UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA PARA INTRODUÇÃO DO MÉTODO DA REDUÇÃO AO ABSURDO NO ENSINO MÉDIO

JOSÉ JERFFESSON CAZÉ DE ANDRADE

Maceió, Abril de 2024

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ JERFFESSON CAZÉ DE ANDRADE

UMA PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA PARA INTRODUÇÃO DO MÉTODO DA REDUÇÃO AO ABSURDO NO ENSINO MÉDIO

Maceió-AL
Abril de 2024

JOSÉ JERFFESSON CAZÉ DE ANDRADE

UMA PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA PARA INTRODUÇÃO DO MÉTODO DA REDUÇÃO AO ABSURDO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

Maceió-AL

Abril de 2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A553p Andrade, José Jerffesson Cazé de.
Uma proposta de uma sequência para introdução do método da redução ao absurdo no ensino médio / José Jerffesson Cazé de Andrade. - 2024.
64 f. : il.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Bibliografia: f. 62-64.

1. Redução ao absurdo (Lógica). 2. Irracionalidade. 3. Matemática. I. Título.

CDU: 510.6

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.”

(Carl Friedrich Gauss)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por sempre me proteger e guiar durante toda a minha vida;

Aos meus pais, Luzinete e Joselito, por todo o apoio, incentivo, ensinamentos, educação, durante toda minha vida;

A minha esposa, Nicássia, companheira e incentivadora nos momentos mais difíceis durante essa jornada, por toda paciência, apoio e compreensão;

Aos meus irmãos, Joabe e Joerby, e a todos da minha família que torceram e me incentivaram para chegar a tal conquista;

A todos os meus familiares e amigos que contribuíram de maneira direta ou indireta para que alcançasse tal feito;

Finalmente, ao meu orientador Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra pela sua orientação, pelos conhecimentos passados e por toda paciência.

RESUMO

Investigamos neste trabalho as dificuldades de aprendizagem inerentes ao uso do método de redução ao absurdo no primeiro ano do ensino médio para demonstração de resultados matemáticos. Esta é uma pesquisa de natureza qualitativa, tendo como referência teórico-metodológica o Método de Aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas de Lourdes Onuchic.

Palavra-chave: redução ao absurdo; irracionalidade; Matemática.

ABSTRACT

In this work, we investigate the learning difficulties inherent to the use of the method of reduction to absurdity in the first year of high school to demonstrate mathematical results. This is a qualitative research, having as a theoretical-methodological reference the Method of Learning Mathematics through Problem Solving by Lourdes Onuchic.

Keyword: *reduction to absurdity; irrationality; Mathematics.*

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Estudos nacionais e internacionais apontam que as dificuldades relacionadas ao ensino dos irracionais na educação básica decorrem principalmente de três aspectos:

(a) conhecimentos de professores e estudantes sobre o tema (Dias, 2002; Fischbein et al, 1995; Igliori e Silva, 1998);

(b) tratamento dado ao tema pelos livros didáticos (Lima, 2001; Pommer, 2012);

(c) formação dos professores de matemática da educação básica (Sirotic; Zazkis; Sirotic, 2004).

No que diz respeito à formação dos licenciandos de matemática e à abordagem dos números irracionais na educação básica, Broetto e Santos-Wagner têm chegado à seguinte conclusão:

> Na Educação Básica, argumenta-se que o assunto é tratado com superficialidade e pouco aprofundamento conceitual, basicamente por meio de exemplos, enquanto, na formação inicial do professor de Matemática, ainda prevalece uma abordagem formalista desse tema, o que não capacita o futuro professor para ensinar números irracionais na Educação Básica. O resultado desse descompasso entre a licenciatura e a Educação Básica pode provocar uma dupla descontinuidade no ensino, como Felix Klein apontou há mais de um século. No caso dos números irracionais, mais especificamente, esse descompasso pode provocar a formação de um círculo vicioso: o professor sai da universidade sem uma formação adequada para abordar o assunto na Educação Básica, fazendo com que seus alunos cheguem até a universidade sem uma imagem adequada de número irracional, e o ciclo se repete (Broetto; Santos-Wagner, 2019, p.1)

No tocante ao tratamento dos números irracionais nos livros didáticos destinados ao ensino médio constata-se um posicionamento consensual dos pesquisadores nos seguintes pontos:

(a) superficialidade (ou ausência) na apresentação de segmentos comensuráveis e incomensuráveis;

(b) ausência ou superficialidade na representação decimal dos números;

(c) as atividades ou exercícios de aprendizagem são quase, ou em sua totalidade, de natureza repetitiva e maçante.

Mais especificamente no que tange à apresentação da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, Lima (2001) tem ressaltado a mistificação e a deseducação na apresentação desse tema por alguns autores quando argumentam do seguinte modo: "√2 = 1,414213 … é irracional porque não é uma decimal periódica. Quem garante isso? (...)"

Logo em seguida Lima tece alguns comentários e propõe um modo de abordagem:

> Examinando o desenvolvimento decimal de um número, nunca podemos garantir que ele seja irracional. Mesmo o número π, que o livro diz ter sido calculado com 1 bilhão de casas decimais (na verdade já são 5 bilhões), poderia ser racional, com um período muito grande. Aqui poderia ser feito um breve comentário sobre o método matemático. Um raciocínio simples mostra que não existem p, q ∈ ℤ tais que $p^2 = 2q^2$, logo √2 não é racional. Daí decorre que a expressão 1,414213… não é periódica. Este é o verdadeiro argumento. O argumento contrário não é válido (Lima, 2001, p. 269).

Notemos que essa proposta se encontra apresentada de maneira demasiadamente sintética. Embora tenha sido apresentada assim de modo abreviado, ela se encontra fundamentada no método de redução ao absurdo. Essa constatação enseja a seguinte questão: de que modo os livros didáticos que apresentam as demonstrações pelo argumento de Lima (2001) estão apresentando o método de redução ao absurdo? Até que ponto os estudantes entendem esse método?

A partir desses questionamentos estabelecemos os objetivos geral e específicos deste trabalho:

a) objetivo geral: analisar a aprendizagem da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pela utilização do método de redução ao absurdo na primeira série do ensino médio.
b) objetivos específicos: examinar quais as recomendações da Base Nacional Comum Curricular sobre o ensino dos números irracionais no ensino médio, identificando as competências e habilidades previstas; realizar uma revisão de literatura sobre a aprendizagem da irracionalidade de $\sqrt{2}$ para ver os tipos

de argumentos utilizados ou as estratégias didáticas utilizadas para justificar esse fato; elaborar uma sequência de atividades para a apresentação dessa irracionalidade por meio do método de redução ao absurdo; aplicar a sequência didática elaborada e analisar os resultados de aprendizagem alcançados.

Diante de tudo que foi exposto, este trabalho se encontra estruturado em três capítulos, o primeiro traz toda a fundamentação teórica sobre os temas que abordaremos na dissertação, tais como: a resolução de problemas no ensino de matemática, destacando a teoria de Onuchic e Allevato; a teoria de Balacheff sobre a definição dos tipos de provas em pragmáticas e intelectuais; o método de redução ao absurdo em seus aspectos históricos, a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ por dois métodos e, por fim, nesse capítulo tratamos dos números irracionais e ensino médio. No segundo, falamos das etapas que nossa pesquisa foi aplicada, detalhamos a sequência de atividades que elaboramos e utilizamos na turma de primeira série do ensino médio, seguindo a metodologia do ensino de matemática através da resolução de problemas de Onuchic e Allevato. No terceiro capítulo, analisamos as respostas obtidas através da sequência didática mencionada anteriormente e aplicada em uma turma de primeira série.

2. Fundamentação teórica

Neste capítulo iremos abordar alguns tópicos elementares para a nossa pesquisa, trabalhamos os conceitos da resolução de problemas para o ensino de matemática e sua importância. Analisamos os tipos de provas definidas por Balacheff em sua teoria e o quanto estão ligadas ao nosso dia a dia da sala de aula. Destacamos o método de redução ao absurdo para demonstração de resultados matemáticos, em especial para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Falamos dos números irracionais no ensino médio e de sua importância nesta etapa da educação básica, além de verificar como são tratados na BNCC.

2.1. Ensino de matemática através da resolução de problemas

A resolução de problemas na matemática ocupa um papel central no currículo da disciplina desde dos tempos antigos. Várias são as evidências da existência de problemas matemáticos encontrados em livros-textos de matemática dos séculos XIX e XX, além da história antiga grega, chinesa e egípcia. Segundo Onuchic (1999), até pouco tempo, o processo de ensino de solucionar problemas tratava-se de expor situações-problema e, possivelmente, incluir um exemplo com uma solução técnica específica.

> A importância dada à resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores-matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. (Onuchic, 1999, p.203)

Atualmente, o cenário educacional evidencia a necessidade de reformas nos âmbitos curriculares e metodológicos em todas as disciplinas escolares, em especial na Matemática. Em relação à revisão dos métodos de ensino-aprendizagem, destaca-se que professores e profissionais da Educação Básica precisarão desmiuçar-se em compreensões acerca de como implementar o ensino dos conteúdos de Matemática através da resolução de problemas (Bicalho, 2018).

Os conceitos que estão presentes na resolução de problemas, envolvem, segundo os aspectos teóricos elucidar o que seria um problema e, assim, como se resolve um problema. Vamos, primeiramente, esclarecer a definição do conceito de problema, que se faz tão valorizado nos currículos de Matemática. Segundo Van de Walle (2009, p. 57), “um problema é qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método ‘correto’ específico de solução”. Para Onuchic e Allevato (2011, p. 81), “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”, complementando que “um problema se configura na relação com o resolvedor, de tal modo que, se ele já conhece ou tem memorizados tais métodos de resolução ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema" (Allevato e onuchic, 2014, p. 44).

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, no que se alude à área específica da Matemática, Proença (2018, p.17-18) definiu que

> [...] uma situação de Matemática se torna um problema quando a pessoa precisa mobilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente para chegar a uma resposta. Não se trata, assim, do uso direto de uma fórmula ou regra conhecidas – quando isso ocorre, a situação tende a se configurar como um exercício.

O professor tem um papel importantíssimo no processo de ensino e aprendizagem em geral, em especial, no ensino de matemática através do método de Resolução de problemas, onde segundo Allevato e Onuchic (2014) a este compete o papel de fornecedor de situações com intuito de que os alunos confrontem seus conhecimentos para construir seus conhecimentos matemáticos.

Para Cai e Lester (2012), ao professor compete a função de auxiliar para que seus alunos se tornem competentes solucionadores de problemas, destacando que "as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo, assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática" (p. 156).

Fica evidenciado a importância da utilização do método de Resolução de Problemas no ensino de matemática para um melhor entendimento e compreensão dos conceitos matemáticos diversos e principalmente no processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Em concordância, Onuchic (1999, p.208) destaca

> o ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática.

Onuchic (1999) destaca os tópicos que julga necessários para uma aula de matemática através da resolução de problemas, são eles:

- Formar grupos: a aprendizagem muitas vezes tem mais significado quando compartilhada com seus colegas de sala, por isso deve-se dividir as turmas em pequenos grupos objetivando uma aprendizagem mais ativa, onde todos se esforçam e buscam soluções para os problemas em conjunto.

- O papel do professor: cabe ao professor nesse processo a função de mediador, estimulador, observador, entre outros. O docente lança os problemas, faz as devidas intervenções quando necessárias, deixa os alunos assumirem o papel central na busca pelas soluções e construção do conhecimento entre si.
- Resultados na lousa: esse é momento de evidenciar os resultados, respostas obtidas pelos alunos em cada problema. Independentemente se as respostas estão corretas ou não, o professor anota as respostas de todos na lousa.
- Plenária: todos os alunos apresentam e defendem suas soluções do problema em questão, é um momento de partilha e de grande expectativa por todos.
- Análise dos resultados: é chegada a hora de explorar os resultados e os conhecimentos do alunado acerca da matemática, para além do problema apresentado. É importante que seja trabalhada as dificuldades apresentadas na solução dos problemas, evidenciando e suprindo as carências de determinados conteúdos.
- Consenso: analisados os resultados e sanadas as dificuldades, busca-se um denominador comum a cerca da resolução correta do problema.
- Formalização: através da apresentação das definições, propriedades e demonstração, o professor com o auxílio dos alunos, apresenta a solução que se esperava para o problema proposto. Importante nessa etapa evidenciar os novos conceitos que se apresentaram durante a resolução da questão.

2.2. Teoria de Balacheff

Na Matemática as demonstrações são de grande relevância, porque com elas certificamos a validade ou não de vários conceitos, afirmações, proposições, teoremas, entre outros. Isto é, são a partir delas que comprovamos as leis da Matemática, logo apresentam um viés totalmente diferenciado e específico, tendo em vista que essas leis não se baseiam em experiências. Além do que, os conhecimentos matemáticos são adquiridos e interligados ao longo do tempo e da junção dos temas, isto é, um matemático em hipótese alguma se desfaz das obras corretas de outros, mas sim as amplia, generaliza, expande e aprimora (Garbi, 2010).

O papel da demonstração deve ser levado em consideração cada vez mais nas aulas e atividades de matemática e, paralelo a isso, se interligar com outras maneiras de validação necessariamente resultantes da argumentação ou mesmo da persuasão.

Muitos matemáticos destacam quão semelhantes e interligados são os conceitos de prova, demonstração e justificativa lógica, chegando a ser consideradas como sinônimas, além de enfatizarem que tais conceitos são a alma da verdadeira marca registrada da Matemática, Garbi (2010). Segundo Garbi (2010), mesmo a Matemática não sendo uma ciência experimental, as primeiras verdades matemáticas ficaram evidenciadas pelos homens primitivos a partir de suas vivências e necessidades quando precisavam trabalhar na prática com números ou formas geométricas, com o passar do tempo esse cenário corroborou com a utilização das demonstrações como víeis para validar as verdades matemáticas.

Para Morais Filho (2010), ao estudarmos matemática, notamos que ela contempla um universo de teoremas e que várias vezes, mesmo que sem saber, já os usamos ou provamos sem perceber. Matematicamente, um teorema "é uma sentença condicional 'se P, então Q', cuja validade é garantida por uma demonstração. Nesse caso, a sentença P chama-se *hipótese* e a sentença Q chama-se *tese*". Muito se utiliza nos dias atuais a separação clara e evidente do que é hipótese e do que é tese nas demonstrações de determinados teoremas no processo de ensino da Matemática, procurando assim deixar mais fácil e compreensível o entendimento do alunado. Vale destacar, que um teorema para que consigamos realizar essa distinção de maneira correta e objetiva, devem ser precisos e claros sempre no seu enunciado.

A explicação, a prova e a demonstração podem até serem sinônimos no ensino da Matemática, mas para Balecheff (2000) é importante distingui-las para que não se tornem um empecilho na pesquisa sobre o tema e principalmente, não venham misturar nos alunos os diferentes níveis de atividades. Para ele, do ponto de vista da Matemática propriamente dita, a explicação significa fornecer as justificativas de um teorema, explicá-lo e demonstrá-lo evidenciando os diferentes requisitos. Balacheff (2000) destaca ainda que o locutor é o sujeito que está inserido no nível da explicação, para esse sujeito, a partir de seus conhecimentos adquiridos e acumulados, a explicação designa e garante a validade de uma proposição. O locutor ao expressar uma explicação durante seu discurso tem como objetivo primordial, fazer com que os expectadores entendam a verdade da proposição já internalizada pelo falante.

> Essas relações entre explicação, prova e demonstração foram esclarecidas a partir da perspectiva do indivíduo empenhado em resolver um problema e validar sua solução. A qualificação de uma explicação como um enunciado não prejulga o valor epistêmico ou ôntico em si de seus enunciados; tal afirmação pode ter o valor ôntico positivo de um teorema em ato (isto é, crença empiricamente baseada em uma invariância observada e objetificada). Permanecendo no quadro de Duval, a passagem da explicação à argumentação é aquela imposta pela necessidade de formular as razões e a sua organização, seja para si ou para outrem. Fazer com que outros aceitem que uma argumentação estabelece a validade de uma solução muda seu status e valor pelo caráter público que adquire. Ela ganha o status de prova. Entre essas provas, algumas têm uma estrutura particular que satisfaz os padrões coletivos, como na matemática os da demonstração. (Balacheff, 2019, p. 831-832)

No método de Resolução de Problemas muitos tipos de provas podem ser evidenciados, as provas têm validade para os alunos de acordo com os seus níveis de conhecimento, percepção sobre determinada problemática (BALACHEFF, 2019). De acordo com a análise sobre a natureza e a hierarquia das provas, Balacheff (2000) definiu dois tipos de provas: as provas pragmáticas e as provas intelectuais. As primeiras são provas que exploram a ação e exibição de algo, enquanto as segundas, se sustentam em formulações das propriedades em jogo e de suas relações. Isto é, as provas pragmáticas necessitam da apresentação de alguma estratégia de verificação da validade; os sujeitos através de exemplos ou desenho buscam regularidade para comprovar determinado resultado. Já as provas intelectuais são aquelas em que o aluno se baseia no discurso teórico, sem a necessidade de utilizar observações experimentais como argumento para a validação de uma conjectura.

