UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS A. C. SIMÕES

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

SISTEMA DE NUMERAÇÃO CUNEIFORME COM ÊNFASE NAS CONTRIBUIÇÕES DE DENISE SCHMANDT-BESSERAT

THIALLISON JÚNIOR DA SILVA

MACEIÓ - AL

2024

THIALLISON JÚNIOR DA SILVA

SISTEMA DE NUMERAÇÃO CUNEIFORME COM ÊNFASE NAS CONTRIBUIÇÕES DE DENISE SCHMANDT-BESSERAT

Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do grau de licenciado em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Campus. A. C. Simões.

Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

MACEIÓ - AL

2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586s Silva, Thiallison Júnior da.
Sistema de numeração cuneiforme com ênfase nas contribuições de Denise Schmandt-Besserat / Thiallison Júnior da Silva. - 2024.
69 f. : il.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 69.

1. História dos números. 2. Escrita cuneiforme. 3. Mesopotâmia. 4. Tokens. I. Título.

CDU: 003.323

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, quero agradecer a DEUS por tudo e por tanto, que desde o início do meu existir até o dia de hoje, em momento algum, desistiu de mim. Quero agradecer, em especial, por me conceder o privilégio de cursar a faculdade dos meus sonhos na Universidade Federal de Alagoas – Ufal.

Quero agradecer aos meus amados pais pelo carinho, amor, dedicação e incentivo e por todo aporte psicológico, emocional e financeiro ao longo dos anos e principalmente nesses últimos.

Quero agradecer aos meus irmãos por todo apoio e por cada palavra de inspiração, tanto nos momentos bons, quanto nos momentos de aflição.

Quero agradecer a toda minha família, em especial a todos os que me acolheram no início da graduação...

Quero agradecer ao Sr. José Arí Pininga da Silva (infelizmente não está mais aqui para ver essa vitória, porém eu não poderia deixar de agradecê-lo neste pequeno espaço do trabalho por tudo o que fez por mim) que me incentivou bastante a amar a matemática, como também, a buscar cada vez mais ser o melhor que eu posso ser.

Quero agradecer a todos os meus colegas e amigos que sempre torceram por mim e que, de alguma forma, lutaram comigo para que esse sonho pudesse se tornar real. Em especial, quero agradecer a todos os meus colegas e amigos do ônibus (todos representados por Marcos Reis e Sueuder, que por sua vez, tiveram um papel fundamental como gestores) pelo acolhimento e parceria.

Quero agradecer à Elisabete Jouse por ter me convidado para participar (como professor de matemática) do grupo de estudos para o Enem de 2018. Obrigado pelo incentivo para fazer a inscrição e, principalmente, a prova. Obrigado pela nossa amizade, pelas nossas lutas e conquistas, pois só DEUS e nós sabemos o que passamos para estarmos alcançando esse objetivo, hoje.

Quero agradecer a toda comunidade da Ufal, em especial, a todos os que fazem parte do IM – Instituto de Matemática – Campus A. C. Simões.

Quero agradecer a todos os professores por me permitirem usufruir de uma formação privilegiada. Em especial, quero agradecer ao estimado Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra, pelos ensinamentos, pelas orientações, pela parceria e pelo apoio incondicional de sempre. Tenho certeza de que não poderia ter feito escolha melhor e sou muito grato por tê-lo tido ao meu lado nessa etapa.

Dedico este trabalho primeiramente a DEUS, em seguida aos meus pais, aos meus irmãos, aos meus amigos e a todos que sempre me apoiaram e me incentivaram.

RESUMO

Embora os números sempre estejam presentes em diversas situações do cotidiano, são poucas (quase raras) as ocasiões em que se ouve falar de suas origens. Foi a partir dessa constatação que foi definido o objetivo deste trabalho: conhecer como e onde surgiu o sistema de numeração cuneiforme com base nas contribuições da arqueóloga Denise Schmandt-Besserat. Para isso optamos, então, em realizar uma pesquisa bibliográfica qualitativa. Como principal resultado é obtido que o trabalho arqueológico de Denise Schmandt-Besserat reforça a hipótese de que os sistemas de escrita e de numeração cuneiforme derivaram de um sistema de *tokens* (fichas), objetos utilizados em estratégias de registro de contagens.

Palavras-chave: História dos números; sistema cuneiforme; Mesopotâmia; tokens.

ABSTRACT

Although numbers are always present in various everyday situations, there are few (almost rare) occasions when we hear about their origins. It was from this observation that the objective of this work was defined: to understand how and where the cuneiform numbering system emerged based on the contributions of archaeologis Denise Schmandt-Besserat. To achieve this, we chose to carry out qualitative bibliographical research. The main result is that the archaeological work of Denise Schmandt-Besserat reinforces the hypothesis that the cuneiform writing and numbering systems derived from a system of tokens, objects used in counting recording strategies.

Keywords: History of numbers; cuneiform system; Mesopotamia; tokens.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

➔ a.C: antes de Cristo

➔ a.E.C: antes da Era Comum

➔ YBC: Yale Babylonian Collection – Coleção Babilônica de Yale

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Matemática e os números sempre se fazem presentes e fascinantes em nosso meio. Porém, são poucas as ocasiões que ouvimos falar de suas origens (o que levou ao surgimento deles). Utilizar com o sistema de numeração decimal posicional é hoje considerado fácil, mas será que em todo tempo foi assim? Os números sempre foram formados a partir do conjunto de símbolos 0 ao 9 como se conhece hoje em quase todo o mundo? Esses e muitos outros questionamentos geraram o interesse pela história dos números.

Durante as aulas do curso de história da matemática referentes aos sistemas de numeração das antigas civilizações, não havia dúvidas de que o tema do nosso trabalho de conclusão de curso seria voltado ao estudo deste conteúdo e inclusive já o tendo pré-definido como "Sistema de numeração: contribuições das antigas civilizações para o desenvolvimento e evolução da matemática". Contudo, por ser um tema amplo, no decorrer das orientações, o restringimos para "Sistema de numeração cuneiforme: contribuições da civilização mesopotâmica para o desenvolvimento e evolução da matemática". O que mais tarde e finalmente mudaria para "Sistema de numeração cuneiforme com ênfase nas contribuições de Denise Schmandt-Besserat". A escolha pelo tema se deu pelo fato dessas contribuições ainda não terem sido tão divulgadas. De fato, as contribuições dos trabalhos desta autora e arqueóloga trazem à tona respostas importantes a respeito do surgimento do sistema tanto de escrita quanto de numeração na Mesopotâmia a partir de *tokens* que evoluíram de um sistema de contagem e impressões e incisões em tabletes de argila.

Portanto, este trabalho, além de apresentar os fundamentos elementares dos registros do sistema de numeração cuneiforme, também enaltece os trabalhos de Denise Schmandt-Besserat em relação à história dos números na Mesopotâmia.

O objetivo principal deste trabalho é compreender o sistema de numeração cuneiforme e sua origem histórica. Como objetivos específicos, busca-se compreender como os cientistas concluíram que esse sistema consistia na base sexagesimal posicional, quais dispositivos o precederam e qual a sua relação com a escrita na Mesopotâmia antiga e como eram esses dispositivos e como eram utilizados.

Para alcançar tais objetivos, lançamos mão de estudos a respeito da história da Mesopotâmia, de autores como Kriwaczek (2018) e alguns outros. Para as questões pertinentes ao sistema de numeração cuneiforme na Mesopotâmia consultamos autores como Aaboe (2013), Eves (2004), Katz (2013), Schmandt-Besserat (2010) e Roque (2012). Mais especificamente, destacamos aqui que para os estudos relacionados ao Oriente Próximo referentes aos dispositivos que precederam à escrita e ao sistema cuneiforme se fez necessário o uso da importante obra Schmandt-Besserat (2010).

Em suma, tentamos trazer, em um único trabalho, um pouco da história da Mesopotâmia e do legado dos povos que nela habitaram com base nos dados e registros que se tem a disposição. Também como se deu o processo de criação do sistema de numeração cuneiforme e como ele funcionava.

Este trabalho se encontra dividido em cinco seções, incluindo a introdução (seção 1) e as considerações finais (seção 5).

A seção 2 "Uma breve caracterização da Mesopotâmia antiga" está dividida em três subseções. De início destacamos a localização geográfica da Mesopotâmia e já subseção 2.1, fizemos uma viagem ao berço da civilização quando os primeiros povos se assentaram na região após a mudança no estilo de vida nômade para sedentários. Na subseção 2.2, explicitamos os principais povos que se assentaram na região e alguns dos seus legados nas áreas da matemática, engenharia, direito, arquitetura, escrita que perduraram por muito tempo e alguns deles ainda perduram nos dias de hoje. Finalizando o capítulo, na subseção 2.3, argumentamos a Mesopotâmia como sociedade e como se deu a instalação dos principais povos nela.

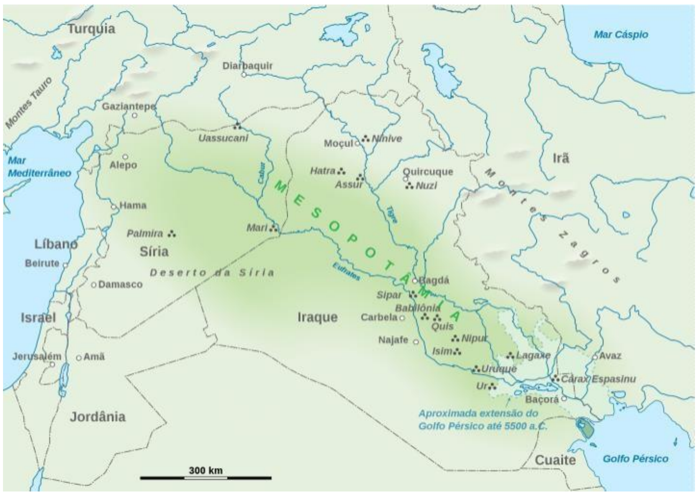
A seção 3 "O sistema de numeração cuneiforme" encontra-se dividido em duas subseções, em que vamos compreender, de fato, como funcionava o sistema. Na subseção 3.1, trazemos para o nosso trabalho a argumentação de Aaboe (2013) em relação ao desvendamento do sistema cuneiforme pelos cientistas por meio de uma tabela de multiplicação e em seguida detalhamos a ideia deste autor de uma forma mais didática com quadros. Na subseção 3.2, trazemos a argumentação de Roque (2012) também a respeito do mesmo sistema e nos concentramos no símbolo que representa a posição vazia e as suas restrições, posteriormente detalhamos as ideias desta autora com quadros e cálculos a respeito das operações de multiplicação e divisão no sistema cuneiforme usando os nossos símbolos.

A seção 4 "Denise Schmandt-Besserat e a origem da escrita e dos números na Mesopotâmia antiga" está dividida em três subseções. Na subseção 4.1, argumentamos, segundo as próprias palavras de Schmandt-Besserat (2010), o que a levou a estudar os *tokens*. Na subseção 4.2, explicitamos a metodologia de seu trabalho e finalizamos a seção expondo os resultados quantitativos e qualitativos apresentados pela autora na seção 4.3.

2. UMA BREVE CARACTERIZAÇÃO DA MESOPOTÂMIA ANTIGA

A Mesopotâmia, nos dias atuais, corresponde à maior parte do atual Iraque e Kuwait, como também se estende às partes orientais da Síria e de regiões ao longo das fronteiras entre Turquia e Síria e também Irã e Iraque. De acordo com Carvalho (2017) e Roque (2012), seu nome possui origem grega e significa "terra entre rios", visto que se trata de uma região desértica localizada, geograficamente, entre os rios Tigre e Eufrates, como indicado na **figura 1**.

Figura 1 - Mesopotâmia

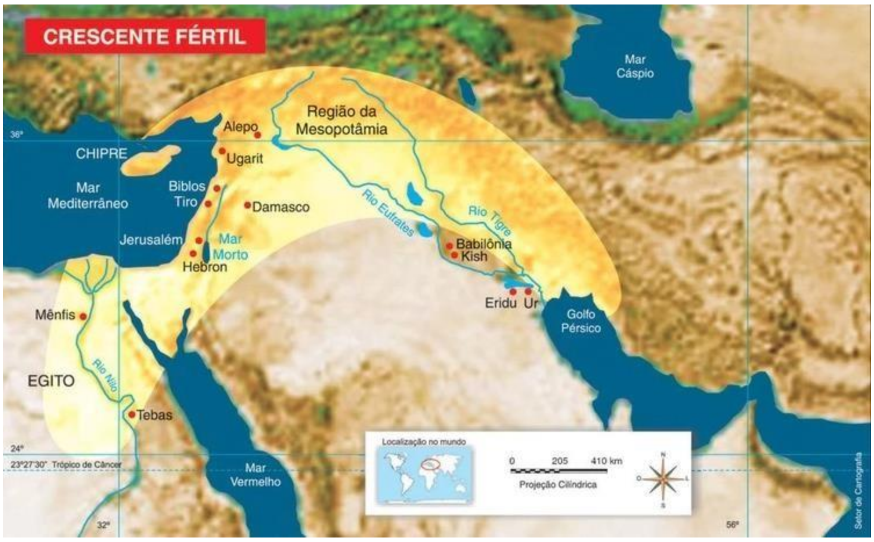


Fonte: Introdução ao Jornalismo Científico[1]

Por ter sido uma terra de passagem (devido sua localização na passagem do mar mediterrâneo para o golfo pérsico), a Mesopotâmia foi ocupada por vários povos de diferentes origens e, se desenvolveu em uma região maior "que levou o arqueólogo norte-americano James Henry Breasted a chamá-la de Crescente Fértil" (KRIWACZEK, 2018, p. 34). Essa região se estendeu do Egito até as terras mesopotâmicas – **figura 2**.

[1] Disponível em: https://pt.wikiversity.org/wiki/Introdu%C3%A7%C3%A3o_ao_Jornalismo_Cient%C3%ADfico/Hist%C3%B3ria_da_Ci%C3%AAncia_e_da_Tecnologia/A_T%C3%A9cnica_nas_Primeiras_Grandes_Civiliza%C3%A7%C3%B5es/script, Acessado em: 18 de março de 2024.

Figura 2 - Crescente Fértil



Fonte: Todo Estudo [2]

Como podemos observar no mapa da **figura 2**, a Crescente Fértil era uma região desértica, porém com rios muito volumosos como o rio Nilo e os rios Tigre e Eufrates. De acordo com Kriwaczek (2018, p. 34),

> Na Mesopotâmia meridional, bem no interior da curva, quase não cai chuva alguma na maior parte do ano. Ali, os recém-chegados contavam apenas com os rios para regar suas plantações e, até para isso, primeiro tinham de reconfigurar a própria terra, introduzindo barragens, diques, fossas, reservatórios e canais.

Vale ressaltar que todo esse esforço exigia deles um eficiente sistema de organização coletiva do trabalho.

2.1. A Mesopotâmia: berço da civilização

A civilização mesopotâmica é considerada uma das mais antigas da humanidade. De acordo com Katz (2009), essa civilização é talvez um pouco mais antiga que a egípcia, tendo começado em algum momento do quinto milênio a.E.C. e se desenvolvido entre os rios Tigre e Eufrates (como explicitado no início da seção).

Segundo Mendonça (2013), os povos da Mesopotâmia se destacam dentre os demais povos da antiguidade, principalmente pela criação de uma das primeiras experiências de núcleos urbanos organizados daquele período.

[2] Disponível em: https://www.todoestudo.com.br/historia/crescente-fertil, Acessado em: 19 de março de 2024.

Deste modo, é importante ressaltar que as primeiras cidades foram o resultado de uma sedentarização da população e de uma revolução agrícola, que se originou durante a revolução neolítica por volta do décimo milênio a.E.C., como explicita Kriwaczek (2018, p. 25),

> Ao contar de cerca de 10000 a.C., muito pouco tempo depois do derretimento das geleiras continentais, e ainda que bem devagar, a princípio, as pessoas começaram a adotar um estilo de vida mais assentado, agrupando-se em comunidades aldeãs, e, em vez de apenas explorarem as oportunidades oferecidas pela natureza, começaram a controlar as plantas e os animais que lhes garantiam a subsistência. Plantaram-se lavouras, prenderam-se rebanhos em currais, a flora e a fauna essenciais à sobrevivência da população foram geneticamente modificadas pela reprodução seletiva, para melhor servir a seus propósitos humanos.

