Poblete, F., Pozo, J. C.: *The scattering problem for the abcd Boussinesq system in the energy space.* arXiv:1712.09256 (2017)

[37] Lamb, G.L.: *Elements of soliton theory.* John Wiley & Sons, Nueva York, 1980.

[38] Linares, F., Ponce, G.: *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* 2nd. Springer, 2014.

[39] Maddocks, J.H e Sachs, R.L.: *On the stability of KdV multi-solitons*, Comm. Pure Appl. Math. 46, 867-901 (1993).

[40] Martel, Y., Merle, F.: *A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation.* J. Math. Pures Appl. (9) 79(4), 339-425 (2000)

[41] Martel, Y., Merle, F.: *Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the critical generalized KdV equation.* J. Am. Math. Soc. 15, 617-664 (2002)

[42] Martel, Y., Merle, F.: *Asymptotic stability of solitons for subcritical gKdV equations revisited.* Nonlinearity 18(1), 55-80 (2005)

[43] Martel, Y., Merle, F.: *Description of two soliton collision for the quartic gKdV equation.* Ann. Math. (2) 174(2), 757-857 (2011)

[44] Merle, F., Raphaël, P.: *The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation.* Ann. Math. (2) 161(1), 157-222 (2005)

[45] Miura, R.M.: *The Korteweg-de Vries equation, a survey of results.* SIAM Rev., 18 (1976) 412-459.

[46] Muñoz, C.: *On the inelastic 2-soliton collision for generalized KdV equations.* IMRN 9, 1624-1719 (2010). arXiv:0903.1240

[47] Muñoz, C., Poblete, F., Pozo, J.C.: *Scattering in the energy space for Boussinesq equations.* arXiv:1707.02616. To appear in Commun. Math. Phys.

[48] Muñoz, C. e Ponce, G.: *Breathers and the dynamics of solutions to the KdV type equations,* Comm. Math. Phys. 367 (2018), 581-598.

[49] Pelinovsky, D., Grimshaw, R.: *Structural transformation of eigenvalues for a perturbed algebraic soliton potential.* Phys. Lett. A 229(3), 165-172 (1997)

[50] Ponce, G., Vega, L.: *Nonlinear small data scattering for the generalized Korteweg-de Vries equation.* J. Funct. Anal. 90(2), 445-457 (1990)

[51] Rocha, N. *Estabilidade de soluções do tipo solitions para a equação generalizada de Korteweg-de Vries.* 2020

[52] Russell, J.S.: *Report on waves*, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.

[53] Tao, T. "Nonlinear dispersive equations: local and global analysis". American Mathematical Soc. (2006).

[54] Tao, T.: *Scattering for the quartic generalised Korteweg-de Vries equation.* J. Differ. Eqs. 232(2), 623651 (2007)

[55] Wadati, M.: *The modified Korteweg-de Vries equation.* J. Phys. Soc. Jpn. 34(5), 1289-1296 (1973)

[56] Weinstein, M.I.: *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimartes.* Commun. Math. Phys. 87, 567-576 (1983)

[57] *http://www.amazonialegal.com.br/textos/Pororoca.htm*