A passagem de provas pragmáticas a provas intelectuais, particularmente a demonstração, se baseia em três polos que interagem fortemente: o polo dos conhecimentos, o polo linguístico ou da formulação e o polo da validação ou dos tipos de racionalidade que sustentam as provas produzidas (BALACHEFF, 2000).

De acordo com seus primeiros trabalhos, Balacheff (2000) conseguiu diferenciar quatro tipos de provas pragmáticas e intelectuais que possuem um papel central na criação cognitiva da demonstração: o empirismo ingênuo, a experiência crucial, o exemplo genérico e a experiência mental. O autor destaca que há uma escala hipotética entre esses níveis de provas, evidenciada pela ordem em que será apresentada. A disposição de cada tipo de prova dentro dessa escala se baseia no nível de exigências de generalidade e por seu nível de formalização dos conhecimentos que exige.

Para Balacheff (2000), o *empirismo ingênuo* consta em garantir a validade de um enunciado após verificação em alguns casos. Esse modo de validação é uma das primeiras formas do processo de generalização, no entanto é insuficiente e primário. O autor acredita que o empirismo ingênuo constitui uma forma resistente de generalização.

A *experiência crucial* consta em averiguar uma proposição de um caso para o qual não é assumido que "se funciona agora, então funcionará sempre". Ou seja, o aluno validará uma proposição depois da verificação para um caso especial, geralmente não familiar, assim como realizará experiências e começará a tomar consciência de que busca por um resultado mais amplo. A experiência crucial difere do empirismo ingênuo no sentido de que o indivíduo coloca explicitamente o problema da generalização e o resolve, aventurando-se na execução de um caso que reconhece tão pouco quanto possível (BALACHEFF, 2000).

De acordo com Balacheff (2000), o *exemplo genérico* consta na execução das razões de validade de uma afirmação para a validação de operações ou transformações de um objeto como representante de uma determinada classe. Nessa etapa o aluno se utiliza de exemplos a fim de se obter uma generalização, mas se utiliza da teoria relacionada a determinada proposição para procurar justificá-la. Ou seja, o aluno justifica a partir de exemplos, algo que poderia ser feito teoricamente, utilizando incógnitas e variáveis.

Para Balacheff (2000), a *experiência mental* consta na ação, interiorizando-a e separando-a de sua aplicação sobre um representante em particular. Nessa etapa o aluno tem a validação de uma afirmação sustentada pela teoria e é elaborada para uma classe de objetos, ou seja, ele garante a validade de uma proposição de forma genérica e não mais se utiliza de um caso particular. Segundo o autor, quando se recorre à experiência mental, tem-se a transição das provas pragmáticas às provas intelectuais, conforme as provas passam de ações efetivas a ações interiorizadas postas em prática.

Segundo Balacheff (2000), o tipo de prova predominante na Matemática apresenta um modelo especial. Essa prova relaciona-se a uma série de enunciados que se agrupam a partir de um conjunto explícito de regras, ficando conhecidas por “demonstração”. Para o autor a forma absolutamente codificada que é uma característica das demonstrações, as distinguem como um gênero de discurso. Ainda do ponto de vista de Balacheff (2000), podemos deduzir que uma demonstração pode ser uma prova, mas nem toda prova pode ser vista como uma demonstração e portanto, devemos encara-las com significados distintos. A prova é um termo com sentido mais amplo em relação a demonstração que apresenta um sentido mais específico, a prova pode ser realizada, por exemplo, por meio de exemplos, desenhos, gráficos, tabelas, casos específicos e, diferentemente, do que acontece nas demonstrações, que necessita de um formalismo matemático mais aguçado para obter sua construção.

2.3. Método de redução ao absurdo

2.3.1. Aspectos históricos do raciocínio por redução ao absurdo

No texto *Primeiros analíticos* de Aristóteles, escrito na segunda metade do século IV a.E.C., há no Livro I, 23 uma aplicação desse raciocínio na demonstração de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis (ROQUE, 2012, p.131). Não se sabe ao certo se essa demonstração já se encontraria no texto original de Aristóteles ou se foi acrescentado *a posteriori* por algum copista.

Alguns autores (ROQUE, p.133) admitem a possibilidade de que as raízes desse raciocínio se encontram em autores ligados à escola filosófica de Parmênides, tais como Zenão. De fato, nos paradoxos de Zenão estão de alguma maneira implícitos os pressupostos do raciocínio por redução ao absurdo.

Knorr (1978) tem destacado que os métodos utilizados por Arquimedes para a demonstração de resultados acerca do cálculo de áreas indicam uma influência de Eudoxo. Por exemplo, o método utilizado por Arquimedes para o cálculo de área de um disco circular pela inscrição de polígonos regulares e duplicação de suas arestas de modo que a diferença entre a área do disco e a área do polígono inscrito fosse se aproximando de zero é o método já proposto por Eudoxo anteriormente. Essa observação reforça a tese de que o método de exaustão pela dupla redução ao absurdo é uma criação de Eudoxo.

Eves (2004, p.419) ressalta que o método de exaustão, assim denominado a partir do século XVII (ROQUE, 2012, p.204), "pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão", e que esse método (da exaustão) pode ser atribuído a Eudoxo (c.370 a.E.C.). Boyer e Merzbach (2012, p. 81), por sua vez, reforçam a versão de que o método da exaustão pode ser atribuído a Eudoxo ao afirmarem que Arquimedes atribui a Eudoxo a criação do axioma da continuidade que fundamenta o método da exaustão.

Na obra *Elementos* de Euclides, uma obra composta por volta do ano 300 a.E.C., o raciocínio por redução ao absurdo é encontrado pela primeira vez na proposição 6 do livro I, na qual o autor demonstra que se os dois ângulos da base de um triângulo são congruentes, então esse triângulo é isósceles. Na verdade, esse resultado pode ser obtido facilmente sem a necessidade da redução ao absurdo, mas é esse argumento que Euclides utiliza em sua demonstração.

Além dessa proposição, outras proposições são demonstradas por meio desse raciocínio: no livro IX, a demonstração de que o conjunto de números primos não é finito; No livro XII na demonstração do resultado atribuído a Hipócrates de Quios sobre a igualdade da razão entre as áreas de dois discos circulares e a razão dos quadrados de seus diâmetros.

Em Boyer e Marzbach (2012, p.103), os autores indicam como Arquimedes usa a redução ao absurdo para retificar uma circunferência por meio da espiral de Conon de Alexandria. Roque (2012, p. 204), por seu turno, apresenta uma adaptação do raciocínio por redução ao absurdo utilizado por Arquimedes em sua obra *Medida do círculo* para a obtenção da área de uma circunferência.

A demonstração por redução ao absurdo consiste no seguinte: para mostrar que uma proposição P é verdadeira, basta mostrar que a negação de P (denotada por ~P) implica uma contradição, ou seja, a existência de uma sentença Q tal que Q e a negação de Q (denotada por ~Q) tenham o mesmo valor lógico. Lembrando que o valor lógico de uma sentença é sua classificação em falso ou verdadeiro.

Por que este procedimento funciona, ou seja, permite afirmar que, nessas condições, P é verdadeira? Para essa justificativa precisaremos de dois princípios racionais e do conceito de validade de um argumento:

a) Princípios racionais: (1) da não contradição (isto é, que dada uma proposição P, então apenas uma das proposições P e ~P é verdadeira; (2) do terceiro excluído (isto é, dada uma proposição P, então P é falsa ou P é verdadeira, não havendo uma terceira possibilidade).
b) Em um raciocínio válido proposições verdadeiras implicam uma proposição verdadeira. Então se em um raciocínio uma proposição ~P implica uma proposição Q tal que Q e ~Q são verdadeiras, então ~P é falsa. Decorre daí, pelo princípio do terceiro excluído, que P é verdadeira.

2.3.2. A irracionalidade de $\sqrt{2}$

Nesta seção apresentaremos dois métodos de demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional baseadas em argumentos aritméticos.

Método 1:

Queremos mostrar que a sentença “$\sqrt{2}$ é um número irracional” é verdadeira. Considerando o princípio do terceiro excluído, para mostrar que essa sentença é verdadeira, basta mostrar que a sua negação é falsa. Faremos isso, mostrando que a negação da sentença “$\sqrt{2}$ é um número irracional” não pode ser verdadeira, ou seja, que se a negação for verdadeira, ela implica necessariamente a existência de uma sentença contraditória, violando o princípio da não contradição.

Suponha então que a negação da sentença “$\sqrt{2}$ é um número irracional” é verdadeira, ou seja, que $\sqrt{2}$ é um número racional $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, sendo a e b primos entre si. (Lembre-se: dizer que *a* e *b* são primos entre si, significa dizer que na decomposição de a e b em fatores primos não pode aparecer um mesmo número primo em ambas as decomposições.)

Dessa maneira podemos escrever

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade e fazendo alguns ajustes, obtemos

$$a^2 = 2b^2. \quad \text{(I)}$$

Segue-se desta última igualdade que a^2 é um número par. É fácil ver que se o quadrado de um número inteiro é par, esse número também é par. Vejamos: Suponhamos por absurdo que a é um número ímpar, ou seja, $a = 2p + 1$. Assim,

$$a^2 = (2p + 1)^2 \Rightarrow a^2 = 4p^2 + 4p + 1 \Rightarrow a^2 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

Seja $2p^2 + 2p = m$. Temos que $a^2 = 2m + 1$ (número ímpar), absurdo. Pois, a^2 é par de (I). Logo, o número a é par.

Se a é um número par podemos escrever $a = 2n$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, porque $a \neq 0$.

Da igualdade $a^2 = 2b^2$ segue-se que $4n^2 = 2b^2$, donde concluímos que $b^2 = 2n^2$. Desta última igualdade, segue-se que b é também um número par. Donde podemos concluir que $b = 2m$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$, porque $b \neq 0$.

De $a = 2n$ e $b = 2m$, concluímos que nas decomposições de *a* e de *b* aparecem um mesmo número primo: o número 2. Logo, a e b não são primos entre si.

Resumindo, vimos o seguinte: a negação da sentença "$\sqrt{2}$ é um número irracional" implica as duas sentenças contraditórias seguintes: " a e b são primos entre si" e "a e b não são primos entre si". Portanto, a negação da sentença "$\sqrt{2}$ é um número irracional" não pode ser verdadeira. Portanto, pelo princípio do terceiro excluído a negação de "$\sqrt{2}$ é um número irracional" tem que ser falsa. Mas novamente pelo princípio do terceiro excluído, se a negação de uma sentença é falsa, então a sentença tem que ser verdadeira. Portanto, a sentença "$\sqrt{2}$ é um número irracional" tem que ser verdadeira.

Método 2:

É também um método de raciocínio pela redução ao absurdo.

Para mostrar que "$\sqrt{2}$ é um número irracional", mostra-se de modo análogo ao visto no método 1 que se a negação dessa sentença for verdadeira, então chega-se necessariamente a uma sentença contraditória (isto é, falsa e verdadeira ao mesmo tempo). Logo, a negação da sentença tem que ser falsa. Se a negação da sentença é falsa então, pelo princípio do terceiro excluído, a sentença é verdadeira.

Suponha então que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{N}\ e\ q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, sendo p e q primos entre si. Decorre, analogamente ao que vimos no método 1, p e q serão pares, o que nos permite escrever: com $p = 2r\ e\ q = 2s, \text{com}\ r \in \mathbb{Z}\ e\ s \in \mathbb{Z}, s \neq 0,\ r < p\ e\ s < q$.

Daí segue-se que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2r}{2s} = \frac{r}{s}.$$

Repetindo esse procedimento, obteríamos uma sequência infinita decrescente de números naturais *t* e *v*, com $v \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{t}{v}$, o que é absurdo, porque todas as sequências decrescentes de números naturais são finitas.

2.4. Números irracionais e ensino médio

2.4.1. A necessidade do conceito de números irracionais no ensino médio

A axiomatização da matemática é uma invenção grega (ROQUE, 2012). A obra *Elementos* de Euclides, escrita por volta do ano 300 a.E.C. é um livro já escrito de acordo com o método axiomático. Em seus primórdios, esse método se baseia principalmente na lógica clássica como apresentada por Aristóteles em sua obra posteriormente denominada "Organon".

Atualmente, o método axiomático é a principal referência metodológica tomada para a validação do saber matemático pelos matemáticos em todo mundo. A matemática, por sua vez, tem se tornado um saber cada vez mais necessário em diferentes áreas profissionais na sociedade contemporânea. Dessa maneira, torna-se cada vez mais necessário promover uma educação escolar que propicie a leitura, o entendimento e a produção dos textos matemáticos.

A matemática se desenvolve por meio da proposta e da resolução de problemas. Como se sabe, o domínio amplo e profundo ou conhecimentos prévios de conteúdos da lógica matemática não é um pré-requisito para a resolução de problemas. Mas a escrita e a comunicação do saber matemático requer o conhecimento de noções de lógica e do método axiomático. Desse modo, torna-se relevante a questão seguinte: quando e como introduzir conteúdos de noções de lógica matemática e do método axiomático na educação básica?

Desde os primórdios, as atividades humanas que requerem contagem e medição são necessárias. Não é exagero afirmar que contar e medir são operações onipresentes em toda cultura humana. Quanto mais complexas se tornam as sociedades humanas, mais complexas e sofisticadas se tornam as técnicas e estratégias de contagem e medição nelas utilizadas.

Dessa maneira, do ponto de vista matemático, torna-se necessário criar condições para que as pessoas entendam de uma maneira cada vez melhor as técnicas e estratégias de contagem e medição praticadas. Então um dos primeiros desafios enfrentados pelo professor de matemática do ensino médio é ampliar os conhecimentos acerca dos números reais dos estudantes obtidos durante o ensino fundamental.

O primeiro ano do ensino médio é um momento de início de uma nova etapa da vida escolar do estudante. O educando ingressa por volta dos 15 anos nesse nível de escolaridade. Espera-se que ele já esteja, com essa idade, em um nível de abstração que já permita dar início a um tipo de formalização do raciocínio matemático próprio daquele praticado no método axiomático.

No estudo quantitativo de alguns fenômenos naturais e sociais, como se sabe, aparecem números tais como $\sqrt{2}$, π e e (base dos logaritmos neperianos). Qual a natureza desses números? São números racionais? Acreditamos que para entender as operações de medição ou de quantificação é necessário que os estudantes ampliem e aprofundem no ensino médio seus conhecimentos acerca dos resultados de medições, ou seja, dos números reais obtidos no ensino fundamental.

É necessário que já no início do ensino médio os estudantes comecem a entender a existência de segmentos de reta cujas medidas não podem ser expressas por meio de números racionais, a perceber que os números racionais não preenchem totalmente a reta numérica, que para completá-la é necessário a introdução de novos números, os chamados *números irracionais*.

Pretendemos analisar nesta dissertação a seguinte questão: a introdução do conceito de número irracional no primeiro ano do ensino médio é possível por meio do método de raciocínio da redução ao absurdo? A depender dos resultados obtidos nessa etapa, analisar a possibilidade de introdução do método de redução ao absurdo em um itinerário formativo. Julgamos importante essa questão porque, a nosso ver, a aquisição do conceito de números irracionais é matematicamente instrutiva, necessário para o avanço cognitivo dos educandos e para o entendimento das questões relativas à mensuração de uma grandeza.

2.4.2. Números irracionais e BNCC

Os números irracionais encontram-se mencionados na BNCC nos objetos de aprendizagem e nas habilidades descritas para o oitavo e o nono anos das séries finais do ensino fundamental, mas não há nenhuma referência direta a eles nas competências específicas ou habilidades citadas na área da matemática destinada ao ensino médio.

Também não há nenhuma menção da necessidade de introdução de noções elementares de lógica matemática no ensino médio. Entretanto, no que tange à construção de competências específicas da área da Matemática vamos encontrar na BNCC a citação seguinte referente à competência específica n°5, que destaca a necessidade de que se promova no ensino médio situações de aprendizagem nas quais os estudantes percebam e interiorizem um entendimento do raciocínio hipotético-dedutivo como caráter distintivo da matemática em relação às demais ciências. Textualmente:

> Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas proposições. Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à

> sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação. Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências (Brasil, p.540).

