



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**CAMPUS A.C SIMÕES**  
**CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

# **Teorema dos 4 Vértices**

João Pedro

Maceió - AL

2023

João Pedro Silva

## **Teorema dos 4 Vértices**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

Maceió - AL

2023

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586t

Silva, João Pedro.

Teorema dos 4 vértices / João Pedro Silva. - 2024.  
23 f. : il.

Orientador: José Anderson de Lima e Silva.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura)  
– Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 23.

1. Curvas convexas. 2. Quatro vértices, Teorema dos. 3. Curvas planas. 4.  
Curvas simples. 5. Curvas fechadas. I. Título.

CDU: 514.752.2



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**CAMPUS A.C. SIMÕES**  
**CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**JOÃO PEDRO SILVA**

**TEOREMA DOS 4 VÉRTICES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 07 de dezembro de 2023.

**Banca examinadora**

---

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva – UFAL (Orientador)

---

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva – UFAL (Examinador)

---

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva – UFAL (Examinador)

*Aos meus pais e minha noiva.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus, por me presentear com cada uma das pessoas que citarei posteriormente, que me deu a vida e razões para gastá-la. Também agradeço àquela que, antes de ser senhora nossa, foi senhora de si mesma, Santa Maria.

Agradeço à minha família, em especial meus pais, que insistiram na minha educação, principalmente na infância e que me deram toda uma base familiar tão importante para mim.

Agradeço à minha esposa Jaiane por sempre estar do meu lado e abraçar meus sonhos como os dela.

Agradeço ao meu orientador por toda a compreensão, olhando para mim não somente como mais um estudante, mas como ser humano e ter se adaptado à minha rotina. Também por ter me orientado com paciência e ter me instruído não somente a fazer mais um trabalho, mas a adentrar ao mundo acadêmico da melhor forma possível.

*“Senhor que eu empregue a minha vida numa causa que vale  
apena”*

*(Dom Henrique)*

# Resumo

No presente trabalho, iremos revisitar alguns conceitos básicos de cálculo diferencial e, posteriormente, introduzir os conceitos de geometria diferencial referentes às curvas planas, especialmente as equações de Frenet, que nos proporcionarão uma ideia da curvatura, a qual será fundamental para o conceito de vértices de uma curva plana. Para o alcance desse resultado, utilizaremos os conceitos de comprimento de arco, curvatura de uma curva, vetores normal e tangente a um ponto, além de conduzir um estudo detalhado sobre cada um desses conceitos.

**Palavras-chave:** Curvas convexas; Teorema dos 4 Vértices; Curvas Planas; Curvas simples; Curvas fechadas.

# Abstract

In the present work, we will review some basic concepts of differential calculus and subsequently introduce the concepts of differential geometry related to plane curves, especially the Frenet equations, which will give us an idea of curvature crucial for the concept of vertices in a plane curve. To achieve this result, we will use the concepts of arc length, curve curvature, normal and tangent vectors at a point, and conduct a thorough study of each of these concepts.

**Keywords:** Convex curves; 4-vertex theorem; Plane curves; Simple curves; Closed curves

# Sumário

<b>Sumário</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>Lista de ilustrações</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>1 Introdução</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>2 Preliminares</b> . . . . .	<b>9</b>
2.1 Curvas Parametrizadas . . . . .	9
2.2 Curvas Regulares e Comprimento de Arco . . . . .	12
2.3 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco . . . . .	14
2.4 Propriedades globais das curvas planas . . . . .	16
<b>3 Teorema dos 4 Vértices</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>4 Conclusão</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>23</b>

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Círculo de raio 1 - Geogebra . . . . .	10
Figura 2 – Exemplo 2.3 - Geogebra . . . . .	10
Figura 3 – Exemplo 2.4 - Geogebra . . . . .	10
Figura 4 – Curva - Geogebra . . . . .	12
Figura 5 – Aproximação de comprimento de arco - Geogebra . . . . .	13
Figura 6 – Ciclóide - Geogebra . . . . .	14
Figura 7 – Elipse - Geogebra . . . . .	19
Figura 8 – Teorema dos 4 vértices. Fonte: DO CARMO . . . . .	20
Figura 9 – Teorema dos 4 vértices. Fonte: DO CARMO . . . . .	20
Figura 10 – Cardióide. Geogebra . . . . .	21

# 1 Introdução

O presente trabalho tem como objetivo a demonstração do teorema dos quatro vértices, inicialmente provado em 1909 por Syamadas Mukhopadhyaya, sendo, portanto, um resultado relativamente recente na história da matemática. Este teorema estabelece que uma curva plana simples, fechada, convexa e suave possui pelo menos quatro pontos extremos, sendo dois máximos locais e dois mínimos locais, os quais chamamos de vértices.

