

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
CAMPUS A. C. SIMÕES
FÍSICA

CARLOS ANTUNIS BONFIM DA SILVA SANTOS

ESTIMATIVA COMPUTACIONAL DE EFEITOS NA PROPAGAÇÃO DA LUZ
SURGENTES EM MEIOS ÓPTICOS FOTORREFRATIVOS

MACEIÓ - AL
2024

CARLOS ANTUNIS BONFIM DA SILVA SANTOS

**ESTIMATIVA COMPUTACIONAL DE EFEITOS NA PROPAGAÇÃO DA LUZ
SURGENTES EM MEIOS ÓPTICOS FOTORREFRATIVOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Campus A. C. Simões.

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

Maceió - AL
2024

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S237e

Santos, Carlos Antunis Bonfim da Silva.

Estimativa computacional de efeitos na propagação da luz surgentes em meios ópticos fotorrefrativos / Carlos Antunis Bonfim da Silva Santos. – 2024. 55 f. : il.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.

Monografia (Trabalho de conclusão de curso em física : bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 32-33.

Apêndices: f. 35-36.

Anexos: f. 38-42.

1. Fenômenos ópticos não-lineares. 2. Estimativa computacional. 3. Efeito fotorrefrativo. I. Título.

CDU: 530.182

Dedico,

Aos meus pais, Carlos Alberto dos Santos e Ilvaneide Bonfim da Silva Santos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar o dom da vida e a capacidade de raciocinar (mesmo a minha não sendo abundante) que me permitiu compreender e assimilar os conhecimentos que me guiaram ao longo da minha formação até o presente momento.

Gostaria de agradecer profundamente aos meus pais, Carlos Alberto dos Santos e Ilvaneide Bonfim da Silva Santos, por sempre me proverem meios para ter uma educação de qualidade, tanto no contexto acadêmico quanto no social, e em extensão aos meus demais familiares por todo o apoio que me deram.

Minha gratidão se estende a todos os amigos que obtive no decorrer da meu ensino médio e graduação, os quais considero como minha família acadêmica, por todas as conversas que me animaram em momentos difíceis, em especial à minha amada namorada e companheira Joana Mércia Guimarães Lira Silva, por me permitir fazer morada em seu coração e pelo apoio incondicional sempre que se fez necessário.

Aos servidores do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, excluindo apenas alguns que erroneamente se denominam professores mas que em nada representam tal importante profissão quase vindo a destruir por completo todo o amor que um dia tive pela Física e Matemática, gostaria de agradecer enormemente. Em especial, meus agradecimentos englobam os Professores Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura (pela sua amizade e conselhos não apenas acadêmicos mas também de vida) e Guilherme Martins Alves de Almeida (por toda a ajuda, importantes conselhos acadêmicos e orientações no começo de minha graduação), ao Professor Dr. Alcenísio José de Jesus Silva (pela sua orientação, amizade, e por me apresentar e auxiliar enormemente no meu desenvolvimento no ramo da Física que hoje me encontro), aos professores Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca e Dr. Jonathas Matias de Oliveira (pelas maravilhosas críticas construtivas que me auxiliaram muito a conectar meus conhecimentos teóricos e computacionais à experiência em laboratório), e por fim aos servidores Miguel e Jane (pela amizade desenvolvida por diversas animadas conversas pela manhã).

Ademais, a todos que de algum modo contribuíram na minha formação, como meus professores de ensino fundamental e médio de Matemática, Física e Química (que incitaram minha curiosidade pelos fenômenos da natureza e sua incrível regularidade matemática) e alguns discentes da pós-graduação do Instituto de Física (que tenho a honra de ter como amigos), como Jefferson da Rocha Silva (a quem devo em grande parte a minha aprovação em Mecânica Quântica 2, sendo o importantíssimo dx que faltava - a quem entender), meus mais profundos agradecimentos.

“Here, on the edge of what we know, in contact with the ocean of the unknown, shines the mystery and beauty of the world. And it’s breathtaking.”

Carlo Rovelli

RESUMO

A óptica consiste na área que objetiva o estudo da natureza da luz e dos fenômenos decorrentes da sua propagação e interação com a matéria, sendo atualmente uma poderosa fonte de novas tecnologias. Sendo um fenômeno inerentemente eletromagnético, a luz causa alterações de posições, orientações ou formas dos componentes de um material, provocando uma resposta dos materiais que por vezes é não-linear à presença de luz. Mesmo sendo uma descoberta relativamente recente da óptica, tais fenômenos não-lineares compõem uma ampla fonte de tecnologias modernas, em especial às ciências da computação e aos sistemas de comunicação. Nosso trabalho tem por objetivo estudar os efeitos surgentes na propagação da luz em meios fotorrefrativos, onde a resposta não-linear do material altera o índice de refração de maneira proporcional à intensidade da luz propagante, bem como estimar através de métodos numéricos a propagação da luz nesses meios e compará-los aos comportamentos em meios ópticos cuja resposta à luz é puramente linear.

Palavras-Chave: Fenômenos ópticos não-lineares. Estimativa computacional. Efeito fotorrefrativo.

ABSTRACT

Optics consists of the field that aims to study the nature of light and the phenomena resulting from its propagation and interaction with matter, currently being a powerful source of new technologies. As an inherently electromagnetic phenomenon, light causes changes in the positions, orientations, or shapes of material components, eliciting a response from materials that is sometimes nonlinear in the presence of light. Despite being a relatively recent discovery in optics, such nonlinear phenomena constitute a broad source of modern technologies, especially in computer science and communication systems. Our work aims to study the arising effects in the propagation of light in photorefractive media, where the nonlinear response of the material alters the refractive index in proportion to the intensity of the propagating light, as well as to estimate through numerical methods the propagation of light in these media and compare them to behaviors in optical media whose response to light is purely linear.

Keywords: Non-linear optical phenomena. Computational estimation. Photorefractive effect.

LISTA DE FIGURAS

1	Ilustração do espectro de comprimentos de onda e frequências da luz, que se divide em três principais subdivisões: a luz ultravioleta (UV - 10 <i>nm</i> a 390 <i>nm</i>), a luz visível (390 <i>nm</i> a 760 <i>nm</i>) e o infra-vermelho (IR - 760 <i>nm</i> a 300 μm). A luz IR compreende as bandas do infravermelho próximo (NIR), infravermelho médio (NIR) e infravermelho distante (FIR). A luz UV, por sua vez, abrange as bandas do ultravioleta próximo (NUV), ultravioleta médio (MUV), o ultravioleta distante (FUV) e ultravioleta extremo (EUV).	14
2	Padrão de intensidade de um feixe gaussiano ao longo de sua propagação num meio cuja propagação é descrita pela aproximação paraxial da equação de Helmholtz.	16
3	Padrão de intensidade de um campo luminoso com aparência granular característico de um fenômeno de luz speckle.	17
4	Observação da auto-focalização de um feixe laser monomodo na janela de saída de uma célula de tolueno de comprimentos distintos.	18
5	Ilustração do movimento das cargas ligadas num meio dielétrico sujeito a um campo elétrico alternado com uma frequência bem definida na faixa do visível. O movimento dos íons é insignificante comparado ao movimento dos elétrons, que são muito mais leves e portanto apresentam maior mobilidade.	19
6	Ilustração do processo computacional de estimativa da propagação da luz em meios ópticos para um feixe gaussiano com passo de iteração Δz	22
7	Intensidade da luz com perfil de feixe gaussiano de cintura $w_0 = 10 \mu m$ em $z = 0 \mu m$, cuja propagação foi estimada ao longo de meios ópticos com resposta linear (vidro) e não-linear (cristal fotorrefrativo).	24
8	Perfil de intensidade de um feixe gaussiano propagado ao longo de um meio óptico com resposta puramente linear ($n_0 = 1.5078$) à propagação de luz por 1500 μm	25
9	Perfil de intensidade de um feixe gaussiano propagado ao longo de um meio óptico fotorrefrativo ($n_0 = 1.5078$, $\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por 5000 μm	25
10	Amostras de intensidade da luz com perfil de speckle com envelope gaussiano de cintura $w_0 = 10 \mu m$ em $z = 0 \mu m$, cuja propagação foi estimada ao longo de meios ópticos com resposta linear (vidro) e não-linear (cristal fotorrefrativo), para distintos tamanhos de grão.	26
11	Amostra dos perfis de intensidade de um speckle altamente granular propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) com resposta puramente linear à propagação de luz por 100 μm	27
12	Amostra dos perfis de intensidade de um speckle altamente granular propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) fotorrefrativo ($\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por 100 μm	27
13	Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de média granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) com resposta puramente linear à propagação de luz por 100 μm	28
14	Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de média granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) fotorrefrativo ($\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por 100 μm	28
15	Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de baixa granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) com resposta puramente linear à propagação de luz por 100 μm	29

16	Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de baixa granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) fotorrefrativo ($\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por $100 \mu m$	29
----	--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{R}	Vetor posição no espaço euclidiano
∂_u	Operador derivada parcial com respeito à variável independente u
∇^2	Operador laplaciano
ξ	Função de onda da luz
n_0	Índice de refração base de um meio óptico
c_0	Velocidade da luz no vácuo
c	Velocidade da luz num meio óptico
Ψ	Dependência espacial da função de onda da luz
i	Unidade imaginária
∇_{\perp}^2	Operador laplaciano transversal à direção de propagação
\mathbf{r}	Vetor posição no plano transversal à direção de propagação
ψ	Envelope de onda da dependência espacial da função de onda da luz
$w(z)$	Cintura do feixe gaussiano em z
$R(z)$	Raio de curvatura do feixe gaussiano em z
$\zeta(z)$	Fase de Gouy do feixe gaussiano em z
\mathcal{R}	Função resposta do meio óptico à presença de luz
χ	Susceptibilidade do meio óptico à presença de luz
ψ_u	Forma do feixe de luz no plano formado ao fixar a coordenada u
$\psi_{u=a}$	Forma do feixe de luz no plano formado ao fixar a coordenada $u = a$
$\text{div } \mathbf{F}$	Operador divergência do campo vetorial \mathbf{F}
$\text{rot } \mathbf{F}$	Operador rotacional do campo vetorial \mathbf{F}
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
\mathbf{E}	Campo elétrico
\mathbf{E}_{α}	Componente do campo elétrico na direção α
\mathbf{B}	Campo magnético
\mathbf{D}	Campo deslocamento elétrico
\mathbf{H}	Campo magnético auxiliar

ϵ	Permissividade elétrica do meio
μ	Permeabilidade magnética do meio
\cdot^*	Operação de conjugação complexa
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Transformada de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$	Transformada de Fourier inversa
$\cdot * \cdot$	Operação de convolução entre funções

