

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS DO SERTÃO
DELMIRO GOUVEIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

MOIZÉS TENÓRIO DA SILVA

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÃO RETANGULAR
UTILIZANDO O MÉTODO GRG E O EXCEL SOLVER**

Delmiro Gouveia/AL

2024

MOIZÉS TENÓRIO DA SILVA

**OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÃO RETANGULAR
UTILIZANDO O MÉTODO GRG E O EXCEL SOLVER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas, Campus do Sertão, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharelado em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Alverlando Silva Ricardo.

Delmiro Gouveia/AL

2024

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca do Campus Sertão
Sede Delmiro Gouveia

Bibliotecária responsável: Renata Oliveira de Souza CRB-4 2209

S586o Silva, Moizés Tenório da
Otimização de vigas de concreto armado de seção retangular utilizando o Método GRG e o *Excel Solver* / Moizés Tenório da Silva. - 2024.
91 f. : il.

Orientação: Alverlando Silva Ricardo.
Monografia (Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas.
Curso de Engenharia Civil. Delmiro Gouveia, 2023.

1. Construção civil. 2. Otimização estrutural. 3. Concreto armado.
4. Vigas de concreto. 5. Gradiente Reduzido Generalizado – GRG. 6.
Excel Solver. 7. Flexão simples. I. Ricardo, Alverlando Silva. II. Título.


CDU: 624.012.45

Folha de Aprovação

MOIZÉS TENÓRIO DA SILVA


OTIMIZAÇÃO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÃO RETANGULAR UTILIZANDO O MÉTODO GRG E O EXCEL SOLVER

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à banca examinadora do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas, Campus do Sertão, como requisito parcial para obtenção do título de graduado em Engenharia Civil e aprovada em 05 de agosto de 2024.


Documento assinado digitalmente
 **ALVERLANDO SILVA RICARDO**
Data: 26/08/2024 10:00:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

(Orientador – Prof. Dr., Alverlando Silva Ricardo, UFAL- Campus do Sertão)

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **SALVATORE VERDE**
Data: 27/08/2024 17:25:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

(Examinador Interno – Prof. Dr., Salvatore Verde, UFAL - Campus do Sertão)

Documento assinado digitalmente
 **VINICIUS COSTA CORREIA**
Data: 27/08/2024 08:38:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

(Examinador Interno – Prof. Msc., Vinicius Costa Correia, UFAL - Campus do Sertão)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, fonte da minha vida, inspiração e sabedoria. Até aqui o Senhor me sustentou e nunca me abandonou.

Ao meu pai, Luis Tenório, e à minha mãe, Maria José dos Santos, que me incentivaram, me ajudaram muito e forneceram os meios para estudar, mesmo nos momentos mais difíceis, vocês estiveram ao meu lado e sei que estarão sempre torcendo por mim.

Aos meus pais de coração, Manoel Rodrigues e Mizael Oliveira (*in memoriam*), e as minhas mães de coração, Gilvaneide dos Anjos e Maria de Lourdes, pelo apoio incondicional e incentivo.

Aos meus irmãos que me estimularam, me ajudaram muitíssimo para realizar este objetivo.

Aos meus amigos pelo caloroso encorajamento.

Ao meu orientador, Professor Dr. Alverlando Silva Ricardo, por toda a ajuda, orientação, ensinamentos e disponibilidade.

Ao corpo técnico e docente do curso de Engenharia Civil da UFAL - Campus do Sertão, pelo suporte e prestatividade.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta pesquisa.

RESUMO

O presente estudo busca otimizar vigas biapoiadas de concreto armado de seções retangulares submetidas à flexão simples e ao cisalhamento, minimizando os custos de materiais e mão de obra. Utiliza-se a técnica de Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) implementada no *Excel Solver* para aprimorar o custo final das vigas, considerando as dimensões da seção transversal como variáveis. A otimização foi conduzida em duas etapas: a primeira avaliou a influência da variação do comprimento da viga e do carregamento distribuído (5 a 25 kN/m); a segunda analisou a variação do comprimento da viga e do f_{ck} (20 a 45 MPa). As variáveis de projeto incluíram as dimensões da base e da altura da seção transversal, a armadura de tração e compressão, e os estribos. As restrições seguiram as normas da NBR 6118/2023. Os resultados mostraram que a altura da seção transversal é a variável mais sensível, enquanto a base permaneceu relativamente constante. Com o aumento do comprimento e do carregamento, houve um incremento no custo total da viga, exigindo maior área de aço e aplicação de contraflecha para atender aos limites de deflexão. O aumento do f_{ck} resultou em redução das dimensões transversais até um ponto de estabilização em 40 MPa , onde o custo total atingiu o valor mínimo. Observou-se que o custo de forma representou a maior parcela do custo total, seguido pelo aço e pelo concreto. A metodologia aplicada mostrou-se viável e prática na otimização estrutural de vigas de concreto armado. No entanto, recomenda-se incluir a reutilização de formas e explorar diferentes métodos de otimização em estudos futuros.

Palavras-chave: Otimização estrutural; Vigas de concreto; Flexão simples; *Excel solver*, Gradiente reduzido generalizado (GRG).

ABSTRACT

the present study aims to optimize simply supported reinforced concrete beams with rectangular sections subjected to simple bending and shear, minimizing material and labor costs. The Generalized Reduced Gradient (GRG) technique implemented in Excel Solver is used to enhance the final cost of the beams, considering the dimensions of the cross-section as variables. The optimization was conducted in two stages: the first evaluated the influence of varying beam length and distributed loading (5 to 25 kN/m); the second analyzed the variation in beam length and f_{ck} (20 to 45 MPa). The design variables included the base and height dimensions of the cross-section, the tension and compression reinforcement, and the stirrups. The constraints followed the norms of NBR 6118/2023. The results showed that the height of the cross-section is the most sensitive variable, while the base remained relatively constant. With the increase in length and loading, there was an increase in the total cost of the beam, requiring a larger area of steel and the application of camber to meet deflection limits. The increase f_{ck} resulted in a reduction of the cross-sectional dimensions up to a stabilization point at 40 MPa , where the total cost reached its minimum value. It was observed that formwork cost represented the largest portion of the total cost, followed by steel and concrete. The applied methodology proved to be feasible and practical in the structural optimization of reinforced concrete beams. However, it is recommended to include the reuse of formwork and explore different optimization methods in future studies.

Keywords: Structural optimization; Concrete beams; Simple bending; Excel Solver; Generalized Reduced Gradient (GRG).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Domínio de deformação.	22
Figura 2- Diagrama tensão - deformação do concreto.	24
Figura 3 - Diagrama tensão-deformação do aço.	25
Figura 4 - Distribuição de tensões de compressão segundo os diagramas parábola-retângulo e retangular simplificado.	27
Figura 5 - Distribuição de tensões e deformações em viga de seção retangular com armadura simples.	27
Figura 6 - Treliça Clássica.	32
Figura 7 - Fluxograma genérico de um processo de otimização.	44
Figura 8 - Janela principal do <i>software Microsoft Excel</i>	53
Figura 9 - Janela de comunicação e comandos do Solver.	54
Figura 10 - Variáveis de projeto.	55
Figura 11 - Viga biapoiada utilizada no presente trabalho.	64
Figura 12 - Viga otimizada por Bezerra (2017).	67
Figura 13 - Viga otimizada por Correia (2020).	69
Figura 14 - Otimização Estrutural do Custo Total x Comprimento da Viga.	75
Figura 15 - Otimização Estrutural da Altura da Seção x Comprimento da Viga.	76
Figura 16 - Otimização Estrutural da Base da Seção x Comprimento da Viga.	77
Figura 17- Otimização do custo total em função do f_{ck}	81
Figura 18- Otimização da altura da seção em função do f_{ck}	82
Figura 19- Otimização da base da seção em função do f_{ck}	82
Figura 20 - Relação porcentual média dos custos das parcelas em função do comprimento da viga.	83
Figura 21- Relação porcentual média dos custos das parcelas em função do f_{ck}	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Trabalhos que usaram técnicas de otimização em elemento estrutural.....	19
Tabela 2 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.	31
Tabela 3 - Custos dos serviços e materiais para vigas.	57
Tabela 4 - Custo final dos serviços e materiais.	58
Tabela 5 - Custos unitários de Bezerra (2017).	67
Tabela 6 - Viga otimizada por Bezerra (2017) e comparada com os resultados otimizados da presente planilha.	68
Tabela 7 - Custos unitários de Correia (2020).	69
Tabela 8 - Viga otimizada por Correia (2020) e comparada com os resultados otimizados da presente planilha.	70
Tabela 9 - Resultados gerais para 5 <i>kN/m</i>	72
Tabela 10 - Resultados gerais para 10 <i>kN/m</i>	72
Tabela 11 - Resultados gerais para 15 <i>kN/m</i>	72
Tabela 12 - Resultados gerais para 20 <i>kN/m</i>	73
Tabela 13 - Resultados gerais para 25 <i>kN/m</i>	73
Tabela 14 - Relação Porcentual Média entre os Custos dos Componentes e o Custo Total da Viga em Função da Carga.	74
Tabela 15 - Relação Porcentual Média entre os Custos dos Componentes e o Custo Total da Viga em Função do Vão.....	74
Tabela 16 - Resultados da otimização para comprimento de 300 <i>cm</i> e a variação da resistência característica do concreto.	78
Tabela 17 - Resultados da otimização para comprimento de 350 <i>cm</i> e a variação da resistência característica do concreto.	79
Tabela 18- Resultados da otimização para comprimento de 400 <i>cm</i> e a variação da resistência característica do concreto.	79
Tabela 19 - Resultados da otimização para comprimento de 450 <i>cm</i> e a variação da resistência característica do concreto.	79
Tabela 20 - Resultados da otimização para comprimento de 500 <i>cm</i> e a variação da resistência característica do concreto.	80
Tabela 21 - Resultados da otimização para comprimento de 550 <i>cm</i> e a variação da resistência característica do concreto.	80

Tabela 22 - Resultados da otimização para comprimento de 600 <i>cm</i> e a variação da resistência característica do concreto.	80
---	----

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Objetivos	14
1.1.1 Objetivo geral	14
1.1.2 Objetivos específicos	14
2 REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1 Revisão bibliográfica	15
2.2 Vigas de concreto armado	20
2.3 Domínio do ELU	21
2.4 Dimensionamento de viga de concreto armado	23
2.4.1 Seção retangular com armadura simples	26
2.4.2 Armadura de cisalhamento	31
2.4.3 Força cortante correspondente à armadura mínima	33
2.4.4 Verificação da compressão na biela	35
2.4.5 Cálculo da armadura transversal	36
2.4.6 Espaçamento horizontal máximo e mínimo	37
2.4.7 Estados limites de serviço de deformações excessivas	38
2.4.7.1 Cálculo do momento de fissuração	39
2.4.7.2 Determinação da flecha imediata	42
2.4.7.3 Determinação da flecha diferida	42
2.4.7.4 Determinação da flecha total	43
2.5 Otimização	43
2.5.1 Técnicas de otimização	46
2.5.2 Simplex	48
2.5.3 Gradiente Reduzido Generalizado	48
2.5.4 Algoritmos Genéticos	50
2.5.5 Ferramenta Solver	52
3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO DE OTIMIZAÇÃO	55
3.1 Variáveis de projeto	55
3.2 Função objetivo	56
3.3 Definição das restrições de projeto	61
3.4 Definição do problema	64
4 VALIDAÇÃO DA PLANILHA DESENVOLVIDA PARA A OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	66
4.1 Viga biapoiada (BEZERRA, 2017)	66
4.2 Viga biapoiada (CORREIA, 2020)	68
5 RESULTADOS	71
5.1 Influência da variação do comprimento e do carregamento distribuído na otimização da viga	71
5.2 Influência da variação do comprimento e do f_{ck} na otimização da viga	77
5.2.1 Vigas de 300 a 600 cm de comprimento	77
6 CONCLUSÃO	85
6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros	86

1 INTRODUÇÃO

A otimização de estruturas de concreto armado é uma área importante da engenharia civil, pois permite a construção de estruturas mais seguras e econômicas. Com a crescente demanda por soluções sustentáveis e a necessidade de redução dos custos de construção, a aplicação de técnicas de otimização tornou-se fundamental para engenheiros e projetistas. No caso das vigas de concreto armado, técnicas avançadas podem ser empregadas para minimizar os custos de materiais e mão de obra, sem comprometer a integridade estrutural.

O segmento da construção civil destaca-se como um dos principais impulsionadores do desenvolvimento econômico mundial, mas também é uma das principais causadoras de danos ambientais, Ahmed *et al.* (2021). Esse segmento é responsável por utilizar cerca de 50% de todos os recursos naturais empregados no mundo, sendo que aproximadamente 70% desses não são renováveis. Além disso, é responsável pela emissão de 30% dos gases de efeito estufa, Angelin *et al.* (2023). Dada essa realidade, a sustentabilidade desempenha um papel indispensável na indústria da construção civil, visando minimizar os danos ambientais potenciais, o consumo de recursos naturais e a emissão de gases de efeito estufa. Para alcançar esses objetivos, busca-se construir com melhor qualidade, menor custo e atenuação da aquisição de recursos naturais.

No contexto da engenharia estrutural, destaca-se a otimização estrutural, onde o engenheiro busca um projeto que maximize funcionalidade, segurança e a minimização de custos, permitindo a diminuição dos materiais utilizados. Dessa forma, todos os aspectos devem ser considerados na fase de projeto. No dimensionamento convencional de vigas de concreto armado, o pré-dimensionamento do elemento estrutural é um processo iterativo e exaustivo, baseado em grande parte na experiência do projetista ou em recomendações técnicas (Correia; Bono; Bono, 2019).

Entretanto, o dimensionamento estrutural convencional pode, em certas circunstâncias, resultar no uso excessivo de materiais de construção, acarretando um aumento desnecessário tanto no consumo desses materiais quanto nos custos associados (Nascimento, 2017). Embora a solução encontrada atenda aos requisitos básicos, ela pode não ser a mais econômica, havendo diversas outras possibilidades mais viáveis e moderadas. Segundo Maia (2009), a vantagem de aprimorar projetos é que os parâmetros baseados na intuição ou na experiência dos engenheiros podem ser desconsiderados. Ademais, a otimização proporciona ganhos econômicos, reduz materiais e busca por soluções seguras em um tempo relativamente curto (Brasil; Silva, 2019) quando comparados ao dimensionamento convencional, contribuindo significativamente para

a diminuição de danos ambientais, como a redução de resíduos sólidos que poderiam ser descartados no meio ambiente.

Desta maneira, para atingir os objetivos da otimização, como diminuir as dimensões de uma seção transversal de uma viga, minimizar os custos e os materiais utilizados, são aplicadas técnicas computacionais de otimização. Entre as várias técnicas existentes, destaca-se o método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), utilizado em vários estudos (Pagnussat, 2008; Maia, 2009; Fraga e Krikpa, 2015; Lima *et al.*, 2017; Raju, Manasa e Rohini, 2021) relacionados à otimização estrutural. O GRG é considerado um dos mais eficientes métodos determinísticos de otimização local, baseando-se em gradiente e sempre procurando o ótimo mais próximo do ponto de partida (Yeniay, 2005; Gentle, Härdle e Mori, 2012; Sacoman, 2012).

Diante do exposto, o presente trabalho utilizou o método GRG no dimensionamento otimizado de vigas de concreto armado biapoiada de seção transversal retangular, levando em consideração os custos dos materiais (forma, aço e concreto) e a mão de obra. A otimização foi realizada por meio da ferramenta Solver disponível no *software Microsoft Excel*, devido à facilidade de implementação e à dispensa de conhecimentos avançados de programação. No cálculo, foram considerados fatores como flexão simples, esforço de cisalhamento e as restrições estabelecidas pela NBR 6118 (ABNT, 2023).

Entretanto, é comum encontrar estudos (Maia, 2009; Vitorio Junior e Martins, 2011; Fernandes, Melo e Pereira, 2017; Lima *et al.*, 2018) que desconsideram os efeitos dos esforços cisalhantes e os custos com a armadura transversal no cálculo otimizado. Portanto, o presente trabalho busca contornar essas lacunas mediante o desenvolvimento de uma planilha no Excel que integra esses aspectos ao processo de otimização.

Para validar a planilha desenvolvida no Excel, foram otimizadas e analisadas vigas de concreto armado referenciadas da literatura brasileira, por exemplo; Bezerra (2017); Correia (2020). Os resultados obtidos foram comparados e são apresentados na Seção 4 do presente trabalho. O restante do texto está estruturado e organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta uma revisão bibliográfica que abrange estudos semelhantes ao aqui abordado, além de um enfoque teórico sobre vigas de concreto armado, incluindo o domínio do Estado Limite Último (ELU). O dimensionamento de vigas de concreto armado e os estados limites de serviço de deformações excessivas. Adicionalmente, são apresentados os fundamentos e técnicas de otimização. A Seção 3 detalha os procedimentos metodológicos adotados. Enquanto os resultados são apresentados na Seção 5 e a conclusão é apresentada na Seção 6.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo principal realizar o dimensionamento ótimo de vigas biapoiadas de concreto armado com seções retangulares submetidas à flexão simples e ao cisalhamento, visando à minimização dos custos dos materiais.

1.1.2 Objetivos específicos

- Validar a implementação de uma planilha de otimização para vigas biapoiadas de concreto armado, utilizando a ferramenta *Excel Solver*, por meio da comparação com resultados disponíveis na literatura;
- Determinar as variáveis de projeto (dimensões da seção transversal) que minimizam a função objetivo, com o intuito de reduzir o custo total da viga;
- Analisar a influência dos custos relativos à forma, aço e concreto no custo total das vigas otimizadas em diferentes cenários de aplicação.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Revisão bibliográfica

Na engenharia civil, pesquisas focadas na redução do uso de materiais vêm se tornando cada vez mais comuns. Especificamente na engenharia estrutural, vários estudos têm sido realizados para explorar essa temática, destacando-se as contribuições de Estêvão e Jesus (2004), Maia (2009), Fraga e Krikpa (2015), Bezerra (2017) e Raju, Manasa e Rohini (2021). Essas pesquisas concentram-se na aplicação de técnicas de otimização em componentes estruturais através de simulações numéricas, buscando assegurar que tais elementos cumpram os limites de resistência e serviço previstos pelas normas técnicas de segurança, com o objetivo final de reduzir os custos de produção.

A otimização moderna iniciou-se a partir de 1960, quando pela primeira vez Schmit (1960) fez a combinação da análise de elementos finitos com métodos de otimização numérica não linear. Sendo batizado de “síntese estrutural” (Vanderplaats, 1993). Nessa época, os estudos sobre a aplicação da otimização eram direcionados a uma ampla gama de estruturas. Porém, na maioria das situações, apenas algumas variáveis de projeto eram consideradas, e os modelos de análise eram relativamente simples.

No entanto, foi somente na década de 1970 que a pesquisa em otimização de estruturas ganhou impulso significativo, com destaque para o estudo de Friel (1974) sobre otimização de vigas retangulares de concreto armado. Nesse estudo, Friel (1974) propôs representar os custos da viga por metro linear através de equações que consideravam os preços dos materiais, incluindo custos para formas, aço e concreto, além de custos associados à complexidade construtiva relacionada à altura necessária para acomodar o elemento estrutural. Utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrange, Friel (1974) buscou minimizar o custo total da viga, observando que fatores como a altura útil, o custo das formas e o peso próprio da viga tinham pouca influência no custo final da estrutura.

Avançando no tempo e na evolução das técnicas de otimização, Estêvão e Jesus (2004) apresentaram um dimensionamento otimizado de uma viga biapoiada de concreto armado de seção retangular, empregando Algoritmos Genéticos (AGs) e considerando tanto a flexão simples quanto o esforço de cisalhamento. As variáveis de projeto, como dimensões da seção e armaduras, foram ajustadas para atenuar os custos, respeitando os limites de segurança e as normas técnicas. Os autores verificaram que, na função objetivo, os custos de concreto armado e forma têm maior peso na otimização, tende a condicionar a solução ótima do problema para

as dimensões mínimas para viga e as restrições em relação à posição da linha neutra impõem maiores dimensões para a seção. Além disso, os autores concluem que o método AGs conduz a resultados satisfatórios.

Pagnussat (2008), aplicou o método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) através do Excel Solver para otimizar vigas de concreto armado biapoiadas e contínuas com diferentes dimensões de vãos e resistência característica à compressão, submetidos às cargas mínima e máxima, sendo respeitados os estados limites últimos e de serviços impostos pela norma técnica. A variável de projeto considerada foi a altura útil para minimizar os custos totais. Dentre os resultados obtidos, foi verificado que o aumento da resistência do concreto proporciona a diminuição da altura ótima, a flecha foi responsável por limita-la em vários casos e os custos ótimos das vigas contínuas foram mais baixos do que os custos ótimos da viga biapoiada de mesmo vão.

Posteriormente, Maia (2009) utilizou o método do GRG através da ferramenta Solver, disponibilizado no *software Microsoft Excel*, para otimização de problemas clássicos de vigas. Neste estudo, foram consideradas dois tipos de vigas, a engastada e a contínua. A viga contínua de concreto armado de seção retangular tem dois vãos e está submetida à flexão simples. A formulação do problema de otimização visa determinar a altura ideal da viga, o fator de redução do momento fletor negativo e minimizar o custo total da estrutura. As restrições do problema foram definidas conforme a norma técnica. Entretanto, na otimização, o autor não considerou a inclusão de armaduras transversais, armaduras de pele, restrições relacionadas ao estado limite de serviço e certas variáveis discretas. Em suas análises, o autor demonstrou a eficácia do processo de otimização utilizando a ferramenta Solver e evidenciou que os custos dos materiais constituintes da viga de concreto armado, como aço, madeira e concreto, exercem uma influência significativa no processo de otimização.

Vitorio Junior e Martins (2011) aplicaram o método Algoritmo de Colônia de Formigas (ACF) implementado em linguagem Computacional Fortran para otimização de uma viga biapoiada de concreto armado submetida à flexão simples. Foram consideradas variáveis de projeto, tais como, armadura tracionada, comprimida e a altura útil da seção, visando minimizar os custos totais da viga. As restrições definidas atenderam às limitações estabelecidas pela norma técnica. Ao comparar os resultados obtidos com aqueles provenientes do cálculo convencional, os autores constataram uma coerência significativa entre ambos os métodos. Além disso, verificou-se que o domínio 3 é o responsável pela obtenção dos menores custos.