Ainda segundo Kriwaczek (2018), a eclosão urbana se deu nesse mundo de lavradores de subsistência e aldeolas de camponeses, devido que estava se tornando ali, um mundo relativamente uniforme e predominantemente homogêneo. Dali em diante, a ideia de civilização se espalhou da Mesopotâmia até conquistar o mundo.

Ao longo do tempo, diversos povos ocuparam a Mesopotâmia, porém é usual denotar a população que habitava nela de população babilônica, mas segundo Eves (2004, p. 59) "Deve-se entender que se usa o termo descritivo babilônico meramente por conveniência." Isso se deve ao fato de que outros povos também habitaram essa região antes mesmo dos babilônios e consequentemente depois, como veremos na subseção 2.3.

2.2. Povos mesopotâmicos e seus legados culturais para o desenvolvimento e evolução da sociedade

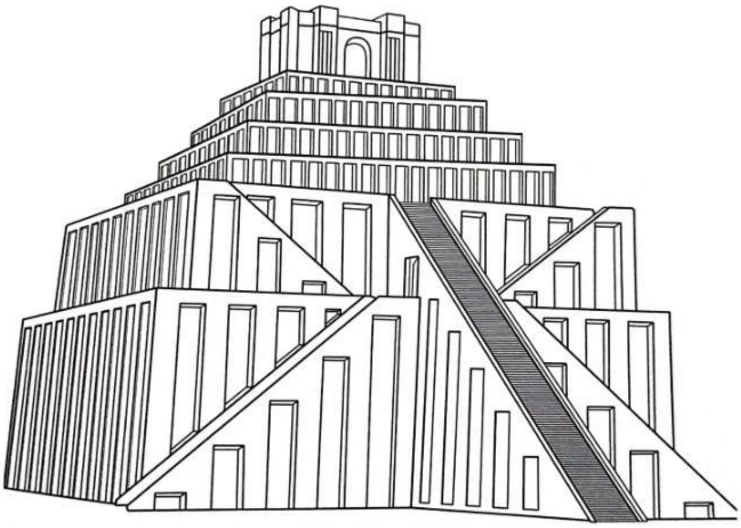
De acordo com Gonçalves (2010), ao longo do tempo foram surgindo alguns povos que habitaram a região mesopotâmica, sendo que os mais importantes deles foram os Sumérios, os Acadianos, os Babilônios e os Assírios.

Esses povos contribuíram de forma extraordinariamente significativa para o desenvolvimento e avanços fundamentais em diversos campos como a arquitetura de seus palácios e altos templos dedicados aos deuses – os Zigurates[3] – **figura 3** (mais precisamente, aproximaram a religiosidade da arquitetura) e a astronomia. Estudos esses que foram

[3] Segundo Kriwaczek (2018, p. 199), "eles foram planejados pelos por seus criadores sumérios para permitir que a escala humana e a divina se tocassem momentaneamente".

desenvolvidos e usados pelos babilônios que, de acordo com Carvalho (2017), criaram um calendário rico e preciso para prever enchentes e vazantes do rio Eufrates.

Figura 3 - Zigurates



Fonte: Kriwaczek (2018, p. 77)

De acordo como Kriwaczek (2018)[4] e Schmandt-Besserat (2010)[5], os povos mesopotâmicos também desenvolveram o próprio sistema numérico como veremos, um pouco mais a fundo, na seção 3. Este contribuiu bastante para os avanços nos conhecimentos matemáticos, inclusive no domínio da aritmética, geometria, álgebra e também sistema de pesos e medidas.

> Eles tinham soluções para equações lineares – um método, segundo observam os matemáticos modernos, semelhante à eliminação gaussiana –, para equações quadráticas e cúbicas, para calcular a hipotenusa de triângulos retos (teorema de Pitágoras), para deduzir as áreas de polígonos, para trabalhar com círculos e segmentos circulares – os quais eram chamados de cordas de arco. Sua aproximação de π "Pi", era $3\,{}^{1}/_{8}$, o que, equivalendo a 3,125, não fica muito longe do valor que usamos, 3,14159 – e é mais próximo, pelo menos, que o valor 3 preceituado na Bíblia, uns mil anos depois (KRIWACZEK, 2018, p. 250).

Nota-se aí, o quão importante foi o desenvolvimento desse sistema de numeração.

---

[4] De acordo com Kriwaczek (2018), os povos mesopotâmicos adquiriram uma vasta coleção de noções e ideias fundamentais para a forma de ver o mundo. Tudo isso pela primeira vez na história, entre elas, o conceito de números.

[5] Schmandt-Besserat em sua obra discute a sua teoria de que o sistema de escrita e de numeração surgiu a partir de um dispositivo de contagem – os *tokens* – no oriente próximo (inclusive na região da Mesopotâmia). Em outras palavras, a autora trabalha a evolução dos *tokens* à escrita. Veremos um pouco mais a fundo na seção 3.

Além disso, também desenvolveram o próprio sistema de escrita, em que Katz (2008), acredita que este, por sua vez, surgiu por meio da necessidade de contabilidade, de gravar para recordar, e gerenciar trabalhos e fluxo de mercadorias. Roque (2012), ainda acrescenta a esses fatores a organização da sociedade, visto que nessa época houve um crescimento considerável da população daquela região, o que, possivelmente, levou ao desenvolvimento das cidades e ao aperfeiçoamento as técnicas administrativas. Portanto, o aparecimento de registros de quantidades associados às primeiras formas de escrita é uma consequência dessas circunstâncias. Para Schmandt-Besserat (2010, p. 8), "a escrita não foi apenas o resultado de novas exigências burocráticas, mas também da invenção da contagem abstrata". Vejamos um exemplo dessa representação na **figura 4** e na seção 4 entenderemos a fundo a diferença dos conceitos propostos pela arqueóloga Schmandt-Besserat.

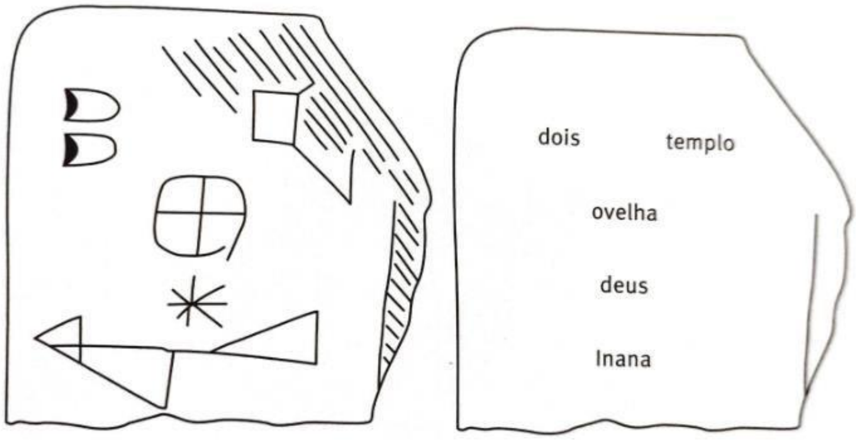
Ainda sobre esse ponto, argumenta Gonçalves (2010, p. 11),

> Na mesma linha, também Nissen et al. (1993), arqueólogos e historiadores da civilização Mesopotâmica, afirmam que os primeiros documentos escritos de que existem registros, constituídos por pequenas tábuas de argila com inscrições cuneiformes, datadas de há mais de 5000 anos, não contêm nem palavras, nem textos, mas apenas contas e números. Concluíram também os autores (idem) que foi a necessidade de conservação das contas originadas como consequência de processos administrativos que motivou o surgimento da escrita na antiga Mesopotâmia, entendimento partilhado também por Goody (1987) e Sá (1998), ao reconhecerem que a escrituração contabilística precedeu a escrita comum, ou seja, o registro da riqueza antecedeu os demais.

Nota-se aí que, primeiro, surgiram às escriturações contabilísticas para posteriormente vir a surgir o modelo de escrita comum (palavras e textos). Mas para Schmandt-Besserat (2010, p. 1) "A ideia de que a escrita mesopotâmica surgiu de um dispositivo de contagem é nova. Até o século XVIII, a origem da escrita foi objeto de mitos que creditavam a sua invenção a deuses, criaturas fabulosas ou heróis". Para Katz (2008), a escrita, ainda nas escriturações contabilísticas, começou muito possivelmente na cidade de Uruk aproximadamente no final do quarto milênio a.E.C. Em concordância, Roque (2012), destaca que por volta da década de 1930, em suas escavações, os arqueólogos descobriram centenas de tabletes arcaicos na mesma região e que indicavam que a escrita já existia nessa época, pois continham sinais traçados ou impressos.

Atribui-se o mérito aos povos sumérios, pois segundo Roque (2012), as primeiras evidências de escrita datam desse período. Os sumérios desenvolveram o sistema de escrita mais antigo conhecido, o cuneiforme. Este, por sua vez, envolvia marcar caracteres em argila "com estiletes de madeira de ponta prismática e base triangular em pequenas placas de barro humedecido depois cozido em fornos" (GONÇALVES, 2010. p. 11). Ainda sobre esse ponto, a escrita cuneiforme apesar de ter sido inicialmente desenvolvida para escrever a língua suméria, ela também foi utilizada por outros povos da Mesopotâmia (CASTRO; LANDEIRA-FERNADEZ, 2010). Na seção 4, trabalharemos um pouco mais a fundo como se deu o surgimento da escrita.

Figura 4 - Escrita na Mesopotâmia



Fonte: Kriwaczek (2018, p. 75)

Segundo Carvalho (2017) e Eves (2004), os babilônios criaram um código de lei, o qual se tem até hoje como um dos primeiros da história que se tem conhecimento e que, por sua vez, é representado como código de Hamurabi – **figura 5**. Este conjunto de leis é significativo por várias razões.

> Após um longo preâmbulo, que enaltece Hamurabi como protetor dos fracos e oprimidos e detalha as regiões que ele governava, tem-se uma lista de aproximadamente 280 sentenças referentes à família, à escravidão e ao direito profissional, comercial, agrícola e administrativo, inclusive estabelecendo padrões de preço de mercadorias e salários de mercenários. (KRIWACZEK, 2018, p. 228).

Além disso, Carvalho (2017), assim como Kriwaczek (2018), afirma que o código também se baseava na lei de Talião “olho por olho, dente por dente”. Dessa forma, qualquer delito cometido deveria ser pago (de maneira popularmente falada) na mesma moeda.

Figura 5 - Código de Hamurabi

Fonte: Mundo Educação[6]

Porém não para por aí. Apesar do potencial desastre à saúde pública daquela população, esses povos realizaram um feito magnífico de engenharia:

> Desde tempos remotos, inclusive na era de Uruk, antes de 3000 a.C., o esgoto doméstico era diretamente canalizado para os cursos d'água por um sistema complexo, feito de canos de argila cozida, e toda casa tinha canos que drenavam os dejetos e as águas pluviais para um esgoto embaixo da rua. As tubulações eram ligadas para formar por toda a cidade um sistema de escoamento cuja descarga descia paralelamente à inclinação natural do solo e cujo escoadouro situava-se bem além dos muros da cidade. (KRIWACZEK, 2018, p. 111-112).

Ainda nesse sentido este autor comenta, "Se os cursos d'água não eram seguros, as perfurações e os poços também não eram fornecedores de água potável, porque o lençol freático salino ficava muito próximo da superfície." (KRIWACZEK, 2018, p. 112).

Nota-se aí, que a civilização mesopotâmica já tinha um conhecimento grande a respeito dos riscos gerados pelos atos de urbanização das cidades.

Esses e muitos outros grandes feitos pelos sumérios e babilônios, principalmente, ocorreram durante a história. Deste modo, a importância desses e demais povos que habitaram a Mesopotâmia é inegável à história da humanidade. Suas contribuições na agricultura, matemática, astronomia, escrita, religião, engenharia e organização social influenciaram profundamente o desenvolvimento das civilizações posteriores, tanto no Oriente Médio quanto em todo o mundo.

[6] Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/historiageral/o-codigo-hamurabi.htm, Acessado em: 19 de março de 2024.

Em suma, a Mesopotâmia e seus diversos povos deixaram um legado cultural e tecnológico que perdurou por milênios e até hoje vem perdurando, demonstrando a importância duradoura de suas contribuições para o progresso da humanidade.

2.3. Sociedade mesopotâmica

Segundo Kriwaczek (2018, p. 105), “os principais centros populacionais da planície do Tigre e do Eufrates nasceram lutando entre si”. Não é de se estranhar a imaginação de que as cidades sumérias travavam esse tipo de guerra para impor seu poder sobre aquela região e para garantir acesso aos locais mais férteis. Dessa maneira, tais conflitos que remete à boa parte do terceiro milênio a.E.C., ocasionou em destruição de cidades inteiras e massacres às suas populações. Porém, os disputadores sentiam orgulho da cultura compartilhada em prol da superioridade da Suméria.

Vale ressaltar que as primeiras cidades surgiram sob o modelo de cidades-estado. Essas, caracterizadas por constituir unidades distintas e autônomas em relação às outras. Esse modelo, de acordo com Eves (2004, p. 54), “foi a forma de governo mais comum na infância da civilização, consistia em uma única cidade ou vila e a zona rural que a cercava”.

Entre 2276 e 2221 a.E.C. (reinado de Sargão I), os povos acadianos conquistaram as principais cidades sumérias e unificaram o vale dos rios Tigre e Eufrates num império que, segundo Eves (2004), após a morte de Sargão I, essa unificação foi fragmentada e o termo somente veio a surgir permanentemente quando os invasores amoritas conquistaram o vale em aproximadamente 2000 a.E.C. Esse autor ainda completa afirmando que nessa época,

> Os amoritas fundaram a cidade de Babilônia e dela governaram um grande império que durou um milênio, até que os assírios conquistassem a região entre os dois rios. Os assírios, por sua vez, foram derrotados por uma revolta ocorrida proximamente ao ano 600 a.C., tendo os rebeldes criado o império caldeu ou neobabilônico. (EVES, 2004, p. 55).

Esses e os demais povos que habitaram aquela região deram início ao que se conhece hoje como sociedade mesopotâmica com cultura, economia, política, religião e organização social. Deste modo, vale destacar que os povos que conquistavam a Mesopotâmia levantavam-se em classe governante e adotavam para si os costumes e modos dos povos derrotados (EVES, 2004). Carvalho (2017) também dispõe do mesmo argumento ao falar dos Assírios, Babilônios e Persas.

Assim, a sociedade mesopotâmica era dividida em castas, ou seja, não era permitida a mobilidade social. Eves (2004) argumenta que o conforto material e a riqueza se concentravam nas mãos da classe superior que, por sua vez, era constituída de senhores, sacerdotes e guerreiros, mercadores e artífices. Esta classe encontrava-se no pódio (topo da pirâmide social). Abaixo dela encontrava-se a classe constituída por membros independentes que de acordo com Kriwaczek (2018, p. 115), "podiam se dar ao luxo de pagar a terceiros para fazer seu trabalho agrícola". Assim, poderia desfrutar da sua riqueza e elaborar novas maneiras de aumentá-la. Vale destacar que os "terceiros" mencionados pelo autor correspondiam aos lavradores pobres.

> Abaixo ainda dos agricultores na escala social estavam os escravos, geralmente vítimas das guerras de conquista e as mulheres que, com poucas exceções, eram tratadas apenas como trabalhadoras e geradoras de crianças e não tinham nenhuma oportunidade de se alçarem intelectualmente. (EVES, 2004, p. 55).

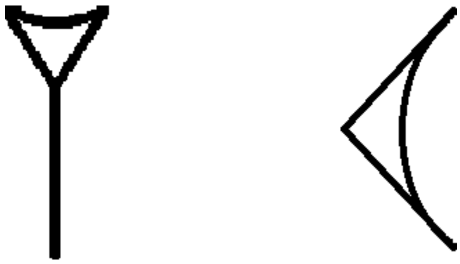
Dessa maneira, essas sociedades eram sustentadas pela maioria da população constituída de lavradores pobres, escravos e mulheres trabalhadoras.

3. O SISTEMA DE NUMERAÇÃO CUNEIFORME

Hoje conhecemos o sistema de numeração cuneiforme e da matemática na Mesopotâmia, mas segundo Aaboe (2013, p. 1), “até bem pouco tempo não sabíamos muito e o pouco que sabíamos era somente por intermédio de referências esparsas, na literatura grega clássica, aos matemáticos e astrônomos caldeus”.