A beleza do teorema reside em sua simplicidade e amplitude de aplicações, uma vez que uma variedade de figuras pode ser classificada como simples, fechada e convexa. Devido a essa diversidade de aplicações, o teorema é utilizado em diversas áreas que envolvem a geometria de curvas planas, evidenciando a propriedade dos 4 vértices, que podem ser colineares ou formar um quadrado, sendo empregado em problemas de otimizações geométricas.

Nosso objetivo é facilitar a compreensão do leitor sobre a demonstração desse teorema fundamental na geometria diferencial, servindo, em certos casos, como auxílio na introdução de estudantes a essa área vasta e rica da matemática, aplicada em diversas áreas, desde design até engenharias e computação.

Neste estudo teórico, desenvolveremos a partir de conceitos básicos de cálculo diferencial e integral, assim como da geometria analítica, utilizando axiomas, proposições e teoremas. No próximo capítulo, revisaremos, definiremos e esclareceremos os conceitos a serem utilizados, começando pelas curvas diferenciais parametrizadas, passando por vetores e discorrendo sobre as propriedades básicas de uma curva.

Em seguida, na próxima seção, abordaremos os conceitos de comprimento de arco de uma curva diferencial parametrizada e a reparametrização desta última pelo seu comprimento de arco. Em seguida, discutiremos os conceitos de curvatura e vetor normal. Na última seção do capítulo 2, examinaremos algumas propriedades das curvas e dos conceitos explicados.

Já no capítulo 3, abordaremos finalmente o resultado principal, concluindo os conceitos necessários com as definições de curvas convexas e vetores de uma curva, discutiremos um lema de grande importância para a demonstração apresentada e, por fim, exporemos o teorema principal.

## 2 Preliminares

Neste capítulo iremos contruir a fundação para o estudo do resultado principal, buscando esclarecer notações e definições necessárias ao bom entendimento do texto.

### 2.1 Curvas Parametrizadas

Denotaremos por  $\mathbb{R}^2$  o conjunto dos termos ordenados  $(x, y)$  com  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$ . Utilizaremos a notação  $x'(t)$  ou  $\frac{dx}{dt}$  para nos referirmos a derivada primeira de uma função de uma variável  $x(t)$ . Diremos que uma função de uma variável real é diferenciável se esta possuir derivadas de todas as ordens em todos os pontos.

A princípio, adotaremos uma primeira definição de curva, no entanto, esta não será suficiente para nosso propósito:

**Definição 2.1.** Uma *Curva diferenciável parametrizada* é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um intervalo aberto  $I = (a, b)$  da reta real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Ao dizer que  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  é *diferenciável*, queremos dizer que as funções  $x(t), y(t)$  são diferenciáveis. Diremos que  $t$  é o parâmetro da curva. O conceito de intervalo é considerado de forma ampla, sem excluir os casos  $a = -\infty$  e  $b = \infty$ . O vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \in \mathbb{R}^2$  é chamado o *vetor tangente* ( $T$ ) ou *vetor velocidade* da curva  $\alpha(t)$ . A imagem  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$  é chamado *traço* da curva  $\alpha$ , tal traço é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , diferente da curva parametrizada  $\alpha(t)$  que é uma aplicação diferenciável.

**Exemplo 2.1.** A curva diferenciável parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), t \in (0 - \epsilon, 2\pi + \epsilon), \epsilon \in \mathbb{R}_+$$

Tem seu traço dado por um círculo:  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Exemplo 2.2.** A curva diferenciável parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (\sin 2t, \cos 2t), t \in (0 - \epsilon, \pi + \epsilon), \epsilon \in \mathbb{R}_+$$

possui o mesmo traço do exemplo anterior (Figura 1), porém seu vetor velocidade é o dobro em módulo daquele. Isso nos ajuda a separar o conceito de curva do conceito de seu traço.

**Exemplo 2.3.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  é uma curva diferenciável parametrizada (Figura 2), onde  $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$ ; isto é, a aplicação não é biunívoca.