Portanto, em um ensino que pretenda o desenvolvimento da competência específica 5 de matemática preconizada na BNCC julgamos fundamental e necessária a introdução logo no primeiro ano do ensino médio de noções de lógica matemática que forneçam elementos fundamentais para que os estudantes “experimentem e interiorizem” o método hipotético-dedutivo de raciocínio e de escrita na disciplina de Matemática.

De fato, o conhecimento amplo ou profundo de lógica matemática não é, como já mencionamos, pré-requisito para a aprendizagem da matemática. Contudo, a leitura e a escrita de textos matemáticos requerem o entendimento, pelo menos rudimentar, do método axiomático. Sem noções elementares de lógica é impossível entender ou fundamentar o que seja um raciocínio válido ou inválido.

Defendemos, aqui, que sejam fornecidos já no início do ensino médio elementos da lógica matemática que propiciem aos estudantes o entendimento, ainda que rudimentar, do método hipotético-dedutivo. Convém, entretanto, que o professor também esteja informado da teoria de Balacheff (BALACHEFF, 1988; FREITAS, 2008) sobre os diferentes níveis de produção de justificativas matemáticas, porque desse modo poderá avaliar os diferentes modos de raciocínio utilizados pelos estudantes em suas justificativas.

Não defendemos o domínio ou o entendimento mais aprofundado do método axiomático ou da lógica matemática, mas uma abordagem que permita ao estudante entender que para demonstrar uma afirmação é necessário que se parta de definições e de afirmações já admitidas como verdadeiras ou já validadas previamente e que permita também entender os conceitos de raciocínios válidos e inválidos.

3. METODOLOGIA

Para atingir os objetivos enunciados, utilizaremos como referência a metodologia do ensino da matemática através da resolução de problemas de Onuchic e Allevato em uma abordagem qualitativa. Após uma avaliação diagnóstica, será criada e aplicada uma sequência didática em uma turma de primeira série do ensino médio por meio da metodologia mencionada. Serão coletados os dados durante as sessões previstas na sequência didática e pela aplicação de questionários e realização de entrevistas semiestruturadas, caso sejam necessárias. Para a análise dos dados coletados tomaremos como referencial a teoria de Balacheff (1987) sobre provas e situações de validação.

Como já frisamos na introdução deste trabalho, nosso objetivo é a análise da aplicabilidade do método de raciocínio por redução ao absurdo na primeira série do ensino médio. Como se sabe, costuma-se classificar os métodos dedutivos em diretos e indiretos. Os *métodos diretos* são aqueles nos quais a demonstração de uma proposição do tipo *"Se P, então Q"* se faz do seguinte modo: partindo-se da hipótese de que P é verdadeira e, além disso, fazendo-se uso da veracidade de algumas outras proposições, e de possivelmente algumas definições adicionais, conclui-se, por meio de um argumento válido, que a proposição Q é verdadeira. Já os *métodos indiretos* são aqueles cujas demonstrações são feitas por contraposição ou por redução ao absurdo.

Desse modo, faremos a nossa pesquisa em três etapas:

(1) em um primeiro momento, serão desenvolvidas atividades de aprendizagem de métodos dedutivos diretos com estudantes da primeira série do ensino médio. Serão propostos problemas elementares de aritmética e de geometria plana abrangendo o método direto de dedução. Os estudantes que apresentarem melhores resultados de aprendizagem serão selecionados para a segunda etapa.

(2) Em um segundo momento, exploraremos algumas situações-problema do tipo:

(a) proposições verdadeiras mais raciocínios válidos implicam proposições verdadeiras;

(b) proposições falsas mais raciocínios válidos podem implicarem em proposições falsas;

(c) hipóteses verdadeiras mais raciocínios inválidos podem implicarem em proposições falsas. Os estudantes que apresentarem melhores resultados de aprendizagem serão selecionados para a terceira etapa.

(3) Em um terceiro momento, desenvolveremos atividades abrangendo o método de redução ao absurdo em problemas elementares de aritmética e de geometria plana com os estudantes selecionados na primeira etapa. Durante a realização desse terceiro momento analisaremos o entendimento dos participantes desse método indireto de dedução.

As atividades desenvolvidas nas três etapas mencionadas serão aplicadas pela metodologia de Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas de Lourdes Onuchic.

A Sequência de atividades

1) Primeira etapa: dividir a turma em grupos de cinco estudantes e propor os seguintes problemas, a serem resolvidos, socializados, validados e institucionalizados pelo método de resolução de problemas de Onuchic:

a) Responda e justifique: o número 6 é par? E o número 7 é par?
b) Mostre que a soma de dois números pares é um número par.
c) Responda e justifique: a soma de dois números ímpares é um número ímpar?
d) Mostre que a soma de dois números racionais é um número racional.
e) Responda e justifique: o produto de dois números racionais é um número racional?
f) Mostre que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

(O objetivo desta primeira etapa é introduzir o método direto de demonstração, a fim de que os estudantes comecem a se habituar com os procedimentos e a escrita desse método).

2) Segunda etapa:

a) Responda e justifique: se todo ser humano é mortal e Sócrates é um ser humano, podemos concluir que Sócrates é mortal?

b) Responda e justifique: se todo gato é mamífero e o cachorro de minha prima é mamífero, podemos concluir que o cachorro de minha prima é um gato?

(O objetivo dessa questão é mostrar que um raciocínio incorreto pode levar a uma conclusão falsa, mesmo quando as premissas são verdadeiras. Explicar porque o raciocínio é inválido utilizando as representações gráficas de conjuntos).

c) Responda e justifique: se todo pavão é uma ave e toda ave é amarela, podemos concluir que todo pavão é amarelo?

(O objetivo desta questão é mostrar que um raciocínio válido pode levar a uma conclusão falsa quando uma premissa é falsa. Mostre que o raciocínio é válido utilizando representações gráficas de conjuntos).

(Finalizar essa etapa ressaltando que podemos garantir que um raciocínio leva a uma conclusão verdadeira somente quando as premissas forem verdadeiras e o raciocínio for válido)

3) Terceira etapa: dividir a turma em grupos de cinco estudantes e propor os seguintes problemas, a serem resolvidos, socializados, validados e institucionalizados pelo método de resolução de problemas de Onuchic:

a) Responda e justifique: o elemento neutro da adição é único? Ou seja, só existe um zero?

b) Responda e justifique: um número pode ser par e ímpar ao mesmo tempo?

c) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, mostre que uma reta não pode cortar duas retas concorrentes perpendicularmente.

Na institucionalização, o professor pode introduzir os enunciados dos três princípios racionais (da identidade, da não-contradição, do terceiro excluído) para formalizar o método utilizado na resolução desses três problemas.

4. ANÁLISE E RESULTADOS

A sequência de atividades descrita no capítulo 2 foi aplicada em uma turma de 1° série do ensino médio de uma escola estadual que denominaremos de escola “D”, levou 4 aulas de 60 minutos cada, a turma era composta por 45 alunos e foi dividida em 9 grupos de 5 alunos cada, identificaremos cada grupo por G1, G2, ..., G9 com o intuito de preservar a imagem de cada um dos estudantes.

A sequência de atividades foi aplicada seguindo o seguinte rito: o professor apresentava as atividades com o auxílio de um Datashow e era estipulado um tempo para os discentes responderem as mesmas, em seguida os grupos apresentavam suas soluções, depois de apresentadas as soluções era feita uma plenária para saber se os demais grupos concordavam com a resposta do grupo em questão e por fim, o professor com a colaboração dos estudantes apresentava a solução que se esperava para a atividade.

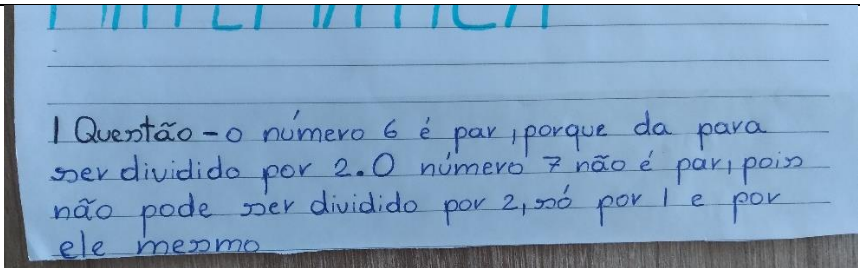
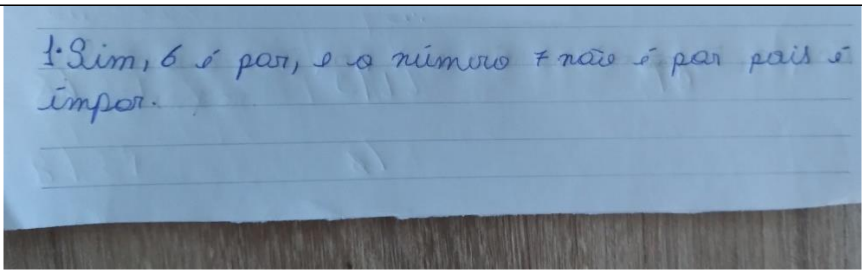
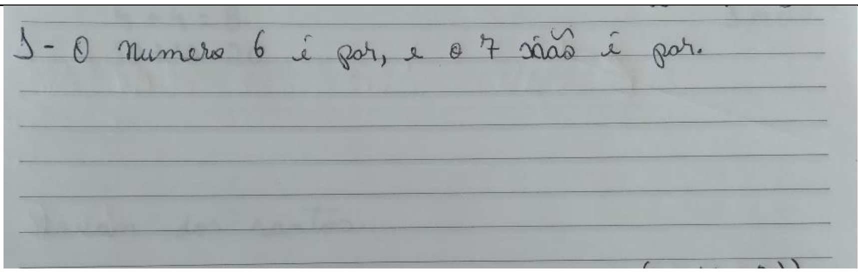
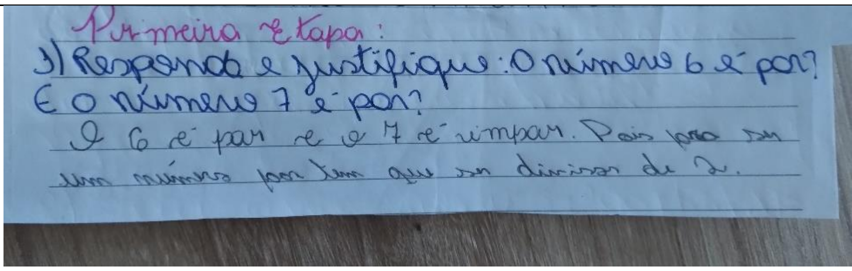
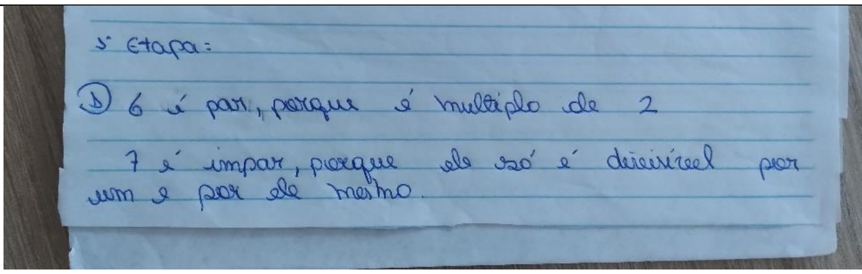
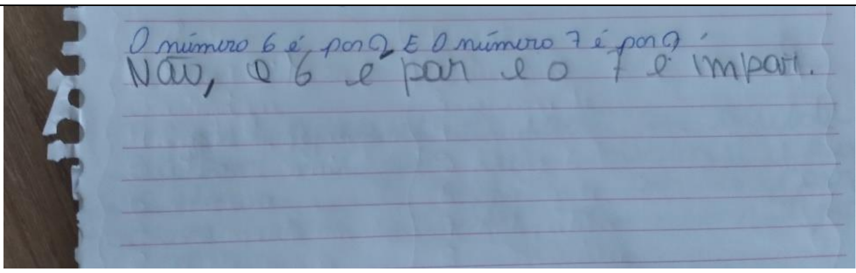
A análise dos resultados se dará a partir observação, soluções apresentadas, das discussões durante a resolução e gravação de áudio da aplicação das etapas.

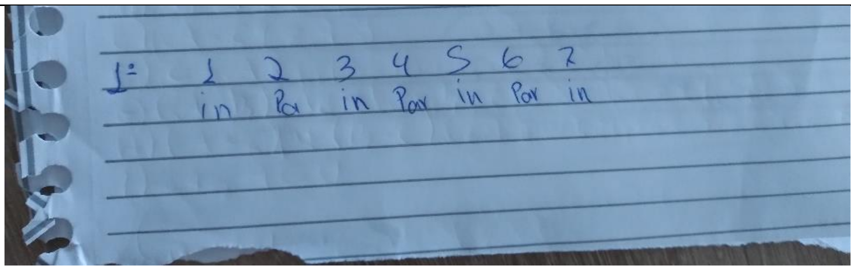
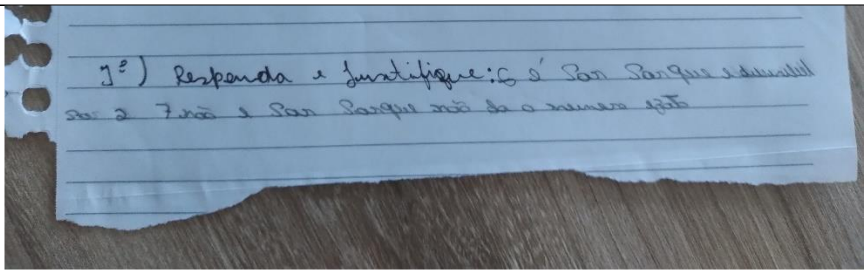
Vejamos então as respostas de cada grupo referente a primeira etapa, que tinha como objetivo introduzir o método direto de demonstração.

<u>ETAPA 1:</u>

Quadro 1 - Respostas da atividade 1 etapa 1.

Atividade 1: Responda e justifique: o número 6 é par? E o número 7 é par?	
Grupo:	Respostas:

G1	
G2	
G3	
G4	
G5	
G6	
G7	Não respondeu.

G8	
G9	

Fonte: O autor

Na atividade 1, os alunos apresentaram um pouco de dificuldade na parte de justificar suas respostas, todos os 9 grupos tinham conhecimento acerca da paridade de um número, mas enfrentaram dificuldade na hora de validar suas respostas, na escrita das soluções. Destacamos as respostas dos grupos G1, G4, G5 e G9 que conseguiram com maior rigor matemático concluir a primeira atividade, se utilizaram de exemplos e também da teoria para justificar suas respostas, como da definição de números pares e ímpares, evidenciando o tipo de prova definido por Balacheff como *exemplo crucial*. Já o grupo G7 não conseguiu responder a mesma.

