UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSEPH ANTHONY DOS SANTOS LIMA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO USO DO GEOGEBRA: FUNÇÕES

Maceió – AL

2024

JOSEPH ANTHONY DOS SANTOS LIMA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO USO DO GEOGEBRA: FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa.

Maceió – AL

2024

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Jone Sidney A. de Oliveira – CRB-4 – 1485

L732s Lima, Joseph Anthony dos Santos.
Sequência didática do uso do geogebra: funções / Joseph Anthony dos Santos Lima. - 2024.
37 f. : il.

Orientadora: Isnaldo Isaac Barbosa .
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 37.

1. Geogebra. 2. Sequências Didática - Matemática. 3. Ferramenta - Metodologia. 4. Funções. I. Título.

CDU: 514.76

JOSEPH ANTHONY DOS SANTOS LIMA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO USO DO GEOGEBRA: FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à banca examinadora, referendada pela Comissão de TCC do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, e aprovado em 03 de abril de 2024.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
ISNALDO ISAAC BARBOSA
Data: 07/05/2024 10:42:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

UFAL (Orientador)

Documento assinado digitalmente
THAYS RAYANA SANTOS DE CARVALHO
Data: 06/05/2024 13:46:25-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Thays Rayana Santos de Carvalho

UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
SARAH JANE SOUZA DA SILVA
Data: 06/05/2024 12:25:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Ms.

IFSC (Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade e pela realização de um sonho por se formar em uma Universidade Federal.

A minha família, principalmente minha mãe Elizabete, por todas as lutas que teve pela subsistência e futuro dos filhos, por me apoiar e incentivar em todo meu trajeto acadêmico.

A minha namorada Francelina Lopes por ter me acompanhado nessa jornada acadêmica.

Ao Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa, pelas orientações, por ter me dado os ensinamentos, motivação e disposição para realizar meu trabalho de conclusão de curso.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma Sequência Didática no Ensino de Funções Afim e Quadrática no Ensino Médio, utilizando o Software GeoGebra para representação, modelagem e visualização numérica, algébrica e gráfica. Analisando as características das funções como, domínio, imagem, comportamento crescente e decrescente, zeros, máximo e mínimo. Com este projeto, pretendemos contribuir com sugestões de atividades, assim, os alunos do Ensino Médio poderão apresentar um aumento de compreensão teórica e prática, consequentemente, melhor desempenho escolar com esta nova abordagem de ensino baseada na tecnologia e no cotidiano.

Palavras-chaves: Funções, GeoGebra, Ensino de Matemática, Sequência Didática, Ferramenta Metodológica

ABSTRACT

This work aims to present a Didactic Sequence for Teaching Affine and Quadratic Functions in High School, using GeoGebra Software for numerical, algebraic and graphic representation, modeling and visualization. Analyzing the characteristics of functions such as domain, image, increasing and decreasing behavior, zeros, maximum and minimum. With this project, we intend to contribute with suggestions for activities, so that high school students will be able to present an increase in theoretical and practical understanding, consequently, better academic performance with this new teaching approach based on technology and everyday life.

Keywords: Functions, GeoGebra, Mathematics Teaching, Didactic Sequence, Methodological Tool

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é propor uma Sequência Didática com o uso do GeoGebra para o estudo de funções, com foco em Função Afim e Função Quadrática. O propósito é desenvolver habilidades como reconhecer as funções e suas representações numérica, algébrica e gráfica, além de analisar as características das funções, como domínio, imagem, comportamento crescente, decrescente, zeros, máximo e mínimo. Conforme definido por Zabala(1998), uma Sequência Didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18). Nesse sentido, a organização dos conteúdos, a seleção de um recurso didático, a elaboração de uma atividade, ou seja, as estratégias didáticas empregadas pelos professores, podem contribuir significativamente para a prática docente.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular de 2018,

> Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada. A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores (BRASIL, 2018, p. 276).

Assim, a proposta dessa Sequência Didáticas é ensinar os conteúdos, etapa por etapa, e organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar. Essas etapas envolvem atividades de aprendizagem e avaliação, permitindo que o professor intervenha nas atividades elaboradas e resolva problemas que envolvam situações reais ou hipotéticas que possam ser modeladas por funções, facilitando assim o processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, nosso trabalho foi subdividido em introdução, uma retrospectiva histórica das funções, o papel da tecnologia no Ensino da Matemática, a apresentação do software GeoGebra e uma sequência didática para o ensino de funções com o uso do GeoGebra utilizando as aplicações do GeoGebra nas Funções Afim e Quadrática, assim trazemos algumas sugestões de atividades que abordam a representação, modelagem e visualização numérica, algébrica e gráfica, dessa forma, analisando as características das funções como, domínio, imagem, comportamento crescente e decrescente, zeros, máximo e mínimo.

2. HISTÓRIA

A Matemática é uma ciência que evoluiu consideravelmente ao longo da história, partindo de conceitos simples relacionados a números, medidas e figuras. Esses conceitos foram posteriormente superados por diversas áreas da Matemática que se desenvolveram ao longo do tempo. Conforme observado por Boyer (2012), houve um período em que se acreditava que a Matemática estava limitada ao mundo tangível, perceptível pelos sentidos. Foi apenas no século XIX que a Matemática pura se desvinculou das observações da natureza. No entanto, é evidente que a Matemática surgiu como uma necessidade da vida cotidiana do homem e não foi resultado do trabalho de um único indivíduo, mas sim de um progresso gradual ao longo do tempo.

Uma das áreas mais relevantes da matemática é o conceito de função. Embora formalizado por Galileu Galilei (1564- 1642), em sua busca por explicar os fenômenos e regularidades observadas, a função já existia desde os primórdios da história humana. Por exemplo, no processo de contagem de animais, estabelecia-se uma relação de dependência entre variáveis como o conjunto de animais e o conjunto de pedras, associando "uma pedra para cada animal". Além disso, outros matemáticos, filósofos e astrônomos anteriores a Galileu, como Cláudio Ptolomeu e Arquimedes, também possuíam noções de funções em seus estudos.

O conceito de função foi aprimorado após Galileu Galilei, com as contribuições de vários matemáticos, como Isaac Newton (1642-1727), Johann Bernoulli (1667-1748), matemático suíço, Leonhard Euler (1707- 1783), René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). No entanto, o termo “função” foi cunhado pelo matemático Gottfried Leibniz (1646 - 716) em 1673.

Segundo, Boyer (1974, p.249 - 267) as contribuições de Descartes e Fermat, relacionando a Álgebra com a Geometria possibilitaram a criação de um sistema de coordenadas comumente conhecido como Plano Cartesiano, que consiste em dois eixos perpendiculares numerados e têm a propriedade de representar pontos no espaço. Além disso, é possível representar planos, retas, curvas e círculos por meio de equações matemáticas.