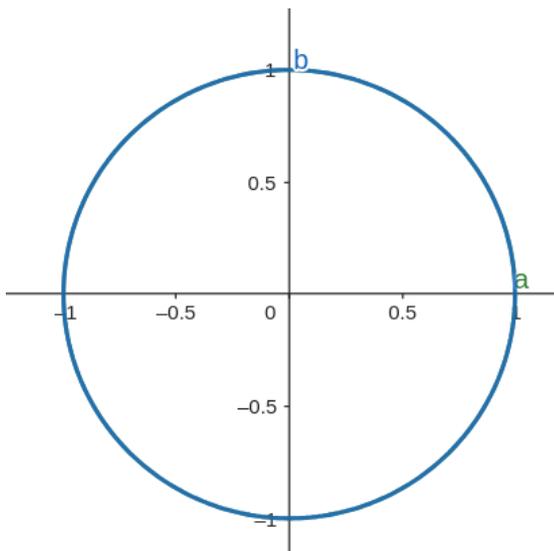


Figura 1 – Círculo de raio 1 - Geogebra

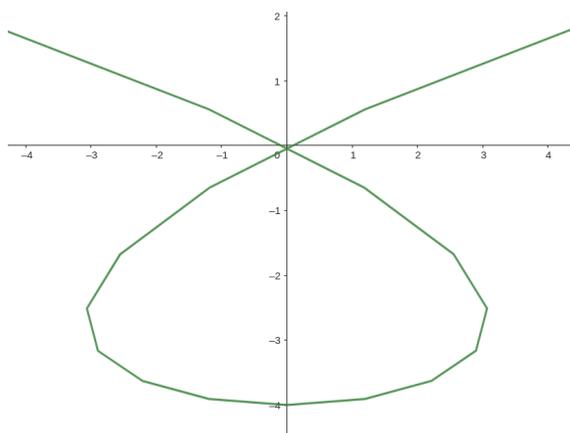


Figura 2 – Exemplo 2.3 - Geogebra

**Exemplo 2.4.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t, |t|)$  não é uma curva diferenciável parametrizada (Figura 3), pois não é diferenciável em  $t = 0$ .

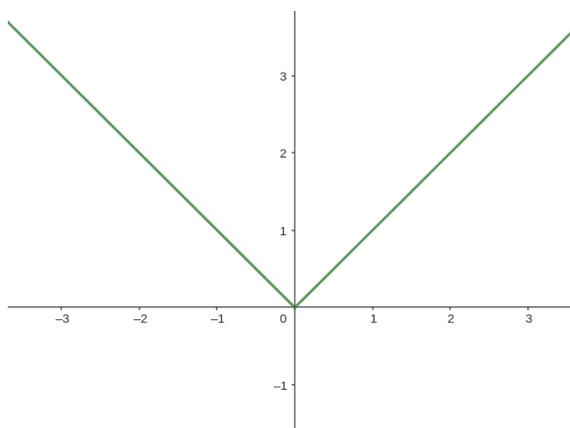


Figura 3 – Exemplo 2.4 - Geogebra

Recordaremos agora os conceitos de *norma*(ou *comprimento*) de um vetor  $u = (u_1, u_2)$

e o produto interno entre dois vetores, o primeiro é definido por

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Podemos interpretar geometricamente  $|u|$  como sendo a distância do ponto  $u = (u_1, u_2)$  à origem  $O$ . Dados dois vetores  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , e seja  $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$ , o ângulo formado pelos segmentos  $Ou$  e  $Ov$ . O *produto interno*  $u \cdot v$  é definido por

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta.$$

Para o produto interno entre dois vetores valem as seguintes propriedades:

1. Admita que  $u$  e  $v$  sejam vetores não-nulos. Então  $u \cdot v = 0$  se e somente se  $u$  é ortogonal a  $v$ .
2.  $u \cdot v = v \cdot u$ .
3.  $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$ .
4.  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ .

Para se obter uma expressão útil para o produto interno, tome  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . Pode-se facilmente verificar que  $e_i \cdot e_j = 1$  se  $i = j$  e  $e_i \cdot e_j = 0$  se  $i \neq j$ , onde  $i, j = 1, 2$ . Podemos assim escrever:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2$$

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2$$

Utilizando as propriedades 3 e 4, obtemos:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Logo, se  $u(t)$  e  $v(t)$  são curvas diferenciáveis, então  $u(t) \cdot v(t)$  é uma função diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t) \cdot v(t) + v'(t) \cdot u(t).$$

**Exemplo 2.5.** Dada a curva  $u(t) = (\text{sen}(t), \text{cos}(t))$ , e a curva  $v(t) = (\text{cos}(t), \text{sen}(t))$  iremos calcular a derivada do produto interno entre o vetor  $u$  e o vetor  $v$  no ponto  $t = 2\pi$ :

$$u'(t) = (\text{cos}(t), -\text{sen}(t)), v'(t) = (-\text{sen}(t), \text{cos}(t))$$

$$u'(2\pi) \cdot v(2\pi) = \text{cos}(2\pi)\text{cos}(2\pi) + (-\text{sen}(2\pi))(\text{sen}(2\pi)) = 1$$

$$u(2\pi) \cdot v'(2\pi) = (-\text{sen}(2\pi))(\text{sen}(2\pi)) + \text{cos}(2\pi)\text{cos}(2\pi) = 1$$

$$\frac{d}{dt}(u(2\pi) \cdot v(2\pi)) = u'(2\pi) \cdot v(2\pi) + v'(2\pi) \cdot u(2\pi) = 1 + 1 = 2.$$

## 2.2 Curvas Regulares e Comprimento de Arco

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável parametrizada. Para cada  $t \in I$ , tal que a sua derivada seja diferente de zero, tome uma reta que passa por  $\alpha(t)$  e contenha o vetor  $\alpha'(t)$ . Tal reta será chamada *reta tangente* a  $\alpha$  em  $t$ .