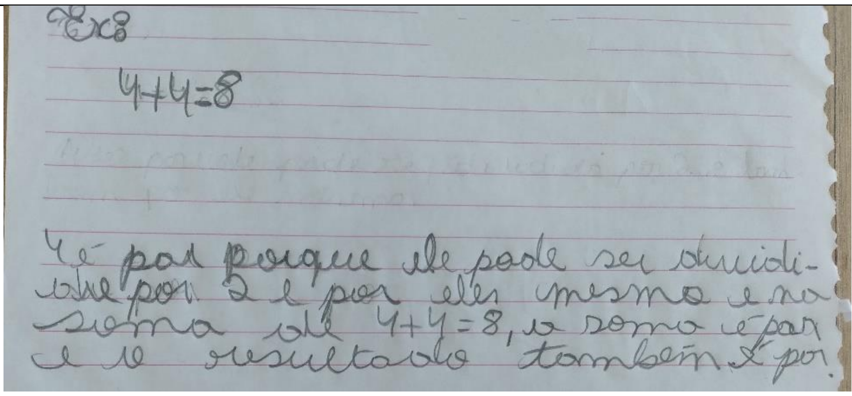
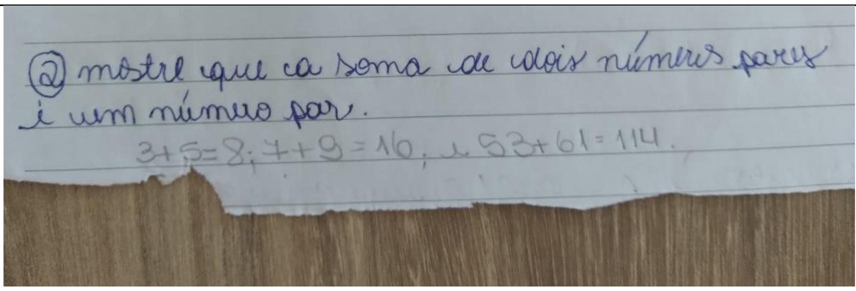
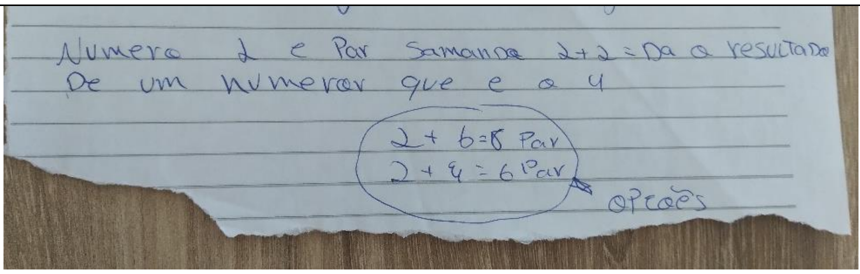
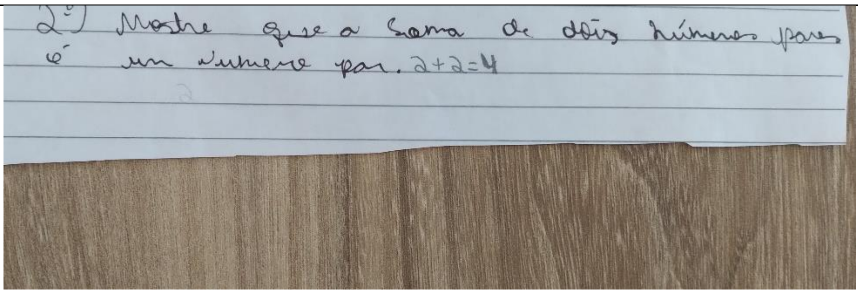
Quadro 2 – Resposta esperada para atividade 1 etapa 1.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 1:
Por definição, um número par é aquele que pode ser escrito na forma **2n**, onde **n** é um número inteiro. Logo, 6 é um número par, pois $2 \cdot 3 = 6$. Já o número 7 não é par, pois não existe um inteiro que multiplicado por 2 seja igual a 7.

Fonte: O autor

Quadro 3 – Respostas da atividade 2 etapa 1.

Atividade 2: Mostre que a soma de dois números pares é um número par.	
Grupo:	Respostas:
G1	2 Questão – 8 + 8 = 16 A soma de dois números pares é necessariamente um número par pois os números pares são ~~multiplidos~~ de dois. multiplos
G2	2· R = 22 + 24 = 46
G3	2) $2+2=4.$ $4+4=8.$ $10+10=20.$
G4	2. Mostre que a soma de dois números pares é um número par. $2.2=4$ $2.4=8$
G5	2 4+4 = 8 → pois 8 é par e múltiplo de 2

G6	 Ex8 4+4=8 4 é par porque ele pode ser dividi- do por 2 e por eles mesmo e na soma de 4+4=8, a soma é par e o resultado também é par.
G7	 ② mostre que a soma de dois números pares é um número par. 3+5=8; 7+9=16, e 53+61=114.
G8	 Numero 2 e Par Samando 2+2 = Da o resultado De um numerar que e a 4 2+6=8 Par 2+4=6 Par opções
G9	 2º) Mostre que a soma de dois números pares é um numero par. 2+2=4

Fonte: O autor

Notamos pelas respostas dessa atividade que praticamente todos os grupos utilizaram de casos específicos, de exemplos numéricos simples, evidenciando um caso de prova *pragmática,* do tipo *empirismo ingênuo* como definida por Balacheff, para mostrar o que se pedia na questão. Observamos que durante a resolução da atividade 2 que muitos dos alunos, quase que em sua totalidade, não sabiam ou não lembravam de terem visto algo que precisasse mostrar um determinado resultado.

Foi comum ouvi comentários do tipo: “o que é mostrar professor?”, “como se mostra isso?”, “mostrar é dar um exemplo?”.

Quadro 4 – Resposta esperada para atividade 2 etapa 1.

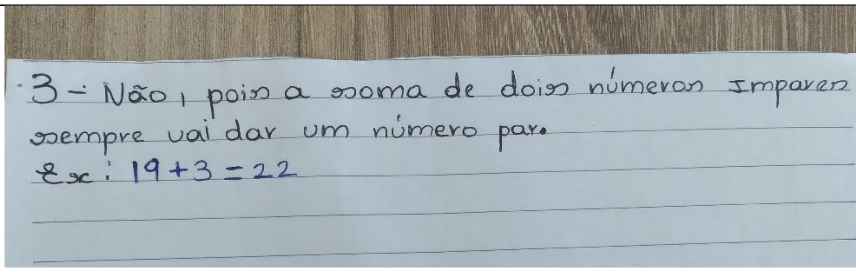
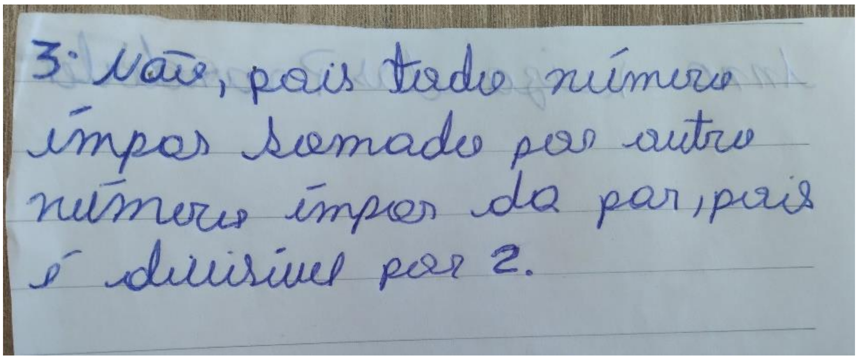
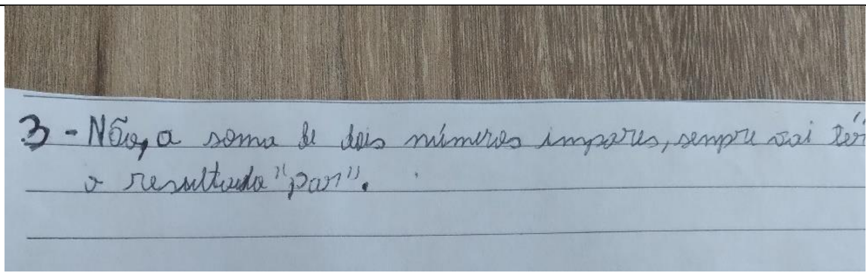
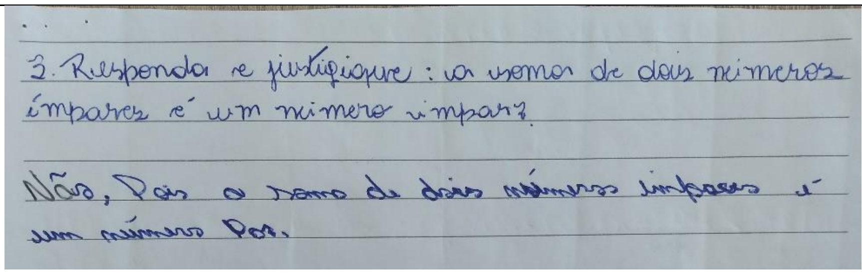
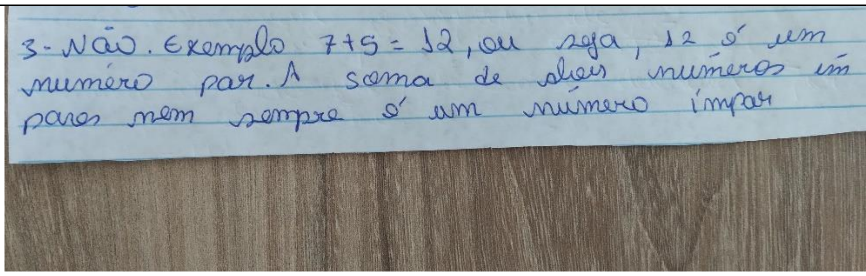
Solução apresentada pelo professor para a atividade 2:
HIPÓTESE: a e **b** são números pares. **CONCLUSÃO**: **a** + **b** é um número par. **DEMONSTRAÇÃO:** Por definição se **a** e **b** são números pares, então **a** = 2m e **b** = 2n, onde m e n são números inteiros. Somando a + b, temos: **a** + **b** = 2m + 2n **a** + **b** = 2(m + n) Como a soma de dois números inteiros resulta outro número inteiro, então: **a** + **b** = 2k, onde k é um número inteiro. Portanto, a soma de dois números pares é um número par. ■

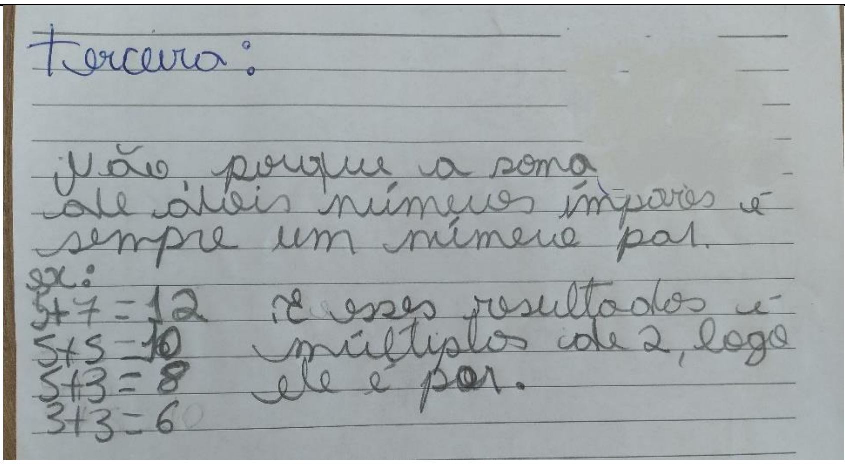
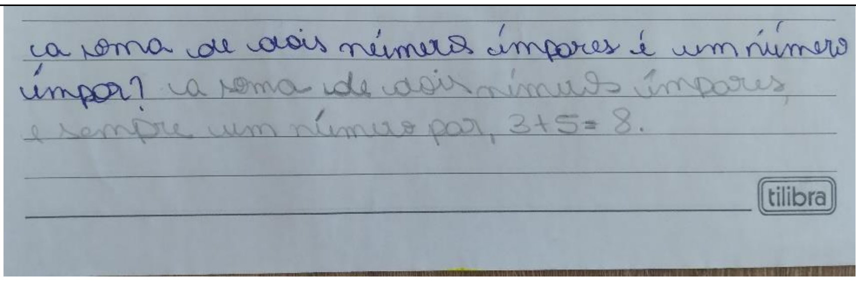
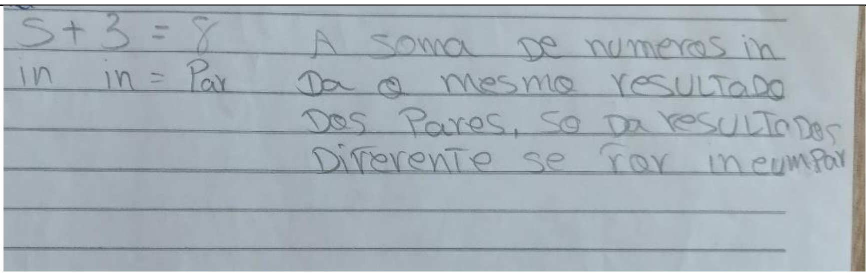
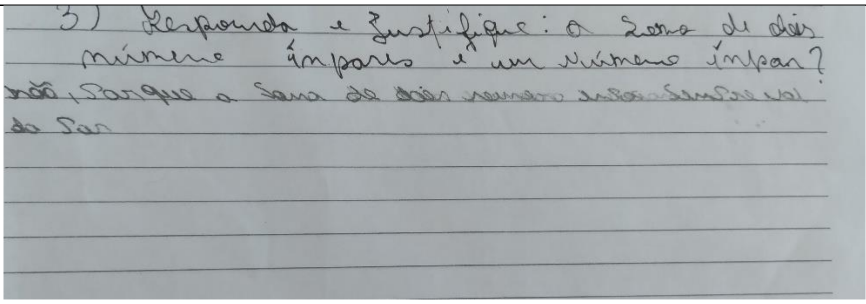
Fonte: O autor

Após a apresentação da solução que se almejava para a atividade 2, percebemos que os alunos ficaram surpresos, até um pouco “assustados” com a demonstração. Como o objetivo principal dessa etapa 1 era introduzir o método direto de demonstração, acreditamos que a partir dessa atividade 2 já era perceptível que os alunos começaram a ter uma nova visão para a matemática e que alguns conseguiram entender um pouco sobre esse método de validar determinados resultados.

Quadro 5 – Respostas da atividade 3 etapa 1.

Atividade 3: Responda e justifique: a soma de dois números ímpares é um número ímpar?	
Grupo:	Respostas:

G1	 3 - Não, pois a soma de dois números Impares sempre vai dar um número par. Ex: 19+3=22
G2	 3: Não, pois todo número impar somado por outro número impar da par, pois é divisivel por 2.
G3	 3 - Não, a soma de dois números impares, sempre vai ter o resultado "par".
G4	 3. Responda e justifique: a soma de dois números ímpares é um número impar? Não, Pois a soma de dois números impares é um número Par.
G5	 3- Não. Exemplo 7+5 = 12, ou seja, 12 é um número par. A soma de dois números impares nem sempre é um número impar

G6	
G7	
G8	
G9	

Fonte: O autor

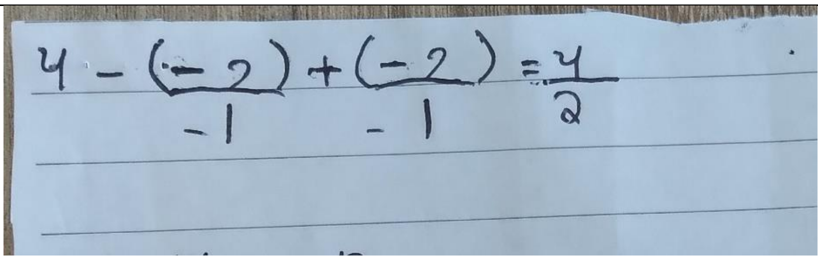
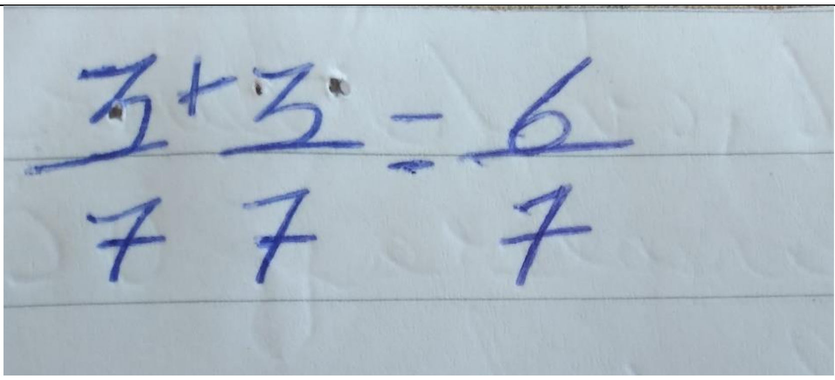
Na atividade 3, assim como na atividade 1, verificamos que os alunos apresentavam uma boa base em relação a paridade de um número. Nessa atividade ficou evidenciado que todos os alunos tinham conhecimento que a soma em questão corresponderia a um número par. Outro ponto que ressaltamos é a utilização de contraexemplos para justificar o enunciado.