Isaac Newton realizou várias pesquisas relacionadas à física na área de cinemática utilizando a matemática. De acordo com Boyer (1974, p.287), sua contribuição foi o conceito de funções de séries infinitas, logo após, começou a pensar em taxa de variação ou fluxo de quantidades variáveis continuamente tais como comprimentos, áreas volumes, distância e temperatura. Assim, com consequência de seus estudos ele fez quatro descobertas o teorema binomial, o cálculo, lei da gravitação e a natureza das cores.

Gottfried Wihelm Leibniz nasceu em Leipzig em 1646, onde ingressou na universidade aos quinze anos e obteve o grau de bacharel aos dezessete. Ele estudou filosofia, direito e matemática. Segundo Boyer (1974, p.292 - 303), pode ser considerado o último sábio a alcançar o conhecimento universal pelo estudo em todas as áreas. Ele foi o matemático que criou o termo função, dando esse nome a quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva, ou seja, quantidades que dependiam de uma determinada variável. Ele também foi o responsável por introduzir os termos constante, variável e parâmetro.

O conceito de função foi desenvolvido por vários matemáticos ao longo da história, cada um trazendo novas perspectivas e aplicações. Um dos primeiros a contribuir foi Leonhard Euler, que usou como exemplo uma função com raízes quadradas e introduziu a notação $f(x)$ para uma função de x, que foi proposta por Johann Bernoulli. Euler não se preocupava com a unicidade do valor da função, não se falava domínio ou contradomínio, e só considerava as funções contínuas. Para ele, a função era tanto a expressão analítica quanto a "curva traçada à mão livre", sem "cantos". Já século XVIII, o conceito de função passou por uma grande transformação por causa do "problema da corda vibrante". De acordo com Boyer (2012, p.318) o filósofo D´Alambert (1717 – 1783), ao estudar o problema das cordas vibrantes, ele foi levado à equação diferencial parcial $\frac{\partial \partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, para qual 1747 apresentou uma solução $u = f(x+t) + g(x-t)$, onde f e g são funções arbitrárias.

No século XX, no movimento chamado Matemática Moderna, que se baseava na Teoria dos Conjuntos e na Álgebra para o ensino da matemática, criada pelo matemático Georg Cantor (1845-1918), a definição de função dada por Dirichlet foi modificada por um grupo de matemáticos franceses conhecido como Bourbaki, que buscava dar mais rigor à matemática. Essa definição é a que usamos atualmente. É importante destacar que o conceito de função foi sendo aprimorado por vários matemáticos, e que ele tem grande relevância em diversas áreas do conhecimento científico.

3. A TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

3.1. O Ensino da Matemática abordando o Uso de Novas Tecnologias

A definição para o termo ‘tecnologia’, apresenta diferentes conotações e diversas formas de interpretação. Etimologicamente, a palavra tecnologia é de origem grega e em português significa, “a razão do saber fazer” (RODRIGUES, 2001). É importante salientar que, pensar em tecnologia, é fundamental para entender seu papel em nossa sociedade e como ela impacta nossas vidas de várias maneiras. Ela é um reflexo da nossa busca incessante por inovação, conveniência e progresso. Pensar em tecnologia é mergulhar em um reino de possibilidades, complexidades e desafios.

A matemática é uma ciência que está presente em diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana, onde contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico, crítico e criativo dos indivíduos. Assim, o ensino da matemática é fundamental para a formação de cidadãos capazes de compreender e transformar a realidade. Dessa forma, o ensino da matemática enfrenta diversos desafios, como a falta de interesse e de motivação dos alunos, a dificuldade de compreensão e de aplicação dos conceitos, a distância entre a teoria e a prática, entre outros.

No entanto, D´Ambrosio (1986) chama atenção para o fato de que em muitas situações o aluno se mostra mais confortável com o uso de tecnologias como o uso do computador, celulares, tablets e softwares do que o próprio professor. Nesse contexto, o uso de novas tecnologias pode ser uma estratégia pedagógica que visa superar esses obstáculos e melhorar o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Esses recursos podem oferecer diversas vantagens para o ensino da matemática, como aumentar o interesse e a motivação dos alunos, tornando as aulas mais divertidas, atrativas e dinâmicas, facilitando a interpretação e a visualização dos conteúdos matemáticos, por meio de representações gráficas, animações, simulações, também proporcionando a exploração, estimulando o raciocínio lógico e a criatividade dos alunos.

Portanto, o uso de novas tecnologias no ensino da Matemática é uma prática que pode trazer muitos benefícios, mas que também exige planejamento, preparação e acompanhamento por parte dos professores. Não basta apenas inserir os recursos tecnológicos nas aulas, é preciso integrá-los ao projeto pedagógico, ao conteúdo matemático e à realidade dos alunos, de forma que eles sejam meios e não fins para o ensino da Matemática.

3.2. Ensino de Funções no Ensino Médio

O ensino de funções no Ensino Médio é um dos tópicos mais importantes da Matemática, pois envolve a relação entre grandezas que variam de acordo com diferentes situações. As funções permitem expressar, analisar e modelar fenômenos naturais, sociais, econômicos e científicos, utilizando a linguagem algébrica e gráfica.

No entanto, muitos alunos apresentam dificuldades para compreender e aplicar o conceito de função, seja pela falta de conexão com a sua realidade, seja pela abordagem tradicional e formalista que privilegia as manipulações algébricas e as fórmulas prontas. Por isso, é necessário buscar novas metodologias e estratégias para o ensino e a aprendizagem de funções, que sejam mais significativas, dinâmicas e contextualizadas.

Assim,

> as funções tem um papel representativo nos temas abordados na educação básica, observando várias situações do nosso dia a dia, percebe-se sua aplicabilidade direta e indiretamente na resolução de várias situações que nos cercam, portanto, tal conteúdo merece um especial destaque em nossa prática pedagógica(SIQUEIRA; CAETANO, 2016, p. 4).

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe algumas mudanças para o currículo de Matemática no Ensino Médio, que visam desenvolver as competências e habilidades dos alunos, bem como ampliar os seus conhecimentos matemáticos. Uma das mudanças é a inclusão de novos conteúdos relacionados ao conceito de função, como vetores e transformações lineares, que podem enriquecer as aplicações e as conexões com outras áreas da Matemática e das ciências.

Além disso, a BNCC sugere que o ensino de funções seja organizado em torno de temas que possibilitem a articulação lógica das ideias e dos conteúdos matemáticos, com relevância científica e cultural.

HABILIDADES 1 - Quadro 1

(EM13MAT302)	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$
(EM13MAT503)	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Esses temas são: números e funções; geometria e medidas; análise de dados. Dentro de cada tema, há uma série de objetivos específicos que orientam o trabalho do professor e do aluno.

Outra possibilidade para o ensino de funções é o uso de metodologias ativas, que envolvem a participação ativa do aluno na construção do seu conhecimento, por meio de atividades investigativas, resolução de problemas, uso de tecnologias, projetos interdisciplinares, entre outras. Essas metodologias estimulam o raciocínio, a criatividade, a autonomia e a colaboração dos alunos, além de favorecerem a compreensão dos conceitos e das propriedades das funções.