Fraga e Krikpa (2015) desenvolveram um estudo de otimização utilizando o método GRG por meio da ferramenta Solver disponibilizada no *software Microsoft Excel*, voltado para

vigas de concreto armado biapoiada com foco na minimização do custo total da viga e do impacto ambiental que a mesma causa no meio ambiente. A variável de projeto considerada foi a altura da seção transversal da viga. Para avaliar os impactos ambientais, foram empregados indicadores específicos, como dióxido de carbono equivalente (CO_{2e}), dióxido de carbono emitido (CO₂), Potencial de Aquecimento Global (*Global Warming Potential – GWP*) e unidade de pontuação ambiental chamada de Eco-Indicadores. As restrições do problema são relacionadas aos estados limites último e de serviço conforme a norma técnica. Ao realizar as análises, os autores verificaram que a flecha limite foi o fator com grande influência na restrição da altura ótima das vigas de concreto armado, e que o aço e a forma possuem maior influência nos custos. Identificaram que o concreto é o material que causa maior dano ambiental e comprovaram que a ferramenta Solver é eficaz nos estudos para determinar o custo ótimo ambiental e econômico ao se construir vigas de concreto.

Fernandes, Melo e Pereira (2017) aplicaram e compararam dois tipos de métodos de otimização para viga de concreto armado submetida à flexão simples, sendo empregados o Método de Powell com aplicação dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado e o método do Algoritmo de Colônia de Vagalumes (ACV), para depreciar o custo total da viga. As restrições seguiram as recomendações da norma técnica. Ao comparar os resultados obtidos com o procedimento analítico padrão, os autores puderam verificar que os métodos empregados foram coerentes, comprovando a funcionalidade dos métodos aplicados, porém o método ACV apresentou o maior custo total para viga e maior custo computacional para ser aplicado.

Em seu estudo, Bezerra (2017) empregou o método dos Algoritmos Genéticos para otimizar vigas engastadas e biapoiadas de concreto armado, submetidas à flexão simples, com foco na minimização dos custos. Foram consideradas as variáveis de projeto, a altura útil, base da seção, a área de aço longitudinal comprimida e tracionada e a quantidade de estribos, respeitando as restrições da norma técnica. Em seus resultados obtidos, foi observado que a altura útil e a área de aço tracionada são as variáveis de projeto com maior influência na otimização. E demonstrou que os AGs são um método relevante para solucionar problemas de otimização de elementos estruturais de concreto armado.

Através do estudo de Maia (2009), e semelhante aos estudos de Fernandes, Melo e Pereira (2017), Lima *et al.* (2018) realizaram um estudo de otimização estrutural comparando dois tipos de métodos de otimização para o dimensionamento de vigas biapoiadas de concreto armado de seção retangular submetidas a flexão simples. Para as restrições foi imposta a limitação de ductilidade e geometria pela norma técnica. Em seus objetivos, buscava as dimensões ótimas do elemento estrutural e a aplicação dos métodos de otimização para reduzir

os custos finais da viga. Sendo empregados o método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) e o Algoritmo Genético (AG), foram utilizados os *softwares Maple 18* e o *Microsoft Excel* com a extensão do Excel Solver. Ao comparar os resultados obtidos pelos métodos empregados, os autores concluíram que a diferença dos custos total entre os métodos aplicados é mínima, e o método do GRG apresentou ser mais rápido para encontrar soluções ótimas do que o AG, além da implementação da rotina ser mais simples no *Microsoft Excel*.

Em seu trabalho, Correia, Bono e Bono (2019) otimizaram vigas de concreto armado de seção retangular, biapoiadas, submetidas à flexão simples e ao cisalhamento. Utilizando o método *Evolutionary* por meio da ferramenta Solver disponibilizada pelo *software Microsoft Excel*, visando minimizar o custo total da viga. Sendo as variáveis de projeto as dimensões da seção transversal. As formulações das restrições estão sujeitas às restrições do estado limite último e de serviço imposto pela norma técnica. Dentre os seus resultados obtidos, os autores verificaram que os custos das formas representam a maior parcela do custo total, em seguida os custos do aço e do concreto. Além disso, os autores comprovaram que as seções otimizadas têm grande aproveitamento dos materiais (concreto e aço) no domínio 3.

Posteriormente, Correia (2020) empregou o método do AG por meio do *software MATLAB* para otimizar vigas biapoiadas de concreto armado de seção retangular submetida a um carregamento distribuído, visando minimizar os custos totais e avaliar o índice de confiabilidade das vigas otimizadas. O problema de otimização consistia em encontrar as dimensões da seção transversal, a quantidade e o diâmetro das barras tracionadas e comprimidas da seção transversal. As restrições do problema de otimização são critérios relativos aos estados-limites último e de serviço e detalhamento conforme as recomendações da NBR 6118/2014. Dentre os seus resultados obtidos, foi verificado que a metodologia empregada para a otimização das vigas de concreto armado permitiu encontrar a solução mais econômica, respeitando as diretrizes de projeto. E demonstrou que as vigas otimizadas tendem a ter poucas barras na seção transversal.

Em seguida, Raju, Manasa e Rohini (2021) realizaram um estudo com 480 combinações de vigas biapoiadas de seção retangular sujeita à flexão simples e ao cisalhamento, com diferentes vãos e com diferentes cargas distribuídas e pontuais, utilizando o método GRG por meio do Excel Solver disponibilizado pelo *software Microsoft Excel*. As variáveis de projeto do estudo foram as dimensões da seção transversal, enquanto a função objetivo foi definida como o custo total da viga, composto pela soma dos custos do aço (custo/m^3) e do concreto (custo/m^3) com a inclusão da mão de obra. Todas as restrições de segurança e uso seguiram as diretrizes da norma técnica. Dentre os resultados obtidos, foi verificado que a variação do custo

(custo/m^3) para determinado vão e carga distribuída ou pontual, teve para classes de concreto e aço inferiores custos constantes para todos os vãos e cargas, além disso, os autores demonstraram que em classes de concreto superiores, os custos avolumaram-se com o aumento do vão e da carga distribuída, a mesma situação não ocorreu em cargas pontuais, o custo ficou constante até determinada carga pontual, independente do vão.

Diante do exposto, a Tabela 1 apresenta, de forma resumida, todos os trabalhos mencionados nesta seção que empregaram técnicas de otimização em elementos estruturais.

Tabela 1 - Trabalhos que usaram técnicas de otimização em elemento estrutural.

Ano	Autor (es)	Elemento otimizado	Característica a otimizar	Técnica de otimização
1974	Friel	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Multiplicadores de Lagrange
2004	Estêvão; Jesus	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Algoritmos Genéticos (AGs)
2008	Pagnussat	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)
2009	Maia	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)
2011	Vitorio Junior; Martins	Vigas de Concreto armado	Minimizar os custos	Algoritmo de Colônia de Formigas (ACF)
2015	Fraga; Krikpa	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos: econômico e ambiental	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)
2017	Fernandes; Melo; Pereira	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Powell com aplicação dos Multiplicadores de Lagrange Aumentado; Algoritmo de Colônia de Vagalumes (ACV)

Continuação: Tabela 2 - Trabalhos que usaram técnicas de otimização em elemento estrutural.

2017	Bezerra	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Algoritmos Genéticos (AGs)
2018	Lima <i>et al.</i>	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG); Algoritmos Genéticos (AGs)
2019	Correia; Bono; Bono	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Evolutionary
2020	Correia	Vigas de concreto armado	minimizar os custos e avaliar o índice de confiabilidade	Algoritmos Genéticos (AGs)
2021	Raju; Manasa; Rohini	Vigas de concreto armado	Minimizar os custos	Gradiente Reduzido Generalizado (GRG)

Fonte: Autor (2024).

2.2 Vigas de concreto armado

Viga de concreto armado é um dos componentes estruturais que constitui a estrutura de uma edificação, juntamente com lajes e pilares, sendo dimensionado no projeto estrutural. Sua finalidade é distribuir as cargas para os pilares, que por sua vez as transferem para a fundação.

A NBR 6118 (ABNT, 2023, p. 83) define as vigas como “elementos lineares em que a flexão é preponderante”, conforme Bastos (2023), a viga é caracterizada como elemento linear quando o seu vão supera em pelo menos três vezes a altura da seção transversal. Além disso, a norma citada destaca a diferença entre vigas e vigas-paredes, dessa forma, quando a relação entre o comprimento efetivo e a maior dimensão da seção transversal $(L/h) \geq 2$ para vigas isostáticas e $(L/h) \geq 3$ para vigas contínuas, essas relações permitem que sejam tratadas como vigas, porém vigas com relações (L/h) menores do que foi citado devem ser tratadas como vigas-parede.

Além disso, a NBR 6118 (ABNT, 2023), orienta que a dimensão mínima da menor dimensão da seção transversal da viga que pode ser usado no dimensionamento é 12 cm, porém

em casos excepcionais pode ser reduzido para um mínimo absoluto de 10 *cm*, desde que sejam respeitados certos critérios definidos no item 13.2.2 da norma citada.

No caso da altura da seção transversal da viga, Bastos (2023) indica uma dimensão mínima de 25 *cm*. O mesmo orienta que a altura das vigas deve ser modulada de 5 em 5 *cm*, ou até mesmo, de 10 em 10 *cm* para evitar várias alturas diferentes no dimensionamento de vigas em um projeto estrutural. Entretanto, a altura do elemento estrutural fica restrito às disposições construtivas, como a interferência em portas e janelas.

Como alternativa para um pré-dimensionamento, a altura (*h*) da seção transversal de uma viga pode ser estimada, conforme demonstrado por Pinheiro (2007):

- Para tramos internos: $h = L/12$;
- Para tramos extremos ou vigas biapoiadas: $h = L/10$;
- Para vigas em balanço: $h = L/5$.

Esses critérios de dimensionamento não são apenas fundamentais para a funcionalidade estrutural, mas também formam a base para análises mais rigorosas, como as realizadas no contexto do Estado Limite Último (ELU), focando na capacidade máxima de carga e segurança.

2.3 Domínio do ELU

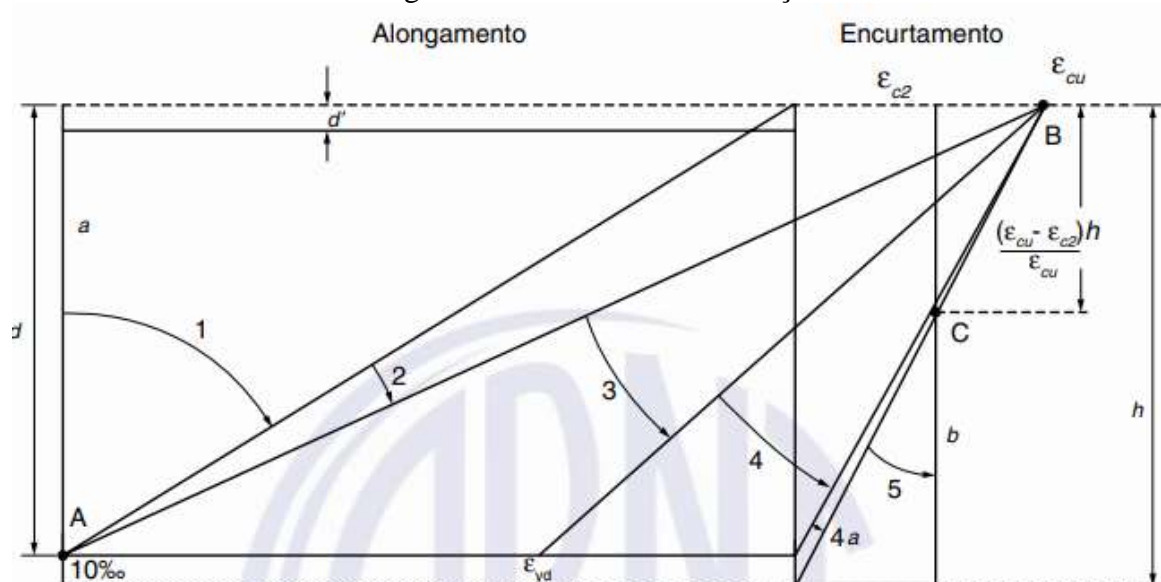
Os domínios de falha descrevem diferentes modos pelos quais seções transversais de elementos estruturais, como vigas ou colunas, podem falhar sob cargas extremas, baseados na distribuição e intensidade de tensões e deformações. Esses domínios podem ser ilustrados em diagramas, que correlacionam esforços solicitantes a comportamentos específicos do concreto e da armadura. Os principais domínios de falha, conforme descritos na NBR 6118 (ABNT, 2023), são:

- Domínio 1 (Compressão controlada no concreto): O concreto sofre deformações elásticas e a armadura não escoar, associado a alta segurança estrutural;
- Domínio 2 (Tracionamento da armadura): A armadura escoar, mas o concreto permanece abaixo de sua deformação crítica. Caracteriza-se por falhas dúcteis, com significativa deformação visível antes da falha;

- Domínio 3 (Esmagamento do concreto): Tanto o concreto quanto o aço atingem suas capacidades máximas de compressão e escoamento, respectivamente, independentemente da disposição da armadura. Este domínio é caracterizado pela ocorrência de sinais prévios de falha estrutural, o que possibilita a identificação antecipada de potenciais colapsos;
- Domínio 4 (Falha por corte ou torção): Envolvendo falhas de componentes estruturais devido a esforços cortantes ou torcionais, muitas vezes levando a colapsos súbitos.

O Estado Limite Último (ELU) é alcançado quando as deformações na seção transversal atingem os domínios de falha especificados, indicando a iminência de falha, que pode resultar de deformação plástica excessiva da armadura ou encurtamento-limite do concreto. Essas condições ameaçam a integridade estrutural e exigem rigor na análise de segurança. A Figura 1 da NBR 6118/2023 subdivide o ELU em oito domínios (reta a, domínios 1, 2, 3, 4, 4a, 5 e reta b), refletindo diferentes estados de carga e deformação. Os domínios 2 e 3 são particularmente relevantes para vigas de concreto armado, pois ambos permitem advertência prévia de falhas, permitindo intervenções de segurança (Bastos, 2023).

Figura 1 - Domínio de deformação.



Fonte: NBR 6118 (ABNT,2023).

De acordo com a norma, as vigas devem ser projetadas para evitar o domínio 4, que está associado a rupturas frágeis. Para que as vigas sejam definidas entre os domínios 2 e 3, é

essencial analisar a relação entre a posição da linha neutra e a altura útil (x/d). Em concordância com o item 14.6.4.3 da NBR 6118 (ABNT, 2023). Para assegurar a capacidade de deformação das vigas de concreto sem sofrer ruptura, é fundamental que a posição da linha neutra no Estado Limite Último (ELU) atenda às seguintes limitações impostas:

- $x/d \leq 0,45$ – para concretos menores ou iguais à 50 MPa ;
- $x/d \leq 0,35$ – para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$.

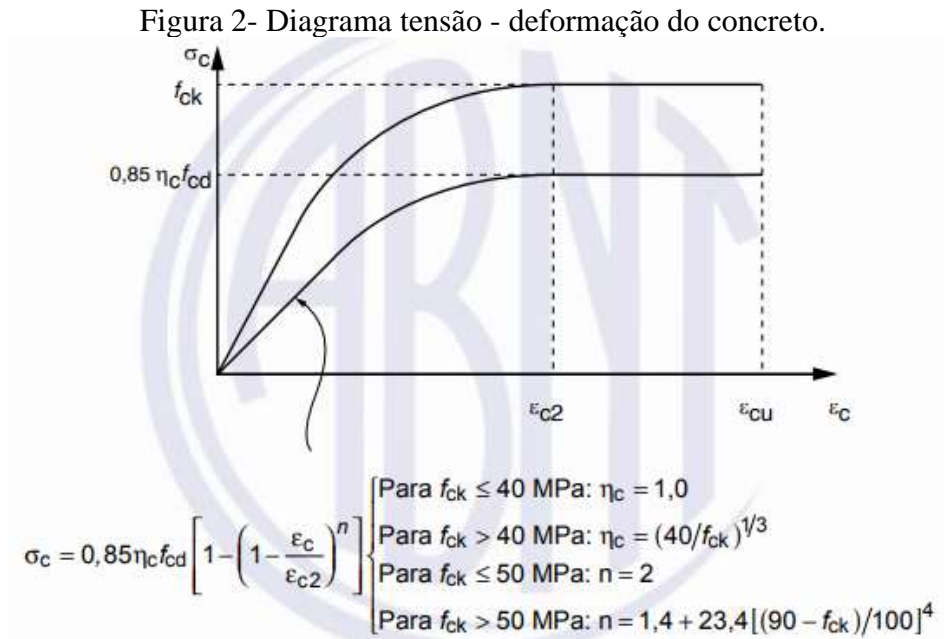
2.4 Dimensionamento de viga de concreto armado

O dimensionamento de vigas de concreto armado, em especial, vigas biapoiadas de seção retangular, será tratado resumidamente no presente trabalho, conforme as diretrizes da NBR 6118 (ABNT, 2023) e segundo alguns autores como Bastos (2023), Pinheiro (2007), Carvalho e Figueiredo Filho (2014), entre outros.

Para iniciar o dimensionamento de vigas de concreto armado, primeiro é necessário considerar algumas hipóteses básicas que estão descritas no item 17.2.2 da norma NBR 6118/2023:

- As seções transversais se mantêm planas após a deformação;
- A deformação sofrida pela armadura de tração ou compressão deve ser a mesma do concreto em seu entorno;
- As tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desconsideradas no ELU;
- O diagrama parábola-retângulo pode ser substituído pelo retângulo de profundidade $y = \lambda x$, em que o valor do parâmetro λ pode ser tomado igual a $\lambda = 0,8$ para concretos até 50 MPa e $\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50) / 400$ para concretos maiores do que 50 MPa ;
- A tensão nas armaduras é obtida a partir dos diagramas tensão-deformação do aço, para cada tipo de aço a ser utilizado;
- O estado-limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal é pertencente a um dos domínios definidos, entretanto, os elementos estruturais definidos como vigas podem se enquadrar nos domínios 2,3 e 4.

Além disso, a distribuição de tensões no concreto se faz conforme o diagrama parábola-retângulo, sendo que a tensão máxima é igual a $0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd}$, no qual f_{cd} representa a resistência de cálculo do concreto à compressão, conforme ilustra a Figura 2:



Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2023).

Conforme a NBR 6118 (ABNT, 2023), o diagrama tensão-deformação é caracterizado pela seguinte expressão (Equação 1):

$$\sigma_c = 0,85 \cdot \eta_c \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (1)$$

onde:

ϵ_c = deformação específica por encurtamento do concreto;

ϵ_{c2} = deformação específica por encurtamento do concreto no início do patamar plástico.

η_c = fator que considera a fragilidade do concreto.

Sendo que o parâmetro η depende da classe do concreto, conforme mostrado abaixo:

- $\eta = 2$ – para concretos de classes $C40 < f_{ck} \leq C50$
- $\eta = 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$ – para concretos de classes acima de $C50$

Para concretos de classes até $C50$:

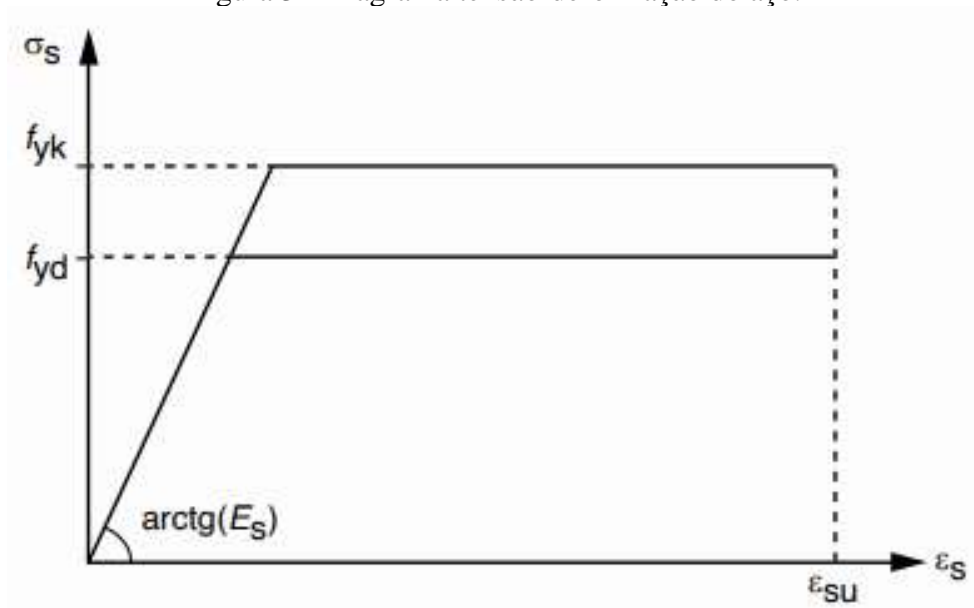
- $\epsilon_{c2} = 2\%$ e $\epsilon_{cu} = 3,5\%$

Para concretos de classes de *C55* até *C90*:

- $\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} * (f_{ck} - 50)^{0,53}$
- $\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} * [(90 - f_{ck}) / 100]^4$

Já para obter o valor da tensão do aço nas armaduras é necessário utilizar o diagrama tensão-deformação do aço, conforme ilustra a Figura 3:

Figura 3 - Diagrama tensão-deformação do aço.



Fonte: NBR 6118 (ABNT; 2023).

A partir da Figura 3, o patamar do diagrama de tensão-deformação do aço pode ser obtido através da seguinte expressão (Equação 2):

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (2)$$

Em que:

f_{yd} = resistência de cálculo do aço;

E_s = módulo de elasticidade do aço, foi adotado 210 *GPa* para este trabalho.

Entretanto, para assegurar que os elementos estruturais não venham atingir o estado limite último durante a sua vida útil, é necessário utilizar os coeficientes de minoração de resistência utilizados nas resistências características dos materiais. No intuito de obter uma resistência de cálculo inferior.

Em conformidade com a NBR 6118 (ABNT, 2023), os coeficientes de minoração de concreto e aço mais usuais em peças estruturais são $\gamma_c = 1,4$ para concreto e $\gamma_s = 1,15$ para o aço. Dessa forma, os valores das resistências de cálculo são calculados a partir das seguintes expressões (Equações 3 e 4):

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3)$$

Em que:

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto;

f_{ck} = resistência característica do concreto à compressão aos 28 dias.

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (4)$$

Onde:

f_{yd} = resistência de escoamento de cálculo do aço;

f_{yk} = resistência de escoamento característica do aço.