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	FUNDAMENTOS DE ÓPTICA ONDULATÓRIA	14
1.1.1	Propagação de luz laser e óptica de feixes	15
1.1.2	O feixe gaussiano	16
1.1.3	Fenômenos de luz speckle	16
1.2	INTRODUÇÃO À ÓPTICA NÃO-LINEAR	17
1.2.1	Fenômeno de auto-focalização da luz	17
2	MODELO E FORMALISMO	19
2.1	RESPOSTAS NÃO-LINEARES DE MEIOS ÓPTICOS	20
2.1.1	Tensor susceptibilidade em meios com resposta de terceira ordem	20
2.2	RESPOSTAS À LUZ DE MEIOS FOTORREFRATIVOS	21
2.2.1	Propagação da luz em materiais fotorrefrativos	21
3	METODOLOGIA	22
3.1	PROCESSO DE ESTIMATIVA DA PROPAGAÇÃO DA LUZ	22
3.1.1	Estimativas da propagação da luz pelo método split-step	22
4	RESULTADOS OBTIDOS	24
4.1	PROPAGAÇÃO DE UM FEIXE GAUSSIANO	24
4.1.1	Propagação de um feixe gaussiano num meio óptico linear	24
4.1.2	Propagação de um feixe gaussiano num meio fotorrefrativo	25
4.2	PROPAGAÇÃO DE UM SPECKLE COM ENVOLTÓRIA GAUSSIANA	26
4.2.1	Propagação de speckles com alta granularidade	27
4.2.2	Propagação de speckles com granularidade média	28
4.2.3	Propagação de speckles com baixa granularidade	29
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	31
	REFERÊNCIAS	32
	APÊNDICES	34
A	TEORIA ELETROMAGNÉTICA DA LUZ	35
A.1	Equações de maxwell na matéria	35
A.2	Fenômenos eletromagnéticos ondulatórios em meios ópticos	35
	ANEXOS	37
A	EQUAÇÕES DA ÓPTICA ONDULATÓRIA	38
A.1	Equação de Helmholtz	38
A.2	Aproximação paraxial da Equação de Helmholtz	38
B	EQUAÇÕES DA ÓPTICA NÃO-LINEAR	39
B.1	Termo corretivo do efeito Kerr óptico	39
B.2	Equação não-linear de Schrödinger	40
B.3	Aproximação da propagação num cristal fotorrefrativo	40
C	PROPAGAÇÃO DA LUZ NO ESPAÇO LIVRE	41
D	TRANSFORMADA DE FOURIER	42
D.1	Propriedades da transformada de Fourier	42

1 INTRODUÇÃO

A óptica corresponde ao ramo da Física que se atém à investigação da luz e seus fenômenos, buscando assim compreender sua natureza e comportamento, bem como a forma com que interage com a matéria.^[1, 2] Presente na sociedade desde a antiguidade, tem ainda apresentado enormes desenvolvimentos conceituais e diversas possíveis aplicações tecnológicas.^[3-9]

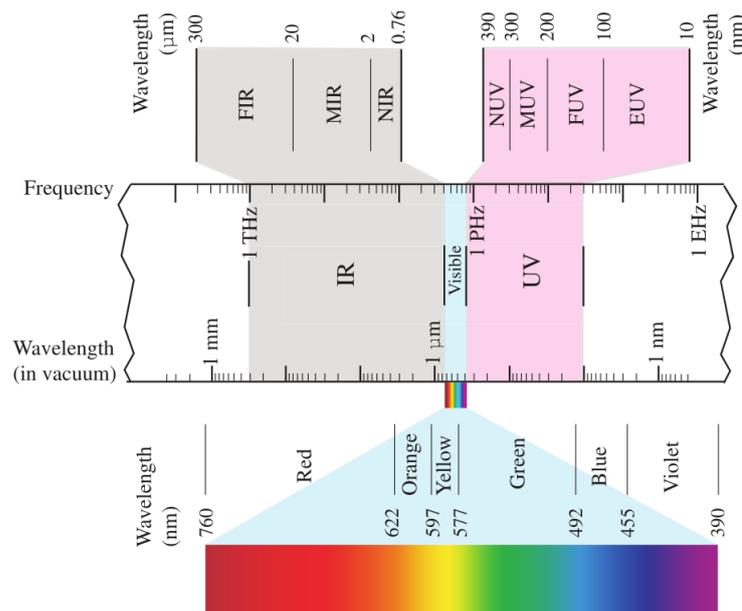
Em acréscimo aos fenômenos ópticos convencionais, sabe-se atualmente que alguns meios ópticos apresentam respostas não-lineares à luz, sendo esse o âmbito de investigações da óptica não-linear.^[1, 2, 10-13] Mesmo sendo um ramo recente da óptica, a óptica não-linear apresenta-se como uma proeminente nova fonte de possíveis aplicações tecnológicas, em especial à ciência da computação e às tecnologias de comunicação.^[14-17]

Objetivamos, no presente trabalho, obter uma estimativa computacional do comportamento da luz laser propagada ao longo de meios ópticos fotorrefrativos, um tipo de meio cuja resposta à luz é não-linear, bem como compreender as bases dos comportamentos não-lineares apresentados em alguns fenômenos ópticos.

1.1 FUNDAMENTOS DE ÓPTICA ONDULATÓRIA

Como ilustrado na Figura 1, por vezes a luz apresenta frequência e o comprimento de onda bem definidos (aspectos inerentemente ondulatórios).^[1, 18, 19] Assim a luz pode ser descrita como um fenômeno ondulatório, o que nos leva a uma formulação ondulatória da óptica, a óptica ondulatória.^[1, 18, 19] Nessa formulação, postula-se que, os fenômenos ópticos podem ser

Figura 1: Ilustração do espectro de comprimentos de onda e frequências da luz, que se divide em três principais subdivisões: a luz ultravioleta (UV - 10 nm a 390 nm), a luz visível (390 nm a 760 nm) e o infra-vermelho (IR - 760 nm a 300 μm). A luz IR compreende as bandas do infravermelho próximo (NIR), infravermelho médio (MIR) e infravermelho distante (FIR). A luz UV, por sua vez, abrange as bandas do ultravioleta próximo (NUV), ultravioleta médio (MUV), o ultravioleta distante (FUV) e ultravioleta extremo (EUV).



Fonte: Referência [1], 2007.

descritos por meio de uma função escalar $\xi(\mathbf{R}, t)$, denominada função de onda¹, que descreve o comportamento da luz ao longo do espaço, bem como que sua propagação se dá segundo a equação de onda²

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \xi(\mathbf{R}, t) = 0, \quad (1)$$

onde c corresponde à velocidade com que a luz se propaga num dado meio óptico, caracterizado nessa formulação, apenas por uma constante $n_0 \geq 1$ denominada índice de refração, tal que $c = c_0/n_0$ com c_0 sendo a velocidade da luz no vácuo (que corresponde a aproximadamente $3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).^[1]

1.1.1 Propagação de luz laser e óptica de feixes

Dado que a luz laser exhibe a característica de ser monocromática (apresentar uma única cor), assegurando uma frequência bem definida ν , podemos tomar por assunção que sua função de onda corresponderá a uma oscilação ao longo do tempo (um fasor cujo argumento evolui linearmente com o tempo) de uma dada amplitude (que é dependente de cada ponto do espaço), de onde, ao substituirmos tal forma da função de onda na equação de onda, obtemos a equação de Helmholtz

$$[\nabla^2 + \kappa^2] \Psi(\mathbf{R}) = 0, \quad (2)$$

em que $\kappa = 2\pi\nu/c$ é referido como número de onda e Ψ consiste na dependência espacial da função de onda.^[1]

Podemos assumir, sem muita perda de generalidade, também que a luz é aproximadamente paraxial no âmbito de nosso estudo a fim de simplificar a estimativa de sua propagação, tem sua dependência espacial no eixo de propagação (assumiremos sendo o eixo das cotas z) envelopada por uma envoltória que varia lentamente, permitindo assim tomá-la como uma onda plana propagante modulada por um envelope de onda complexo $\psi(\mathbf{r}, z)$, que dado à sua variação lenta permite-nos aproximar a equação de Helmholtz para

$$\left[i\partial_z + \frac{1}{2\kappa} \nabla_{\perp}^2 \right] \psi(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (3)$$

denominada equação paraxial de Helmholtz.^[1]

Uma importante propriedade da luz é a sua intensidade $I(\mathbf{R}, t)$, definida como a potência óptica por unidade de área e sendo proporcional à média temporal do quadrado da função de onda, isto é,

$$I(\mathbf{R}, t) = \langle \xi^2(\mathbf{R}, t) \rangle. \quad (4)$$

Para o caso de ondas monocromáticas, tal média ao ser efetuada equivale simplesmente ao quadrado do valor absoluto de sua dependência espacial, ou seja,

$$I(\mathbf{R}) = |\Psi(\mathbf{R})|^2, \quad (5)$$

de maneira que a intensidade da luz é invariante com a passagem do tempo.^[1, 19] Ademais, ao assumirmos a onda como aproximadamente paraxial, essa pode ser descrita como o módulo quadrado da envoltória da onda, ou seja,

$$I(\mathbf{r}, z) = |\psi(\mathbf{r}, z)|^2, \quad (6)$$

¹Doravante tomaremos por assunção, puramente por conveniência, que a função de onda $\xi(\mathbf{R}, t)$ é uma função complexa, embora seus efeitos fisicamente relevantes estejam representados na parte real da função de onda.^[1]

²A justificativa para postularmos a equação de onda, bem como as deduções da equação de Helmholtz e de sua aproximação paraxial são apresentadas no Anexo A.

dado que essa difere da dependência espacial apenas por um fator para uma onda monocromática paraxial.^[1]

1.1.2 O feixe gaussiano

Um feixe especialmente relevante ao presente trabalho é o feixe gaussiano que consiste numa forma generalizada de uma onda parabólica, uma aproximação da onda esférica a longas distâncias obtida por Fresnel.^[1] Um feixe gaussiano tem sua forma geral, num meio onde a luz se propaga como modelado pela equação paraxial de Helmholtz, dada por

$$\psi(\mathbf{r}, z) = A \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-i\kappa \frac{r^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right], \quad (7)$$

onde A representa sua amplitude, w_0 sua cintura inicial.^[1] Ademais, com sua propagação seu comprimento e intensidade variam³, como ilustrado na Figura 2, propriedades especificadas

Figura 2: Padrão de intensidade de um feixe gaussiano ao longo de sua propagação num meio cuja propagação é descrita pela aproximação paraxial da equação de Helmholtz.



Fonte: Referência [1], 2007.

respectivamente por seu comprimento ao longo de z

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_0)^2}, \quad (8)$$

e sua intensidade máxima ao longo da propagação

$$I_{max}(z) = \frac{1}{1 + (z/z_0)^2} I_0 \quad (9)$$

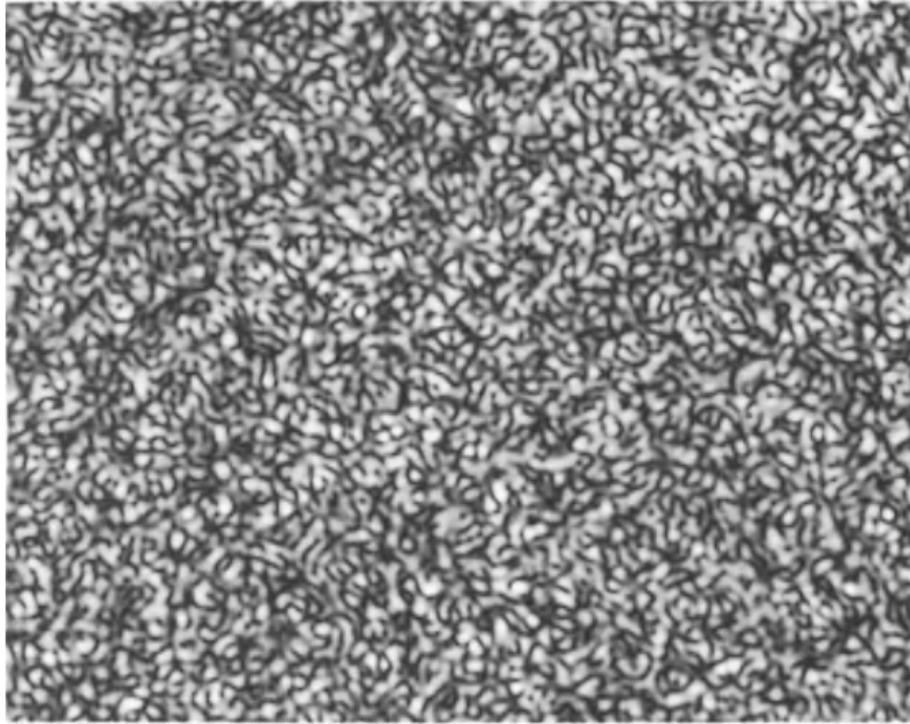
que se mantém sempre na origem do plano transversal, onde I_0 corresponde à intensidade máxima em $z = 0$.^[1]

1.1.3 Fenômenos de luz speckle

A luz produzida por um laser, diferente das produzidas por fontes naturais, apresenta naturalmente não apresenta granularidade, porém, ao transmiti-la por um meio que confira flutuações aleatórias em sua fase, surge um padrão granular de luz como o apresentado na Figura 3, fenômeno denominado como padrão speckle de luz.^[20] Tais padrões de luz surgem quando a luz

³Não nos ateremos aqui aos efeitos na fase em decorrência da propagação, abarcados na alteração de seu raio de curvatura $R(z) = z [1 + (z_0/z)^2]$ e sua fase de Gouy $\zeta(z) = \arctg(z/z_0)$.^[1]

Figura 3: Padrão de intensidade de um campo luminoso com aparência granular característico de um fenômeno de luz speckle.



