Universidade Federal de Alagoas UFAL

Instituto de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Uma Proposta Lúdica de Ensino de Congruência Modular no Ensino Fundamental e Médio através do Código de Barras

Aluna: Kelyda Niely Lima Silva

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Abril de 2024

Kelyda Niely Lima Silva

Uma Proposta Lúdica de Ensino de Congruência Modular no Ensino Fundamental e Médio através do Código de Barras

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Maceió - AL

2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586p Silva, Kelyda Niely Lima.
Uma proposta lúdica de ensino de congruência modular no ensino fundamental através do código de barras / Kelyda Niely Lima Silva. - 2024.
29 f. : il.

Orientadora: Juliana Roberta Theodoro de Lima.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 29.

1. Congruência modular - Metodologia. 2. Ciência - Componente Curricular. I. Título.

CDU: 371.214

Folha de Aprovação

Kelyda Niely Lima Silva

Uma Proposta Lúdica de Ensino de Congruência Modular no Ensino Fundamental e Médio através do Código de Barras

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
JULIANA ROBERTA THEODORO DE LIMA
Data: 09/04/2024 07:22:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Juliana Theodoro de Lima SIAPE: 2347015
IM-UFAL

gov.br Documento assinado digitalmente
ISNALDO ISAAC BARBOSA
Data: 07/04/2024 13:09:38-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa SIAPE: 264763
IM-UFAL

gov.br Documento assinado digitalmente
ALAN ANDERSON DA SILVA PEREIRA
Data: 07/04/2024 11:06:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira SIAPE: 3149228
IM-UFAL

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, fonte de toda inspiração e força que me guia em cada passo da minha jornada acadêmica. Em segundo lugar, dedico-o à minha mãe, cujo sacrifício e dedicação incansáveis sempre foram voltados para garantir-me o melhor ensino e qualidade de vida possível. A ela devo minha gratidão eterna. Também dedico este trabalho aos meus queridos tios, cujo apoio inabalável e incentivo constante foram fundamentais para o meu crescimento intelectual e sucesso acadêmico. Que esta dedicação seja uma pequena expressão da minha profunda gratidão por todo o apoio e amor que recebi ao longo do caminho.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimento neste trabalho vai para duas pessoas que foram essenciais em minha jornada acadêmica. Em primeiro lugar, à Professora Doutora Juliana Theodoro, que não apenas foi uma professora do primeiro período, mas também desempenhou o papel de uma verdadeira mãe acadêmica. Sua dedicação e cuidado ultrapassaram os limites da sala de aula. Juliana não apenas compartilhou seu conhecimento e experiência, mas também abriu as portas de sua casa literalmente, oferecendo orientação, apoio emocional e oportunidades de aprendizado que transcendem qualquer expectativa que eu poderia ter tido de um professor universitário.

Seu exemplo como educadora vai muito além do ensino formal. Ela foi uma presença constante em minha vida acadêmica, incentivando-me a explorar novos horizontes, desafiando-me a superar obstáculos e sempre acreditando em meu potencial, mesmo quando eu mesma duvidava e puxando a orelha quando era necessário. Sua paixão pela pesquisa e sua dedicação aos alunos são inspiradoras, e sou imensamente grata por ter tido o privilégio de fazer parte de seu grupo de pesquisa.

Juliana Theodoro não apenas me ensinou os fundamentos da minha área de estudo, mas também cultivou em mim uma paixão pelo aprendizado contínuo e uma ética de trabalho que levo comigo para além dos limites da universidade. Ela é um exemplo de excelência acadêmica, mas, acima de tudo, de humanidade e generosidade. Sou profundamente grata por sua presença em minha vida e por tudo o que ela fez por mim. Suas lições e seu apoio serão lembrados e valorizados para sempre.

Em segundo lugar, expresso minha profunda gratidão ao meu namorado, professor Adson Mikael. Seu apoio incondicional e incentivo em todos os meus projetos e trabalhos acadêmicos foram um verdadeiro sustento ao longo desta jornada. Obrigada por não apenas compartilhar comigo seu conhecimento e experiência, mas também por ser um parceiro incansável, sempre disposto a oferecer seu tempo, energia e amor para me ajudar a superar desafios e alcançar meus objetivos acadêmicos.

Gostaria também de estender meu agradecimento aos demais professores que contribuíram para o meu crescimento acadêmico, em especial ao Professor Doutor Isnaldo. E não poderia esquecer de mencionar meus queridos colegas Sarah Rafaely e Breno Rufino, cuja amizade e colaboração tornaram minha jornada ainda mais enriquecedora. A todos vocês, meu mais sincero obrigado pelo apoio, orientação e amizade ao longo deste percurso acadêmico.

"Os que comfiam no SENHOR serão como o Monte de Sião, que não se abala, mas permanece para sempre." (Salmo 125)

Resumo

Este trabalho propõe um breve estudo sobre a abordagem lúdica no ensino da congruência modular, visando destacar sua importância e os benefícios específicos dessa metodologia no contexto do ensino fundamental. Explorando a congruência modular de maneira lúdica, busca-se tornar o aprendizado mais envolvente e acessível aos alunos, promovendo uma compreensão profunda e duradoura desse conceito matemático. Os benefícios incluem o estímulo à participação ativa dos estudantes, o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas de forma divertida, e a promoção de uma aprendizagem mais significativa. Ao integrar a ludicidade ao ensino da congruência modular, este trabalho visa não apenas enriquecer o aprendizado matemático, mas também proporcionar um ambiente educacional estimulante e motivador, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e intelectual dos alunos no ensino fundamental. Este trabalho foi realizado na rede pública de ensino com o principal objetivo de estimular meninas a se interessarem pelas áreas das ciências exatas. Essa atividade, concentrou-se na congruência modular, um conceito matemático, buscando apresentá-lo e demonstrá-lo de forma prática para as alunas foi trabalhado o sistemas de verificação de códigos de barras, através de exemplos práticos. A intenção era destacar o quanto a matemática pode ser magnífica, inspirando as estudantes a perceberem a beleza e a aplicabilidade dessa disciplina em suas vidas. O enfoque na congruência modular ofereceu uma abordagem específica para mostrar como os conceitos matemáticos podem ser fascinantes e relevantes, proporcionando uma experiência prática e envolvente no contexto das ciências exatas.