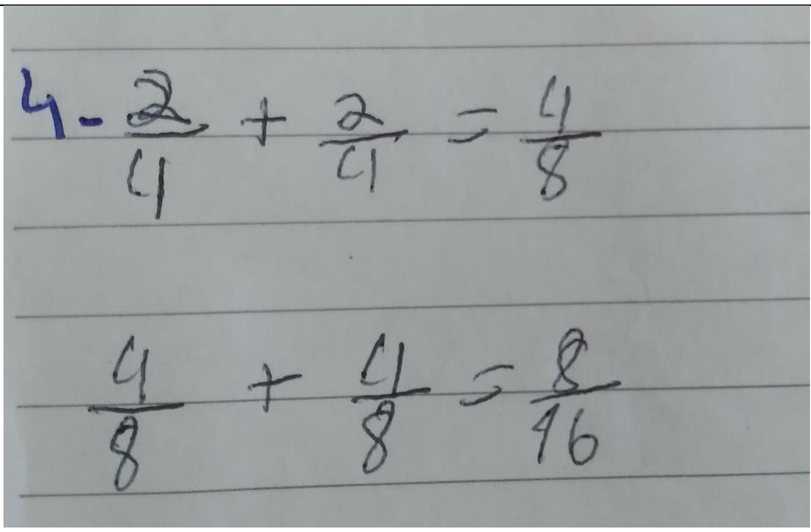
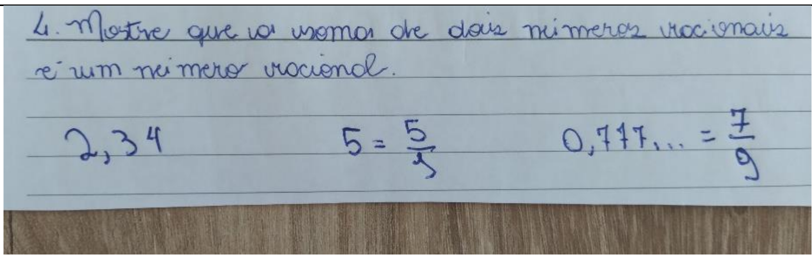
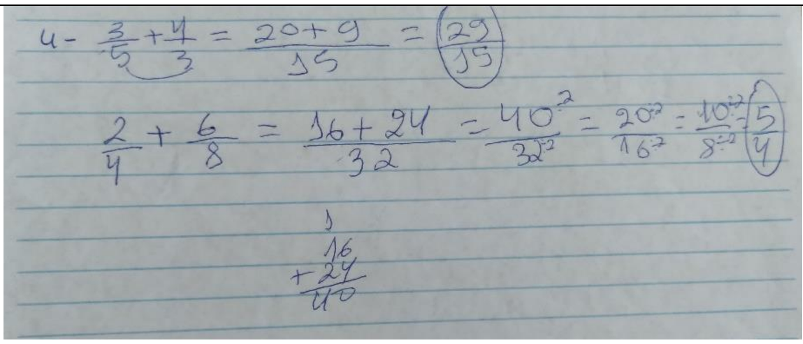
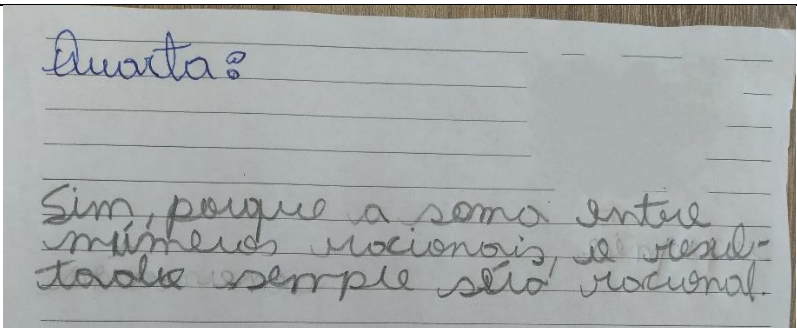
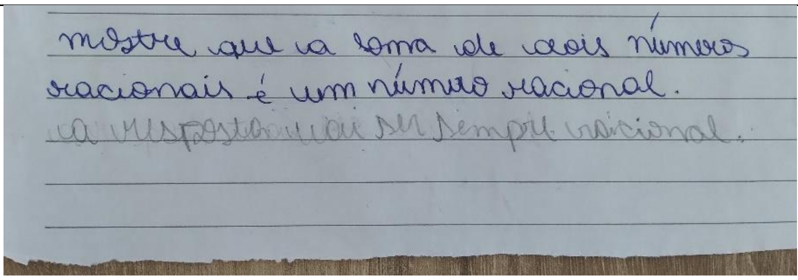
Quadro 6 – Resposta esperada para atividade 3 etapa 1.

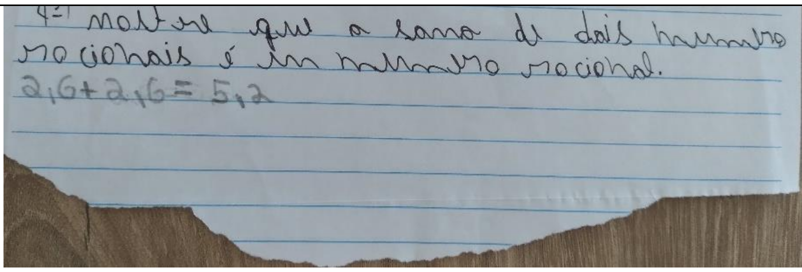
Solução apresentada pelo professor para a atividade 3:
HIPÓTESE: a e **b** são números ímpares. **CONCLUSÃO**: **a** + **b** é um número ímpar. **DEMONSTRAÇÃO:** Por definição se **a** e **b** são números ímpares, então **a** = 2m + 1 e **b** = 2n +1, onde m e n são números inteiros. Somando a + b, temos: **a** + **b** = 2m + 1 + 2n + 1 **a** + **b** = 2(m + n + 1) Como a soma de três números inteiros resulta outro número inteiro, então: **a** + **b** = 2k , onde k é um número inteiro. Portanto, a soma de dois números ímpares é um número par. ■

Fonte: O autor

Quadro 7 – Respostas da atividade 4 etapa 1.

Atividade 4: Mostre que a soma de dois números racionais é um número racional.	
Grupo:	Respostas:
G1	
G2	

G3	 $4-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$ $\frac{4}{8}+\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$
G4	 4. Mostre que a soma de dois números racionais é um número racional. 2,34 $5=\frac{5}{1}$ $0,777...=\frac{7}{9}$
G5	 $4-\frac{3}{5}+\frac{4}{3}=\frac{20+9}{15}=\frac{29}{15}$ $\frac{2}{4}+\frac{6}{8}=\frac{16+24}{32}=\frac{40^{:2}}{32^{:2}}=\frac{20^{:2}}{16^{:2}}=\frac{10^{:2}}{8^{:2}}=\frac{5}{4}$ $16+24=40$
G6	 Quarta: Sim, porque a soma entre números racionais, o resultado sempre será racional.
G7	 mostre que a soma de dois números racionais é um número racional. a resposta vai ser sempre racional.

G8	Não respondeu.
G9	

Fonte: O autor

Um dos pontos críticos que ficou bem evidenciado com as atividades 4 e 5 foi a dificuldade que os discentes apresentam quando se trabalha com números racionais, principalmente, na forma fracionária. Isso fica evidenciado na solução dos grupos G1 e G3. Em contrapartida, o grupo G5 apresenta uma base sobre o tema, mostraram que tem conhecimento sobre as operações com números racionais e sobre frações irredutíveis. As soluções nesta atividade mostram o quanto os alunos se utilizam de provas *pragmáticas*, em especial do tipo *empirismo ingênuo*.

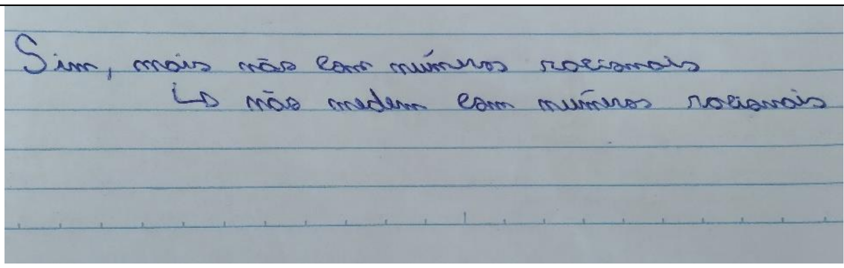
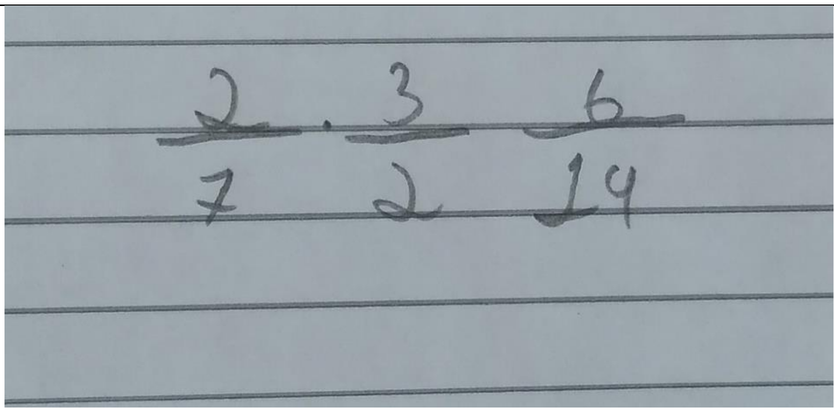
Quadro 8 – Resposta esperada para a atividade 4 etapa 1.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 4:
HIPÓTESE: **a** e **b** são racionais. **CONCLUSÃO**: **a** + **b** é racional. **<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>** Por definição, número racional é todo aquele que pode ser escrito na forma de fração, ou seja, $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ onde **p** e **q** são números inteiros, com **q** diferente de zero. Logo, somando os racionais **a** e **b** temos: **a** + **b** = $\frac{p}{q} + \frac{m}{n}$ **a** + **b** = $\frac{pn+qm}{qn}$ Portanto, a soma de dois números racionais é um número racional. ■

Fonte: O autor

Durante a apresentação da solução da atividade 4 foi notório que os alunos têm muita dificuldade com o tema.

Quadro 9 - Respostas da atividade 5 etapa 1.

Atividade 5: Responda e justifique: o produto de dois números racionais é um número racional?	
Grupo:	Respostas:
G1	Não respondeu.
G2	Não respondeu.
G3	Não respondeu.
G4	
G5	Não respondeu.
G6	Não respondeu.
G7	Não respondeu.
G8	
G9	Não respondeu.

Fonte: O autor

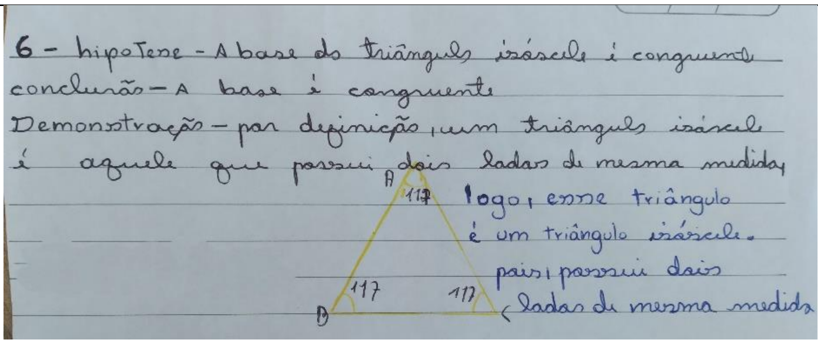
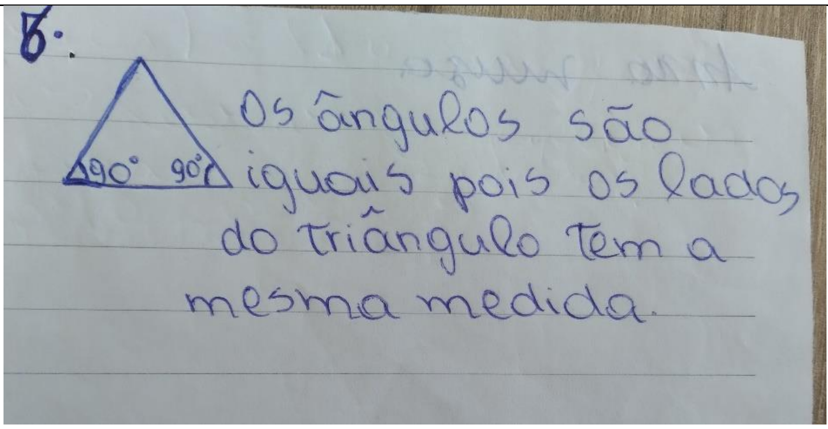
Como mencionado anteriormente, a atividade 5 retratou bem a dificuldade dos alunos em relação aos números racionais, somente os grupos G4 e G8 apresentaram soluções para a atividade, sendo que a resposta do grupo G4 foge do solicitado, enquanto o grupo G5 se utilizou do *empirismo ingênuo* na sua resposta, apresentando um único exemplo simples para responder a atividade.

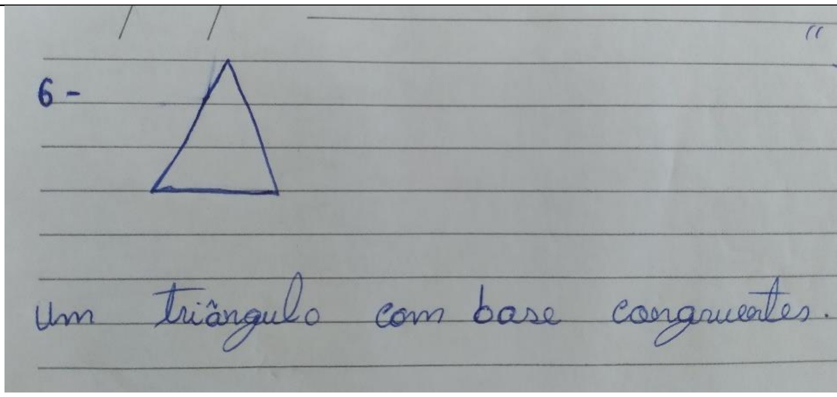
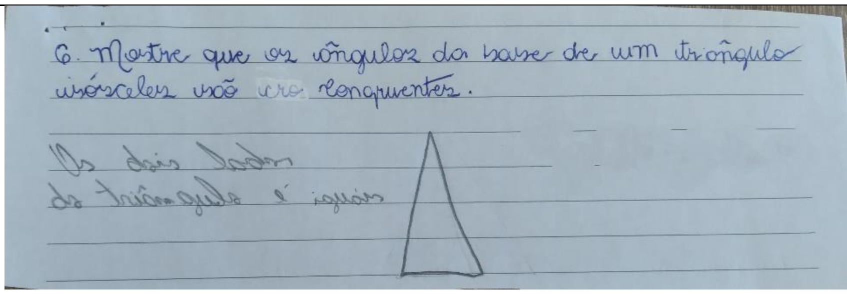
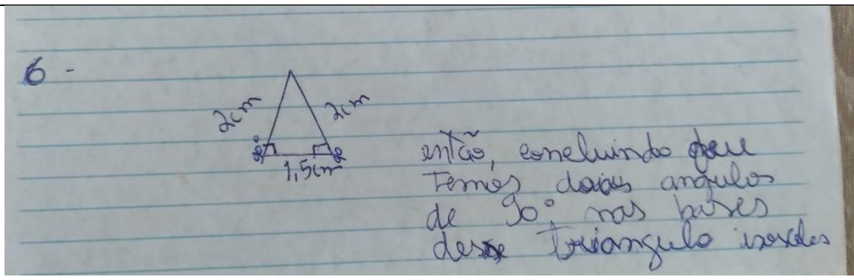
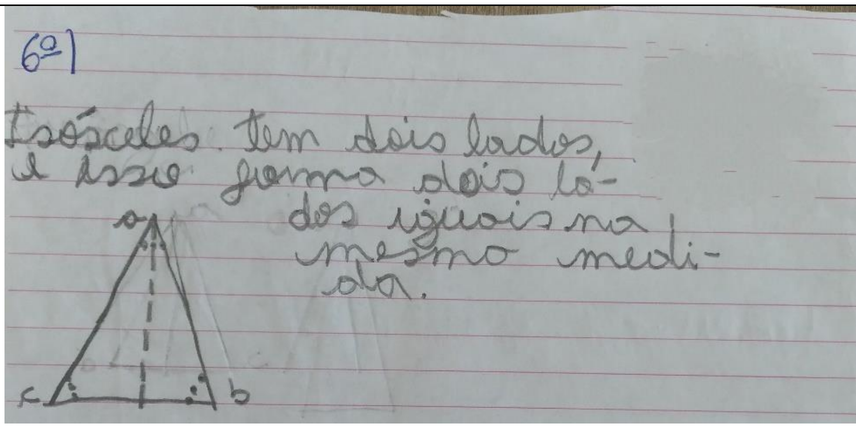
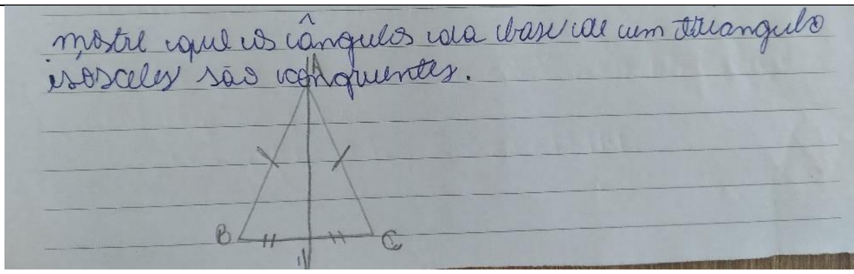
Quadro 10 – Resposta esperada para atividade 5 etapa 1.