Fonte: Referência [20], 2013.

composta por componentes complexas, tomadas aqui aproximadamente paraxiais, com fases aleatórias se superpõem, ou seja,

$$\psi(\mathbf{r}, z) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}, z) \exp[i\phi_{\alpha}(\mathbf{r}, z)], \quad (10)$$

onde ψ_{α} e ϕ_{α} correspondem à amplitude e fase da α -ésima componente da onda, de modo que a intensidade da luz resultante dependerá da interferência ser construtiva ou destrutiva em cada ponto do espaço.^[1, 20, 21]

1.2 INTRODUÇÃO À ÓPTICA NÃO-LINEAR

Ademais a um fenômeno ondulatório, a luz é também um fenômeno eletromagnético⁴ e devido a isso, a sua presença causa nos componentes de um material forças que são capazes de alterar suas posições, orientações ou formas, podendo assim causar uma polarização do meio quando a luz é suficientemente intensa.^[1, 21] A limitada experiência humana da natureza nos leva a crer que as alterações causadas pela luz num material são incapazes de afetar suas propriedades ópticas, conquanto, com o advento da luz laser, fenômenos ópticos que evidenciam efeitos perceptíveis nas propriedades ópticas de um meio causados pela luz, além de outros que não compõem o escopo do presente estudo, foram observados.^[1, 2, 10-13]

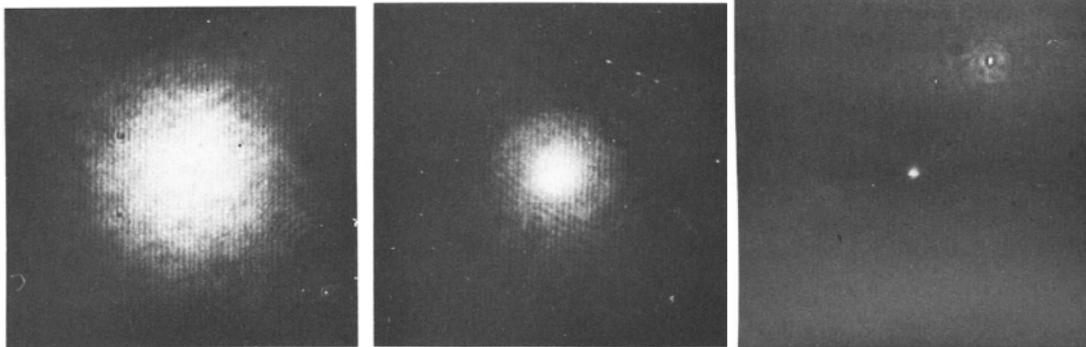
1.2.1 Fenômeno de auto-focalização da luz

Um fenômeno óptico decorrente da mudança de propriedades ópticas de um material pela presença de luz de alta intensidade de bastante interesse a esse trabalho é a auto-focalização

⁴A descrição eletromagnética da luz é abordada no Apêndice A.

da luz, apresentado na Figura 4, que consiste num efeito de lente induzida pela luz resultando na distorção de sua frente de onda.^[10] Tal efeito ocorre quando o meio óptico apresenta uma

Figura 4: Observação da auto-focalização de um feixe laser monomodo na janela de saída de uma célula de tolueno de comprimentos distintos.



(a) Para o comprimento mínimo da célula o feixe ainda não apresenta auto-focalização.

(b) Para um comprimento da célula próximo ao limite de auto-focalização, o feixe apresenta cerca de um décimo do seu tamanho original.

(c) Para comprimentos da célula acima do limiar de auto-focalização, o feixe apresenta auto-focalização em seu tamanho limite.

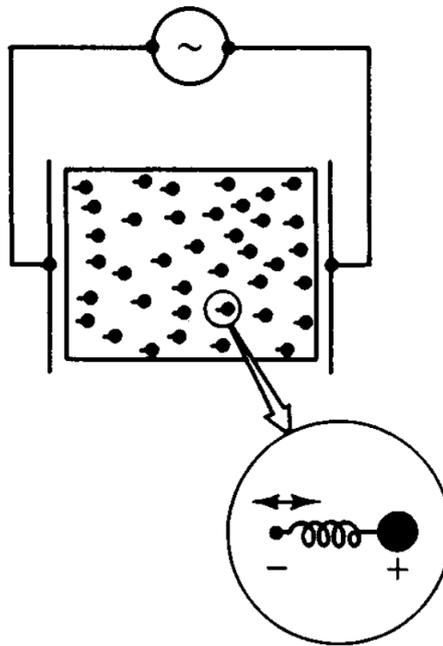
Fonte: Referência [12], 1967.

variação em seu índice de refração dependente da intensidade da luz que nele se propaga, ou seja, a propagação da luz é afetada pela sua própria intensidade.^[1, 2, 10]

2 MODELO E FORMALISMO

Os materiais que interagem com a luz podem ser modelados como uma coleção de partículas eletricamente carregadas (elétrons e núcleos atômicos).^[2] Nos materiais dielétricos as partículas carregadas são ligadas entre si e portanto os elétrons não apresentam tanta mobilidade, no entanto, essas ligações ainda apresentam certa elasticidade, como ilustrado na Figura 5, acarretando no surgimento de um dipolo elétrico oscilante.^[2] Devido às interações intra-atômicas,

Figura 5: Ilustração do movimento das cargas ligadas num meio dielétrico sujeito a um campo elétrico alternado com uma frequência bem definida na faixa do visível. O movimento dos íons é insignificante comparado ao movimento dos elétrons, que são muito mais leves e portanto apresentam maior mobilidade.



Fonte: Referência [2], 1991.

as cargas elétricas com mais mobilidade (os elétrons) oscilam de maneira inerentemente não-linear, ou seja, sua equação de movimento apresenta-se na forma

$$\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega^2x - (k_2x^2 + k_3x^3 + \dots) = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_x(t), \quad (11)$$

onde Γ é uma constante de amortecimento, cada k_i é apenas um coeficiente do i -ésimo termo não-linear e $\mathbf{E}_x(t)$ é a componente do campo elétrico na direção com que o elétron oscila.^[2, 10] Para campos elétricos ténues os termos anarmônicos são desprezíveis, contudo para luz produzida por fontes laser, que apresenta alta intensidade, a não-linearidade presente nas oscilações não pode ser negligenciada ao descrever o comportamento do material.^[2, 10]

Ao considerar os termos anarmônicos de oscilação, não somos mais capazes de expressar uma solução exata para a equação de movimento dos elétrons imersos num meio óptico não-linear sujeitos à atuação de um campo elétrico, conquanto, podemos obter correções em série na posição em função de potências do campo elétrico aplicado dado que os termos não-lineares são pequenos comparados ao termo harmônico⁵.^[2, 10]

⁵A obtenção de correções na posição devido a termos não-lineares de oscilação precisamos é efetuada por intermédio da teoria de perturbação clássica.^[10]

2.1 RESPOSTAS NÃO-LINEARES DE MEIOS ÓPTICOS

Devido à dificuldade de obter as correções para a posição dos elétrons nos meios ópticos não-lineares, usualmente modelamos a resposta dos meios ópticos à presença de luz apenas descrevendo sua relação constitutiva, ou seja, sua polarização \mathbf{P} como uma série de termos $\mathbf{P}^{(n)}$ que correspondem às correções de n -ésima ordem com o campo elétrico aplicado

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^{(1)}(t) + \mathbf{P}^{(2)}(t) + \mathbf{P}^{(3)}(t) + \dots, \quad (12)$$

por ser a quantidade física que efetivamente afeta a propagação da luz.^[1, 2, 10]

Para meios que exibam apenas respostas de ordem cúbica ao campo elétrico⁶, podemos expressar cada componente corretiva de terceira ordem na forma cúbica mais geral possível por não termos, a priori, informações quanto a como o meio responde à presença de luz, ou seja, na convenção de soma de índices repetidos

$$\mathbf{P}_\mu^{(3)}(t) = \epsilon_0 \iiint \mathcal{R}_{\mu;\alpha,\beta,\gamma}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \mathbf{E}_\alpha(t - \tau_1) \mathbf{E}_\beta(t - \tau_2) \mathbf{E}_\gamma(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad (13)$$

onde $\mathcal{R}^{(3)}$ é um tensor de quarta ordem denominado função resposta do meio, com μ, α, β e γ podendo ser qualquer uma das componentes cartesianas.^[2]

2.1.1 Tensor susceptibilidade em meios com resposta de terceira ordem

A descrição da resposta de um meio óptico permite a caracterização completa de suas propriedades, entretanto, a polarização pode ser também expressa pelos tensores de susceptibilidade, método amplamente mais utilizado para retratar fenômenos não-lineares.^[2, 10] Os tensores de susceptibilidade surgem ao aplicarmos a transformada de Fourier no termo corretivo de terceira ordem da relação constitutiva, obtendo assim⁷

$$\mathbf{P}_\mu^{(3)}(t) = \epsilon_0 \iiint \chi_{\mu;\alpha,\beta,\gamma}^{(3)}(\nu; \nu_1, \nu_2, \nu_3) \tilde{\mathbf{E}}_\alpha(\nu_1) \tilde{\mathbf{E}}_\beta(\nu_2) \tilde{\mathbf{E}}_\gamma(\nu_3) \exp[2\pi i \nu t] d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3, \quad (14)$$

onde $\tilde{\mathbf{E}}$ é o campo elétrico no domínio da frequência, $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ e $\chi^{(3)}$ é o tensor susceptibilidade de terceira ordem, que consiste em

$$\chi_{\mu;\alpha,\beta,\gamma}^{(3)}(\nu; \nu_1, \nu_2, \nu_3) = \iiint \mathcal{R}_{\mu;\alpha,\beta,\gamma}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \exp\{2\pi i \nu_i \tau_i\} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \quad (15)$$

novamente na convenção de soma de índices repetidos (agora com $i = 1, 2, 3$).^[2, 10]

Ao tomarmos a onda eletromagnética como monocromática e linearmente polarizada⁸, podemos computar a polarização total ao definir a susceptibilidade elétrica de terceira ordem $\chi^{(3)}$ como

$$\chi^{(3)} = \chi_{\mu;\alpha,\alpha,\alpha}^{(3)}(\nu; \nu, \nu, -\nu), \quad (16)$$

sendo α a direção da polarização, de maneira que pela Equação 14 obtemos as contribuições de mesma frequência ν na polarização

$$\mathbf{P}^{(3)}(t) = 3\epsilon_0 \chi^{(3)} |\Psi|^2 \Psi \exp\{2\pi i \nu t\}, \quad (17)$$

ademais a outros termos corretivos não-lineares.^[1, 2]

⁶Nos ateremos apenas aos efeitos não-lineares de terceira ordem por abarcarmos o efeito escopo do presente trabalho. Termos corretivos na polarização de ordem quadrática, ou de ordem superior, podem ser descritos da mesma maneira apenas adaptando as potências no campo elétrico.

⁷A obtenção desse resultado, além dos demais que compõem essa seção, é efetuada no Anexo B.

⁸Aqui efetuamos a conexão do campo elétrico com a função de onda pela relação apresentada no Apêndice A.