As definições presentes no item 17.2.2 da norma NBR 6118 (ABNT, 2023) serão necessárias para a dedução da equação para o cálculo da armadura simples (seção que é necessária apenas à armadura longitudinal resistente tracionada), que será apresentada nos tópicos seguintes.

2.4.1 Seção retangular com armadura simples

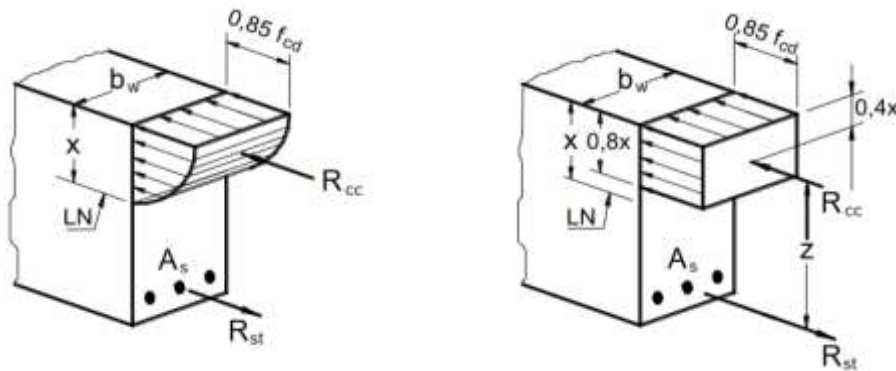
Segundo Bastos (2023), viga com armadura simples é aquela que é composta apenas de uma armadura longitudinal resistente tracionada. As barras longitudinais colocadas na região comprimida, por sua vez, assumem funções construtivas, como auxiliar na amarração dos estribos e facilitar o lançamento do concreto. Dessa forma, esta armadura não é levada em consideração no cálculo de flexão como armadura resistente. Além disso, a característica da armadura simples é que as tensões de compressão são resistidas apenas pelo concreto.

Entretanto, o dimensionamento da armadura simples em seções retangulares é obtido a partir do equilíbrio entre os esforços internos de forças normais e momentos fletores da seção analisada. As seguintes formulações são baseadas, no que ilustram a Figura 4 e a Figura 5.

A Figura 4 mostra em perspectiva a seção transversal de uma viga com os diagramas parábola-retângulo e retangular simplificado, conforme o item 17.2.2 da NBR 6118 (ABNT,

2023). Desse modo, no presente trabalho, adota-se o diagrama retangular simplificado, visto que as equações são mais simples de serem obtidas e os resultados são aproximados daqueles obtidos com o diagrama parábola-retângulo.

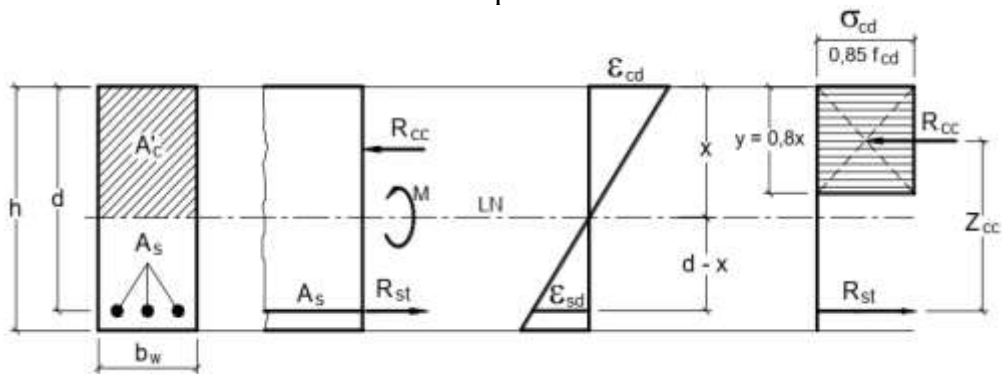
Figura 4 - Distribuição de tensões de compressão segundo os diagramas parábola-retângulo e retangular simplificado.



Fonte: Bastos (2023).

A Figura 5 apresenta uma viga de concreto de seção transversal retangular, com as forças atuantes necessárias para deduzir a equação da armadura simples. Para tal dedução, assume-se que o sistema está em equilíbrio, onde os somatórios das forças normais e dos momentos fletores são iguais a zero.

Figura 5 - Distribuição de tensões e deformações em viga de seção retangular com armadura simples.



Fonte: Bastos (2023).

Considerando que o sistema está em equilíbrio, em que $\sum N = 0$ e $\sum M = 0$, temos a seguinte expressão (Equação 5):

$$R_{cc} = R_{st} \tag{5}$$

Onde:

R_{CC} = resultante das tensões na região comprimida do concreto;

R_{st} = resultante das tensões na região tracionada do concreto.

A Equação 6 expressa a resultante das tensões na região comprimida do concreto:

$$R_{CC} = \sigma_{cd} * A'_s \quad (6)$$

Onde:

σ_{cd} = tensão de cálculo do concreto;

A'_s = área da armadura comprimida.

Utilizando as informações das Figuras 4 e 5 e aplicando o diagrama retangular simplificado, onde $y = 0,8x$ para concretos com resistência inferior a 50 MPa, as equações para calcular as tensões na armadura de aço comprimida podem ser desenvolvidas. A Equação 7 e a Equação 8 são formuladas para determinar as forças e tensões na armadura comprimida da seguinte maneira:

$$R_{CC} = 0,85 * f_{cd} * 0,8 * x * b_w \quad (7)$$

$$R_{CC} = 0,68 * f_{cd} * x * b_w \quad (8)$$

Em que:

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão;

x = posição da linha neutra;

b_w = menor dimensão da seção transversal.

Analogamente à Equação 6, para a força resultante das tensões de tração no aço, podemos expressar a relação conforme a Equação 9:

$$R_{st} = \sigma_{sd} * A_s \quad (9)$$

Sendo:

σ_{sd} = tensão de cálculo do aço;

A_s = área de aço da armadura tracionada.

Para assegurar o equilíbrio dos momentos fletores, conforme mostrado na Figura 5, é essencial que o momento fletor solicitante de cálculo (M_d) seja igual ao momento fletor resistente de cálculo (M_{sr}), expresso conforme a Equação 10:

$$M_d = M_{sr} \quad (10)$$

O momento fletor é calculado como o produto da força resultante pelo comprimento do braço de alavanca, conforme as Equações 11 e 12:

$$M_d = R_{cc} * Z_{cc} \quad (11)$$

$$M_d = R_{st} * Z_{cc} \quad (12)$$

Onde:

$R_{cc} * Z_{cc}$ = momento fletor interno resistente gerado na região comprimida;

$R_{st} * Z_{cc}$ = momento fletor interno resistente gerado na região tracionada.

O comprimento do braço de alavanca (Z_{cc}) é determinado pela Equação 13.

$$Z_{cc} = (d - 0,4 * x) \quad (13)$$

Dessa forma, ao substituir a Equação 8 e a Equação 13 na Equação 11, obtém-se a Equação 14.

$$M_d = 0,68 * f_{cd} * x * b_w * (d - 0,4 * x) \quad (14)$$

Onde:

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão;

x = posição da linha neutra;

b_w = menor dimensão da seção transversal;

d = altura útil.

Substituindo a Equação 9 na Equação 14, conforme Equação 15, para calcular a área de aço da armadura tracionada, chega-se à Equação 16:

$$M_d = \sigma_{sd} * A_s * (d - 0,4 * x) \quad (15)$$

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} * (d - 0,4 * x)} \quad (16)$$

Em que:

A_s = área de aço da armadura tracionada;

M_d = momento fletor solicitante de cálculo;

σ_{sd} = Tensão de cálculo do escoamento do aço;

x = posição da linha neutra;

d = altura útil.

No entanto, conforme o item 17.3.5.2.4 da NBR 6118 (ABNT, 2023), há limites mínimos e máximos estabelecidos para as armaduras de aço. Dessa forma, para a armadura máxima, a soma da área da armadura tracionada (A_s) e da área da armadura de compressão (A_s') não deve ultrapassar 4% * A_c .

Conforme a NBR 6118/2023, a armadura mínima tracionada deve ser determinada pelo dimensionamento da seção estrutural submetida a um momento fletor mínimo, calculado por meio da Equação 17. Além disso, é imprescindível que seja respeitada a taxa mínima absoluta de 0,15%.

$$M_{d,min} = 0,8 * W_0 * f_{ctk,sup} \quad (17)$$

Onde:

W_0 = módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;

$f_{ctk,sup}$ = resistência característica superior do concreto à tração.

Porém, conforme a Norma 6118 (ABNT, 2023), a armadura mínima é considerada atendida quando as taxas mínimas de armadura são respeitadas, conforme ilustra a Tabela 2:

Tabela 3 - Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.

Valores de $\rho_{min} \left(\frac{A_{s,min}}{A_c} \right)$
%

Forma da seção	f_{ck}
Retangular	
0,15	20
0,15	25
0,15	30
0,164	35
0,179	40
0,194	45
0,208	50
0,211	55
0,219	60
0,226	65
0,233	70
0,239	75
0,245	80
0,251	85
0,256	90

Fonte: Adaptado da NBR 6118 (ABNT, 2023).

Dessa forma, a área da armadura mínima é obtida através da Equação 18:

$$A_{s,min} = \rho_{min} * A_c \quad (18)$$

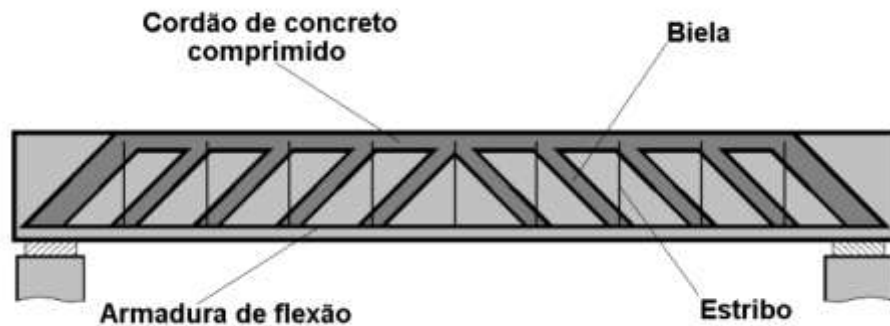
No presente trabalho, não foi realizado o cálculo para determinar em qual domínio a seção transversal da viga de concreto armado se encontra. Entretanto, seguiu-se a relação $x/d \leq 0,45$, conforme estabelecido pela NBR 6118/2023, para assegurar o comportamento dúctil da seção. Ademais, não foi considerada a utilização de armadura dupla. Para a função de porta estribos, foram empregadas duas barras de $\phi 5mm$ resultando em uma área de aço de $0,39 \text{ cm}^2$ na armadura comprimida.

2.4.2 Armadura de cisalhamento

Segundo a NBR 6118/2023, todos os elementos estruturais sujeitos à força cortante devem apresentar armadura transversal mínima composta por estribos. Desse modo, a planilha elaborada no Excel Solver deste trabalho leva em consideração o cálculo da armadura transversal.

Conforme Pinheiro (2007), O cálculo da armadura transversal se dá a partir da analogia de uma viga fissurada e uma treliça, como ilustra a Figura 6.

Figura 6 - Treliça Clássica.



Fonte: Pinheiro (2007).

Porém, segundo Pinheiro (2007), para utilizar a treliça clássica nos cálculos, é necessário considerar as seguintes hipóteses:

- Bielas de compressão com inclinação de 45° ;
- Banzos paralelos;
- A treliça é considerada isostática, quando não há engastamento nos nós, permitido que ligações entre os banzos e as diagonais sejam conectados livremente;
- É considerado que armadura transversal tenha uma inclinação entre 45° e 90° .

No item 17.4.1 da NBR 6118 (ABNT, 2023), são apresentados dois modelos diferentes para calcular a armadura transversal, considerando a treliça clássica:

- Modelo de cálculo 1 (item 17.4.2.2): neste modelo é considerado que as diagonais de compressão inclinadas de θ são iguais a 45° e a parcela complementar V_c é considerada constante, independente de V_{sd} .
- Modelo de cálculo 2 (item 17.4.2.3): nesse modelo é considerado que as diagonais de compressão inclinadas de θ variam de $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$, e a parcela V_c diminui com o aumento de V_{sd} .

Em ambos os modelos, são consideradas as seguintes etapas de cálculo (Pinheiro, 2007):

- Verificação da compressão na biela;
- Cálculo da armadura transversal;
- Deslocamento do diagrama de força no banzo tracionado.

O presente estudo adotou o modelo de cálculo 1, que será detalhado conforme as especificações da NBR 6118/2023. Adicionalmente, de acordo com o item 17.4 da mesma norma, quando a força cortante de cálculo (V_{Sd}) for inferior à força cortante mínima ($V_{Sd,min}$) deve-se aplicar apenas a armadura mínima, conforme definido pela norma.

2.4.3 Força cortante correspondente à armadura mínima

Para calcular a armadura transversal mínima de acordo com o item 17.4.2.1 da NBR 6118/2023, considera-se que a força cortante de cálculo é menor ou igual à força cortante mínima, conforme Equações 19 e 20.

$$V_{Sd} \leq V_{Sd,min} \quad (19)$$

$$V_{Sd,min} = V_c + V_{sw,min} \quad (20)$$

Onde:

$V_{Sd,min}$ = força cortante de cálculo mínima na seção considerada;

V_c = parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao da treliça;

$V_{sw,min}$ = parcela resistida pela armadura transversal mínima.

Assumindo $V_c = V_0$ na flexão simples, V_0 é calculado conforme a Equação 21.

$$V_0 = 0,6 * f_{ctd} * b_w * d \quad (21)$$

Onde f_{ctd} é a resistência de cálculo à tração do concreto, determinada pela Equação 22:

$$f_{ctd} = 0,15 * \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (22)$$

Substituindo a Equação 22 na Equação 21, obtemos a Equação 23:

$$V_0 = 0,009 * b_w * d * \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (23)$$

Onde:

f_{ck} = resistência característica do concreto à compressão (kN/cm^2);

b_w = menor dimensão da seção transversal;

d = altura útil.

Segundo o item 17.4.1.1.1 da NBR 6118 (ABNT, 2023), para calcular armadura transversal mínima, deve ser considerada a taxa geométrica, dada pela Equação 24.

$$\rho_{min} = \frac{A_{sw,min}}{b_w * s * sen\alpha} \geq 0,2 * \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (24)$$

Sendo:

ρ_{min} = taxa geométrica mínima;

$A_{sw,min}$ = área de aço da armadura transversal mínima;

b_w = menor dimensão da seção transversal;

s = espaçamento entre os estribos;

α = inclinação dos estribos;

f_{ywk} = resistência característica do escoamento do aço da armadura transversal.

Além disso, a força cortante de cálculo mínima na seção considerada é dada pela Equação 25.

$$V_{sw,min} = \left(\frac{A_{sw,min}}{s} \right) * 0,9 * d * f_{ywd} * (sen\alpha + cosa) \quad (25)$$

Tomando a inclinação dos estribos $\alpha = 90^\circ$ e utilizando o aço CA50 em kN/cm^2 , substituindo os valores nas Equações 24 e 25, obtêm-se as Equações 26 e 27.

$$\frac{A_{sw,min}}{s} = 0,2 * \frac{f_{ct,m}}{10 * 50} * b_w \quad (26)$$

$$V_{sw,min} = \left(\frac{A_{sw,min}}{s} \right) * 0,9 * d * 43,5 \quad (27)$$

Substituindo a Equação 26 na Equação 27, obtemos a Equação 28.

$$V_{sw,min} = 0,004696 * b_w * d * \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (28)$$

Para obter a equação da força cortante mínima, é necessário substituir as Equações 23 e 28 na Equação 20, dessa forma, obtém-se a Equação 29.

$$V_{Sd,min} = 0,013696 * b_w * d * \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (29)$$

Onde:

f_{ck} = resistência característica do concreto à compressão (kN/cm^2);

b_w = menor dimensão da seção transversal;

d = altura útil.

2.4.4 Verificação da compressão na biela

Para assegurar a integridade estrutural de uma seção transversal em elementos de concreto armado, é essencial que a força cortante solicitante de cálculo (V_{Sd}) não exceda à capacidade resistente de cálculo. A NBR 6118/2023 especifica que isso deve ser verificado por meio das seguintes condições expressas pelas Equações 30 e 31.

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (30)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{Sw} \quad (31)$$

Onde:

V_{Sd} = força cortante solicitante de cálculo;

V_{Rd2} = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal;

$V_{Rd3} = V_c + V_{Sw}$ = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína diagonal tracionada, sendo V_c a parcela de força cortante absorvida por mecanismo complementares ao da treliça e V_{Sw} é a parcela resistida pela armadura transversal.

A expressão para calcular V_{Rd2} é dada pela Equação 32.

$$V_{Rd2} = 0,27 * \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) * f_{cd} * b_w * d \quad (32)$$

Sendo:

f_{ck} = resistência característica do concreto à compressão;

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão.

Se a força cortante solicitante de cálculo (V_{Sd}) exceder o valor de V_{Rd2} ou V_{Rd3} , existe o risco de esmagamento na biela comprimida. Para evitar esse cenário, podem-se adotar medidas como aumentar a menor dimensão da viga ou optar por um concreto com maior resistência característica (f_{ck}), melhorando assim a capacidade resistente da seção transversal à força cortante.

2.4.5 Cálculo da armadura transversal

Conforme a NBR 6118 (ABNT, 2023), além da verificação da compressão na biela, é necessário que a força cortante solicitante de cálculo seja inferior ou igual à força cortante resistente de cálculo relativa à ruína diagonal tracionada, em concordância com a Equação 33, calculada por:

$$V_{Rd3} = V_c + V_{Sw} \quad (33)$$

Onde:

V_{Rd3} = força cortante resistente de cálculo relativa à ruína diagonal tracionada;

V_c = parcela de força cortante absorvida por mecanismo complementares ao da treliça;

V_{Sw} = parcela resistida pela armadura transversal.

Para o cálculo da armadura transversal, é considerado que $V_{Rd3} = V_{Sd}$, nesse sentido, a expressão é dada pela Equação 34.

$$V_{Sw} = V_{Sd} - V_c \quad (34)$$

Assumindo que a inclinação dos estribos (α) seja de 90° , a resistência de cálculo do escoamento do aço da armadura transversal (f_{ywd}) é considerada como 435 MPa para ambos os aços CA50 e CA60, optando-se sempre pelo valor mais conservador. A partir desta premissa, utiliza-se a equação modificada para calcular a área necessária de aço da armadura transversal com os estribos a 90° , expressa conforme Equação 35:

$$\frac{A_{sw,90}}{s} = \frac{V_{Sw}}{39,15 * d} \quad (35)$$

Onde:

$A_{sw,90}$ = área de aço da armadura transversal, com os estribos posicionados à 90° ;

s = espaçamento entre os estribos.

2.4.6 Espaçamento horizontal máximo e mínimo

Ao dimensionar o espaçamento horizontal entre os estribos em vigas de concreto armado, é necessário seguir as diretrizes especificadas na NBR 6118/2023. Primeiramente, é necessário definir o diâmetro do estribo (ϕ_{es}) utilizado no projeto, que deve respeitar o intervalo dado pela Equação 36:

$$5 \text{ mm} \leq \phi_{es} \leq \frac{1}{10} * b_w \quad (36)$$

Assim sendo, o cálculo do espaçamento horizontal entre os estribos é dado pela Equação 37.

$$s = \frac{2 * A_{es}}{A_{sw}} \quad (37)$$

Sendo:

$2 * A_{es}$ = área de aço do estribo, considerando dois ramos;

A_{sw} = área de aço da armadura transversal.

Para garantir que cada fissura potencial seja interceptada por pelo menos um estribo, o espaçamento horizontal (s) entre os estribos não deve exceder o espaçamento horizontal

máximo, sendo determinado pela força cortante solicitante de cálculo (V_{Sd}) em relação à força cortante resistente de cálculo (V_{Rd2}), conforme Equação 38:

$$V_{Sd} \begin{cases} V_{Sd} \leq 0,67 * V_{Rd2}, s_{m\acute{a}x} = 0,6 * d \leq 300 \text{ mm} \\ V_{Sd} > 0,67 * V_{Rd2}, s_{m\acute{a}x} = 0,3 * d \leq 200 \text{ mm} \end{cases} \quad (38)$$

Além disso, o espaçamento horizontal mínimo entre os estribos deve permitir a passagem do vibrador para assegurar o adequado adensamento do concreto. Embora a NBR 6118 (ABNT, 2023) não especifique um valor mínimo exato, Carmo (2017) sugere adotar um espaçamento mínimo de 7 cm para facilitar as práticas de construção e garantir a qualidade do adensamento.

2.4.7 Estados limites de serviço de deformações excessivas

Segundo o item 10.4 da NBR 6118 (ABNT, 2023), os estados limites de serviço são conceituados como aqueles relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos suportados pelas estruturas. Porém, para ser feita a verificação do estado limite de serviço (ELS) de deformações excessivas, é necessário considerar os deslocamentos de translação.

Ademais, os deslocamentos de translação sofrem interferência de vários elementos, sendo eles o vão da viga, a grandeza do carregamento atuante, a armadura de compressão e as dimensões da seção transversal da viga (Bezerra, 2017). Conforme o item 13.3 da norma citada anteriormente, as deformações excessivas da estrutura no ELS são divididas em quatro grupos básicos:

- Aceitabilidade sensorial: vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável;
- Efeitos específicos: deslocamentos podem impedir a utilização adequada da construção;
- Efeitos em elementos não estruturais: deslocamentos de elementos estruturais podem prejudicar o funcionamento adequado dos elementos não estruturais a eles conectados;

- Efeitos em elementos estruturais: deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas.

Neste trabalho, foi utilizada a análise sensorial para verificar o estado limite de serviço de deformações excessivas. A análise sensorial considera as vibrações indesejáveis e o efeito visual desagradável ao usuário, que impactam diretamente no conforto do usuário.

Além disso, o deslocamento inicial é chamado de flecha imediata. Em seu cálculo, considera-se o comportamento elástico. Nas literaturas pesquisadas, existem três tipos de flechas: a imediata, diferida e a total, sendo esta última a soma das duas primeiras. A característica da flecha diferida é que o seu valor é resultante das cargas de longa duração em função da fluência (Pinheiro, 2007). Para este trabalho, foi considerada a flecha total, sendo a soma da flecha imediata e diferida. Na qual o deslocamento máximo permitido pela norma NBR 6118/2023 é de $L/250$ para carga total e $L/350$ para carga variável, sendo L o comprimento da viga. Quando a flecha total excede o valor da flecha limite imposto pela norma citada, é necessário a aplicação de uma contraflecha, porém, nessa nova análise o limite é ainda mais restritivo, sendo $L/350$.