Portanto, é importante destacar que o ensino de funções no Ensino Médio deve ser planejado e desenvolvido de forma a atender às necessidades e aos interesses dos alunos, considerando os seus conhecimentos prévios, as suas dificuldades e as suas potencialidades. O professor deve ser um mediador do processo de ensino e aprendizagem, propondo tarefas desafiadoras, diversificadas e contextualizadas, que promovam a reflexão, a comunicação e a argumentação matemática dos alunos. Assim, o ensino de funções pode se tornar mais atraente, significativo e eficaz.

3.3. O GeoGebra

Segundo o site oficial do programa www.geogebra.org, o GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Gráficos, Probabilidade, Estatística, Álgebra, Planilha de Cálculo e Cálculos Simbólicos em um único pacote, assim, ele se destacou como um líder na área de softwares de matemática dinâmica. O software é distribuído gratuitamente, em diversos idiomas para os milhões de usuários pelo mundo.

> O GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI (Interface Gráfica do Utilizador). É escrito em linguagem Java e sua distribuição é gratuita. Foi criado por Markus Hohenwarter, em 2001, na Universidade de Saltzburg, para ser utilizado em ambiente escolar. O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, entre outros, assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Ou seja, abrange geometria e álgebra (ROCHA, 2019, p. 35).

Assim o GeoGegra possui os seguintes aplicativos GeoGebra gratuitos: Calculadora Gráfica, 3D Calculator, Geometria, GeoGebra Clássico 6, Realidade Aumentada, GeoGebra Clássico 5, que podem ser baixados para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. Dessa forma, fazendo com que professore e estudantes possam baixar o software interativo educacional.

> O GeoGebra é um software de acesso livre, (pode-se utilizar, copiar e distribuir o aplicativo para fins não comerciais). Arquivos feitos em GeoGebra podem ser vistos através de app instalados, apps online ou mesmo incorporados a páginas da internet onde podem ser usados sem a necessidade da instalação do software (SILVA, 2019, p. 48).

O software é fácil de ser usado e nos traz grandes vantagens, possibilitando trabalho em laboratórios, pesquisas, investigação, criação de construções matemáticas. Dessa forma, professores e estudantes utilizam o GeoGebra em trabalhos e dissertações para conclusão de cursos, tendo a capacidade de aumentar o componente visual atribuindo um papel importante na formação de exibição matemática, assim permite a interação dos professores com os alunos, tornando-se uma ferramenta poderosa para o ensino da matemática.

3.4. De que forma o GeoGebra pode contribuir no Ensino de Funções

O GeoGebra é um software livre que integra geometria, álgebra e cálculo, permitindo a construção e manipulação de objetos matemáticos de forma dinâmica e interativa. O uso do GeoGebra no ensino de funções pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades e competências dos alunos, tais como: Compreender o conceito de função e suas diversas formas de representação; algébrica, gráfica, tabelar e verbal.

- Identificar e analisar as características e propriedades das principais funções estudadas no ensino médio: afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, etc.

- Resolver problemas envolvendo funções em diferentes contextos e situações reais, explorando suas aplicações e modelagens.

- Desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade, a autonomia, a criticidade e a comunicação matemática.

Para ilustrar como o GeoGebra pode auxiliar no ensino de funções, vamos apresentar algumas atividades que podem ser realizadas com o software, envolvendo as funções afim e quadrática.

- Função afim: O GeoGebra permite construir o gráfico de uma função afim a partir de sua expressão algébrica, ou vice-versa, e alterar os valores dos coeficientes linear e angular, observando como isso afeta o comportamento da função. Por exemplo, podemos explorar as noções de taxa de variação, coeficiente angular, coeficiente linear, raiz ou zero da função, domínio, imagem, comportamento crescente e decrescente, etc. Além disso, podemos utilizar o GeoGebra para resolver problemas que envolvem funções afim, como calcular o lucro ou o custo de uma empresa, a distância percorrida por um carro, a temperatura de um corpo, etc.

- Função quadrática: O GeoGebra permite construir o gráfico de uma função quadrática a partir de sua expressão algébrica, ou vice-versa, e alterar os valores dos coeficientes *a, b* e *c*, observando como isso afeta o comportamento da função. Por exemplo, podemos explorar as noções de concavidade, vértice, eixo de simetria, raízes ou zeros da função, domínio, imagem, comportamento crescente e decrescente, máximo, mínimo, etc. Além disso, podemos utilizar o GeoGebra para resolver problemas que envolvem funções quadráticas, como calcular a altura máxima ou o tempo de queda de um objeto lançado, a área máxima de um terreno etc.

Portanto, o GeoGebra é uma ferramenta que pode enriquecer o ensino de funções, tornando-o mais dinâmico, visual, interativo e contextualizado, favorecendo a aprendizagem significativa dos alunos e o desenvolvimento de suas competências matemáticas.

4. UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES COM O USO DO GEOGEBRA

Essa sequência didática foi pensada para ser realizada em duas etapas a primeira roteiro de construção e a segunda é a atividade proposta, dessa forma, segue a sequência didática, onde adotamos como definição de uma função f apenas a sua lei de formação $f(x)$. Desta forma, devido às atividades darem mais foco à lei da função, deixaremos de definir a função por sua forma completa e adotaremos a função apenas pela lei de formação $f(x)$ e consequentemente sua condição de existência de domínio.

4.1. Função Afim

Para que professores e alunos possam conhecer o conteúdo de função afim com suas definições, propriedades e exemplos, recomendamos um estudo na Coleção de Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1, do Gelson Iezzi, da Editora Atual (IEZZI; MURAKAMI, 1995, p.100).

Para uma análise mais profunda, com demonstrações, definições e caracterizações da função afim, recomendamos um estudo do Livro Números e Funções Reais, da Coleção PROFMAT, do Elon Lages Lima, da Sociedade Brasileira de Matemática(LIMA, 2013, p.79).

Definição 4.1 *Uma função* $f : R \to R$ *chama-se afim quando existem constantes a e* $b \in R$ *tais que* $f(x) = ax + b$ *para todo* $x \in R$.

DESAFIO PROPOSTO

Um atleta ao ser submetido a um determinado treino específico apresenta, ao longo do tempo, ganho de massa muscular. A função $P(t) = P_0 + 0{,}19\ t$, expressa o peso do atleta em função do tempo ao realizar esse treinamento, sendo P_0 o seu peso inicial e t o tempo em dias.

Considere um atleta que antes do treinamento apresentava 55 kg e que necessita chegar ao peso de 60 kg, em um mês. Fazendo unicamente esse treinamento, será possível alcançar o resultado esperado?

A seguir a sequência didática sugerida.

APLICANDO A FUNÇÃO AFIM

- **Duração**: Duração: 2 aulas (200 minutos).
- **Habilidades BNCC:**

  (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

  (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

  (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- **Pré-Requisitos:** Resolução de equações do 1º grau.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Computadores, projetor, lápis e folhas A4.
- **Organização da Turma:** A turma será organizada em duplas ou trios por computador.
- **Objetivo:** Desenvolver e identificar o comportamento de funções afins, do tipo $f(x) = ax + b$. Comparar os modelos gráficos obtidos, criticar os valores e sinais dos parâmetros e perceber as consequências da alteração dos parâmetros.
- **Metodologia Adotada:** Apresentação de situação-problema: Usar as questões como estímulo para aprendizagem da função polinomial do 1º grau.