2.2 RESPOSTAS À LUZ DE MEIOS FOTORREFRATIVOS

Para o presente trabalho nos ateremos doravante ao termo de terceira ordem da polarização que obtivemos, exibido por alguns meios fotorrefrativos, que exibem propriedades eletro-ópticas e assim alteram seu índice de refração ao serem expostos a campos elétricos.^[1]

De maneira simplificada, podemos compreender a alteração do índice de refração em meios fotorrefrativos pela presença de luz de uma maneira muito procedural. Primeiramente ocorre uma fotoionização, onde há a absorção de fótons que excitam elétrons do nível doador à banda de condução.^[1] A seguir há um processo de difusão, tendo em vista que a intensidade da luz é não uniforme e portanto a quantidade de elétrons excitados ao longo do cristal também o é.^[1] Por fim, os elétrons se recombinam pelo material deixando uma distribuição de cargas não-uniforme que estabelecem um campo elétrico interno ao longo do material modificando, por ser eletro-óptico, ao fim o seu índice de refração.^[1]

Em meios cuja resposta à luz exhibe uma correção de terceira ordem na polarização como a que adotamos, podemos abarcar os efeitos não-lineares simplesmente por tomar uma correção na susceptibilidade elétrica de $\Delta\chi = 3\chi^{(3)}|\Psi|^2$ e por conseguinte, como $n = \sqrt{1 + \chi}$ (ou equivalentemente, $2n\Delta n = \Delta\chi$), o índice de refração é alterado de maneira proporcional à intensidade do campo elétrico aplicado

$$\Delta n = \alpha|\Psi|^2, \quad (18)$$

com α sendo uma constante de proporcionalidade, caracterizando o efeito Kerr óptico como um exemplo de efeito de refração não-linear, dado que o índice de refração é modulado pela intensidade da luz.^[1, 2]

2.2.1 Propagação da luz em materiais fotorrefrativos

Em meios que apresentam o efeito Kerr óptico, a propagação da luz é facilmente descrita ao aplicarmos a equação da onda eletromagnética em meios com resposta não-linear, ademais à suposição de que a luz é aproximadamente paraxial de maneira a obtermos a equação diferencial parcial

$$i\partial_z\psi(\mathbf{r}, z) = -\frac{1}{2\kappa}\nabla_{\perp}^2\psi(\mathbf{r}, z) + \alpha|\psi(\mathbf{r}, z)|^2\psi(\mathbf{r}, z), \quad (19)$$

sendo α apenas um parâmetro, denominada como Equação não-linear de Schrödinger.^[2, 22] No entanto, para o caso que nos atemos, essa equação apresenta a possibilidade de colapso de onda, um fenômeno não-linear onde a solução é impossível de ser obtida a distâncias longas no eixo óptico (eixo z) para certas classes de dados iniciais.^[22]

Buscando mimetizar o fenômeno de auto-focalização preservando apenas a forma da Equação não-linear de Schrödinger, ao menos como aproximação, para evitar percalços numéricos adotamos a seguinte equação de onda para modelar a propagação no cristal fotorrefrativo

$$i\partial_z\psi(\mathbf{r}, z) = -\frac{1}{2\kappa}\nabla_{\perp}^2\psi(\mathbf{r}, z) + \alpha\frac{\psi(\mathbf{r}, z)}{1 + \varsigma|\psi(\mathbf{r}, z)|^2}, \quad (20)$$

onde α controla quão intensa é a resposta não-linear⁹ e ς impute uma saturação da auto-focalização, esses dependem respectivamente da susceptibilidade cúbica do cristal e da intensidade de uma iluminação de fundo.^[23]

⁹O efeito de auto-focalização de meios Kerr é mimetizado imediatamente por essa equação diferencial ao adotarmos α positivo.^[23]

3 METODOLOGIA

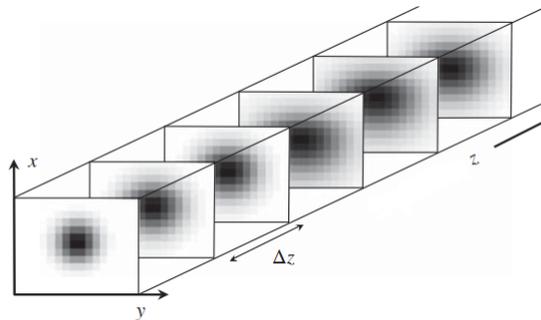
Para descrever o comportamento de fenômenos presentes na natureza, e por conseguinte de suas quantidades físicas de interesse, modelos de equações diferenciais são regularmente empregados.^[24] Não obstante, alguns desses modelos são não-lineares e, portanto, fogem do âmbito das técnicas matemáticas conhecidas atualmente, como a equação de onda num cristal fotorrefrativo, compelindo ao emprego de métodos aproximativos, como o utilizado nesse trabalho, para a uma estimativa de seu comportamento físico.^[24]

3.1 PROCESSO DE ESTIMATIVA DA PROPAGAÇÃO DA LUZ

Ao longo de um meio óptico, ainda que não-linear, a propagação da luz apresenta uma forma $\psi(\mathbf{r}, z)$ que soluciona a equação diferencial parcial que a modela, dado que representa um fenômeno físico. Computacionalmente, a estimativa de como a luz se propaga num material é efetuada apenas conhecendo a sua forma $\psi_{z=0}(\mathbf{r})$ em $z = 0$ caracterizando assim um problema de valor de contorno.^[25]

Solucionar computacionalmente um problema de valor de contorno envolve a implementação de uma rotina computacional capacitada a estimar como é a forma $\psi_z(\mathbf{r})$ do feixe num plano z fixado, conhecendo $\psi_{z=0}(\mathbf{r})$, processo ilustrado na Figura 6. Rotinas computaci-

Figura 6: Ilustração do processo computacional de estimativa da propagação da luz em meios ópticos para um feixe gaussiano com passo de iteração Δz .



Fonte: Referência [26] adaptada pelo autor, 2024.

onais de propagação de feixes usualmente estimam iterativamente como a luz se propaga, ou seja, computam, com base em $\psi_z(\mathbf{r})$, a forma de $\psi_{z+\Delta z}(\mathbf{r})$, de maneira que podemos obter a forma da envoltória de onda iterativamente ao discretizar o eixo de propagação com um passo de iteração Δz , para a estimativa do campo.^[24]

3.1.1 Estimativas da propagação da luz pelo método split-step

Para o presente trabalho, adotamos o método de split-step para a estimativa da propagação da luz ao longo de meios ópticos fotorrefrativos, que consiste num método computacional de integração de equações diferenciais parabólicas, tendo em vista sua eficiência e simplicidade computacional. Para a sua aplicação, primeiramente, reescrevemos a equação diferencial que modela a propagação da luz num cristal fotorrefrativo, como

$$i\partial_z\psi(\mathbf{r}, z) = (\mathbf{D} + \mathbf{N})\psi(\mathbf{r}, z), \quad (21)$$

onde $\mathbf{D} = -\frac{1}{2\kappa}\nabla_{\perp}^2$ é o operador que acarreta na difração do feixe, e $\mathbf{N} = \alpha/(1+\varsigma|\psi(\mathbf{r}, z)|^2)$ é o operador não-linear que abarca as características da resposta não-linear do cristal fotorrefrativo.^[25] A solução¹⁰ da Equação 21 pode ser aproximada até primeira ordem como

$$\psi(\mathbf{r}, z + \Delta z) \approx \exp[-\imath\Delta z\mathbf{N}] \exp[-\imath\Delta z\mathbf{D}]\psi(\mathbf{r}, z), \quad (22)$$

notando que $\exp(-\imath\Delta z\mathbf{D})\psi(\mathbf{r}, z)$ corresponde aos efeitos da propagação da luz no espaço livre (ilustrado ao se anular os efeitos não-lineares \mathbf{N}), podemos computá-lo por intermédio da transformada de Fourier¹¹ no plano transversal à propagação, de maneira que podemos reescrever a aproximação do método de split-step como

$$\psi(\mathbf{r}, z + \Delta z) \approx \exp[-\imath\Delta z\mathbf{N}]\mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp \left[+\imath \frac{k_x^2 + k_y^2}{2\kappa} \Delta z \right] \mathcal{F}\{\psi(\mathbf{r}, z)\} \right\}, \quad (23)$$

onde k_u é a componente do vetor de onda na direção u .^[25]

¹⁰Tal solução da Equação 21 é obtida de maneira análoga ao operador evolução temporal na equação de Schrödinger em mecânica quântica, tomando o hamiltoniano como $\mathbf{D} + \mathbf{N}$.

¹¹A descrição da propagação no espaço livre computada no domínio das frequências é descrita no Anexo C.

4 RESULTADOS OBTIDOS

No presente trabalho, estimamos a propagação da luz em meios ópticos com respostas distintas à presença de luz, sendo um com resposta puramente linear onde a propagação é descrita pela aproximação paraxial da equação de Helmholtz e um que apresenta não-linearidade, no nosso caso, um cristal fotorrefrativo para o qual os efeitos não-lineares na propagação são abarcados pela equação não-linear de propagação num cristal fotorrefrativo com $\alpha = 10^{-2}$ e ζ unitário, a fim de observar apenas os efeitos decorrentes da não-linearidade tomamos os índices de refração para ambos os materiais iguais ($n_0 = 1.5078$).

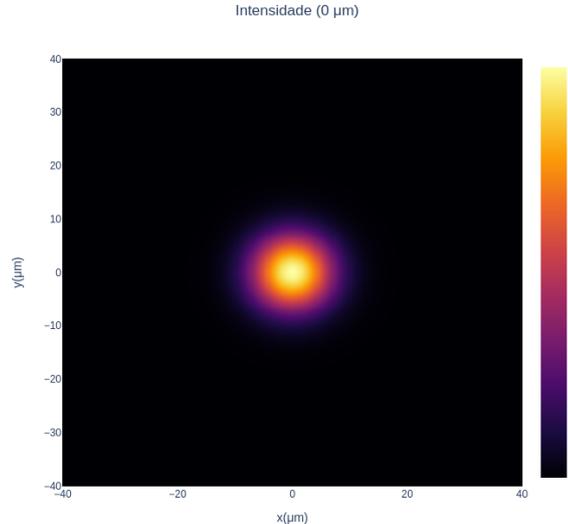
4.1 PROPAGAÇÃO DE UM FEIXE GAUSSIANO

Primeiramente estimamos a propagação da luz com perfil de feixe gaussiano na faixa do vermelho ($\lambda = 640 \text{ nm}$), dessa maneira adotamos a envoltória de onda no plano $z = 0 \text{ }\mu\text{m}$ de um feixe gaussiano¹², assumindo $w_0 = 10 \text{ }\mu\text{m}$ e A tal que a intensidade máxima seja unitária, isto é

$$\psi_{z=0}(\mathbf{r}) = \exp\left[-(r/w_0)^2\right], \quad (24)$$

cuja intensidade é exposta na Figura 7.

Figura 7: Intensidade da luz com perfil de feixe gaussiano de cintura $w_0 = 10 \text{ }\mu\text{m}$ em $z = 0 \text{ }\mu\text{m}$, cuja propagação foi estimada ao longo de meios ópticos com resposta linear (vidro) e não-linear (cristal fotorrefrativo).