Contudo, quando o valor da flecha total ultrapassa o valor da flecha limite estabelecido pela NBR 6118/2023, torna-se indispensável empregar uma contraflecha. Essa, por sua vez, consiste na curvatura oposta à carga exercida sobre a viga e deve ser levada em conta no projeto estrutural, visando prevenir deformações excessivas que resultariam em um aspecto visual desagradável para o usuário.

Em seguida, será explicado de forma resumida todo o procedimento para determinar o valor da flecha total, conforme a NBR 6118/2023.

2.4.7.1 Cálculo do momento de fissuração

De acordo com o item 17.3.1 da NBR 6118/2023, estruturas de concreto operam nos estádios I e II, dependendo do nível de tensão e da fissuração na seção. A transição entre esses estádios é determinada pelo momento de fissuração (M_r), calculada conforme Equação 39.

$$M_r = \frac{\alpha * f_{ct} * I_c}{y_t} \quad (39)$$

Sendo:

α = fator que correlaciona aproximadamente à resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, utiliza-se 1,5 para seções retangulares;

f_{ct} = resistência à tração direta no concreto;

I_c = momento de inércia da seção bruta de concreto;

y_t = distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada.

Para identificar em qual estágio o elemento estrutural está trabalhando, deve-se comparar o momento de fissuração (M_r) com o momento máximo característico proveniente das cargas atuantes na viga, dessa maneira, se o momento máximo característico obtido da viga de concreto armado biapoiada for menor ou igual M_r , logo a viga de concreto se encontra no estágio I, assim, o concreto resiste às tensões de tração e não estará fissurado, porém, se o momento máximo característico for maior do que M_r , a viga estará no estágio II. Nesta situação, a parcela do concreto tracionada será desprezada, porque o concreto se encontrará fissurado.

Sendo assim, para o elemento estrutural que se encontra no estágio I, a rigidez (EI) da seção da viga é dada pela Equação 40.

$$EI = E_{CS} * I_c \quad (40)$$

onde:

E_{CS} = módulo de deformação secante do concreto

O módulo de deformação secante do concreto pode ser calculado conforme a Equação 41.

$$E_{CS} = \alpha_i * E_{ci} \quad (41)$$

Sendo:

$$\alpha_i = \left(0,8 + 0,2 * \frac{f_{ck}}{80} \right) \leq 1,0$$

Diante do exposto, quando não forem realizados ensaios para obter o valor do módulo de deformação inicial, a NBR 6118/2023 permite utilizar a Equação 42 para obter a estimativa do valor do módulo de deformação secante inicial para concretos de 20 MPa até 50 MPa, dada por:

$$E_{Ci} = \alpha_E * 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (42)$$

onde:

α_E = depende do agregado graúdo, conforme o item 8.2.8 da NBR 6118/2023, para este trabalho foi adotado $\alpha_E = 1$ que corresponde a granito e gnaisse.

Sendo assim, o momento de inércia para a seção retangular que se encontra no estágio I é dado pela Equação 43:

$$I_c = \frac{b_w * h^3}{12} \quad (43)$$

Para a determinação da rigidez equivalente da seção da viga no estágio II, é necessário obter o valor da linha neutra equivalente (X_{II}) e o momento de inércia equivalente (I_{II}). Entretanto, para este trabalho, foi considerada seção retangular com armadura simples. Logo, as expressões são dadas pelas Equações 44 e 45:

$$X_{II} + \alpha_e * A_s * X_{II} + \alpha_e * A_s * d = 0 \quad (44)$$

$$I_{II} = \frac{b_w * X_{II}^3}{3} + \alpha_e * A_s * (d - X_{II})^2 \quad (45)$$

Sendo:

X_{II} = posição da linha neutra equivalente;

I_{II} = momento de inércia equivalente;

A_s = área de aço da armadura tracionada;

d = Altura útil;

α_e = é a divisão entre o módulo de elasticidade do aço pelo módulo de deformação secante do concreto, sendo o módulo de elasticidade do aço igual à 210 *GPa*, segundo a NBR 6118/2023.

Conforme o item 17.3.2.1.1 da NBR 6118/2023, com os valores de X_{II} e I_{II} , pode-se calcular de forma aproximada a rigidez equivalente através da Equação 46, dada a seguir:

$$E * I_{eq} = E_{CS} * \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 * I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] * I_{II} \right\} \leq E * I_c \quad (46)$$

2.4.7.2 Determinação da flecha imediata

Para calcular a flecha imediata (a_i) em vigas, uma abordagem baseada na resistência dos materiais pode ser utilizada, especialmente para seções constantes ao longo da peça, como detalhado por Carvalho e Figueiredo Filho (2014), dada pela Equação 47.

$$\alpha_i = \frac{\alpha_c * p * L^4}{(EI)_{eq}} \quad (47)$$

Em que:

p = carga definida estabelecida por meio de uma determinada combinação (por exemplo, quase permanente);

L = comprimento da viga;

α_c = coeficiente definido pela condição estática do sistema considerado (biapoiado ou contínuo) e do tipo de ações atuantes. Sendo $\alpha_c = 5/384$ definido para vigas biapoiadas com carga linearmente distribuída;

$(EI)_{eq}$ = rigidez equivalente.

2.4.7.3 Determinação da flecha diferida

Conforme o item 17.3.2.1.2 da NBR 6118/2023, a flecha diferida resulta das cargas de longa duração devido à fluência do concreto. Essa é calculada aproximadamente multiplicando a flecha imediata pelo fator α_f , determinado pela Equação 48.

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 * \rho'} \quad (48)$$

Onde:

$$\rho' = \frac{A'_s}{b_w * d} \quad (49)$$

Em que:

$\Delta\xi$ = é a diferença entre o coeficiente de tempo final e inicial, conforme a NBR 6118/2023, pode ser obtido diretamente na Tabela 17.1 da norma mencionada.

Para este trabalho, considerou-se o tempo inicial de um mês e o tempo final maior do que 70 meses, porém foi considerado $\rho' = 0$, em razão da armadura de compressão que foi desconsiderada, devido que o concreto é suficiente para resistir aos esforços de compressão.

2.4.7.4 Determinação da flecha total

A flecha total (a_t) é obtida através da soma da flecha imediata e da flecha diferida, dada pela Equação 50.

$$a_t = a_i * (1 + \alpha_f) \quad (50)$$

Ademais, o valor obtido da flecha total através da Equação 50 deve ser comparado com o valor da flecha limite que se encontra na tabela 13.3 do item 13.3 da NBR 6118/2023. Sendo o seu valor definido por $L/250$, no qual L é o comprimento da viga.

Entretanto, quando o valor da flecha total é superior à flecha limite estabelecida pela NBR 6118/2023, é necessário aplicar possíveis soluções para reduzir o valor da flecha total, uma delas é a aplicação de uma contraflecha, que pode ser estimada por meio da Equação 51.

$$a_{cf} = a_t - a_{lim} \quad (51)$$

Onde:

a_{cf} = contraflecha, sendo seu limite igual à $L/350$, conforme a tabela 13.3 da NBR 6118/2023;

a_{lim} = flecha limite imposta pela NBR 6118/2023, sendo $L/250$ para este trabalho.

2.5 Otimização

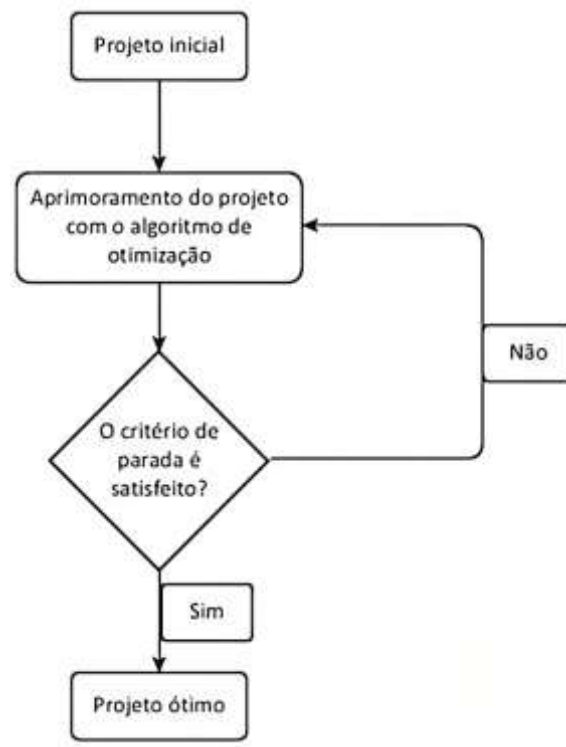
A otimização é um processo fundamental em diversas áreas, particularmente na engenharia estrutural, onde desempenha um papel importante na atenuação de custos, melhoria da eficiência e garantia de segurança. De acordo com Bazzo e Pereira (2006), a otimização

busca a solução ideal que maximiza os benefícios enquanto minimiza os prejuízos, sempre respeitando critérios pré-definidos que orientam a busca por essa melhor condição.

Na prática da engenharia estrutural, o processo de otimização envolve o dimensionamento de elementos de um edifício de maneira que sejam econômicos sem comprometer a segurança. Correia (2016) explica que tecnicamente, a otimização investiga problemas destinados a determinar variáveis que maximizam ou minimizam uma função específica, utilizando métodos matemáticos de otimização para alcançar esse fim.

O referido processo pode ser visualizado de forma esquemática, como ilustrado na Figura 7, que detalha as etapas e fluxos de um processo de otimização típico.

Figura 7 - Fluxograma genérico de um processo de otimização.



Fonte: Brasil e Silva (2019).

Conforme Chapra e Canale (2011), os problemas de otimização têm as seguintes características presentes na sua estrutura, tais como:

- Uma função objetivo $f(x)$, sendo a representação do objetivo da otimização;
- Variáveis de projeto (x), no qual podem ser caracterizadas como contínuas ou discretas;

- Restrições, são as responsáveis pelas limitações as quais o problema está submetido.

De forma geral, um problema que envolve otimização pode ser enunciado como:

Encontrar x , que minimiza ou maximiza $f(x)$, sujeito às seguintes condições de contorno, expressas pela Inequação 52 e pela Equação 53.

$$d_i(x) \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (52)$$

$$e_i(x) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (53)$$

Em que:

x = é um vetor n-dimensional das variáveis de projeto

$f(x)$ = função objetivo

$d_i(x)$ e $e_i(x)$ = são as restrições

a_i e b_i = são as constantes

O processo de otimização em engenharia é um método sistemático que busca a solução mais eficiente dentro de um conjunto de parâmetros pré-estabelecidos, maximizando benefícios e minimizando custos ou prejuízos (Brasil; Silva, 2019). As variáveis de projeto, fundamentais neste processo, são os elementos variáveis que influenciam o resultado final, como as dimensões da seção transversal de uma viga de concreto armado ou propriedades dos materiais utilizados. Essas variáveis podem ser classificadas em dois tipos principais: Variáveis Contínuas, que podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo ou Variáveis Discretas, que são restritas a valores específicos e isolados.

A escolha e definição da função objetivo é uma das etapas mais importantes do processo de otimização. Essa função quantifica exatamente o que precisa ser otimizado e pode ser direcionada para maximizar ou minimizar certos valores, conforme o objetivo do projeto (Rao, 2009). As funções objetivo podem ser, Mono-objetivo quando busca otimizar um único objetivo principal ou Multi-objetivo, quando visa encontrar um conjunto de soluções ótimas, mantendo a diversidade e cobertura no espaço das funções objetivos (Lobato, 2008).

As restrições são outro componente essencial do processo de otimização, delimitando os valores que a função objetivo pode assumir dentro do espaço de projeto. Essas restrições podem ser de três tipos: Restrições de Igualdade, quando exigem que os valores atendam exatamente a uma condição especificada; Restrições de Desigualdade, quando limitam os

valores a estarem dentro de um intervalo; ou Restrições Laterais, quando definem limites máximos e mínimos para as variáveis do projeto.

Dependendo da natureza das funções objetivo e das restrições, os problemas de otimização podem ser categorizados como:

- **Linear:** Tanto a função objetivo quanto as restrições são lineares;
- **Não-linear:** Envolve funções objetivo ou restrições que não são lineares;
- **Unidimensionais:** Dependem de uma única variável;
- **Multidimensionais:** Envolve duas ou mais variáveis.

Em qualquer problema de otimização, é extremamente importante representar a realidade de forma precisa, o que frequentemente envolve a aplicação de restrições para definir um domínio viável de soluções. Nesse contexto, as soluções ótimas podem ser locais, onde a função objetivo atinge o valor ótimo dentro de uma região limitada, ou globais, onde o valor ótimo é o melhor possível em todo o domínio de definição (Correia, 2016).

2.5.1 Técnicas de otimização

A escolha de um método de otimização adequado exige um entendimento profundo das características específicas do problema em questão. O desenvolvimento histórico dos métodos de otimização estrutural remonta aos anos 1960, marcado por um avanço significativo proposto pelo professor Schmit. Esse pioneiro integrou pela primeira vez a análise de elementos finitos com métodos de otimização numérica não-lineares, inaugurando a era da "*Structural Synthesis*" ou síntese estrutural (Vanderplaats, 1993). Embora os desenvolvimentos iniciais tenham sido estabelecidos na década de 1960, foi na década seguinte que esses métodos foram extensivamente desenvolvidos e refinados, culminando na maturação dessa tecnologia na prática contemporânea de engenharia.

Atualmente, os métodos de otimização são classificados em categorias como gráficos, analíticos e numéricos. No contexto deste trabalho, há um enfoque particular nos métodos numéricos, devido à sua relevância para o trabalho em questão. Esses métodos são subdivididos em específicos e genéricos. Os métodos específicos são formulados para tipos particulares de projetos otimizados, enquanto os métodos genéricos são aplicáveis a uma ampla variedade de problemas de otimização, o que os torna amplamente utilizados (Correia, 2016).

Dentro dos métodos numéricos incorporados aos *softwares* de otimização, uma distinção adicional é feita entre métodos determinísticos e probabilísticos. Os métodos determinísticos, conforme descritos por Medeiros e Kripka (2012), são aqueles que utilizam cálculos baseados em derivadas de primeira ou segunda ordem, ou suas aproximações. Pires (2014) aponta que esses métodos produzem uma sequência determinística de soluções potenciais, geralmente dependendo da primeira derivada da função objetivo. Entretanto, a necessidade de uma função objetivo contínua e diferenciável limita sua aplicação em diversos contextos de otimização (Bastos, 2004).

Os métodos probabilísticos de otimização, que se baseiam na probabilidade de ocorrência de eventos e no refinamento de conjuntos de soluções potenciais, apresentam diversas vantagens sobre métodos determinísticos tradicionais. Conforme discutido por Bastos (2004), esses métodos são particularmente úteis porque:

- Dispensam a necessidade de que a função objetivo seja contínua ou diferenciável, ampliando sua aplicabilidade;
- São capazes de operar eficientemente com variáveis contínuas, discretas ou uma combinação de ambas;
- Não requerem formulações complexas ou modificações substanciais do problema original para sua aplicação;
- Permitem flexibilidade no ponto de partida dentro do espaço de busca, evitando restrições desnecessárias;
- Realizam buscas simultâneas no espaço de soluções por meio de uma população de indivíduos, aumentando as chances de encontrar soluções globalmente ótimas;
- São aptos para otimizar sistemas com um grande número de variáveis.

Apesar dos métodos determinísticos serem eficazes em muitos cenários de otimização, eles podem ser limitados em problemas complexos onde as funções objetivo não são diferenciáveis ou são altamente não-lineares. Nesse contexto, os métodos probabilísticos são mais adequados, pois lidam efetivamente com essas complexidades (Gentle; Härdle; Mori, 2012). No entanto, é importante notar que, embora os métodos probabilísticos frequentemente se aproximem de uma solução ótima, os mesmos não garantem a obtenção da solução definitivamente ótima.

Dentre os métodos de otimização disponíveis, destacam-se alguns implementados na ferramenta Solver, tais como o método Simplex, o Gradiente Reduzido Generalizado e os Algoritmos Genéticos. Esses métodos oferecem diferentes abordagens e complexidades, tornando-se indispensáveis para a seleção de uma estratégia de otimização que melhor se ajuste às características específicas do problema enfrentado.

2.5.2 Simplex

O método Simplex faz parte da classe dos métodos numéricos determinísticos, foi desenvolvido pelo matemático norte-americano George Bernard Dantzig em 1947, principalmente para resolver problemas de Programação Linear (Shamir, 1987).

Segundo Goldbarg e Luna (2005), o método Simplex parte de uma solução ótima viável do sistema de equações que faz parte da estrutura das restrições do problema de Programação Linear, sendo essa solução normalmente extrema (vértice). Destarte, é através dessa solução inicial que vai identificando novas soluções viáveis de valores iguais ou até melhores que a concorrente.

Para que isso ocorra, o método possui critério de escolha, sendo essencial para encontrar novos e melhores vértices da envoltória convexa do problema e, ao mesmo tempo, outro critério é essencial, principalmente para conseguir determinar se o vértice escolhido é ou não um vértice ótimo (Goldbarg; Luna, 2005).

De forma geral, o método em questão baseia-se na premissa de que uma solução ótima é um ponto extremo. Sendo assim, a abordagem deve ser capaz de identificar se, durante a solução do problema, um ponto extremo ocorre. Mas para que essa identificação realmente aconteça é essencial que as equações de restrições sejam reformuladas como igualdades e, ao mesmo tempo, sejam introduzidas as chamadas variáveis de folga (mede quanto de recurso restrito está disponível) (Chapra; Canale, 2011).

2.5.3 Gradiente Reduzido Generalizado

Segundo Yeniay (2005), o método do Gradiente Reduzido Generalizado foi desenvolvido pela primeira vez por Carpentier e Abadie (1966), sendo como uma extensão do método do Gradiente Reduzido desenvolvido por Wolfe (1963).

Além disso, o método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) é um dos melhores métodos determinísticos de otimização local. Dessa forma, o método é baseado em gradiente, e sempre procura o ótimo mais próximo do ponto de partida (Yeniay, 2005).

A metodologia do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) é caracterizada por uma matemática complexa. Nesse contexto, apresentamos apenas uma visão geral do conceito subjacente ao método. Para uma análise mais detalhada, é recomendável consultar os trabalhos pioneiros de Wolfe (1963), Carpentier e Abadie (1966) e Lasdon *et al.* (1978). Conforme discutido anteriormente, os métodos de otimização não-linear geralmente partem de uma solução inicial viável, denominada ponto de partida. Esse procedimento também é aplicado no método GRG. Para Brasil e Silva (2019), o método GRG é baseado em programação quadrática. Esse método é utilizado para determinar uma direção de busca adequada, mantendo as restrições ativas ϵ -ativas. O termo " ϵ -ativas" refere-se às restrições que são consideradas ativas dentro de uma margem de tolerância ϵ . Isso significa que, para pequenos deslocamentos no espaço das variáveis de projeto, essas restrições continuam sendo satisfeitas dentro dessa margem. No entanto, o método Newton-Raphson é empregado para reajustar as variáveis de modo que elas se aproximem ou retornem aos limites das restrições, especialmente em situações onde as condições ϵ -ativas não são mantidas.

Conforme descrito por Chapra e Canale (2011), a eficiência do método GRG reside na sua capacidade de transformar inicialmente o problema em um problema de otimização sem restrições. Isso é alcançado solucionando um conjunto de equações não-lineares, onde as variáveis básicas são expressas em termos das variáveis não-básicas. Uma vez transformado em um problema sem restrições, a solução pode então ser efetivamente obtida utilizando técnicas baseadas em métodos de gradientes. Essa abordagem permite que o método GRG lide com as restrições de maneira indireta, simplificando a complexidade do problema original. Adicionalmente, Fedghouche e Tiliouine (2012) identificam várias vantagens do método GRG, que reforçam sua utilidade e eficácia em diversos contextos de otimização não-linear:

- O método GRG é amplamente reconhecido por ser um método eficaz na resolução de uma variedade extensa de problemas de otimização não linear;
- O método pode lidar com até 200 restrições, o que se torna adequado para problemas de otimização de projetos de vigas de concreto armado de seção retangular;
- O programa em si tem a capacidade de estimar a matriz Hessiana por meio de técnicas de diferenças finitas;

- O método do GRG é utilizado pelo programa no qual permite uma seleção sistemática entre o Método Quase-Newton e o método do Gradiente Conjugado.

2.5.4 Algoritmos Genéticos

Segundo Gentle, Härdle e Mori (2012), o método dos Algoritmos Genéticos (AGs) tem sua abordagem popular para a otimização estocástica/probabilística, principalmente no que se refere ao problema de otimização global de encontrar a melhor solução entre vários mínimos. Outrossim, os AGs são definidos como um caso especial, isso pois representam a classe mais geral de algoritmo de computação evolutiva (em que incluem métodos de programação evolutiva e estratégia de evolução).

Os AGs foram desenvolvidos por John Holland junto com seus colaboradores entre as décadas de 1960 e 1970, conceituando-se como um modelo ou abstração da evolução biológica, que foi inspirado na teoria da seleção natural de Charles Darwin. Dessa forma, Holland é conhecido como o primeiro a utilizar o cruzamento e recombinação, mutação e seleção no estudo de sistemas adaptativos e artificiais. Além disso, são esses operadores genéticos que constituem a parte fundamental do algoritmo genético como uma estratégia de resolução de problemas de otimização (Yang, 2010).

Os AGs utilizam conceitos baseados no princípio da seleção natural para solucionar uma gama de problemas de otimização. Dessa forma, como o método é robusto, genérico e facilmente adaptável, isso faz com que o método seja utilizado em diversas áreas. Entretanto, o funcionamento do método parte das seguintes etapas: geração da população inicial, avaliação ou aptidão, seleção, cruzamento e mutação (Rosa Filho, 2015).

De forma geral, o método AGs cria uma população de possíveis respostas para o problema a ser determinado (geração da população inicial), em seguida, é submetido essas possíveis respostas ao processo de evolução, sendo estruturado pelas seguintes etapas (Rosa Filho, 2015):

- **Aptidão:** nessa etapa é feita uma análise para que se estabeleça quão bem estas soluções respondem ao problema proposto, dessa forma, a solução que não se encaixa em algum critério pré-estabelecido deverá ser penalizada (penalização);
- **Seleção:** nessa etapa, os indivíduos são selecionados para a reprodução. A probabilidade de uma dada solução ser selecionada é proporcional à sua aptidão;

- **Cruzamento:** nessa etapa, as características das soluções escolhidas são recombinadas, gerando novos indivíduos;
- **Mutação:** nessa etapa final, as características dos indivíduos resultantes do processo de reprodução são alteradas, acrescentando assim variedade à população.