Roteiro de construção da Função Afim

1º Passo: No campo de entrada selecione a letra **a** depois b, dessa forma foi adicionado os controles deslizantes **a** e **b**.

2º Passo: Com o botão direito do mouse clique em cima do controle deslizante **a** selecione configurações. Ao abrir a aba selecione controle deslizante em incremento coloque 1. Faça os mesmos passos no controle deslizante **b**.

3º Passo: No campo de entrada coloque a definição da Função Afim $f(x) = ax + b$ e depois aperta a tecla enter.

Durante o desenvolvimento do roteiro com a turma, após a realização dos passos 1, 2 e 3, foi solicitado aos estudantes que usassem os controles deslizantes "a" e "b" para que pudessem perceber o que aconteceria com o gráfico da função, bem como com os valores de "a" e "b", como pode ser observado nas figuras 1, 2, 3 e 4.

Utilizando o Software ou aplicativo GeoGebra responda a atividade abaixo

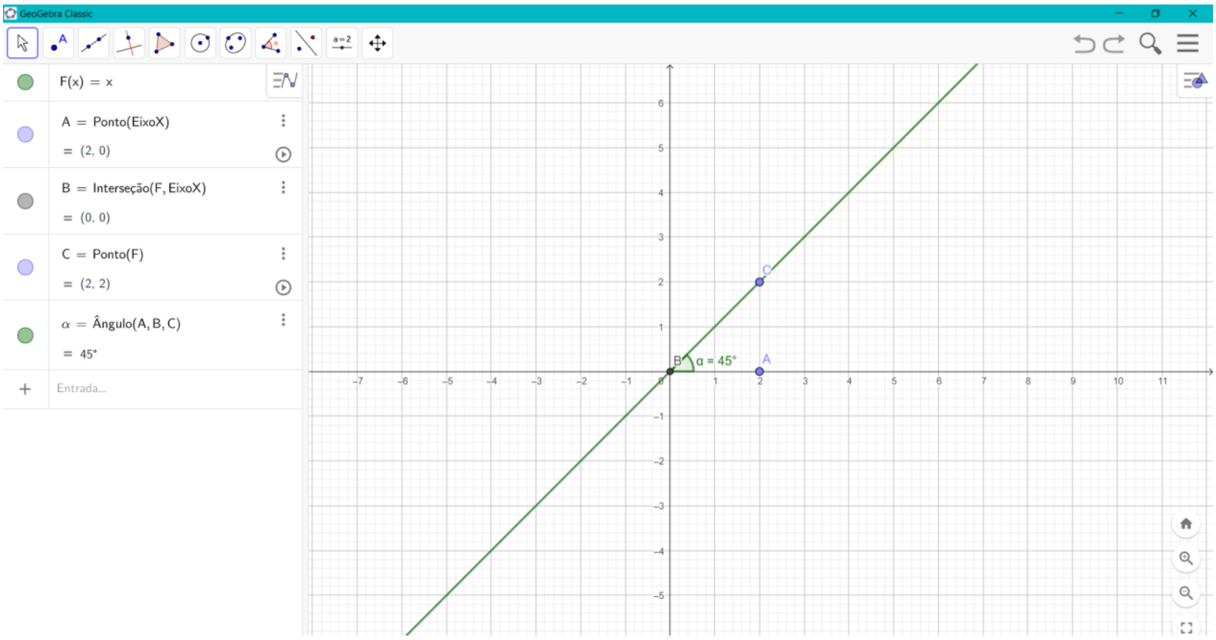
1. Desenhe um esboço gráfico da função definida por $f(x) = x$ e responda:

(a) Qual a raiz da função?

(b) Qual o conjunto imagem e domínio da função?

(c) Qual é o ângulo que a reta faz com o eixo x? O gráfico da função é crescente ou decrescente?

Figura 1 - Representação gráfica da construção da função afim 1



Fonte: Do Autor (2023)

Diante do que foi observado na figura 1, o estudante poderá perceber que a raiz da função é a origem, isto é, zero. Além disso, o conjunto imagem e domínio são os números Reais, e o ângulo formado é de 45º. Com o esboço do gráfico, pode-se observar que a função é crescente, pois o coeficiente angular é positivo, bem como a localização de pontos no plano cartesiano. Através do esboço do gráfico, os estudantes podem perceber que a função é uma função identidade, visto que as coordenadas x e y têm os mesmos valores para quaisquer pontos da função.

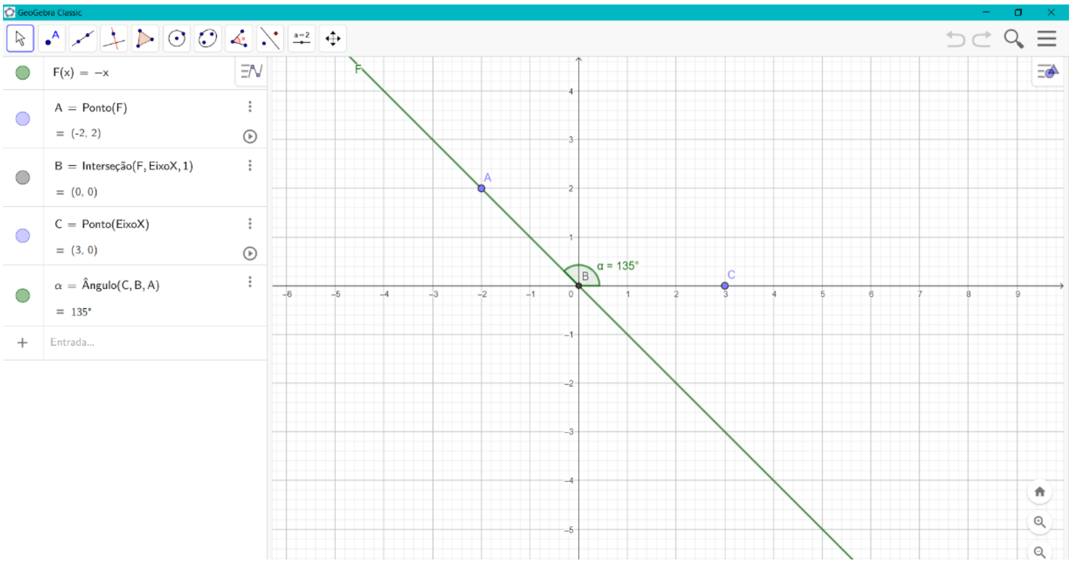
2. Desenhe um esboço gráfico da função definida por $f(x) = -x$ e responda:

(a) Qual a raiz da função?

(b) Qual o conjunto imagem e domínio da função?

(c) Qual é o ângulo que a reta faz com o eixo x? O gráfico da função é crescente ou decrescente?