**Definição 2.2.** Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é chamada *regular* se  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

**Exemplo 2.6.** A aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^2, t^3)$  apesar de ser uma curva diferenciável parametrizada, não é chamada regular, pois  $\alpha'(0) = (0, 0)$ ; isto é, seu vetor tangente é nulo neste ponto. (Figura 4)

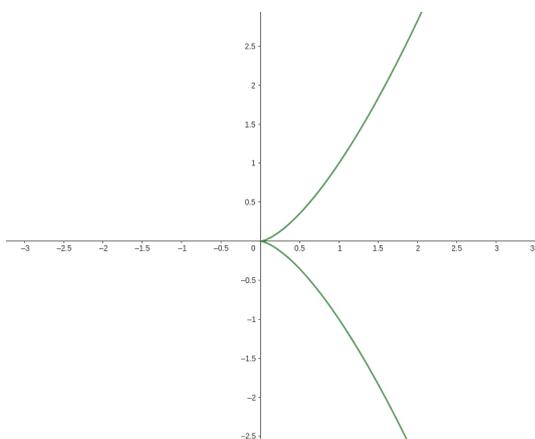


Figura 4 – Curva - Geogebra

A partir deste ponto, consideraremos apenas curvas diferenciáveis parametrizadas regulares (a palavra diferenciável será omitida por comodidade).

Para introduzirmos o conceito de comprimento de arco de uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , será feita a seguinte motivação: Tome  $a < b \in I$  e considere uma partição do intervalo fechado  $[a, b]$  como sendo um conjunto finito

$$P = [t_0, t_1, \dots, t_n] \subset [a, b]$$

em que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . A união dos segmentos de reta cujos extremos são os pontos  $\alpha(t_{i-1})$  e  $\alpha(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , é dita a linha poligonal determinada por tais pontos. Seu comprimento então pode ser definido como a soma dos comprimentos de seus segmentos ( Figura 5):

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|.$$

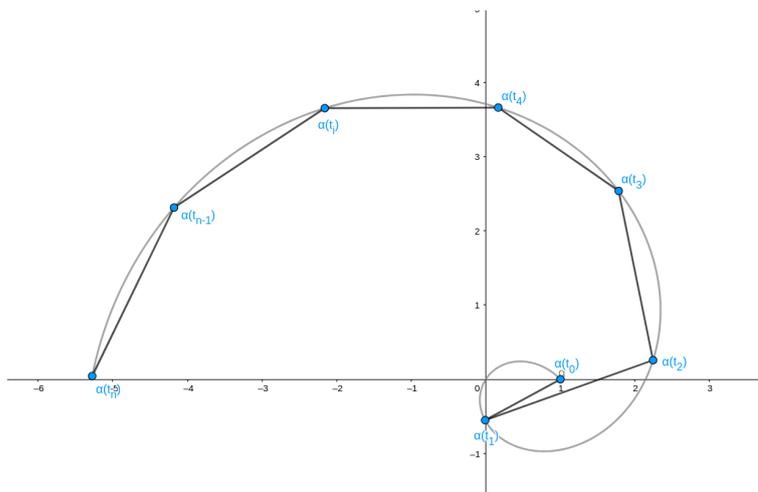


Figura 5 – Aproximação de comprimento de arco - Geogebra

Pelo teorema do valor médio, temos que existe  $t_1^*$  tal que  $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) = \alpha'(t_i^*)\Delta t$ . Logo,

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n |\alpha'(t_i^*)\Delta t| = \sum_{i=1}^n |\alpha'(t_i^*)|\Delta t.$$

Podemos verificar então que  $l(\alpha, P)$  é limitada e possui supremo igual a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(\alpha, P) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\epsilon)|d\epsilon,$$

o que chamaremos de comprimento da curva  $\alpha$  na definição a seguir:

**Definição 2.3.** Dado  $t_0 \in I$ , o *comprimento de arco* de uma curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , a partir do ponto  $t_0$ , é

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)|dt$$

onde

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ . Como  $\alpha'(t) \neq 0$ , o comprimento de arco  $s$  é uma função diferenciável de  $t$  e  $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$ .