Conforme citado por Pires (2014), nos Algoritmos Genéticos, o grupo formado de possíveis soluções para o problema de otimização é avaliado por meio de uma função de aptidão, nesse contexto, apenas os elementos mais aptos são selecionados, recombinados e mutados para encontrar melhores soluções próximas da ótima, dessa forma, a evolução se inicia em uma população que foi gerada aleatoriamente, sendo que o processo evolutivo ocorre ao longo das gerações.

Sendo assim, após a definição das variáveis e da função de otimização, é criada a população inicial de “cromossomos” aleatoriamente, que representa um determinado grupo de possíveis candidatas para as soluções do problema. É nesse ponto que se destaca o processo evolutivo, sendo nesse evento que os cromossomos são codificados e em seguida avaliados. Nessa fase, os “cromossomos” que passaram pelo processo evolutivo recebem uma nota que reflete a sua qualidade de solução a qual ele representa (Pires, 2014).

Entretanto, apenas os indivíduos mais desenvolvidos são selecionados, após a seleção os elementos podem sofrer modificações através dos operadores genéticos (cruzamento e mutação). Desse modo, o processo é repetido até encontrar uma solução próxima da ótima que respeite os critérios de convergência.

Conforme citado em Lacerda e Carvalho (1999), os Algoritmos Genéticos apresentam algumas vantagens:

- Os métodos funcionam tanto com parâmetros contínuos como discretos ou uma combinação deles;
- Realizam buscas simultâneas em várias regiões do espaço de busca, pois trabalham com uma população e não com um único ponto;
- Otimizam um número grande de variáveis;
- Otimizam parâmetros de funções objetivos com superfícies complexas e complicadas, reduzindo a incidência de mínimos locais;

- Não é necessário conhecimento matemático aprofundado do problema considerado;
- São flexíveis para trabalhar com restrições arbitrárias e otimizar múltiplas funções com objetivos conflitantes.

Após análise comparativa entre métodos de otimização, incluindo Simplex, Algoritmos Genéticos e Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), observou-se que o GRG seria o mais adequado para a otimização de projetos de vigas de concreto armado. A escolha do GRG, implementado por meio da ferramenta Solver, foi motivada pela sua capacidade de controlar de forma precisa as condições estruturais. Ao transformar o problema em um modelo de otimização sem restrições, o GRG simplifica o processo de busca por soluções, resultando em uma abordagem mais avançada que o simplex e mais simples do que o AG.

2.5.5 Ferramenta Solver

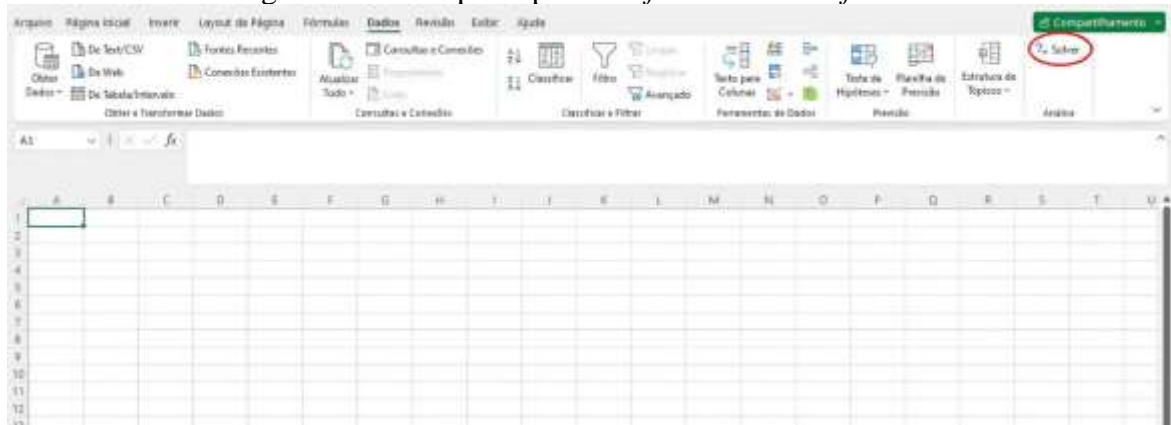
A ferramenta Solver é uma poderosa ferramenta de otimização usada em planilhas do *software Microsoft Excel*, além disso, faz parte de um conjunto chamado de ferramentas de análise hipotética, desenvolvida pela *Frontline Systems*. Por meio dessa ferramenta, é possível localizar um valor mínimo ou máximo de uma função. Através das células da planilha, a ferramenta Solver define as células como: célula objetivo, células variáveis e as células sujeitas às restrições. Além de escolher o método que será empregado durante a otimização. A ferramenta Solver disponibiliza três opções de método de otimização: GRG não linear, o LP *Simplex* e o *Evolutionary*.

O método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) não linear é aplicado para problemas não lineares. Sendo utilizados os códigos GRG2 que foram desenvolvidos por Leon Lasdon na *University of Texas* e Alan Waren, na *Cleveland State University*, posteriormente, sendo aprimorado pela *Frontline Systems* (Frontline Solvers, 2024). O LP Simplex é aplicado em problemas de otimização linear. E o método Evolutionary, baseado em Algoritmos Genéticos (AGs), é aplicado em problemas não lineares complexos.

Conforme Sacoman (2012), o GRG é considerado um dos métodos mais eficientes para solução geral de problemas de otimização não-linear. Ademais, neste estudo foi empregado o método do GRG não linear para obter as soluções do problema de otimização.

Para formular o problema na planilha do *software Microsoft Excel*, e utilizar a ferramenta de otimização, é necessário clicar na opção Solver da planilha, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8 - Janela principal do *software Microsoft Excel*.



Fonte: Autor (2024).

Ao clicar na opção Solver, é aberta uma janela de comunicação e comandos do Solver, conforme ilustra a Figura 9. Brasil e Silva (2019) descreve os principais comandos da janela de comunicação, tais como:

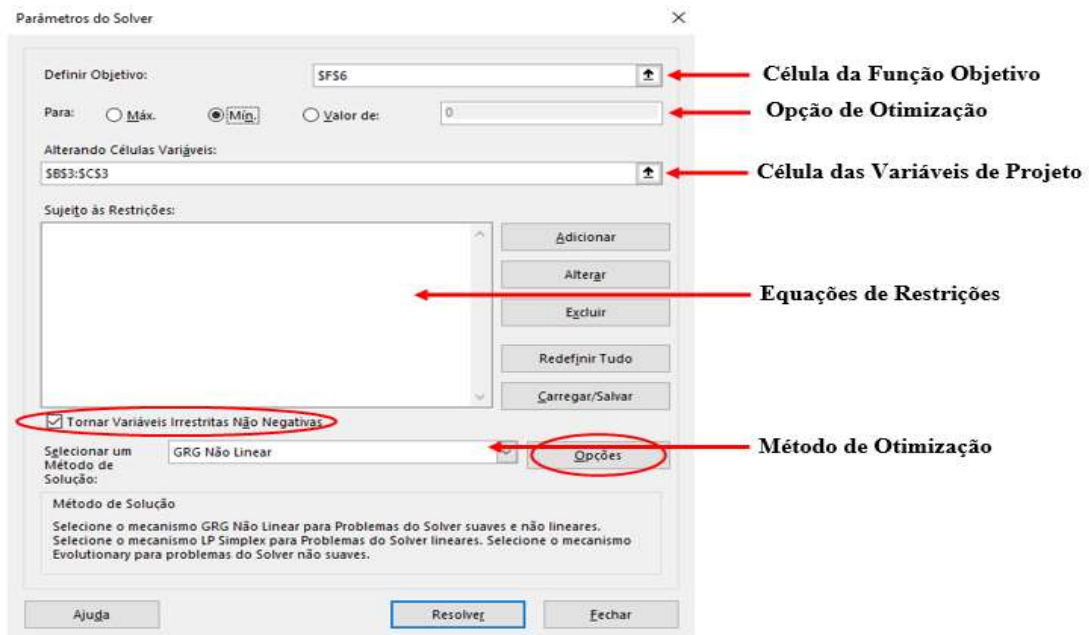
- a) Na função objetivo, deve ser escolhida a célula da planilha do Excel que contém as equações da função objetivo e inserir no campo onde está escrito “definir objetivo”, em função direta ou indireta das variáveis de projeto;
- b) Na opção de otimização deve-se definir o tipo de objetivo, se é minimizar, maximizar ou tornar nula a função objetivo;
- c) No campo “Alterando Células Variáveis” deve-se inserir as células que contém as variáveis de projeto, ou seja, são células de entradas das variáveis de projeto. Ressalva-se que nesse campo só deve existir números e não pode haver fórmulas nas células;
- d) No campo “Sujeito às Restrições” devem-se inserir as equações das restrições, além disso, neste campo é disponibilizado opção de adicionar, alterar ou remover uma determinada restrição. São utilizadas as devidas expressões em uma determinada célula de restrição como “=0”, “<=0” ou “>=0” etc.;
- e) Em método de otimização é selecionado o método que será aplicado no problema de otimização, sendo que o Solver disponibiliza três métodos de

otimização, tais como, GRG não linear; LP *Simplex* e o *Evolutionary*, baseado em Algoritmos Genéticos (AGs);

- f) Em opções é disponibilizado uma janela em que o usuário pode fazer alterações na convergência e no tamanho da população, sendo alterado nas configurações dos métodos de otimização a serem empregados.

No presente trabalho, foi marcada a opção “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas” para não ocorrer dimensões negativas na seção transversal da viga no processo de otimização. Essa opção é relevante para manter as dimensões da seção transversal da viga com números positivos. Dessa forma, deve-se ficar atento a essa opção durante a otimização do problema. Ao definir toda a formulação do mesmo, é necessário clicar no botão “resolver” para obter a solução ótima. Para mais informações sobre como utilizar a ferramenta Solver, deve-se clicar em “ajuda”.

Figura 9 - Janela de comunicação e comandos do Solver.



Fonte: Autor (2024).

3 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO DE OTIMIZAÇÃO

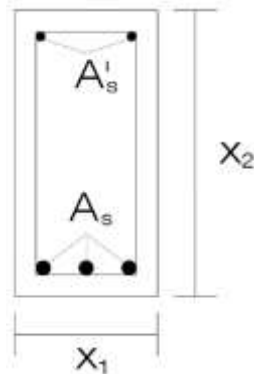
Este capítulo visa detalhar o processo de otimização de vigas retangulares de concreto armado sujeitas à flexão simples, abordando as formulações matemáticas envolvidas para sua implementação no Excel Solver através do *software Microsoft Excel*.

3.1 Variáveis de projeto

Na otimização estrutural, é essencial estabelecer, inicialmente, os componentes fundamentais que formulam o problema de otimização, os quais são: as variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições de projeto. Esses componentes formulam a base do problema de otimização, cada um desempenhando um papel específico para guiar a busca pela melhor solução de projeto estrutural possível.

As variáveis de projeto são os parâmetros que podem ser ajustados no processo de otimização para modificar a configuração da estrutura. No presente estudo, optou-se por definir como variáveis de projeto as dimensões da base e da altura da seção transversal de uma viga de concreto armado. Essas variáveis são designadas, respectivamente, por x_1 e x_2 , conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 - Variáveis de projeto.



Fonte: Autor (2024).

onde:

x_1 = base da seção transversal;

x_2 = Altura da seção transversal;

A_s' = armadura de compressão;

A_s = armadura tracionada.

3.2 Função objetivo

A função objetivo é o critério que está sendo otimizado, em função das variáveis de projeto. Geralmente, a ideia é minimizar a função objetivo, como, por exemplo, o volume da estrutura, visando obter a solução mais econômica que atenda aos requisitos do projeto.

No vigente trabalho, busca-se depreciar o custo dos materiais e da mão de obra para a construção de vigas de concreto armado, levando em consideração os custos de volume de concreto, área de forma, área de armadura longitudinal e área de armadura transversal (estribos) por metro de construção. Os valores dos custos dos materiais de cada item e da mão de obra foram obtidos a partir da tabela SINAPI/ Alagoas no mês de janeiro/2024 das tabelas de composições analítico e sintético de preços não desonerada, além do ORSE/Sergipe no mês de novembro/2023. É importante destacar que a seleção dos materiais foi realizada considerando-se os valores mais elevados apresentados nas tabelas mencionadas, visando garantir uma análise conservadora dos custos potenciais do projeto. A Tabela 3 apresenta os custos dos serviços e materiais utilizados nas análises.

Tabela 4 - Custos dos serviços e materiais para vigas.

VALORES DOS SERVIÇOS PARA EXECUÇÃO DE VIGA DE CONCRETO ARMADO RETIRADOS DO SINAPI (10/2023) E DO ORSE (10/2023)			
CÓDIGO	ITEM	UN	PREÇO
CONCRETO			
94964	Concreto $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$, traço 1:2,7:3 (em massa seca de cimento/ areia média / brita 1) – preparo mecânico com betoneira 400 L	m^3	R\$ 443,72
94965	Concreto $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$, traço 1:2,3:2,7 (em massa seca de cimento/ areia média / brita 1) – preparo mecânico com betoneira 400 L	m^3	R\$ 464,28
94966	Concreto $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$, traço 1:2,1:2,5 (em massa seca de cimento/ areia média / brita 1) – preparo mecânico com betoneira 400 L	m^3	R\$ 481,85
00638/ORSE	Concreto usinado bombeável b0-b1 $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$	m^3	R\$ 493,52
94967	Concreto $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$, traço 1:1,6:1,9 (em massa seca de cimento/ areia média / brita 1) – preparo mecânico com betoneira 400 L	m^3	R\$ 555,43
08438/ORSE	Concreto usinado bombeável b0-b1 $f_{ck} = 45 \text{ MPa}$	m^3	R\$ 704,29
103673	Lançamento com uso de bomba, adensamento e acabamento de concreto em estruturas	m^3	R\$ 37,66
AÇO			
92800	Corte e dobra de aço CA-60, diâmetro de 5 mm	kg	R\$ 10,44
92803	Corte e dobra de aço CA-50, diâmetro de 10 mm	kg	R\$ 9,89
92759	Armação de pilar ou viga de estrutura convencional de concreto armado utilizando aço CA-50 de 5 mm – montagem	kg	R\$ 14,44
92762	Armação de pilar ou viga de estrutura convencional de concreto armado utilizando aço CA-50 de 10 mm – montagem	kg	R\$ 11,84
MADEIRA			
92266	Chapa/painel de madeira compensada plastificada (madeirite plastificado) para forma de concreto, de 2200x1100 mm, $e = 18 \text{ mm}$	m^2	R\$ 102,46
92451	Montagem e desmontagem de forma de viga, escoramento com garfo de madeira, pé direito simples, em chapa de madeira resinada, 2 utilizações	m^2	R\$ 205,96

Fonte: Autor (2024).

Para obter o custo final dos serviços e materiais, foram somados os custos referentes à montagem, armação, forma e desforma, lançamento com uso de bomba, adensamento e acabamento para vigas, resultando nos valores indicados na Tabela 4.

Tabela 5 - Custo final dos serviços e materiais.

CUSTO FINAL (SERVIÇOS + MATERIAIS)		
REFERÊNCIA	UN	PREÇO
CONCRETO		
20 MPa	m^3	R\$ 481,38
25 MPa	m^3	R\$ 501,94
30 MPa	m^3	R\$ 519,51
35 MPa	m^3	R\$ 531,18
40 MPa	m^3	R\$ 593,09
45 MPa	m^3	R\$ 741,95
AÇO		
CA-60	kg	R\$ 24,88
CA-50	kg	R\$ 21,73
MADEIRA		
Vigas	m^2	R\$ 308,42

Fonte: Autor (2024).

A formulação do custo associado ao aço (CA) foi estabelecida com base em dois componentes principais. O primeiro componente abrange o custo das armaduras longitudinais, incluindo tanto as armaduras de tração quanto as de compressão. O segundo componente, por sua vez, diz respeito ao custo das armaduras transversais. É importante salientar que a inclusão da armadura de pele foi considerada desnecessária nesse contexto, visto que a altura máxima da estrutura não ultrapassou 60 cm. De acordo com a norma NBR 6118/2023, a necessidade de armadura de pele surge apenas para alturas superiores a 60 cm.

Sendo assim, para calcular a área do estribo (A_{est}), usa-se a Equação 54.

$$A_{est} = \frac{\pi * \phi_t^2}{4} \quad (54)$$

Em que:

ϕ_t = diâmetro do estribo.

Para encontrar a quantidade total de estribo, primeiro é necessário encontrar o espaçamento entre os estribos, entretanto, o estribo foi considerado de 2 ramos, dessa forma, o espaçamento (s) será dado pela Equação 55:

$$s = \frac{2 * A_{est}}{A_{sw}} \quad (55)$$

Em que:

A_{sw} = área da armadura transversal em (cm^2/cm).

Para encontrar a quantidade total de estribos (n_t) é necessário dividir o comprimento da viga (cm) pelo espaçamento entre os estribos, conforme Equação 56.

$$n_t = \frac{L_i}{s} \quad (56)$$

Em que:

L_i = o comprimento da viga.

Para calcular o comprimento total dos estribos (c_t), multiplica-se a Equação 56 pelo comprimento de um estribo (c_{est}), dado pela Equação 57.

$$c_t = n_t * c_{est} \quad (57)$$

Para calcular o custo total dos estribos, usa-se a Equação 58.

$$C = c_t * A_{est} * \rho * C_{60} \quad (58)$$

Em que:

C = custo total dos estribos;

ρ = massa específica do aço ($7850 \text{ kg}/m^3$);

C_{60} = custo do aço CA-60 ($R\$/kg$).

Diante do exposto, o custo total do aço (CA) será calculado conforme a Equação 59.

$$CA = A_s * L_i * \rho * C_{50} + A_s' * L_i * \rho * C_{60} + c_t * A_{est} * \rho * C_{60} \quad (59)$$

Em que:

A_s = armadura de tração;

A_s' = armadura de compressão;

A_{est} = área de aço do estribo;

L_i = comprimento da viga;
 c_t = comprimento total dos estribos;
 ρ = massa específica do aço (7850 kg/m^3);
 C_{50} = custo unitário do aço CA-50 ($R\$/\text{kg}$);
 C_{60} = custo unitário do aço CA-60 ($R\$/\text{kg}$);
 CA = custo de aço ($R\%$).

O Custo de Forma (CF) é obtido por meio da Equação 60. Sendo que a área de forma é calculada através da multiplicação da soma de 2 alturas e uma base pelo comprimento da viga.

$$CF = (b + 2 * h) * L_i * C_F \quad (60)$$

Onde:

b = base da seção transversal;
 h = altura da seção transversal;
 L_i = comprimento da viga;
 C_F = custo unitário de forma ($R\$/\text{m}^2$);
 CF = custo de forma ($R\%$).

O Custo de Volume de Concreto (CC) é calculado entre o consumo de volume de concreto com o custo do material. O volume de concreto é calculado através da multiplicação da área da seção transversal com o comprimento da viga, conforme a Equação 61.

$$CC = (b * h) * L_i * C_C \quad (61)$$

Em que:

b = base da seção transversal;
 h = altura da seção transversal;
 L_i = comprimento da viga;
 C_C = custo unitário do volume de concreto ($R\$/\text{m}^3$);
 CC = custo do volume de concreto ($R\%$).

A função objetivo pode ser escrita como a soma de todas as parcelas referente ao custo total da viga, chamado de Custo Total (CT), conforme ilustra a Equação 62 ou 63.

$$CT = CA + CF + CC \quad (62)$$

$$CT = A_s * L_i * \rho * C_{50} + A_s' * L_i * \rho * C_{60} + c_t * A_{est} * \rho * C_{60} + (x_1 + 2 * x_2) * L_i * C_F + (x_1 * x_2) * L_i * C_C \quad (63)$$

3.3 Definição das restrições de projeto

As restrições de projeto são as limitações dentro das quais a estrutura deve ser projetada. Elas definem os limites aceitáveis para as variáveis de projeto e garantem que a solução final seja viável. Para vigas de concreto armado, as restrições são limitadas pelos limites impostos pela norma NBR 6118 (ABNT, 2023), nesse sentido, a fim de obter resultados consistentes, é necessário que as restrições sejam bem definidas e estejam em conformidade com os limites estabelecidos por essa norma.

As Equações de 64 a 77 apresentam as restrições impostas ao problema, conforme a NBR 6118 (ABNT, 2023) e as literaturas utilizadas no presente trabalho.