Palavras-chaves: Congruência modular. Metodologia. Ciência na Escola como Componente Curricular.

Abstract

This work proposes a brief study on the playful approach in teaching modular congruence, aiming to highlight its importance and the specific benefits of this methodology in the context of elementary education. By exploring modular congruence in a playful manner, the goal is to make learning more engaging and accessible to students, promoting a deep and lasting understanding of this mathematical concept. Benefits include stimulating active student participation, developing problem-solving skills in a fun way, and promoting more meaningful learning. By integrating playfulness into the teaching of modular congruence, this work aims not only to enrich mathematical learning but also to provide a stimulating and motivating educational environment, contributing to the cognitive and intellectual development of students in elementary education. This work was conducted in the public school system with the primary objective of encouraging girls to take an interest in the exact sciences. This activity focused on modular congruence, a mathematical concept, seeking to present and demonstrate it in a practical way to the students by working with the verification systems of barcodes through practical examples. The intention was to highlight how magnificent mathematics can be, inspiring the students to perceive the beauty and applicability of this discipline in their lives. The focus on modular congruence offered a specific approach to show how mathematical concepts can be fascinating and relevant, providing a practical and engaging experience in the context of the exact sciences.

Keywords: Modular Congruence. Methodology.

Sumário

Introdução

A escolha deste trabalho é motivada pela significativa importância de abordar o tema da congruência modular no âmbito da educação básica. Reconhecemos que é possível introduzir este conceito de maneira acessível e prática no currículo das escolas de ensino fundamental II e ensino médio, utilizando uma linguagem simplificada com exemplos do cotidiano. O ensejo principal é evidenciar como a congruência modular pode ser aplicada em situações do dia a dia, tornando-a tangível e relevante para os alunos.

O presente estudo concentra-se em apresentar uma abordagem prática da congruência modular, por meio da implementação de duas atividades em cinco escolas da rede estadual de Alagoas, com o projeto Mulheres nas Ciências Exatas, Engenharias e Computação do Instituto de Matemática IM-UFAL. O tópico específico se deu depois de uma análise de um trabalho de conclusão de curso do Instituto de Matemática em que abordava aplicações da congruência modular de maneira prática no cotidiano: as atividades foram delineadas com base em situações concretas, como a interpretação de códigos de barras e a validação de números de cadastro de pessoas físicas (CPF). Analisando os resultados obtidos a partir destas atividades, constatamos que os professores podem se valer de abordagens pedagógicas que envolvam a resolução de problemas do mundo real e o uso de jogos matemáticos para enriquecer o processo de aprendizagem.

Além disso, proponente desse TCC já realizou a atividade em sala, na escola em que trabalha. A sugestão aqui, inédita na escola, mostra como os jogos e atividades lúdicas funcionam de maneira totalmente positiva na aprendizagem dos alunos, quanto na reformulação do posicionamento do professor dentro da sala de aula, como uma formação continuada, já que muitos dos profissionais que atuam nas escolas, não tiveram esse tipo de discussão e contato nas suas formações.

Ao analisar os resultados obtidos a partir dessas atividades, constatamos que os professores podem se valer de abordagens pedagógicas que envolvam a resolução de problemas do mundo real e o uso de jogos matemáticos para enriquecer o processo de aprendizagem. Além disso, a experiência pessoal da proponente deste TCC, que já realizou a atividade em sala de aula na escola em que trabalha, foi de grande importância. Esta sugestão, até então inédita na escola, evidenciou como as atividades lúdicas funcionam de maneira totalmente positiva na aprendizagem dos alunos. Além disso, destacou-se a transformação no papel do professor dentro da sala de aula, onde muitos profissionais que atuam nas escolas não tiveram acesso a esse tipo de discussão e contato durante suas formações iniciais, o que ressalta a importância desse estudo para aprimorar as práticas pedagógicas e promover uma educação mais dinâmica e eficaz.

1 Motivação do Ensino-Aprendizagem

De acordo com a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), a matemática é número, jogos e linguagem. Além disso, a habilidade EF12EF03 descrita na base curricular, é clara na sugestão dos jogos e brincadeiras em sala de aula, bem como a justificativa para tais atividades:

> Planejar e utilizar estratégias para resolver desafios de brincadeiras e jogos populares do contexto comunitário e regional, com base no reconhecimento das características dessas práticas.(BRASIL, 2018)

De acordo com Rodrigo Blanco, professor, formador, editor de livros didáticos, mentor e revisor do Time de Autores da Revista Nova Escola, no contexto da BNCC:

> O eixo da BNCC deixa claro que o conhecimento matemático é essencial não só por sua aplicabilidade, mas também por sua potencialidade na formação de um cidadão crítico, autônomo e ativo na sociedade. Os jogos de estratégia, os desafios lógicos e os problemas que exigem soluções não tradicionais são exemplos de situações que despertam as habilidades matemáticas para além dos contextos sociais e de seus usos, sem cair necessariamente no formalismo. O gosto pelos desafios, se despertado, pode ser muito mais útil, em campos diversos, com benefícios incontáveis para a sociedade como um todo.(Revista Nova Escola, 2023)

É indispensável destacar que o ambiente de aprendizagem desempenha um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. As alunas participantes do estudo em questão foram inseridas em uma sala de aula especialmente adaptada e modificada para a aplicação das atividades propostas, criando assim um ambiente propício e estimulante para a exploração do tema. Almejamos, por meio deste trabalho, apresentar conceitos teóricos, demonstrando de maneira prática e aplicada como a congruência modular pode ser incorporada ao currículo escolar de forma eficaz e significativa.