Diferentemente do sistema de numeração decimal (Indo-Arábico) constituído por um conjunto de dez símbolos (0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e baseado no número 10, o sistema de numeração cuneiforme era baseado no número 60 (sistema sexagesimal) e constituído apenas por um conjunto de dois símbolos em que Aaboe (2013) denota-os por cunha vertical e cunha angular como indicados na **figura 6**.

Figura 6 - Cunha vertical e cunha angular



Fonte: Autor[7]

Assim como no sistema de numeração decimal, no sistema de numeração sexagesimal os números eram representados pela combinação dos símbolos de forma posicional.

Mas há ainda outro detalhe importante entre esses dois sistemas. Eves (2004, p. 36), argumenta que,

> O sistema de numeração babilônico é, porém, misto, na medida em que, embora os números superiores a 60 fossem escritos de acordo com o princípio posicional, os 60 números correspondentes ao grupo básico eram escritos nos moldes de um sistema de agrupamento simples decimal [...].

Nota-se aí que os 59 primeiros números da sequência simples e positiva consistiam em agrupamentos de 10 unidades. Outros autores como Roque (2012) também defende o mesmo argumento. Na subseção 3.1 detalharemos a fundo o conceito de valor posicional e dos símbolos.

[7] Imagem produzida conforme descrito por Roque et al (2012).

“A origem do sistema sexagesimal não pode ser definida com certeza.” (AABOE, 2013, p. 19).

Mas Aaboe (2013, p. 20) acredita que,

> O fato de que o número 60 desempenhou o papel importante talvez esteja relacionado com o fato de que a principal unidade de peso de prata – o *mana* – estava subdividida em 60 *shekels*. Isso pode ter dado impulso à preferência dos sessenta avos como subdivisões naturais das unidades, por um lado – e daí as frações sexagesimais – e por outro, à preferência geral por 60.

Apesar das hipóteses, ainda fica uma interrogação a respeito de seu surgimento. Cabendo-nos apenas apreciar a sua beleza extraordinária.

Tomando que o sistema de numeração sexagesimal possui uma base fixa e por ser posicional, então se enquadra no seguinte modelo: “$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$”. (EVES, 2004, p. 42).

onde $0 \leq a_i < b$ e $i = 0, 1, 2, \ldots n$, com n natural.

Dessa forma, N pode ser escrito de maneira única na base b pela sequência de símbolos a seguir:

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$

Assim, esse sistema de numeração pode ser entendido da seguinte maneira:

$$N = a_n * 60^n + a_{n-1} * 60^{n-1} + \cdots + a_2 * 60^2 + a_1 * 60^1 + a_0 * 60^0$$

onde $0 \leq a_i < 60$ e $i = 0, 1, 2, \ldots n$ com n natural.

Dessa forma, N pode ser escrito de maneira única na base 60 pela sequência de símbolos a seguir.

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$

Entendido esse modelo, pode-se escrever qualquer número inteiro positivo na base 60 de maneira única. Como por exemplo, vamos converter 500.000, 216.000, 10.000, 3.601 e 216.059 da base decimal para a base sexagesimal.

- $500.000 = 2 * 60^3 + 18 * 60^2 + 53 * 60^1 + 20 * 60^0$
- $216.000 = 1 * 60^3 + 0 * 60^2 + 0 * 60^1 + 0 * 60^0$
- $10.000 = 2 * 60^2 + 46 * 60^1 + 40 * 60^0$
- $3.601 = 1 * 60^2 + 0 * 60^1 + 1 * 60^0$

- $216.050 = 1 * 60^3 + 0 * 60^2 + 0 * 60^1 + 59 * 60^0$

Observe que os números 500.000, 216.000, 10.000, 3.601 e 216.059 são escritos da forma (2, 18, 53, 20), (1, 0, 0, 0), (2, 46, 40), (1, 0, 1) e (1, 0, 0, 59) na base 60. Vale ressaltar aqui que essa combinação em que os números são separados por vírgulas equivale à notação usada por Eves (2004) e Aaboe (2013).

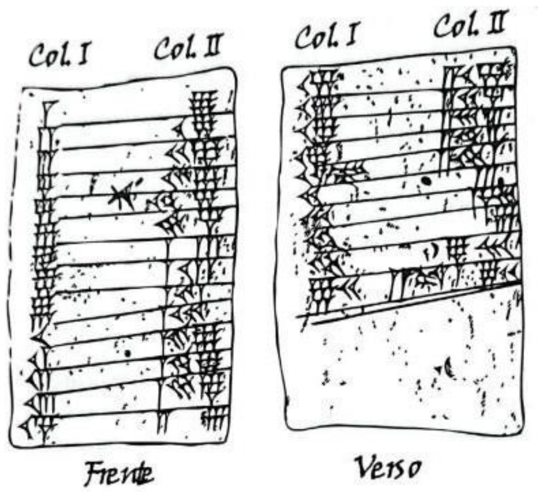
Na próxima seção vamos entender como esse sistema funcionava com os símbolos cuneiformes.

3.1. Desvendando a estrutura do sistema cuneiforme segundo Asger Aaboe

Iniciamos essa subseção considerando a **figura 7** (disposta na subseção 1.2 de Aaboe (2013)). Nela temos uma representação do anverso e do verso de um antigo tablete de argila.

Por meio dessa figura o autor tenta mostrar como os estudiosos desvendaram a estrutura do sistema de numeração cuneiforme e sua relação com a base sexagesimal sem nenhum conhecimento prévio.

Figura 7 - Tabela de multiplicação por 9



Fonte: Aaboe (2013, p. 4)

O autor inicia tomando um tablete babilônico com os respectivos lados: anverso e verso, representando duas colunas (I e II) com caracteres cuneiformes. No anverso do tablete, na coluna I (à esquerda), têm-se as nove primeiras linhas representadas por um tipo de símbolo que ele denota por “cunha vertical”, sendo uma na primeira linha, duas na segunda e assim por diante até as nove na nona linha. Naturalmente, é fácil interpretar essa sequência como sendo

1, 2, ..., 8 e 9 no nosso sistema sem perda de generalidade, visto que cada um desses valores equivale a quantidade de cunhas verticais em cada linha.

A partir da decima linha encontra-se um símbolo diferente que o autor denota por "cunha angular" que, por sua vez, pode ser facilmente interpretada como símbolo que representa o conjunto de 10 cunhas verticais. Isso porque se observar com atenção, as próximas oito linhas (agora, envolvendo o verso do tablete) não apresentam dificuldades, visto que já se tem, por hipótese, o conhecimento dos símbolos decifrados de 1 a 8. Dessa forma, as linhas que estão sendo argumentadas são compostas por uma cunha angular seguidas da sequência de cunhas verticais de 1 a 8. Facilmente interpretadas representando 11, 12, ..., 17 e 18.

A decima nona linha, o autor desconsidera devido que existe a presença de símbolos especiais e marcas apagadas. Além disso, a organização dos símbolos empregados, não condiz com a hipótese que se tem até então. Pela hipótese, o número 19 deveria ser escrito por uma cunha angular seguida de nove cunhas verticais como veremos na **figura 8** mais à frente.

Finalizando a coluna I, no verso do tablete, tem-se a sequência de duas, três, quatro e cinco cunhas angulares que, pela hipótese, representam facilmente os números 20, 30, 40 e 50. O autor também desconsidera a última linha (vigésima quarta), pois até então concordamos que não temos tanto conhecimento e nem domínio do sistema para interpretá-la. É fácil perceber quando já o conhecemos, mas vamos por parte seguindo o argumento do autor.

Aceitando a ideia de que o sistema cuneiforme é composto apenas por dois símbolos, sendo a cunha vertical equivalente a 1 unidade e a cunha angular equivalente o conjunto de 10 cunhas verticais, podemos formar todos os números de 1 a 59 nesse sistema como indicado na **figura 8**.

Figura 8 - Tabela de números babilônicos

Fonte: Roque (2012, p. 49)

Entendendo que a coluna II da tabela de multiplicação corresponde aos 20 primeiros números inteiros seguidos dos números 30, 40 e 50. Agora, todo conhecimento adquirido pode ser aplicado na coluna II.

No anverso do tablete é possível identificar facilmente que as seis primeiras linhas correspondem aos números 9, 18, 27, 36, 45 e 54. Nesse momento, o autor faz uma reflexão de que esse tablete representa uma tabela de multiplicação por 9. Assim, a sétima linha deveria corresponder ao número 63, mas se depara com uma cunha vertical seguida de mais três cunhas verticais um pouco mais à direita. Ora! Não faz sentido interpretar essa primeira cunha vertical como sendo 1 e sim, como sendo 60, concordando então com o padrão da sequência e também com a hipótese em questão. Assim, o autor denota como sendo:

$$1,3 = 1 * 60 + 3$$

Respeitando o fato de que o número 3 exposto no segundo membro da igualdade representa $3 * 60^0$. Seguindo essa mesma ideia, nota-se que é verídica para as próximas linhas, até mesmo a decima nona linha se considerar o número 19 escrito na forma da hipótese trabalhada (uma cunha angular seguida de nove cunhas verticais conforme visto na **figura 8**). Porém, nas linhas vigésima e vigésima segunda que, por sua vez, correspondem a $20 * 9$ e $40 * 9$, o autor nota que há apenas três e seis cunhas verticais que, consequentemente deverão representar 180 e 360.

Note que os números 180 e 360 seriam facilmente identificados seguindo a ideia anterior, pois teríamos:

$$3,0 = 3 * 60 + 0$$

$$6,0 = 6 * 60 + 0$$

Mas, pela escrita cuneiforme até então estudada, não há um símbolo que representa a posição zero, principalmente, ao final de um número.

Dessa forma, o autor diz somos forçados a acreditar que os babilônios (o termo “babilônio” engloba toda a região da Mesopotâmia como também os povos que habitaram nela) não usavam nenhum símbolo para esse quesito. Há aí uma pequena falha no nesse sistema. Nesse caso, a questão de distinção de números, pois a depender do contexto, por exemplo, o 𒐈 $= 180$ poderia ser facilmente confundido com o 𒐈 $= 3$. De forma análoga, o 360 poderia ser confundido com o 6 e, em diversos casos a ausência de um símbolo para representar a posição zero (não só ao final de um número, mas também entre os algarismos), faz com que o sistema deixe um pouco a desejar, pois fica a cargo do leitor interpretar qual o verdadeiro número como veremos a seguir ainda nessa seção.

Voltando e finalizando a tabela de multiplicação, as próximas duas linhas que representam os números 30 e 50 respeitam perfeitamente a hipótese.

$$4,30 = 4 * 60 + 30 \Rightarrow 30 * 9 = 270$$

$$7,30 = 7 * 60 + 30 \Rightarrow 50 * 9 = 450$$

Portanto, é nesse momento que se passa a entender que o texto faz todo sentido e que o sistema cuneiforme é posicional. Além disso, à medida que os algarismos se encontram à esquerda, seu valor é multiplicado por 60. O que lhe dá o nome de sistema de numeração sexagesimal posicional.

O autor ainda instiga a analisar em outros textos como o da **figura 7,** que a hipótese também será totalmente verificada. Observemos nas **figuras 9** e **10** (especialmente na **figura 9**) outro texto babilônico. Na **figura 9** é apresentado o tablete proveniente de Nipur com a tabela de multiplicação por 45 em que ele suspeita ter sido escrito por um aluno mais avançado.

Figura 9 - Tabela de multiplicação por 45

Fonte: Aaboe (2013, p. 10)

Na **figura 10** ele faz a conversão do cuneiforme para a representação sexagesimal convencional, após argumentar:

> A tábua do lado esquerdo está transcrita abaixo (os colchetes na transcrição significam simplesmente que reconstruí o que se encontra em seu interior); o grupo de cunhas que significa *a – rá* (vezes) termina por uma cunha vertical que nas últimas linhas poderia ser confundida com 1. A segunda linha contém um erro (2,30 em vez de 1,30). (AABOE, 2013, p. 10).

Figura 10 - Tabela de multiplicação por 45, convertida do sistema cuneiforme para a representação convencional

$45a - r\acute{a}$ 1	45	$[a - r\acute{a}$ 6]	4, 30	$[a-]r\acute{a}$ 12	9
$[a - r\acute{a}$ 2]	1, 30	$[a - r\acute{a}$ 7]	5, 15	$[a-]r\acute{a}$ 13	9, 45
$[a - r\acute{a}]$ 3	2, 15	$[a - r\acute{a}]$ 8	6	$[a-]r\acute{a}$ 14	10, 30
$[a - r\acute{a}$ 4]	3	$[a - r\acute{a}]$ 9	6, 45	$[a-]r\acute{a}$ 15	11, 15
$[a - r\acute{a}$ 5]	3, 45	$[a - r\acute{a}]$ 10	7, 30	$[a-]r\acute{a}$ 16	1[2]
		$[a - r]\acute{a}$ 11	8, 15		

Fonte: Aaboe (2013, p. 11)

Finalizando a análise da tabela de multiplicação por 9, para a coluna I, já temos o conhecimento e domínio para interpretá-la como correspondendo a $8,20$.

$$8,20 = 8 * (60)^1 + 20 \Rightarrow 500$$

Isso se desconsiderarmos qualquer possibilidade de existência de alguma coluna vazia ao final do possível número. Já para a coluna II, o autor interpreta como sendo 8, 20 vezes a 1

= 8, 20. Porém, em relação à linha, orienta dizendo: “chamaríamos de uma *linha de transição*. Nosso texto faz parte de uma série e a linha de transição é a primeira linha do próximo texto”. (AABOE, 2013, p. 8).

Em resumo, todo conhecimento adquirido até o momento em relação ao sistema trabalhado deve ser concentrado na ideia de que ele é constituído apenas por dois símbolos e também, que os babilônios não usavam nenhum símbolo para representar a posição zero. É importante frisar que através dos números 1 aos 59 escritos como combinações de cunhas angulares e verticais expostos na **figura 8** são formados todos os outros números na base sexagesimal de maneira que, a cada vez que um algarismo se move para a esquerda o seu valor será multiplicado por 60.

Agora, analisaremos os cinco quadros seguintes para entendermos de forma clara o que o autor tentou nos mostrar até o momento.

Quadro 1 - Como funciona o sistema de numeração cuneiforme

Sistema de numeração Cuneiforme					
Agrupamentos sexagesimais					**Agrupamento simples decimal**
nª Ordem	**...**	**4ª Ordem**	**3ª Ordem**	**2ª Ordem**	**1ª Ordem**
$*\ \mathbf{60^n}$	**...**	$*\ \mathbf{60^3}$	$*\ \mathbf{60^2}$	$*\ \mathbf{60^1}$	$*\ \mathbf{60^0}$

Fonte: Autor

Observemos que esse quadro foi dividido em duas classes de agrupamentos conforme temos o conhecimento. Dessa maneira, a classe de agrupamentos simples abrange apenas a 1ª ordem. Já a classe dos agrupamentos sexagesimais abrange todas as ordens desde a 2ª até a nª.

Assim como no sistema de numeração decimal as ordens funcionam para dividir os agrupamentos. Logo, a linha 4 desse quadro representa exatamente o mesmo modelo apresentado no início dessa seção.

$$N = a_n * 60^n + a_{n-1} * 60^{n-1} + \cdots + a_2 * 60^2 + a_1 * 60^1 + a_0 * 60^0$$

No quadro 2 vamos entender na prática como funciona a divisão das ordens na base 60 seguindo a ideia do autor.