A Equação 64 representa a restrição da força cortante resistente de cálculo à compressão, sendo V_{Sd} a força cortante solicitante de cálculo e $V_{Rd2,1}$ a força cortante resistente de cálculo à compressão, conforme o item 17.2.4.1 da NBR 6118 (ABNT, 2023), a verificação da compressão diagonal do concreto é atendida quando V_{Sd} é inferior ou igual a $V_{Rd2,1}$.

$$V_{Sd} - V_{Rd2,1} \leq 0 \quad (64)$$

A Equação 65 representa a restrição do momento fletor resistente de cálculo, sendo M_d o momento fletor solicitante de cálculo e M_{sr} o momento fletor resistente de cálculo. Para assegurar que o elemento estrutural trabalhe com armadura simples, é necessário que o M_d seja inferior ou igual ao M_{sr} .

$$M_d - M_{sr} \leq 0 \quad (65)$$

A Equação 66 representa a restrição da viga de parede, sendo L o comprimento da viga e x_2 a maior dimensão da seção transversal da viga, de acordo com o item 18.3.1 da NBR 6118 (ABNT, 2023), para vigas isostáticas, a relação comprimento da viga e a maior dimensão da seção transversal deve ser maior ou igual a 2.

$$2 - L/x_2 \leq 0 \quad (66)$$

A Equação 67 representa a restrição da base mínima da seção transversal da viga, sendo x_1 a menor dimensão da seção transversal da viga e o valor da base mínima igual a 12 *cm*.

$$12 - x_1 \leq 0 \quad (67)$$

A Equação 68 representa a restrição da base máxima da seção transversal da viga, sendo x_1 a menor dimensão da seção transversal da viga e o valor da base máxima igual a 20 *cm*.

$$x_1 - 20 \leq 0 \quad (68)$$

A Equação 69 representa a restrição da altura mínima da seção transversal da viga, sendo x_2 a maior dimensão da seção transversal da viga e o valor da altura mínima da seção igual a 25 *cm*.

$$25 - x_2 \leq 0 \quad (69)$$

A Equação 70 representa a restrição da altura máxima da seção transversal da viga, sendo x_2 a maior dimensão da seção transversal da viga e o valor da altura máxima igual a 60 *cm*.

$$x_2 - 60 \leq 0 \quad (70)$$

A Equação 71 representa a restrição da armadura mínima tracionada, sendo $A_{s,min}$ armadura tracionada mínima e A_s armadura tracionada calculada. A armadura tracionada mínima é estabelecida conforme o item 17.3.5.2.1 da NBR 6118 (ABNT, 2023). Onde o valor da armadura tracionada deve ser igual ou maior do que a armadura tracionada mínima.

$$A_{s,min} - A_s \leq 0 \quad (71)$$

A Equação 72 representa a restrição da armadura máxima, sendo A'_s armadura comprimida e A_s armadura tracionada. Conforme o item 17.3.5.2.4 da NBR 6118 (ABNT, 2023) o valor da soma das armaduras (compressão e tração) deve ser igual ou inferior ao valor da armadura máxima.

$$(A_s + A'_s) - A_{s,m\acute{a}x} \leq 0 \quad (72)$$

A Equação 73 representa a restrição da contraflecha limite, sendo a_{cf} a contraflecha e $a_{cf,lim}$ a contraflecha limite. O valor da contraflecha aplicada deve ser igual ou inferior ao limite estabelecido conforme a Tabela 13.3 da NBR 6118 (ABNT, 2023).

$$a_{cf} - a_{cf,lim} \leq 0 \quad (73)$$

A Equação 74 representa a restrição do limite de ductilidade imposto pela NBR 6118 (ABNT, 2023), sendo que a relação da posição da linha neutra (x) e a altura útil (d) deve ser igual ou inferior a 0,45.

$$x/d - 0,45 \leq 0 \quad (74)$$

A Equação 75 representa a restrição do espaçamento horizontal mínimo entre os estribos, sendo s o espaçamento horizontal adotado, conforme a NBR 6118 (ABNT, 2023) o espaçamento horizontal mínimo entre os estribos deve permitir a passagem do vibrador para assegurar o adequado adensamento do concreto, onde s é igual ou superior a 7 cm.

$$7 - s \leq 0 \quad (75)$$

A Equação 76 representa a restrição do espaçamento horizontal máximo entre os estribos, sendo s o espaçamento horizontal adotado e $s_{m\acute{a}x}$ o espaçamento horizontal máximo, onde s deve ser igual ou inferior ao $s_{m\acute{a}x}$, conforme o item 18.3.3.2 da NBR 6118 (ABNT, 2023).

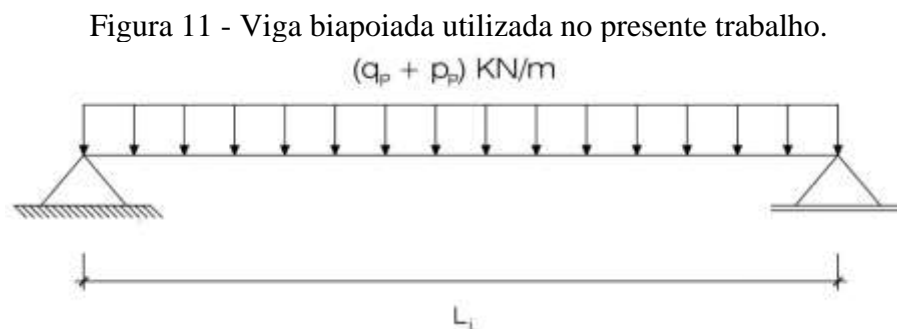
$$s - s_{m\acute{a}x} \leq 0 \quad (76)$$

A Equação 77 representa a restrição para número inteiro, sendo x_1 e x_2 as dimensões da seção transversal da viga. Para evitar a ocorrência de números decimais nas dimensões da seção transversal.

$$x_1; x_2 = \text{número inteiro} \quad (77)$$

3.4 Definição do problema

Em problemas de otimização, busca-se, frequentemente, minimizar ou maximizar uma função objetivo, considerando um conjunto de restrições. Este estudo visa especificamente a minimização do custo total (CT) associado à construção de uma viga biapoiada de concreto armado com seção transversal retangular. A otimização é realizada utilizando o método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) por meio do Excel Solver (ferramenta Solver) do *software Microsoft Excel*. A análise concentra-se nas dimensões da seção transversal (base e altura) como variáveis de projeto, detalhadas, anteriormente, na Figura 10, enquanto a configuração a ser otimizada da viga é ilustrada na Figura 11.



Fonte: Autor (2024).

Em que:

q_p = carga permanente distribuída;

p_p = peso próprio da viga;

L_i = comprimento da viga.

Para alcançar os objetivos propostos neste trabalho, dividiu-se o problema de otimização em dois estudos principais. O primeiro focou na variação do comprimento da viga (L_i) e da carga permanente. Aqui, o comprimento da viga aumentou gradativamente de 50 *cm*, partindo de uma base até o máximo de 600 *cm*, enquanto a carga permanente aumentou de 5 *kN/m* até

um limite de 25 kN/m . Este estudo adotou a classe de agressividade ambiental CAAII, com cobertura nominal de 3 cm e a distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada à fibra mais tracionada da viga (d') de $4,5 \text{ cm}$, mantendo constante a resistência do concreto (f_{ck}) em 25 MPa e utilizando aços CA50 e CA60 para as armaduras de tração e compressão, respectivamente, além de estribos de 5 mm de diâmetro. Considerou-se também o peso próprio da viga, com densidade do concreto armado de 25 kN/m^3 , e a armadura de compressão foi modelada com duas barras de 5 mm de diâmetro, cuja seleção foi mantida inalterada devido à sua função estrutural como suporte dos estribos. A carga permanente foi somada ao peso próprio da viga de concreto armado, conforme ilustrado na Figura 11.

Em uma segunda fase da otimização, focada na redução do custo total da viga (CT), considerou-se a variação da resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}) e do comprimento da viga (L_i). Especificamente, o f_{ck} foi ajustado em incrementos de 5 MPa até um limite de 45 MPa , enquanto o comprimento da viga foi aumentado em incrementos de 50 cm até um máximo de 600 cm . A carga permanente foi fixada em 25 kN/m , e foi adicionada ao peso próprio da viga. No estudo em questão, adotou-se a mesma classe de agressividade ambiental, com cobertura nominal de 3 cm e d' de $4,5 \text{ cm}$. Utilizou-se o aço CA50 para a armadura tracionada, CA60 para a armadura de compressão e estribos, com duas barras longitudinais de 5 mm de diâmetro para a compressão.

No dimensionamento da viga biapoiada de concreto armado com seção retangular, utilizou-se o modelo de cálculo 1 para determinar a armadura transversal. Ademais, devido à limitação da rotina de otimização implementada no Excel Solver, que não faz distinção entre os diâmetros das barras longitudinais tracionadas, optou-se por não considerar barras comerciais para a armadura de tração. Além disso, foi adotado o comprimento de ancoragem reta para as barras das armaduras de tração e compressão.

Dessa forma, os estudos abordaram os estados limites últimos, incluindo o momento fletor, o esforço cortante e a verificação de deformações excessivas, seguindo a NBR 6118 (ABNT, 2023).

4 VALIDAÇÃO DA PLANILHA DESENVOLVIDA PARA A OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A etapa de validação na otimização de vigas de concreto armado é essencial para assegurar a confiabilidade e a aplicabilidade dos resultados obtidos, além de possibilitar a comparação com achados de estudos anteriores, avaliando a consistência das soluções propostas para o problema em análise, levando em conta as especificidades e variáveis envolvidas.

Considerando a diversidade de abordagens em estudos prévios sobre otimização de vigas de concreto armado, que englobam distintos métodos de otimização e conclusões variadas, identifica-se a raridade de pesquisas com abordagens e premissas idênticas. Correia (2020) aponta que, embora não se antecipe a igualdade absoluta entre os resultados de diferentes pesquisas, espera-se que eles apresentem proximidade ou coerência.

Para a validação, foram selecionadas vigas otimizadas reportadas em estudos prévios, iniciando com a viga apresentada por Bezerra (2017) e concluindo com a análise da viga descrita por Correia (2020). Posteriormente, procedeu-se à comparação dos resultados obtidos para as vigas de concreto armado otimizadas, estabelecendo um paralelo entre as descobertas do presente estudo e as documentadas na literatura científica.

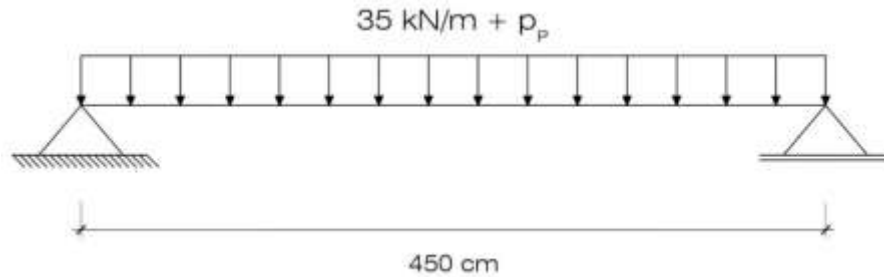
4.1 Viga biapoiada (BEZERRA, 2017)

No estudo de Bezerra (2017), realizou-se a otimização de uma viga biapoiada em concreto armado, apresentada na Figura 12. Essa viga possui 450 cm de comprimento e está submetida a um carregamento distribuído de 35 kN/m, além de considerar o peso próprio. As propriedades especificadas para a viga incluem resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}) de 40 MPa, estribos com diâmetro de 5 mm, o cobrimento nominal de 3 cm, a utilização de aço CA-50 e CA-60, densidade do concreto de 25 kN/m³, densidade do aço de 7850 kg/m³ e um vibrador com diâmetro de 30 mm para o adensamento do concreto.

Na metodologia proposta por Bezerra (2017), a otimização contemplou variáveis de projeto como a altura útil, largura, área de armadura longitudinal (tanto tracionada quanto comprimida) e o número de estribos. A função objetivo definida foi o custo total da viga, incorporando os custos associados à forma, ao aço e ao concreto. As restrições impostas ao modelo de otimização basearam-se nos critérios estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014), que incluem aspectos de resistência, equilíbrio, limites de deformação aceitáveis, detalhamento

construtivo e limitações laterais. Adicionalmente, a análise levou em consideração os esforços cortantes e momentos fletores, além da verificação do estado limite de deslocamentos excessivos e a necessidade de aplicação de contraflecha quando pertinente. Para as dimensões da seção transversal e as áreas de aço, a otimização utilizou valores inteiros, sem restringir as áreas de aço aos diâmetros comerciais disponíveis.

Figura 12 - Viga otimizada por Bezerra (2017).



Fonte: Bezerra (2017).

Utilizando os parâmetros e custos da viga de Bezerra (2017) apresentados na Tabela 5, esses foram inseridos na planilha do Excel Solver, configurada especificamente para este estudo. É importante ressaltar que a formulação matemática adotada (Equações 64 a 77) permaneceu inalterada em relação ao modelo original. Os resultados obtidos para a viga de Bezerra (2017) foram então comparados com os resultados da viga analisada neste trabalho, com os detalhes dessa comparação sendo apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Custos unitários de Bezerra (2017).

Custo Unitário	Valor
Custo do concreto ($R\$/m^3$)	343,35
Custo do aço CA-50 ($R\$/kg$)	13,64
Custo do aço CA-60 ($R\$/kg$)	14,48
Custo das formas ($R\$/m^2$)	150,71

Fonte: Bezerra (2017).

Tabela 7 - Viga otimizada por Bezerra (2017) e comparada com os resultados otimizados da presente planilha.

Parâmetros	Bezerra (2017)	Planilha Desenvolvida
Base da seção (<i>cm</i>)	15	12
Altura da seção (<i>cm</i>)	40	44
Área de aço (<i>cm²</i>)	9,88	9,14
Número de estribos	50	45
Contraflecha (<i>cm</i>)	0,92	1,03
Custo do concreto (<i>R\$</i>)	92,70	81,58
Custo do aço (<i>R\$</i>)	583,12	524,74
Custo de formas (<i>R\$</i>)	644,29	678,20
Custo total (<i>R\$</i>)	1320,11	1284,52

Fonte: Autor (2024).

Conforme indicado na Tabela 6, houve um incremento na altura e na contraflecha da seção da viga, além de um aumento no custo das formas neste estudo, quando comparado com a viga otimizada de Bezerra (2017). No entanto, observou-se uma diminuição na largura da base da seção. Apesar do aumento na altura, a armadura de tração neste trabalho foi inferior à do estudo de Bezerra (2017).

Adicionalmente, notou-se uma redução no número de estribos, bem como nos custos associados ao concreto e ao aço. Especificamente, a quantidade de estribos diminuiu de 50 para 45 unidades, o custo do concreto reduziu de *R\$* 92,70 para *R\$* 81,58, e o custo do aço caiu de *R\$* 583,12 para *R\$* 524,74. Essas economias contribuíram para uma redução global de 2,7% no custo total da viga, que passou de *R\$* 1320,11 para *R\$* 1284,52. Importante ressaltar que, neste estudo, utilizou-se porta-estribos de 5 *mm* de diâmetro, resultando em uma área de 0,39 *cm²*.

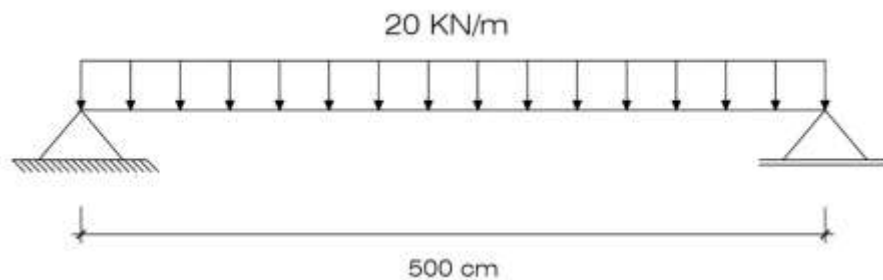
A similaridade entre os resultados da otimização da viga neste estudo e os obtidos por Bezerra (2017) valida a eficácia da planilha desenvolvida. As diferenças observadas podem ser atribuídas às variações na formulação do problema de otimização e no método de otimização empregado.

4.2 Viga biapoiada (CORREIA, 2020)

Os parâmetros para a otimização da viga foram adquiridos a partir do estudo conduzido por Correia (2020), que desenvolveu a otimização de uma viga biapoiada em concreto armado. Essa viga tem um comprimento de 500 *cm* e está submetida a uma carga uniformemente distribuída de 20 *kN/m*, como demonstrado na Figura 13. As especificações incluíram uma

resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}) de 30 MPa, estribos com diâmetro de 5 mm, cobrimento nominal de 3 cm, além do uso de aços CA-50 e CA-60, com densidade do aço de 7850 kg/m³ e um vibrador com diâmetro de 25 mm para o adensamento do concreto. Para a otimização realizada por Correia (2020), as variáveis de projeto selecionadas foram a largura, altura, número e diâmetro das barras de aço tracionadas e comprimidas. A função objetivo definida foi o custo total da viga, abrangendo os custos de forma, aço e concreto. As restrições consideradas na otimização basearam-se nos estados limites último e de serviço, requisitos de detalhamento e limitações às variáveis de projeto, conforme os padrões da NBR 6118 (ABNT, 2014). No processo de otimização, Correia (2020) utilizou dimensões da seção transversal em números inteiros e diâmetros comerciais para as armaduras.

Figura 13 - Viga otimizada por Correia (2020).



Fonte: Correia (2020).

Utilizando os parâmetros e custos referentes à viga de Correia (2020) disponíveis na Tabela 7, esses dados foram incorporados à planilha criada no Excel Solver específica para este estudo. Ressalta-se que a formulação matemática empregada (Equações 64 a 77) permaneceu constante ao longo da análise. Os resultados obtidos para a viga de Correia (2020) foram subsequentemente comparados com os da viga analisada no presente trabalho, com os detalhes comparativos exibidos na Tabela 8.

Tabela 8 - Custos unitários de Correia (2020).

Custo Unitário	Valor
Custo do concreto (R\$/m ³)	336,69
Custo do aço CA-60 (R\$/kg)	8,20
Custo do aço CA-50 (R\$/kg)	5,25
Custo das formas (R\$/m ²)	78,07

Fonte: Correia (2020).

Tabela 9 - Viga otimizada por Correia (2020) e comparada com os resultados otimizados da presente planilha.

Parâmetros	Correia (2020)	Planilha Desenvolvida
Base da seção (<i>cm</i>)	14	12
Altura da seção (<i>cm</i>)	46	43
Qtd e ϕ das barras tracionadas	2 ϕ 20	-
Qtd e ϕ das barras comprimidas	2 ϕ 5	2 ϕ 5
Área de aço tracionada (<i>cm²</i>)	6,28	6,37
Área de aço comprimida (<i>cm²</i>)	0,39	0,39
Quantidade de estribos	21	25
Custo Total (<i>R\$</i>)	689,78	633,31

Fonte: Autor (2020).

A análise dos resultados apresentados na Tabela 8 demonstra que, no vigente trabalho, houve uma redução na seção transversal da viga em comparação com a investigação realizada por Correia (2020). Conseqüentemente, a redução na altura da seção resultou em um incremento na área da armadura tracionada, que alcançou $6,37 \text{ cm}^2$, representando um aumento de 1,43% em relação ao estudo de Correia (2020).

Também foi observado um crescimento na quantidade de estribos, alterando de 21 para 25. A área de aço da armadura comprimida, contudo, manteve-se constante entre ambos os estudos. Apesar desses incrementos, o custo total da viga neste trabalho apresentou-se inferior ao registrado no estudo de Correia (2020), evidenciando uma diminuição de *R\$* 689,78 para *R\$* 633,31, o que reflete uma economia de 8,19% no custo total da viga.

Essa similaridade entre os resultados da otimização da viga de Correia (2020) e os deste estudo valida a eficácia da planilha utilizada. Mais uma vez, as variações observadas podem ser atribuídas às diferenças na formulação do problema de otimização e na metodologia de otimização adotada.

5 RESULTADOS

Nesta seção, serão discutidos os resultados obtidos na otimização estrutural de uma viga biapoiada em concreto armado com seção transversal retangular submetida à flexão simples. O estudo foi estruturado em duas partes distintas: a primeira parte examina as variações no comprimento da viga e no carregamento distribuído, enquanto a segunda parte foca nas alterações no comprimento da viga e na resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}). Para ambos os estudos, utilizou-se o método de otimização Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), aplicado por meio do Excel Solver disponibilizado pelo *software Microsoft Excel*.

5.1 Influência da variação do comprimento e do carregamento distribuído na otimização da viga

As Tabelas 9 a 13 apresentam os resultados da otimização considerando as cargas totais de 5, 10, 15, 20 e 25 kN/m , respectivamente. Além disso, considerou-se um incremento de 50 cm no comprimento da viga. Nas tabelas, considerou-se um h mínimo de 25 cm e um h máximo de 60 cm .

Observou-se nas Tabelas 9 a 10 que a variável h (altura da seção) foi a mais sensível e a variável b (base da seção) permaneceu constante, ou quase que constante, com valores entre 12 e 15 cm . Nesse sentido, comparando-se as Tabela 9 com a 10, nota-se um aumento de R\$ 55,14 no custo da viga de 300 cm de vão e um aumento de R\$ 448,97 no custo da viga de 600 cm de vão. Comparando-se as Tabelas 11 com a 13 observa-se um aumento de R\$ 164,54 no custo da viga de 300 cm de vão e um aumento de R\$ 676,91 no custo da viga de 600 cm de vão. Além de que, verificou-se que a contraflecha aumenta em função do aumento da carga e do vão. Nos resultados apresentados nas Tabelas, observou-se a necessidade de aplicação da contraflecha na maioria dos vãos analisados, pois a flecha total excedeu o limite estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2023), sendo $\delta_{lim} = L/250$. Para atender aos requisitos normativos e corrigir essa condição, implementou-se a contraflecha, conforme a norma indica.

Tabela 10 - Resultados gerais para 5 kN/m

<i>L</i> (cm)	<i>b</i> (cm)	<i>h</i> (cm)	<i>As</i> (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	<i>CF</i> (R\$)	<i>CA</i> (R\$)	<i>CC</i> (R\$)	<i>CT</i> (R\$)
300	12	25	1,239	25	-	573,66	129,56	45,17	748,39
350	12	25	1,687	30	0,447	669,27	179,31	52,7	901,28
400	12	27	2,028	31	0,99	814,23	224,93	65,05	1104,21
450	12	30	2,3	30	1,216	999,28	268,57	81,31	1349,16
500	12	24	2,504	30	1,153	1233,68	314,05	102,4	1650,13
550	12	37	2,791	29	1,383	1458,83	367,47	122,57	1948,87
600	12	40	3,086	29	1,612	1702,48	428,61	144,58	2275,67

Fonte: Autor (2024).

Tabela 11 - Resultados gerais para 10 kN/m.

<i>L</i> (cm)	<i>b</i> (cm)	<i>h</i> (cm)	<i>As</i> (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	<i>CF</i> (R\$)	<i>CA</i> (R\$)	<i>CC</i> (R\$)	<i>CT</i> (R\$)
300	12	25	2,317	25	0,712	573,66	184,7	45,17	803,53
350	12	28	2,774	25	0,99	734,04	238,46	59,03	1031,53
400	12	32	3,13	25	1,064	937,6	294,1	77,1	1308,80
450	12	36	3,496	25	1,142	1165,83	356,58	97,58	1619,99
500	12	39	3,973	25	1,402	1387,89	433,78	117,45	1939,12
550	12	43	4,354	24	1,482	1662,38	508,68	142,45	2313,51
600	12	47	4,744	24	1,568	1961,55	593,23	169,86	2724,64

Fonte: Autor (2024).

Tabela 12 - Resultados gerais para 15 kN/m.

<i>L</i> (cm)	<i>b</i> (cm)	<i>h</i> (cm)	<i>As</i> (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	<i>CF</i> (R\$)	<i>CA</i> (R\$)	<i>CC</i> (R\$)	<i>CT</i> (R\$)
300	12	27	3,104	24	0,779	610,67	225,12	48,79	884,58
350	12	31	3,615	24	0,902	798,81	289,58	65,35	1153,74
400	12	35	4,133	23	1,024	1011,62	361,18	84,33	1457,13
450	12	39	4,659	23	1,147	1249,1	444,16	105,71	1798,97
500	12	42	5,321	23	1,418	1480,42	546,85	126,49	2153,76
550	12	46	5,861	23	1,54	1764,16	650,24	152,39	2566,79
600	12	50	6,408	24	1,663	2072,58	766,3	180,7	3019,58

Fonte: Autor (2024).