Essa proposta de inserir conteúdos científicos de maneira responsável e cuidadosa, como prática de aprendizagem, inovação e transformação social, também já é proposta da Base Nacional Curricular Comum. Segundo a BNCC:

> A demanda por práticas pedagógicas que estimulem o aprendizado dos estudantes vem ganhando a atenção de pesquisadores nos últimos anos. Dentre elas, destacam-se o uso do método científico e a elaboração de pesquisa científica em sala de aula. Essas atividades proporcionam aos alunos a aquisição de novos conhecimentos, que passam a pensar de maneira lógica sobre os fatos cotidianos e a resolução de problemas práticos. (BRASIL, 2018)

Esperamos com esse trabalho, contribuir para a promoção de uma educação matemática mais dinâmica, contextualizada e envolvente para os alunos do ensino fundamental II e do ensino médio. Buscamos fornecer exemplos práticos de sua utilidade e estimular o pensamento crítico e a capacidade de resolver problemas por parte dos alunos. Por meio de atividades práticas e desafiadoras ao currículo, visamos promover uma aprendizagem mais ativa e significativa, onde os estudantes possam desenvolver habilidades matemáticas essenciais e ao mesmo tempo perceber a relevância do conteúdo estudado para suas vidas.

Também é relevante destacar que a escolha de abordar a congruência modular neste trabalho se fundamenta na importância de ampliar o repertório de estratégias didáticas dos professores. Ao proporcionar exemplos concretos de como este conceito pode ser ensinado de maneira envolvente, esperamos inspirar educadores a explorarem novas abordagens pedagógicas em suas práticas de ensino. Acreditamos que, ao diversificar as metodologias utilizadas em sala de aula, é possível atender às diferentes necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos, promovendo assim uma educação mais significativa e acessível.

A realização deste trabalho também visa contribuir para o fortalecimento da relação entre teoria e prática no ensino da matemática. Apresentando atividades baseadas em situações reais e contextualizadas, procuramos demonstrar como os conceitos matemáticos podem ser aplicados de forma concreta e relevante no mundo ao redor dos alunos. Dessa forma, esperamos despertar o interesse dos estudantes pela disciplina, mostrando-lhes que a matemática está presente em diversos aspectos de suas vidas e pode ser uma ferramenta útil para a compreensão do mundo.

Outro aspecto relevante a ser considerado é a necessidade de adaptação e diferenciação curricular para atender às necessidades individuais dos alunos. Nem todos os estudantes aprendem da mesma maneira, e é essencial que os educadores reconheçam e valorizem a diversidade de estilos de aprendizagem em suas salas de aula. Sendo assim, os professores podem auxiliar os alunos a visualizar a relevância e a aplicabilidade dos conceitos matemáticos estudados ao implementar atividades práticas e contextualizadas em suas vidas diárias. Em linhas gerais, este trabalho inclui uma reflexão crítica sobre os resultados obtidos e as possíveis implicações para a prática pedagógica. Oferecendo uma variedade de atividades e recursos, os professores podem garantir que todos os alunos tenham a oportunidade de se envolver e alcançar sucesso acadêmico. É fundamental ressaltar, pois, o impacto positivo que uma abordagem prática e aplicada da congruência modular pode ter no desenvolvimento das habilidades socioemocionais dos alunos.

Assim, pretendemos contribuir para o avanço da pesquisa em educação matemática e para a melhoria contínua da qualidade do ensino nas escolas. Por essa razão, trabalhando em projetos colaborativos e resolvendo problemas do mundo real, os alunos terão a oportunidade de desenvolver habilidades de comunicação, trabalho em equipe e resiliência.

Habilidades assim são essenciais para o sucesso na sala de aula e em suas vidas pessoais e profissionais futuras.

1.1 A importância da teoria dos números no desenvolvimento integral dos alunos no contexto escolar

A teoria dos números é um ramo basilar da matemática que estuda propriedades dos números inteiros, suas relações e estruturas. Nesse contexto, a divisibilidade, divisão euclidiana e congruência modular são conceitos que permeiam aspectos diversos da teoria dos números, tendo aplicações práticas em inúmeras áreas, desde a criptografia até a teoria dos códigos e computação. Embora os conceitos de divisibilidade e divisão euclidiana sejam amplamente abordados no ensino básico, a congruência modular geralmente não é parte do currículo.

É importante enfatizar, no entanto, sua importância em razão das aplicações práticas e da capacidade de desenvolver o pensamento abstrato e de solucionar problemas. Ao introduzir a congruência modular aos docentes e discentes do ensino básico, estamos fornecendo-lhes uma ferramenta eficiente para abordar uma variedade de problemas matemáticos de maneira mais significativa e abrangente.

Para embasar nosso estudo, utilizamos como referência o livro *Introdução à Teoria dos Números* (SANTOS, 1998), publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática em 1998. Esta obra fornece uma base sólida acerca dos conceitos fundamentais da Teoria dos Números, com uma abordagem acessível e adequada tanto para estudantes iniciantes quanto para pesquisadores avançados. Mediante a exposição detalhada de conceitos, proposições, teoremas e demonstrações, o livro nos proporcionou o embasamento teórico necessário para compreender e explorar os temas abordados.

A obra é estruturada de forma a introduzir gradualmente os conceitos básicos e avançar para temas mais complexos, apresentando conceitos basilares para o entendimento da disciplina. O autor adota uma abordagem rigorosa, mas acessível, apresentando definições claras, proposições fundamentais, teoremas importantes e suas respectivas demonstrações.

O início do livro explora os conceitos de divisibilidade e divisão euclidiana, que são fundamentais para a compreensão de muitos aspectos da Teoria dos Números. O autor explica de forma minuciosa como determinar se um número é divisível por outro e como realizar a divisão de dois inteiros de forma a obter um quociente e um resto únicos. Além do mais, ele demonstra a importância da divisibilidade na decomposição dos números em fatores primos e na resolução de problemas relacionados à aritmética básica.