Quadro 2 - Representação dos números na base 60

<table>
<tr><th rowspan="4">Número na base decimal</th><th colspan="6">Sistema de numeração Cuneiforme</th></tr>
<tr><th colspan="5">Agrupamentos sexagesimais</th><th>Agrupamento sexagesimal</th></tr>
<tr><th>nª Ordem</th><th>...</th><th>4ª Ordem</th><th>3ª Ordem</th><th>2ª Ordem</th><th>1ª Ordem</th></tr>
<tr><th>$* 60^n$</th><th>...</th><th>$* 60^3$</th><th>$* 60^2$</th><th>$* 60^1$</th><th>$* 60^0$</th></tr>
<tr><td>9.690</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>41</td><td>30</td></tr>
<tr><td>78.543</td><td></td><td></td><td></td><td>21</td><td>49</td><td>3</td></tr>
<tr><td>136.842</td><td></td><td></td><td></td><td>38</td><td>0</td><td>42</td></tr>
<tr><td>1.000.000</td><td></td><td></td><td>4</td><td>37</td><td>46</td><td>40</td></tr>
<tr><td>3.670.420</td><td></td><td></td><td>16</td><td>59</td><td>33</td><td>40</td></tr>
</table>

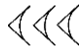
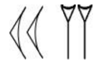
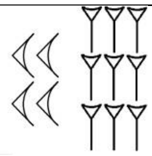
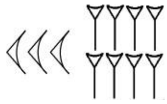
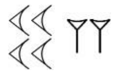
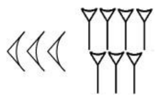
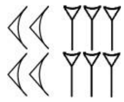
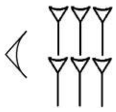
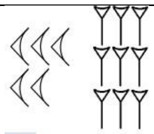
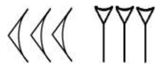
Fonte: Autor

Vejamos aqui que foram trabalhados alguns números na base decimal e convertido para a base sexagesimal. Dessa forma, jogando no modelo, temos:

- $9.690 = 2 * 60^2 + 41 * 60^1 + 30 * 60^0$ ➔ 2, 41, 30
- $78.543 = 21 * 60^2 + 49 * 60^1 + 3 * 60^0$ ➔ 21, 49, 3
- $136.842 = 38 * 60^2 + 0 * 60^1 + 42 * 60^0$ ➔ 38, 0, 42
- $1.000.000 = 4 * 60^3 + 37 * 60^2 + 46 * 60^1 + 40 * 60^0$ ➔ 4, 37, 46, 40
- $3.670.420 = 16 * 60^3 + 59 * 60^2 + 33 * 60^1 + 40 * 60^0$ ➔ 16, 59, 33, 40

No quadro 3 trabalhamos a mesma ideia e números do quadro 2. O que diferencia é que nela foram usados os símbolos cuneiformes para compreendermos como os babilônios os escreviam.

Quadro 3 - Representação dos números no sistema cuneiforme

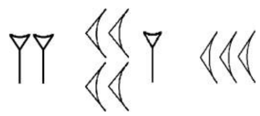
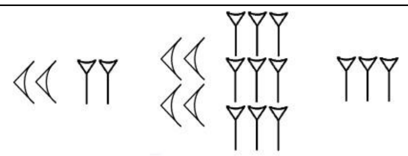
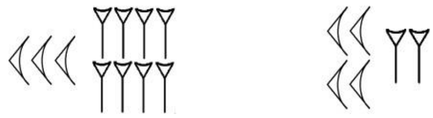
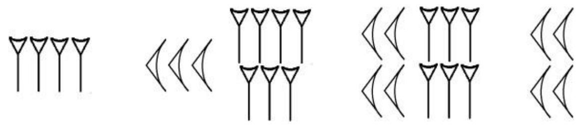
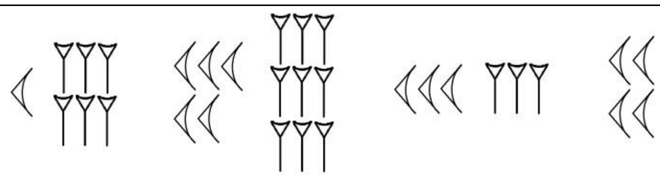
Número na base decimal	Sistema de numeração Cuneiforme					
	Agrupamentos sexagesimais					Agrupamento sexagesimal
	nª Ordem	...	4ª Ordem	3ª Ordem	2ª Ordem	1ª Ordem
	$* 60^n$	...	$* 60^3$	$* 60^2$	$* 60^1$	$* 60^0$
9.690						
78.543						
136.842						
1.000.000						
3.670.420						

Fonte: Autor

Se repararmos bem, os algarismos foram substituídos pelas combinações de símbolos cuneiformes.

No quadro seguinte (quadro 4), fizemos um resumo e organizamos as representações dos números cuneiformes para finalizar o processo e compreender como esses números aparecem nos textos.

Quadro 4 - Resumo das representações dos números no sistema sexagesimal

Número na base decimal	Representação na base 60	Representação cuneiforme
9.690	2, 41, 30	
78.543	21, 49, 3	
136.842	38,0,42	
1.000.000	4, 37, 46, 40	
3.670.420	16, 59, 33, 40	

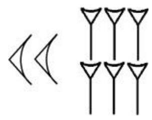
Fonte: Autor

Nesse quadro foi feito o resumo geral dos dois últimos quadros. Onde na primeira coluna foram usados os mesmos números na base decimal, na segunda coluna sua representação conforme a ideia de Aaboe (2013) e na terceira coluna a representação desses números no sistema cuneiforme.

Observando agora o quadro 3, vemos que a linha correspondente ao número 136.842 contém a coluna de ordem 2 vazia. Essa é uma consequência da ausência de um símbolo para representar a posição zero, pois no quadro dá pra identificar essa ausência, mas nos textos ela não é percebida tão facilmente. Por exemplo, no quadro 4 foi deixado um pequeno espaço entre os algarismos para percebermos, mas segundo Aaboe (2013), nem sempre os babilônios deixavam espaço para representar essa posição. Outros autores como Kriwaczek (2018) e Roque (2012) também defendem esse mesmo argumento.

Dessa forma, podemos entender a partir do quadro abaixo que, em representação cuneiforme, um mesmo algarismo poderia representar diferentes números devido à ausência de um símbolo para representar a posição zero ou uma coluna vazia dentro do sistema.

Quadro 5 - Problema da ausência do zero

Representação cuneiforme	**Leitura dos símbolos no sistema decimal**	**Representação no sistema sexagesimal**	**Representação no sistema decimal**
	26	$26 * 60^0$	26
	20,0,6	$20 * 60^2 + 0 * 60^1 + 6 * 60^0$	72.006
	20,6,0	$20 * 60^2 + 6 * 60^1 + 0 * 60^0$	72.360
	20,0,0,6	$20 * 60^3 + 0 * 60^2 + 0 * 60^1 + 6 * 60^0$	4.320.006

Fonte: Autor

Analisando o quadro, percebemos, de fato, que somente era capaz de diferenciar números através do contexto. Porém, Kriwaczek (2018, p. 249), além de defender o argumento anterior ainda afirma que "os mesopotâmicos acabaram criando uma forma de marcar um espaço num número, porém só muito mais tarde, talvez por volta de 700 a.C. E ela não podia ser usada no fim dos números", ou seja, não podia servir como último algarismo. Aaboe (2013) defende o mesmo argumento devido às descobertas e análises dos tabletes de argila dos textos mais recentes. Na próxima subseção (subseção 3.2 que será trabalhado o sistema cuneiforme segundo o trabalho de Tatiane Roque – História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas), conheceremos esse símbolo tão esperado, usado para, pelo menos, eliminar uma parte do problema dentro do sistema sexagesimal.

Assim, tendo esclarecido o que Aaboe (2013) mostrou até então a respeito do sistema cuneiforme, em particular, aos números inteiros. Podemos avançar a concepção de que esse sistema também atendia a necessidade dos números fracionários (racionais) em sua base correspondente. O autor trabalha nesse modelo através da tabela de recíprocos como veremos na **figura 11**.

Figura 11 - Tabela de recíprocos

Col. I	Col. II	Col. I	Col. II	Col. I	Col. II
2	30	16	3,45	45	1,20
3	20	18	3,20	48	1,15
4	15	20	3	50	1,12
5	12	24	2,30	54	1, 6 ,40
6	10	25	2,24	1	1
8	7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9	6,40	30	2	1,12	50
10	6	32	1,52,30	1,15	48
12	5	36	1,40	1,20	45
15	4	40	1,30	1,21	44,26,40

Fonte: Aaboe (2013, p. 8)

De início, a tabela dá indícios de que o produto da Col I pela Col II resulta sempre em uma potência de 60, ou seja, em outras palavras 60^n, com n inteiro positivo. Como o autor explicita,

> $2 * 30 = 60 = 1,0$
> $3 * 20 = 60 = 1,0$
> $4 * 15 = 60 = 1,0$
> $5 * 12 = 60 = 1,0$
> $6 * 10 = 60 = 1,0$
> $8 * 7,30 = 60^2 = 1,0,0$
> $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$.. (AABOE, 2013, p. 9).

Importante entender como funciona a sexta linha da tabela para nos assegurarmos de que os cálculos das demais linhas semelhantes estejam de acordo com o pensamento inicial da multiplicação. Assim,

$$8 * 7,30 \rightarrow 8 * [7 * 60 + 30] \rightarrow 8 * [420 + 30] \rightarrow 8 * 450 \rightarrow 3.600$$

Ora! $3.600 = 1 * 60^2 + 0 * 60 + 0$. Portanto, $1,0,0$.

Verifiquemos agora a décima oitava linha que, seguindo o mesmo pensamento, corresponde ao produto $32 * 1,52,30$. Dessa forma, temos:

$$32 * [1 * 60^2 + 52 * 60 + 30] \rightarrow 32 * [3.600 + 3.120 + 30] \rightarrow 32 * 6.750 \rightarrow$$

$$\rightarrow 216.000$$

Mas, $216.000 = 1 * 60^3 + 0 * 60^2 + 0 * 60 + 0$. Portanto, $1,0,0,0$.

De modo análogo, o raciocínio satisfaz todas as linhas da tabela. Como justificativa para a interpretação inicial da tabela, o autor salienta a fatoração, em primos, do número 60 ($2^2 * 3 * 5$) e consequentemente de uma potência do mesmo ($2^{2n} * 3^n * 5^n$).

> Se um inteiro contém um fator primo distinto de 2, 3, e 5, não pode dividir uma potência de 60. (4) Por outro lado, se não contém primos além de 2, 3 ou 5, podemos seguramente achar uma potência de 60 que ele dividirá. (AABOE, 2013, p. 9).

Com base nessas palavras, fica explicado então o porquê da ausência dos números primos 7, 11, 13, etc., e seus respectivos múltiplos na tabela da **figura 11**.

Mas, pelo fato de que todas as potências de 60 eram representadas por uma cunha vertical na Mesopotâmia, a primeira interpretação da tabela, praticamente, cai por terra. Isso visto que, como já aprendemos os mesopotâmicos não usavam nenhum símbolo para representar uma coluna vazia ao final do número. Então, o produto dos números da Col I pela

Col II não mais resulta em potências distintas de 60, mas sim, resulta sempre em uma cunha vertical.

Desse modo, podemos interpretar os números da Col II como sendo recíprocos correspondentes dos números da Col I. O autor argumenta a sexta linha da tabela. Vejamos então, a reprodução da mesma ideia para a sétima linha:

$$9 * 6{,}40 = 60^2$$

$$9 * [6 * (60) + 40] = 60^2$$

$$\frac{6 * (60) + 40}{60^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{6}{60} + \frac{40}{60^2} = \frac{1}{9}$$

Portanto, o que interpretaríamos como $6{,}40 = 6 * (60) + 40$, agora é interpretado como $\frac{6}{60} + \frac{40}{60^2}$ que, por sua vez, corresponde ao recíproco do número 9. Da mesma forma ocorre para todas as outras linhas, seguindo a mesma ideia.

Vale destacar aqui, que o sistema sexagesimal continua sendo posicional, pois da mesma maneira que a cada vez que o algarismo é movimentado para a esquerda o seu valor é aumentado 60 vezes, a cada vez que o algarismo é movimentado para a direita o seu valor é dividido por 60. Segundo Aaboe (2013), essa novidade gera uma nova consequência, visto que qualquer número, agora poderia significar uma multiplicação por 60^k onde k pode representar qualquer número seja positivo, negativo ou mesmo zero. Quando k for negativo, o número corresponde a uma fração assim como no nosso sistema decimal.

Vale ressaltar que o autor usa o símbolo de vírgula (“,”) como separador de algarismos tanto dentro da parte inteira quanto da parte fracionária. Enquanto que para separar a parte inteira da parte fracionária ele usa o símbolo de ponto e vírgula (“;”). Vejamos dois exemplos:

$$32,45;40{,}12 = 32 * 60 + 45 + \frac{40}{60} + \frac{12}{60^2} = 1.965\ \frac{67}{100},$$

$$32;45{,}40 = 32 + \frac{45}{60} + \frac{40}{60^2} = 32\ \frac{137}{180}.$$

Para finalizar, vamos voltar aos números primos 7, 11, 13 etc. e seus múltiplos e entender, pela última interpretação da tabela da **figura 11**, a ausência deles. De modo geral, todos os números que estão representados lá possuem recíprocos com representações sexagesimais finitos. O que não acontece com esses ausentes. Roque (2012) faz uma demonstração para o recíproco do número 7.

> Um número $\frac{1}{K}$ (entre 0 e 1) tem representação finita em base 60 se pode ser escrito como $\frac{1}{K} = 0, a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{a_1}{60} + \frac{a_2}{60^2} + \cdots + \frac{a_n}{60^n}$. Multiplicando e dividindo todas as parcelas por 60^n, temos $\frac{1}{K} = \frac{(a_1 60^{n-1} + a_2 60^{n-2} + \cdots + a_n 60^0)}{60^n} = \frac{a}{60^n}$, onde o numerador é um inteiro. Decompondo o denominador 60^n em números primos, encontramos os fatores 2, 3 e 5. Logo, para que o inverso de um número tenha representação finita em base 60 é preciso que esse número contenha apenas esses fatores primos. No caso do 7, se o seu inverso tivesse representação finita em base 60 teríamos de ter $\frac{1}{7} = \frac{a}{60^n}$, ou seja, $7a = 60^n$. Mas isso não pode acontecer, uma vez que 7 não é fator de 60. (ROQUE, 2012, p. 60).

O raciocínio permanece análogo tanto para o número 11 quanto para todos os números primos (maiores ou iguais a 7) seguidos de seus respectivos múltiplos.

3.2. Sistema cuneiforme segundo Tatiane Roque

Nesta seção seremos um pouco mais direto, visto que já temos uma bagagem de conhecimentos do sistema de numeração babilônico preenchida na seção anterior com os trabalhos de Aaboe (2013), como também pelo fato de repetição de argumentos em relação às definições dentro do sistema. Nesse caso, é importante frisar que não diminuiremos a obra em questão, apenas trabalharemos nos pontos em que não foram trabalhados ainda e também complementaremos algum(uns) ponto(s) pendente(s).

Assim, aqui, em especial, enfatizaremos Roque (2012), obviamente, no que diz respeito ao sistema de numeração sexagesimal posicional.

A autora já inicia fazendo um importante comentário de que:

> A maioria dos tabletes cuneiformes de que temos notícia são do período em torno do ano 1700 a.E.C., quando a matemática já parecia bastante desenvolvida. O sistema sexagesimal era usado de modo sistemático em textos matemáticos ou astronômicos, mas, ao se referirem a medidas de volume ou de áreas, mesclavam vários sistemas distintos. (ROQUE, 2012, p. 49).

Notemos nas palavras dela que os babilônios possuíam mais de um sistema de numeração. Porém voltaremos a nossa atenção para o sistema sexagesimal.

Roque concorda que o sistema é posicional e que possui dois símbolos. Em seu livro ela traz uma tabela semelhante à da **figura 8** com os números de 1 a 60 em representação cuneiforme e que a combinação desses algarismos forma todos os números. Por ser um sistema que tinha o número 60 como base, então à medida que os algarismos se encontravam à esquerda, eram multiplicados por 60.

Ela traz a generalização do modelo de representação de qualquer sistema em uma base fixa como o que já foi visto anteriormente, acrescido da parte fracionária. "$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \cdots + a_{-m} b^{-m} + \cdots$". (ROQUE, 2012, p.51).

onde $0 \leq a_i < b$ e $i \in \mathbb{Z}$

A autora argumenta que $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_0 b^0$ representa a parte inteira do número N, enquanto que $a_{-1} b^{-1} + \cdots + a_{-m} b^{-m} + \cdots$ representa a parte fracionária. Dessa forma, qualquer número N pode ser escrito de maneira única na base b pela sequência de símbolos a seguir.