Caso aconteça de o parâmetro  $t$  de uma curva  $\alpha$  já ser o comprimento de arco medido a partir de um certo ponto ( $t = s$ ), diremos que esta curva está *parametrizada pelo comprimento de arco* e,  $\frac{ds}{dt} = 1 = |\alpha'(t)|$ . Reciprocamente, se  $|\alpha'(t)| = 1$ , então

$$s(t) = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

onde  $t$  é o comprimento de arco de  $\alpha$  medido de algum ponto. Para simplificar a exposição, vamos nos restringir às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco  $s$ . Vamos também

estabelecer a seguinte convenção: Dada uma curva  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in (a, b)$ , podemos considerar uma curva  $\beta$  definida em  $(-b, -a)$  por  $\beta(-s) = \alpha(s)$  com o mesmo traço de  $\alpha$ , porém em sentido contrário. Diremos que tais curvas diferem por uma *mudança de orientação*.

**Exemplo 2.7.** Um disco circular de raio 1 gira sem escorregar ao longo do eixo Ox. A figura descrita por um ponto da circunferência do disco é chamada uma cicloide (figura 6).

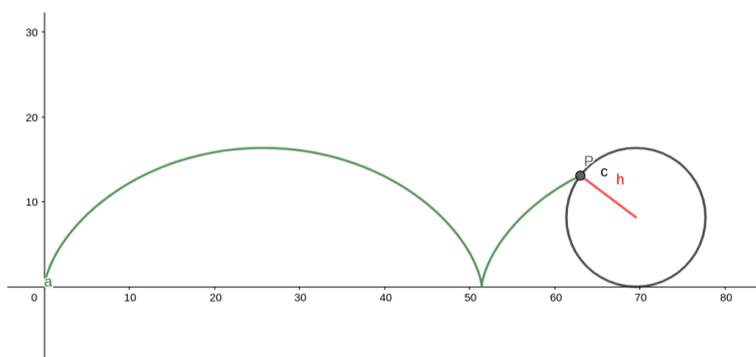


Figura 6 – Cicloide - Geogebra

Vamos obter uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada cujo traço seja uma cicloide e calcular o comprimento de arco da cicloide correspondente a uma rotação completa do disco:

Tomando o disco de raio um, observamos que a coordenada x avança junto ao eixo do disco, porém com a subtração do seno do ângulo  $\theta$  formado entre o ponto inicial com o ponto que desenha a figura. e a coordenada y é formada pelo y do centro do disco, neste caso o raio 1, subtraindo dele o cosseno do ângulo  $\theta$ . Podemos então parametrizar uma curva cicloide de raio 1 como sendo:

$$\alpha(\theta) = (\theta - \sin \theta, 1 - \cos \theta).$$

Para calcular o comprimento do traço formado por uma volta, teremos:

$$s(t) \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} |\alpha'(\theta)| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \theta}.$$

Utilizando o arco metade,

$$s(t) \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = \int_0^{2\pi} 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) = \left( 4 \cos \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8.$$

### 2.3 Teoria Local das Curvas Parametrizadas pelo Comprimento de Arco

Seja  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}$ , uma curva regular e comprimento s de  $t_0$  a  $t$  dado por

$$s(\beta) = \int_{t_0}^t |\beta'(t)| dt$$

Iremos reparametrizar esta curva em função de seu comprimento. Observe que  $s'(t) = |\beta'(t)| > 0, \forall t \in (a, b)$ . Podemos concluir que  $s$  é estritamente crescente e, conseqüentemente bijetora, portanto,  $s$  possui uma inversa  $h = s^{-1} : J \rightarrow I$  e, utilizando o teorema da função inversa, temos que  $(s^{-1})'(u) = \frac{1}{|\beta'(h(u))|}$ . Definindo uma curva  $\alpha(s) = \beta(h(s))$ , temos que  $\alpha$  esta parametrizada por comprimento de arco, posto que

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \beta(h(s)) \\ \alpha'(s) &= \beta'(h(s))h'(s) \\ |\alpha'(s)| &= \left| \frac{\beta'(h(s))}{|\beta'(h(s))|} \right| = 1\end{aligned}$$

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco dada por  $\alpha(s) = x(s), y(s)$ . Tome um vetor  $n(s)$  ortogonal à tangente( $T$ ) de  $\alpha$  dado por:

$$n(s) = (-y'(s), x'(s).)$$

Este vetor é chamado *vetor normal* de uma curva  $\alpha$ . O conjunto de vetores  $T$  e  $n$  é dito *Referencial de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ . A reta normal a  $\alpha$  em  $s_0$  é a reta que passa por  $\alpha(s_0)$  na direção de  $n(s_0)$ . Como  $T(s)$  é unitário,  $T'(s)$  é ortogonal a  $T(s)$  e portanto  $T'(s)$  é proporcional a  $n(s)$ . A este fator de proporcionalidade chamamos de *curvatura*( $k$ ) de  $\alpha$  em  $s$ , ou seja,

$$T'(s) = k(s)n(s).$$

Segue-se desta definição que

$$T'(s) \cdot n(s) = -x''(s)y'(s) + y'(s)x''(s) = k(s)(x'(s)^2 + y'(s)^2) = k(s)$$

$$k(s) = T'(s) \cdot n(s)$$

$$n'(s) \cdot T(s) = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s) = -k(s)$$

$$n'(s) = -k(s)T(s)$$

As seguintes equações são chamadas *Equações de Frenet*.