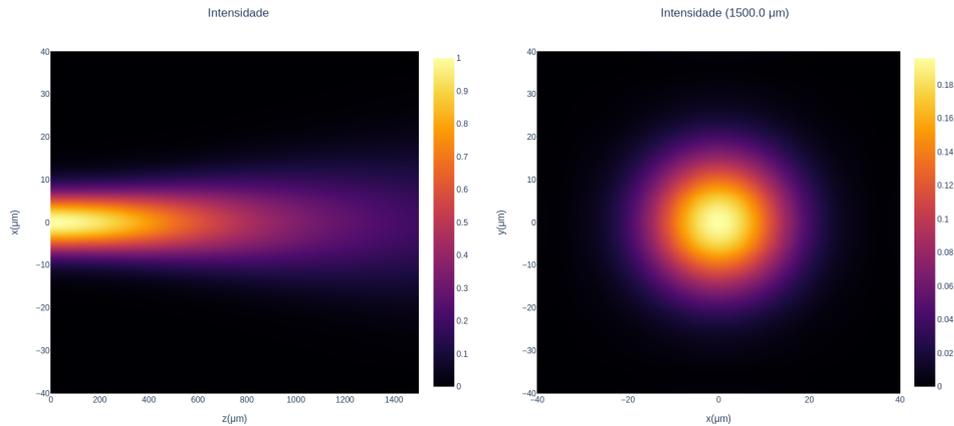
Fonte: Autor, 2024.

4.1.1 Propagação de um feixe gaussiano num meio óptico linear

Para um meio óptico linear, um feixe gaussiano apresenta um perfil como a Equação 7 ao longo do eixo de propagação (eixo z), assim computamos a Figura 8 que expressa a intensidade do feixe ao longo do eixo de propagação e no plano transversal à propagação após $1500 \text{ }\mu\text{m}$ (para evitar efeitos decorrentes da reflexão da borda). Podemos claramente observar que, ao

¹²Para obtermos o perfil do feixe gaussiano a ser propagado, devemos notar que $w(z=0) = w_0$, $\zeta(z=0) = 0$ e $1/R(z \rightarrow 0) \rightarrow 0$.

Figura 8: Perfil de intensidade de um feixe gaussiano propagado ao longo de um meio óptico com resposta puramente linear ($n_0 = 1.5078$) à propagação de luz por $1500 \mu m$.



(a) Perfil de intensidade ao longo de z . (b) Perfil de intensidade em $z = 1500 \mu m$.

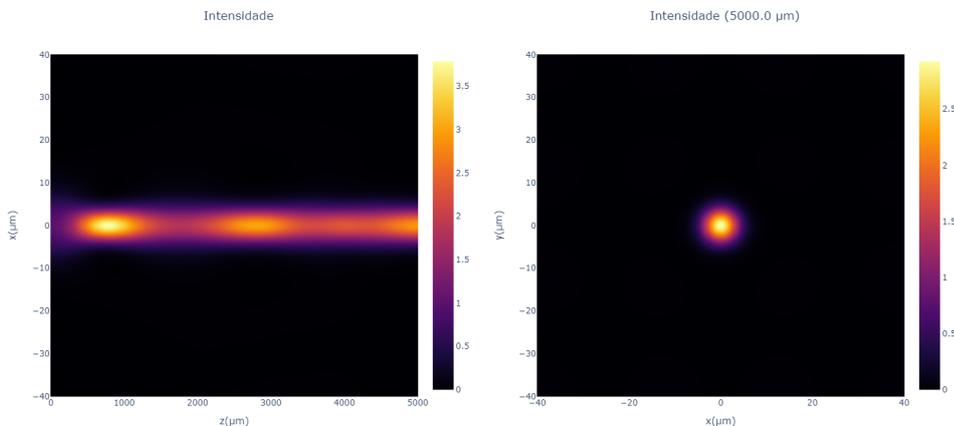
Fonte: Autor, 2024.

longo do material, esse se expande enquanto torna-se também mais tênue, característica dos feixes gaussianos dado ao aumento da comprimento do feixe e diminuição de sua intensidade máxima ao longo da propagação.

4.1.2 Propagação de um feixe gaussiano num meio fotorrefrativo

Para um meio fotorrefrativo computamos assim os resultados expostos na Figura 9 que, novamente, expressam a intensidade ao longo do eixo de propagação e no plano transversal após a propagação de $5000 \mu m$. Ao comparar com o resultado presente na Figura 4, verificamos um

Figura 9: Perfil de intensidade de um feixe gaussiano propagado ao longo de um meio óptico fotorrefrativo ($n_0 = 1.5078$, $\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por $5000 \mu m$.



(a) Perfil de intensidade ao longo de z . (b) Perfil de intensidade em $z = 5000 \mu m$.

Fonte: Autor, 2024.

padrão de propagação comum em meios que exibem auto-focalização, evidenciando assim a

replicação numérica desse fenômeno para a propagação de um perfil gaussiano de entrada num meio fotorrefrativo.

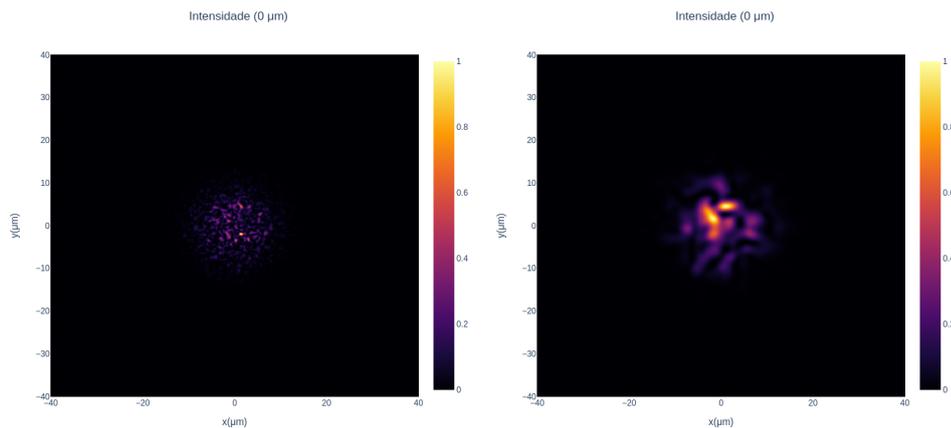
4.2 PROPAGAÇÃO DE UM SPECKLE COM ENVOLTÓRIA GAUSSIANA

Posteriormente estimamos a propagação da luz com perfil de speckle envolvido por um envelope gaussiano, também na faixa do vermelho ($\lambda = 640 \text{ nm}$). Adotamos a envoltória de onda no plano $z = 0 \text{ }\mu\text{m}$ como

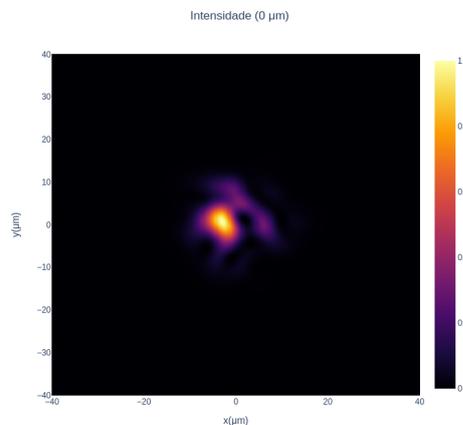
$$\psi_{z=0}(\mathbf{r}) = A\mathcal{F} \left\{ \exp [-(\mathcal{G}r)^2] \exp[i\phi_r] \right\} \exp [-(r/w_0)^2], \quad (25)$$

assumindo w_0 e A escolhidos sob os mesmos critérios do feixe gaussiano, \mathcal{G} sendo um parâmetro proporcional ao tamanho do grão, variado na computação das amostras expostas na Figura 10, e por fim ϕ_r corresponde a uma fase aleatória uniformemente distribuída entre 0 e

Figura 10: Amostras de intensidade da luz com perfil de speckle com envelope gaussiano de cintura $w_0 = 10 \text{ }\mu\text{m}$ em $z = 0 \text{ }\mu\text{m}$, cuja propagação foi estimada ao longo de meios ópticos com resposta linear (vidro) e não-linear (cristal fotorrefrativo), para distintos tamanhos de grão.



(a) Amostra de speckle com grãos pequenos. (b) Amostra de speckle com grãos médios.



(c) Amostra de speckle com grãos grandes.

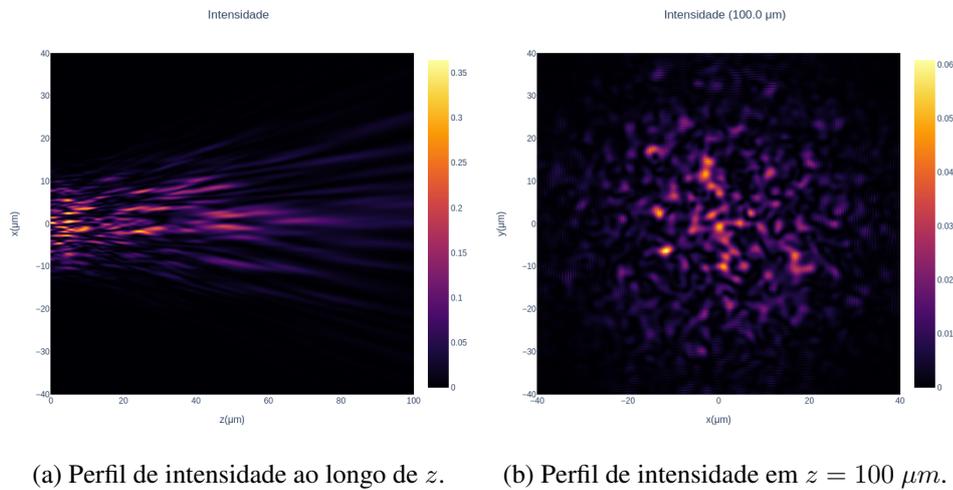
Fonte: Autor, 2024.

1 que confere a granularidade ao feixe. A fim de eliminar imprecisões decorrentes da reflexão pelas bordas, o que leva a imprecisões na estimativa, efetuamos a propagação doravante apenas por $100 \mu m$.

4.2.1 Propagação de speckles com alta granularidade

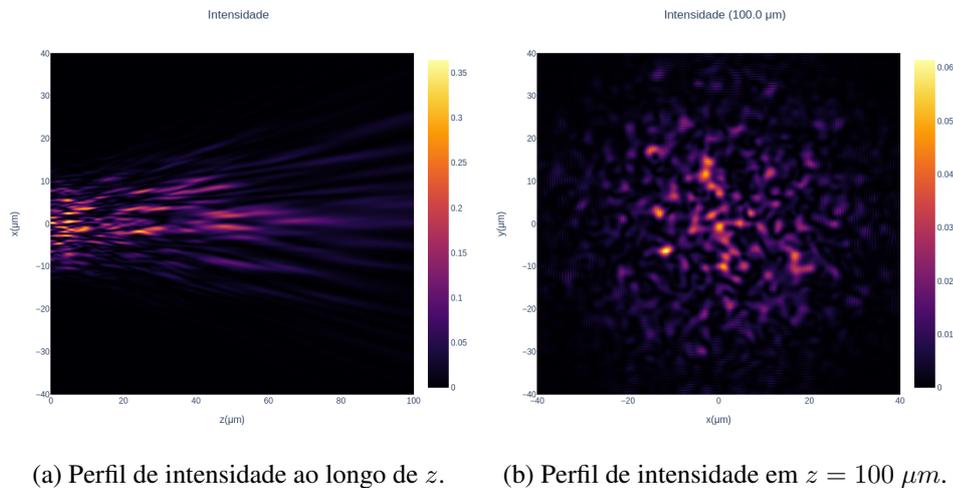
Estimamos primeiramente a propagação de speckles com grãos pequenos que apresentam um alto padrão granular de intensidade. Computamos então os perfis de intensidades anteriormente analisados para o feixe gaussiano num meio linear, Figura 11, e num cristal fotorrefrativo, Figura 12. Para esses perfis de entrada de luz não observamos diferenças muito

Figura 11: Amostra dos perfis de intensidade de um speckle altamente granular propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) com resposta puramente linear à propagação de luz por $100 \mu m$.



Fonte: Autor, 2024.

Figura 12: Amostra dos perfis de intensidade de um speckle altamente granular propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) fotorrefrativo ($\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por $100 \mu m$.



Fonte: Autor, 2024.