No que tange ao Algoritmo de Euclides, para encontrar o máximo divisor comum (MDC) de dois números inteiros, destaca sua relevância na resolução de problemas práticos e na prova de teoremas importantes na Teoria dos Números, apresentando exemplos e exercícios para ajudar o leitor a consolidar o entendimento desses conceitos importantes. Santos explora aplicações avançadas da Congruência Modular, como a criptografia RSA e a geração de números pseudoaleatórios, ilustrando a importância prática desse conceito na segurança de sistemas de comunicação e na computação moderna.

Com sugestões de atividades e recursos didáticos para ajudar os educadores a incorporar os temas da Teoria dos Números em suas aulas, o autor promove o desenvolvimento do pensamento crítico e da resolução de problemas matemáticos. Explorando os temas de divisibilidade, divisão euclidiana e congruência modular com uma abordagem acessível, ressalta-se a importância dessa obra como referência indispensável para estudantes, professores e pesquisadores interessados no campo da Teoria dos Números.

O livro também apresenta recursos didáticos que auxiliam no ensino e na aprendizagem da Teoria dos Números, incluindo exemplos elucidativos, exercícios variados e material complementar. Além das sugestões de atividades e recursos didáticos, J. P. O. Santos (1998) salienta a importância de uma abordagem interdisciplinar ao explorar os temas da Teoria dos Números. Para isso, ele aponta que esses conceitos têm aplicações diretas em matemática pura e em outras áreas do conhecimento, como criptografia, computação, física e até mesmo em campos mais distantes, como a biologia e a economia.

Ao promover uma visão ampla e integrada da Teoria dos Números, Santos proporciona aos educadores a oportunidade de enriquecer o currículo escolar, mostrando aos alunos como os princípios matemáticos podem ser aplicados em diferentes contextos e como estão presentes em diversas áreas do conhecimento humano. Do mesmo modo, o autor incentiva uma abordagem investigativa no ensino da Teoria dos Números, sugerindo atividades práticas que envolvem experimentação, exploração de padrões e descoberta guiada e permitindo que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos por meio da experiência direta.

Ao longo do livro, também é destacada a importância da comunicação matemática, incentivando os alunos a expressar suas ideias de forma clara e precisa, tanto oralmente quanto por escrito. Nessa óptica, ele fornece orientações sobre como formular argumentos matemáticos válidos, como elaborar demonstrações rigorosas e como apresentar resultados de maneira organizada e coerente. Outro aspecto importante abordado por Santos é a valorização da resolução de problemas como uma ferramenta fundamental para o aprendizado da matemática, propondo uma variedade de problemas desafiadores que estimulam os alunos a aplicar os conceitos aprendidos de maneira criativa e a desenvolver estratégias eficazes para sua solução.

Embora a obra apresente os conceitos básicos da Teoria dos Números, ela também busca proporcionar uma experiência educacional enriquecedora e significativa, que estimule o pensamento crítico, a criatividade e a comunicação matemática dos alunos. É um recurso valioso tanto para educadores que desejam aprimorar suas práticas de ensino quanto para estudantes que buscam aprofundar seus conhecimentos em matemática e suas aplicações. Assim, recomendamos totalmente a exploração desse livro para a pesquisa científica dentro das escolas, dentro das habilidades e componentes que a relacionam.

1.1.1 A proposta do jogo do código de barras

Introdução à teoria dos números aplicada no dia-a-dia − aprendendo sobre os códigos de barras de produtos: na linha abstrata na Matemática, chamada Álgebra Abstrata, o estudo da teoria dos números é um pré-requisito para que se possa entender e acompanhar essa linha. Nessa proposta, conseguimos abordar a teoria dos números, através de uma aplicação do nosso dia-a-dia: nos códigos de barras dos produtos. Aproveitamos o trabalho de conclusão de curso de uma aluna egressa da licenciatura em matemática do nosso Instituto (FRANCO, 2019), e, que ensina que nos 12 primeiros números dos códigos de barra, é possível acertar o último algarismo, através de um algoritmo com critério de divisibilidade. Nessa atividade, construímos diversos universos onde os códigos de barras estão presentes: supermercados, papelaria, lojas de produtos de belezas. Para cada escola, levamos um desses universos descritos, com vários produtos. A gincana era a seguinte: dividia-se as alunas em dois grupos numa competição, onde quem acertasse os dois últimos números dos códigos de barra do produto escolhido, usando o algoritmo dos códigos de barras, poderia ficar com o produto. Foi uma experiência incrível onde elas estavam atentas a cada critério de divisibilidade dado para elas resolverem. Os universos levados eram de interesse das alunas, e elas viam um objetivo para aprender, que era ficar com o produto que mais as interessassem. No fim, ainda demos algumas lembrancinhas para todas pela participação na atividade.

2 Fundamentação Teórica

Neste Capítulo apresentaremos alguns conceitos, proposições, teoremas e demonstrações que embasaram nosso conhecimento para o estudo de divisibilidade, divisão euclidiana e, principalmente, congruência modular. Assim, os conteúdos apresentados, excluindo o estudo de congruência modular, são objetos que fazem parte da base comum curricular do Ensino Básico. Apesar de que o tema de congruência modular não seja estudado no ensino básico, enfatizamos a sua importância, reunindo conceitos necessários para o entendimento da teoria e demonstramos aos professores e alunos do ensino básico, uma ferramenta para resolução de problemas matemáticos.

2.1 Resultados Básicos em Teoria dos Números

Consideremos o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e suas operações usuais.

Teorema 2.1.1. *(Princípio da Boa Ordem (PBO)) Todo conjunto não-vazio de inteiros positivos contém um elemento mínimo.*

Teorema 2.1.2. *(Primeira forma do Princípio de Indução) Seja B um subconjunto dos inteiros positivos. Se B possui as duas seguintes propriedades;*

(i) $1 \in B$;

(ii) $k+1 \in B$, $\forall k \in B$.

Então, B contém todos os inteiros positivos.