Figura 2 - Representação gráfica da construção da função afim 2



Fonte: Do Autor (2023)

Diante do que foi observado na figura 2, o discente poderá perceber que a raiz da função é a origem, isto é, zero e que o conjunto imagem e domínio continua sendo os Reais e que o ângulo formado mudou, agora é de 135º. Com o esboço do gráfico os estudantes podem perceber que a função não é uma função identidade, pois as coordenadas x e y possuem valores diferentes para quaisquer pontos da função, além disso, notar que o gráfico vai cortar o eixo y no termo independente do da função., inclusive que a função é decrescente pois o coeficiente angular é negativo.

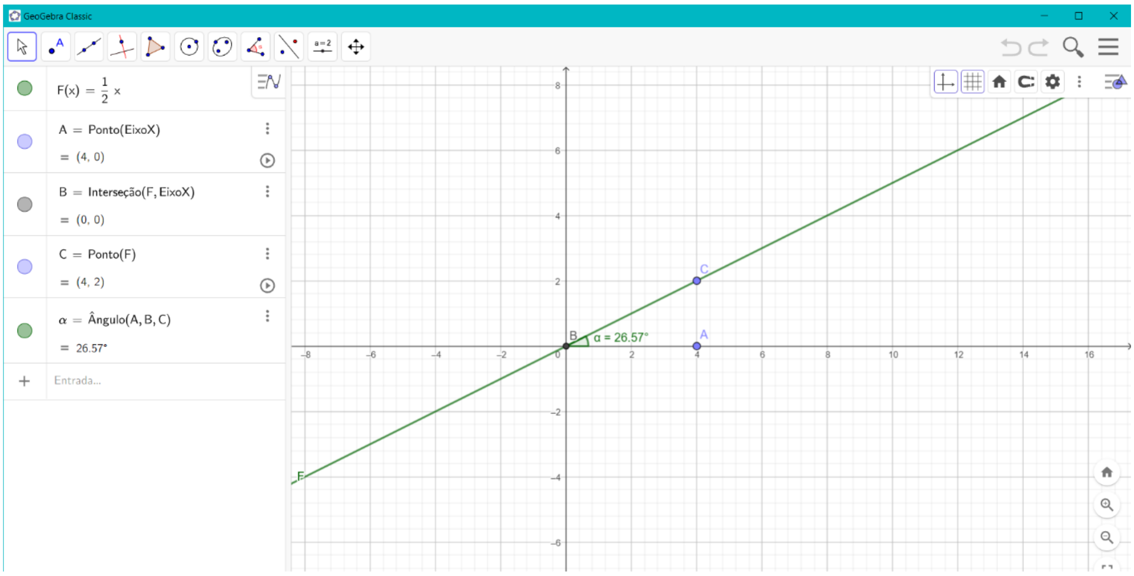
3. Faça um esboço gráfico da função definida por $f(x) = 3x$ e da função definida por $f(x) = \frac{1}{2}x$ e responda:

(a) Qual a raiz da função $f(x)$? E da função $g(x)$?

(b) Qual o conjunto imagem da função $f(x)$? E da função $g(x)$?

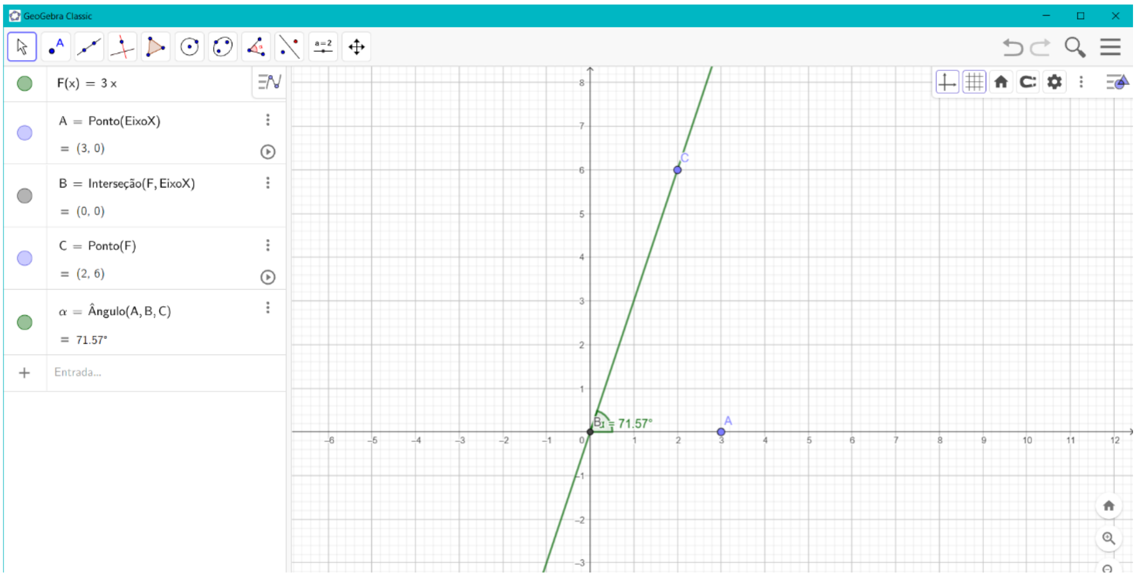
(c) Qual é o ângulo que a reta da função $f(x)$ faz com o eixo da abscissa? E da função $g(x)$? Compare os gráficos de cada função e faça comentários.

Figura 3 - Representação gráfica da construção da função afim 3



Fonte: Do Autor (2023)

Figura 4 - Representação gráfica da construção da função afim 4



Fonte: Do Autor (2023)

Conforme observado nas figuras 3 e 4, o discente poderá observar que as raízes das duas funções não mudam, pois continuam sendo zero. Pode-se perceber que o conjunto imagem e domínio das funções não foi alterado e continua sendo os números reais. No entanto, a inclinação da reta foi alterada: ao multiplicarmos x por um número entre 0 e 1, o ângulo diminui, fazendo com que a reta da função $f(x)$ se afaste do eixo y. Quando multiplicamos x por um número maior que 1, o ângulo aumenta e a reta da função $g(x)$ se aproxima do eixo y. É perceptível mediante a representação geométrica realizada no GeoGebra que as duas funções são crescentes. Após a realização do roteiro para a construção da função afim no GeoGebra, foi aplicada uma avaliação para identificar as contribuições do desenvolvimento dessa atividade para o ensino-aprendizagem dos alunos. A avaliação consistiu em questões abertas que permitiram aos alunos expressarem suas opiniões e percepções sobre a atividade realizada, bem como seu impacto em seu aprendizado de matemática.

4.2. Função Quadrática

Para que os docentes e alunos possam conhecer o conteúdo de função quadrática com suas definições, propriedades e exemplos, recomendamos um estudo na Coleção de Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 1, do Gelson Iezzi, da Editora Atual (IEZZI; MURAKAMI, 1995, p.138).

Para uma análise mais profunda, com definições, demonstrações e caracterizações da função quadrática, recomendamos um estudo do Livro Números e Funções Reais, da Coleção PROFMAT, do Elon Lages Lima, da Sociedade Brasileira de Matemática(LIMA, 2013, p.104).