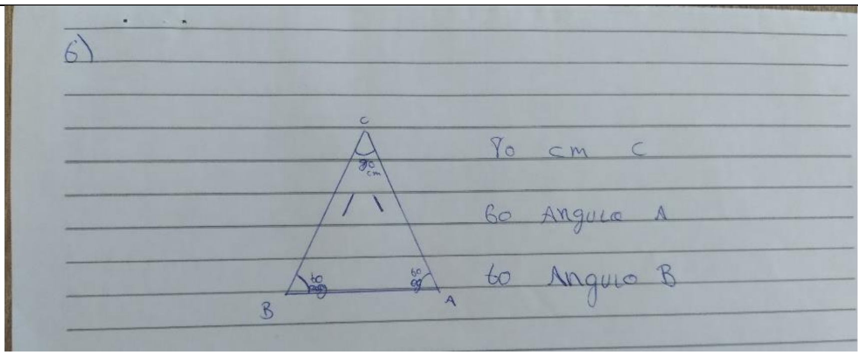
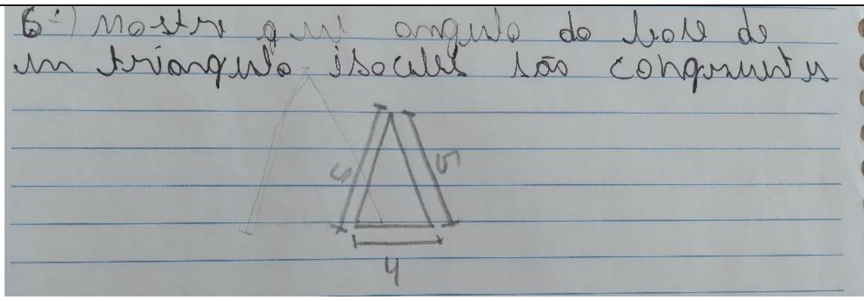
Solução apresentada pelo professor para a atividade 5:
Sim. Sejam **a** e **b** números racionais, então: $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$$ $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{pm}{qn}$$ Portanto, o produto de dois números racionais é um número racional. ■

Fonte: O autor

Quadro 11 – Respostas da atividade 6 etapa 1.

Atividade 6: Mostre que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.	
Grupo:	Respostas:
G1	 6 – hipoTese – A base do triângulo isósceles é congruente conclusão – A base é congruente Demonstração – por definição, um triângulo isósceles é aquele que possui dois lados de mesma medida; logo, esse triângulo é um triângulo isósceles. pois, possui dois lados de mesma medida A 117 B 117 117 C
G2	 6. 90° 90° Os ângulos são iguais pois os lados do triângulo Têm a mesma medida.

G3	6 - Um triângulo com base congruentes.
G4	6. Mostre que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Os dois lados do triângulo é iguais
G5	6 - 2cm 2cm 1,5cm então, concluindo que Temos dois angulos de 70° nas bases desse triangulo isosceles
G6	6º) Isósceles tem dois lados, e isso forma dois lados iguais na mesma medida. a c b
G7	mostre que os ângulos da base de um triangulo isosceles são congruentes. B C

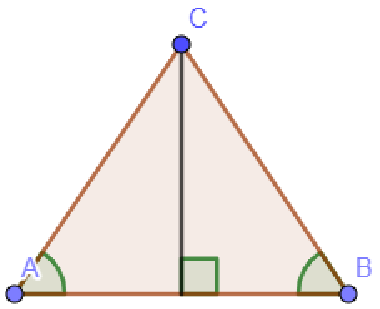
G8	
G9	

Fonte: O autor

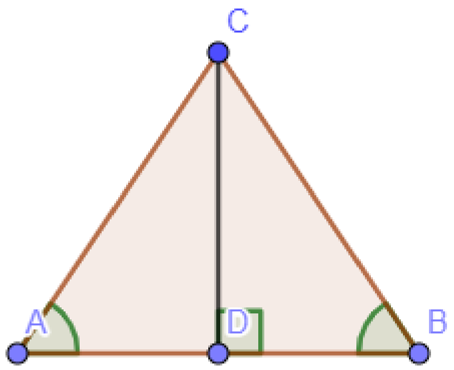
A atividade 6 envolvia geometria, especialmente os conhecimentos dos alunos em torno do conceito de ângulos e tipos de triângulos. Percebemos que alguns alunos lembravam do conceito de triângulo isósceles, como fica evidenciado nas respostas dos grupos G1, G2, G4, G6 e G7. Destacamos também a tentativa do grupo G1 em utilizar a estrutura do método direto de demonstração, mesmo que a solução não seja totalmente correta.

Quadro 12 – Resposta esperada para atividade 6 etapa 1.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 6:
HIPÓTESE: O triângulo é isósceles. **CONCLUSÃO**: os ângulos da base são congruentes. **<u>DEMONSTRAÇÃO:</u>** Seja o triângulo ABC isósceles, com $\overline{AC} = \overline{BC}$.



Traçando a altura do triângulo formamos dois triângulos retângulos, ADC e BDC.



Como em qualquer triângulo isósceles a altura relativa a base é igual a mediana, temos que $\overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{CD}$ é lado comum aos dois triângulos. Logo, pelo caso de congruência LLL, ADC é congruente a BDC.

Portanto, $C\hat{A}D = C\hat{B}D$.

■

Fonte: O autor

Durante a apresentação da solução pelo professor foi necessário relembrar alguns conceitos como altura, mediana e congruência. Acreditamos que a solução dessa atividade foi mais tranquila de ser entendida por parte dos alunos, muitos relataram que as figuras tornaram o processo mais compreensível.

ETAPA 2:

Para a segunda etapa os sete grupos que apresentaram melhor desempenho em relação a aprendizagem foram os seguintes: G1, G2, G3, G4, G5, G6 e G8.

Nesta etapa buscamos mostrar aos estudantes que uma conclusão só é verdadeira quando temos premissas verdadeiras mais raciocínios válidos.

Quadro 13 – Respostas da atividade 1 etapa 2.

Atividade 1: Responda e justifique: se todo ser humano é mortal e Sócrates é um ser humano, podemos concluir que Sócrates é mortal?	
Grupo:	Respostas:
G1	1- Sim, pois seu corpo está morto. Mas, seu modo de pensar ainda existe.
G2	2º etapa 1. Sim, pois ele é um ser humano e todo ser humano é mortal
G3	Segundo Etapa 1-) Sim, porque ele foi um ser humano.
G4	2. segunda Etapa: 1) Sim, pois por ele ser um ser humano ele morre. Por isso ele assim já morreu
G5	2º etapa 1- Sim, pois sócrates é um ser humano
G6	1º) Não porque Socrates não é imortal e sim seus ensinamentos e histórias

G8	Não pois o mortal que e Não ele e.

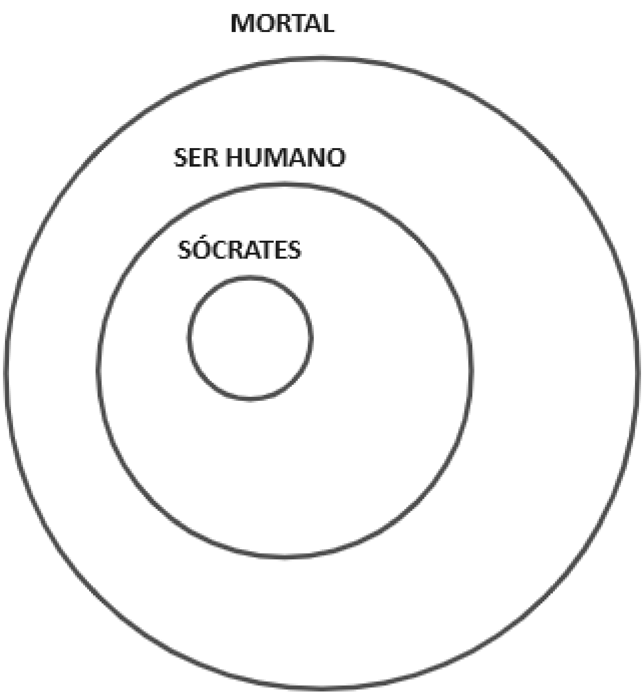
Fonte: O autor

As respostas dos grupos nos mostram que a maioria se utilizou de lógica para chegar na solução da atividade, os grupos G2 e G5 conseguiram validar suas soluções através de argumentos, das falas. Mas nenhum dos grupos se utilizou do diagrama de Venn para mostrar suas respostas.

Quadro 14 – Resposta esperada para atividade 1 etapa 2.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 1:

Utilizando o diagrama de Venn, temos:

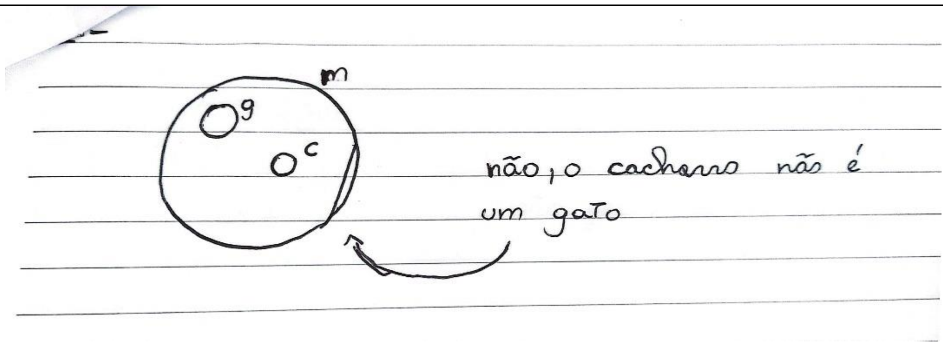
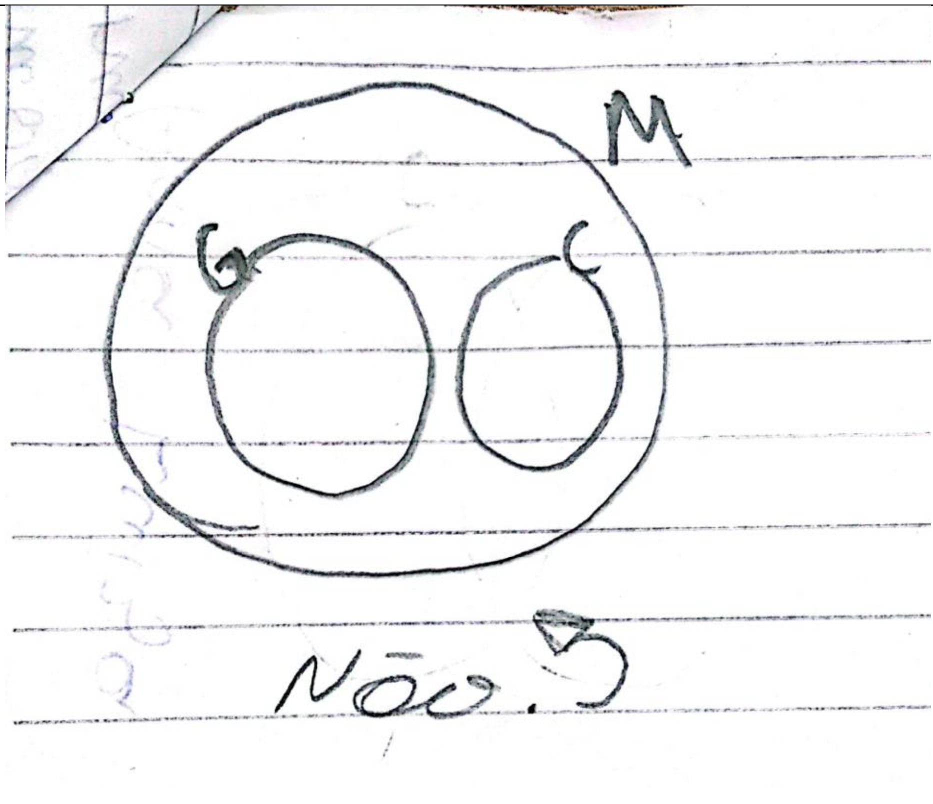
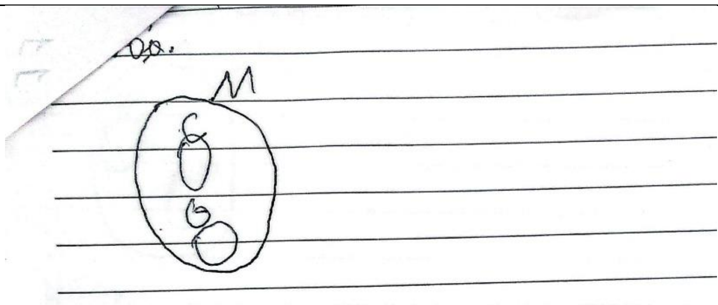


Portanto, podemos concluir que Sócrates é mortal.

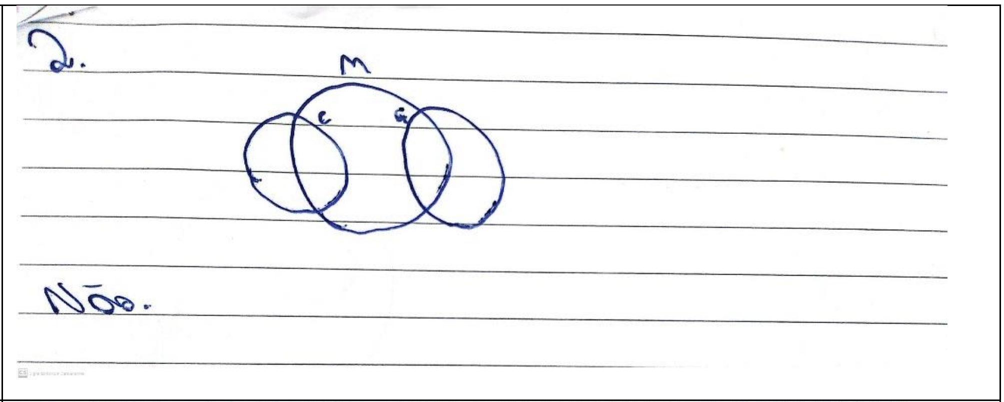
Fonte: O autor

Quadro 15 – Respostas da atividade 2 etapa 2.