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)n(s), \\ n'(s) = -k(s)T(s). \end{cases}$$

**Teorema 2.4.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Então a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  é dada pela expressão:

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

*Demonstração.* Seja  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma reparametrização pelo comprimento de arco de  $\alpha$ . Visto que  $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ , então, pela regra da cadeia,

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = \beta'(s)s'(t)$$

e

$$(x''(t), y''(t)) = \alpha''(t) = \beta''(s)[s'(t)]^2 + \beta'(s)s''(t)$$

. A partir disto e como o módulo de  $\beta'(s)$  é unitário, temos que

$$\alpha''(t) \cdot n(s(t)) = (|\alpha'|^2)(\beta''(s) \cdot n(s(t))) + (s''(t))(T(s(t)) \cdot n(s(t))).$$

Como  $T$  e  $n$  são ortonormais e  $k(s(t)) = \beta''(s) \cdot n(s(t))$ , temos que

$$k(t) = \frac{\alpha''(t) \cdot n(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

□

## 2.4 Propriedades globais das curvas planas

**Definição 2.5.** Uma *função diferenciável num intervalo fechado*  $[a, b]$  é a restrição de uma função diferenciável definida em um intervalo aberto contendo  $[a, b]$

**Definição 2.6.** Uma *curva plana fechada* é uma curva parametrizada regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha$  e todas as suas derivadas coincidam em  $a$  e  $b$ ; isto é

$$\alpha(a) = \alpha(b), \alpha'(a) = \alpha'(b), \alpha''(a) = \alpha''(b), \dots$$

Admitiremos que uma curva fechada simples  $C$  no plano delimita uma região do plano limitada que é chamada de interior de  $C$ .

**Definição 2.7.** Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana fechada dada por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Como  $s$  é o comprimento de arco, temos que seu vetor tangente é unitário. Chamamos de *Indicatriz tangente* a curva  $t : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $t = (x'(s), y'(s))$  cujo traço esta contido num círculo de raio 1.

Observe que o vetor velocidade da indicatriz tangente é igual à segunda derivada da curva  $\alpha$ :

$$t'(s) = \alpha''(s) = kn,$$

onde  $n$  é o vetor normal e  $k$  é a curvatura de  $\alpha$ .

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, logo  $|\alpha'(t)| = 1$  e então

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.$$

Temos então que existe uma função  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$x'(s) = \cos(\theta(s)), y'(s) = \sin(\theta(s)).$$

Dado que  $\theta(s) = \arctan\left(\frac{y'(s)}{x'(s)}\right)$ ,

Podemos concluir que  $T$  está localmente bem definida (isto é, bem definida num pequeno intervalo em torno de cada  $s$ ) como uma função diferenciável e também,

$$x''(s) = -\theta'(s) \sin(\theta(s)), y''(s) = \theta'(s) \cos(\theta(s)),$$

ou seja,  $T'(s) = \theta'(s)n(s)$ . Utilizando as equações de Frenet, obtemos

$$\theta'(s) = k(s),$$

Daí definimos a função  $\theta(s)$ ,

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(\epsilon) d\epsilon.$$

Concluimos então que se existir uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  parametrizada pelo comprimento de arco de curvatura  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem as equações:

$$x'(\tau) = \cos\left(\int_{s_0}^{\tau} k(\epsilon) d\epsilon\right),$$

$$y'(\tau) = \sin\left(\int_{s_0}^{\tau} k(\epsilon) d\epsilon\right),$$

$$x'(s_0) = \cos(\theta(s_0)) \text{ e } y'(s_0) = \sin(\theta(s_0)).$$

Intuitivamente,  $\theta(s)$  mede o ângulo descrito pelo ponto  $t(s)$  da indicatriz tangente à medida em que percorremos a curva  $\alpha$ . Como  $\alpha$  é uma curva fechada, temos que esse ângulo é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , e portanto,

$$\theta(s) = \int_0^s k(\epsilon) d\epsilon = \theta(s) - \theta(0) = 2\pi I.$$

Este número inteiro  $I$  é o que chamaremos de Índice de Rotação da Curva  $\alpha$ .

### 3 Teorema dos 4 Vértices

Para iniciar a exposição do teorema, precisaremos de mais alguns conceitos, iremos neste capítulo expor estes últimos conceitos e apresentar o teorema.