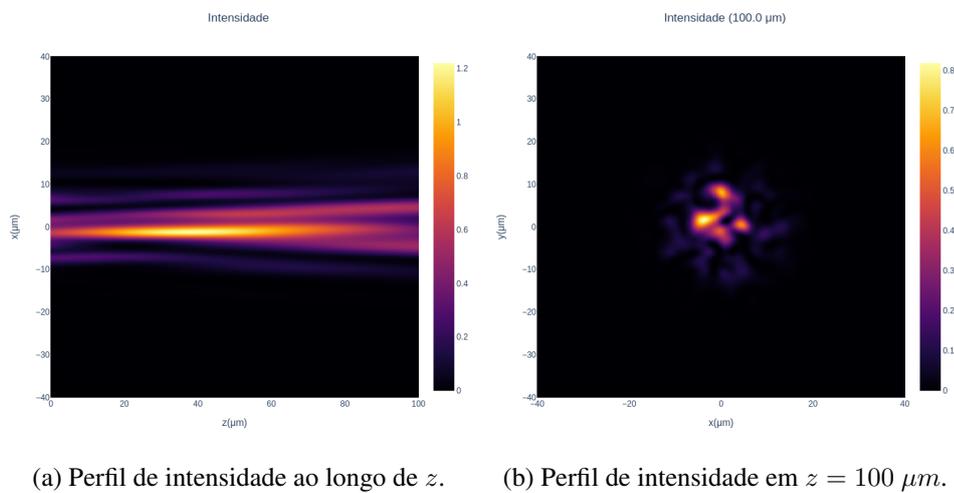
notáveis da propagação num meio cuja resposta é puramente linear se comparado à efetuada

num meio fotorrefrativo, decorrente do tamanho do grão ser menor que o tamanho limite do efeito de auto-focalização, como descrito na Figura 4(c).^[12]

4.2.2 Propagação de speckles com granularidade média

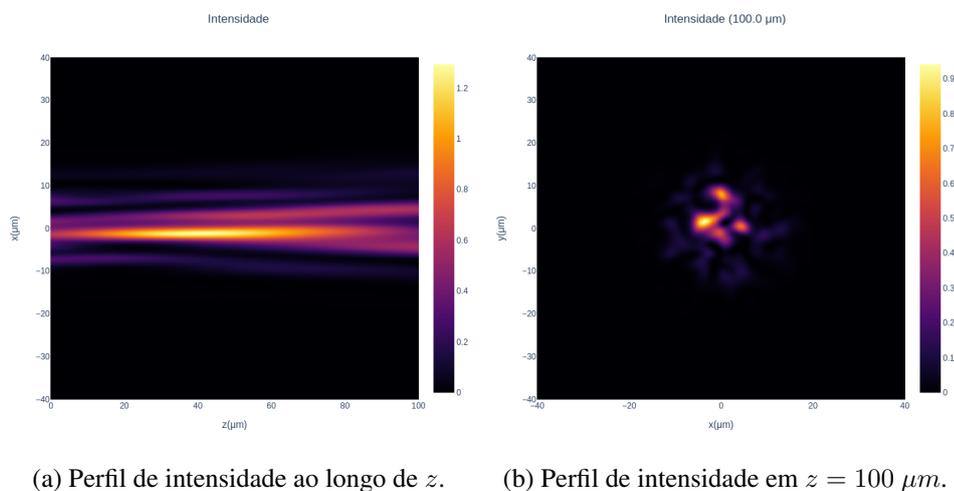
Estimamos a seguir a propagação ao longo dos meios ópticos de speckles com grãos médios que apresentam um padrão um pouco menos granular. Computando as Figuras 13 e 14 que consistem, novamente, nos perfis de intensidades anteriormente analisados, num meio linear e num cristal fotorrefrativo respectivamente. Para esses perfis de entrada, os efeitos

Figura 13: Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de média granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) com resposta puramente linear à propagação de luz por $100 \mu m$.



Fonte: Autor, 2024.

Figura 14: Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de média granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) fotorrefrativo ($\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por $100 \mu m$.



Fonte: Autor, 2024.

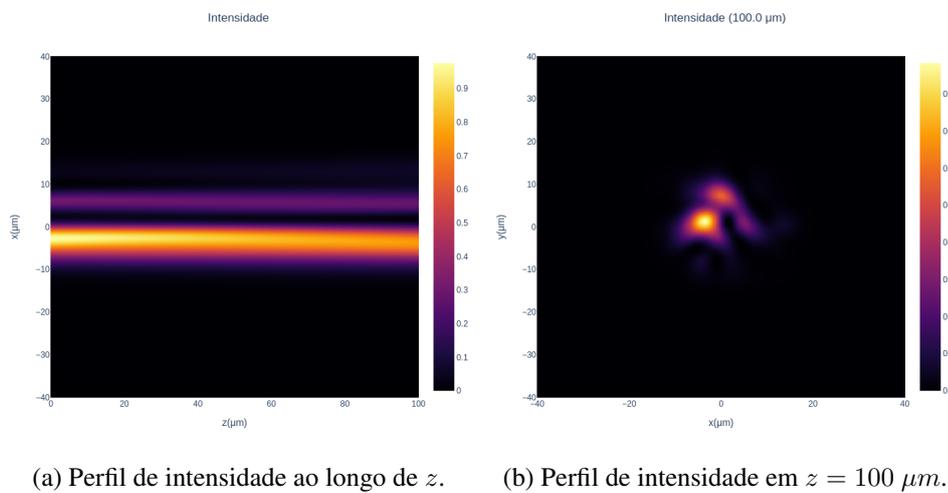
da não-linearidade começam a se tornar mais evidentes, dado que a intensidade apresenta uma

pequeno acréscimo em seu valor máximo bem como diverge um pouco menos ao longo de sua propagação se comparado com o resultado no meio cuja resposta é puramente linear.

4.2.3 Propagação de speckles com baixa granularidade

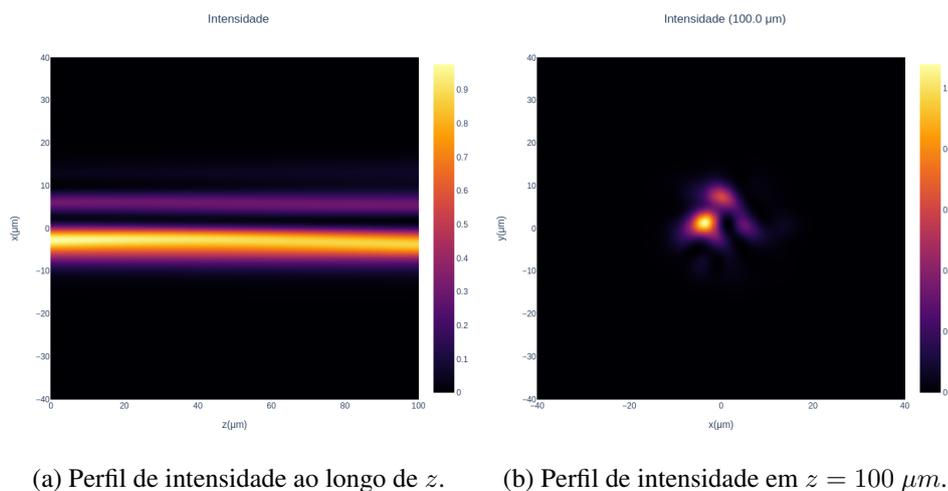
Por fim, estimamos a propagação ao longo dos meios ópticos de speckles com grãos pequenos que apresentam um padrão muito menos granular. Computamos assim as Figuras 15 e 16 que consistem, mais uma vez, nos perfis de intensidades anteriormente analisados, num meio linear e num cristal fotorrefrativo respectivamente. Para perfis de entrada com baixa granu-

Figura 15: Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de baixa granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) com resposta puramente linear à propagação de luz por $100 \mu m$.



Fonte: Autor, 2024.

Figura 16: Amostra dos perfis de intensidade de um speckle de baixa granularidade propagado ao longo de um meio óptico ($n_0 = 1.5078$) fotorrefrativo ($\alpha = 10^{-2}$ e $\zeta = 1$) por $100 \mu m$.



Fonte: Autor, 2024.

laridade os efeitos da resposta não-linear apresentam maior destaque, devido à forma do perfil

$\psi_{z=0}(\vec{r})$ se aproximar ainda mais do perfil gaussiano, apresentando um grande crescimento na intensidade máxima observada, notável até no perfil ao longo do eixo de propagação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho tivemos por objetivo compreender as bases dos aspectos não-lineares apresentados ao se propagar luz em meios ópticos, com foco na descrição do comportamento apresentado por meios fotorrefrativos e no fenômeno de auto-focalização da luz. Ademais, buscamos estimar o comportamento da propagação de luz laser nos meios ópticos fotorrefrativos por meios computacionais.

Por meio do presente trabalho pudemos compreender a origem das respostas não-lineares de meios ópticos não-lineares bem como os efeitos decorrentes dessas respostas, nos aprofundamos especificamente na descrição simplificada dos processos que levam à alteração do índice de refração de um meio fotorrefrativo e como a propagação da luz é afetada nesses materiais.

Fomos capazes também de estimar numericamente, por intermédio do método de split-step, o comportamento da luz propagada através de meios com distintas respostas à sua presença para distintos perfis de entrada, feixe gaussiano e perfil granular de envoltória gaussiana, observando o fenômeno de auto-focalização da luz em nossas estimativas causado pelo efeito de lente induzida por uma refração não-linear do meio.

Os resultados aqui presentes permitem, assim, atestar a eficiência do método de split-step na estimativa da propagação da luz, tanto para meios lineares quanto para meios cuja resposta é não-linear. Para speckles de luz, no entanto, sua eficiência é limitada a pequenas distâncias no eixo de propagação, em decorrência de interações com as bordas do estrato espacial simulado que leva a imprecisões numéricas, sendo necessária futuramente a implementação de condições de contorno eficientes para a supressão dos efeitos de reflexão das fronteiras.

REFERÊNCIAS

- ¹B. E. A. Saleh e M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, 2ª ed. (Wiley-Blackwell, 2007).
- ²P. N. Butcher e D. W. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics* (Cambridge University Press, 1991).
- ³J. de Oliveira, J. Rocha, L. Santos, J. Moura, A. Jesus-Silva e E. Fonseca, “Dynamics of the Generation of Independent Orbital-Angular-Momentum Modes in a Photonic Chip”, *Phys. Rev. Appl.* **20**, 10.1103/PhysRevApplied.20.024004 (2023).
- ⁴J. M. de Oliveira, L. M. S. Santos, A. J. Jesus-Silva e E. J. S. Fonseca, “Tunable generation and propagation of vortex beams in a photonic chip”, *Phys. Rev. A* **104**, 10.1103/PhysRevA.104.L061501 (2021).
- ⁵D. O. Bezerra, J. P. Amaral, E. J. S. Fonseca, C. R. Alves e A. J. Jesus-Silva, “Sorting of spatially incoherent optical vortex modes”, *Sci. Rep.* **10**, 10.1038/s41598-020-59428-y (2020).
- ⁶J. P. Amaral, J. C. A. Rocha, E. J. S. Fonseca e A. J. Jesus-Silva, “Method to define non-diffracting optical beams mimicking the shape of simple plane curves”, *Appl. Opt.* **58**, 10.1364/AO.58.003659 (2019).
- ⁷D. G. Pires, A. F. Sonsin, A. J. Jesus-Silva e E. J. S. Fonseca, “Three-dimensional speckle light self-healing-based imaging system”, *Sci. Rep.* **8**, 10.1038/s41598-017-18952-0 (2018).
- ⁸J. G. M. N. Neto, I. J. S. Melo, E. J. S. Fonseca e A. J. Jesus-Silva, “Self-healing of the statistical properties of exact non-Rayleigh nondiffracting speckle fields”, *Phys. Rev. A* **109**, 10.1103/PhysRevA.109.023510 (2024).
- ⁹A. J. Jesus-Silva, J. G. Silva, C. H. Monken e E. J. S. Fonseca, “Experimental cancellation of aberrations in intensity correlation in classical optics”, *Phys. Rev. A* **97**, 10.1103/PhysRevA.97.013832 (2018).
- ¹⁰Y. R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics* (John Wiley & Sons, 2002).
- ¹¹P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters e G. Weinreich, “Generation of Optical Harmonics”, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 10.1103/PhysRevLett.7.118 (1961).
- ¹²Y. R. Shen, “Self-focusing: Experimental”, *Prog. Quantum Electron.* **4**, 10.1016/0079-6727(75)90002-6 (1975).
- ¹³G. H. C. New e J. F. Ward, “Optical Third-Harmonic Generation in Gases”, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 10.1103/PhysRevLett.19.556 (1967).
- ¹⁴J. C. A. Rocha, D. G. Pires, M. R. L. Motta, N. M. Litchinitser, S. S. Vianna, E. J. S. Fonseca e J. Ferraz, “Controlled conversion of transverse symmetries in a four-wave mixing process”, *Journal of Optics* **24**, 10.1088/2040-8986/ac57b2 (2022).
- ¹⁵D. G. Pires, J. C. A. Rocha, A. J. Jesus-Silva e E. J. S. Fonseca, “Optical mode conversion through nonlinear two-wave mixing”, *Phys. Rev. A* **100**, 10.1103/PhysRevA.100.043819 (2019).
- ¹⁶J. C. A. Rocha, D. G. Pires, J. G. M. N. Neto, A. J. Jesus-Silva, N. M. Litchinitser e E. J. S. Fonseca, “Speckle filtering through nonlinear wave mixing”, *Opt. Lett.* **46**, 10.1364/OL.434150 (2021).