$a_n \; a_{n-1} \; \ldots \; a_1 \; a_0, a_{-1} \; \ldots \; a_{-m} \; \ldots$

Note que parte inteira do número é separada da parte fracionária por uma vírgula. A autora ainda alerta que as reticencias ao final do número correspondem ao fato de que o número pode não ser necessariamente finito como é o caso das dizimas periódicas.

Convertendo esse modelo para a base sexagesimal como foi feito no início dessa seção, temos:

$$N = a_n * 60^n + a_{n-1} * 60^{n-1} + \cdots + a_0 * 60^0 + a_{-1} * 60^{-1} + \cdots + a_{-m} * 60^{-m} + \cdots$$

onde $0 \leq a_i < 60$ e $i \in \mathbb{Z}$

Para essa conversão a autora usa o símbolo de ponto-e-vírgula (";") como separador de algarismos tanto dentro da parte inteira quanto da parte fracionária. Enquanto que para separar a parte inteira da parte fracionária ela usa o símbolo de vírgula (","). Importante relembrar que a maneira de usar esses símbolos é semelhante à de Aaboe (2013), mas como vimos na seção anterior, o autor usa o símbolo de vírgula como separador de algarismos tanto dentro da parte inteira quanto da parte fracionária. Já para separar a parte inteira da parte fracionária ele usa o símbolo de ponto-e-vírgula.

Assim, qualquer número N pode ser escrito de maneira única na base 60 pela sequência de símbolos a seguir:

$a_n; \; a_{n-1}; \; \ldots \; ; \; a_1; \;\; a_0, \; a_{-1}; \; \ldots \; ; \; a_{-m}; \;\; \ldots$

Vejamos alguns exemplos da conversão de números da base decimal para a base sexagesimal seguindo o modelo geral do sistema.

- $432.000{,}1 = 2 * 60^3 + 0 * 60^2 + 0 * 60^1 + 0 * 60^0 + 6 * 60^{-1}$
- $61{,}090463 = 1 * 60^1 + 1 * 60^0 + 5 * 60^{-1} + 25 * 60^{-2} + 40 * 60^{-3}$
- $5{,}050555 \ldots = 5 * 60^0 + 3 * 60^{-1} + 2 * 60^{-2}$
- $600{,}0336111 = 10 * 60^1 + 0 * 60^0 + 2 * 60^{-1} + 1 * 60^{-2}$
- $128.456{,}3075 = 35 * 60^2 + 40 * 60^1 + 56 * 60^0 + 18 * 60^{-1} + 27 * 60^{-2}$

Observe que os números decimais 432.000,1, 61,090463, 5,050555…, 600,0336111 e 128.456,3075, são escritos da forma (2; 0; 0; 0, 6), (1; 1, 5; 25; 40), (5, 3; 2), (10; 0, 2; 1), (35; 40; 56, 18; 27) na base sexagesimal.

Roque (2012) argumenta sobre as ambiguidades geradas por conta de o sistema possuir apenas dois símbolos e também pela ausência do zero ou símbolo para representar a coluna vazia dentro do sistema.

O fato de um mesmo algarismo cuneiforme representar diferentes números – Quadro 5 – sem dúvida é um problema em que a autora concorda com Aaboe (2013) e Kriwaczek (2018) que esses números somente poderiam ser diferenciados através do contexto e enfatiza que esse problema se torna ainda maior quando se trata da coluna vazia ao final do número, pois, pelo fato de algumas vezes os babilônios deixarem espaços entre os algarismos representando as colunas vazias, o mesmo não acontecia ao final do número. Vejamos a tabela 6.

Quadro 6 - Problema da ausência do zero ao final do número

Representação cuneiforme	**Representação no sistema decimal**	**Representação no sistema sexagesimal**	**Leitura dos símbolos no sistema decimal**
	1	$1 * 60^0$	1
	60	$1 * 60 + 0 * 60^0$	1; 0
	3.600	$1 * 60^2 + 0 * 60 + 0 * 60^0$	1; 0; 0
	216.000	$1 * 60^3 + 0 * 60^2 + 0 * 60 + 0 * 60^0$	1; 0; 0; 0

Fonte: Autor

Observando o quadro fica claro o argumento apresentado pela autora em relação aos números com as colunas finais vazias.

Roque (2012) ainda vai além sobre a ambiguidade do sistema cuneiforme por possuir apenas dois símbolos. Ao que diz respeito aos números fracionários, os babilônios não empregavam nenhum símbolo especial para que tornasse visível a diferença entre a parte inteira e a fracionária, os seja, segundo a autora, o algarismo 5 em cuneiforme poderia representar o número 5 decimal, o $5 * 60^{-1}$, o $5 * 60^{-2}$ e assim segue sucessivamente tanto para a parte inteira quanto para a parte fracionária.

Apesar da ambiguidade em relação à ausência do zero, Roque (2012) explica que possivelmente ela não fosse sentida visto que os babilônios, pelo contexto, já soubessem antecipadamente se o número era inteiro ou fracionário.

Finalmente, no segundo período babilônico que, segundo Roque (2012), ocorreu por volta do ano 300 a.E.C, predominava na Babilônia o império selêucida (Império que se estabeleceu ali por volta do ano 312 a.E.C). Nesse período a astronomia já estava bastante desenvolvida e empregava técnicas matemáticas muito sofisticadas.

Daí então, provavelmente devido à necessidade de se trabalhar com números muito grandes os astrônomos selêucidas tiveram de introduzir um símbolo para representar a posição zero ou a coluna vazia. Vale ressaltar que a autora denota esse símbolo de “separador”. Esse símbolo era constituído, aparentemente, por duas cunhas inclinadas – **Figura 12**.

Figura 12 - Zero do sistema cuneiforme “Separador”

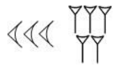
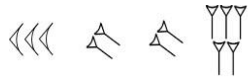
Fonte: Autor[8]

Roque concorda com Kriwaczek (2018) sobre o fato de o símbolo não ser utilizado como último algarismo do número e ainda vai além afirmando que ele também não poderia ser resultado de um cálculo devido que não era usado para representar ausência de quantidade. A autora ressalta que a noção de representar esse símbolo como um zero somente podia surgir quando ele passasse a ser associado às operações.

[8] Imagem produzida conforme descrito por Roque (2012) e apresentado na página 56 da mesma obra.

O quadro abaixo (quadro 7) mostra que a introdução do símbolo “separador” como uma forma de representar as colunas vazias dentro do sistema cuneiforme resolveu uma parte da ambiguidade que havia.

Quadro 7 - Introdução do separador nos números cuneiformes

Representação no sistema decimal	**Representação no sistema sexagesimal**	**Leitura dos símbolos no sistema decimal**	**Representação cuneiforme**
35	$35 * 60^0$	35	
108.005	$30 * 60^2 + 0 * 60^1 + 5 * 60^0$	30;0;5	
6.480.005	$30 * 60^3 + 0 * 60^2 + 0 * 60^1 + 5 * 60^0$	30;0;0;5	

Fonte: Autor

Por outro lado, não eliminava totalmente essa ambiguidade visto que não resolve o problema exposto no quadro 6. Para Kriwaczek (2018), isso leva a acreditar que os números babilônicos em todo tempo tiveram um verdadeiro “ponto flutuante”.

Roque (2012) trabalha dentro do sistema as operações básicas da matemática que os babilônios já tinham domínio. Onde ela detalha didaticamente os procedimentos para se resolver problemas de multiplicação e divisão.

Para se trabalhar a multiplicação, entre os babilônios, havia tabletes que representavam tabuadas assim como no sistema decimal. Porém, enquanto no nosso sistema os cálculos elementares correspondentes à nossa tabuada, incluem multiplicações até 9 x 9, no sistema sexagesimal incluem até 59 x 59. É fácil perceber que não dava para memorizar toda a tabuada, por isso o uso desses tabletes se fazia necessário mesmo para os cálculos mais elementares.

Vejamos um exemplo de multiplicação no sistema sexagesimal usando os algarismos decimais que, de acordo com a autora, a ideia é compreender de forma didática como funciona o algoritmo. Assim, ela mostra como fazer a multiplicação de 37; 28 por 19.

No primeiro momento, deve-se procurar no tablete de multiplicação por 19 o valor correspondente ao produto por 28 (8; 52). Em seguida deve-se procurar no mesmo tablete, o valor correspondente ao produto por 37 (11; 43). Ao organizar os números nas ordens correspondentes, note que 37 possui ordem superior à do algarismo 28. Dessa forma, funcionaria como (11; 43; 0). Assim, organizados os termos e somando obtém-se (11; 51; 52)

Resumindo as palavras do último parágrafo no algoritmo, temos:

$$
\begin{array}{r}
37;\ 28 \\
\underline{\times \quad 19} \\
8;\ 52 \\
\underline{11;\ 43;\ 0} \\
11;\ 51;\ 52
\end{array}
$$

Tomemos outro exemplo e faremos utilizando a ideia da autora e em seguida transcreveremos dentro do algoritmo. Calculemos então o produto de 12; 34; 57 por 25.

- Primeiro, procurar no tablete de multiplicação por 25 o valor correspondente ao produto por 57 (23; 45);
- Em seguida, procurar no mesmo tablete, o valor correspondente ao produto por 34 (14; 10). Ao organizar os números nas ordens correspondentes, note que 34 possui ordem superior à do algarismo 57. Dessa forma, funcionaria como (14; 10; 0).
- Logo após, procurar no mesmo tablete, o valor correspondente ao produto por 12 (5). Ao organizar os números nas ordens correspondentes, note que 12 possui ordem superior às dos algarismos 34 e 52. Dessa forma, funcionaria como (5; 0; 0; 0).

Assim, organizados os termos e somando obtém-se (5; 14; 33; 45). Vejamos como funciona no algoritmo.

$$
\begin{array}{r}
12;\ 34;\ 57 \\
\underline{\times \quad 25} \\
23;\ 45 \\
14;\ 10;\ 0 \\
\underline{5;\ 0;\ 0;\ 0} \\
5;\ 14;\ 33;\ 45
\end{array}
$$

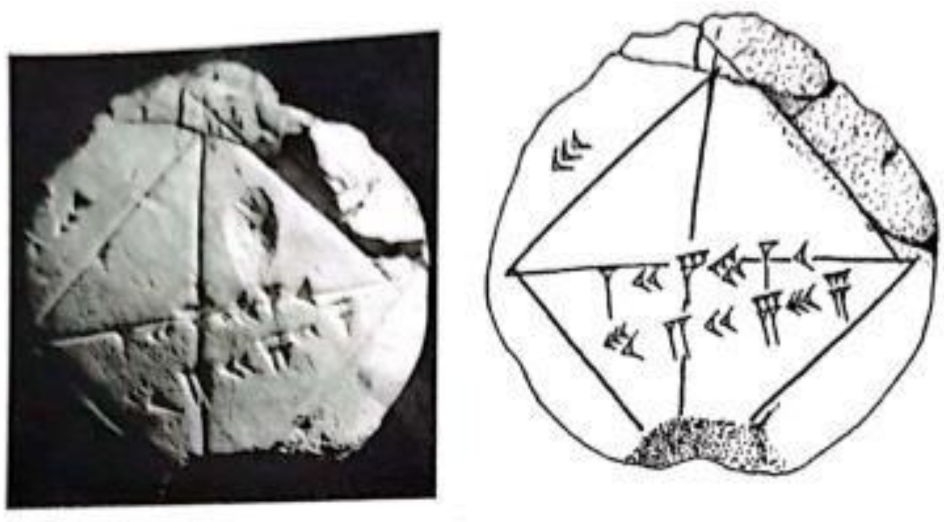
Seguindo a ideia da autora, consegue-se resolver qualquer problema de multiplicação semelhante aos dois exemplos.

No caso da divisão, se fazia necessário o uso de tabletes de recíprocos do número N ($^1/_N$ na linguagem atual) para facilitar os cálculos. Dessa maneira, a divisão de M por N, por exemplo, seria representada pela multiplicação de M pelo recíproco de N ($\frac{M}{N} = M * {}^1/_N$).

Roque (2012) comenta a respeito do problema em relação aos casos em que $^1/_N$ não possuem representação finita na base sexagesimal e atribui a esse problema a necessidade de se registrar esses casos nos tabletes para serem consultados na hora dos cálculos.

A autora finaliza a seção a respeito do sistema sexagesimal argumentando que os babilônios além de dominar as operações básicas da matemática, também resolviam potências e raízes quadradas e registravam os resultados em tabletes. E ressalta que as raízes quadradas poderiam, provavelmente, serem baseadas em um procedimento geométrico. O qual ela explicita no texto e também mostra que os babilônios, em seus cálculos, possuíam uma aproximação para $\sqrt{2}$ desenhado em cuneiforme no tablete YBC 7289 – **Figura 13**.

Figura 13 - Imagem do tablete YBC 7289



Fonte: Roque (2012, p. 62)

Note na imagem que a diagonal do quadrado o valor em cuneiforme corresponde a 1, 24; 51; 10 que convertido para o sistema decimal corresponde a 1,41421...

4. DENISE SCHMANDT-BESSERAT E A ORIGEM DA ESCRITA E DOS NÚMEROS NA MESOPOTÂMIA ANTIGA

Nesta seção, abordaremos a obra Schmandt-Besserat (2010) que, como o próprio nome do livro já diz, trabalha uma nova perspectiva de como a escrita surgiu. A autora propõe uma nova teoria que, por sua vez, acredita que os *tokens* (pequenos objetos de argila) foram os precursores da escrita.

Deste modo, Schmandt-Besserat introduz o seu livro argumentando a importância da escrita para a evolução da humanidade, seja na forma de se comunicar como também de registrar e armazenar informações. Vale frisar que a escrita foi a primeira tecnologia a tornar permanente a palavra falada, segundo as palavras dela.

Mas como a escrita surgiu? Schmandt-Besserat explicita alguns mitos e teorias que apresentam versões acerca da origem da escrita que eram aceitas até pouco tempo. Entre os mitos, destaca-se o das "Tábuas da Lei" escritas pelo dedo de Deus revelando a sua vontade à humanidade através dos Dez Mandamentos. As escrituras destas tábuas, por sua vez, teriam sido as primeiras do mundo. Por outro lado, entre as teorias, destaca-se a "Pictográfica" (teoria comumente defendida) que, segundo a autora, foi a primeira teoria evolucionária da escrita na qual se acreditava que as escritas foram originalmente desenvolvidas por meio de desenhos narrativos.

Em contrapartida, a autora discute o fato de que alguns mitos (os quais são mencionados em Schmandt-Besserat (2010)) a respeito do surgimento da escrita não fazem sentido uma vez que nenhum deles explicita a noção de uma evolução de um sistema de comunicação simples para um mais complexo, o que é mais provável. Pelo contrário, eles apresentam a ideia de que essa origem se encontra relacionada a episódios divinos ou sobrenaturais, nos quais alfabetos prontos foram entregues aos povos antigos. Com relação às teorias, em especial à pictográfica, ela fala sobre as escavações em Uruk entre 1929 e 1930 onde foram desenterradas tabuinhas arcaicas cujas escrituras contradiziam a teoria pictográfica, pois mostravam que, quando a escrita se desenvolveu na Mesopotâmia, os sinais pictográficos, praticamente, não eram usados.

Schmandt-Besserat argumenta que nos dois anos consecutivos as escavações em Uruk continuaram a revelar tabuinhas mais antigas, porém sem nenhum vestígio que pudesse satisfazer a teoria pictográfica. A forma mais antiga de escrita consistia em impressões em tábuas de argila com cunhas, círculos, ovais e triângulos. No entanto, nada que pudesse colaborar com a teoria em questão.

Assim, com o acumulado de dados suficiente para contestar essa teoria foi proposto que todas as primeiras escritas tinham características fonéticas. Dessa forma, os estudiosos passaram a debater a ideia de que a escrita poderia ter surgido como uma decisão racional de um grupo de indivíduos esclarecidos para organizar e controlar as sociedades que ali estavam por se desenvolver. Atualmente, acredita-se que a escrita foi uma conquista da humanidade que se desenvolveu de forma lenta e natural. O que veremos a seguir nesta seção reforça esta última versão a respeito da origem da escrita.