**Definição 3.1.** Uma *curva plana regular* (não necessariamente fechada)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é *convexa* se, para todo  $t \in [a, b]$ , o traço  $\alpha([a, b])$  de  $\alpha$  esta totalmente contido em um lado do semi-plano fechado determinado pela reta tangente em  $t$ .

**Definição 3.2.** Uma *curva plana regular* (não necessariamente fechada)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *simples* se a aplicação  $\alpha$  for injetiva, ou seja, se  $t_1 \neq t_2$  então  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ ,  $t_1, t_2 \in [a, b]$ .

**Definição 3.3.** Um ponto  $t \in [a, b]$  é dito *vértice* de uma curva plana regular  $\alpha$  quando  $k'(t) = 0$ .

**Exemplo 3.1.** A elipse

$$x = a \cos(t), y = b \sin(t), t \in [0, 2\pi], a \neq b$$

pode ter sua curvatura calculada a partir do teorema 2.4:

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

$$k'(t) = \frac{-3ab(a^2 - b^2) \sin(2t)}{2(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{\frac{5}{2}}}$$

Daí temos que  $k'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(2t) = 0$  e portanto temos 4 vértices:  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$  e  $(0, -b)$ .

Apresentaremos agora um lema de fundamental importância para provarmos o resultado principal.

**Lema 3.4.** Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana fechada, parametrizada pelo comprimento de arco, dados A, B e C números arbitrários, temos

$$\int_0^l (Ax + By + C) \frac{dk}{ds} ds = 0, \quad (3.1)$$

onde as funções  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  são dadas por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  e  $k$  é a curvatura de  $\alpha$ .

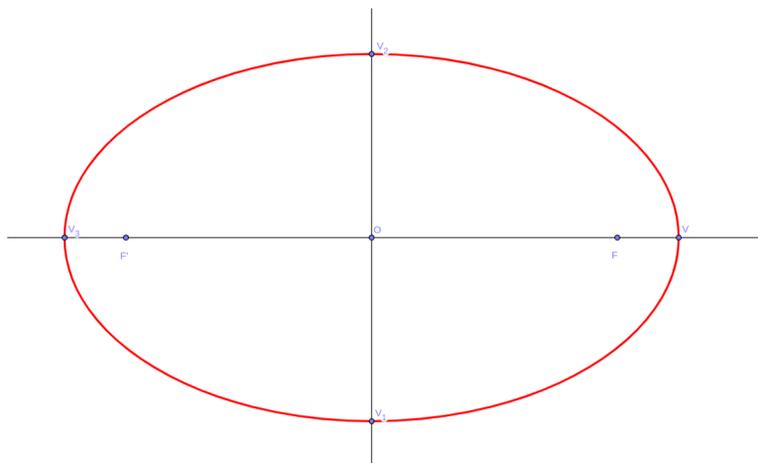


Figura 7 – Elipse - Geogebra

*Demonstração.* Recorde que existe uma função diferenciável  $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x'(s) = \cos \theta$ ,  $y'(s) = \sin \theta$ , portanto  $k(s) = \theta'(s)$  e

$$x'' = -\theta(s) \sin \theta = -ky', y'' = \theta(s) \cos \theta = kx'$$

. Da definição 2.6, temos que

$$\int_0^l k' ds = 0;$$

$$\int_0^l xk' ds = -\int_0^l kx' ds = -\int_0^l y'' ds = 0;$$

$$\int_0^l yk' ds = -\int_0^l ky' ds = \int_0^l x'' ds = 0.$$

□

No exemplo 3.1, vimos que a elipse de diâmetros distintos tem exatamente 4 vértices. O resultado a seguir nos fornece o fato global que nos mostra que este é o número mínimo de vértices para uma curva convexa qualquer.

**Teorema 3.5.** Uma curva simples, convexa e fechada tem pelo menos quatro vértices.

*Demonstração.* Primeiro, parametrizamos a curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  por comprimento de arco. Como a função de curvatura de  $\alpha$ ,  $k(s)$ , é contínua sobre o intervalo fechado  $[0, l]$ , ela atinge um máximo e um mínimo em  $[0, l]$  (Teorema de Weierstrass). Portanto,  $\alpha$  tem pelo menos dois vértices  $\alpha(s_1) = p$  e  $\alpha(s_2) = q$ . Seja  $L$  a reta passando por  $p$  e  $q$ , e sejam  $\beta$  e  $\gamma$  os dois arcos de  $\alpha$  determinados por  $p$  e  $q$  (Figura 8).