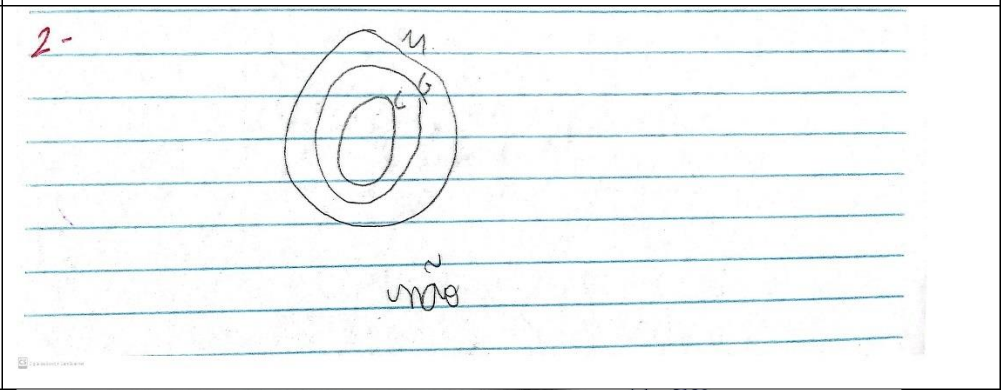
Atividade 2: Responda e justifique: se todo gato é mamífero e o cachorro de

<table>
<tr><td colspan="2">minha prima é mamífero, podemos concluir que o cachorro de minha prima é um gato?</td></tr>
<tr><td>Grupo:</td><td>Respostas:</td></tr>
<tr><td>G1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>G2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>G3</td><td>
</td></tr>
</table>

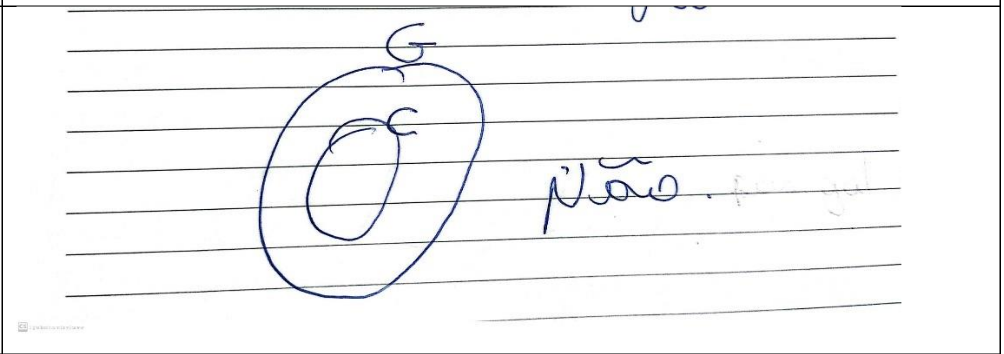
G4



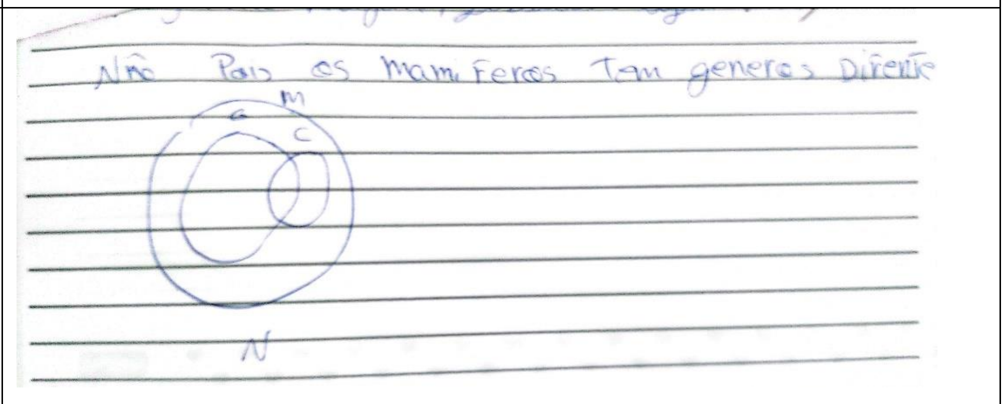
G5



G6



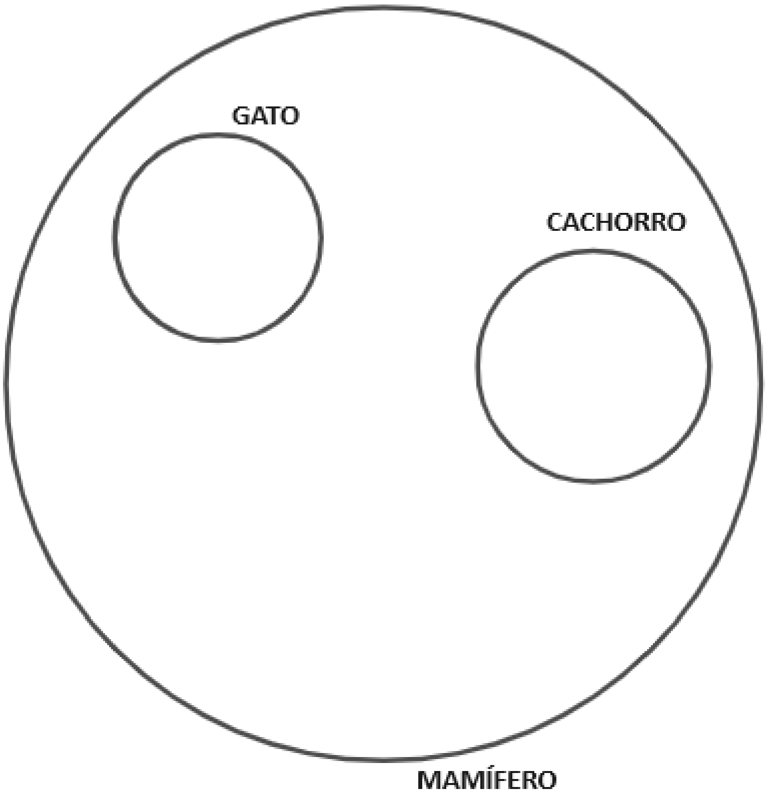
G8



Fonte: O autor

Nesta atividade apesar do conhecimento de que cachorro não é um gato e até mesmo da utilização do diagrama de Venn, percebemos ainda a dificuldade dos alunos em mostrar de maneira adequada a solução que procurávamos, como percebemos nas respostas dos grupos G4, G5, G6 e G8. O que mostra que um raciocínio falso levar a uma conclusão falsa.

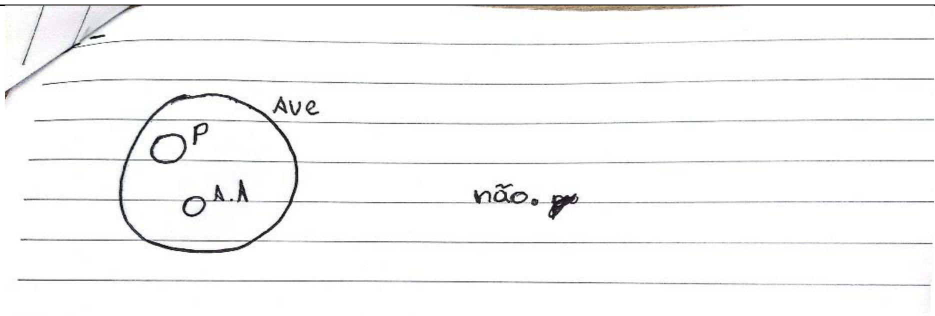
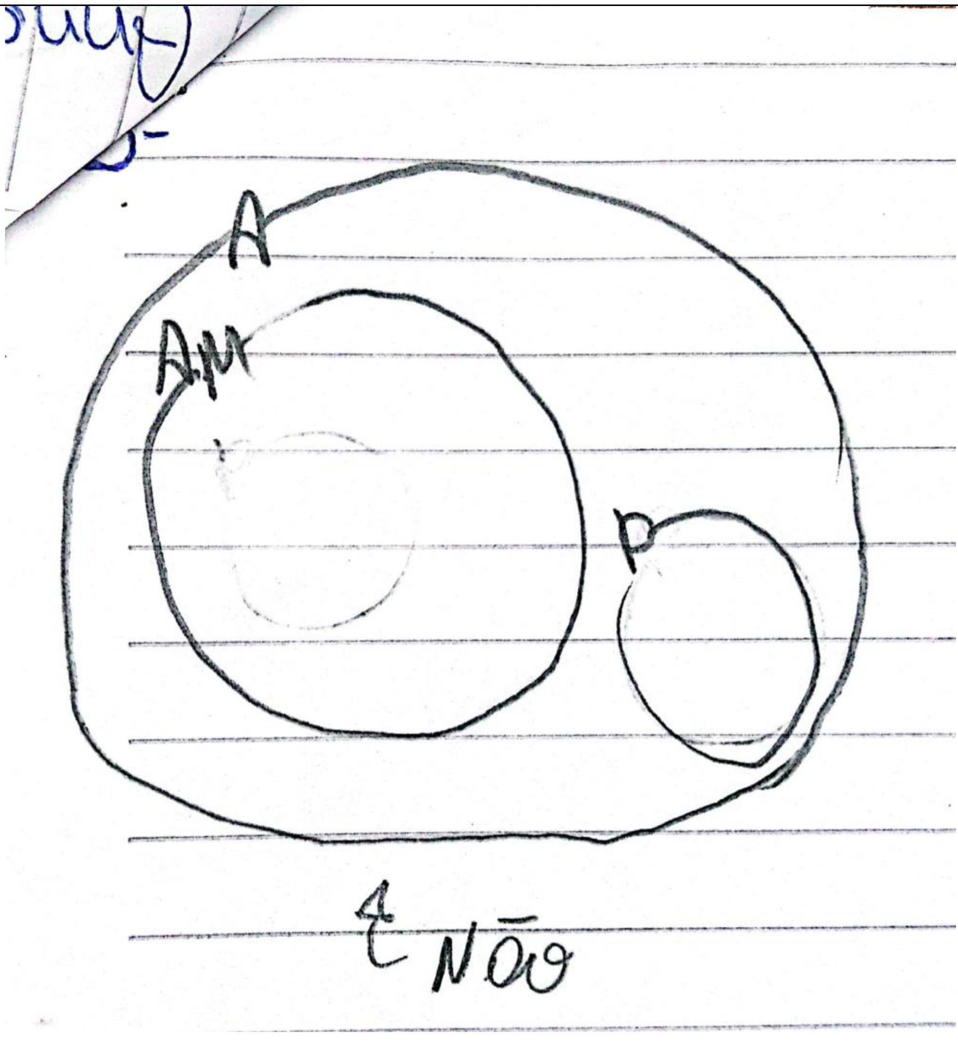
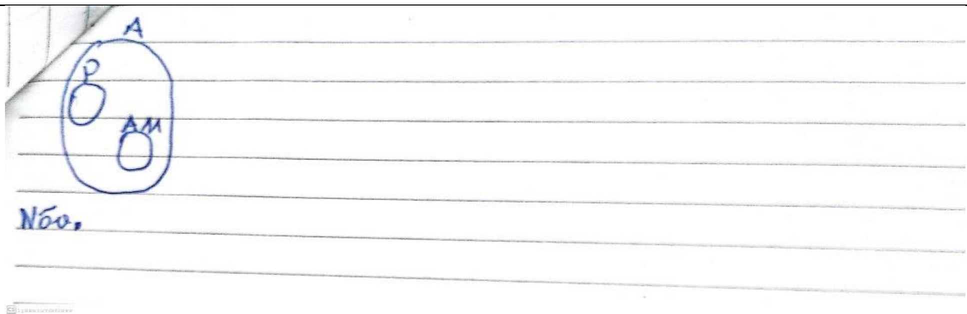
Quadro 16 – Resposta esperada para atividade 2 etapa 2.

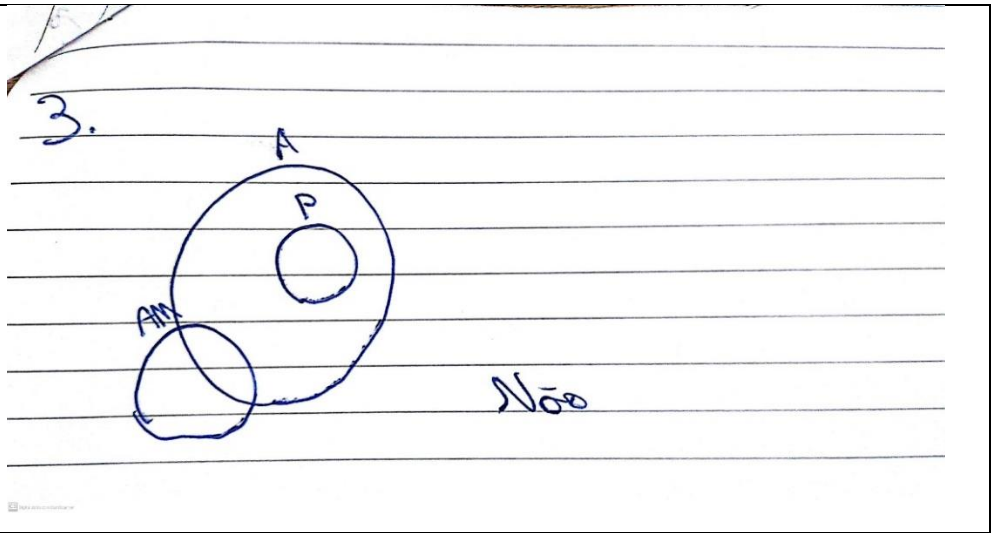
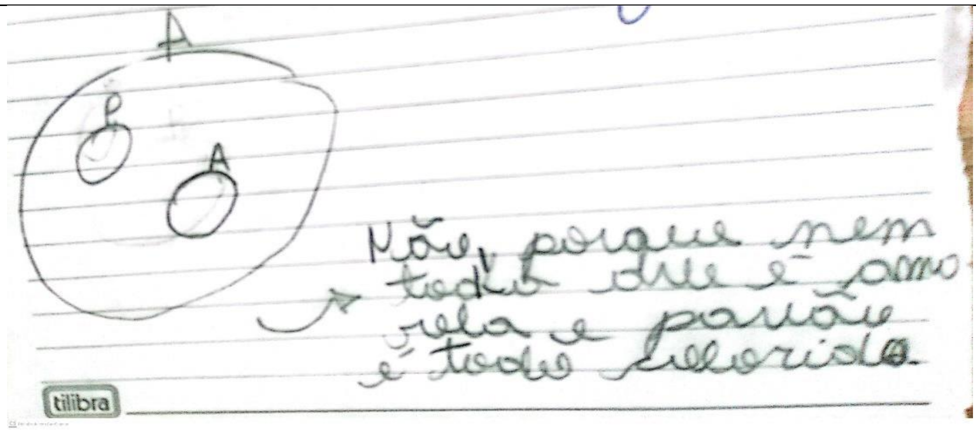
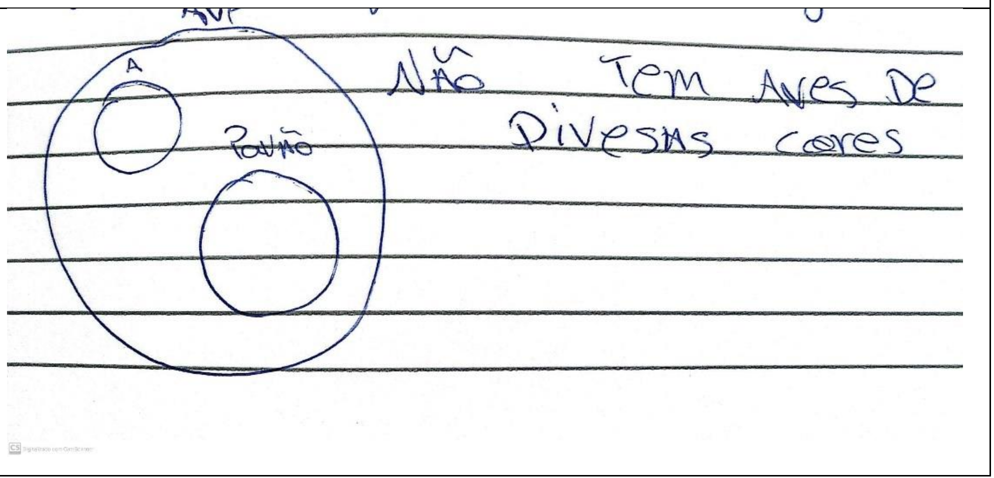
Solução apresentada pelo professor para a atividade 2:
Utilizando o diagrama de Venn, temos:  Portanto, podemos concluir que o cachorro não é um gato.

Fonte: O autor

Quadro 17 – Respostas da atividade 3 etapa 2.

Atividade 3: Responda e justifique: se todo pavão é uma ave e toda ave é amarela, podemos concluir que todo pavão é amarelo?	
Grupo:	Respostas:

G1	
G2	
G3	

G4	
G5	Respondeu no quadro.
G6	
G8	

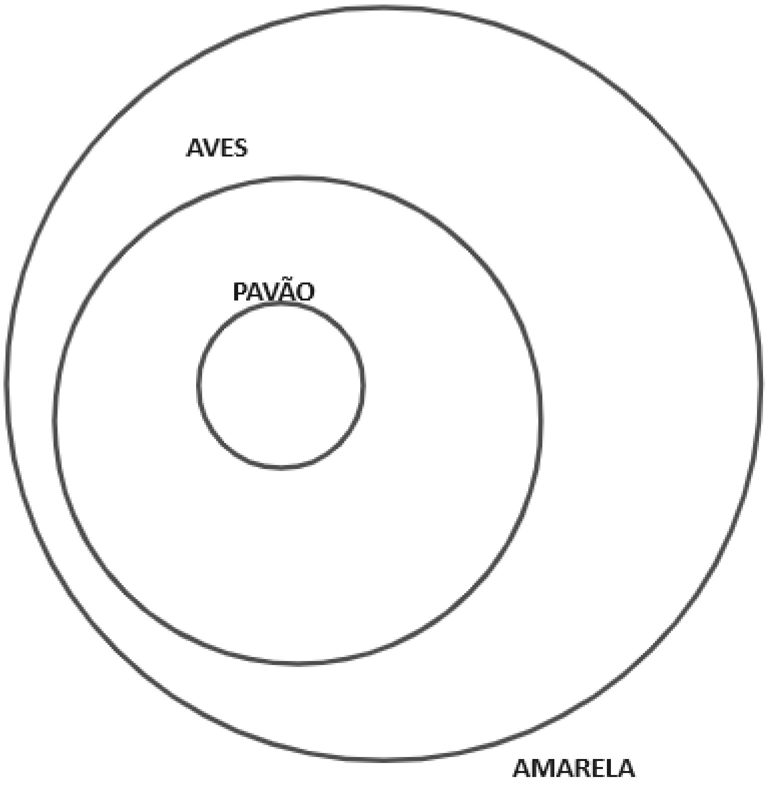
Fonte: O autor

Percebemos que assim como nas questões anteriores da segunda etapa, os alunos se basearam nos conhecimentos prévios adquiridos para responder a atividade 3. Todos os grupos responderam *não* à pergunta, mas não conseguiram justificar corretamente a solução através do diagrama de Venn. Os grupos G6 e G8 até se contrapuseram ao dado do problema afirmando que nem todas as aves são amarelas. Ou seja, não se restringiram às informações dadas e ao raciocínio lógico demandado no problema, chegando à conclusão final pelo uso do dado empírico de suas vivências de que nem toda ave é amarela, o que os levou a uma conclusão errada do ponto de vista lógico nesta questão.