4.1. O que levou a autora a adentrar a fundo no conceito dos *tokens*?

Em seu relato, a autora conta que de 1969-1971 recebeu uma bolsa para estudar o uso da argila antes da cerâmica no Oriente Próximo. Em seus estudos, enquanto procurava por pedaços de piso de argila neolítico, forro de lareira e celeiros, tijolos, contas e estatuetas ela acabou se deparando com cones em miniatura, esferas, discos, tetraedros, cilindros e outras formas feitas de argila, ou seja, outros artefatos. Intrigada, ela os examinou e os registrou em seus arquivos como “objetos geométricos”. Porém, como nem todos tinham formas geométricas literalmente, mas sim, formas de animais, vasos, ferramentas etc. mais à frente ela denominou como *tokens*.

Intrigada com esses artefatos, pois onde quer que fosse se deparava com eles, se questionou qual seria a função deles. Em diálogo com outros arqueólogos os questionou sobre a função dos *tokens*, mas não obteve resposta, pois ninguém sabia explicar o real motivo da existência. De início, a coleta de dados a respeito destes artefatos lhe pareceu não ter tanta importância, mas as informações contidas nas fichas do período neolítico se revelaram a peça de um quebra-cabeça.

Em suas pesquisas e estudos mais aprofundados descobriu que outros arqueólogos trabalharam o conceito dos *tokens*. Porém foi um artigo sobre contadores do segundo milênio a.E.C. de A. Leo Oppenheim, da Universidade de Chicago que provou ser a chave para entender o que eram esses artefatos e qual a função deles. O trabalho de Pierre Amiet também lhe forneceu outra peça importante e mais a frente Maurice Lambert levou a visão de Amiet dois passos adiante. Todas essas contribuições levaram a autora a reconhecer que as fichas constituíam um sistema de contabilidade que existiu durante cinco mil anos na pré-história e que foi amplamente utilizado em todo o Oriente Próximo.

4.2. Estrutura do livro e processos metodológicos

O livro *How Writing Came About* (Como a Escrita Surgiu) de Denise Schmandt-Besserat é uma versão resumida de *Before Writing* (Antes da escrita), que foi publicado em dois volumes – Vol I: *From Counting to Cuneiform* (Da Contagem ao Cuneiforme) e Vol II: *A Catalog of Near Eastern Tokens* (Um Catálogo de *Tokens* do Oriente Próximo) – em 1992 pela *University of Texas Press* (Imprensa da Universidade do Texas) e escrito pela própria autora. O livro Schmandt-Besserat (2010) é um resumo que tem como objetivo oferecer ao leitor em geral um livro menos detalhado e mais acessível.

O livro é organizado em três partes, das quais a autora denota a parte Um como “A Evidência”, a Dois como “A Interpretação” e a Três como “Os Artefatos”.

A parte Um é composta por quatro capítulos. Schmandt-Besserat descreve o aspecto físico dos *tokens*, seus formatos (cones, esferas, discos, cilindros, tetraedros, ovoides, quadriláteros e outros nove formatos), marcações e fabricação, e sua evolução de *tokens* "simples" para "complexas", isto no capítulo 1. Vale ressaltar que o estudo é baseado em 8.162 desses objetos, aos quais estão divididas em dezesseis formatos (tipos) em que estão distribuídos em 452 subtipos. No capítulo 2, ela identifica o contexto em que os *tokens* foram usados, incluindo os tipos de assentamentos a que pertenciam, suas distribuições geográficas dentro daqueles assentamentos e as estruturas e conjuntos aos quais estavam relacionados. Uma atenção especial é dada aos raros *tokens* encontrados em tumbas, pois, apesar de raros, as ocorrências desses artefatos encontrados em ambientes funerários e em sepulturas, exclusivamente, de indivíduos de prestígio reflete sua importância econômica. O que implica que eles eram um meio de controlar bens nas mãos de pessoas poderosas. No capítulo 3, são descritos os métodos do quarto milênio para armazená-los em arquivos, especialmente em envelopes. O número de envelopes, sua localização geográfica cronológica e contextual, os conjuntos de *tokens* que continham, as marcações que portavam e sua influência na modificação deles. Finalizando a parte um, no capítulo 4, a autora trata de tabletes com marcas dos *tokens* impressos. Após uma revisão da história de suas descobertas, seus números, distribuição geográfica, cronologia e contexto, os documentos e os sinais que eles carregam são descritos e suas contribuições para a escrita são avaliadas.

A parte Dois também é composta por mais quatro capítulos. No capítulo 5, os *tokens* são analisados como o segundo passo no desenvolvimento da manutenção de registros, seguindo as contagens paleolíticas. O *token* proporcionou o contexto para a invenção da escritura ao ser o primeiro código que registrou dados econômicos. O capítulo 6 explica como a economia determinou o sistema desses objetos e como os contadores afetaram a sociedade. O capítulo 7 aborda a evolução da contagem e seu papel na invenção da escrita. Em contraste com a escritura, os *tokens* representam uma forma antiga de "contagem concreta". O capítulo 8 resume a riqueza de informações fornecidas por esses artefatos sobre a comunicação, a matemática, a economia, as estruturas sociais e as habilidades cognitivas nas culturas pré-históricas do Oriente Próximo.

A parte Três corresponde aos gráficos que, por sua vez, fornecem uma representação gráfica dos dezesseis tipos de *tokens* e a grande variedade de subtipos. Recomendamos visitar a obra Schmandt-Besserat (2010) (páginas: 127 a 156).

4.3. Resultados obtidos

4.3.1. Os *tokens*

Com base nos *tokens* trabalhados pela autora, segue o quadro com os dezesseis tipos ordenados.

Quadro 8 - Tipos de *tokens*

Tipo	Nome
1	Cones
2	Esferas
3	Discos
4	Cilindros
5	Tetraedros
6	Ovóides
7	Quadriláteros
8	Triângulos
9	Biconóides
10	Parabolóides
11	Bobinas dobradas
12	Ovais/Rombóides
13	Vaso
14	Ferramentas
15	Animais
16	Diversos

Fonte: Autor

Ao estudar vários relatórios de escavações de locais do quarto, quinto e sexto milênios, a autora notou a possibilidade de que os *tokens* pudessem ter sido usados, sem descontinuidade, entre 8.000 e 3.000 a.E.C. Pelo fato de terem sido produzidos à mão, seus tamanhos variam de um para o outro e também de local para local. De modo geral, a dimensão usual dos *tokens* estudados varia de 1 a 3 centímetros de diâmetro. Enquanto os subtipos "grandes" dos tipos de (1), (2), (3) e (5), respectivamente, medem aproximadamente 35 centímetros. Uma característica importante deles é que, os mesmos transmitiam informações quantitativas e também qualitativas, ou seja, o tipo de item contado era indicado pelo formato do *token*, enquanto o número de unidades envolvidas era mostrado pelo número correspondente de *tokens*, correspondência biunívoca.

A autora classifica os *tokens* como "simples" e "complexos" dos quais os primeiros correspondem aos quatro primeiros milênios (desde 8.000 a.E.C) e os últimos, logo após esse período, por volta do ano 3500 a.E.C. quando o sistema atingiu um novo estágio. Enquanto os *tokens* simples serviram apenas para contar produtos agrícolas como animais e quantidades de cereais, os complexos coincidiram com a indústria, em outras palavras, desempenharam um papel fundamental na cobrança de taxas e tributos que sustentaram as primeiras cidades-estado.

Podemos visualizar melhor essa classificação por meio do quadro seguinte (quadro 9).

Quadro 9 - Classificação dos *tokens*

Tipos de *Tokens*	Tokens simples	1	Cones
		2	Esferas
		3	Discos
		4	Cilindros
		5	Tetraedros
		6	Ovóides
		7	Quadriláteros
		8	Triângulos
		9	Biconóides
		13	Vaso
		15	Animais
		16	Diversos
	Tokens Complexos	6	Ovóides
		7	Quadriláteros
		8	Triângulos
		9	Biconóides
		10	Parabolóides
		11	Bobinas dobradas
		12	Ovais/Rombóides
		13	Vaso
		14	Ferramentas
		15	Animais
		16	Diversos

Fonte: Autor

A partir da análise do quadro acima, percebe-se que nesse novo estágio, foram introduzidos quatro novos tipos de *tokens*: (10) parabolóides, (11) bobinas dobradas, (12) ovais/romboides e (14) formas de ferramentas em miniatura. Por outro lado, segundo Schmandt-Besserat (2010), foram introduzidos e muito utilizados vários subtipos dos tipos (6), (7), (8), (9), (13), (15) e (16). Também é possível notar que os *tokens*, em sua maior parte, equivalem às formas geométricas básicas que conhecemos hoje.

A classificação dos *tokens* representa duas etapas na evolução do mesmo dispositivo de cálculo, em outras palavras, os *tokens* complexos não substituíram os simples, eles apenas ampliaram o repertório de tipos e subtipos e marcações. Vale ressaltar que, a partir de agora, ao contrário do primeiro estágio, as marcações ocorrem com maior frequência em todos os artefatos.

Schmandt-Besserat (2010) defende que os *tokens* simples e complexos pertencem ao mesmo dispositivo de cálculo pelo fato de que foram encontrados juntos nos mesmos locais e dentro dos mesmos envelopes ou amarrados juntos, mostrando que foram perfurados simultaneamente. Por fim, embora pertençam a etapas diferentes, são amostras de pictogramas que representavam mercadorias básicas na escrita suméria.

Nos dois quadros a seguir explicitaremos a quantidades de *tokens* estudados pela autora em que, no quadro 10 constam os conjuntos de coleções de exemplares encontrados por local. Já no quadro 11 contém a quantidade total de artefatos dividida pelos dezesseis tipos.

Quadro 10 - Quantidade de conjuntos de exemplares encontrados em cada local

	Quantidade de conjuntos	**Locais**
	2.022	Jarmo
	812	Uruk
	783	Susa
	575	Ganj Dareh Tepe
	485	Tepe Gawra
	380	Tell Ramad
	320	Tell Aswad
	1	Matarrah
	1	Tell Songor
	1	Ubaid
	11	Tell Abada
	3	Tell Hassuna
Total	**5.394**	**12**

Fonte: Autor

A autora orienta que o número de *tokens* difere muito de local para local e que os pequenos conjuntos são mais frequentes do que os grandes, com até trinta coleções com menos de dez *tokens*.

Outro ponto é que nem todos os locais que aparecem no texto são citados no quadro acima. Isso, visto que não são explicitadas as quantidades de conjuntos de exemplares encontradas neles como é o caso de Habuba Kabira (15 *tokens*, 1 selo cilíndrico e numerosas bolhas oblongas), Sharafabad, Ali Kosh, Seh Gabi, Tell es-Sawwan, Hajji Firuz, Gaz Tavila (35 cones e 1 esfera), Tello, Chogha Mish.

Quadro 11 - Quantidade de exemplares que foram estudados por Schmandt-Besserat (2010)

	Quantidade de *tokens*	**Nome**
	1.457	Cones
	3.354	Esferas
	1.095	Discos
	806	Cilindros
	220	Tetraedros
	204	Ovóides
	278	Quadriláteros
	233	Triângulos
	51	Biconóides
	85	Parabolóides
	60	Bobinas dobradas
	45	Ovais/Rombóides
	81	Vaso
	31	Ferramentas
	129	Animais
	33	Diversos
Total	**8.162**	**16**

Fonte: Autor

Esses artefatos, em sua grande maioria, eram feitos de argila, onde a autora explica que "no quarto milénio a.C., os *tokens* eram geralmente feitos de uma pasta muito fina, sugerindo que a argila era refinada." (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p.17). Já alguns *tokens* (muito raros) eram feitos de pedra, betume ou gesso. Estes, por sua vez eram muito usados como oferendas funerárias.

4.3.2. Onde os *tokens* foram recuperados

Segundo a autora, na maioria dos locais onde o contexto dos *tokens* foi registrado, eles foram recuperados parcialmente dentro e parcialmente fora dos edifícios. Em alguns lugares muitas fichas foram localizadas em terrenos baldios misturados com detritos, ou melhor, no que parecem ser depósitos de lixo. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010). Também foram recuperados *tokens* de uma antiga fossa de lixo, onde se pôde determinar que eles eram descartados “sempre” após cumprir sua função.

Tanto em Uruk quanto em Susa, foram encontrados *tokens* nas proximidades dos templos principais. Em outros lugares, foram recuperados em ambientes domésticos ou em áreas de armazenamento. Em Tell Abada, a maioria deles foi recuperada no maior edifício escavado no povoado. Este também revelou a presença de sepulturas infantis. O que sugeriu aos escavadores “um significado religioso”. *Tokens* também foram encontrados em contextos funerários e principalmente em sepulturas de indivíduos de prestígio, o que implica à sua importância econômica.

O quadro abaixo (quadro 12) fornece os dados que Schmandt-Besserat explicitou em seu livro a respeito dos locais, número de túmulos escavados e o número de túmulos que continham *tokens*.

Quadro 12 - Número de sepulturas equipadas com fichas

<table>
<tr><th></th><th>Local</th><th>Número de túmulos escavados</th><th>Número de túmulos com fichas</th></tr>
<tr><td></td><td>Tell es-Sawwan I</td><td>130</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Hajji Firuz</td><td>14</td><td rowspan="4">1</td></tr>
<tr><td></td><td>Arpachiyah</td><td>50</td></tr>
<tr><td></td><td>Tepe Gawra XVII</td><td>30</td></tr>
<tr><td></td><td>Tepe Gawra XI</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Tepe Gawra X</td><td>80</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Tepe Guran</td><td>Não informado</td><td>Não informado</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>7</td><td>309</td><td>9</td></tr>
</table>

Fonte: Autor

As sepulturas decoradas com *tokens* pertenciam a homens adultos ou crianças, exceto no caso de Hajji Firuz (os *tokens* eram misturadas com ossos desarticulados de um enterro múltiplo), onde um dos quatro indivíduos do ossuário pode ter sido uma jovem mulher. De todos os tipos e subtipos de *tokens* que foram estudados, somente cones (44 espécimes), esferas (49 espécimes), três quartos de esferas e vasos em miniatura foram recuperados nesse contexto, segundo a autora. A quantidade de artefatos encontrados em cada uma das sepulturas variou de 1 a 34, respectivamente.

Outro ponto é que "a única diferença entre os *tokens* usados como oferendas funerárias e os usados na vida diária é que os primeiros eram muitas vezes feitos de pedra em vez de barro." (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p.36), totalizando um número de 66 *tokens* de pedra e 41 de barro.

Com base nesta última informação, podemos dizer que a quantidade total de *tokens* encontrados em sepulturas foi de 107 artefatos e a quantidade total de três quartos de esferas e vasos foi de 14 (espécimes).

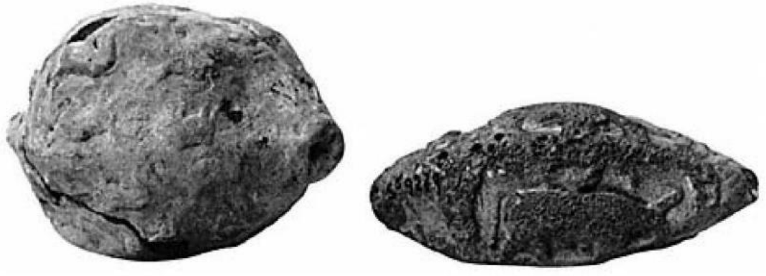
De modo geral, os *tokens* simples começaram a ser usados em ambientes ao ar livre onde a subsistência baseava-se no cultivo de grãos, enquanto os *tokens* complexos foram invenção dos templos do sul da Mesopotâmia. Os primeiros permaneceram familiares nas comunidades agrícolas até o final do sistema, já os últimos ocorreram apenas nos centros administrativos. Aparentemente os *tokens* eram descartados após a sua utilidade ter sido cumprida. E por fim, os objetos encontrados nos contextos funerários sugerem que eram usados por membros da elite. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010).

4.3.3. Como os *tokens* eram armazenados em arquivos

Segundo a autora, foram desenvolvidos dois métodos para armazenar *tokens* em arquivos. O primeiro consistia em amarrar *tokens* perfurados com um barbante (mais frequentemente usado para armazenar os *tokens* complexos), enquanto o segundo consistia em envolvê-los em envelopes de barro (mais frequentemente usados para armazenar os *tokens* simples). Ambos garantiram que grupos de *tokens* representando uma conta pudessem ser mantidos juntos com segurança e que a transação pudesse ser identificada por selamento. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010).