Suponha, por absurdo, que algum destes arcos não esteja contido em um dos lados de  $L$ , daí teremos que a curva intersecta  $L$  em um ponto  $r$  distinto de  $p$  e  $q$  (Figura 8). Tome  $p$  como ponto intermediário entre os três pontos  $p, q$  e  $r$  pertencentes a  $\alpha$ , como a curva  $\alpha$  é convexa, a reta tangente no ponto intermediário teria que coincidir com  $L$ , o que, pela

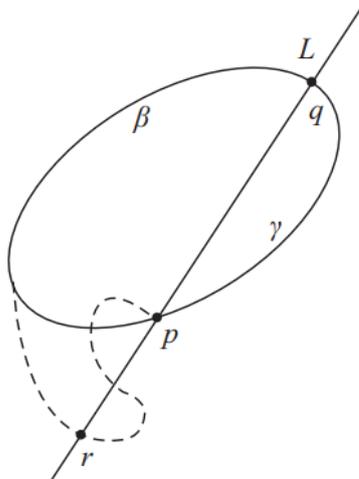


Figura 8 – Teorema dos 4 vértices. Fonte: DO CARMO

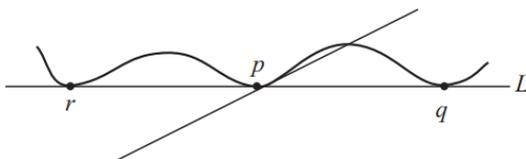


Figura 9 – Teorema dos 4 vértices. Fonte: DO CARMO

convexidade, implica que  $L$  é tangente a  $\alpha$  nos três pontos. Neste caso, a tangente a um ponto próximo a  $p$  (ponto intermediário) teria  $q$  e  $r$  em lados opostos (Figura 9), a menos que o segmento  $rq$  da reta  $L$  estivesse contido em  $\alpha$  o que implica que  $k = 0$  em  $p$  e  $q$ . Como são pontos de máximo e mínimo para  $k$ , temos  $k \equiv 0$  em toda a curva  $\alpha$ , o que nos dá uma contradição.

Seja  $Ax + By + C = 0$  a equação de  $L$ . Se não há outros vértices,  $k'(s)$  mantém um sinal constante em cada um dos arcos  $\beta$  e  $\gamma$ . Podemos ajustar os coeficientes  $A, B$  e  $C$  de modo que a integral em (3.1) seja positiva o que nos dá uma contradição. Tal contradição nos mostra que existe um terceiro vértice e que  $k'(s)$  muda de sinal em  $\beta$  ou em  $\gamma$ , digamos em  $\beta$ . Como  $p$  e  $q$  são pontos de máximo e mínimo,  $k'(s)$  muda de sinal duas vezes em  $\beta$ . Logo, existe um quarto vértice. □

O seguinte exemplo nos mostra o porquê de a curva precisar ser simples para este teorema.

**Exemplo 3.2.** Uma exceção ao teorema exposto, é o cardióide, uma curva em formato de coração dada por  $\alpha(t) = ((1 - 2 \sin t) \cos t, (1 - 2 \sin t) \sin t), t \in [0, 2\pi]$ , o qual terá somente dois vértices:  $t = \pi/2$  e  $t = 3\pi/2$  nos pontos  $(0, -1)$  e  $(0, -3)$ . O teorema não se aplica a curvas que possuem auto interseções (Figura 10).

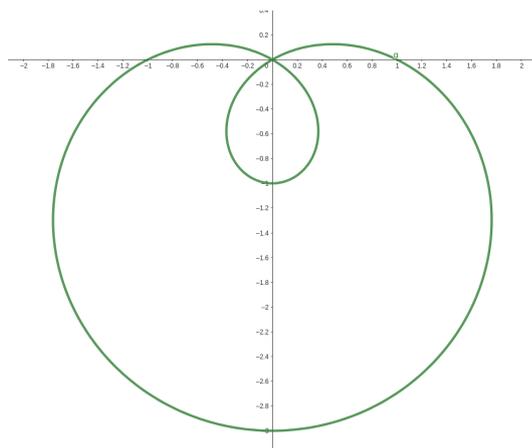


Figura 10 – Cardióide. Geogebra

## 4 Conclusão

O trabalho exposto foi construído com estudo de uma área muito interessante a qual foi exposta uma introdução ao longo do curso de licenciatura em matemática principalmente nas disciplinas de cálculo diferencial e integral e tem por objetivo fazer o leitor compreender este magnífico teorema da área de geometria diferencial.

Foi de grande satisfação a construção deste texto que nos mostra mais uma vez a grandeza da matemática e todos os seus ricos padrões de descrição de figuras.

# Referências

- [1] DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Brasil, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [2] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. S. *Geometria diferencial de curvas no  $\mathbb{R}^2$* . Brasil, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.
- [3] STEWART, J. *Calculo : volume 1*. Brasil, São Paulo: Thomson, 2008.