Tabela 13 - Resultados gerais para 20 kN/m.

<i>L</i> (cm)	<i>b</i> (cm)	<i>h</i> (cm)	<i>A_s</i> (cm ²)	n ^o estribos	Contra flecha (cm)	<i>CF</i> (R\$)	<i>CA</i> (R\$)	<i>CC</i> (R\$)	<i>CT</i> (R\$)
300	12	30	3,621	20	0,585	666,18	246,65	54,21	967,04
350	12	34	4,284	21	0,733	863,58	326,13	71,67	1261,38
400	13	37	5,124	22	0,939	1073,3	429,21	96,57	1599,08
450	13	41	5,809	24	1,08	1318,49	537,52	120,39	1976,40
500	13	45	6,503	28	1,218	1588,36	663,88	146,82	2399,06
550	14	48	7,4	29	1,41	1865,94	814,32	185,52	2865,78
600	14	52	8,117	32	1,547	2183,61	967,63	219,25	3370,49

Fonte: Autor (2024).

Tabela 14 - Resultados gerais para 25 kN/m.

<i>L</i> (cm)	<i>b</i> (cm)	<i>h</i> (cm)	<i>A_s</i> (cm ²)	n ^o estribos	Contra flecha (cm)	<i>CF</i> (R\$)	<i>CA</i> (R\$)	<i>CC</i> (R\$)	<i>CT</i> (R\$)
300	12	33	4,029	19	0,404	721,7	267,79	59,63	1049,12
350	13	36	4,996	24	0,607	917,55	377,55	82,22	1377,32
400	13	41	5,66	25	0,656	1172	476,72	107,01	1755,73
450	14	44	6,679	30	0,852	1415,65	623,09	139,14	2177,88
500	14	48	7,526	34	1,003	1696,31	771,55	168,65	2636,51
550	15	51	8,594	37	1,197	1984,68	953,45	211,19	3149,32
600	15	55	9,47	40	1,345	2313,15	1134,88	248,46	3696,49

Fonte: Autor (2024).

A Tabela 14 apresenta a média percentual dos custos individuais de forma, aço e do volume de concreto em relação ao custo total da viga sob diferentes cargas distribuídas retangulares. Observou-se um incremento percentual no custo do aço e um ligeiro aumento no custo percentual do concreto, enquanto o custo percentual da forma diminuiu à medida que aumenta-se o carregamento. Esse aditamento no custo do aço correlaciona-se com o crescimento do momento fletor e, conseqüentemente, com a necessidade de uma maior área de aço. Por outro lado, a variação no custo percentual do concreto está diretamente associada à altura da seção (*h*), que se demonstrou a variável mais sensível na otimização.

O crescimento dos custos absolutos associados ao aço (*CA*) e ao concreto (*CC*) é proporcionalmente mais acentuado do que o crescimento do custo das formas (*CF*) à medida que a carga aplicada se eleva. Considerando que o aço geralmente apresenta um custo unitário mais elevado, seu aumento percentual exerce um impacto significativo no custo total, reduzindo proporcionalmente a participação dos custos das formas. Essa dinâmica explica a redução do custo relativo das formas com a intensificação da carga, mesmo que seu custo absoluto cresça,

pois, esse incremento é relativamente menor quando comparado aos aumentos nos custos do aço e do concreto.

Para edificações, busca-se a padronização das dimensões. Com isso há o reaproveitamento das formas, o que gera uma redução de custo e de tempo. Com o custo da forma sendo o mais elevado, reforça a necessidade da padronização das dimensões das vigas.

Tabela 15 - Relação Porcentual Média entre os Custos dos Componentes e o Custo Total da Viga em Função da Carga.

<i>kN/m</i>	<i>CF (%)</i>	<i>CA (%)</i>	<i>CC (%)</i>
5	74,74	19,17	6,09
10	71,65	22,39	5,96
15	69,03	25,16	5,81
20	66,76	27,17	6,07
25	65,30	28,42	6,28

Fonte: Autor (2024).

A Tabela 15 destaca como o vão afeta cada componente de custo, reiterando que maiores vãos e cargas amplificam o momento fletor e a força cortante, afetando principalmente a altura da viga. Conseqüentemente, o custo do aço sobe mais que o do concreto com o incremento do vão e da carga.

Tabela 16 - Relação Porcentual Média entre os Custos dos Componentes e o Custo Total da Viga em Função do Vão.

<i>L (cm)</i>	<i>CF (%)</i>	<i>CA (%)</i>	<i>CC (%)</i>
300	70,95	23,36	5,69
350	69,94	24,28	5,78
400	69,74	24,32	5,94
450	69,44	24,48	6,08
500	69,12	24,75	6,13
550	68,71	24,97	6,32
600	68,56	25,08	6,36

Fonte: Autor (2024).

Ambas as Tabelas, 14 e 15, confirmam que o custo relativo das formas tende a decrescer em cenários de cargas e vãos maiores, uma tendência atribuída ao crescimento mais pronunciado dos custos de aço e concreto, mesmo quando o custo absoluto das formas aumenta. Outrossim, verifica-se que o custo com formas representa a maior parte do custo total, ultrapassando 70% em alguns casos, enquanto o custo do aço e do concreto correspondem a aproximadamente 25 e 5% do custo total, respectivamente. Esses resultados evidenciam como

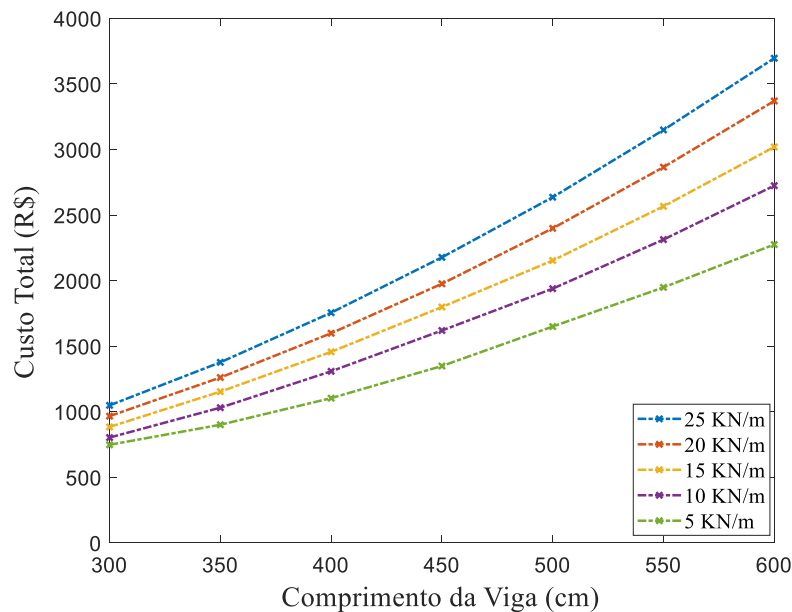
a distribuição dos custos varia em função do aumento do vão e da carga aplicada, refletindo diretamente nas decisões de projeto e na eficiência econômica da estrutura otimizada.

Embora o dispêndio de forma tenha sido identificado como superior aos do aço e do concreto, é relevante apontar que a reutilização da madeira compensada poderia atenuar esses custos; essa é uma variável que não foi explorada neste trabalho, mantendo o foco nos custos diretos de material, sem considerar potenciais economias por reutilização.

Foram elaborados gráficos baseados nos resultados obtidos para demonstrar as relações entre diversas variáveis estruturais, o comprimento da viga e o carregamento, conforme detalhado a seguir.

A Figura 14 apresenta a Relação entre o Custo Total, o Comprimento da Viga e o Carregamento Aplicado. Essa figura ilustra um aumento suavemente não linear do custo total com o incremento do comprimento da viga, refletindo diretamente à relação entre o aumento do vão e do carregamento com o custo.

Figura 14 - Otimização Estrutural do Custo Total x Comprimento da Viga.

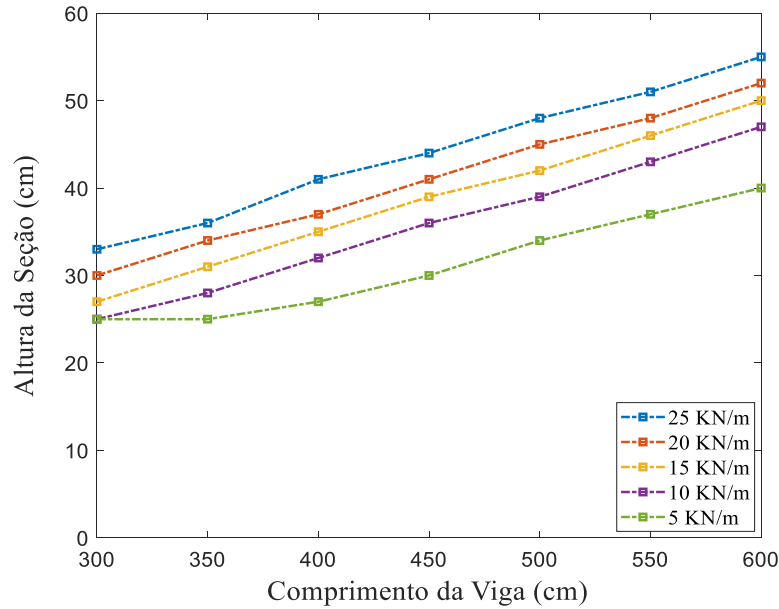


Fonte: Autor (2024).

A análise da Figura 15 indica um aumento linear da altura da seção com o crescimento do comprimento da viga e da carga. Nota-se que a altura da seção (h) demonstra ser a variável mais afetada pela otimização com o incremento de carga e vão ressaltando sua expressiva sensibilidade no processo. Foi constatado que vãos e carregamentos menores resultam em custos reduzidos, o que era previsível no contexto da otimização estrutural, enquanto maiores

vãos e cargas intensificam o custo total da viga, corroborando com as expectativas práticas da engenharia.

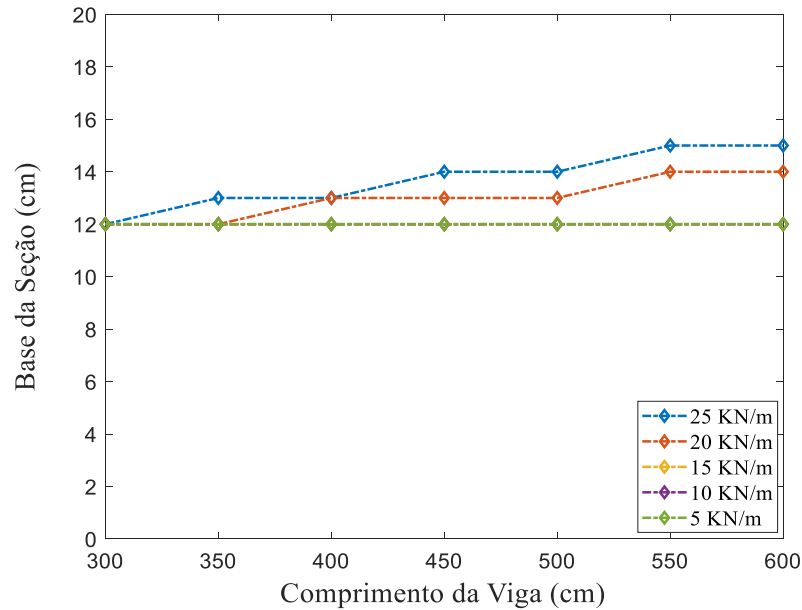
Figura 15 - Otimização Estrutural da Altura da Seção x Comprimento da Viga.



Fonte: Autor (2024).

Na Figura 16, para cargas de 5, 10 e 15 kN/m , a base da seção se manteve estável, indicando que, para esses intervalos de carga e vão, a altura é o fator mais decisivo na otimização em detrimento da base da seção. Para cargas de 20 e 25 kN/m , observa-se um leve aumento para valores da base da seção.

Figura 16 - Otimização Estrutural da Base da Seção x Comprimento da Viga.



Fonte: Autor (2024).

5.2 Influência da variação do comprimento e do f_{ck} na otimização da viga

Este estudo avaliou o impacto da variação do comprimento da viga e da resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}), mantendo constante o carregamento distribuído em 25 kN/m. A investigação variou o comprimento da viga de 50 em 50 cm até 600 cm e o f_{ck} de 5 em 5 MPa até 45 MPa, conforme detalhado nas Tabelas 16 a 22.

5.2.1 Vigas de 300 a 600 cm de comprimento

A Tabela 16 destaca a relação entre o f_{ck} e as características estruturais de uma viga de 300 cm. Conforme o f_{ck} aumenta, as dimensões transversais diminuem até se estabilizarem para um f_{ck} de 40 MPa. Esse ponto de estabilização marca uma diminuição na altura da seção, exigindo mais armadura de tração e reduzindo o momento de inércia, o que aumenta a deflexão da viga. Nota-se também uma estabilização no número de estribos após um f_{ck} de 35 MPa.

A análise indica que o custo total da viga diminui à medida que o f_{ck} aumenta, atingindo um mínimo com f_{ck} de 40 MPa (R\$ 1001,05), antes de começar a avolumar novamente para o f_{ck} de 45 MPa. O custo de forma, que teve uma redução de até 17,07% (ao comparar o f_{ck} de 20 MPa com o de 40 MPa), é o principal responsável pela diminuição do custo total, contrastando com as parcelas de custos do aço e do concreto. Nessa análise, observa-se que o custo de forma

representa o maior custo entre as outras parcelas, fazendo com que o seu custo percentual médio represente cerca de 65,55%, em seguida o custo percentual médio do aço com cerca de 28,39% e o custo médio do volume de concreto que representa cerca de 6,06%.

O f_{ck} de 40 MPa mostrou-se o mais econômico, com uma redução de custo total de 8,15% em comparação ao f_{ck} de 20 MPa (R\$ 1089,82).

Tabela 17 - Resultados da otimização para comprimento de 300 cm e a variação da resistência característica do concreto.

f_{ck} (MPa)	b (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	nº estribos	Contra flecha (cm)	CF (R\$)	CA (R\$)	CC (R\$)	CT (R\$)
20	14	34	3,922	18	0,299	758,71	262,37	68,74	1089,82
25	12	33	4,029	19	0,404	721,7	267,79	59,63	1049,12
30	12	30	4,487	20	0,661	666,19	290,97	56,11	1013,27
35	12	29	4,665	22	0,724	647,68	303,06	55,46	1006,20
40	12	28	4,858	22	0,800	629,18	312,09	59,78	1001,05
45	12	28	4,858	22	0,738	629,18	312,09	74,78	1016,05

Fonte: Autor (2024).

As Tabelas 17 a 22 apresentam, respectivamente, os resultados da otimização para vigas de 350 a 600 cm. Similarmente ao observado para vigas de 300 cm, as análises dessas tabelas revelaram que o aumento do f_{ck} leva à diminuição das dimensões transversais das vigas até um f_{ck} de 40 MPa, ponto no qual as dimensões se estabilizam. Essa estabilização coincide, geralmente, com a maior contraflecha, possivelmente devido à redução do momento de inércia.

Uma redução no número de estribos é, geralmente, observada após um f_{ck} de 30 MPa, indicando um ponto ótimo de eficiência no uso de material.

O custo total das vigas diminui com o aumento do f_{ck} , atingindo o valor mínimo em 40 MPa. A partir deste ponto, o custo total volta a aumentar. O custo de forma é identificado como o principal contribuinte para a redução do custo total, representando a maior parcela dos custos, seguido pelos custos de aço e concreto.

Os resultados enfatizam a importância de considerar o f_{ck} na otimização de vigas de concreto armado. A otimização focada no f_{ck} de 40 MPa demonstrou ser a mais vantajosa, proporcionando uma redução nos custos totais e na utilização de material, sem comprometer a integridade estrutural.

Tabela 18 - Resultados da otimização para comprimento de 350 cm e a variação da resistência característica do concreto.

f_{ck} (MPa)	b (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	CF (R\$)	CA (R\$)	CC (R\$)	CT (R\$)
20	15	37	4,882	22	0,501	960,73	368,94	93,51	1423,18
25	13	36	4,996	24	0,607	917,55	377,55	82,22	1377,32
30	12	34	5,304	25	0,818	863,58	395,26	74,18	1333,02
35	12	33	5,483	24	0,872	841,99	403	73,62	1318,61
40	12	32	5,676	24	0,941	820,4	413,59	79,71	1313,70
45	12	32	5,676	22	0,874	820,4	409,6	99,72	1329,72

Fonte: Autor (2024).

Tabela 19- Resultados da otimização para comprimento de 400 cm e a variação da resistência característica do concreto.

f_{ck} (MPa)	b (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	CF (R\$)	CA (R\$)	CC (R\$)	CT (R\$)
20	15	42	5,566	25	0,551	1221,34	472,75	121,31	1815,40
25	13	41	5,66	25	0,656	1172	476,72	107,01	1755,73
30	12	39	5,957	27	0,85	1110,31	498,25	97,25	1705,81
35	12	37	6,309	27	1,02	1060,96	520,21	94,34	1675,51
40	12	36	6,502	27	1,08	1036,29	532,33	102,49	1671,11
45	12	36	6,502	24	1,008	1036,29	525,89	128,21	1690,39

Fonte: Autor (2024).

Tabela 20 - Resultados da otimização para comprimento de 450 cm e a variação da resistência característica do concreto.

f_{ck} (MPa)	b (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	CF (R\$)	CA (R\$)	CC (R\$)	CT (R\$)
20	16	46	6,429	29	0,646	1498,92	605,82	159,43	2264,17
25	14	44	6,679	30	0,852	1415,65	623,09	139,14	2177,88
30	12	43	6,787	33	1,003	1360,13	635,25	120,63	2116,01
35	12	41	7,143	33	1,168	1304,62	660,02	117,6	2082,24
40	12	40	7,336	30	1,221	1276,86	666,65	128,11	2071,62
45	12	40	7,336	27	1,14	1276,86	659,74	160,26	2096,86

Fonte: Autor (2024).

Tabela 21 - Resultados da otimização para comprimento de 500 cm e a variação da resistência característica do concreto.

f_{ck} (MPa)	b (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	CF (R\$)	CA (R\$)	CC (R\$)	CT (R\$)
20	16	50	7,282	32	0,791	1788,84	750,23	192,55	2731,62
25	14	48	7,526	34	1,003	1696,31	771,55	168,65	2636,51
30	13	46	7,834	36	1,202	1619,2	799,05	155,33	2573,58
35	12	45	7,984	36	1,313	1572,94	809,04	143,42	2525,40
40	12	44	8,177	34	1,36	1542,1	819,19	156,58	2517,87
45	12	43	8,38	32	1,418	1511,26	830,35	191,42	2533,03

Fonte: Autor (2024).

Tabela 22 - Resultados da otimização para comprimento de 550 cm e a variação da resistência característica do concreto.

f_{ck} (MPa)	b (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	CF (R\$)	CA (R\$)	CC (R\$)	CT (R\$)
20	16	55	7,997	35	0,837	2137,35	898,54	232,99	3268,88
25	15	51	8,594	37	1,197	1984,68	953,45	211,19	3149,32
30	13	50	8,689	40	1,352	1916,83	966,26	185,72	3068,81
35	12	49	8,832	40	1,461	1865,94	976,66	171,78	3014,38
40	12	48	9,025	37	1,499	1832,01	985,39	187,89	3005,29
45	12	48	9,025	35	1,406	1832,01	980,18	235,05	3047,24

Fonte: Autor (2024).

Tabela 23 - Resultados da otimização para comprimento de 600 cm e a variação da resistência característica do concreto.

f_{ck} (MPa)	b (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	n° estribos	Contra flecha (cm)	CF (R\$)	CA (R\$)	CC (R\$)	CT (R\$)
20	16	60	8,724	38	0,886	2516,71	1061,31	277,27	3855,29
25	15	55	9,47	40	1,345	2313,15	1134,88	248,46	3696,49
30	13	54	9,551	43	1,5	2239,13	1147,23	218,82	3605,18
35	12	53	9,688	43	1,612	2183,61	1157,94	202,7	3544,25
40	12	52	9,881	40	1,64	2146,6	1167,74	222,05	3536,39
45	12	51	10,082	40	1,681	2109,59	1186,79	272,44	3568,82

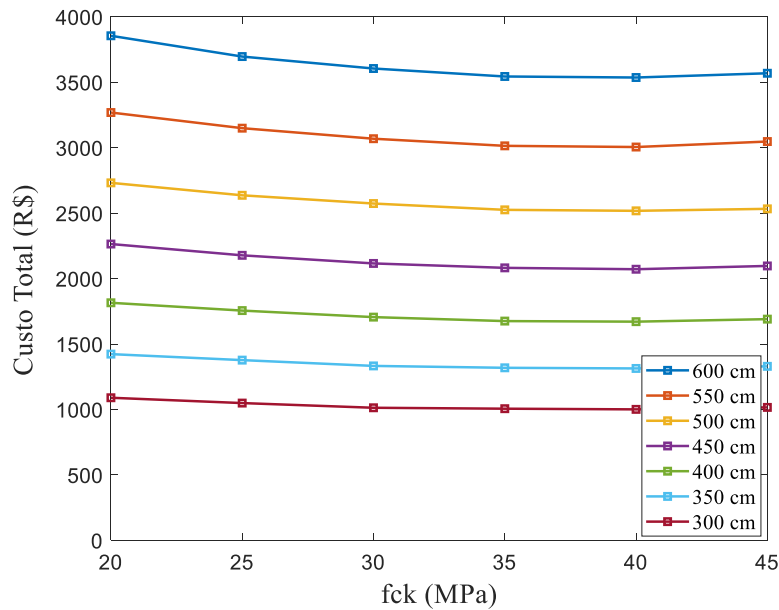
Fonte: Autor (2024).

A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 16 a 22, elaboraram-se as Figuras 17 a 22 que ilustram parâmetros da viga otimizada em função do comprimento da viga de concreto armado e/ou do f_{ck} .

A Figura 17 mostra uma tendência de diminuição dos custos à medida que a resistência à compressão do concreto aumenta, destacando o f_{ck} de 40 MPa como o mais econômico. A exceção ocorre em 45 MPa, onde o custo total apresenta um leve aumento devido aos custos

mais elevados de aço e concreto. A análise revelou uma economia de mais de 7% no custo total para o f_{ck} de 40 MPa em comparação ao f_{ck} de 20 MPa, com a viga de 450 cm mostrando a maior redução de custos (8,5%) e a de 350 cm a menor (7,69%).