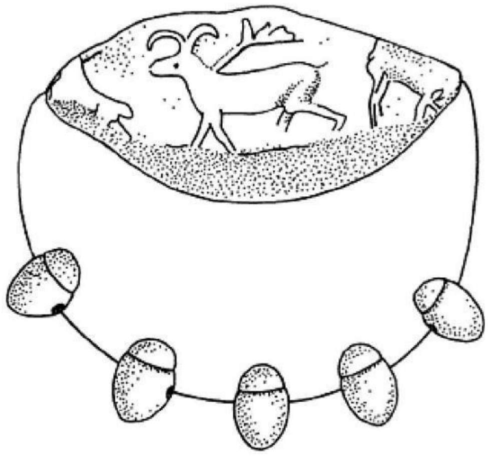
Para o primeiro método, os *tokens* perfurados eram amarrados com uma espécie de barbante cujas pontas deveriam ser presas a um selo. Neste caso, bolhas sólidas – **Figuras 14** e **15**.

Figura 14 - Bolhas Sólidas



Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 41)

Figura 15 - Representação ilustrativa do primeiro método de armazenamento dos *tokens*



Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 41)

Essas bolhas eram feitas de argila e modeladas em formato oblongo ou biconóide, medindo cerca de 7 centímetros de comprimento e 5 centímetros de diâmetro.

Para o segundo método, os *tokens* eram inseridos dentro dos envelopes de barro quando ainda estavam úmidos. **Figura 16**.

Figura 16 - Envelope com seis ovoides incisos

Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 43)

Os envelopes consistiam em bolas ocas de argila em forma de esferas ou ovoides. De acordo com a autora, pela microscopia eletrônica e análise térmica diferencial feita em uma amostra de Susa constatou que os envelopes eram cozidos a uma temperatura baixa de cerca de 700°C. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010). No quadro abaixo (quadro 13) serão expostos os onze locais com os respectivos números de envelopes encontrados.

Quadro 13 - Distribuição dos envelopes por locais

	Local	**Número de envelopes**
	Susa	• 40 completos • 15 fragmentários • 57 fragmentos
	Chogha Mish	• 8 completos na segunda campanha • Mais de 20 na terceira campanha
	Farukhabad	1
	Tepe Yahya	1
	Shahdad	1
	Uruk	25
	Habuba Kabira	2
	Tell Sheikh Hassan	3
	Tell Qraya	• Não Divulgado
	Israel	1
	Arábia Saudita	1
Total	11	Mais de175 envelopes

Fonte: Autor

Observando o quadro percebe-se que o número de envelopes encontrados (completos e fragmentos) ultrapassa a marca dos 175, visto que na terceira campanha de escavação de Chogha Mish são encontrados mais de 20 envelopes. A autora afirma que “o número total de envelopes agora conhecidos é de cerca de 130 exemplares e 70 fragmentos.” (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p.43).

Figura 17 - Mapa indicando os locais em que os tabletes foram encontrados

Fonte: Schmandt-Besserat (2010, p. 56)

A esse respeito, a autora elabora cinco tabelas para detalhar os dados de alguns dos envelopes encontrados por locais e a quantidade de *tokens* distribuídos em seus respectivos subtipos.

- Na 1ª tabela (Envelopes Encontrados Completos) são explícitos os resultados de quatro envelopes de Susa e um de Tepe Yahya. Estes foram encontrados completos e, posteriormente, abertos para estudo. Como resultado, encontrou-se: 20 *tokens* nos quatro envelopes de Susa e 3 no envelope de Tepe Yahya.
- Na 2ª tabela (Envelopes Encontrados Quebrados) são explícitos os resultados de dezenove envelopes de Susa, cinco de Uruk, dois de Habuba Kabira, um de Farukhabad e uma quantidade desconhecida de Chogha Mish. Estes foram encontrados quebrados, mas ainda estavam associados ao seu conteúdo total ou parcial de *tokens.* Como resultado, encontrou-se: 114 *tokens* nos dezenove envelopes de Susa, 31 nos cinco de Uruk, 8 nos dois de Habuba Kabira, somente 1 no envelope de Farukhabad e 8 nos envelopes de Chogha Mish.

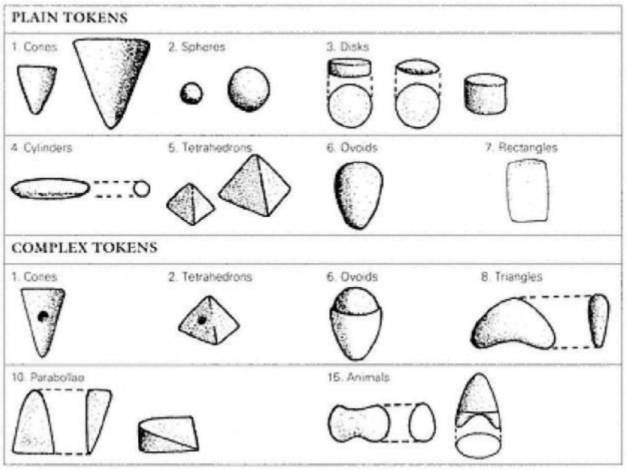
- Na 3ª tabela (Grupos de *Tokens* Separados de Envelopes) são explícitos os resultados dos *tokens* pertencentes a envelopes amassados (que não pode ser determinada a sua quantidade). Como resultado, Uruk rendeu um grupo de 52 *tokens*, Chogha Mish rendeu 61 e Susa rendeu 25 divididos em três grupos (14, 7 e 4, respectivamente).
- Na 4ª tabela (*tokens* provisoriamente determinados por Raio-X) são explícitos os resultados dos 10 *tokens* de Dharan, dos 3 de Dumah e dos 9 de Susa, onde tentaram determinar provisoriamente por raio-X a que tipo e subtipo os *tokens* pertenciam. Porém, permaneceram indeterminados.
- Por fim, na 5ª tabela (Total) é feita a contagem dos *tokens* pertencentes aos envelopes. Como resultado total, encontrou-se: 345 *tokens*.

De maneira geral, segundo a autora:

> Como resultado, entre os 345 *tokens* incluídos nos envelopes, 287 são simples, 32 são complexos e 26 são indeterminados (incluindo os 22 *tokens* incluídos nos envelopes radiografados que não podem apresentar marcações). Em outras palavras, 83,19% dos *tokens* contidos em envelopes são simples, 9,28% são complexos e 7,54% são indeterminados. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p.49).

Na **figura 18** abaixo, apresenta o quadro em que a autora explicita todos os respectivos subtipos de *tokens* encontrados entre os 345.

Figura 18 - Representação dos *tokens* encontrados nos envelopes



Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 49)

4.3.4. Início da escrita

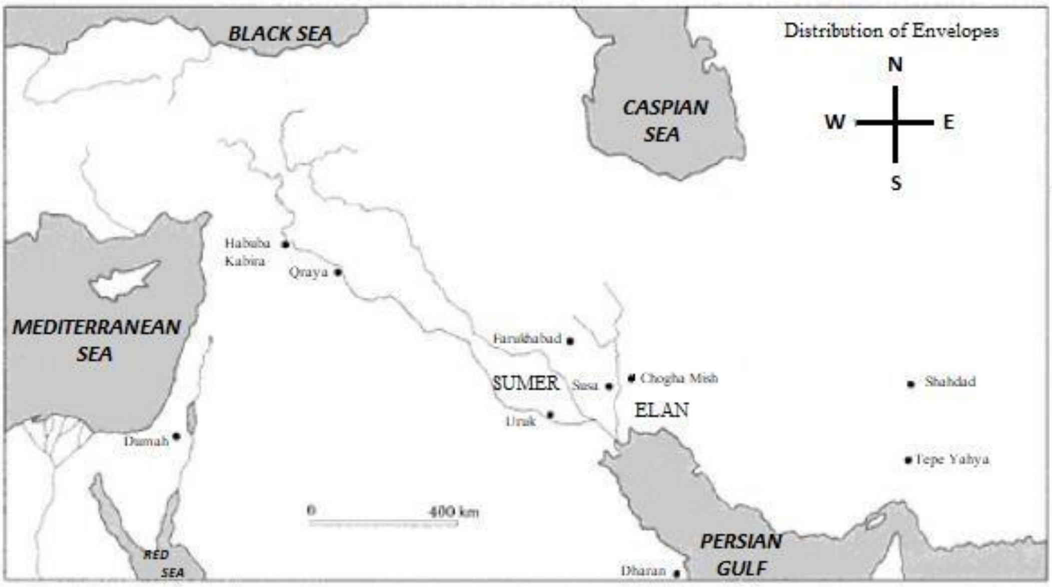
Para o estudo de SCHMANDT-BESSERAT (2010), foram incluídas 244 tabuinhas, as quais estão divididas em 13 locais como explicitado no quadro abaixo (quadro 14).

Quadro 14 - Quantidade de tabuinhas encontradas em cada local

	Locais		Quantidade de tabuinhas
	Irã	Susa	90
		Godin Tepe	42
		Sialk	13
		Tall-i-Ghazir	1
		Chogha Mish	6 (Não revelada a quantidade total)
	Iraque	Uruk	65
		Khafaje	1
		Nínive	1
	Síria	Habuba Kabira	10
		Jebel Aruda	13
		Tell Brak	1
		Mari	1
Total	3	13	244

Fonte: Autor

Figura 19 - Mapa indicando os locais em que envelopes foram encontrados



Fonte: Schmandt-Besserat (2010, p. 44)

A cronologia das tabuinhas sugere três grupos consecutivos: O primeiro grupo corresponde ao período de 3.500 a 3.000 a.E.C., o segundo grupo corresponde ao período de 3.300 e 3.100 a.E.C. e o terceiro grupo corresponde ao período de 3.100 a 3.000 a.E.C. Através desse contexto, a autora conclui que os sinais impressos precederam a pictografia, pois não há textos pictográficos da mesma época do primeiro grupo de tabuinhas impressas. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010). As primeiras evidências de pictografia correspondem ao período do segundo grupo, ou seja, dois tipos de escritas (impressa e pictográfica) começaram a existir de forma simultânea.

De acordo com a autora, assim como os *tokens* as tabuinhas também eram feitas de argila em sua maior escala. Isso, visto que foram recuperadas apenas vinte e duas tabuinhas de gesso. Medindo cerca de 5 centímetros de Largura, 4 centímetros de comprimento e 2 centímetros de espessura e modeladas de diferentes formatos (ovais, arredondados, quadrados e retangulares) devido à falta de padronização por serem sido feitas manualmente.

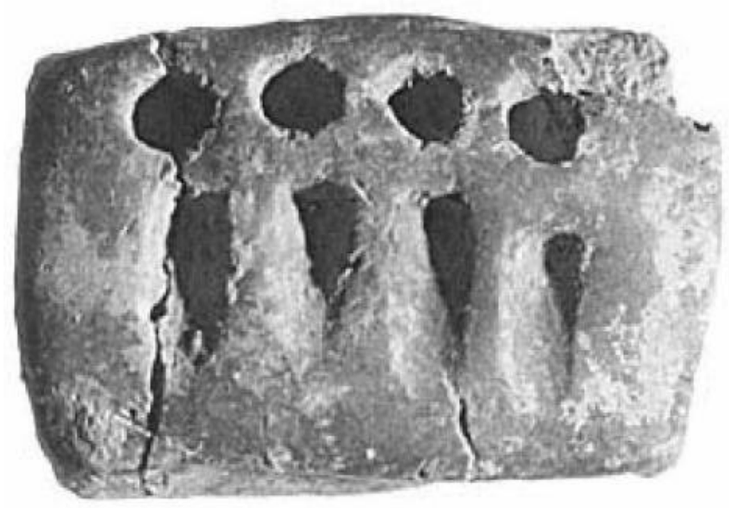
Com relação aos sinais impressos[9] nas tabuinhas, foram observados alguns pontos importantes:

- São organizados em linhas horizontais paralelas ao lado mais longo da tabuinha;
- Sinais de tipos diferentes geralmente não se misturam na mesma linha;
- Na presença de poucos sinais na linha, eles são posicionados no centro, e não na lateral;
- As linhas com sinais são organizadas de forma hierárquica principalmente em ordem decrescente.

A **figura 20** abaixo concentra todos os pontos detalhados acima, até mesmo o último, pois, como veremos no quadro 15 o sinal circular representado na figura correspondia a *Bariga,* unidade seis vezes maior que a cunha curta que representava uma unidade de grão, a *Ban*.

[9] O termo "sinal" aqui expresso coincide com o do argumento da autora que, por sua vez, denota as marcações impressas nas tabuinhas, ao contrário do termo "marcação" que denota as marcações impressas nos envelopes como visto anteriormente nesta seção.

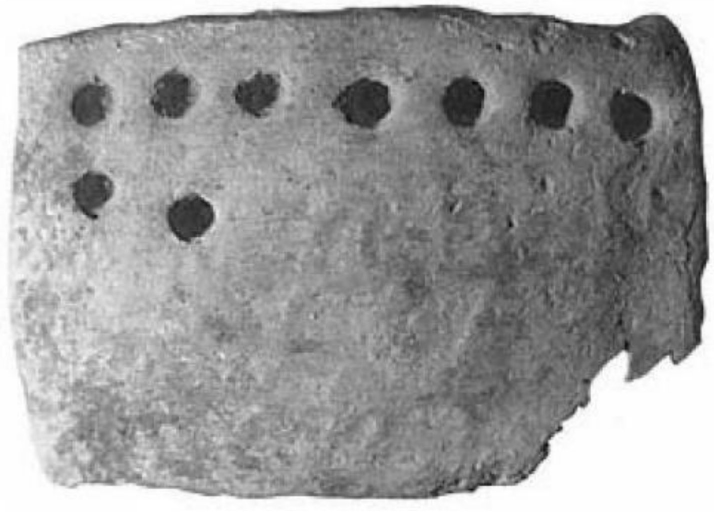
Figura 20 - Tabuinha impressa representando a organização dos sinais



Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 58)

Através destes pontos é notável que as tabuinhas poderiam ser lidas em qualquer direção. Segundo o exemplar da **figura 21**, assim como muitos outros exemplares, indica que a leitura procedia de cima para baixo e da direita para a esquerda e talvez continuasse na direção oposta.

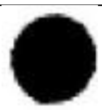
Figura 21 - Tabuinha impressa representando a maneira como era feita a leitura



Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 62)

Segundo a autora, dezoito sinais diferentes foram identificados nas tabuinhas. No quadro 15 abaixo será explicitado o resultado das representações desses sinais com base na interpretação da autora.

Quadro 15 - Sinais impressos e suas representações segundo Schmandt-Besserat (2010)

Sinais			**Representação**
1a	Cunha Curta		Medida de grãos (1 *ban*?)
1b	Cunha Grande		Medida de grãos (180 *bans*?)
1c	Cunha Perfurada		• Medida de grãos (1.800 bans?); • Unidade de medida de terra (1 *ee**?).
1d	Cunha Horizontal		Fração □ Unidade de medida de terreno ($\frac{1}{4}$ *iku*?)
1e	Duas Cunhas Vértice a Vértice		Fração □ Medida de grãos ($\frac{1}{10}$ *ban*?)
2a	Sinal Circular		Unidade de grão (1 *bariga*?)
2b	Grande Sinal Circular		Unidade de metrologia de grãos (10 *barigas*?)
2c	Semicircular		Não identificado
2d	Sinal Circular com uma Incisão		• Medida de grão (?) (1 *bariga*?) • Fração □ Unidade de medida de terra ($\frac{1}{8}$ *iku*?)
2e	Sinal Circular Perfurado		Unidade de medida de terreno (10 *bur*?)
2f	Circular com apêndice		Ovelhas de cauda gorda.
3a	Marcação Circular Rasa		Unidade de metrologia de grãos (?)
3b	Sinal Circular Derivado do Disco Lenticular		Unidade de numeração animal (10 animais?)
4	Cunha Longa		Unidade de numeração animal (1 animal?)

5a	Oval		Não identificado
5b	Ovóide Incisado		Óleo
6a	Plano Triangular		Fração □ Medida de grãos ($\frac{1}{5}$ *ban*?)
6b	Triangular incisado		Unidade de trigo (?)

Fonte: Autor

Roque (2012) resume o sistema medidas de grãos conforme a **figura 22** abaixo.