Quadro 18 – Resposta esperada para atividade 3 etapa 2.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 2:

Utilizando o diagrama de Venn, temos:



Portanto, podemos concluir que todo pavão é amarelo.

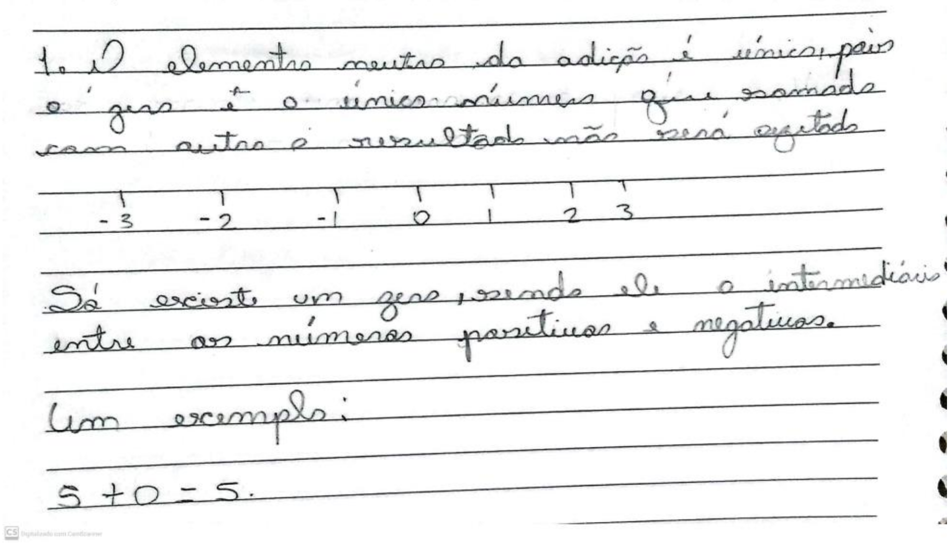
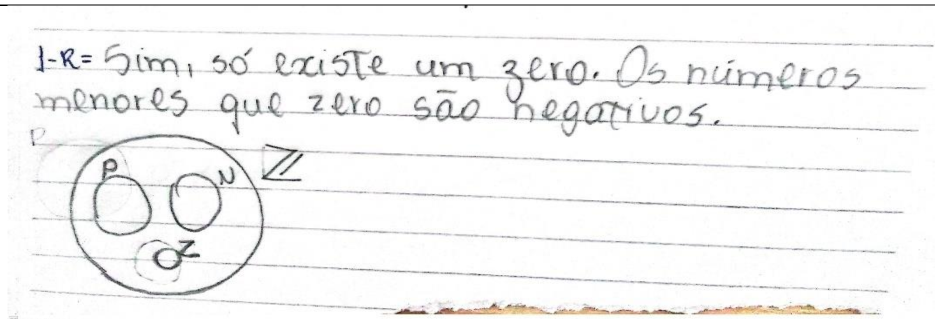
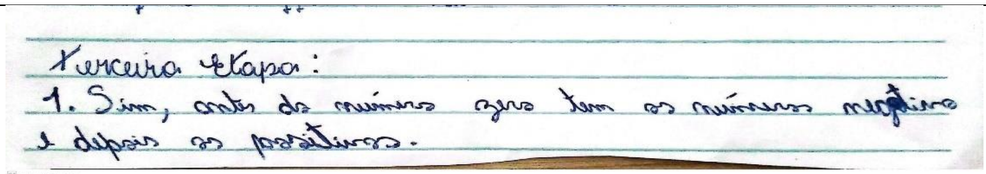
Fonte: O autor

Com a atividade 3, mostramos que a conclusão correta era que todo pavão é amarelo, ressaltamos que isso só foi possível porque tínhamos uma premissa falsa no problema, o que nos levou a uma conclusão também falsa.

ETAPA 3:

Na terceira etapa trabalhamos o método de redução ao absurdo através de problemas básicos da matemática e buscamos entender quais são os conhecimentos dos estudantes sobre esse tópico. Os grupos G1, G2, G4, G5 e G6 apresentaram os melhores resultados na segunda etapa e passaram para a terceira

Quadro 19 – Respostas da atividade 1 etapa 3.

Atividade 1: Responda e justifique: o elemento neutro da adição é único? Ou seja, só existe um zero?	
Grupo:	Respostas:
G1	 1. O elemento neutro da adição é único, pois o zero é o único número que somado com outro o resultado não será afetado -3 -2 -1 0 1 2 3 Só existe um zero, sendo ele o intermediário entre os números positivos e negativos. Um exemplo: 5 + 0 = 5.
G2	 1-R= Sim, só existe um zero. Os números menores que zero são negativos. P N Z ℤ
G4	 Terceira etapa: 1. Sim, antes do número zero tem os números negativos e depois os positivos.

G5	3 etapa: Sim, porque só existe ele de elemento neutro.
G6	Terceira etapa: Sim, o elemento neutro da adição é o zero.

Fonte: O autor

Todos os grupos conhecem e entendem que o zero é o elemento neutro da adição e que ele é único, mas os grupos justificam suas respostas em sua maioria ainda com exemplos ou definições. O que mostra que os alunos não têm ainda uma maneira mais formal para validar certos resultados matemáticos, em especial sobre a demonstração por absurdo.

Quadro 20 – Resposta esperada para atividade 1 etapa 3.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 1:
DEMONSTRAÇÃO (REDUÇÃO AO ABSURDO): Suponha que 0 e $\overline{0}$ sejam elementos neutros da adição, com $0 \neq \overline{0}$. Então, $x + 0 = x$ e $x + \overline{0} = x$. Logo, $$x + 0 = x + \overline{0} \Rightarrow 0 = \overline{0}.$$ **ABSURDO!** Portanto, o elemento neutro da adição é único. ■

Fonte: O autor

Após apresentar a resolução do problema percebemos que os alunos não tinham conhecimento sobre esse método ou não lembravam de terem visto esse método de demonstração. Notamos ainda a dificuldade dos estudantes em abstração matemática, nesse problema principalmente em supor que existe dois zeros e que são diferentes.

Quadro 21 – Respostas da atividade 2 etapa 3.

Atividade 2: Responda e justifique: um número pode ser par e ímpar ao mesmo tempo?	
Grupo:	Respostas:
G1	Suponha que par e ímpar são iguais, com par = ímpar então, x pode ser dividido por 2 e seus múltiplos, além de serem divisíveis por 1 e por ele mesmo
G2	2. não pode, pois para um número ser par ele precisa ser divisível por 2, já os ímpares só podem ser divisíveis por um ou por ele mesmo.
G4	2. Não, um número par ele sempre será divisível por dois, Tipo: 8|2 −8 4 0 e mesmo dividindo será par. Já um número ímpar somado por ele mesmo seria um número par... Como 7 + 7 = 14 mas dividindo por 2 e volta a ser um número ímpar.
G5	é impossível que um número seja par e ímpar ao mesmo tempo, pois o número da unidade é obrigatoriamente par ou ímpar x → par; y → ímpar; xy → y o que vale é a unidade

G6	Não existe um número que pode ser par e impar ao mesmo tempo, porque os números pares são divisiveis por 2 já os ímpares não, são, mas pode ser por ele mesmo.

Fonte: O autor

Vale destacar que o grupo G1 tentou reproduzir a solução desse problema utilizando o passo a passo da resolução que apresentamos no problema anterior. Quase todos os grupos se utilizaram das definições de números pares e ímpares para apresentar suas respostas. O grupo G2 se utilizou da definição de números primos de maneira equivocada para definir números ímpares, sabemos que o número 2 é par e só é divisível por um e ele mesmo. Nesta atividade podemos notar que os demais grupos se utilizaram do tipo de prova *exemplo crucial*, apresentaram definições, propriedades e alguns exemplos sobre paridade de um número.

Quadro 22 – Resposta esperada para atividade 2 etapa 3.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 2:

DEMONSTRAÇÃO (REDUÇÃO AO ABSURDO):

Suponha, por absurdo, que exista um número x que é par e ímpar ao mesmo tempo. Então, existirão $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}$, tais que

$x = 2p$ e $x = 2q + 1$.

Logo, $2p = 2q + 1 \Rightarrow 2p - 2q = 1$.

Assim, $p - q = \frac{1}{2}$.

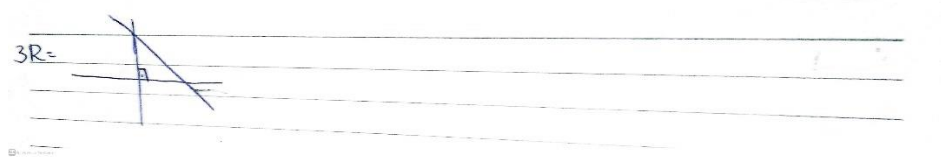
ABSURDO!

Portanto, um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. ■

Fonte: O autor

Quadro 23 – Respostas da atividade 3 etapa 3.

Atividade 3: Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é

180º, mostre que uma reta não pode cortar duas retas concorrentes perpendicularmente.	
Grupo:	Respostas:
G1	Não respondeu.
G2	
G4	Não respondeu.
G5	Não respondeu.
G6	Não respondeu.

Fonte: O autor

Nesse problema os grupos em sua totalidade não conseguiram chegar a uma solução, o grupo G2 ainda conseguiu esboçar uma ideia, mas nada muito além do desenho. Percebemos que os alunos não lembravam de conhecimentos tais como: retas concorrentes, perpendiculares, ângulos internos e tipos de triângulos.

Quadro 24 – Resposta esperada para atividade 3 etapa 3.

Solução apresentada pelo professor para a atividade 3:
DEMONSTRAÇÃO (REDUÇÃO AO ABSURDO): Suponha, por absurdo, que exista uma reta r que corta perpendicularmente duas outras retas concorrentes s e t. Então, teríamos três retas formando um triângulo internamente com dois ângulos internos medindo 90°, onde a soma dos três ângulos internos resulta mais de 180°. **ABSURDO!** Portanto, uma reta não pode cortar duas retas concorrentes perpendicularmente. ■

Fonte: O autor

Percebemos a dificuldade dos estudantes em compreender a demonstração por redução ao absurdo, mas muitos se mostraram entusiasmados com esse novo olhar sobre a matemática e esse novo método estudado.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostrou que a matemática deve ser vista sobre uma nova perspectiva de ensino, que nós enquanto professores da educação básica devemos trabalhar conceitos iniciais com mais rigor matemático, além de se utilizar de recursos diversos para o ensino de tais conceitos e que principalmente nos façamos entendidos.

Percebemos a dificuldade dos alunos em alguns conceitos considerados elementares na matemática, mas em contrapartida foi notório o quanto eles ficaram interessados e desafiados com os métodos de demonstrações apresentados na sequência didática. O que nos leva a repensar nas maneiras de apresentar certos resultados na matemática e o quanto é importante utilizar as demonstrações nesses momentos, nem que seja de uma maneira mais elementar.

A dificuldade dos alunos também se mostrou no conceito de números irracionais e até mesmos com números racionais, enquanto professor percebe que os números irracionais são cada vez mais extintos no currículo da educação básica. Muitas vezes nos livros didáticos, em especial do ensino médio o tema se resume a uma folha e praticamente só cita os números irracionais mais conhecidos, como o π, $\sqrt{2}$, φ(razão áurea), e(base do logaritmo neperiano).

Apresentamos uma possibilidade de se trabalhar as demonstrações diretas e indiretas utilizando problemas elementares da matemática através do método de Resolução de Problemas de Lourdes Onuchic. O método despertou nos estudantes o desafio de buscar a solução com trocas de experiências, conhecimentos, debates e estímulos por parte do professor.

Por fim, o trabalho mostrou que é possível trabalhar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando o método de demonstração por redução ao absurdo e que os estudantes compreendem o processo quando se tem um conhecimento de conceitos numéricos elementares antes e uma construção cuidadosa do processo como apresentada na sequência didática dada nesta dissertação. O trabalho apresentou resultados de aprendizagem satisfatórios e despertou nos estudantes um novo olhar sobre a matemática, introduzindo aspectos lógicos que ampliam as capacidades de raciocínio dos estudantes, mostrando a eles o que é demonstrar uma afirmação matemática, despertando neles a importância de atentarem para a necessidade de validar as inferências realizadas, fornecendo meios necessários a essa validação.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. Revista VI DYA, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, 2014.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. AS Conexões Trabalhadas através da Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática. REnCiMa. Revista de Ensino de Ciências e Matemática. São Paulo, v. 10, n. 2, p. 1-14, 2019.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

Balacheff, N. Um desafio de modelagem: desembaraçar o conhecimento do aluno. *Learning, a Transdisciplinary Approach (JIOSC 2000),* 2000, Orsay, França. pág.7-16.

Balacheff, N., & Boy de la Tour, T. (2019). Proof Technology and Learning in Mathematics: Common Issues and Perspectives. In G. Hanna, D. Reid, & M. de Villiers (Eds.), Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Berlin: Springer.

BALACHEFF, N. The researcher epistemology: a deadlock from educational research on proof. Fou Lai Li (ed.) International Conference on Mathematics – “Understanding provind and proving to understand”. Taipei: NSC and NTNU (pp. 25-44). Reprinted in Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, nº 109, August 2004. http://www4.pucsp.br/pensamentomatematico/texto%20prova%20balacheff.pdf (Consulta em 15/09/2023)

BICALHO, Jossara Bazílio de Souza. A Resolução de Problemas na Formação inicial de professores de Matemática: percepções dos bolsistas do programa Residência Pedagógica. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 22, 2018, Belo Horizonte. Anais do 22º EBRAPEM: Pesquisa em Educação Matemática e Inclusão Social. Belo Horizonte: UFMG, 2018, p. 1-12.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta Caecilia. História da matemática.[tradução de Helena Castro]. São Paulo, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. (versão final). Brasília: MEC, 2018.

BROETTO, Geraldo. O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática, 2016. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BROETTO, Geraldo ; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira. O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? Bolema, Rio Claro (SP), v. 33, n. 64, p. 728-747, ago. 2019

CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? Boletim GEPEM, v. 36, n. 60, p. 147-162, jan./jun. 2012.

DIAS, Marisa da Silva. Reta real: conceito imagem e conceito definição. 2002. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002. FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in highschool students and prospective teachers. Educational Studies in Mathematics, Heidelberg, n. 29, p. 29-44, 1995.

EVES, H. Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Higino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.6

FREITAS, José Luiz Magalhães. Teoria das situações didáticas. (In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3. ed. Revista. Série Trilhas. São Paulo/SP: Editora EDUC PUC- SP, 2008).

GARBI, G. G. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

HAREL, G.; SOWDER, L. Towards compreensive perspectives on the learning and teaching (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM and IAP, 2007.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; SILVA, Benedito Antonio da. Conhecimentos das concepções prévias de estudantes sobre números reais: um suporte para melhoria do ensino-aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21., 1998, Caxambu. Anais... Caxambu: Anped, 1998, p. 1-20.

KNORR, W. Archimedes and the pre-Euclidean proportion theory. Archive for History of Exact Sciences, 28 (103), pp. 183-244, 1978.

LIMA, Elon Lages (Ed.). Exame de textos: análise de livros de matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do Ensino Médio. vol. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

MORAIS FILHO D.C. Manual de redação matemática: com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação. 1ª Ed. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2009.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. BOLEMA. Boletim de Educação Matemática. UNESP. Rio Claro, v. 25, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. De La R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PAIS, Luis Carlos. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte/MG: Editora Autêntica, 2001.

POMMER, Wagner Marcelo. A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 246 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, 2012.

PROENÇA, M. C. Resolução de Problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

ROQUE, Tatiana. História da matemática. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

SIROTIC, Natasa; ZAZKIS, Rina. Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. Educational Studies in Mathematics, Heidelberg, v. 65, n. 1, p. 49-76, 2007.

VAN DE WALLE, John A. Matemática no ensino fundamental: for mação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Colo nesse, Paulo Henrique. Porto Alegre: Artmed, 6. ed., 2009.