-
- ¹⁷D. G. Pires, J. C. A. Rocha, M. V. E. C. da Silva, A. J. Jesus-Silva e E. J. S. Fonseca, “Mixing Ince–Gaussian modes through sum-frequency generation”, *J. Opt. Soc. Am. B* **37**, 10.1364/JOSAB.401001 (2020).
- ¹⁸J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (John Wiley & Sons, 2012).
- ¹⁹D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Cambridge University Press, 2023).
- ²⁰J. C. Dainty, *Laser Speckle and related phenomena* (Springer, 2013).
- ²¹J. W. Goodman, *Speckle phenomena in optics: Theory and Applications*, 2^a ed. (SPIE Press, 2020).
- ²²S. Dyachenko, A. Newell, A. Pushkarev e V. Zakharov, “Optical turbulence: weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrödinger equation”, *Physica D: Non-linear Phenomena* **57**, 10.1016/0167-2789(92)90090-A (1992).
- ²³H. Frostig, I. Vidal, R. Fischer, H. Herzig Sheinfux e Y. Silberberg, “Observation of rogue events in non-Markovian light”, *Optica* **7**, 10.1364/OPTICA.390429 (2020).
- ²⁴N. J. Giordano e H. Nakanishi, *Computational Physics* (Pearson, 2005).
- ²⁵T.-C. Poon e T. Kim, *Engineering Optics with MATLAB* (World Scientific Publishing, 2006).
- ²⁶G. Lifante Pedrola, *Beam propagation method for design of optical waveguide devices* (John Wiley & Sons, 2015).
- ²⁷M. Alonso e E. J. Finn, *Física: Um curso universitário-Campos e ondas*, vol. 2 (Editora Blucher, 2018).
- ²⁸E Butkov, *Mathematical physics, volume unico* (Addison-Wesley, 1973).

APÊNDICES

A TEORIA ELETROMAGNÉTICA DA LUZ

A teoria eletromagnética consiste na descrição dos fenômenos decorrentes da dinâmica dos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} .^[18] Às quatro equações diferenciais que descrevem os fenômenos eletromagnéticos dá-se o nome de Equações de Maxwell, as quais são representadas comumente por

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (27)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (28)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}), \quad (29)$$

com $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ e $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ sendo constantes, denominadas respectivamente por permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo e ρ e \mathbf{J} sendo as densidades de carga e corrente elétrica.^[18]

A.1 Equações de maxwell na matéria

Na matéria, no entanto, as Equações de Maxwell apresentam-se numa forma distinta, tendo em vista que os meios materiais respondem à presença de campos elétricos e magnéticos exibindo polarização ou magnetização, de maneira que podemos expandir as densidades de carga e de corrente elétrica numa série de multipolos

$$\rho = \rho_0 - \operatorname{div} \mathbf{P} + \dots, \quad (30)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \partial_t \mathbf{P} + \operatorname{rot} \mathbf{M} + \dots, \quad (31)$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{M} são a polarização e magnetização do material e ρ_0 e \mathbf{J}_0 correspondem às densidades livres.^[10, 19] Assim, a fim de abarcar os efeitos da matéria, podemos modificar a lei de Gauss para campos elétricos e lei de Ampère corrigida por Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0, \quad (32)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \partial_t \mathbf{D}, \quad (33)$$

onde, denominamos $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ por deslocamento elétrico e $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ por campo magnético auxiliar.^[18, 19]

A.2 Fenômenos eletromagnéticos ondulatórios em meios ópticos

As Equações de Maxwell, principalmente a lei de indução de Faraday e a lei de Ampère-Maxwell (ainda que na matéria), permitem inferir que campos elétricos oscilantes estabelecem campos magnéticos oscilantes e assim reciprocamente, ocasionando na propagação de campos eletromagnéticos num fenômeno ondulatório, uma onda eletromagnética como a luz.^[19]

Para descrever o comportamento da luz nos meios precisamos de uma relação constitutiva, ou seja, uma relação entre os campos elétricos e magnéticos e o deslocamento elétrico e o campo auxiliar.^[19] Para meios lineares, a relação constitutiva consiste em descrever o deslocamento elétrico e o campo magnético auxiliar como proporcionais aos campos elétrico e magnético, isto é,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (34)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (35)$$

onde ϵ e μ são a permissividade elétrica e permeabilidade magnética do material, de maneira que ondas eletromagnéticas em meios lineares, na ausência de cargas e correntes livres, são descritas segundo a relação

$$(\nabla^2 - \epsilon\mu\partial_t^2)\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (36)$$

$$(\nabla^2 - \epsilon\mu\partial_t^2)\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (37)$$

em que $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ corresponde à velocidade com que a luz se propaga no material.^[18, 19]

Por meio dessa descrição ondulatória podemos diretamente obter a formulação ondulatória da óptica, no regime em que a luz é linearmente polarizada, ou seja, não exibe forte característica vetorial. Nesse domínio, o campo elétrico¹³ pode ser especificado simplesmente por sua amplitude ($\mathbf{E} = \xi\hat{e}$, onde \hat{e} representa a direção de polarização do campo).^[1] Ademais, definindo o índice de refração como $n_0 = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$, para meios não-magnéticos ($\mu_0 \approx \mu$) teremos então que

$$n_0 = \sqrt{1 + \chi}, \quad (38)$$

dado que em meios lineares $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$, com χ sendo a susceptibilidade elétrica do meio.^[1, 19]

Para materiais cuja resposta óptica é não-linear à presença de luz nos atemos primordialmente ao campo elétrico, de maneira que precisamos citar apenas a relação constitutiva entre a polarização e o campo elétrico como

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi\mathbf{E} + \mathbf{P}^{(NL)}, \quad (39)$$

onde $\mathbf{P}^{(NL)}$ abarca todas as correções de mais alta ordem no campo elétrico, de maneira que $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}^{(NL)}$, de onde se obtém

$$(\nabla^2 - \epsilon\mu\partial_t^2)\mathbf{E} = -\mu_0\partial_t^2\mathbf{P}^{(NL)}, \quad (40)$$

que corresponde à forma geral da equação de onda para meios não-lineares.^[1]

¹³Especificamos o campo elétrico, dado que os campos são acoplados pelas equações de Maxwell e o campo magnético é sempre demasiadamente tênue se comparado ao elétrico.^[1, 19]

ANEXOS

A EQUAÇÕES DA ÓPTICA ONDULATÓRIA

Para justificar postularmos a equação de onda na descrição ondulatória da óptica, devemos primeiramente definir o conceito físico de fenômeno ondulatório.

Definição 1 (fenômeno ondulatório).

Todo fenômeno no qual uma perturbação de um campo físico se propague ao longo do espaço com avançar do tempo.

No domínio unidimensional, podemos descrever uma onda com configuração inicial $\xi(x, t = 0) = \xi_0(x)$, e ao propagá-la por um tempo t , essa terá se deslocado no espaço ct , de modo que $\xi(x, t) = \xi_0(x - ct)$.^[27] Nomeando $x' = x - ct$, de modo que $\partial_x = \partial_{x'}$ bem como que $\partial_t = -c\partial_{x'}$, segue de imediato que

$$\partial_t^2 \xi(x, t) = c^2 \partial_{x'}^2 \xi_0(x') = c^2 \partial_x^2 \xi(x, t), \quad (41)$$

que equivale à equação de onda no caso unidimensional.^[27] Tal resultado pode ser facilmente generalizado ao notar que, no espaço, o operador laplaciano ∇^2 desempenha um papel equivalente ao do operador ∂_x^2 .

A.1 Equação de Helmholtz

A assumir que a luz é monocromática, ou seja, apresenta uma frequência ν bem definida, sua função de onda apresenta-se geralmente na forma

$$\xi(\mathbf{R}, t) = \Psi(\mathbf{R}) \exp(+2\pi i \nu t). \quad (42)$$

Assim, pela equação de onda, para ondas monocromáticas obtemos imediatamente, ao fatorar a dependência temporal, que

$$[\nabla^2 \Psi(\mathbf{R})] + \frac{(2\pi i \nu)^2}{c^2} \Psi(\mathbf{R}) = 0, \quad (43)$$

que corresponde à equação de Helmholtz, quando definimos $\kappa = 2\pi\nu/c$.^[1]

A.2 Aproximação paraxial da Equação de Helmholtz

Ao adotarmos por assunção que a dependência espacial da função de onda se dá como uma onda paraxial

$$\Psi(\mathbf{R}) = \psi(\mathbf{r}, z) \exp(i\kappa z), \quad (44)$$

dado que $\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 + \partial_z^2$, obtemos de imediato, pela equação de Helmholtz que

$$0 = \nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{R}) + (\partial_z^2 \psi(\mathbf{r}, z) \exp(i\kappa z)) + \kappa^2 \Psi(\mathbf{R}). \quad (45)$$

Dado que,

$$\partial_z^2 \psi(\mathbf{r}, z) \exp(i\kappa z) = (\partial_z^2 \psi(\mathbf{r}, z)) \exp(i\kappa z) + 2i\kappa (\partial_z \psi(\mathbf{r}, z)) \exp(i\kappa z) - \kappa^2 \Psi(\mathbf{R}) \quad (46)$$

onde, no entanto, podemos negligenciar o termo $(\partial_z^2 \psi(\mathbf{r}, z)) \exp(i\kappa z)$, pois para $\Delta z = \lambda$ se seguirá que $\Delta \psi \ll \psi$, de modo que $\psi \gg \Delta \psi / 2\pi = \partial_z \psi \Delta z / 2\pi = \partial_z \psi \lambda / 2\pi = \partial_z \psi / \kappa$ e portanto $\partial_z^2 \psi \ll \kappa \partial_z \psi \ll \kappa^2 \psi$, assim podemos reescrever a Equação 45 como

$$(\nabla_{\perp}^2 \psi(\mathbf{r}, z)) \exp(i\kappa z) + 2i\kappa (\partial_z \psi(\mathbf{r}, z)) \exp(i\kappa z) = 0, \quad (47)$$

por fim, fatorando o termo $\exp(i\kappa z)$, obtemos $\nabla_{\perp}^2 \psi(\mathbf{r}, z) + 2i\kappa \partial_z \psi(\mathbf{r}, z) = 0$ que corresponde à equação paraxial de Helmholtz.^[1]