Definição 4.2 *Uma função* $f : R \rightarrow R$ *chama-se quadrática quando são dados números Reais a, b, c com a ≠ 0, tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *para todo* $x \in R$.

DESAFIO PROPOSTO

Um goleiro chuta uma bola que descreve um arco de parábola, com a concavidade para baixo descrita pela função $F(x) = -x^2 + 6x$. Sabendo que sua altura máxima atingida pela bola é de 9 metros. Qual a lei de formação da função, para determinar o tempo que a bola levará para atingir o chão novamente?

APLICANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA

- **Tempo de Duração:** Duração: 2 aulas (200 minutos).
- **Habilidades BNCC:**

  (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

  (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

- **Pré-Requisitos:** Resolução de equações do 2º grau.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Computadores, projetor, lápis e folhas A4.
- **Organização da Turma:** A turma será organizada em duplas ou trios por computador.
- **Objetivo:** Desenvolver e identificar o comportamento de funções quadráticas, do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Comparar os modelos gráficos obtidos, criticar os valores e sinais dos parâmetros e perceber as consequências da alteração dos parâmetros.
- **Metodologia Adotada:** Apresentação de situação-problema: Usar as questões como estímulo para aprendizagem da função polinomial do 2º grau.

Roteiro de construção da Função Quadrática

1º Passo: No campo de entrada selecione a letra **a** depois **b** e **c**, dessa forma foi adicionado os controles deslizantes **a**, **b** e **c**.

2º Passo: Com o botão direito do mouse clique em cima do controle deslizante **a** selecione configurações. Ao abrir a aba selecione controle deslizante em incremento coloque 1. Faça os mesmos passos nos controles deslizantes **b** e **c**.

3º Passo: No campo de entrada coloque a definição da Função Quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4º Passo: No campo de entrada coloque a definição do X do vértice $X_v = -b/2a$.

5º Passo: No campo de entrada coloque a definição do Y do vértice $Y_v = -(b^2 - 4ac)/4a$.

Utilizando o Software ou aplicativo GeoGebra responda a atividade abaixo

1. Desenhe um esboço gráfico da função definida por $f(x) = x^2$ e responda:

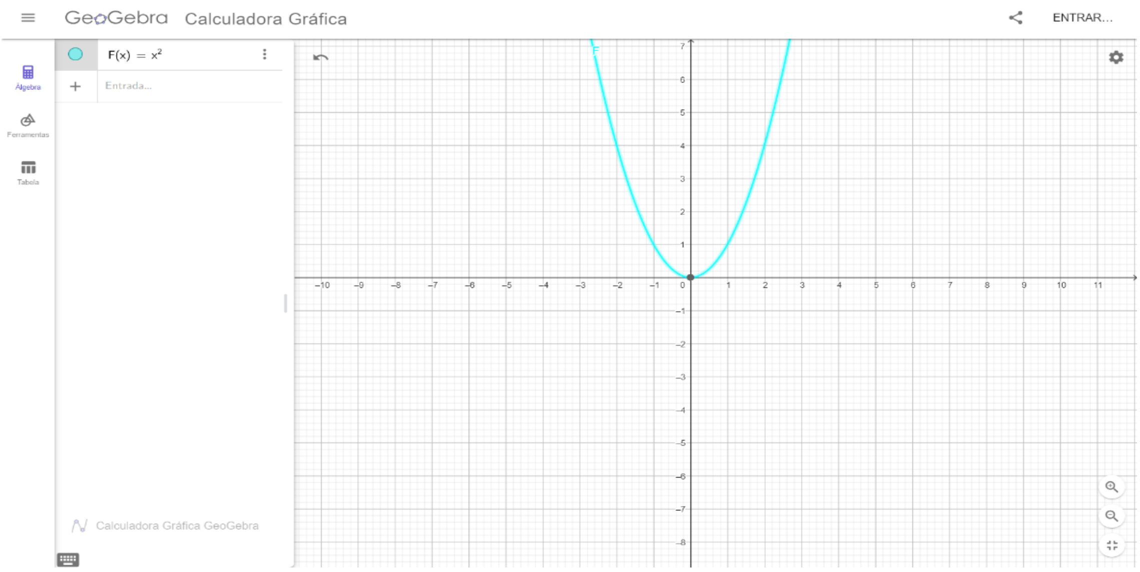
(a) Qual a raiz da função $f(x)$?

(b) Qual o conjunto imagem da função $f(x)$?

(c) Qual o ponto está localizado o vértice da parábola?

(d) Qual o sentido da concavidade da parábola?

Figura 5 - Representação gráfica da construção da função quadrática 5



Fonte: Do Autor (2023)

Diante do que foi observado na figura 5 o aluno poderá observar que o conjunto imagem $Im = [0, +\infty]$, onde a raiz é o zero, que a concavidade é voltada para cima e que o vértice da parábola está localizado na origem do plano cartesiano, ou seja, no ponto (0,0). O docente pode ressaltar que o eixo de simetria da parábola é o eixo y.

2. Desenhe um esboço gráfico da função definida por $f(x) = -x^2$ e responda:

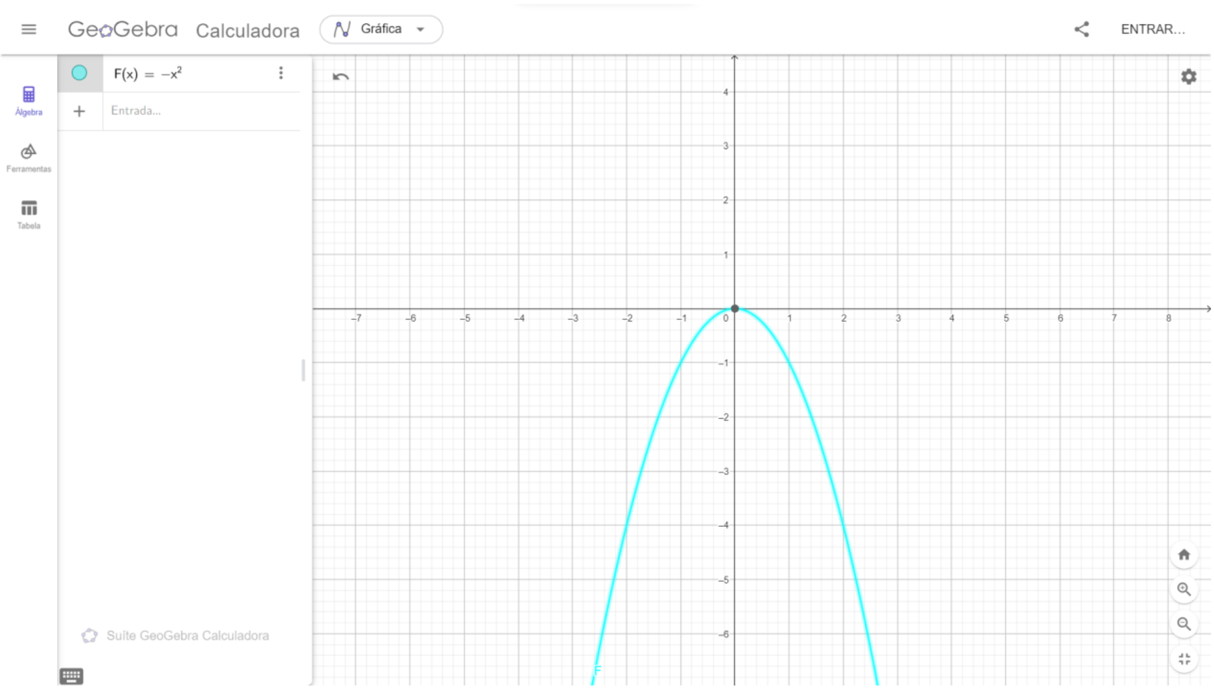
(a) Qual a raiz da função $f(x)$?