Teorema 2.1.3. *Segunda forma do Princípio de Indução Finita: Seja B um subconjunto dos inteiros positivos. Se B possui as duas seguintes propriedades;*

(i) $1 \in B$

(ii) $k+1 \in B$, *sempre que* $1, 2, ..., k \in B$

Demonstração. Com a intenção de demostrar o Princípio de Indução Finita, assumimos o Princípio da Boa Ordem (2.1.1) como um postulado. Na verdade, como 2.1.1,2.1.2, 2.1.3 são equivalentes e poderíamos ter assumido, 2.1.1 ou 2.1.2. Vamos, demonstrar que 2.1.1, inicialmente, com a hipótese do Princípio da Boa Ordem. Desejamos provar que se o subconjunto B dos inteiros positivos, tendo as propriedades (i) e (ii), então B contém necessariamente, todos os inteiros positivos. A prova que apresentamos é feita por contradição. De fato, vamos supor que, mesmo possuindo as propriedades do subconjuntos B, este não contenha todos os inteiros positivos. Então, seja A um subconjuntos dos inteiros positivos não contidos em B. Pelo 2.1.1, A possui um menor elemento e este é maior do que 1, pois $1 \in B$. Seja a_0 este elemento, temos que $a_0 - 1$ pertence a B e como B satisfaz o item (ii) então o sucessor de $a_0 - 1$, que é a_0, também deve pertencer a B. Por tanto, esta contradição nos leva a concluir que A tem que ser vazio, o que conclui a demonstração. ♡

2.1.1 Divisibilidade

Definição 2.1.1. *Dados a e b dois números inteiros, dizemos que a divide b, denotado por $a \mid b$, se existir um inteiro c tal que $b = ac$. Se a não divide b escrevemos $a \nmid b$.*

Exemplo 2.1.1. $4 \mid 12$, *pois existe* $c = 3$, *onde* $12 = 4 \cdot 3$.

$5 \mid 225$, *pois existe* $c = 45$, *onde* $225 = 5 \cdot 45$.

$3 \nmid 11$, *pois não existe um c inteiro onde satisfaça a igualdade.*

$4 \nmid 159$, *pois não existe um c inteiro onde satisfaça a igualdade.*

Proposição 2.1.4. *Se a, b, c, m e n são inteiros, $c \mid a$ e $c \mid b$ então $c \mid (ma + mb)$.*

Demonstração. Se $c \mid a$ e $c \mid b$ então $a = k_1 c$ e $b = k_2 c$. Multiplicando-se estas duas equações respectivamente por m e n teremos $ma = mk_1 c$ e $nb = nk_2 c$. Somando-se membro a membro obtemos $ma + nb = (mk_1 + nk_2)\, c$, o que nos que $c \mid (ma + nb)$. ♡

Exemplo 2.1.2. *Como* $4 \mid 12$ *e* $4 \mid 24$, *então temos que* $4 \mid (5 \cdot 12 + 6 \cdot 24)$.

$7 \mid 63$ *e* $7 \mid 231$, *então temos que* $7 \mid (2 \cdot 63 + 3 \cdot 231)$.

Teorema 2.1.5. *A divisão definida anteriormente possui as seguintes propriedades:*

(i) $n \mid n$

(ii) $d \mid n \Rightarrow ad \mid an$

(iii) $ad \mid an$ *e* $a \neq 0 \Rightarrow d \mid n$

(iv) $1 \mid n$

(v) $n \mid 0$

(vi) $d \mid n$ *e* $n \neq 0 \Rightarrow |d| \leq |n|$

(vii) $d \mid b$ *e* $n \mid d \Rightarrow |d| = |n|$

(viii) $d \mid n$ *e* $d \neq 0 \Rightarrow (n/d) \mid n$.

As demonstrações desse teorema podem ser encontradas em (SANTOS, 1998). ♡

2.1.2 O algoritmo da Divisão

Teorema 2.1.6. *Dados dois inteiros a e b, com $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que*

$$a = qb + r, \text{ com } a \leq r \leq b \, (r = 0 \Leftrightarrow b \mid a).$$

Assim, q é chamando de quociente e r de resto da divisão de a por b. Faremos a demonstração desse algoritmo, por meio do Teorema de Eudoxius, encontrado em (SANTOS, 1998).

Demonstração. Pelo Teorema de Eudoxius, como $b > 0$, existe q satisfazendo:

$$qb \leq a < (q + 1) \, b,$$

o que implica,

$$0 \leq a - qb \text{ e } a - qb < b.$$

Desta forma, podemos definir $r = a - qb$, obtendo de forma garantida a existência de q e r. No entanto a fim de mostrarmos a unicidade, vamos supor a existência de outro par q_1 e r_1, verificando:

$$a = q_1 b + q_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Disto temos que,

$$\begin{aligned} (qb + r) - (q_1 b + r_1) &= 0 \\ qb + r &= q_1 b + r_1 \\ qb - q_1 b &= r_1 - r. \end{aligned}$$

Colocando b em evidência temos, $b \, (q - q_1) = r_1 - r$, o que implica $b \mid (r_1 - r)$. Como, $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ e, por tanto, como $b \mid (r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r = r_1$. Logo $q_1 b = qb \Rightarrow qb \Rightarrow q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$. ♡

Vale ressaltar que, embora exista a restrição $b > 0$, isto não é necessário e, utilizando-se de 2.1.6 teríamos encontrado q e r também para $b < 0$. Podemos, pois, enunciar o Algoritmo da Divisão de Euclides da seguinte forma: Dados dois inteiros a e b, $b \neq 0$ existe um único par de inteiros q e r tais que $a = qb + r$ com $0 \leq r < |b|$.

2.2 Congruência

Os primeiros estudos de congruência tem raízes antigas e foram desenvolvidos por vários matemáticos ao longo da história. No entanto, um dos pioneiros nesse campo foi o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Figura 1 – Carl Friedrich Gauss.

Fonte: Imagem da Internet.

Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão, criador da geometria diferencial, conhecido como "Príncipe da Matemática[1]", que teve importantíssimas contribuições na matemática, física, geometria e astronomia. Nasceu em 30 de Abril de 1777 em Brunswick, na Alemanha. Desde muito novo foi reconhecido como uma criança prodígio. Aprendeu a ler e somar sozinho, tendo habilidade de calcular antes da fala. Com três anos de idade, chegou a conferir um erro de cálculo no salário de seu pai. Prontamente, Gauss cumpria atividades de experimentação aritmética e com seus oito anos, em uma aula de Matemática, surpreendeu seu professor ao solucionar o problema de calcular a soma dos primeiro cem números inteiros. Dentro de uma família de trabalhadores urbanos e esforçados, sua mãe era semianalfabeta e seu pai um jardineiro, atuando também como capataz, assistente comerciário, tesoureiro, dentre outra atividades.

Gauss desenvolveu a teoria das congruências de maneira sistemática. Sua obra é bastante extensa e diversa e grande parte de seu trabalho serviu de base para o crescimento da Teoria do Números, suas notações são utilizadas ainda nos dias atuais, o que demonstra ser uma extraordinária obra de matemática. Com isso, serão apresentadas as definições de congruência modular e sua propriedades como dadas em (SANTOS, 1998).

[1] Disponível em: <https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Gauss-KF>

Os conceitos de congruência de dois números se baseia nos conhecimentos adquiridos nos capítulos anteriores, principalmente nos conceitos de divisibilidade e restos de uma divisão de dois inteiros. (AIRES, 2015)

Definição 2.2.1. *Se a e b são dois números inteiros, dizemos que a é congruente a b módulo m, $(m > 0)$, se $m \mid (a - b)$. Denotamos por $a \equiv b\,(mod\ m)$. Se $m \nmid (a - b)$, então dizemos que a é incongruente a b módulo m e denotamos $a \not\equiv b\,(mod\ m)$.*

Exemplo 2.2.1. $21 \equiv 3\ mod,\ pois\ 9 \mid (21 - 3)$

$29 \equiv 5\ mod\ 6,\ pois\ 6 \mid (29 - 5)$

$12 \not\equiv 2\ mod\ 4,\ pois\ 4 \nmid (12 - 2)$

Outro modo, seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais (HEFEZ, 2005). Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b\ mod\ m$$

Exemplo 2.2.2. $7 \equiv 15\ mod\ 2$, *já que os restos da divisão de 7 e de 15 por 2 são iguais.*

3 Aplicações

Dentre as 5 *escolas que aplicamos a atividade pela primeira vez* (2019), *vamos enfatizar a implementação na Escola Dom Pedro II, envolvendo 15 meninas que cursam o 7º ano. O objetivo principal foi proporcionar às participantes uma primeira visão da congruência modular, aplicada de maneira prática na compreensão do código de barras e do CPF.*

A atividade buscou integrar a teoria dos números, especificamente a congruência modular, a situações do cotidiano relacionadas à matemática aplicada. As participantes foram guiadas por conceitos teóricos fundamentais, explorando a congruência modular como base para entender a estrutura do código de barras e a validação do CPF. Pois em grego, cryptos significa secreto, oculto.

> *A criptografia estuda os métodos para codificar uma mensagem de modo que só seu destinatário legítimo consiga interpretá-la. É a arte dos "códigos secretos". (COUTINHO, 2008).*

Essa abordagem prática permitiu que as alunas vissem diretamente a relevância da teoria dos números em contextos do mundo real, estimulando o interesse e a compreensão da matéria. Além disso, o projeto contribuiu para que as meninas desenvolvessem habilidades analíticas e de resolução de problemas, promovendo uma visão mais ampla e aplicada da matemática. Este tipo de atividade visa inspirar as estudantes a explorarem as Ciências Exatas, incentivando a participação feminina em áreas tradicionalmente dominadas por homens.

Dessa forma,o presente trabalho tem por objetivo explorar veracidade dos códigos de barra, o qual tem grande importância para o conteúdo matemático no nosso dia-a-dia. Contextualizar a matemática bem como sua importância dentro de questões corriqueiras do cotidiano, faz com que os alunos tenham um interesse de absorvê-la, enxergando sua necessidade em exemplos básicos dos nossos dias.

Os seres humanos historicamente buscam através da ciência meios para facilitar o seu dia a dia, ou seja, instrumentos tecnológicos.

No decorrer do seculo XX, um estudante de graduação do Drexel Institute of Technology, na Filadelfia, EUA, Bernard Silver e seu amigo Norman Joseph Woodland dedicaram-se a encontrar uma ferramenta que agilizasse a logıstica do supermercado, para diminuir o tempo de atendimento ao cliente.

Em síntese, a teoria dos números está presente em muitos aspectos da vida cotidiana, mesmo que nem sempre estejamos conscientes disso. Os códigos numéricos desempenham um papel significativo em nossa rotina, desde tarefas simples até processos mais complexos.

A congruência modular desempenha um papel crucial na criação e uso de códigos de barras, um dos avanços tecnológicos mais impactantes no campo da logística e do varejo.

Na aritmética modular, dois números são considerados congruentes se tiverem o mesmo resto quando divididos pelo mesmo número. Por exemplo, $15 \equiv 3 \pmod 6$ *porque ambos têm resto 3 quando divididos por 6. Essa propriedade de congruência modular é fundamental na criação de códigos de barras.*

Os códigos de barras são compostos por uma sequência de barras de diferentes larguras e espaçamentos, representando números que são traduzidos por scanners eletrônicos em informações legíveis por computador. A aritmética modular é usada para garantir a precisão na leitura e interpretação desses códigos. Cada código de barras é projetado de forma a conter informações codificadas que podem incluir números de identificação únicos para produtos, números de lote, preços, entre outros.

Na próxima seção, vamos fazer a mostragem da aplicação da proposta na escola.

3.1 O algoritmo do código de barras

3.1.1 O código de barras

O código de barras, conhecido como Estrutura do código de barras EAN-13, tem a seguinte estrutura:

Figura 2 – Código de Barras EAN-13.