B EQUAÇÕES DA ÓPTICA NÃO-LINEAR

Para a obtenção da polarização na representação da susceptibilidade, utilizamos a representação do campo elétrico pela transformada de Fourier

$$\mathbf{E}_\alpha(t) = \int d\nu \tilde{\mathbf{E}}_\alpha(\nu) \exp(2\pi i\nu t), \quad (48)$$

assim, ao aplicar na correção de terceira ordem na polarização, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu^{(3)}(t) = \epsilon_0 \int \dots \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 \mathcal{R}_{\mu;\alpha,\beta,\gamma}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \\ \tilde{\mathbf{E}}_\alpha(\nu_1) \exp(2\pi i\nu_1(t - \tau_1)) \times \\ \tilde{\mathbf{E}}_\beta(\nu_2) \exp(2\pi i\nu_2(t - \tau_2)) \times \\ \tilde{\mathbf{E}}_\gamma(\nu_3) \exp(2\pi i\nu_3(t - \tau_3)), \end{aligned} \quad (49)$$

ou de maneira equivalente, com a soma contraída em $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu^{(3)}(t) = \epsilon_0 \int \dots \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 \mathcal{R}_{\mu;\alpha,\beta,\gamma}^{(3)}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \exp(2\pi i\nu_i \tau_i) \times \\ \tilde{\mathbf{E}}_\alpha(\nu_1) \exp(2\pi i\nu_1 t) \times \\ \tilde{\mathbf{E}}_\beta(\nu_2) \exp(2\pi i\nu_2 t) \times \\ \tilde{\mathbf{E}}_\gamma(\nu_3) \exp(2\pi i\nu_3 t), \end{aligned} \quad (50)$$

assim, pela definição do tensor susceptibilidade em função da resposta de meios ópticos, obtemos imediatamente

$$\mathbf{P}_\mu^{(3)}(t) = \epsilon_0 \iiint d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 \chi_{\mu;\alpha,\beta,\gamma}^{(3)}(\nu; \nu_1, \nu_2, \nu_3) \exp(2\pi i\nu t) \tilde{\mathbf{E}}_\alpha(\nu_1) \tilde{\mathbf{E}}_\beta(\nu_2) \tilde{\mathbf{E}}_\gamma(\nu_3), \quad (51)$$

que corresponde exatamente à susceptibilidade de um meio de terceira ordem.^[2]

B.1 Termo corretivo do efeito Kerr óptico

Para obtermos o termo da correção que desejamos, suporemos uma onda de luz monocromática e linearmente polarizada, de modo que

$$\tilde{\mathbf{E}}(\nu') = \frac{1}{2} \{ \hat{\mathbf{e}}_\alpha [\Psi \delta(\nu' - \nu) + \Psi^* \delta(\nu' + \nu)] \}, \quad (52)$$

com α sendo uma das coordenadas cartesianas e z^* o conjugado complexo, para obtermos um campo elétrico real, denota o conjugado complexo.^[2] Assim ao computar os termos (contando as permutações de ν no tensor susceptibilidade), omitindo os de frequência total diferente de ν , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\mu^{(3)}(t) = 2\epsilon_0 \iiint d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 \chi_{\mu;\alpha,\alpha,\alpha}^{(3)}(\nu; \nu_1, \nu_2, \nu_3) \exp(2\pi i\nu t) \frac{1}{8} \Psi^* \Psi \Psi \times \\ \delta(\nu_1 + \nu) \delta(\nu_2 - \nu) \delta(\nu_3 - \nu) + \\ 2\epsilon_0 \iiint d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 \chi_{\mu;\alpha,\alpha,\alpha}^{(3)}(\nu; \nu_1, \nu_2, \nu_3) \exp(2\pi i\nu t) \frac{1}{8} \Psi \Psi^* \Psi \times \\ \delta(\nu_1 - \nu) \delta(\nu_2 + \nu) \delta(\nu_3 - \nu) + \\ 2\epsilon_0 \iiint d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 \chi_{\mu;\alpha,\alpha,\alpha}^{(3)}(\nu; \nu_1, \nu_2, \nu_3) \exp(2\pi i\nu t) \frac{1}{8} \Psi \Psi \Psi^* \times \\ \delta(\nu_1 - \nu) \delta(\nu_2 - \nu) \delta(\nu_3 + \nu) + \dots, \end{aligned} \quad (53)$$

dados que a ordem das componentes não abarca informação física os três termos são idênticos, de maneira que, ao utilizar definição da susceptibilidade elétrica de terceira, segue imediatamente que

$$\mathbf{P}^{(3)}(t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} \exp(2\pi i \nu t) |\Psi|^2 \Psi + \dots, \quad (54)$$

que consiste na polarização de um meio que apresenta o efeito Kerr óptico.^[2]

B.2 Equação não-linear de Schrödinger

Ao substituírmos a polarização não-linear na equação da onda em meios não-lineares, obtemos

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \Psi \exp\{2\pi i \nu t\} = -\mu_0 \partial_t^2 \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} |\Psi|^2 \Psi \exp\{2\pi i \nu t\}, \quad (55)$$

onde ao computarmos a derivada parcial com respeito ao tempo, segue que

$$\exp\{2\pi i \nu t\} (\nabla^2 \Psi) + \frac{(2\pi \nu)^2}{c^2} \Psi \exp\{2\pi i \nu t\} = 3\pi^2 \nu^2 \mu_0 \epsilon_0 \chi^{(3)} |\Psi|^2 \Psi \exp\{2\pi i \nu t\}, \quad (56)$$

então, eliminando a dependência temporal,

$$\nabla^2 \Psi + \kappa^2 \Psi = 3\pi^2 \nu^2 \mu_0 \epsilon_0 \chi^{(3)} |\Psi|^2 \Psi, \quad (57)$$

de maneira que ao aplicar a aproximação paraxial, discorre que

$$\left(\nabla_\perp^2 \psi\right) \exp(i\kappa z) + 2i\kappa (\partial_z \psi) \exp(i\kappa z) = 3\pi^2 \nu^2 \mu_0 \epsilon_0 \chi^{(3)} |\psi|^2 \psi \exp(i\kappa z), \quad (58)$$

por fim, eliminando o termo $\exp(i\kappa z)$ e definindo $\alpha = 3\pi^2 \nu^2 \mu_0 \epsilon_0 \chi^{(3)} / 2\kappa$, obtemos

$$i\partial_z \psi + \frac{1}{2\kappa} \nabla_\perp^2 \psi = \alpha |\psi|^2 \psi. \quad (59)$$

que corresponde exatamente à equação não-linear de Schrödinger.^[2]

B.3 Aproximação da propagação num cristal fotorrefrativo

A equação não-linear de onda adotada como modelo de propagação no cristal fotorrefrativo se assemelha à equação não-linear de Schrödinger no regime em que $\varsigma |\psi|^2 < 1$, dado que podemos aplicar a expansão numa série geométrica

$$i\partial_z \psi = -\frac{1}{2\kappa} \nabla_\perp^2 \psi + \alpha \psi (1 - \varsigma |\psi|^2 + \dots), \quad (60)$$

e ao ignorarmos termos de mais alta ordem, obtemos

$$i\partial_z \psi \approx -\frac{1}{2\kappa} \nabla_\perp^2 \psi + \alpha \psi - \alpha \varsigma |\psi|^2 \psi, \quad (61)$$

que consiste na equação de onda de um meio que segue à equação não-linear de Schrödinger com um índice de refração inhomogêneo.^[23, 25]

C PROPAGAÇÃO DA LUZ NO ESPAÇO LIVRE

Ao aplicarmos a transformada de Fourier no plano transversal à propagação na aproximação paraxial da equação de Helmholtz¹⁴, obtemos que

$$\left[i\partial_z - \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa} \right] \mathcal{F}\{\psi\} = 0, \quad (62)$$

multiplicando a equação por $\exp[i\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa}z]$, discorre que

$$\exp\left(i\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa}z\right) \left[i\partial_z - \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa} \right] \mathcal{F}\{\psi\} = 0, \quad (63)$$

ao notar o termo da esquerda da igualdade como a derivada parcial em z de $\mathcal{F}\{\psi\} \exp[i\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa}z]$ vezes i , segue que

$$i\partial_z \left\{ \mathcal{F}\{\psi\} \exp\left[i\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa}z\right] \right\} = 0, \quad (64)$$

assim, $\mathcal{F}\{\psi\} \exp[i\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa}z]$ é constante. Impondo a condição de contorno em $z = 0$, obtemos que

$$\mathcal{F}\{\psi\} = \mathcal{F}\{\psi_{z=0}\} \exp\left[+i\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2\kappa}z\right], \quad (65)$$

que corresponde à forma no domínio da frequência da propagação no espaço livre via convolução¹⁵.^[1]

¹⁴Utilizamos aqui a transformada de Fourier de um operador diferencial apresentada no Anexo D.

¹⁵Tal resultado pode ser facilmente obtido ao utilizar o teorema da convolução inverso, notando que a transformada inversa da gaussiana é uma gaussiana.^[1, 28]

D TRANSFORMADA DE FOURIER

Fenômenos ondulatórios são numerosamente presentes na natureza e a transformada de Fourier fulgura com um dos principais alicerces para a compreensão de sua propagação.^[1] Essa consiste numa generalização a um caso contínuo dos coeficientes da Série de Fourier, permitindo a decomposição de um sinal ondulatório como a superposição integral de sinais harmônicos (que são mais elementares)^{16, [1, 28]} Sendo f uma função de uma variável, definimos¹⁷

Definição 2 (Transformada de Fourier).

$$\mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp[-2\pi i \eta x] dx \quad (66)$$

Definição 3 (Transformada inversa de Fourier).

$$\mathcal{F}^{-1}\{f\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) \exp[+2\pi i \eta x] d\eta \quad (67)$$

D.1 Propriedades da transformada de Fourier

Doravante, para descrever as propriedades da transformada de Fourier (em uma ou duas dimensões), tomaremos letras latinas posteriores a f (f, g, \dots) como funções, letras gregas (α, β, \dots) e latinas anteriores a f (a, b, \dots) como escalares complexos e reais, respectivamente, além disso, o símbolo '*' denotará a operação de convolução de funções.

Definição 4 (Convolução).

Sendo f e g duas funções de uma variável, a sua convolução é dada por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x')g(x') dx \quad (68)$$

Propriedade 1. $\mathcal{F}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{F}\{f\} + \beta \mathcal{F}\{g\}$.

Propriedade 2. Sendo f tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\mathcal{F}\{\partial_x f\} = -2\pi i \eta \mathcal{F}\{f\}$.

Propriedade 3. $\mathcal{F}\{f(x - a)\} = \exp[-2\pi i \eta a] \mathcal{F}\{f\}$.

Propriedade 4. $\mathcal{F}\{\exp[+2\pi i a x] f\} = \mathcal{F}\{f\}(\eta - a)$.

Propriedade 5. Sendo $a \neq 0$, $\mathcal{F}\{f(ax)\} = |a| \mathcal{F}\{f\}(\eta/a)$.

Propriedade 6. $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\}$.

Propriedade 7. $\mathcal{F}\{fg\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}$.

Propriedade 8. $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\} = f(x)$.

¹⁶Usualmente a transformada de Fourier e sua transformada inversa são descritas em função do vetor de onda, no entanto aqui adotaremos-na em função das frequências (padrão mais regularmente utilizado na descrição de fenômenos ópticos).^[1]

¹⁷Para funções de mais variáveis basta aplicar a transformada de maneira iterada, para essas, as propriedades posteriormente apresentadas também são válidas (ainda que sejam necessárias adaptações, como os casos das Propriedades 2, 6 e 7).^[1]