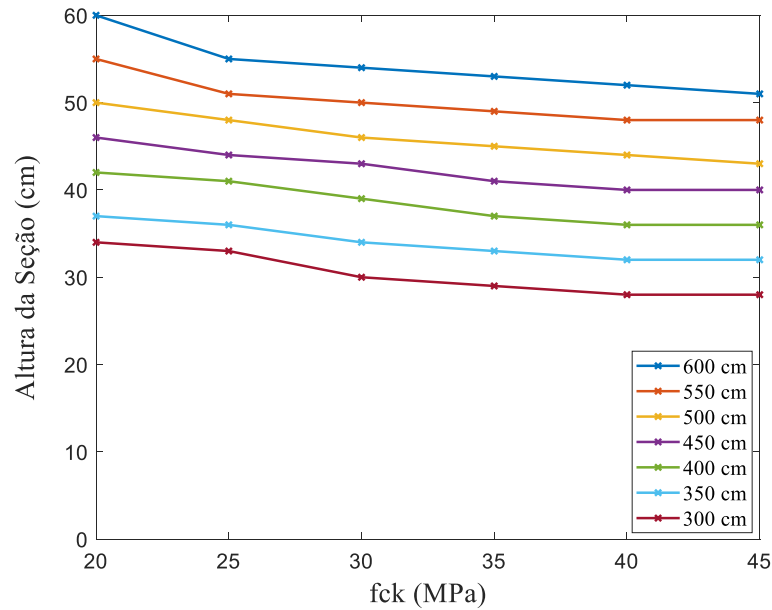
Figura 17- Otimização do custo total em função do f_{ck} .



Fonte: Autor (2024).

A Figura 18 destaca que a altura da viga decresce com o aumento do f_{ck} e com a redução do comprimento da viga. Essa diminuição resulta em uma diminuição no custo de forma, uma vez que esse custo é proporcional à altura da seção transversal. Este estudo conclui que elevações no f_{ck} favorecem uma redução na altura da seção transversal de vigas de concreto armado, impactando diretamente na economia do custo total.

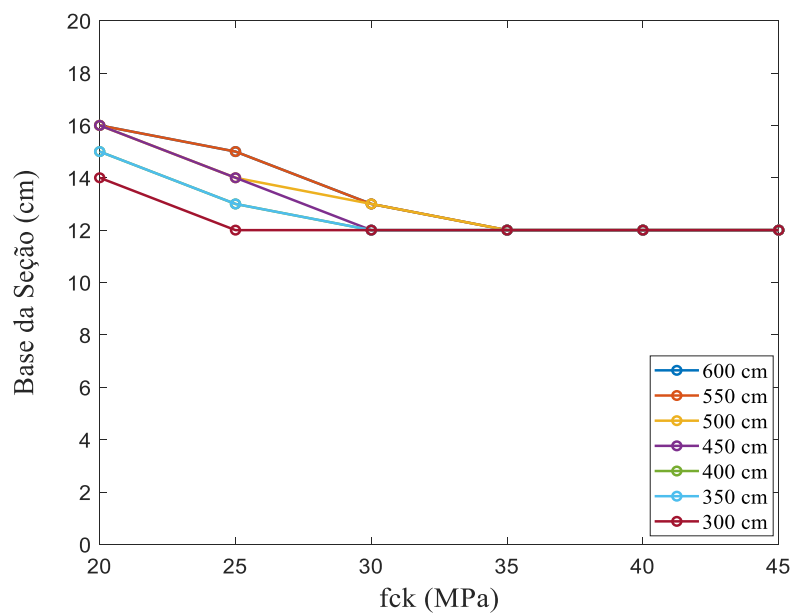
Figura 18- Otimização da altura da seção em função do f_{ck} .



Fonte: Autor (2024).

A Figura 19 apresenta um padrão decrescente para a base da seção transversal das vigas à medida que a resistência à compressão do concreto aumenta. Após atingir um f_{ck} de 35 MPa, a base se estabiliza em 12 cm. O maior valor registrado para a base da seção, 16 cm, ocorre no f_{ck} de 20 MPa. Vale ressaltar que, para vigas de comprimento 350 e 400 cm, assim como para as de 550 e 600 cm, os valores da base se mantêm iguais.

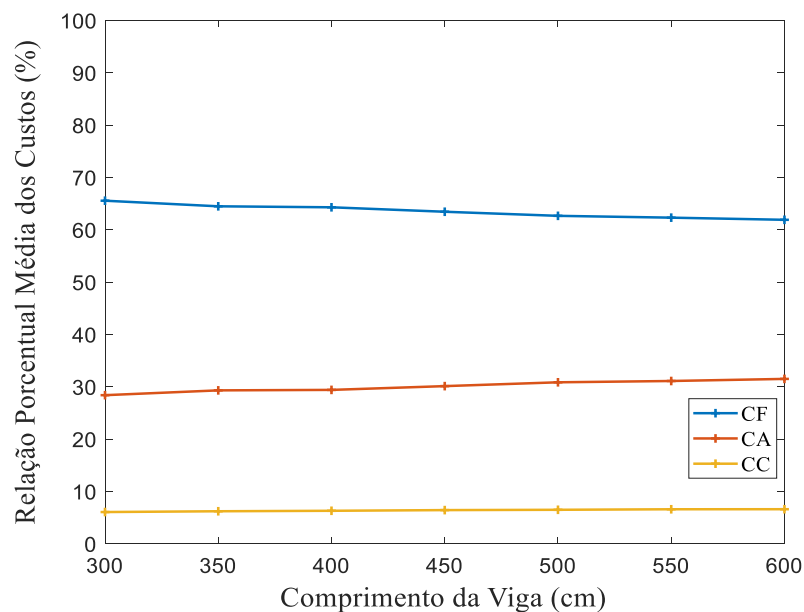
Figura 19- Otimização da base da seção em função do f_{ck} .



Fonte: Autor (2024).

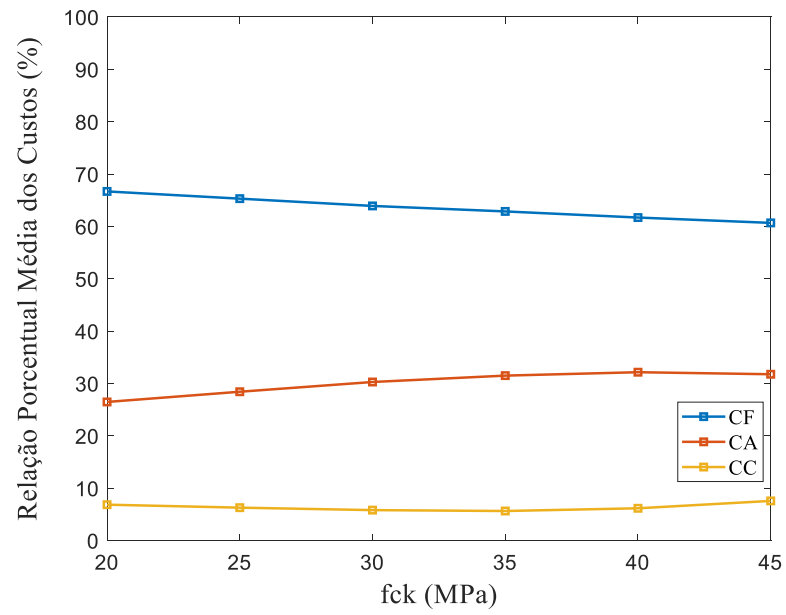
A Figura 20 revela que o custo médio da forma (CF) diminui levemente com o aumento do comprimento das vigas, enquanto os custos percentuais médios de aço e volume de concreto crescem levemente. Esse fenômeno indica que o comprimento da viga exerce influência sobre os custos, apesar de uma carga distribuída constante. As variações no peso próprio e no comprimento da viga contribuem para um aumento no momento fletor, afetando diretamente a base e a altura da seção como as variáveis mais sensíveis no projeto estrutural.

Figura 20 - Relação percentual média dos custos das parcelas em função do comprimento da viga.



Fonte: Autor (2024).

A análise da Figura 21 indica que o custo médio da forma (CF) reduz com o aumento do f_{ck} , enquanto o custo médio do aço (CA) aumenta. Observa-se que, a partir do f_{ck} de 35 MPa, o custo médio do volume de concreto (CC) também começa a se elevar. Essa tendência sugere que o f_{ck} exerce relativa influência nos custos, superando o impacto do comprimento da viga. À medida que o f_{ck} aumenta, observa-se uma diminuição no custo total (CT), com o custo de aço (CA) apresentando o maior aumento percentual, contrastando com a significativa redução percentual do custo de forma (CF).

Figura 21- Relação porcentual média dos custos das parcelas em função do f_{ck} .

Fonte: Autor (2024).

6 CONCLUSÃO

Este estudo analisou a otimização de vigas retangulares de concreto armado sob flexão simples. Para isso, foi realizada uma revisão na literatura sobre a otimização estrutural, e sua metodologia básica foi implementada através do Excel Solver disponibilizado pelo *software Microsoft Excel*. Observou-se que a definição precisa das variáveis de projeto, nesse caso, as dimensões da base e da altura da seção transversal da viga, juntamente com a armadura de compressão e a armadura tracionada, constituía um ponto importante para a formulação do problema de otimização. A função objetivo buscou minimizar o volume da estrutura para alcançar soluções que não apenas atendam aos requisitos de segurança, mas também promovam a eficiência material e econômica.

Os resultados obtidos neste trabalho ilustram a importância de uma abordagem fundamentada na otimização estrutural. Foi constatado que a altura da seção transversal (h) da viga é mais sensível às variações de carga e comprimento do que a base da seção (b), que se manteve relativamente constante. Isso indica que a altura da seção desempenha um papel importante na otimização da viga, especialmente em relação ao custo e ao desempenho estrutural.

Verificou-se ainda, um aumento no custo total da viga com o incremento do carregamento distribuído e do comprimento da viga. Esse aumento está diretamente relacionado ao crescimento do momento fletor, exigindo uma maior área de aço (A_s) e, conseqüentemente, um aumento na contraflecha para satisfazer os limites de deflexão estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2023).

Identificou-se também, um incremento percentual no custo do aço e uma ligeira elevação no custo percentual do concreto com o aumento do carregamento, enquanto o custo percentual da forma tende a diminuir. O custo de forma mostrou ser uma parcela significativa do custo total, especialmente em cenários de cargas e vãos maiores. A possibilidade de redução desses custos por meio da reutilização da madeira compensada é uma variável importante que poderia influenciar futuras otimizações, apesar de não ter sido explorada neste estudo. Os resultados obtidos demonstram as relações entre as variáveis estruturais, o comprimento da viga, o carregamento e o f_{ck} , oferecendo uma visualização direta do impacto dessas variáveis na otimização estrutural.

A aplicação desta metodologia em uma ferramenta acessível, como o Excel Solver, destaca sua viabilidade prática e o potencial para aplicação em projetos de engenharia estrutural.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Tendo em vista os resultados alcançados e as lacunas identificadas na otimização estrutural de vigas biapoiadas em concreto armado, sugere-se como objetivo para trabalhos futuros:

- Investigar a otimização estrutural de vigas em concreto armado, com foco particular na integração de considerações de sustentabilidade e análise de ciclo de vida dos materiais;
- Implementar e comparar diferentes métodos de otimização, para determinar abordagens mais eficazes e eficientes no projeto estrutural;
- Considerar a reutilização de formas na redução de custos e no impacto ambiental dos projetos de vigas em concreto armado que poderia fornecer contribuições significativas para a engenharia sustentável;
- Considerar o emprego de vigas contínuas devido à sua ampla utilização nas estruturas de concreto armado, e também outros tipos de vinculações de apoio;
- Melhorar a formulação do problema de otimização, com base nas conclusões apresentadas neste estudo.

REFERÊNCIAS

- AHMED, Noha; ABDEL-HAMID, M.; ABD EI-RAZIK, M. M.; EL-DASH, K. M. Impact of sustainable design in the construction sector on climate change. **Ain Shams Engineering Journal**, v. 12, n. 2, p. 1375-1383, 2021. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2090447920302446>. Acesso em: 11 maio 2024
- ANGELIN, Andressa Fernanda; BENTO, Ricardo Couceiro; GAVIOLI, Letícia Missiatto; ROSSIGNOLO, João Adriano. Life cycle assessment application in the optimum design of reinforced concrete structures. **Ambiente Construído**, v. 23, p. 187-202, 2023. Disponível: <https://www.scielo.br/j/ac/a/x6vxWdvJk8p7jn6PqHBGVfF/#>. Acesso em: 11 maio 2024.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, **NBR 6118**. Rio de Janeiro, ABNT, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, **NBR 6118**. Rio de Janeiro, ABNT, 2023.
- BASTOS, PAULO SÉRGIO DOS SANTOS. **Flexão normal simples–vigas**. Universidade Estadual Paulista. Bauru, 2023. Disponível em: <https://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/FlexaoSimples.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2024.
- BASTOS, Erich A. **Otimização de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexo-compressão oblíqua utilizando algoritmos genéticos**. 2004. 168 f. 2004. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/pt/dissertacoes-de-mestrado/104-msc-pt-2004/1933-erich-araujo-bastos>. Acesso em: 11 jan. 2024.
- BEZERRA, Lays Aguiar. **Emprego de algoritmos genéticos para otimização de vigas de concreto armado**. 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29897>. Acesso em: 11 jan. 2024.
- BAZZO, Walter Antonio; PEREIRA, Luiz Teixeira do Vale. **Introdução à Engenharia: conceitos, ferramentas e comportamentos**. 2. ed. Florianópolis: Edufsc, 2006.
- BRASIL, R. M. L. R. F.; SILVA, M. A. da. **Otimização de projetos de engenharia**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 09 jan. 2024.
- CARMO, L. C. D. Notas de aula – Estruturas de concreto armado I. ENG 2004 – **Escola de Engenharia**. Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC-GO, Goiânia, 2017.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 4. ed. São Carlos: Edufscar, 2014, p.415.
- CARPENTIER, J.; ABADIE, J. **Généralisation de la Méthode du Gradient Réduit de**

Wolfe au cas des Contraintes Non Lineaires IV International Conference on Operational Research. **Anais... In: PROCEEDINGS OF ... OPERATIONS RESEARCH SOCIETY OF AMERICA**. New York: D. B. Herts and J. Melese, 1966.

CHAPRA, C. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. Porto Alegre: AMGH, 2011.

CORREIA, Rubens Silva. **Otimização de vigas de concreto armado, utilizando a ferramenta solver**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso.

CORREIA, Rubens Silva. **Avaliação da confiabilidade de vigas otimizadas de concreto armado**. 2020. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/39598>. Acesso em: 12 jan. 2024.

CORREIA, Rubens Silva; BONO, Giuliana Furtado Franca; BONO, Gustavo. Otimização de vigas de concreto armado utilizando a ferramenta Solver. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 12, p. 910-931, 2019.

ESTÊVÃO, João Manuel Carvalho; JESUS, Mário. **Aplicação de algoritmos genéticos na otimização de secções de vigas de betão armado**. 2004. Disponível em: <https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/150/1/ESTAp1.pdf>. Acesso: 13 jan. 2024.

FERNANDES, Christiano Michel; MELO, Pedro Henrique Pedrosa de; PEREIRA, Ruvier Rodrigues. Otimização estrutural de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples, p. 317 -332. In: **Tecnologias em pesquisa: engenharias**. São Paulo: Blucher, 2017. Disponível em: <https://openaccess.blucher.com.br/article-details/otimizao-estrutural-de-vigas-de-concreto-armado-submetidas-flexo-simples-20380>. Acesso em 13 jan. 2024.

FEDGHOUCHE, Ferhat; TILIOUINE, Boualem. Minimum cost design of reinforced concrete T-beams at ultimate loads using Eurocode2. **Engineering Structures**, v. 42, p. 43-50, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0141029612001940?via%3Dihub>. Acesso em: 20 mar. 2024.

FRAGA, José Luís Tolotti; KRIKPA, M. Projeto Estrutural de Vigas de Concreto Armado visando a Minimização do Impacto Ambiental. **Revista de Engenharia e Tecnologia**, v. 7, n. 1, p. 123-131, 2015. Disponível em: <https://revistas.uepg.br/index.php/ret/article/download/11389/209209209355/209209209904>. Acesso em: 15 jan. 2024.

FRIEL, Leroy L. Optimum singly reinforced concrete sections. In: **Journal Proceedings**. 1974. p. 556-558. Disponível em: <https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal.aspx?m=details&ID=7087>. Acesso em: 13 jan. 2024.

FRONTLINE SOLVERS. **Excel Solver Help**. Disponível em: <https://www.solver.com/excel-solver-algorithms-and-methods-used>. Acesso em: 06 fev. 2024.

GENTLE, James E.; HÄRDLE, Wolfgang K.; MORI, Yuichi. **Handbook of Computational Statistics: Concepts and Methods**. Springer, 2012.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

LACERDA, Estéfane G. M.; CARVALHO, André Carlos P. L. F. Introdução aos algoritmos genéticos. **Sistemas inteligentes: aplicações a recursos hídricos e ciências ambientais**, v. 1, p. 99-148, 1999.

LASDON, L. S.; WAREN, A. D.; JAIN, A.; RATNER, M. Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 4, n. 1, p. 34-50, 1978. Disponível em: <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/355769.355773>. Acesso em: 05 jan. 2024.

LIMA, Heitor Maciel; LARANJEIRA, Nathan Alecrim; JUNIOR, Wanderlei Malaquias Pereira; PEREIRA, Robson Lopes. Otimização de vigas de concreto armado pelo método gradiente reduzido generalizado e algoritmo genético. *In*: PITUBA, José Julio de Cerqueira; STOPPA, Marcelo H.; COSTA, Vaston Gonçalves (org.). **TECNOLOGIAS EM PESQUISA: CIÊNCIAS EXATAS E CIÊNCIAS BIOLÓGICAS**. São Paulo: Paco Editorial, 2018. v. 2, cap. 22, p. 367-385.

LOBATO, Fran Sérgio. **Multi-objective optimization for engineering system design**. 2008. 402 f. Tese (Doutorado em Engenharias) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2008. Disponível em: <https://repositorio-dev.ufu.br/handle/123456789/14677>. Acesso em: 05 jan. 2024.

MAIA, João Paulo Ribeiro. **Otimização estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta solver**. 2009. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-15102009-171151/>. Acesso em: 21 jan. 2024.

MEDEIROS, G. F. de; KRIPKA, M. ALGUMAS APLICAÇÕES DE MÉTODOS HEURÍSTICOS NA OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS. **Revista CIATEC-UPF**, [S. l.], v. 4, n. 1, p. 19-32, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5335/ciatec.v4i1.2264>. Acesso em: 08 jan. 2024.

NASCIMENTO, Kaike Manoel Barros do. **Dimensionamento otimizado de pilares de concreto armado utilizando algoritmos genéticos**. 2017. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29895>. Acesso em: 12 jan. 2024.

ORSE - **Orçamentos de obra de Sergipe. Atualização da base de dados de novembro de 2023**. Disponível em: <http://orse.cehop.se.gov.br/insumosargumento.asp>. Acesso em: 22 jan. 2024.

PAGNUSSAT, Rodrigo. **Otimização dos custos de Vigas de Concreto Armado**: 2008. Trabalho de Conclusão de Curso – Faculdade de Engenharia e Arquitetura da Universidade de Passo Fundo, Universidade de Passo Fundo, 2008.

PINHEIRO, Libânio M. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios**, p. 222-230, 2007.

PIRES, Susana de Lima. **Otimização por algoritmos genéticos de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua.** 2014. Tese de Doutorado. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2014.940805>. Acesso em: 08 jan. 2024.

RAJU, P. Markandeya; MANASA, A.; ROHINI, G. Cost optimization of a rectangular singly reinforced concrete beam by Generalized Reduced Gradient method. In: **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**. IOP Publishing, 2021. p. 012005. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1025/1/012005/meta>. Acesso em: 18 mar. 2024

RAO, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 2009. Disponível em: <https://industri.fatek.unpatti.ac.id/wp-content/uploads/2019/03/018-Engineering-Optimization-Theory-and-Practice-Singiresu-S.-Rao-Edisi-4-2009.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2024.

ROSA FILHO, Wilson Tadeu. **Otimização de pórtico plano de concreto armado utilizando algoritmo genético e processo iterativo.** 2015. 1 recurso online (175 p.) Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Campinas, SP. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1626300>. Acesso em: 06 fev. 2024.

SACOMAN, Marco Antônio Rahal. Otimização de projetos utilizando GRG, Solver e Excel. In: **XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia.** 2012.

SINAPI - **Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil.** Disponível em: https://www.caixa.gov.br/site/paginas/downloads.aspx#categoria_670. Acesso em: 22 jan. 2024.

SCHMIT, Lucien A. Structural design by systematic synthesis. In: **Proceedings of the Second National Conference on Electronic Computation, ASCE**, New York, 1960. Disponível em: <https://www.vrand.com/resources/publications/archive/structural-design-by-systematic-synthesis/>. Acesso em: 18 mar. 2024.

SHAMIR, Ron. The efficiency of the simplex method: a survey. **Management science**, v. 33, n. 3, p. 301-334, 1987. Disponível em: <https://doi.org/10.1287/mnsc.33.3.301>. Acesso em: 26 jan. 2024.

VANDERPLAATS, Garret N. Thirty years of modern structural optimization. **Advances in Engineering Software**, v. 16, n. 2, p. 81-88, 1993.

VITORIO JUNIOR, P. C. ; MARTINS, C. H. . **Aplicação do Algoritmo de Formigas na Otimização de Vigas de Concreto Armado.** In: VIII Encontro Tecnológico da Engenharia Civil e Arquitetura, 2011, Maringá. Anais do Encontro Tecnológico da Engenharia Civil e Arquitetura, 2011. Disponível em: <http://rdu.unicesumar.edu.br/handle/123456789/5671>. Acesso em: 18 mar. 2024.

WOLFE, P. Methods of nonlinear programming. In: **Recent advances in mathematical programming**, pages 67–86. McGraw-Hill, New York, 1963.

YANG, Xin-She. **Engineering optimization: an introduction with metaheuristic applications**. John Wiley & Sons, 2010.

YENIAY, Ozgur. A comparative study on optimization methods for the constrained nonlinear programming problems. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2005, p. 165-173, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/MPE.2005.165>. Acesso em: 27 jan. 2024.