(FRANCO, 2019).

Temos que os três primeiros dígitos identificam o país de origem do produto. Os próximos nove dígitos são divididos entre a identificação da

> *empresa e do produto. A identificação é um código único que é atribuído a cada fabricante. Esse código pode variar de 4 a 7 dígitos. Um detalhe importante é o último dígito que é chamado de dígito verificador, esse dígito é adicionado no final do processo de elaboração do código. A finalidade do dígito verificador é identificar o erro que pode ocorrer ao digitar o código de barras manualmente, caso ao passar no scaner a máquina não reconheça esse código.Mostraremos neste capítulo o cálculo feito pelo computador para a verificação do último dígito. (FRANCO, 2019)*

Considerando um produto que está identificado no sistema EAN-13 cuja sequência de dígito seja: $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{13}$, *sendo* $x = a_{13}$ *o dígito verificador. Tratando esse código como um vetor, temos* $a = (a_1, a_2, a_3, \cdots, x)$. *O sistema EAN-13 se utiliza de um vetor fixo, conhecido como "vetor de peso" e identificado da seguinte maneira. Considere o conjunto:*

$$Y = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Para que se ache o dígito verificador é necessário calcular o produto escalar entre esses dois vetores e x *será escolhido entre* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *de tal forma que a combinação linear dos números dos 12 primeiros números do código de barras pelos elementos do conjunto* Y. *O valor resultante deve ser um múltiplo de* 10, *ou seja,* $aY \equiv 0 \ mod\ 10$. *Em outras palavras, temos:*

$$\begin{aligned} a \times Y &= (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}) \times (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) \\ &= a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12}. \end{aligned}$$

A partir do valor resultante, procuramos o próximo múltiplo de 10. *O valor do décimo terceiro dígito, será a diferença entre o valor do cálculo acima e seu próximo número múltiplo de 10.*

3.1.2 A proposta de aplicação na escola

A seguir, apresentaremos um exemplo de como a proposta foi colocada para as alunas.

Proposta de jogo – gincana: *dividimos a turma em duas equipes, onde o cenário escolhido já foi preparado. Nesse trabalho, o cenário escolhido foi um supermercado, onde os produtos descritos eram comestíveis e de interesse dos jovens e adolescentes, como bolachas, chocolates, sacos de balas, etc. O objetivo era prender a atenção dos alunos, com o interesse que eles teriam desde que o conhecimento fosse absorvido.*

Definimos de alguma maneira qual equipe começará a gincana. Deixamos a lousa disponível para as equipes, para que seja feito o cálculo da seção anterior. Colocamos um tempo para a verificação do cálculo, para que o jogo ficasse mais interessante.

A equipe escolhe dentro da "papelaria"o produto de seu interesse e vai até a lousa fazer o cálculo. Se a equipe acertar o valor, pontua no jogo, leva o produto e continua jogando. Se errar, deixa o produto na "papelaria"e passa vez para a outra equipe. A equipe que pontuar mais, vence o jogo.

Exemplo 3.1.1. *Considere o código de barras do produto abaixo. Queremos verificar se o último dígito, ou seja, o dígito verificador, está ou não correto.*

Figura 3 – Embalagem de produto comestível.

Autoras, 2024.

Como queremos verificar se o último dígito está correto escrevemos o código de barras, sem o último dígito:

$$789625942000?$$

Agora, faremos a combinação linear de cada um dos dígitos da sequência, com os escalares 1 *e* 3*:*

$$7\times1+8\times3+9\times1+6\times3+2\times1+5\times3+9\times1+4\times3+2\times1+0\times3+0\times1+0\times3=98$$

Agora, perguntamos: a partir do número 98*, quanto falta para o próximo múltiplo de* 10*? A resposta será o último dígito verificador. Nesse caso, para o próximo múltiplo de* 10 *que é* 100*, faltam* 2*. Então, o último dígito verificador será* 2*, conforme está no produto.*

Na sala de aula, colamos um adesivo no último dígito verificador de cada produto, a fim de omitir a informação para fazer a dinâmica entre grupos.

4 Aplicação na Escola

As alunas de iniciação científica do projeto Kelyda Niely e Emilly Viegas, ambas estudantes de licenciatura em matemática no Instituto de Matemática (IM), e Sheila Oliveira, aluna do curso de licenciatura em Química no Instituto de Química e Biotecnologia (IQB) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), conduziram a quinta atividade do projeto "Mulheres nas Ciências Exatas, Engenharias e Computação". O principal objetivo desse projeto é incentivar e envolver alunas do ensino fundamental e médio em áreas relacionadas às ciências exatas.

Nesta atividade específica, o foco foi o tema "O CÓDIGO DE BARRAS". As equipes formadas pelo projeto foram desafiadas a criar um cenário prático com itens diferentes. A proposta envolveu o ensino do cálculo do último dígito verificador do código de barras, proporcionando uma abordagem prática e interativa para o aprendizado das alunas. O grupo em destaque escolheu criar um cenário prático em uma papelaria, composto por 10 itens diferentes.

Figura 4 – Materiais usados

Fonte: Autor

Os itens selecionados para o cenário incluíram uma agenda, um grampeador com *grampos, um conjunto de cola e tesoura, uma caixa de tinta com pincel, um caderno de desenho com um marca texto, dois conjuntos de canetas com um marca texto cada, post-it com um marca texto, conjunto de canetas com uma caixa de lápis e um estojo com um marca texto. A escolha desses itens visou diversificar o ambiente simulado e oferecer oportunidades para a aplicação prática dos conceitos relacionados ao cálculo do dígito verificador do código de barras.*

A atividade teve início às 14h30 da quinta-feira, dia 05 de setembro de 2019, sendo conduzida pelas alunas da UFAL (Universidade Federal de Alagoas) em colaboração com as coordenadoras do projeto "Meninas nas Ciências Exatas". A proposta da sexta atividade era abordar de maneira lúdica e didática o tema "Códigos de Barras", envolvendo as quatro operações básicas: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Inicialmente, as alunas explicaram às participantes da escola Dom Pedro II o que são códigos de barras, sua origem e sua importância em diversas áreas da sociedade. Ficou evidente que as meninas ficaram surpresas ao perceberem a relevância desses códigos, pois embora já os tivessem visto anteriormente, não compreendiam totalmente sua necessidade. Foram detalhadas as informações representadas por cada número no código de barras.