(b) Qual o conjunto imagem da função $f(x)$?

(c) Qual o ponto onde está localizado o vértice da parábola?

(d) Qual o sentido da concavidade da parábola?

Figura 6 - Representação gráfica da construção da função quadrática 6



Fonte: Do Autor (2023)

Diante do que foi observado na figura 6 o aluno poderá observar que o conjunto imagem $Im = [-\infty, 0]$, onde a raiz é o zero, que a concavidade é voltada para cima e que o vértice da parábola está localizado na origem do plano cartesiano, ou seja, no ponto (0,0). O docente pode falar que o eixo de simetria da parábola é o eixo y.

3. Desenhe um esboço gráfico da função definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = 2x^2$ e $h(x) = 4x^2$ e responda:

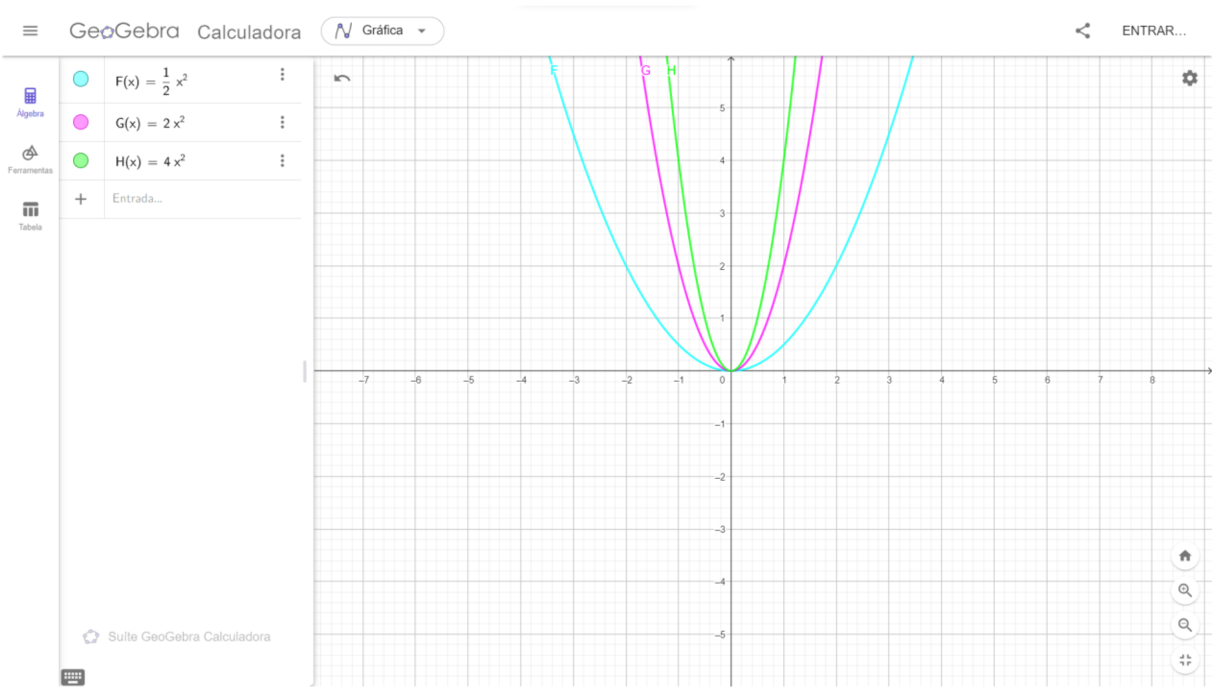
(a) Quais as raízes das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$?

(b) Quais os conjuntos imagens das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$?

(c) O vértice da parábola de cada função sofreu alguma alteração?

(d) Qual alteração foi percebida nas funções $g(x)$ e $h(x)$ em relação a função $f(x)$ no gráfico?

Figura 7 - Representação gráfica da construção da função quadrática 7



Fonte: Do Autor (2023)

O discente poderá observar a figura 7 que o conjunto imagem, a raiz, a concavidade e vértice não sofreram alterações, porém o gráfico da função $g(x)$ e $h(x)$ tem a parábola mais próxima do eixo y, já o gráfico da função $f(x)$ tem a parábola mais distante do eixo y.

4. Desenhe um esboço gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + 2x - 3$ e responda:

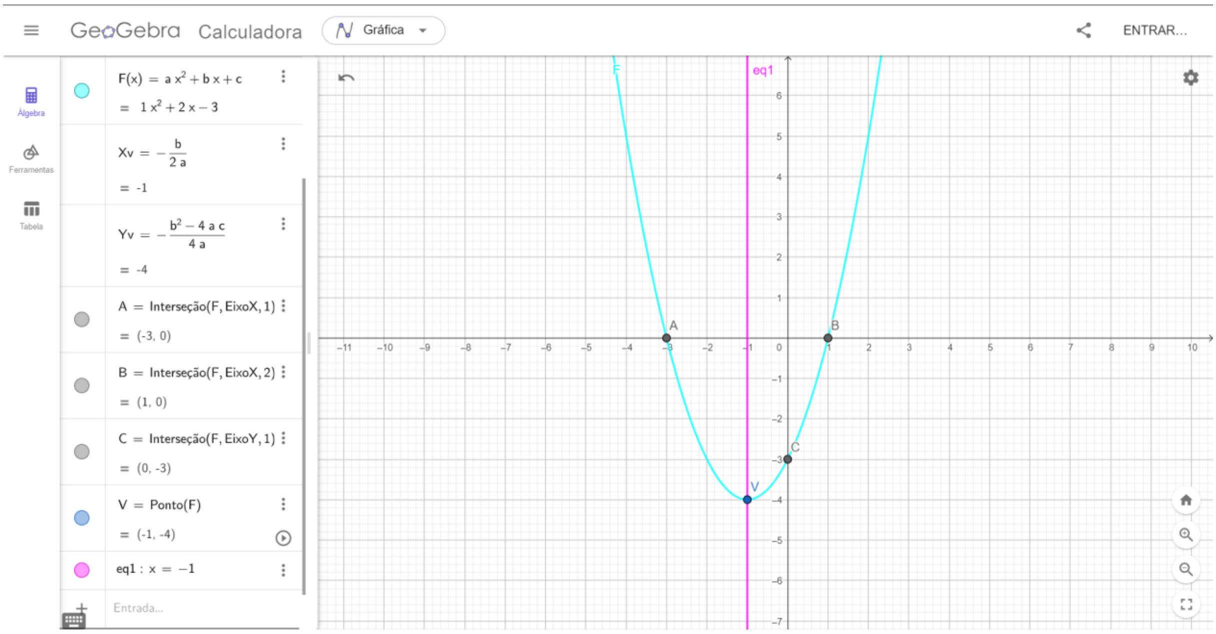
(a) Qual a raiz da função $f(x)$?