Figura 22 - Sistema de Medidas de grãos

Fonte: Roque (2012, p. 45)

Em outras palavras, da direita para a esquerda e acrescentando mais um sinal (Duas Cunhas Vértice a Vértice) ao sistema, tem-se:

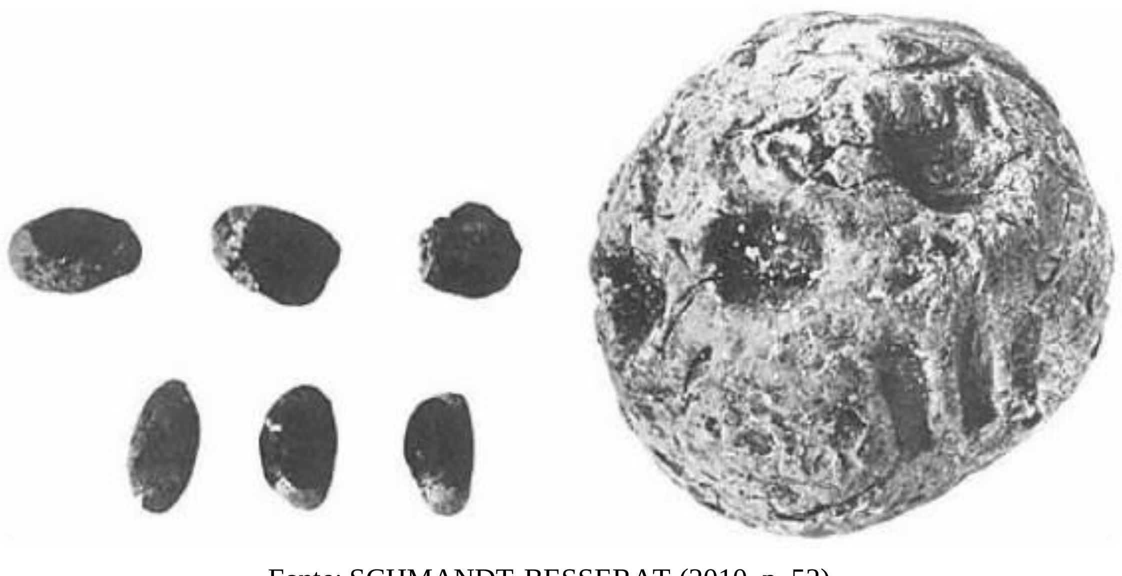
- 1e ➔ Duas Cunhas Vértice a Vértice ➔ $\frac{1}{10}$ *Ban;*
- 6a ➔ O Plano Triangular ➔ $\frac{1}{5}$ *Ban;*
- 1a ➔ A Cunha Curta ➔ 1 *Ban*;
- 2a ➔ O Sinal Circular ➔ 1 *Bariga* ➔ 6 *Bans*;
- 2b ➔ O Grande Sinal Circular ➔ 10 *Barigas* ➔ 60 *Bans*;
- 1b ➔ A Cunha Grande ➔ 30 *Barigas* ➔ 180 *Bans*;
- 1c ➔ A Cunha Perfurada ➔ 300 *Barigas* ➔ 1.800 *Bans*.

Da mesma forma, havia sistemas de medidas de terra e de unidades de animais que, ao que parece, somente esse último corresponde a uma base fixa (decimal). Porém, talvez, devido à escassez de registros e também pelo fato de os registros que sem tem a disposição não apresentar evidências de grandes quantidades de animais, não se pode garantir com clareza essa hipótese.

Em suma, à evolução dos *tokens* até a escrita, temos o seguinte: a evolução dos *tokens* simples para os complexos marca o primeiro momento. Neste momento os envelopes se faziam necessários para o armazenamento deles e consequentemente à representação da conta envolvida. Porém, de acordo com a autora, uma grande desvantagem dos envelopes era o fato de que eles escondiam os *tokens*, ou seja, uma vez fechados, eles não eram mais visíveis. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010). É provável que para superar esse problema, os sistemas de marcações tenham sido desenvolvidos.

Este, por sua vez, pode ser considerado como o segundo momento. O fato de todos os envelopes deste modelo, recuperados intactos, possuírem um número de marcações igual ao número de *tokens* incluídos, sugere que foi usada a correspondência um a um, ou seja, a quantidade de *tokens* e os subtipos incluídos nos envelopes eram também impressos na superfície do mesmo enquanto ainda estava macio. A **figura 23** mostra um envelope com alguns *tokens* impressos em sua superfície.

Figura 23 - Envelope com um conjunto de *tokens* afundados na superfície



Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 52)

Com base nos envelopes encontrados, percebeu-se que outras cinco técnicas também foram desenvolvidas para mostrar o conteúdo dos envelopes, a saber: fixar os *tokens* na superfície, imprimir sinais com um bastão ou estilete, pressionar com o polegar, riscar o barro quando estiver duro e fixação por um barbante. A maioria caiu por terra e desapareceu. Somente as impressões simbólicas e as marcas inscritas com um estilete rombudo foram transportadas para as primeiras tabuinhas.

O terceiro momento da evolução dos *tokens* à escrita foi marcado quando passaram a entender que as marcações nos envelopes repetiam apenas a mensagem codificada nos *tokens* contidos neles, ou seja, não seriam mais necessários envelopes para codificar a mensagem, pois as próprias marcações na superfície já eram a mensagem. Dessa forma, começaram a produzir as tabuinhas, substituindo assim, os envelopes. “Os primeiros tabletes foram um passo decisivo na invenção da escrita e representaram uma revolução na tecnologia da comunicação.” (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p. 55).

Finalmente chegamos aos protótipos de sinais impresso/inciso dos *tokens* e pictogramas incisos, em que a autora conclui que a evolução dos *tokens* à escrita se concretizou a partir daí (ainda no terceiro momento) quando “o uso de um estilete para traçar sinais em uma tabuinha seguiu a escrita impressa, constituindo um terceiro estágio na evolução da escrita no Oriente Próximo (após marcações em envelopes e sinais impressos).” (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p. 71).

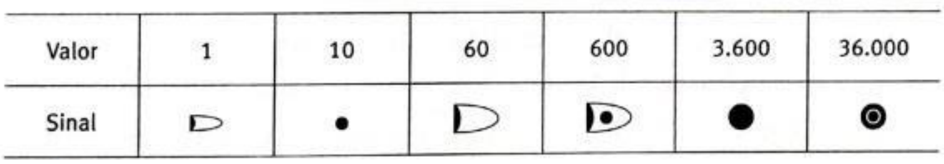
Como quarto e último momento que caracterizou a evolução dos *tokens* à escrita, tem-se a invenção dos numerais nas tabuinhas pictográficas para expressar o número de unidades de bens. Isto se deu a partir do momento em que se passou a expressar um mesmo símbolo (número) para representar a mesma quantidade de materiais distintos, abstração. A partir de agora, os pictogramas eram precedidos pelos numerais, por exemplo, para representar dois “potes de Óleo” bastava usar o símbolo que representava o número 2, seguido do sinal que representava uma unidade do pote de Óleo. Da mesma maneira, o símbolo para representar o número 2 era usado para a mesma quantidade qualquer material.

Segundo a autora:

> O sinal para 1 era uma cunha curta, idêntica ao sinal para uma medida pequena de grãos; 2, 3, 4, 5, etc. foram indicados por duas, três, quatro ou cinco cunhas; o sinal de 10 era um sinal circular, idêntico ao de uma medida maior de grãos. Da mesma forma, o sinal de 60 era uma grande cunha; para 600, uma cunha grande perfurada; e isso por 3.600, um grande sinal circular. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, pp. 83-84).

A **figura 24** abaixo mostra a tabela proposta por Roque (2012) que resume esta ideia, acrescentando o Sinal Circular Perfurado correspondendo a um valor de 36.000.

Figura 24 - Sistema usado para contagem discreta



Fonte: Roque (2012, p. 45)

Segundo Roque (2012) argumenta que em meados do terceiro milênio a.E.C. os sinais expostos na figura acima apareceram correspondendo aos mesmos valores já dentro do sistema cuneiforme, até alcançar o padrão do sistema com apenas dois símbolos (Cunha vertical e cunha angular), conforme representado na **figura 25** abaixo.

Figura 25 - Sistema cuneiforme posicional

Valor	1	10	60	600	3.600	36.000
Sinal	𒁹	𒌋	𒁹	𒌋	𒁹	𒌋

Fonte: Roque (2012, p. 46)

Assim, a técnica de escrita foi evoluindo de sinais impressos para pictogramas incisos mais legíveis e mais tarde seria feita com um estilete triangular mais funcional. Escrita cuneiforme.

Em suma, a escrita passou por um longo processo de transformação. A escrita, em si, somente perpetuou-se a partir do momento que se passou a dissociar o termo “concreto” do “abstrato”. Enquanto a contagem concreta baseava-se na correspondência um a um como era o caso do sistema de *tokens* em que cada material era representado por um subtipo especial. Aqui, uma mesma quantidade era escrita de formas diferentes para materiais distintos, por exemplo, de acordo com a autora, os “ovóides eram usados para contar potes de óleo e esferas para contar medidas de grãos; da mesma forma, os potes de óleo só podiam ser contados com ovóides, e as medidas de grãos só podiam ser contadas com esferas.” (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p. 116).

Ao contrário da contagem concreta, a contagem abstrata permite associar diferentes materiais a uma mesma quantidade. A partir dessa noção foram criados dois tipos de sinais:

> Numerais (símbolos que codificam números abstratos) e pictogramas (sinais que expressam mercadorias). Cada tipo de sinal foi traçado em uma técnica diferente. Assim, os pictogramas foram incisos, enquanto os numerais foram impressos, destacando-se claramente do texto. Uma tabuinha de Uruk, por exemplo, apresenta dois relatos de “5 ovelhas” mostrados pelo pictograma para “ovelhas” (um círculo com uma cruz) junto com cinco cunhas impressas representando “5”. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p. 118).

A tabuinha da **figura 26** representa bem a afirmação da autora a respeito dos numerais e dos pictogramas no relato das 5 ovelhas.

Figura 26 - Tabuinha representado quantidades de ovelhas

Fonte: SCHMANDT-BESSERAT (2010, p. 118)

Com base na abstração do conceito de quantidade daquele de qualidade do item contado, com os pictogramas, uma vez dissociados dos números, a autora argumenta que eles,

> [...] poderiam evoluir de maneira própria e separada. Os símbolos anteriormente usados para manter contas de bens poderiam se expandir para comunicar qualquer assunto da atividade humana. Como resultado, coisas como "a cabeça de um homem" ou "boca" (itens que nunca tiveram um símbolo) foram expressas por uma imagem. A verdadeira pictografia, em que os conceitos eram representados por suas imagens, era resultado da contagem abstrata. (SCHMANDT-BESSERAT, 2010, p. 121).

O verdadeiro início da escrita está relacionado à origem do silabário. Quando os números começaram a funcionar de forma fonética os símbolos silabários não representavam mercadorias ou conceitos e sim, sons.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos este trabalho com o intuito de compreender como o sistema de numeração cuneiforme funcionava e como ele era utilizado pelos povos da Mesopotâmia; como os cientistas concluíram que o sistema cuneiforme consistia na base 60 e que, por sua vez, era posicional, sem contar com conhecimentos prévios; como se deu o processo de criação do sistema de escrita e de numeração cuneiforme e quais foram os dispositivos que precederam esse processo e como esses dispositivos eram e como os povos antigos os usavam.

Para encontrarmos respostas, buscamos estudar obras de grandes autores referenciados como Aaboe (2013), Eves (2004), Katz (2013), Kriwaczek (2018), Roque (2012), Schmandt-Besserat (2010) e outros grandes autores.

Como resultado de nossos estudos, por meio das referências que tivemos acesso, encontramos importantes respostas e esclarecimentos às incógnitas que tínhamos a respeito dos povos que se estabeleceram na região mesopotâmica e o legado deixado por eles, inclusive a criação do sistema de escrita e de numeração.

Com relação à escrita na Mesopotâmia, até pouco tempo acreditava-se em mitos, crenças ou mesmo teorias que apresentavam ideias a respeito do surgimento da escrita. Porém, isso caiu por terra após as escavações em Uruk e os trabalhos dos cientistas aos quais são apresentados no trabalho de Denise Schmandt-Besserat. Sobre o sistema de numeração na mesma região, sempre caminhou lado a lado com a escrita desde o início. Este surgiu devido à necessidade de contar, registrar dados e entre outros fatores, organizar a sociedade que ali estava se formando naquela época.

Ao longo do caminho nos deparamos com alguns obstáculos, como por exemplo, as mudanças de tema e consequentemente o roteiro das linhas de pesquisa. Também sentimos um pouco de dificuldade para traduzir o livro da Denise Schmandt-Besserat visto que o mesmo se encontrava disponível apenas na língua inglesa. Assim, utilizamos a inteligência artificial (Google Tradutor) ao nosso favor, porém, como este recurso não traduz 100% do sentimento transmitido (colocação e conjugação das palavras) pela autora, então em casos específicos se fez necessário uma interpretação de forma mais cuidadosa.

Apesar de tudo, alcançamos todos os nossos objetivos de pesquisa dos quais os apresentamos no presente trabalho de uma maneira mais didática, acessível a qualquer leitor interessado no conhecimento histórico do sistema de numeração cuneiforme e sua utilidade e funcionamento aos povos mesopotâmicos.

Em trabalhos futuros pretendemos buscar estudar a fundo as contribuições do sistema cuneiforme para o desenvolvimento da Matemática e da contabilidade até os dias atuais. Isso, visto que, com base nas pesquisas realizadas para este trabalho conhecemos a história por trás de sua origem e qual foi a principal necessidade que levou ao seu surgimento.

Também, um dos possíveis desdobramentos ou consequências dessa monografia é a possibilidade de um desenvolvimento de um projeto didático abrangendo a alfabetização na educação básica através da matemática significativa, culturalmente experimentada.

Finalizamos este trabalho exaltando o legado deixado pelos povos mesopotâmicos. Sua herança nas diversas áreas como a matemática, a arquitetura, a engenharia, a astronomia, entre outras áreas, permitiu a evolução dos povos e das sociedades que tomaram suas ideias e as aperfeiçoaram a cada passo dessa evolução. Contudo, ainda temos muito o que conhecer sobre os povos mesopotâmicos e o legado deixado por essa civilização tão inspiradora e que teve um papel tão importante na história da humanidade.

Referências

AABOE, Asger. Episódios da história antiga da matemática. Tradução: João Bosco Pitombeira. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

CARVALHO, Ursula. Apostila de História da Indumentária. CEFET/SC, 2017.
Disponível em: https://pt.scribd.com/document/98246903/Historia-Indumentaria
Acesso em: 11/03/2024

CASTRO, Fabiano dos Santos; LANDEIRA-FERNANDEZ, Jesus. Alma, mente e cérebro na Pré-história e nas primeiras civilizações humanas. Psicologia: reflexão e crítica, v. 23, p. 141-152, 2010.
Disponível em: https://www.scielo.br/j/prc/a/YD3jJrSVtHgcNjYrJCyScVJ/abstract/?lang=pt
Acesso em: 11/03/2024

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues, 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GONÇALVES, Miguel. Análise de práticas contabilísticas na antiga civilização mesopotâmica. Enfoque: Reflexão Contábil. Paraná, v.29, n. 01, p. 9-17, 2010.
Disponível em: https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/Enfoque/article/view/10133
Acesso em: 11/03/2024

KATZ, Victor J. A history of mathematics, 3ª ed. New York: Pearson Education, 2009, 976 p.
Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6075667/mod_resource/content/1/Victor%20J.%20Katz%20-%20A%20History%20of%20Mathematics-Pearson%20%282008%29.pdf
Acesso em: 11/03/2024

KRIWACZEK, Paul. Babilônia: a mesopotâmia e o nascimento da civilização. Tradução: Vera Ribeiro. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2018.

MENDONÇA, Paulo Roberto Soares. Da Cidade como Núcleo Político das Civilizações da Antiguidade: Egito e Mesopotâmia. Revista de Direito da Cidade, v. 05, n. 01, p. 170-196, 2013.
Disponível em: https://www.e-publicacoes.uerj.br/rdc/article/view/10362
Acesso em: 11/03/2024

ROQUE, Tatiana. História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SCHMANDT-BESSERAT, Denise. How writing came about. University of Texas Press, 2010.