Figura 5 – Momento da Explicação

Fonte: Autora,2019.

Em seguida, as alunas da UFAL explicaram passo a passo como calcular o último dígito verificador de um código, usando como exemplo o caderno de uma das participantes. O método consistia em multiplicar o primeiro número por 3 e o segundo por 1, repetindo esse padrão até obter um número. Se esse número fosse múltiplo de 10, o dígito verificador seria zero; caso contrário, seria necessário identificar o próximo número múltiplo de 10.

Cada menina da escola escolheu um item da papelaria e teve que calcular o último dígito do código de barras. Antes de iniciar a atividade, o último dígito dos itens foi removido pelas organizadoras. Se a participante acertasse, ganharia o item; se errasse, perderia o item.

Figura 6 – Momento de premiação

Fonte: Autora, 2019.

Apesar de algumas meninas apresentarem dificuldades nas quatro operações, com ajuda da equipe, todas conseguiram desenvolver as habilidades necessárias para calcular o último dígito. Mostrar que as mulheres podem se unir e ajudar umas às outras, também é importante. Observou-se um notável desempenho e esforço das meninas durante a atividade, evidenciando o sucesso do método lúdico e prático adotado no ensino dos códigos de barras.

Figura 7 – Momento de premiação

Fonte: Autora, 2019.

Figura 8 – Alunas Iniciação Científica do Projeto - UFAL

Fonte: Autora, 2019.

Figura 9 – Alunas Iniciação Científica - UFAL

Fonte: Autora, 2019.

Para mais detalhes sobre essa prática nas escolas, acesse o site da primeira temporada do Projeto Mulheres nas Ciências Exatas, Engenharias e Computação. (THEODORO, 2019)

Conclusão

O objetivo principal desse trabalho foi introduzir conceitos de ciências exatas para meninas do ensino fundamental e médio por meio de atividades práticas e experiências tangíveis pode ajudar as alunas a verem como esses conceitos se aplicam no mundo real. Por exemplo, a congruência modular através do código que barras que foi o assunto trabalhado nessa pesquisa, as atividades permitem que as alunas explorem livremente os conceitos das ciências exatas por meio de projetos criativos e investigações próprias pode ajudar a desenvolver seu interesse e curiosidade.

O projeto de pesquisa destacar modelos de papéis femininos bem-sucedidos em campos das ciências exatas pode inspirar as alunas e mostrar a elas que essas áreas não são apenas para homens. No qual são apresentadas histórias de mulheres cientistas, engenheiras e matemáticas proeminentes pode ajudar a expandir a percepção das alunas sobre as possibilidades de carreira nessas áreas. As alunas eram retiradas da sala de aula normal e iam para um ambiente preparado, de apoio e encorajador o qual ajudava as alunas a se sentirem mais confortáveis e confiantes ao explorar áreas das ciências exatas. Isso pode envolver o incentivo ativo, o elogio dos esforços e o reconhecimento do progresso das alunas.

Na jornada educacional de cada aluno, a teoria dos números desempenha um papel crucial. Desde os primeiros anos escolares, os alunos são apresentados aos conceitos fundamentais dos números. Aprender sobre os números primos, divisibilidade e propriedades dos números é como construir os alicerces de uma casa. Esses fundamentos são essenciais para o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais avançadas no futuro.

À medida que os alunos progridem em sua jornada educacional, a teoria dos números os acompanha. Eles exploram temas mais complexos, como teoremas importantes e problemas desafiadores. Essas experiências não apenas fortalecem suas habilidades matemáticas, mas também desenvolvem seu pensamento crítico e habilidades de resolução de problemas.

No contexto escolar, a teoria dos números também promove a colaboração entre os alunos. Trabalhar em equipe para resolver problemas matemáticos não apenas fortalece os laços entre eles, mas também os prepara para o trabalho em equipe em outras áreas da vida.

Em resumo, a teoria dos números é essencial para o desenvolvimento integral dos alunos no contexto escolar. Ela não apenas fornece uma base sólida para habilidades matemáticas, mas também promove habilidades de pensamento crítico, resolução de problemas e trabalho em equipe - todas fundamentais para o sucesso acadêmico e além.

Referências

AIRES, F. C. ***Introdução à Teoria dos Números****. 2. ed. [S.l.]: Editora da Universidade Estadual do Ceará – EdUECE, 2015. Citado na página 13.*

BRASIL. ***Ministério da Educação****. 2018. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC. Citado na página 3.*

COUTINHO, S. C. Criptografia. ***Programa de Iniciação Científica - OBMEP****, 2008. Citado na página 15.*

FRANCO, R. P. B. ***Aplicações de Congruência Modular: Código de Barras e CPF****. 2. ed. [S.l.]: Repositório UFAL, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 7, 16 e 17.*

HEFEZ, A. ***Elementos de Aritmética****. 1. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2005. Citado na página 13.*

Revista Nova Escola. ***Na BNCC a Matemática é número, jogo e linguagem****. 2023. Disponível em: <https://novaescola.org.br/bncc/conteudo/36/na-bncc-matematica-e-numero-jogo-e-linguagem>. Acesso em: 31 março. 2024. Citado na página 3.*

SANTOS, J. P. de O. Introdução à teoria dos números. ***SBM - Sociedade Brasileira de Matemática****, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 5, 10, 11 e 12.*

THEODORO, J. R. ***Mulheres nas Ciências Exatas, Engenharias e Computação IM-UFAl****. 2019. Site da Primeira Temporada do Projeto Mulheres IM-UFAL. Alagoas. Citado na página 25.*