(b) Qual o conjunto imagem da função $f(x)$?

(c) Qual o ponto onde está localizado o vértice da parábola?

(d) Qual o sentido da concavidade da parábola?

Figura 8 - Representação gráfica da construção da função quadrática 8



Fonte: Do Autor (2023)

Diante do que foi observado na figura 3.8 o aluno poderá observar que o conjunto imagem $Im = [-4, +\infty)$, onde existem duas raízes -3 e 1, que a concavidade da função é voltada para cima e que o vértice da parábola está localizado no ponto $(-1, -4)$ do plano cartesiano.

5. Desenhe um esboço gráfico da função definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ e responda:

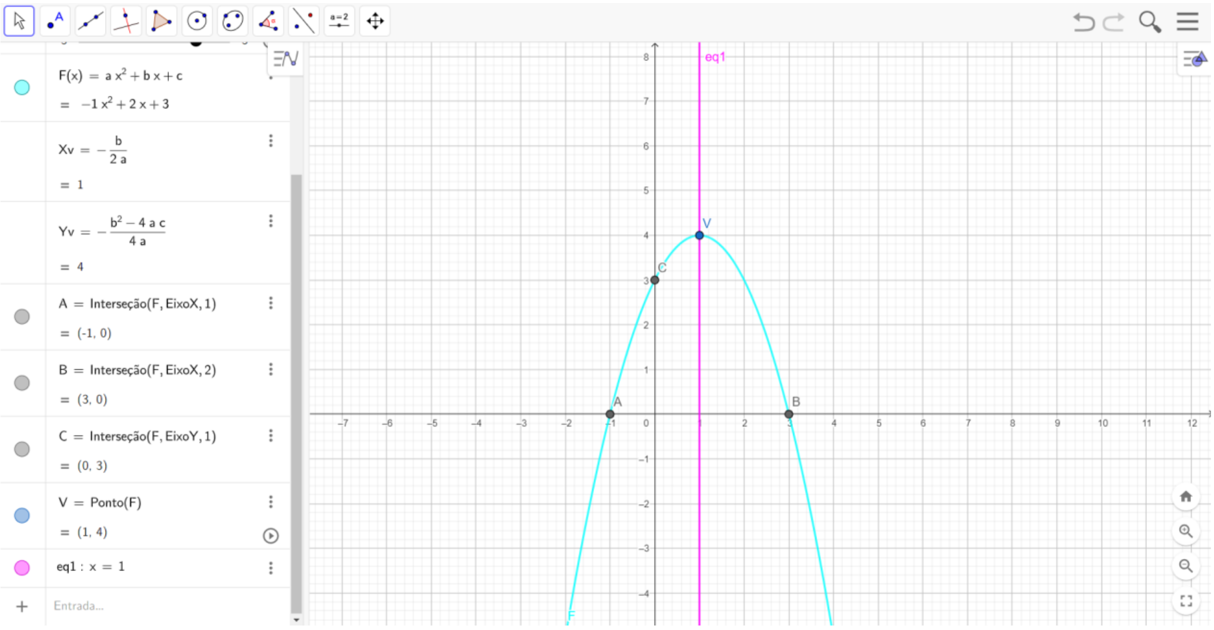
(a) Qual a raiz da função $f(x)$?

(b) Qual o conjunto imagem da função $f(x)$?

(c) Qual o ponto onde está localizado o vértice da parábola?

(d) Qual o sentido da concavidade da parábola?

Figura 9 - Representação gráfica da construção da função quadrática 9



Fonte: Do Autor (2023)

Diante do que foi observado na figura 3.9 o aluno poderá observar que o conjunto imagem $Im = (-\infty, 4]$, onde existem duas raízes -1 e 3, que a concavidade da função é voltada para baixo e que o vértice da parábola está localizado no ponto $(1,4)$ do plano cartesiano.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O intuito desse trabalho é incentivar mais professores a fazerem uso da tecnologia na sala de aula, através do software GeoGebra, pois é uma ferramenta dinâmica para todos os níveis de ensino, onde, nos traz grandes contribuições, possibilitando trabalho em laboratórios, pesquisas, investigação, criação de construções Matemáticas. As atividades desenvolvidas apresentarão rendimento benéfico, tanto para o aluno quanto para o professor, abrindo uma porta à melhor compreensão da parte teórica facilitando a fixação do aprendizado.

Conforme a BNCC, o Ensino da Matemática no ensino médio visa a construção de uma matemática voltada para a realidade, dessa forma, uma possibilidade para estudo é o desenvolvimento através das construções das funções no GeoGebra.

Portanto, a educação é um campo de práticas e reflexões bastante amplas, ao pensar no futuro da educação é globalizar a cada dia o interesse das novas gerações e adaptando novas maneiras de transmitir o conhecimento.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Ministério de Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

CARL B. Boyer **- História da Matemática**-Edgar Blucher _ EDUSP (1974).

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2 ed., Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

GeoGebra. Disponível em: < https://www.geogebra.org/ > Acesso em: 02, jul. 2023.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1 - Conjuntos e Funções**. 7. ed. São Paulo - SP: Atual, 1995.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais - Coleção PROFMAT**. 1. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2013.

REGO, T. C. **Vygotsky - Uma Perspectiva Histórico-Cultural da Educação**. 1. ed. Petrópolis - RJ: Vozes, 1995.

ROCHA, J. M. X. **Tópicos de Geometria Analítica Plana com o software geogebra sob o modelo de sala de aula invertida**. 2019. 93 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) — Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia UESB, Vitória da Conquista, 2019.

RODRIGUES, A. M. M**. Por uma filosofia da tecnologia**. In: GRINSPUN, M. P. S. Z. (org.). Educação tecnológica: desafios e perspectivas. São Paulo: Cortez, 2001, p.75-129.

SILVA, L. G. **O uso do Geogebra no trabalho pedagógico de desenvolvimento do raciocício proporcional**. 2019. 144 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) — Universidade Federal da Paraíba UFPB, João Pessoa, 2019.

SIQUEIRA, D. N. d.; CAETANO, J. J. O uso do geogebra no ensino de funções no ensino médio. **Governo do Estado do Paraná- Secretaria de Educação**, v. 1, n. ISBN: 978-85-8015-093-3, p. Cadernos PDE, 2016. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unicentro_dannunesdesiqueira.pdf>

ZABALA, A. A Prática Educativa: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.